

ج ٢

القاضي

في الرياضيات

الأدبي • التوجيهي • الشرعي

الأردني

معادلة الانحدار

- أسئلة مبسطة بطريقة كلامية
- إجابات أسئلة الكتاب
- أسئلة الونزارة وحلولها
- أمثلة خارجية وأسئلة محلولة
- أسئلة مقترحة

دار الكتب الثاني
الأردن - أربد



اعداد
محمد مصطفى

معادلة الانحدار

Regression

معادلة الانحدار : هي علاقته خطيه تربط بين المتغيرين س،ص وتكتب على الصورة
ص = أس + ب ويسمى س المتغير المستقل ، ص يسمى المتغير التابع وقيمة أ ، ب يعتمد على
المقاييس الاحصائيه .

معادلة الانحدار للتنبؤ يقيم ص بدلالة س هي :

$$\hat{ص} = \frac{\sum_{r=1}^n (س_r - \bar{س})(ص_r - \bar{ص})}{\sum_{r=1}^n (س_r - \bar{س})^2} = أ$$

حيث $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ يمثلان الوسط الحسابي لقيم المتغيرين س ، ص على الترتيب
ب = $\bar{ص} - أ \bar{س}$

* الخطأ في التنبؤ = العلامه الحقيقيه - العلامه المتنبأ بها

مثال : يبين الجدول التالي علامات ٥ طلاب في مبحثين س ، ص
(١) اكتب معادلة الانحدار

(٢) هل يوجد علامه بين قيمة س ، ص

اسم الطالب	أ	ب	ج	د	هـ
س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٢	١٠	٨	٦	٤

$\bar{س}$ يساوي مجموع قيم س مقسوما عل عددها، ص يساوي مجموع قيم ص مقسوما عل عددها

$$\bar{س} = \frac{١+٢+٣+٤+٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣ ، \bar{ص} = \frac{١٢+١٠+٨+٦+٤}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

سـ	صـ	(سـ - صـ)	صـ - صـ	(سـ - صـ) ²	(صـ - صـ)(سـ - صـ)
١	١٢	٢-	٤	٤	٨-
٢	١٠	١-	٢	١	٢-
٣	٨	٠	٠	٠	٠
٤	٦	١	٢-	١	٢-
٥	٤	٢	٤-	٤	٨-
١٥	٤٠	٠	٠	١٠	٢٠-
مجموع					

$$أ = \frac{\sum (س - ص)}{\sum (س - ص)^2} = \frac{٢٠ -}{١٠} = ٢ -$$

$$ب = \overline{ص} - \overline{س}$$

$$ب = ١٤ = ٦ + ٨ = ٣ \times (٢ -) - ٨ =$$

$$ص = ٨ = ٢ - + ١٤ =$$

٢) من الجدول الذي يبين شكل الانتشار يوجد علاقة عكسية قوية

مثال : يبين الجدول الاتي عدد حوادث السير في الفترة (٢٠٠٠ - ٢٠٠٤)

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
رقم السنة (س)	١	٢	٣	٤	٥
عدد الحوادث (ص)	٩٥	٩٦	٩٤	١١٧	١٣٣

جد مايلي (١) معادلة الانحدار للتنبؤ بقيمة ص

$$\text{الحل: } \overline{س} = \frac{١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥}{٥} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

$$\overline{ص} = \frac{٩٥ + ٩٦ + ٩٤ + ١١٧ + ١٣٣}{٥} = \frac{٥٣٥}{٥} = ١٠٧$$

سر	ص _r	(س _r - س̄)	ص _r - ص̄	(س _r - س̄) ²	(ص _r - ص̄)(س _r - س̄)
١	٩٥	٢-	١٢-	٤	٢٤
٢	٩٦	١-	١١-	١	١١
٣	٩٤	٠	١٣-	٠	٠
٤	١١٧	١	١٠	١	١٠
٥	١٣٣	٢	٢٦	٤	٥٢
١٥	٥٣٥	٠	٠	١٠	٩٧
					مجموع

$$أ = \frac{٩٧}{١٠} = ٩.٧، ب = ١٠.٧ - ٣ \times ٩.٧ - ٢٩.١ = ٧٧.٩$$

معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص هي $ص^٨ = ٩.٧س + ٧٧.٩$

تدريب : يبين الجدول معامل الذكاء ومعدل التحصيل لستة طلاب .

