الرياضيات

التوجيهي العلمي

الفصل الدراسي الثاني

٢٠١٩

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

الجزء الاول

المستوى الرابع

اعداد المعلم:

أحمد ابو مويس

0796023446

الدرس الاول: التكامل غير المحدود:

تذكر

الاقتران	المشتقة
$\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ ، جـ : ثابت	$\text{ق}'(\text{س}) = ٠$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن : عدد نسبي	$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$
$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ ، أ : ثابت	$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ}}{\text{س}^٢}$
$\text{ق}(\text{س}) = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$	$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١}\,\text{هـ}'(\text{س})$
$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{ل}(\text{س})}$	$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{ل}(\text{س})}}$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$	$\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$	$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$	$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^٢\text{س}$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظتاس}$	$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{قتا}^٢\text{س}$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{قاس}$	$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قاس}\,\text{ظاس}$
$\text{ق}(\text{س}) = \text{قتاس}$	$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{قتاس}\,\text{ظتاس}$

قاعدة: $\int \text{أ}\ \text{ء س} = \text{أس} + \text{جـ}$

، حيث (أ) ثابت ، (جـ) ثابت التكامل

$\int \text{الثابت}\ \text{ء س} = (\text{الثابت})\ \text{س} + \text{جـ}$

مثال (١): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int ٣\ \text{ء س}$

الحل:

$\int ٣\ \text{ء س} = ٣\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{١}{٥}\ \text{ء س}$

الحل:

$\int \frac{١}{٥}\ \text{ء س} = \frac{١}{٥}\text{س} + \text{جـ}$

٣) $\int \sqrt{٧}\ \text{ء س}$

الحل:

$\int \sqrt{٧}\ \text{ء س} = \sqrt{٧}\text{س} + \text{جـ}$

٤) $\int -\ \text{ء س}$

الحل:

$\int -\ \text{ء س} = -\text{س} + \text{جـ}$

٥) $\int ٠\ \text{ء س}$

الحل:

$\int ٠\ \text{ء س} = \text{جـ}$

٦) $\int ٥\text{أ}\ \text{ء س}$ ، (أ) ثابت

الحل:

$\int ٥\text{أ}\ \text{ء س} = ٥\text{أس} + \text{جـ}$

٧) $\int ٣\pi \, \text{ء}\text{ص}$

الحل:

$$\int ٣\pi \, \text{ء}\text{ص} = ٣\pi\text{ص} + \text{جـ}$$

٨) $\int \frac{-١}{٣} \, \text{ء}\text{م}$

الحل:

$$\int \frac{-١}{٣} \, \text{ء}\text{م} = \frac{-١}{٣}\text{م} + \text{جـ}$$

٩) $\int -٢\text{م} \, \text{ء}\text{ص}$ ، (م) ثابت

الحل:

$$\int -٢\text{م} \, \text{ء}\text{ص} = -٢\text{م}\text{ص} + \text{جـ}$$

١٠) $\int (٢\text{أ}+٣) \, \text{ء}\text{س}$ ، (أ) ثابت

الحل:

$$\int (٢\text{أ}+٣) \, \text{ء}\text{س} = (٢\text{أ}+٣)\text{س} + \text{جـ}$$

قاعدة: $\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{ء}\text{س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ} ، \text{ن} \neq -١$

مثال(٢): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{س} \, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \text{س} \, \text{ء}\text{س} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

٢) $\int \text{س}^{٥} \, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \text{س}^{٥} \, \text{ء}\text{س} = \frac{١}{٦}\text{س}^{٦} + \text{جـ}$$

٣) $\int ٣\text{س}^{٢} \, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int ٣\text{س}^{٢} \, \text{ء}\text{س} = \text{س}^{٣} + \text{جـ}$$

٤) $\int \frac{\sqrt{٢}\text{س}}{٣} \, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \frac{\sqrt{٢}\text{س}}{٣} \, \text{ء}\text{س} = \frac{\sqrt{٢}}{٦}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

٥) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \frac{١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء}\text{س} = \int \text{س}^{-٢} \, \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ} = \frac{-١}{\text{س}} + \text{جـ}$$

٦) $\int \sqrt{\text{س}} \, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \sqrt{\text{س}} \, \text{ء}\text{س} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}} \, \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

٧) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{\text{س}^{3}}}\,\text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{\text{س}^{3}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{-3}{5}}\,\text{دس} = \frac{5}{2}\,\text{س}^{\frac{2}{5}} + \text{جـ}$$

---

٨) $\int -6\text{س}^{-7}\,\text{دس}$

الحل:

$$= \text{س}^{-6} + \text{جـ} = \frac{1}{\text{س}^{6}} + \text{جـ}$$

---

٩) $\int 2\text{س}^{-5}\,\text{دس}$

الحل:

$$\int 2\text{س}^{-5}\,\text{دس} = \frac{2}{-4}\,\text{س}^{-4} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{2\text{س}^{4}} + \text{جـ}$$

مثال(٣): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int (3\text{س}^{2} + 4)\,\text{دس}$

الحل:

$$\int (3\text{س}^{2} + 4)\,\text{دس} = \text{س}^{3} + 4\text{س} + \text{جـ}$$

---

٢) $\int (6\text{س}^{4} - 5\text{س} + 8)\,\text{دس}$

الحل:

$$\int (6\text{س}^{4} - 5\text{س} + 8)\,\text{دس}$$

$$= \frac{6}{5}\,\text{س}^{5} - \frac{5}{2}\,\text{س}^{2} + 8\text{س} + \text{جـ}$$

٣) $\int (4\text{س}^{3} - 2\text{س}^{-3} + \text{أ})\,\text{دس}$ ، (أ) ثابت ؟؟؟

الحل:

$$= \frac{4}{4}\,\text{س}^{3} - \frac{2}{-2}\,\text{س}^{-2} + \text{أس} + \text{جـ}$$

$$= \text{س}^{3} + \frac{1}{\text{س}^{2}} + \text{أس} + \text{جـ}$$

---

٤) $\int (6\text{س}^{-4} + 3\text{أس}^{2} - \text{ب س} + \sqrt{2})\,\text{دس}$ ، (أ) ثابت

الحل:

$$= \frac{6}{-3}\,\text{س}^{-3} + \frac{3\text{أ}}{3}\,\text{س}^{3} - \frac{\text{ب}}{2}\,\text{س}^{2} + \sqrt{2}\,\text{س} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-2}{\text{س}^{3}} + \text{أس}^{3} - \frac{\text{ب}}{2}\,\text{س}^{2} + \sqrt{2}\,\text{س} + \text{جـ}$$

---

٥) $\int (3\text{ك} - \frac{5}{\text{ك}} + 6)\,\text{دس}$ ، (ك) ثابت

الحل:

$$= 3\text{ك س} - \frac{5}{\text{ك}}\,\text{س} + 6\text{س} + \text{جـ}$$

قاعدة: $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس}$ ، $\text{ن} \neq -1$

$$= \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ} \times (\text{ن} + 1)} + \text{جـ}$$

مثال(٤): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int (5\text{س} + 1)^{3}\,\text{دس}$

الحل:

$$= \frac{(5\text{س} + 1)^{4}}{5 \times 4} + \text{جـ} = \frac{(5\text{س} + 1)^{4}}{20} + \text{جـ}$$

---

٢) $\int (1 - 2\text{س})^{6}\,\text{دس}$

الحل:

$$= \frac{(1 - 2\text{س})^{7}}{-2 \times 7} + \text{جـ} = \frac{(1 - 2\text{س})^{7}}{-14} + \text{جـ}$$

٣) $\int ٢(٣س+٢)^{٤}\ ءس$

الحل:

$$٢\times\frac{(٣س+٢)^{٥}}{٣\times٥}+جـ=\frac{٢(٣س+٢)^{٥}}{١٥}+جـ$$

---

٤) $\int (س+١)^{-٥}\ ءس$

الحل:

$$=\frac{(س+١)^{-٤}}{-٤}+جـ=\frac{-١}{٤(س+١)^{٤}}+جـ$$

---

٥) $\int \frac{١}{(٤س+٣)^{٣}}\ ءس$

الحل:

$$=\int (٤س+٣)^{-٣}\ ءس$$

$$=\frac{(٤س+٣)^{-٢}}{٤\times-٢}+جـ=\frac{-١}{٨(٤س+٣)^{٢}}+جـ$$

---

٦) $\int ٤\left(١-\frac{س}{٢}\right)^{٣}\ ءس$

الحل:

$$=\frac{٤\left(١-\frac{س}{٢}\right)^{٤}}{٤\times\frac{-١}{٢}}+جـ=-٢\left(١-\frac{س}{٢}\right)^{٤}+جـ$$

مثال(٥): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{٣\ ءس}{(٢س-١)^{٥}}$

الحل:

$$\int ٣(٢س-١)^{-٥}\ ءس$$

$$=٣\times\frac{(٢س-١)^{-٤}}{٢\times-٤}+جـ$$

$$=\frac{-٣}{٨(٢س-١)^{٤}}+جـ$$

٢) $\int (س^{٢}+٤س+٤)^{٣}\ ءس$

الحل:

$$=\int ((س+٢)(س+٢))^{٣}\ ءس$$

$$=\int ((س+٢)^{٢})^{٣}\ ءس$$

$$=\int (س+٢)^{٦}\ ءس=\frac{١}{٧}(س+٢)^{٧}+جـ$$

---

٣) $\int \frac{٤}{س^{٢}-٦س+٩}\ ءس$

الحل:

$$=\int \frac{٤}{(س-٣)(س-٣)}\ ءس$$

$$=\int \frac{٤}{(س-٣)^{٢}}\ ءس=\int ٤(س-٣)^{-٢}\ ءس$$

$$=\frac{٤(س-٣)^{-١}}{-١}+جـ=\frac{-٤}{(س-٣)}+جـ$$

---

٤) $\int ٢\left(س^{٢}-س+\frac{١}{٤}\right)^{٤}\ ءس$

الحل:

$$=\int ٢\left(\left(س-\frac{١}{٢}\right)\left(س-\frac{١}{٢}\right)\right)^{٤}\ ءس$$

$$=\int ٢\left(\left(س-\frac{١}{٢}\right)^{٢}\right)^{٤}\ ءس$$

$$=\int ٢\left(س-\frac{١}{٢}\right)^{٨}\ ءس$$

$$=٢\times\frac{\left(س-\frac{١}{٢}\right)^{٩}}{٩}+جـ$$

$$=\frac{٢}{٩}\left(س-\frac{١}{٢}\right)^{٩}+جـ$$

٥) $\int \frac{دس}{(٤س^٢ + ٢٠س + ٢٥)^٢}$

الحل:

$= \int \frac{دس}{((٢س+٥)(٢س+٥))^٢}$

$= \int \frac{دس}{((٢س+٥)^٢)^٢} = \int \frac{دس}{(٢س+٥)^٤}$

$= \int (٢س+٥)^{-٤} دس = \frac{(٢س+٥)^{-٣}}{٢\times -٣} + جـ$

$= \frac{-١}{٦(٢س+٥)^٣} + جـ$

---

٦) $\int \frac{٥دس}{(س^٢ + ٢\sqrt{٣}س + ٣)}$

الحل:

$= \int \frac{٥دس}{(س+\sqrt{٣})(س+\sqrt{٣})}$

$= \int \frac{٥دس}{(س+\sqrt{٣})^٢} = \int ٥(س+\sqrt{٣})^{-٢} دس$

$= ٥ \times \frac{(س+\sqrt{٣})^{-١}}{-١} + جـ = \frac{-٥}{س+\sqrt{٣}} + جـ$

٧) $\int ٣(٢س^٢ - ٨س + ٨)^٣ دس$

الحل:

$= \int ٣(٢(س^٢ - ٤س + ٤)^٣) دس$

$= \int ٢٤((س-٢)(س-٢))^٣ دس$

$= \int ٢٤((س-٢)^٢)^٣ دس$

$= \int ٢٤(س-٢)^٦ دس$

$= ٢٤ \times \frac{(س-٢)^٧}{٧} + جـ$

$= \frac{٢٤}{٧}(س-٢)^٧ + جـ$

مثال(٦): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int س^{\frac{٣}{٢}} دس$

الحل:

$= \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

---

٢) $\int س^{\frac{-١}{٥}} دس$

الحل:

$= \frac{٥}{٤} س^{\frac{٤}{٥}} + جـ$

---

٣) $\int ٣س^{\frac{-٢}{٣}} دس$

الحل:

$= ٣ \times ٣ \times س^{\frac{١}{٣}} + جـ = ٩س^{\frac{١}{٣}} + جـ$

٤) $\int س^{\frac{ن+٣}{٥}}\, ءس$ ، (ن) ثابت $ن \neq -٨$ ، $ن \neq -٣$

الحل:

$$= \frac{س^{\frac{ن+٣}{٥}+١}}{\frac{ن+٣}{٥}+١} + جـ$$

$$= \left(\frac{٥}{ن+٣}+١\right) س^{\frac{ن+٣}{٥}+١} + جـ$$

---

٥) $\int \sqrt{س}\, ءس$

الحل:

$$= \int (س)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$$

$$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + جـ$$

---

٦) $\int \sqrt[٥]{س^{٣}}\, ءس$

الحل:

$$= \int (س)^{\frac{٣}{٥}}\, ءس$$

$$= \frac{٥}{٨} س^{\frac{٨}{٥}} + جـ = \frac{٥}{٨}\sqrt[٥]{س^{٨}} + جـ$$

---

٧) $\int \sqrt{٤-٣س}\, ءس$

الحل:

$$= \int (٤-٣س)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$$

$$= \frac{٢}{-٣\times٣}(٤-٣س)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{-٢}{٩}\sqrt{(٤-٣س)^{٣}} + جـ$$

٨) $\int \frac{ءس}{\sqrt[٣]{س^{٢}+٤س+٤}}$

الحل:

$$= \int (س^{٢}+٤س+٤)^{\frac{-١}{٣}}\, ءس$$

$$= \int ((س+٢)(س+٢))^{\frac{-١}{٣}}\, ءس$$

$$= \int ((س+٢)^{٢})^{\frac{-١}{٣}}\, ءس$$

$$= \int (س+٢)^{\frac{-٢}{٣}}\, ءس$$

$$= ٣(س+٢)^{\frac{١}{٣}} + جـ$$

$$= ٣\sqrt[٣]{س+٢} + جـ$$

مثال(٧): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int س^{٣}(٦س^{٢}-٤)\, ءس$

الحل:

$$= \int (٦س^{٥}-٤س^{٣})\, ءس$$

$$= س^{٦} - س^{٤} + جـ$$

---

٢) $\int س^{-٢}(٣س^{٤}+١)\, ءس$

الحل:

$$= \int (٣س^{٢}+س^{-٢})\, ءس$$

$$= \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{س^{-١}}{-١} + جـ$$

$$= س^{٣} - \frac{١}{س} + جـ$$

---

٣) $\int (١+٤ص)(ص+٢)\, ءص$

الحل:

$$= \int (ص+٢+٤ص^{٢}+٨ص)\, ءص$$

$$= \int (٤ص^{٢}+٩ص+٢)\, ءص$$

$$= \frac{٤}{٣}ص^{٣} + \frac{٩}{٢}ص^{٢} + ٢ص + جـ$$

٤) $\int (س^{٢}+٢)^{٢}\, ءس$

الحل:

$$= \int (س^{٤}+٤س^{٢}+٤)\, ءس$$

$$= \frac{١}{٥}س^{٥} + \frac{٤}{٣}س^{٣} + ٤س + جـ$$

---

٥) $\int (ص^{٣}+٣)^{٢}\, ءص$

الحل:

$$= \int (ص^{٦}+٦ص^{٣}+٩)\, ءص$$

$$= \frac{١}{٧}ص^{٧} + \frac{٣}{٢}ص^{٤} + ٩ص + جـ$$

---

٦) $\int س^{٢}(س-٣)^{٢}\, ءس$

الحل:

$$= \int س^{٢}(س^{٢}-٦س+٩)\, ءس$$

$$= \int (س^{٤}-٦س^{٣}+٩س^{٢})\, ءس$$

$$= \frac{١}{٥}س^{٥} - \frac{٣}{٢}س^{٤} + ٣س^{٣} + جـ$$

---

٧) $\int (٢س^{٢}+٣)^{٣}\, ءس$

الحل:

$$= \int (٨س^{٦}+٣٦س^{٤}+٥٤س^{٢}+٢٧)\, ءس$$

$$= \frac{٨}{٧}س^{٧} + \frac{٣٦}{٥}س^{٥} + \frac{٥٤}{٣}س^{٣} + ٢٧س + جـ$$

$$= \frac{٨}{٧}س^{٧} + \frac{٣٦}{٥}س^{٥} + ١٨س^{٣} + ٢٧س + جـ$$

مثال(٨): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{٦}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\, ءس$

الحل:

$$= \int \frac{٦}{(س)^{\frac{٢}{٣}}}\, ءس = \int ٦س^{\frac{-٢}{٣}}\, ءس$$

$$= ٦ \times \frac{س^{\frac{١}{٣}}}{\frac{١}{٣}} + جـ = ١٨\sqrt[٣]{س} + جـ$$

---

٢) $\int \frac{س^{٣}-٢}{س^{٥}}\, ءس$

الحل:

$$= \int \frac{س^{٣}}{س^{٥}} - \frac{٢}{س^{٥}}\, ءس$$

$$= \int س^{-٢} - ٢س^{-٥}\, ءس$$

$$= \frac{س^{-١}}{-١} - \frac{٢س^{-٤}}{-٤} + جـ$$

$$= \frac{-١}{س} + \frac{١}{٢س^{٤}} + جـ$$

---

٣) $\int \frac{٣س^{٢}-٣س}{\sqrt{س}}\, ءس$

الحل:

$$= \int \frac{٣س^{٢}}{س^{\frac{١}{٢}}} - \frac{٣س}{س^{\frac{١}{٢}}}\, ءس$$

$$= \int ٣س^{\frac{٣}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٢}}\, ءس$$

$$= ٣ \times \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - ٣ \times \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{٦}{٥}\sqrt{س^{٥}} - ٢\sqrt{س^{٣}} + جـ$$

٤) $\int \frac{\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{س}}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}\, \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \left(\frac{\text{١}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}} + \frac{\frac{\text{١}}{\text{س}}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}} + \frac{\text{١}}{\text{س}\,(\text{س})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}} \right) \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}} + \text{س}^{\frac{-\text{٤}}{\text{٣}}} \right) \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} + -\text{٣س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٣}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}} + \text{جـ}$$

---

٥) $\int \frac{\text{١}}{\text{٦}(\text{٢س}+\text{٥})^{\text{٣}}}\, \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \frac{\text{١}}{\text{٦}} (\text{٢س}+\text{٥})^{-\text{٣}}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٦}} \times \frac{(\text{٢س}+\text{٥})^{-\text{٢}}}{\text{٢}\times-\text{٢}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٢٤}(\text{٢س}+\text{٥})^{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

٦) $\int \frac{\text{٢}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{٢س}-\text{١}}}\, \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \text{٢}(\text{٢س}-\text{١})^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}}\, \text{ءس}$$

$$= \text{٢} \times \frac{\text{٣}}{\text{٢}\times\text{٢}} (\text{٢س}-\text{١})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \sqrt[\text{٣}]{(\text{٢س}-\text{١})^{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

---

٧) $\int \frac{\text{٣}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{١٦}}}\, \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \text{٣}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{١٦})^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}}\, \text{ءس}$$

$$= \int \text{٣}((\text{س}-\text{٤})(\text{س}-\text{٤}))^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}}\, \text{ءس}$$

$$= \int \text{٣}((\text{س}-\text{٤})^{\text{٢}})^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}}\, \text{ءس}$$

$$= \int \text{٣}(\text{س}-\text{٤})^{\frac{-\text{٢}}{\text{٣}}}\, \text{ءس}$$

$$= \text{٣}\times\text{٣}(\text{س}-\text{٤})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

$$= \text{٩}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}-\text{٤}} + \text{جـ}$$

مثال(١٠): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{(٢-\text{س})^{٣}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$=\int \frac{(٢-\text{س})^{٣}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \text{س}^{\frac{-٣}{٢}}\left(٨-١٢\text{س}+٦\text{س}^{٢}-\text{س}^{٣}\right)\,\text{ءس}$$

$$=\int\left(٨\text{س}^{\frac{-٣}{٢}}-١٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}}+٦\text{س}^{\frac{١}{٢}}-\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right)\text{ءس}$$

$$=-١٦\text{س}^{\frac{-١}{٢}}-٢٤\text{س}^{\frac{١}{٢}}+٤\text{س}^{\frac{٣}{٢}}-\frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}}+\text{ج}$$

$$=\frac{-١٦}{\sqrt{\text{س}}}-٢٤\sqrt{\text{س}}+٤\sqrt{\text{س}^{٣}}-\frac{٣}{٥}\sqrt{\text{س}^{٥}}+\text{ج}$$

---

٢) $\int \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١٥}{\text{س}-٣}\,\text{ءس}$

الحل:

$$=\int \frac{\cancel{(\text{س}-٣)}\,(\text{س}+٥)}{\cancel{(\text{س}-٣)}}\,\text{ءس}$$

$$=\int(\text{س}+٥)\,\text{ءس}=\frac{\text{س}^{٢}}{٢}+٥\text{س}+\text{ج}$$

---

٣) $\int \frac{\text{س}^{٣}-٤\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}}-٢}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$=\int \frac{\text{س}^{٢}(\text{س}-٤)}{\sqrt{\text{س}}-٢}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\text{س}^{٢}\,\cancel{\left(\sqrt{\text{س}}-٢\right)}\left(\sqrt{\text{س}}+٢\right)}{\cancel{\left(\sqrt{\text{س}}-٢\right)}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \text{س}^{٢}\left(\sqrt{\text{س}}+٢\right)\text{ءس}=\int\left(\text{س}^{\frac{٥}{٢}}+٢\text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$$

$$=\frac{٢\text{س}^{\frac{٧}{٢}}}{٧}+\frac{٢\text{س}^{٣}}{٣}+\text{ج}=\frac{٢\sqrt{\text{س}^{٧}}}{٧}+\frac{٢\text{س}^{٣}}{٣}+\text{ج}$$

---

٤) $\int \frac{\text{س}^{٢}-٩\text{س}}{\sqrt{\text{س}}-٣}\,\text{ءس}$

الحل:

$$=\int \frac{\text{س}(\text{س}-٩)}{\sqrt{\text{س}}-٣}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\text{س}\,\cancel{\left(\sqrt{\text{س}}-٣\right)}\left(\sqrt{\text{س}}+٣\right)}{\cancel{\left(\sqrt{\text{س}}-٣\right)}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \text{س}\left(\sqrt{\text{س}}+٣\right)\text{ءس}$$

$$=\int\left(\text{س}^{\frac{٣}{٢}}+٣\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\frac{٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}}}{٥}+\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}+\text{ج}$$

$$=\frac{٢\sqrt{\text{س}^{٥}}}{٥}+\frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}+\text{ج}$$

---

٥) $\int (١-\text{س})(\text{س}-١)^{٥}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$=\int -(\text{س}-١)(\text{س}-١)^{٥}\,\text{ءس}$$

$$=-\int(\text{س}-١)^{٦}\,\text{ءس}$$

$$=\frac{-(\text{س}-١)^{٧}}{٧}+\text{ج}$$

٦) $\int \frac{(\text{س}+٣)^{٢}-٩}{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$=\int \frac{\left((\text{س}+٣)-٣\right)\left((\text{س}+٣)+٣\right)}{\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\cancel{\text{س}}\,(\text{س}+٦)}{\cancel{\text{س}}}\,\text{ءس}=\frac{\text{س}^{٢}}{٢}+٦\text{س}+\text{جـ}$$

---

٧) $\int \frac{\text{س}-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}-١}\,\text{ءس}$

الحل:

$$=\int \frac{\sqrt{\text{س}}\,\cancel{(\sqrt{\text{س}}-١)}}{\cancel{(\sqrt{\text{س}}-١)}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}=\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$$

$$=\frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}}+\text{جـ}=\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}}+\text{جـ}$$

---

٨) $\int \frac{\text{س}^{٣}-٨}{\text{س}-٢}\,\text{ءس}$

الحل:

	١	٠	٠	٨-
$\times\boxed{٢}$		٢	٤	٨
	١	٢	٤	٠

$$=\int \frac{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)\,\cancel{(\text{س}-٢)}}{\cancel{(\text{س}-٢)}}\,\text{ءس}$$

$$=\int (\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)\,\text{ءس}$$

$$=\frac{\text{س}^{٣}}{٣}+\text{س}^{٢}+٤\text{س}+\text{جـ}$$

مثال(١٠): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{س}^{٤}\left(٥-\frac{٣}{\text{س}}\right)^{٤}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$=\int \left(\text{س}\left(٥-\frac{٣}{\text{س}}\right)\right)^{٤}\,\text{ءس}$$

$$=\int (٥\text{س}-٣)^{٤}\,\text{ءس}$$

$$=\frac{(٥\text{س}-٣)^{٥}}{٥\times٥}+\text{جـ}=\frac{(٥\text{س}-٣)^{٥}}{٢٥}+\text{جـ}$$

---

٢) $\int \sqrt[٣]{\text{س}}\left(\sqrt[٣]{\text{س}}+\frac{٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right)\,\text{ءس}$