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
معامل الذكاء (س)	٩٥	١٠٦	١١٩	١١٣	١١٥	١٢٤
معدل التحصيل (ص)	٥٣	٦٢	٨٧	٧٥	٨٦	٩٣

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

٢) قَدِّر معدل التحصيل المتنبأ به لطلاب معامل ذكائه ١١٠

سر	ص _r	(س _r - س̄)	ص _r - ص̄	(س _r - س̄) ²	(ص _r - ص̄)(س _r - س̄)
٩٥	٥٣	١٧-	٢٣-	٢٨٩	٣٩١
١٠٦	٦٢	٦-	١٤-	٣٦	٨٤
١١٩	٨٧	٧	١١	٤٩	٧٧
١١٣	٧٥	١	١-	١	١-
١١٥	٨٦	٣	١٠	٩	٣٠
١٢٤	٩٣	١٢	١٧	١٤٤	٢٠٤
٦٧٢	٤٥٦	٠	٠	٥٢٨	٧٨٥
					مجموع

$$\bar{ص} = \frac{672}{6} = 112, \bar{س} = \frac{456}{6} = 76$$

$$أ = \frac{785}{528} = 1.49, ب = 112 \times 1.49 - 76 = 90.5 - 166.5 = -76$$

$$ص^{\wedge} = 90.5 - 110 \times 1.49 = 73.4, ص + ب = 73.4 - 76 = -2.6$$

تمارين ومسائل

١) يبين الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحثي التاريخ والجغرافيا ، حيث النهاية العظمى للعلامة (١٠) . جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س .

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامته في التاريخ (س)	١١	١٢	١٠	١٣	١٤
علامته في الجغرافيا (ص)	١٢	١٦	١٠	١٤	١٨

س	ص	(س- $\bar{س}$)	(ص- $\bar{ص}$)	(س- $\bar{س}$) ^٢	(ص- $\bar{ص}$)(س- $\bar{س}$)
١١	١٢	-١	-٢	١	٢
١٢	١٦	٠	٢	٠	٠
١٠	١٠	-٢	-٤	٤	٨
١٣	١٤	١	٠	١	٠
١٤	١٨	٢	٤	٤	٨
٦٠	٧٠	٠	٠	١٠	١٨

مجموع

$$\bar{س} = \frac{60}{5} = 12, \bar{ص} = \frac{70}{5} = 14$$

$$أ = \frac{18}{10} = 1.8, ب = 12 \times 1.8 - 14 = 21.6 - 14 = 7.6$$

$$ص^{\wedge} = 1.8 - 7.6 = -5.8$$

٣) إذا كان س ، ص يمثلان رأس مال الشركة وأرباحها مقدره بالآلاف الدنانير على الترتيب وجمعت البيانات الآتية لخمس شركات :

$$\bar{س} = 10, \bar{ص} = 12, \sum (س- $\bar{س}$) = 1000$$

$$\sum (س- $\bar{س}$)(ص- $\bar{ص}$) = 80$$

أ) جد معادلة الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س .