الحل:

$$=\int \text{س}^{\frac{١}{٣}}\left(\text{س}^{\frac{١}{٣}}+\frac{٥}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}\right)\,\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{س}^{\frac{٢}{٣}}+٥\right)\,\text{ءس}$$

$$=\frac{٣}{٥}\,\text{س}^{\frac{٥}{٣}}+٥\text{س}+\text{جـ}$$

$$=\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}+٥\text{س}+\text{جـ}$$

٣) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}}\,ءس$ (كتاب)

الحل:

الطريقة الاولى:

$$\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}} \times \frac{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}}\,ءس$$

$$= \int \frac{٥س\left((٧س+٣)^{\frac{١}{٢}}-(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}\right)}{(٧س+٣)-(٢س+٣)}\,ءس$$

$$= \int \frac{\cancel{٥س}\left((٧س+٣)^{\frac{١}{٢}}-(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}\right)}{\cancel{٥س}}\,ءس$$

$$= \frac{٢(٧س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣\times٧} - \frac{٢(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣\times٢} + ج$$

$$= \frac{٢\sqrt{(٧س+٣)^{٣}}}{٢١} - \frac{\sqrt{(٢س+٣)^{٣}}}{٣} + ج$$

الطريقة الثانية:

يمكن التعبير عن $٥س = (٧س+٣)-(٢س+٣)$

$$= \int \frac{(٧س+٣)-(٢س+٣)}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}}\,ءس$$

نحلل البسط فرق بين مربعين

$$= \int \frac{\left(\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٢س+٣}\right)\cancel{\left(\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٢س+٣}\right)}}\,ءس$$

$$= \int \left((٧س+٣)^{\frac{١}{٢}}-(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}}\right)ءس$$

$$= \frac{٢(٧س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣\times٧} - \frac{٢(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣\times٢} + ج$$

$$= \frac{٢\sqrt{(٧س+٣)^{٣}}}{٢١} - \frac{\sqrt{(٢س+٣)^{٣}}}{٣} + ج$$

٤) $\int س\sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}}-\frac{١}{س^{٢}}}\,ءس$ (كتاب)

الحل:

$$\int س\sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}}-\frac{١}{س^{٢}}}\,ءس$$

$$= \int \sqrt[٣]{س^{٣}\left(\frac{٥}{س^{٣}}-\frac{١}{س^{٢}}\right)}\,ءس$$

$$= \int \sqrt[٣]{٥-س}\,ءس$$

$$= \int (٥-س)^{\frac{١}{٣}}\,ءس$$

$$= \frac{٣}{٤\times-١}(٥-س)^{\frac{٤}{٣}} + ج$$

$$= \frac{-٣}{٤}\sqrt[٣]{(٥-س)^{٤}} + ج$$

---

٥) $\int س\sqrt[٥]{\frac{٣}{س^{٤}}-\frac{٢}{س^{٥}}}\,ءس$

الحل:

$$\int س\sqrt[٥]{\frac{٣}{س^{٤}}-\frac{٢}{س^{٥}}}\,ءس$$

$$\int \sqrt[٥]{٣س-٢}\,ءس$$

$$\int (٣س-٢)^{\frac{١}{٥}}\,ءس$$

$$= \frac{٥(٣س-٢)^{\frac{٦}{٥}}}{٦\times٣} + ج$$

$$= \frac{٥}{١٨}\sqrt[٥]{(٣س-٢)^{٦}} + ج$$

متطابقات مفيدة :

- $\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}=١$
- $\text{ظا}^{٢}\text{س}+١=\text{قا}^{٢}\text{س}$
- $\text{ظتا}^{٢}\text{س}+١=\text{قتا}^{٢}\text{س}$
- $\text{جتا}٢\text{س}=\text{جتا}^{٢}\text{س}-\text{جا}^{٢}\text{س}$
- $\text{جا}^{٢}\text{س}=\dfrac{١-\text{جتا}٢\text{س}}{٢}$
- $\text{جتا}^{٢}\text{س}=\dfrac{١+\text{جتا}٢\text{س}}{٢}$
- $\text{جاس جتاس}=\dfrac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}$
- $\text{جاس جتاص}=\dfrac{١}{٢}\left[\text{جا}(\text{س}+\text{ص})+\text{جا}(\text{س}-\text{ص})\right]$
- $\text{جاس جاص}=\dfrac{١}{٢}\left[\text{جتا}(\text{س}-\text{ص})-\text{جتا}(\text{س}+\text{ص})\right]$
- $\text{جتاس جتاص}=\dfrac{١}{٢}\left[\text{جتا}(\text{س}+\text{ص})+\text{جتا}(\text{س}-\text{ص})\right]$
- $\text{جا}(\text{س}\pm\text{ص})=\text{جاس جتاص}\pm\text{جاص جتاس}$
- $\text{جتا}(\text{س}\pm\text{ص})=\text{جتاس جتاص}\mp\text{جاص جاس}$

الاقترانات الدائرية

١) $\int \text{جاس}\,\text{ءس}=-\text{جتاس}+\text{جـ}$

٢) $\int \text{جتاس}\,\text{ءس}=\text{جاس}+\text{جـ}$

٣) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}=\text{ظاس}+\text{جـ}$

٤) $\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}=-\text{ظتاس}+\text{جـ}$

٥) $\int \text{قاس ظاس}\,\text{ءس}=\text{قاس}+\text{جـ}$

٦) $\int \text{قتاس ظتاس}\,\text{ءس}=-\text{قتاس}+\text{جـ}$

- اذا كانت الزاوية خطية($\text{أس}+\text{ب}$)نقسم على معامل (س)

مثال(١١): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{جا}(٥\text{س}+٣)\,\text{ءس}$

الحل:

$=\dfrac{-\text{جتا}(٥\text{س}+٣)}{٥}+\text{جـ}$

---

٢) $\int \text{جتا}(٣\text{س}-٢)\,\text{ءس}$

الحل:

$=\dfrac{\text{جا}(٣\text{س}-٢)}{٣}+\text{جـ}$

---

٣) $\int \text{قا}^{٢}(٤\text{س}-٢)\,\text{ءس}$

الحل:

$=\dfrac{١}{٤}\text{ظا}(٤\text{س}-٢)+\text{جـ}$

٤) $\int \text{قتا}^2(1-2\text{س})\,\text{ءس}$

الحل:

$= \frac{-1}{2} \times -\text{ظتا}(1-2\text{س}) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\text{ظتا}(1-2\text{س}) + \text{جـ}$

---

٥) $\int \text{قا}2\text{س ظا}2\text{س ءس}$

الحل:

$= \frac{1}{2}\text{قا}2\text{س} + \text{جـ}$

---

٦) $\int -9\,\text{قتا}3\text{س ظتا}3\text{س ءس}$

الحل:

$= \frac{-9}{3} \times -\text{قتا}3\text{س} + \text{جـ}$

$= 3\text{قتا}3\text{س} + \text{جـ}$

مثال(١٢): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{2}{\text{قتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int 2\text{جاس ءس} = -2\text{جتاس} + \text{جـ}$

---

٢) $\int \frac{3}{\sqrt{2}\,\text{قاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \frac{3}{\sqrt{2}}\text{جتاس ءس} = \frac{3}{\sqrt{2}}\text{جاس} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قا}^2\text{س ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

---

٤) $\int \frac{-1}{2\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \frac{-1}{2}\text{قتا}^2\text{س ءس} = \frac{1}{2}\text{ظتاس} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \frac{1}{\text{جتاس ظتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قاس ظاس ءس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

---

٦) $\int \frac{5}{\text{جاس ظاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int 5\text{قتاس ظتاس ءس}$

$= -5\text{قتاس} + \text{جـ}$

---

٧) $\int \frac{\text{جاس قاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قاس ظاس ءس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

---

٨) $\int \frac{\text{جتاس قتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قتاس ظتاس ءس} = -\text{قتاس} + \text{جـ}$

٩) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قاس ظاس ءس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

---

١٠) $\int \frac{\text{ظتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قتاس ظتاس ءس} = -\text{قتاس} + \text{جـ}$

---

١١) $\int \frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قاس} \times \text{قاس ءس} = \int \text{قا}^2\text{س ءس}$

$= \text{ظاس} + \text{جـ}$

---

١٢) $\int \frac{\text{قتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{قتاس} \times \text{قتاس ءس} = \int \text{قتا}^2\text{س ءس}$

$= -\text{ظتاس} + \text{جـ}$

---

١٣) $\int \frac{\text{قتاس}}{\text{٢ظاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \frac{1}{2}\int \text{قتاس ظتاس ءس} = \frac{-1}{2}\,\text{قتاس} + \text{جـ}$

---

١٤) $\int \frac{\text{٥قاس}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{٥قاس ظاس ءس} = \text{٥قاس} + \text{جـ}$

سؤال وزاري :

$$\int \frac{\text{٥جا}^2\text{س} + \text{٥جتا}^2\text{س}}{3 + \text{٣جتا٢س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{5}{3}\int \frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}{1 + \text{جتا٢س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{5}{3}\int \frac{1}{\text{٢جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{5}{6}\int \text{قا}^2\text{س ءس} = \frac{5}{6}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$$

قاعدة :

$$\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قتا}^2(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{قا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{قتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-\text{قتا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$	$\text{جاس} \times \text{قتاس} = 1$
$\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} = 1$	$\text{جتاس} \times \text{قاس} = 1$
$\text{قتا}^2\text{س} - \text{ظتا}^2\text{س} = 1$	$\text{ظاس} \times \text{ظتاس} = 1$

مثال(١٣): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int$ (٣جا^{٢}س + ٣جتا^{٢}س) ءس

الحل:

= $\int$ ٣(جا^{٢}س+جتا^{٢}س) ءس

= $\int$ ٣(١) ءس = ٣س+جـ

---

٢) $\int$ ($\sqrt{٢}$قا^{٢}٣س - $\sqrt{٢}$ظا^{٢}٣س) ءس

الحل:

= $\int$ $\sqrt{٢}$(قا^{٢}٣س - ظا^{٢}٣س) ءس

= $\int$ $\sqrt{٢}$(١) ءس = $\sqrt{٢}$س+جـ

---

٣) $\int$ (قتا^{٢}٢س - ظتا^{٢}٢س) ءس

الحل:

= $\int$ (١) ءس = س+جـ

---

٤) $\int$ ٢جاس قتاس ءس

الحل:

= $\int$ ٢جاس × $\frac{١}{جاس}$ ءس

= $\int$ ٢ ءس = ٢س+جـ

---

٥) $\int$ -٣جتا٢س قا٢س ءس

الحل:

= $\int$ -٣ ءس = -٣س+جـ

---

٦) $\int$ (-٢ظا٢س ظتا٢س) ءس

الحل:

= $\int$ -٢(١) ءس = -٢س+جـ

---

٧) $\int$ قاس(ظاس+جتاس) ءس

الحل:

= $\int$ (قاس×ظاس+قاس×جتاس) ءس

= $\int$ قاس ظاس + ١ ءس = قاس + س + جـ

---

٨) $\int$ قتاس(قتاس - جاس) ءس

الحل:

= $\int$ (قتاس×قتاس - جاس×قتاس) ءس

= $\int$ (قتا^{٢}س - (١)) ءس = -ظتاس - س + جـ

---

٩) $\int$ قاس (ظاس+قاس) ءس

الحل:

= $\int$ (ظاس×قاس+قاس×قاس) ءس

= $\int$ (قاس ظاس+قا^{٢}س) ءس

= قاس+ظاس+جـ

---

١٠) $\int$ قتاس (ظتاس+قتاس) ءس

الحل:

= $\int$ (ظتاس×قتاس+قتاس×قتاس) ءس

= -قتاس-ظتاس+جـ

- جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١-جتا٢س)
- جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١+جتا٢س)
- جا^{٤}س = $\left(\frac{١}{٢}(١-جتا٢س)\right)^{٢}$
- جتا^{٤}س = $\left(\frac{١}{٢}(١+جتا٢س)\right)^{٢}$

مثال(١٤): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$=\int \tfrac{1}{2}\left(1-\text{جتا}2\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\text{س}-\frac{\text{جا}2\text{س}}{2}\right)+\text{جـ}$$

$$=\tfrac{1}{2}\text{س}-\tfrac{1}{4}\text{جا}2\text{س}+\text{جـ}$$

---

٢) $\int 3\,\text{جتا}^{2}2\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$=\int 3\times\tfrac{1}{2}\left(1+\text{جتا}4\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\tfrac{3}{2}\left(\text{س}+\frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right)+\text{جـ}$$

$$=\tfrac{3}{2}\text{س}+\tfrac{3}{8}\text{جا}4\text{س}+\text{جـ}$$

---

٣) $\int \left(1+\text{جا}^{2}\text{س}\right)\text{ءس}$

الحل:

$$=\int\left(1+\tfrac{1}{2}\left(1-\text{جتا}2\text{س}\right)\right)\text{ءس}$$

$$=\int\left(1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\int\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\ \text{ءس}$$

$$=\tfrac{3}{2}\text{س}-\tfrac{1}{2}\times\frac{\text{جا}2\text{س}}{2}+\text{جـ}$$

$$=\tfrac{3}{2}\text{س}-\tfrac{1}{4}\text{جا}2\text{س}+\text{جـ}$$

---

٤) $\int\left(1-3\,\text{جتا}^{2}2\text{س}\right)\text{ءس}$

الحل:

$$=\int\left(1-3\times\tfrac{1}{2}\left(1+\text{جتا}4\text{س}\right)\right)\text{ءس}$$

$$=\int\left(1-\tfrac{3}{2}\left(1+\text{جتا}4\text{س}\right)\right)\text{ءس}$$

$$=\left(\text{س}-\tfrac{3}{2}\left(\text{س}+\frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right)\right)+\text{جـ}$$

$$=\text{س}-\tfrac{3}{2}\text{س}-\tfrac{3}{8}\text{جا}4\text{س}+\text{جـ}$$

$$=\frac{-1}{2}\text{س}-\tfrac{3}{8}\text{جا}4\text{س}+\text{جـ}$$

---

٥) $\int 3\,\text{جا}^{4}2\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$=\int 3\left(\text{جا}^{2}2\text{س}\right)^{2}\text{ءس}$$

$$=\int 3\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\text{جتا}4\text{س}\right)\right)^{2}\text{ءس}$$

$$=\tfrac{3}{4}\int\left(1-\text{جتا}4\text{س}\right)^{2}\text{ءس}$$

$$=\tfrac{3}{4}\int\left(1-2\,\text{جتا}4\text{س}+\text{جتا}^{2}4\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$=\tfrac{3}{4}\int\left(1-2\,\text{جتا}4\text{س}+\tfrac{1}{2}\left(1+\text{جتا}8\text{س}\right)\right)\text{ءس}$$

$$=\tfrac{3}{4}\left(\text{س}-2\frac{\text{جا}4\text{س}}{4}+\tfrac{1}{2}\left(\text{س}+\frac{\text{جا}8\text{س}}{8}\right)\right)+\text{جـ}$$

$$=\tfrac{3}{4}\left(\text{س}-\tfrac{1}{2}\text{جا}4\text{س}+\tfrac{1}{2}\left(\text{س}+\tfrac{1}{8}\text{جا}8\text{س}\right)\right)+\text{جـ}$$

٦) $\int \text{جتا}^{٤}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \left(\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{١}{٢}(١+\text{جتاس})\right)^{٢}\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٤}(١+\text{جتاس})^{٢}\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\int (١+٢\text{جتاس}+\text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\int \left(١+٢\text{جتاس}+\frac{١}{٢}(١+\text{جتا٢س})\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٤}\left(\text{س}+٢\text{جاس}+\frac{١}{٢}\left(\text{س}+\frac{\text{جا٢س}}{٢}\right)\right)+\text{جـ}$

- $\text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س}-١$
- $\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س}-١$

مثال(١٥): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{ظا}^{٢}\text{٢س}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int (\text{قا}^{٢}\text{٢س}-١)\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{ظا٢س}}{٢}-\text{س}+\text{جـ}$

٢) $\int ٣\text{ظتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

الحل:

$= ٣\int (\text{قتا}^{٢}\text{س}-١)\,\text{ءس}$

$= -٣\text{ظتاس}-٣\text{س}+\text{جـ}$

٣) $\int (١+٢\text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \left(١+٢(\text{قا}^{٢}\text{س}-١)\right)\text{ءس}$

$= \text{س}+٢(\text{ظاس}-\text{س})+\text{جـ}$

$= \text{س}+٢\text{ظاس}-٢\text{س}+\text{جـ}$

$= ٢\text{ظاس}-\text{س}+\text{جـ}$

٤) $\int ٢-\text{ظتا}^{٢}\text{٣س}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int ٢-(\text{قتا}^{٢}\text{٣س}-١)\,\text{ءس}$

$= \int ٢-\text{قتا}^{٢}\text{٣س}+١\,\text{ءس}$

$= \int ٣-\text{قتا}^{٢}\text{٣س}\,\text{ءس}$

$= ٣\text{س}+\frac{١}{٣}\text{ظتا٣س}+\text{جـ}$

٥) $\int \frac{٢}{\text{ظتا}^{٢}\text{٥س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int ٢\text{ظا}^{٢}\text{٥س}\,\text{ءس} = ٢\int (\text{قا}^{٢}\text{٥س}-١)\,\text{ءس}$

$= ٢\left(\frac{\text{ظا٥س}}{٥}-\text{س}\right)+\text{جـ}$

$= \frac{٢}{٥}\text{ظا٥س}-٢\text{س}+\text{جـ}$

- $\text{جا٢س} = ٢\text{جاس جتاس}$
- $\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١-\text{جتا٢س})$
- $\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١+\text{جتا٢س})$
- **الفكرة:** $\text{جاس}\times\text{جتاس}$

$\text{جا}^{٢}\text{س}\times\text{جتا}^{٢}\text{س}$

$\text{جا}^{٤}\text{س}\times\text{جتا}^{٤}\text{س}$

مثال(١٦): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{جا٢س جتا٢س ء س}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢ جاس جتاس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} = \text{جاس جتاس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٤س} = \text{جا٢س جتا٢س}$

$\therefore \int \frac{١}{٢}\text{جا٤س ء س}$

$= \frac{-١}{٢} \times \frac{\text{جتا٤س}}{٤} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٨}\text{جتا٤س} + \text{جـ}$

---

٢) $\int \text{٤جا}\frac{\text{س}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\text{ ء س}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$

$\text{٢ جا٢س} = \text{٤جاس جتاس}$

$\text{٢ جاس} = \text{٤جا}\frac{\text{س}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}$

$\therefore \int \text{٢جاس ء س} = \text{−٢جتاس+جـ}$

---

٣) $-\int \text{٥جا٣س جتا٣س ء س}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢ جاس جتاس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} = \text{جاس جتاس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٦س} = \text{جا٣س جتا٣س}$

$\therefore -٥\int \frac{١}{٢}\text{جا٦س ء س}$

$= \frac{-٥}{٢} \times \frac{\text{−جتا٦س}}{٦} + \text{جـ} = \frac{٥}{١٢}\text{جتا٦س} + \text{جـ}$

---

٤) $\int \text{٤جا}^{٢}\text{٣س جتا}^{٢}\text{٣س ء س}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢ جاس جتاس}$

$\text{جا٦س} = \text{٢ جا٣س جتا٣س}$

$\text{جا}^{٢}\text{٦س} = \text{٤ جا}^{٢}\text{٣س جتا}^{٢}\text{٣س}$

$\therefore \int \text{جا}^{٢}\text{٦س ء س}$

$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{١ − جتا١٢س}\right)\text{ ء س}$

$= \frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{\text{جا١٢س}}{١٢}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٢٤}\text{جا١٢س} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \text{جا}^{٤}\text{٢س جتا}^{٤}\text{٢س + ٢ ء س}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢ جاس جتاس}$

$\frac{١}{١٦}\text{جا}^{٤}\text{٤س} = \text{جا}^{٤}\text{٢س جتا}^{٤}\text{٢س}$

$\therefore \int \frac{١}{١٦}\text{جا}^{٤}\text{٤س + ٢ ء س}$

$= \int \frac{١}{١٦}\left(\text{جا}^{٢}\text{٤س}\right)^{٢} \text{ + ٢ ء س}$

$= \int \frac{١}{١٦}\left(\frac{١}{٢}\left(\text{١ − جتا٨س}\right)\right)^{٢} \text{ + ٢ ء س}$

$= \int \frac{١}{٦٤}\left(\text{١ − ٢جتا٨س + جتا}^{٢}\text{٨س}\right) \text{ + ٢ ء س}$

$= \int \frac{١}{٦٤}\left(\text{١ − ٢جتا٨س} + \frac{١}{٢}\left(\text{١ + جتا١٦س}\right)\right) \text{ + ٢ ء س}$

$= \int \frac{١}{٦٤} - \frac{١}{٣٢}\text{جتا٨س} + \frac{١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨}\text{جتا١٦س + ٢ ء س}$

$= \int -\frac{١}{٣٢}\text{جتا٨س} + \frac{١}{١٢٨}\text{جتا١٦س} + \frac{٣٨٥}{١٩٢}\text{ ء س}$

$= -\frac{١}{٣٢}\,\frac{\text{جا٨س}}{٨} + \frac{١}{١٢٨}\,\frac{\text{جا١٦س}}{١٦} + \frac{٣٨٥}{١٩٢}\text{س+جـ}$

$= -\frac{١}{٢٥٦}\text{جا٨س} + \frac{١}{٢٠٤٨}\text{جا١٦س} + \frac{٣٨٥}{١٩٢}\text{س+جـ}$

- $\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$
- $-\text{جتا٢س} = \text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}$

مثال(١٧): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{جتا}^{٢}\text{٣س} - \text{جا}^{٢}\text{٣س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$$
$$\text{جتا٦س} = \text{جتا}^{٢}\text{٣س} - \text{جا}^{٢}\text{٣س}$$
$$\therefore \int \text{جتا٦س}\ \text{ءس} = \frac{١}{٦}\text{جا٦س} + \text{جـ}$$

---

٢) $\int \text{٣جا}^{٢}\text{٥س} - \text{٣جتا}^{٢}\text{٥س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$-\text{جتا٢س} = \text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}$$
$$-\text{جتا ١٠س} = \text{جا}^{٢}\text{٥س} - \text{جتا}^{٢}\text{٥س}$$
$$= \int ٣\left(\text{جا}^{٢}\text{٥س} - \text{جتا}^{٢}\text{٥س}\right)\ \text{ءس}$$
$$\therefore ٣\int -\text{جتا ١٠س}\ \text{ءس}$$
$$= -٣ \times \frac{١}{١٠}\text{جا ١٠س} + \text{جـ}$$
$$= \frac{-٣}{١٠}\text{جا ١٠س} + \text{جـ}$$

---

٣) $\int \left(\text{٨جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤} - \text{٨جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\right)\ \text{ءس}$

الحل:

$$\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$$
$$\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢} = \text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}$$
$$\therefore ٨\int \text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{ءس} = ٨ \times \frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$
$$= ١٦\ \text{جا}\frac{\text{س}}{٢} + \text{جـ}$$

٤) $\int \left(\text{٨جتا}^{٤}\frac{\text{س}}{٤} - \text{٨جا}^{٤}\frac{\text{س}}{٤}\right)\ \text{ءس}$

الحل:

$$= ٨\int \left(\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\right)\left(\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤} + \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\right)\ \text{ءس}$$
$$= ٨\int \left(\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\right)(١)\ \text{ءس}$$
$$\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$$
$$\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢} = \text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}$$
$$\therefore ٨\int \left(\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\right)(١)\ \text{ءس} = ٨ \times \frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$
$$= ١٦\ \text{جا}\frac{\text{س}}{٢} + \text{جـ}$$

ضرب مرافق:

- $١+\text{جاس}$ $\text{جاس}+١$
- $١-\text{جاس}$ $\text{جاس}-١$
- $١+\text{جتاس}$ $\text{جتاس}+١$
- $١-\text{جتاس}$ $\text{جتاس}-١$

مثال(١٨): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\text{ءس}}{١+\text{جاس}}$

الحل:

$$= \int \frac{١}{١+\text{جاس}} \times \frac{١-\text{جاس}}{١-\text{جاس}}\ \text{ءس}$$
$$= \int \frac{١-\text{جاس}}{١+\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{١-\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$$
$$= \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$$
$$= \int \text{قا}^{٢}\text{س} - \text{قاس ظاس}\ \text{ءس}$$
$$= \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{١}}{\text{١+جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١+جتا٢س}\right)$

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١+جتا٢س}$

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{١+جتاس}$

$\therefore \int \frac{\text{١}}{\text{٢جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \text{قا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{ظا}\frac{\text{س}}{\text{٢}}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} + \text{جـ} = \text{ظا}\frac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{جـ}$

---

٣) $\int \frac{\text{٤}}{\text{١+جتا٢س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١+جتا٢س}\right)$

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١+جتا٢س}$

$\therefore \int \frac{\cancel{\text{٤}}^{\,\text{٢}}}{\cancel{\text{٢}}\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{٢قا}^{\text{٢}}\text{س}\,\text{ءس}$

$= \text{٢ظاس+جـ}$

حل اخر:

$= \int \frac{\text{٤}}{\text{١+جتا٢س}} \times \frac{\text{١−جتا٢س}}{\text{١−جتا٢س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{٤}\left(\text{١−جتا٢س}\right)}{\text{١−جتا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{٤}\left(\text{١−جتا٢س}\right)}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{٤−٤جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{٤}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}} - \frac{\text{٤جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{٤قتا}^{\text{٢}}\text{٢س} - \text{٤ظتا٢س قتا٢س}\,\text{ءس}$

$= \text{−٢ظتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٢قتا٢س+جـ}$

٤) $\int \frac{\text{١+جتاس}}{\text{١−جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int \frac{\text{١+جتاس}}{\text{١−جتاس}} \times \frac{\text{١+جتاس}}{\text{١+جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\left(\text{١+جتاس}\right)^{\text{٢}}}{\text{١−جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{١+٢جتاس+جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} + \frac{\text{٢جتاس}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} + \frac{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٢قتاسظتاس+ظتا}^{\text{٢}}\text{س}\,\text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٢قتاسظتاس} + \left(\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{١}\right)\text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٢قتاسظتاس+قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{١}\,\text{ءس}$

$= \text{−ظتاس} - \text{٢قتاس−ظتاس} - \text{س+جـ}$

$= \text{−٢ظتاس} - \text{٢قتاس} - \text{س+جـ}$

حل اخر:

$\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١+جتا٢س}\right)$

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١+جتا٢س}$

$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{١+جتاس}$

$\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١−جتا٢س}\right)$

$\text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١−جتا٢س}$

$\text{٢جا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}} = \text{١−جتاس} \Leftarrow \therefore \int \frac{\text{٢جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}}{\text{٢جا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{ظتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\,\text{ءس} = \int \left(\text{قتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}} - \text{١}\right)\text{ءس}$

$= \text{−٢ظتا}\frac{\text{س}}{\text{٢}} - \text{س+جـ}$

- $\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}=1$

مثال(١٩): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}-5}{1-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}-5}{1-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}=\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}-5}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}-\frac{5}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \text{جتاس}-5\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس}=\text{جاس}-5\,\text{ظاس}+\text{جـ}$$

---

٢) $\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1-\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1-\text{جتاس}}\,\text{ءس}=\int \frac{1-\text{جتا}^2\text{س}}{1-\text{جتاس}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\cancel{(1-\text{جتاس})}\,(1+\text{جتاس})}{\cancel{(1-\text{جتاس})}}\,\text{ءس}$$

$$=\int (1+\text{جتاس})\,\text{ءس}=\text{س}+\text{جاس}+\text{جـ}$$

حل اخر:

$$\text{جا}^2\text{س}=\frac{1}{2}\left(1-\text{جتا}2\text{س}\right)\Leftarrow 2\,\text{جا}^2\text{س}=1-\text{جتا}2\text{س}$$

$$2\,\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}=1-\text{جتاس}\Leftarrow \quad \therefore \int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{2\,\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}}\,\text{ءس}$$

$$\text{جا}2\text{س}=2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$$

$$\text{جاس}=2\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}\Leftarrow \text{جا}^2\text{س}=4\,\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}$$

$$\therefore \int \frac{\cancel{4}^{\,2}\,\cancel{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}}\,\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}}{\cancel{2}\,\cancel{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}}}\,\text{ءس}$$

$$\int 2\,\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{ءس}=\int 2\times\frac{1}{2}\left(1+\text{جتاس}\right)\text{ءس}$$

$$=\int (1+\text{جتاس})\,\text{ءس}=\text{س}+\text{جاس}+\text{جـ}$$

حل اخر:

$$\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{1-\text{جتاس}}\times\frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\text{جا}^2\text{س}\,(1+\text{جتاس})}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}\,(1+\text{جتاس})}{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}}\,\text{ءس}=\int 1+\text{جتاس}\,\text{ءس}$$

$$=\text{س}+\text{جاس}+\text{جـ}$$

---

٣) $\int \frac{5\,\text{جا}^3\text{س}-2}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{5\,\text{جا}^3\text{س}-2}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{5\,\text{جا}^3\text{س}-2}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{5\,\text{جا}^{\cancel{3}}\text{س}}{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}}-\frac{2}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int 5\,\text{جاس}-2\,\text{قتا}^2\text{س}\,\text{ءس}$$

$$=-5\,\text{جتاس}+2\,\text{ظتاس}+\text{جـ}$$

---

٤) $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$=\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}=\int \text{ظتا}^2\text{س}\,\text{ءس}$$

$$=\int \left(\text{قتا}^2\text{س}-1\right)\text{ءس}=-\text{ظتاس}-\text{س}+\text{جـ}$$

٥) $\int \frac{\text{١+ظتا}^{٢}\text{س}}{\text{قتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$\int \frac{\text{١+ظتا}^{٢}\text{س}}{\text{قتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}}{\cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{١ دس} = \text{س+جـ}$

- $\text{جتاأجتاب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جتا(أ−ب)+جتا(أ+ب)}\right]$
- $\text{جاأجاب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جتا(أ−ب)−جتا(أ+ب)}\right]$
- $\text{جاأجتاب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا(أ−ب)+جا(أ+ب)}\right]$
- $\text{جتاأجاب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا(ب−أ)+جا(أ+ب)}\right]$
- زاوية الجيب – زاوية الجتا

مثال(٢٠): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int -\text{٥جتا٥س جتاس دس}$

الحل:

$\int -\text{٥جتا٥س جتاس دس}$

$= -٥\int \frac{١}{٢}\left[\text{جتا(٤س)+جتا(٦س)}\right]\text{دس}$

$= -٥ \times \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا٤س}}{٤} + \frac{\text{جا٦س}}{٦}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{-٥}{٨}\text{جا٤س} - \frac{٥}{١٢}\text{جا٦س+جـ}$

٢) $\int \text{٤جا٦س جا٤س دس}$

الحل:

$\int \text{٤جا٦س جا٤س دس}$

$= ٤\int \frac{١}{٢}\left[\text{جتا(٢س)−جتا(١٠س)}\right]\text{دس}$

$= ٤ \times \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا٢س}}{٢} - \frac{\text{جا١٠س}}{١٠}\right) + \text{جـ}$

$= \text{جا٢س} - \frac{١}{٥}\text{جا١٠س+جـ}$

---

٣) $\int \text{٢جا٤س جتا٨س دس}$

الحل:

$\int \text{٢جا٤س جتا٨س دس}$

$= ٢\int \frac{١}{٢}\left[\text{جا(−٤س)+جا(١٢س)}\right]\text{دس}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{−جتا(−٤س)}}{-٤} + \frac{\text{−جتا(١٢س)}}{١٢}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤}\text{جتا−٤س} - \frac{١}{١٢}\text{جتا١٢س+جـ}$

- $\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$
- $\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}$

$= 1 - \text{٢جا}^{2}\text{س}$

$= \text{٢جتا}^{2}\text{س} - 1$

مثال(٢١): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$

$\frac{1}{2}\text{جا٢س} = \text{جاس جتاس}$

$\frac{1}{4}\text{جا}^{2}\text{٢س} = \text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}$

$\therefore \int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتا٢س}}{\frac{1}{4}\text{جا}^{2}\text{٢س}}\,\text{ءس}$

$= 4\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{2}\text{٢س}}\,\text{ءس}$

$= 4\int \text{قتا٢س ظتا٢س ءس}$

$= 4 \times \frac{-\text{قتا٢س}}{2} + \text{جـ} = -\text{٢قتا٢س} + \text{جـ}$

حل اخر:

$\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}$

$\therefore \int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتا}^{2}\text{س}}}{\cancel{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{جا}^{2}\text{س}} - \frac{\cancel{\text{جا}^{2}\text{س}}}{\text{جتا}^{2}\text{س}\ \cancel{\text{جا}^{2}\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{قتا}^{2}\text{س} - \text{قا}^{2}\text{س ءس} = -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{1 - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\frac{\text{س}}{2}\ \text{جتا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{جا٢س} = \text{٢جاسجتاس}$

$\frac{1}{2}\text{جا٢س} = \text{جاسجتاس}$

$\frac{1}{2}\text{جاس} = \text{جا}\frac{\text{س}}{2}\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}$

$\frac{1}{4}\text{جا}^{2}\text{س} = \text{جا}^{2}\frac{\text{س}}{2}\text{جتا}^{2}\frac{\text{س}}{2}$

$\therefore \int \frac{1 - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\frac{\text{س}}{2}\ \text{جتا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{\frac{1}{4}\text{جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= 4\int \text{ظتا}^{2}\text{س ءس} = 4\int (\text{قتا}^{2}\text{س} - 1)\,\text{ءس}$

$= 4(-\text{ظتاس} - \text{س}) + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{1}{\text{جتا٢س} + \text{جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{1}{\text{جتا٢س} + \text{جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{1}{(\text{جتا}^{2}\text{س} - \cancel{\text{جا}^{2}\text{س}}) + \cancel{\text{جا}^{2}\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{قا}^{2}\text{س ءس}$

$= \text{ظاس} + \text{جـ}$

٤) $\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{جا}^{3}\text{س جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{جا}^{3}\text{س جتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{٢}\cancel{\text{جاس}}\ \cancel{\text{جتاس}}}{\text{جا}^{\cancel{3}\,2}\text{س}\ \cancel{\text{جتاس}}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{2}{\text{جا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{٢قتا}^{2}\text{س ءس}$

$= -\text{٢ظتاس} + \text{جـ}$

- **١+جا٢س**

١ = جا^{٢}س+جتا^{٢}س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

= (جا^{٢}س+جتا^{٢}س) + (٢ جاس جتاس)

= جا^{٢}س + ٢ جاس جتاس+جتا^{٢}س

= (جاس+جتاس)(جاس+جتاس)

١+جا٢س = (جاس+جتاس)^{٢}

١+جا٢س = (جتاس+جاس)^{٢}

- **جا٢س+١**

١ = جا^{٢}س+جتا^{٢}س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

= (٢ جاس جتاس) + (جا^{٢}س+جتا^{٢}س)

= جا^{٢}س + ٢ جاس جتاس+جتا^{٢}س

= (جاس+جتاس)(جاس+جتاس)

جا٢س + ١ = (جاس+جتاس)^{٢}

جا٢س + ١ = (جتاس+جاس)^{٢}

- **١−جا٢س**

١ = جا^{٢}س+جتا^{٢}س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

= (جا^{٢}س+جتا^{٢}س) − (٢ جاس جتاس)

= جا^{٢}س − ٢ جاس جتاس+جتا^{٢}س

= (جاس−جتاس)(جاس−جتاس)

١−جا٢س = (جاس−جتاس)^{٢}

١−جا٢س = (جتاس−جاس)^{٢}

- **جا٢س−١**

١ = جا^{٢}س+جتا^{٢}س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

= (٢ جاس جتاس) − (جا^{٢}س+جتا^{٢}س)

=-جا^{٢}س + ٢ جاس جتاس−جتا^{٢}س

=-(جا^{٢}س − ٢ جاس جتاس+جتا^{٢}س)

= −(جاس−جتاس)(جاس−جتاس)

جا٢س − ١ = −(جاس−جتاس)^{٢}

جا٢س − ١ = −(جتاس−جاس)^{٢}

مثال(٢٢): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $$\int \frac{\text{١}-\text{جا٢س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$= \int \frac{\cancel{(\text{جاس}-\text{جتاس})^{\text{٢}}}}{\cancel{(\text{جاس}-\text{جتاس})}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جاس}-\text{جتاس}\ \text{ءس} = -\text{جتاس}-\text{جاس}+\text{جـ}$$

٢) $$\int \frac{\text{١}+\text{جا٢س}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$= \int \frac{\cancel{(\text{جاس}+\text{جتاس})^{\text{٢}}}}{\cancel{(\text{جاس}+\text{جتاس})}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جاس}+\text{جتاس}\ \text{ءس} = -\text{جتاس}+\text{جاس}+\text{جـ}$$

٣) $$\int \frac{\text{١}-\text{جا٢س}}{\text{جتاس}-\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$= \int \frac{\cancel{(\text{جتاس}-\text{جاس})^{\text{٢}}}}{\cancel{(\text{جتاس}-\text{جاس})}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جتاس}-\text{جاس}\ \text{ءس} = \text{جاس}+\text{جتاس}+\text{جـ}$$