الحل: أ) $11.2 = 0.8 - 12 = 10 \times 0.8 - 12 = \text{ب}$ ، $0.8 = \frac{80}{1000} = \text{أ}$
ب) ص[^] = أس + ب

أحمد القضاة ١٤٥٦
Mq. ٧٩٥٥٩١٤٥٦



إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين
الأدبي، والفندقي والسياحي

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين الأدبي، والفندقي والسياحي

٢٠١٨ هـ / ١٤٣٩ م

ISBN:978-9957-84-782-1



9 789957 847821

النور
مطبعة

لاحظ صاحب محل لبيع الأجهزة الكهربائية وجود علاقة بين عدد ساعات العمل وعدد الأجهزة المباعة كالآتي:

عدد ساعات العمل	١	٢	٤	٥	٨
عدد الأجهزة المباعة	٣	٥	٧	٨	١٢

بناءً على المعطيات السابقة، هل يستطيع صاحب المحل أن يتنبأ بعدد الأجهزة المباعة إذا عمل مدة ١٠ ساعات؟

تعرفت سابقاً كيف يمكن رسم شكل الانتشار بين متغيرين، وأن النقط (س، ص) التي تربطها علاقة خطية تتجمع حول خط مستقيم يمر بعدد منها، ويتوسط النقط الباقية التي تتوزع على جانبي الخط المستقيم، وأن النقط التي لا تقع على الخط المستقيم تُسبب خطأً في التنبؤ يُعبر عنه بالصورة الآتية:

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

وإذا رُمز إلى القيمة الحقيقية بالرمز ص_ر، وإلى القيمة المتنبأ بها بالرمز ص^ر، فإن

الخطأ في التنبؤ = ص_ر - ص^ر

يمكن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بمعادلة الخط المستقيم الآتية: ص^ر = أ س + ب، وتُعرف هذه

المعادلة باسم خط الانحدار، حيث:

$$A = \frac{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})^2}$$

$$B = \bar{v} - A \bar{s}$$

يمكن حل المسألة الواردة في بداية الدرس باتباع الخطوات الآتية:

$$\bar{x} = \frac{20}{5} = \frac{(1+5+4+2+1)}{5} = \bar{x} \text{، وهو } \bar{x} \text{، وهو } \bar{x}$$

$$\bar{y} = \frac{35}{5} = \frac{(12+8+7+5+3)}{5} = \bar{y} \text{، وهو } \bar{y}$$

(٣) إنشاء الجدول الآتي:

$(\bar{x} - x_k)^2$	$(\bar{x} - x_k)(\bar{y} - y_k)$	$\bar{y} - y_k$	$\bar{x} - x_k$	y_k	x_k
٩	١٢	٤-	٣-	٣	١
٤	٤	٢-	٢-	٥	٢
٠	٠	٠	٠	٧	٤
١	١	١	١	٨	٥
١٦	٢٠	٥	٤	١٢	٨
٣٠	٣٧	٠	٠		المجموع

$$\frac{\sum_{k=1}^5 (\bar{x} - x_k)(\bar{y} - y_k)}{\sum_{k=1}^5 (\bar{x} - x_k)^2} = \text{إيجاد قيمة أ}$$

$$١,٢ = \frac{٣٧}{٣٠} =$$

(٥) إيجاد قيمة ب = $\bar{y} - \bar{x}$

$$٢,٢ = ٤ \times ١,٢ - ٧ =$$

(٦) معادلة خط الانحدار $\hat{y} = a + bx$

$$\hat{y} = ١,٢ + ٢,٢x$$

والآن، إذا عمل صاحب المحل مدة ١٠ ساعات $\leftarrow \hat{y} = ١٠ \times ١,٢ + ٢,٢ = ١٤,٢$ ، فإن:

$$\hat{y} = ١٤,٢ = ١٤ + ٠,٢$$

∴ يمكن أن يبيع صاحب المحل ١٤ جهازاً إذا عمل مدة ١٠ ساعات.