٤) $$\int \frac{\text{جا٢س}-\text{١}}{\text{جتاس}-\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$-\int \frac{\text{١}-\text{جا٢س}}{\text{جتاس}-\text{جاس}}\ \text{ءس} = -\int \frac{\cancel{(\text{جتاس}-\text{جاس})^{\text{٢}}}}{\cancel{(\text{جتاس}-\text{جاس})}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جتاس}-\text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$= -(\text{جاس}+\text{جتاس})+\text{جـ}$$

$$= -\text{جاس}-\text{جتاس}+\text{جـ}$$

- $\text{جا}(\text{س}\pm\text{ص}) = \text{جاس جتاص} \pm \text{جتاس جاص}$
- $\text{جتا}(\text{س}\pm\text{ص}) = \text{جتاس جتاص} \mp \text{جاس جاص}$
- $\text{جا}(\text{٣س}) = \text{جا}(\text{س}+\text{٢س})$

$$= \text{جتاس جا٢س} + \text{جتا٢س جاس}$$

$$= \text{جتاس}(\text{٢جاس جتاس}) + \text{جتا٢س جاس}$$

$$= \text{٢جاس جتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا٢س جاس}$$

مثال(٢٣): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $$\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا}(\text{٢س}+\text{س})}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا٢س جتاس} - \text{جا٢س جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا٢س جتاس} - (\text{٢جاس جتاس})\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا٢س}\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}} - \frac{\text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س}\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جتا٢س} - \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جتا٢س} - \cancel{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\cancel{\text{٢}}}(\text{١}-\text{جتا٢س})\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{جتا٢س} - \text{١} + \text{جتا٢س}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{٢جتا٢س} - \text{١}\ \text{ءس}$$

$$= \cancel{\text{٢}}\ \frac{\text{جا٢س}}{\cancel{\text{٢}}} - \text{س}+\text{جـ} = \text{جا٢س} - \text{س}+\text{جـ}$$

٢) $\int \frac{ءس}{جا^{٢}س - جا^{٤}س}$

الحل:

$$= \int \frac{١}{جا^{٢}س\left(١ - جا^{٢}س\right)} ءس = \int \frac{١}{جا^{٢}س\left(جتا^{٢}س\right)} ءس$$

$$جا٢س = ٢جاس جتاس$$

$$\frac{١}{٢}جا٢س = جاس جتاس$$

$$\frac{١}{٤}جا^{٢}٢س = جا^{٢}س جتا^{٢}س$$

$$\therefore \int \frac{١}{\frac{١}{٤}جا^{٢}٢س} ءس = ٤\int قتا^{٢}٢س \, ءس$$

$$= ٤ \times \frac{-ظتا٢س}{٢} + جـ = -٢ظتا٢س + جـ$$

سؤال وزاري :

$$\int \frac{جتا٣س}{جتاس} ءس = \int \frac{جتا(٢س + س)}{جتاس} ءس$$

$$= \int \frac{جتا٢س جتاس - جا٢س جاس}{جتاس} ءس$$

$$= \int \frac{جتا٢س \cancel{جتاس}}{\cancel{جتاس}} - \frac{٢\cancel{جتاس} جاس جاس}{\cancel{جتاس}} ءس$$

$$= \int \left(جتا٢س - ٢جا^{٢}س\right) ءس$$

$$= \int \left(جتا٢س - ٢ \times \frac{١}{٢}\left(١ - جتا٢س\right)\right) ءس$$

$$= \int \left(جتا٢س - ١ + جتا٢س\right) ءس$$

$$= \int \left(٢جتا٢س - ١\right) ءس = جا٢س - س + جـ$$

سؤال وزاري :

اذا كان :

$$\int ٢ق'(س) ءس$$

$$= ٢س + جاس - \int جتاس \, ق'(س) ءس$$

جد : ق'(٠) ؟؟؟

الحل:

$$\frac{ء}{ءس}\int ٢ق'(س) ءس$$

$$= \frac{ء}{ءس}\left(٢س + جاس - \int جتاس \, ق'(س) ءس\right)$$

$$٢ق'(س) = ٢ + جتاس - جتاس \, ق'(س)$$

$$٢ق'(٠) = ٢ + جتا٠ - جتا٠ \, ق'(٠)$$

$$٢ق'(٠) = ٢ + ١ - ق'(٠)$$

$$٣ق'(٠) = ٣ \Leftarrow ق'(٠) = ١$$

مثال(٢٤): اذا كان $ق'(س) = ٢س - ١$ ، فجد قاعدة الاقتران $ق(س)$ علما ان مقطعه الصادي يساوي (٣) ؟

الحل:

$$ق(س) = \int ق'(س) ءس$$

$$= \int (٢س - ١) ءس = س^{٢} - س + جـ$$

$$\text{لكن } ق(٠) = ٣ \leftarrow (٠)^{٢} - ٠ + جـ = ٣$$

$$\Leftarrow جـ = ٣$$

$$\therefore ق(س) = س^{٢} - س + ٣$$

مثال (٢٥) : اذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}$ ومنحنى ق يمر بالنقطة (٤،٠) وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١) ، جد قاعدة ق(س) ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \int \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int ٦\text{س}^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= ١٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ج}_{١}$$

ميل المماس عند س = ٤ يساوي (١)

$$\text{ق}'(٤) = ١$$

$$١٢(٤)^{\frac{١}{٢}} + \text{ج}_{١} = ١$$

$$٢٤ + \text{ج}_{١} = ١ \Leftarrow \text{ج}_{١} = -٢٣$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ١٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢٣$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \int \left(١٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢٣\right)\text{ءس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٨\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٢٣\text{س} + \text{ج}_{٢}$$

يمر بالنقطة (٤،٠) $\Leftarrow \text{ق}(٤) = ٠$

$$= ٨(٤)^{\frac{٣}{٢}} - ٢٣(٤) + \text{ج}_{٢} = ٠$$

$$= ٨ \times ٨ - ٩٢ + \text{ج}_{٢} = ٠ \Leftarrow \text{ج}_{٢} = ٢٨$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٨\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٢٣\text{س} + ٢٨$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٨\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢٣\text{س} + ٢٨$$

سؤال وزاري :

اذا كان :

$$\int \left(\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢}\right)\text{ءس} = ٢\text{س}^{٣} + \text{ج}\text{س}^{٢} + ٢$$

وكان $\text{ق}'(١) = ٤$ ، $\text{ق}(٢) = ٦$، جد $\text{ق}(-١)$؟

الحل:

$$\int \left(\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢}\right)\text{ءس} = ٢\text{س}^{٣} + \text{ج}\text{س}^{٢} + ٢$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \left(\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(٢\text{س}^{٣} + \text{ج}\text{س}^{٢} + ٢\right)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢} = ٦\text{س}^{٢} + ٢\text{ج}\text{س}$$

$$\text{ق}'(١) = ٤$$

$$٤ + ١ = ٦(١)^{٢} + ٢\text{ج}(١) \Leftarrow \text{ج} = \frac{-١}{٢}$$

$$\int \left(\text{ق}'(\text{س}) + \text{س}^{٢}\right)\text{ءس} = ٢\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} + \int \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$= ٢\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢$$

$$\text{ق}(\text{س}) + \text{ء} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} = ٢\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢$$

لكن $\text{ق}(٢) = ٦$

$$\Leftarrow ٦ + \text{ء} + \frac{٨}{٣} = ١٦ - ٢ + ٢ \Leftarrow \text{ء} = \frac{٢٢}{٣}$$

$$\text{ق}(\text{س}) + \frac{٢٢}{٣} + \frac{\text{س}^{٣}}{٣} = ٢\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢$$

$$\text{ق}(-١) + \frac{٢٢}{٣} + \frac{(-١)^{٣}}{٣}$$

$$= ٢(-١)^{٣} - \frac{١}{٢}(-١)^{٢} + ٢$$

$$\Leftarrow \text{ق}(-١) = \frac{-١٥}{٢}$$

مثال (٢٦): اذا كان $ق''(س) = -٤جتا٢س$

وكان للاقتران $ق'$ قيمة صغرى محلية قيمتها (-٢) عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ، جد قاعدة الاقتران $ق(س)$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$ق'(س) = \int ق''(س) ءس$$

$$= \int -٤جتا٢س ءس = \frac{-٤جا٢س}{٢} + جـ_١$$

$$= -٢جا٢س + جـ_١$$

قيمة صغرى محلية عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ،

$$ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٠$$

$$-٢جا٢\frac{\pi}{٢} + جـ_١ = ١$$

$$-٢جا\pi + جـ_١ = ٠ \Leftarrow ٠ + جـ_١ = ٠$$

$$\Leftarrow جـ_١ = ٠$$

$$ق(س) = \int ق'(س) ءس = \int -٢جا٢س ءس$$

$$= \frac{\cancel{٢}جتا٢س}{\cancel{٢}} + جـ_٢$$

لكن $ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -٢$

$$جتا٢\left(\frac{\pi}{٢}\right) + جـ_٢ = -٢$$

$$-١ + جـ_٢ = -٢ \Leftarrow جـ_٢ = -١$$

$$ق(س) = جتا٢س - ١$$

الدرس الثاني: معكوس المشتقة:

سؤال : ما هي الاقترانات التي تكون مشتقتها $(\text{٣س}^{\text{٢}})$ ؟؟؟

الحل:

$\text{م}_{\text{١}}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}}$

$\text{م}_{\text{٢}}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} + \text{٢}$

$\text{م}_{\text{٣}}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{٥}}$

$\text{م}_{\text{٤}}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} - \sqrt{\text{٣}}$

وهكذا . . .

سؤال: ما هي الاقترانات التي تكون مشتقتها جتاس ؟؟؟

الحل:

$\text{م}_{\text{١}}(\text{س}) = \text{جاس} - \text{١}$

$\text{م}_{\text{٢}}(\text{س}) = \text{جاس} + \text{٤}$

وهكذا . . .

بشكل عام:

يسمى الاقتران $\text{م}(\text{س})$ معكوسا لمشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ اذا كان $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

- اذا كان (ق) اقترانا متصلا في الفترة [أ ، ب] ، فأن (م) هو معكوس لمشتقة (ق) اذا كان $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ لكل س $\in$ (أ،ب)
- فيكون (م) هو معكوس لمشتقة (ق) اذا كان :
  ١) (ق) اقترانا متصلا في الفترة [أ ، ب]
  ٢) $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ لكل س $\in$ (أ،ب)

مثال(١): بين ان الاقتران (م) الذي قاعدته $\text{م}(\text{س}) = \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٥س}$ هو معكوس لمشتقة $\text{ق}(\text{س})$ الذي قاعدته $\text{ق}(\text{س}) = \text{٤س} - \text{٥}$ ؟؟؟

الحل:

$\text{م}(\text{س}) = \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٥س}$ (معكوس)

$\text{م}'(\text{س}) = \text{٤س} - \text{٥} = \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{ق}(\text{س})$ متصل على مجاله

اذا (م) هو معكوس لمشتقة $\text{ق}(\text{س})$ وهو المطلوب

مثال(٢): بين ان الاقتران الذي قاعدته $\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س}}$ هو معكوس لمشتقة $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} + \text{٣}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س}}}$ ، س > ٠ ؟؟؟

الحل:

$\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س}}$ (معكوس)

$\text{م}'(\text{س}) = \frac{\text{٢س} + \text{٦}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س}}}$

$\text{م}'(\text{س}) = \frac{\cancel{\text{٢}}(\text{س} + \text{٣})}{\cancel{\text{٢}}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س}}} = \text{ق}(\text{س})$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل على مجاله

اذا (م) معكوس لمشتقة (ق) وهو المطلوب

مثال(٣): بين ان الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٤}} - \text{جاس} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{٤س}^{\text{٣}} - \text{جتاس}$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٤}} - \text{جاس} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}$ (معكوس)

$\text{م}'(\text{س}) = \text{٤س}^{\text{٣}} - \text{جتاس} = \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{ق}(\text{س})$

متصل على مجاله اذا (م) معكوس لمشتقة (ق) وهو المطلوب.

مثال (٤): بين ان الاقتران $م(س) = \sqrt{س}(س^٢ - ١)$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س) = \frac{١}{٢}\left(٥\sqrt{س^٣} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right)$ ؟؟؟

الحل:

$م(س) = \sqrt{س}(س^٢ - ١) = س^{\frac{٥}{٢}} - \sqrt{س}$

$م'(س) = \frac{٥}{٢}س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$م(س) = \frac{١}{٢}\left(٥\sqrt{س^٣} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right) = ق(س)$

مثال (٥): بين ان الاقتران $م(س) = \frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س) = (س+١)^{-٢}$ ، $س \neq -١$ ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$م'(س) = \frac{(س+١)\times ١ - س\times ١}{(س+١)^٢}$

$م'(س) = \frac{١}{(س+١)^٢}$

$م'(س) = (س+١)^{-٢} = ق(س)$

مثال (٦) : بين ان الاقتران $م(س) = جا^٢س$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س) = جا٢س$ ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$م(س) = جا^٢س$

$م'(س) = ٢جاس جتاس$

$م'(س) = جا٢س = ق(س)$

مثال (٧) : اذا كان $م(س) = (٢س - ٣)^٣$ معكوسا لمشتقة الاقتران $ق(س)$ ، جد $ق(١)$ ، $ق'(١)$ ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$م(س) = (٢س - ٣)^٣$

$ق(س) = م'(س) = ٣(٢س - ٣)^٢ \times ٢$

$= ٦(٢س - ٣)^٢$

$ق(١) = ٦(٢\times ١ - ٣)^٢ = ٦$

$ق'(س) = ٢ \times ٦(٢س - ٣) \times ٢$

$ق'(س) = ٢٤(٢س - ٣)$

$ق'(١) = ٢٤(٢\times ١ - ٣) = -٢٤$

مثال (٨): اذا كان $م(س)$ معكوسا لمشتقة الاقتران $ق(س) = ظتاس + ١$ ، فجد : $م''\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$م'(س) = ق(س)$

$م'(س) = ظتاس + ١$

$م''(س) = -قتا^٢س$

$م''\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -\left(قتا\frac{\pi}{٤}\right)^٢$

$م''\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -(\sqrt{٢})^٢ = -٢$

مثال (٩): اذا كان $م(س)$ معكوسا لمشتقة الاقتران $ق(س) = ٢س - ٢جا أس$ ، وكانت $م''(٠) = ٤$ ، فان قيمة الثابت (أ) هي ؟؟؟

الحل:

أ) صفر ب) ١ $\boxed{جـ) -١}$ د) ٢

مثال(١٠): اذا كان الاقتران م(س) معكوسا لمشتقة ﮪ(س) حيث م(س) = س^{٢} + أس ، ﮪ(١) = ٤ ؛جد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

م(س) = س^{٢} + أس (معكوس)

م′(س) = ٢س + أ ∴ ﮪ(س) = ٢س + أ

ﮪ(١) = ٤ $\Leftarrow$ ٢(١) + أ = ٤ $\Leftarrow$ أ = ٢

مثال(١١): اذا كان ﮪ(س) = أس + ب ، م(س) معكوس لمشتقة ﮪ(س) ؛ جد (أ)،(ب) علما ان م′(١) = ٦ ، م″(١) = ٣ ؟؟؟

الحل:

م(س) (معكوس)

م′(س) = ﮪ(س) $\Leftarrow$ م′(١) = ﮪ(١) = ٦

م″(س) = ﮪ′(س) $\Leftarrow$ م″(١) = ﮪ′(١) = ٣

ﮪ(١) = ٦ $\Leftarrow$ أ(١) + ب = ٦

أ + ب = ٦ ...... (١)

ﮪ′(س) = أ $\Leftarrow$ ﮪ′(١) = أ = ٣

من (١) :

(٣) + ب = ٦ $\Leftarrow$ ب = ٣

∴ ﮪ(س) = ٣س + ٣

مثال(١٢): اذا كان م(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} − ٣س+جـ معكوس لمشتقة (ﮪ) ؛ فجد ﮪ(−٢) ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

م(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} − ٣س+جـ (معكوس)

م′(س) = ٣س^{٢} + ١٠س − ٣ = ﮪ(س)

ﮪ(−٢) = ٣(−٢)^{٢} + ١٠(−٢) − ٣

ﮪ(−٢) = ١٢ − ٢٠ − ٣ = −١١

مثال(١٣): اذا كان م(س) = ٢س^{٤} + $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}$ معكوس لمشتقة (ﮪ) ؛ فجد ﮪ(١) ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

م(س) = ٢س^{٤} + $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣}$ (معكوس)

م′(س) = ٨س^{٣} + $\dfrac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}$ = ﮪ(س)

ﮪ(س) = ٨س^{٣} + $\dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}$

ﮪ(١) = ٨(١)^{٣} + $\dfrac{(١)}{\sqrt{(١)^{٢}+٣}}$

ﮪ(١) = ٨ + $\dfrac{(١)}{\sqrt{٤}}$ = ٨ + $\dfrac{١}{٢}$ = $\dfrac{١٧}{٢}$

- لنفرض ان ﮪ(س) = ٢س

م$_{١}$(س) = س^{٢} − ١ (معكوس لمشتقة ﮪ)

$\Leftarrow$ م′(س) = ٢س

م$_{٢}$(س) = س^{٢} + ٥ (معكوس لمشتقة ﮪ)

$\Leftarrow$ م′(س) = ٢س

م$_{٣}$(س) = س^{٢} − ٣ (معكوس لمشتقة ﮪ)

$\Leftarrow$ م′(س) = ٢س

∴ م$_{١}$ معكوس لمشتقة (ﮪ)

∴ م$_{٢}$ معكوس لمشتقة (ﮪ)

∴ م$_{٣}$ معكوس لمشتقة (ﮪ)

م$_{١}$ − م$_{٢}$ = جـ(ثابت)

(م$_{١}$ − م$_{٢}$)′ = صفرا

مثال (١٤): اذا كان ﮪ(س) = ٢س ، اكتب اقترانين (م(س)، ه(س)) بحيث يكون كل منهما معكوسا لمشتقة ﮪ(س) ؟؟؟

الحل:

م(س) = س^{٢} + ٥

ه(س) = س^{٢} − ٢

مثال (١٥): في المثال السابق فليكن $ل(س) = م(س) - هـ(س)$، جد $ل'(١)$ ؟؟؟

الحل:

$$ل(س) = م(س) - هـ(س)$$
$$ل(س) = س^{٢} + ٥ - س^{٢} + ٢$$
$$ل(س) = ٧$$
$$ل'(س) = ٠$$
$$ل'(١) = ٠$$

ماذا تستنتج

اذا كان (م) ، (هـ) معكوسين لمشتقة الاقتران $ق(س)$ فان $م(س) - هـ(س) =$ ثابت

مثال(١٦): اذا كان $م_{١}(س)$، $م_{٢}(س)$ كل منها معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س)$ ، وكان $ل(س) = م_{١}(س) - م_{٢}(س)$ ؛فجد $ل'(س)$ ؟؟؟

الحل:

$$ل(س) = م_{١}(س) - م_{٢}(س) = جـ(\text{ثابت})$$
$$\therefore ل'(س) = \left(م_{١}(س) - م_{٢}(س)\right)' = \text{صفرا}$$

قاعدة :

$$\frac{د}{دس} \int ق(س)\, دس = ق(س)$$

البرهان :

$$\int ق(س)\, دس = م(س) + جـ$$

باشتقاق الطرفين

$$\frac{د}{دس} \int ق(س)\, دس = م'(س)$$

لكن $م'(س) = ق(س)$

$$\frac{د}{دس} \int ق(س)\, دس = ق(س)$$

مثال(١٧): اذا كان $\int ق(س)\, دس = س^{٤} + س + ٤$ ؛جد $ق(١)$ ، $ق'(١)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int ق(س)\, دس = س^{٤} + س + ٤$$
$$\frac{د}{دس} \int ق(س)\, دس = \frac{د}{دس}\left(س^{٤} + س + ٤\right)$$
$$ق(س) = ٤س^{٣} + ١$$
$$ق(١) = ٤(١)^{٣} + ١ = ٥$$
$$ق'(س) = ١٢س^{٢}$$
$$ق'(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢$$

مثال(١٨): اذا كان $\int ق(١ - ٢س)\, دس = (س^{٢} + ٥س)^{٢}$ ؛جد $ق(٣)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int ق(١ - ٢س)\, دس = (س^{٢} + ٥س)^{٢}$$
$$\frac{د}{دس} \int ق(١ - ٢س)\, دس = \frac{د}{دس}(س^{٢} + ٥س)^{٢}$$
$$ق(١ - ٢س) = ٢(س^{٢} + ٥س)(٢س + ٥)$$
$$ق(٣) = ١ - ٢س = ٣ \Leftarrow -٢س = ٢ \Leftarrow س = -١$$
$$ق(-١) = ق((١ - ٢(-١)) = ق(٣)$$
$$= ٢((-١)^{٢} + ٥(-١))(٢(-١) + ٥)$$
$$= -٨ \times ٣ = -٢٤$$

مثال(١٩): اذا كان $\int ق(س)\, دس = ٣س^{٢} - ٥س$ ؛ جد $ق(-٢)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int ق(س)\, دس = ٣س^{٢} - ٥س$$
$$\frac{د}{دس} \int ق(س)\, دس = \frac{د}{دس}(٣س^{٢} - ٥س)$$
$$ق(س) = ٦س - ٥$$
$$ق(-٢) = ٦(-٢) - ٥ = -١٧$$

مثال(٢٠): اذا كان $\int ق'(س)\,ءس = \sqrt{٣س+١}$

؛جد $ق'(١)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int ق'(س)\,ءس = \sqrt{٣س+١}$$

$$\frac{ء}{ءس}\int ق'(س)\,ءس = \frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{٣س+١}\right)$$

$$ق'(س) = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س+١}}$$

$$ق'(١) = \frac{٣}{٢\sqrt{٣(١)+١}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٤}} = \frac{٣}{٤}$$

مثال(٢١): اذا كان $\int \left(س^٢ + ٣ق(س)\right)ءس = س^٣$

؛جد $ق'(-٣)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \left(س^٢ + ٣ق(س)\right)ءس = س^٣$$

$$\frac{ء}{ءس}\int \left(س^٢ + ٣ق(س)\right)ءس = \frac{ء}{ءس}\left(س^٣\right)$$

$$س^٢ + ٣ق(س) = ٣س^٢$$

$$٣ق(س) = ٢س^٢ \Leftarrow ق(س) = \frac{٢}{٣}س^٢$$

$$ق'(س) = \frac{٤}{٣}س \Leftarrow ق'(-٣) = \frac{٤}{٣}(-٣) = -٤$$

مثال(٢٢): اذا كان ص $= \int \sqrt[5]{٣س^٢ - ٤س + ١٢}\,ءس$

؛ جد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢}$ ؟؟؟

الحل:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\left(\int \sqrt[5]{٣س^٢ - ٤س + ١٢}\,ءس\right)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt[5]{٣س^٢ - ٤س + ١٢}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢} = \sqrt[5]{٣(-٢)^٢ - ٤(-٢) + ١٢}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢} = \sqrt[5]{١٢+٨+١٢} = \sqrt[5]{٣٢} = ٢$$

مثال(٢٣): اذا كان ص $= \int \sqrt[3]{س^٢ - ٣س + ٤}\,ءس$

؛جد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١}$ ؟؟؟

الحل:

$$ص = \int \sqrt[3]{س^٢ - ٣س + ٤}\,ءس$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\left(ص = \int \sqrt[3]{س^٢ - ٣س + ٤}\,ءس\right)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt[3]{س^٢ - ٣س + ٤}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١} = \sqrt[3]{(-١)^٢ - ٣(-١) + ٤}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١} = \sqrt[3]{١+٣+٤} = \sqrt[3]{٨} = ٢$$

مثال(٢٤): اذا كان $\int ق(س)\,ءس = جا^٢ ٢س + ظاس + جـ$

؛جد $ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int ق(س)\,ءس = جا^٢ ٢س + ظاس + جـ$$

$$\frac{ء}{ءس}\left(\int ق(س)\,ءس\right) = \frac{ء}{ءس}\left(جا^٢ ٢س + ظاس + جـ\right)$$

$$ق(س) = ٢جا٢س \times جتا٢س \times ٢ + قا^٢ س$$

$$جا٢س = ٢\,جاس\,جتاس$$

$$جا٤س = ٢\,جا٢س\,جتا٢س$$

$$ق(س) = ٢جا٤س + قا^٢ س$$

$$ق'(س) = ٢جتا٤س \times ٤ + ٢قاس \times قاس\,ظاس$$

$$ق'(س) = ٨جتا٤س + ٢قا^٢ س\,ظاس$$

$$ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٨جتا\left(\cancel{٤} \times \frac{\pi}{\cancel{٤}}\right) + ٢\left(قا\frac{\pi}{٤}\right)^٢ ظا\frac{\pi}{٤}$$

$$ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٨(-١) + ٢\left(\sqrt{٢}\right)^٢ (١)$$

$$ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -٨ + ٤ = -٤$$

مثال(٢٥): اذا كان $\int \text{(٣ − ق(س))}\,\text{ءس} = \text{جا٢س}$ ؛ جد $\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٦}}\right)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \text{(٣ − ق(س))}\,\text{ءس} = \text{جا٢س}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{(٣ − ق(س))}\,\text{ءس}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{جا٢س}\right)$$

$$\text{٣ − ق(س) = ٢جتا٢س}$$

$$\text{− ق(س) = ٢جتا٢س − ٣}$$

$$\text{ق(س) = ٣ − ٢جتا٢س}$$

$$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٦}}\right) = \text{٣ − ٢جتا}\left(\text{٢} \times \frac{\pi}{\text{٦}}\right)$$

$$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٦}}\right) = \text{٣ − ٢}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right) = \text{٣ − ١ = ٢}$$

مثال(٢٦): اذا كان

$$\int \text{ق}'\text{(س)}\,\text{ءس} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س − أجتاس + ١}$$