الجدول الآتي يبين علامات خمسة طلاب في امتحان لمبثني الجغرافيا والتاريخ، علامته القصوى ١٠:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة الجغرافيا (س)	١	٥	٦	٨	١٠
علامة التاريخ (ص)	٦	٧	٨	٩	١٠

- (١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعلامة مبحث التاريخ إذا علمت علامة مبحث الجغرافيا.
 (٢) قدر علامة طالب في مبحث التاريخ إذا كانت علامته في مبحث الجغرافيا ٧
 (٣) جد الخطأ في التنبؤ بعلامة طالب في مبحث التاريخ إذا كانت علامته في مبحث الجغرافيا ٥

الحل

(١) لإيجاد معادلة خط الانحدار:

$$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = \frac{(١٠+٨+٦+٥+١)}{٥} = \bar{س} \text{، وهو س، و هو س}$$

$$\bar{ص} = \frac{٤٠}{٥} = \frac{(١٠+٩+٨+٧+٦)}{٥} = \bar{ص} \text{، وهو ص، وهو ص}$$

أنشئ الجدول الآتي:

س _ك	ص _ك	س _ك - $\bar{س}$	ص _ك - $\bar{ص}$	(س _ك - $\bar{س}$)(ص _ك - $\bar{ص}$)	(س _ك - $\bar{س}$) ^٢
١	٦	٥ -	٢ -	١٠	٢٥
٥	٧	١ -	١ -	١	١
٦	٨	٠	٠	٠	٠
٨	٩	٢	١	٢	٤
١٠	١٠	٤	٢	٨	١٦
المجموع	٠	٠	٠	٢١	٤٦

$$\frac{\sum_{k=1}^5 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sum_{k=1}^5 (s_k - \bar{s})^2} = \text{جد قيمة أ}$$

$$0,46 = \frac{21}{46} =$$

جد قيمة ب = $\bar{v} - \bar{s}$

$$0,2 = 6 \times 0,46 - 8 =$$

∴ معادلة خط الانحدار $\hat{v} = \bar{s} + b$ هي:

$$\hat{v} = 0,46s + 0,2$$

(٢) إذا كانت علامة الطالب في مبحث الجغرافيا ٧، فإن $s = 7$

$$\therefore \hat{v} = 0,46 \times 7 + 0,2 = 3,42 \approx 3$$

(٣) الطالب الذي حصل على علامة ٥ في مبحث الجغرافيا كانت علامته الحقيقية في مبحث التاريخ ٧ (انظر الجدول ١).

العلامة المتنبأ بها في مبحث التاريخ هي: $\hat{v} = 0,46 \times 5 + 0,2 = 2,5$

$$\therefore \text{الخطأ في التنبؤ} = v_r - \hat{v} = 7 - 2,5 = 4,5$$

تدريب ١

الجدول الآتي يبين معدل أربعة طلاب في امتحانات الثانوية العامة والجامعة:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤
معدل الثانوية العامة (س)	٦٥	٧٠	٨٠	٨٥
معدل الجامعة (ص)	٦٠	٦٠	٧٠	٩٠

أجب عما يأتي:

(١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الجامعة إذا عُلِمَ معدله في الثانوية العامة.

(٢) تنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٨٨

(٣) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٧٠

مثال (٢)

إذا كان s ، v متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٨، $\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s}) = 15$ ،

$\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v}) = 60$ ، $\bar{s} = 12$ ، $\bar{v} = 50$ ، فجد معادلة خط الانحدار
للتنبؤ بقيم v إذا علمت قيم s .

الحل

$$\frac{\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sum_{k=1}^8 (s_k - \bar{s})} = \text{جد قيمة أ}$$

$$\epsilon = \frac{60}{15} =$$

$$\text{جد قيمة ب} = \bar{v} - \bar{s} =$$

$$2 = 12 \times \epsilon - 50 =$$

∴ معادلة خط الانحدار: $\hat{v} = \bar{s} + \epsilon$

$$\hat{v} = 2 + \epsilon$$

تدريب ٢

إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (s) وعدد الأخطاء

التي يرتكبها الموظف في هذا اليوم (v) هي: $\hat{v} = 6 + 0.1s + 1$ ، فأجب عما يأتي:

(١) تنبأ بعدد الأخطاء التي سيرتكبها موظف يعمل مدة ١٠ ساعات يوميًا.

(٢) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ١٥ ساعة يوميًا هي ٦ أخطاء، فجد الخطأ

في التنبؤ.