وكان $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right) = \text{٠}$ ؛ جد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟

(كتاب)

الحل:

$$\int \text{ق}'\text{(س)}\,\text{ءس} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س − أجتاس + ١}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{ق}'\text{(س)}\,\text{ءس}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س − أجتاس + ١}\right)$$

$$\text{ق}'\text{(س) = ٢جاس جتاس + أجاس}$$

$$\text{ق}'\text{(س) = جا٢س + أجاس}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right) = \text{جا}\left(\text{٢} \times \frac{\pi}{\text{٤}}\right) + \text{أجا}\left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right)$$

$$\text{١ + أ}\left(\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\right) = \text{٠} \Leftarrow \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{٢}}} = \text{−١} \Leftarrow \text{أ} = -\sqrt{\text{٢}}$$

$$\therefore \text{ق}'\text{(س) = جا٢س} - \sqrt{\text{٢}}\,\text{جاس}$$

مثال(٢٧): اذا كان $\int \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \text{جاس − جتاس + ٣}$ ؛ فأثبت ان $\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) - \text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{٢}$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$\int \text{ق(س)}\,\text{ءس} = \text{جاس − جتاس + ٣}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{ق(س)}\,\text{ءس}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{جاس − جتاس + ٣}\right)$$

$$\text{ق(س) = جتاس + جاس}$$

$$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) + \text{جا}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{٠ + ١ = ١}$$

$$\text{ق}'\text{(س) = − جاس + جتاس}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = -\text{جا}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) + \text{جتا}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{−١ + ٠ = −١}$$

$$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) - \text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{١ − −١ = ٢}$$ وهو المطلوب

سؤال وزاري: اذا كان $\int \text{٢ق}'\text{(س)}\,\text{ءس} =$

$\text{٢س + جاس} - \int \text{جتاس ق}'\text{(س)}\,\text{ءس}$ ؛ فجد $\text{ق}'\text{(٠)}$ ؟؟؟

الحل:

$$= \text{٢س + جاس} - \int \text{جتاس ق}'\text{(س)}\,\text{ءس}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int \text{٢ق}'\text{(س)}\,\text{ءس}\right)$$

$$= \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{٢س + جاس} - \int \text{جتاس ق}'\text{(س)}\,\text{ءس}\right)$$

$$\text{٢ق}'\text{(س) = ٢ + جتاس − جتاس ق}'\text{(س)}$$

$$\text{٢ق}'\text{(س) + جتاس ق}'\text{(س) = ٢ + جتاس}$$

$$\text{ق}'\text{(س)(٢ + جتاس) = ٢ + جتاس}$$

$$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{\text{٢ + جتاس}}{\text{٢ + جتاس}} \Rightarrow \text{ق}'\text{(س) = ١}$$

$$\therefore \text{ق}'\text{(٠) = ١}$$

مثال(٢٨): اذا كان

$$\int \left(ق'(س) + ٢س\right) ءس = س^{٣} + أس^{٢} + ١$$

؛ $ق'(١) = ٥$ ، $ق(٢) = ٧$ ؛ جد ???

١) قيمة (أ)

٢) $ق'(٤)$

٣) $ق(٤)$

الحل:

١) $\frac{ء}{ءس}\left(\int \left(ق'(س) + ٢س\right) ءس\right)$

$= \frac{ء}{ءس}\left(س^{٣} + أس^{٢} + ١\right)$

$ق'(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢أس$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٢أس$

$ق'(١) = ٥ \Leftarrow ٣(١)^{٢} - ٢(١) + ٢أ(١) = ٥$

$ق'(١) = ٥ \Leftarrow ٣ - ٢ + ٢أ = ٥$

$ق'(١) = ٥ \Leftarrow ١ + ٢أ = ٥ \Leftarrow أ = ٢$

٢) $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٢(٢)س$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢س$

$ق'(٤) = ٣(٤)^{٢} + ٢(٤) = ٤٨ + ٨ = ٥٦$

٣) $\int ق'(س)\, ءس = \int \left(٣س^{٢} + ٢س\right) ءس$

$ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + جـ$

$ق(٢) = ٧$

$\Leftarrow ق(٢) = (٢)^{٣} + (٢)^{٢} + جـ = ٧$

$= ٨ + ٤ + جـ = ٧ \Leftarrow ١٢ + جـ = ٧$

$\Leftarrow جـ = -٥$

$ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥$

$ق(٤) = (٤)^{٣} + (٤)^{٢} - ٥ \Leftarrow ق(٤) = ٧٥$

- اذا كان $\int ق'(س)\, ءس =$ اقتران

$ق(س) =$ اقتران $+ جـ$

مثال(٢٩): اذا كان

$$\int ق'(س)\, ءس = س^{٢} + ٣س + ٣$$

، $ق(١) = ٢$ ؛ جد $ق(٤)$???

الحل:

$ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٣ + جـ$

$ق(١) = ٢ \Leftarrow (١)^{٢} + ٣(١) + ٣ + جـ$

$ق(١) \Leftarrow ٧ + جـ = ٢ \Leftarrow جـ = -٥$

$\therefore ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٣ - ٥$

$ق(س) = س^{٢} + ٣س - ٢$

$ق(٤) = (٤)^{٢} + ٣(٤) - ٢ = ١٦ + ١٢ - ٢ = ٢٦$

مثال(٣٠): اذا كان $ق'(س) = ٦س^{٢} + ٢س$ ؛ جد قاعدة الاقتران (ق) علما ان منحناه يمر بالنقطة (١، ١٠) ???

الحل:

$ق'(س) = ٦س^{٢} + ٢س$

$\int ق'(س)\, ءس = \int ٦س^{٢} + ٢س\ ءس$

$ق(س) = ٢س^{٣} + س^{٢} + جـ$

$ق(١) = ١٠ \Leftarrow ٢(١)^{٣} + (١)^{٢} + جـ = ١٠$

$٢ + ١ + جـ = ١٠ \Leftarrow جـ = ٧$

اذا قاعدة الاقتران $ق(س) = ٢س^{٣} + س^{٢} + ٧$

مثال(٣١): اذا كان $ق'(س) = ٢س + ٣$ ، $ق(٢) = ١٢$ ؛ جد قاعدة الاقتران ???

الحل:

$ق'(س) = ٢س + ٣$

$\int ق'(س)\, ءس = \int ٢س + ٣\ ءس$

$ق(س) = س^{٢} + ٣س + جـ$

$ق(٢) = ١٢ \Leftarrow (٢)^{٢} + ٣(٢) + جـ = ١٢$

$ق(٢) = ١٢ \Leftarrow ١٠ + جـ = ١٢ \Leftarrow جـ = ٢$

اذا قاعدة الاقتران $ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٢$

مثال (٣٢) : اذا كان $م(س)$ معكوسا لمشتقة الاقتران $ق(س) = \frac{-٢}{س^{٢}}$ فجد قاعدة الاقتران $م(س)$ علما ان $م(-٢) = -٧$ ؟؟؟

الحل:

$$\int ق(س)\, دس$$

$$\int \frac{-٢}{س^{٢}}\, دس = \frac{٢}{س} + جـ$$

$$م(س) = \frac{٢}{س} + جـ$$

لكن $م(-٢) = -٧$

$$\frac{٢}{-٢} + جـ = -٧ \Leftarrow جـ = -٦$$

$$م(س) = \frac{٢}{س} - ٦$$

مثال(٣٣): اذا كان $ق'(س) + جاس = ٢س$ وكان $ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٤$ ؛ جد $ق(س)$ ؟؟؟

الحل:

$$ق'(س) = ٢س - جاس$$

$$\int ق'(س)\, دس = \int ٢س - جاس\, دس$$

$$ق(س) = س^{٢} - جاس + جـ$$

$$ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٤ \Leftarrow \left(\frac{\pi}{٢}\right)^{٢} - جا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + جـ = ٤$$

$$\frac{\pi^{٢}}{٤} - ١ + جـ = ٤ \Leftarrow جـ = ٥ - \frac{\pi^{٢}}{٤}$$

$$\therefore\ ق(س) = س^{٢} - جاس + ٥ - \frac{\pi^{٢}}{٤}$$

مثال(٣٤): اذا كان ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $(س، ص)$ يساوي $٥س^{٤} + ٢س + ٣$ ؛ جد قاعدة $(ق)$ علما ان $ق(٢) = ٣$ ؟؟؟

الحل:

ميل المماس = المشتقة

$$\int ق'(س)\, دس = \int ٥س^{٤} + ٢س + ٣\, دس$$

$$ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س + جـ$$

$$ق(٢) = ٣ \Leftarrow (٢)^{٥} + (٢)^{٢} + ٣(٢) + جـ = ٣$$

$$٣٢ + ٤ + ٦ + جـ = ٣ \Leftarrow جـ = -٣٩$$

اذا قاعدة الاقتران

$$ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س - ٣٩$$

مثال(٣٥): اذا كان $(ق)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة $ق''(س) = ٣س + ١$ ؛ وكانت النقطة $(١،٠)$ نقطة حرجة للاقتران $(ق)$ فجد قاعدة $(ق)$ ؟؟؟

الحل:

نقطة حرجة تعني $ق'(أ) = ٠$

$(١،٠)$ نقطة حرجة تعني $ق(٠) = ١$

$$ق'(٠) = ٠$$

$$\int ق''(س)\, دس = \int ٣س + ١\, دس$$

$$ق'(س) = \frac{٣}{٢}س^{٢} + س + جـ$$

$$ق'(٠) = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٢}(٠)^{٢} + (٠) + جـ \Leftarrow جـ = ٠$$

$$ق'(س) = \frac{٣}{٢}س^{٢} + س$$

$$\int ق'(س)\, دس = \int \frac{٣}{٢}س^{٢} + س\, دس$$

$$ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + جـ$$

$$ق(٠) = ١ \Leftarrow \frac{١}{٢}(٠)^{٣} + \frac{١}{٢}(٠)^{٢} + جـ = ١$$

اذا قاعدة الاقتران

$$ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٣} + \frac{١}{٢}س^{٢} + ١$$

مثال(٣٦): اذا كان ميل المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ عند $(\text{س}،\text{ص})$ يساوي $\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}$ ؛جد قاعدة (ق) علما ان $\text{ق}(\text{٠}) = \text{٣}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}\,\text{دس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{٠}) = \text{٣}$$

$$\Leftarrow (\text{٠})^{\text{٣}} - (\text{٠})^{\text{٢}} + \text{جـ} = \text{٣} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٣}$$

اذا قاعدة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣}$

مثال(٣٧): اذا كان ميل المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ عند $(\text{١}،-\text{١})$ يساوي (١٠)؛ جد قاعدة الاقتران علما ان $\text{ق}''(\text{س}) = \text{١٨س} - \text{٨}$ ؟؟؟

الحل:

ميل المماس عند النقطة $(\text{١}،-\text{١})$ يساوي (١٠)

$$\text{ق}(\text{١}) = -\text{١} \quad ، \quad \text{ق}'(\text{١}) = \text{١٠}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \text{١٨س} - \text{٨}$$

$$\int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{١٨س} - \text{٨}\,\text{دس}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٩س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}'(\text{١}) = \text{١٠} \Leftarrow \text{٩}(\text{١})^{\text{٢}} - \text{٨}(\text{١}) + \text{جـ} = \text{١٠}$$

$$\text{٩} - \text{٨} + \text{جـ} = \text{١٠} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٩}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٩س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{٩}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{٩س}^{\text{٢}} - \text{٨س} + \text{٩}\,\text{دس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س}^{\text{٣}} - \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٩س} + \text{جـ}$$

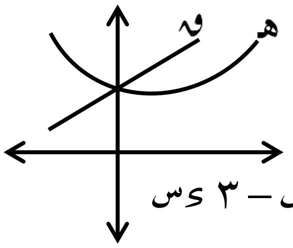
$$\text{ق}(\text{١}) = -\text{١} \Leftarrow \text{٣}(\text{١})^{\text{٣}} - \text{٤}(\text{١})^{\text{٢}} + \text{٩}(\text{١}) + \text{جـ} = -\text{١}$$

$$\text{٣} - \text{٤} + \text{٩} + \text{جـ} = -\text{١} \Leftarrow \text{جـ} = -\text{٩}$$

اذا قاعدة الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س}^{\text{٣}} - \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{٩س} - \text{٩}$$

سؤال وزاري: الشكل المجاور يمثل الاقترانين $(\text{ق})،(\text{هـ})$ وكان $\text{ق}(\text{س}) = \text{٣س} + \text{٤}$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = \text{٢س} - \text{٣}$ ؛ جد $\text{هـ}(\text{٥})$ ؟؟؟



الحل:

$$\int \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{٢س} - \text{٣}\,\text{دس}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{جـ}$$

$\text{ق}(\text{٠}) = \text{٣}(\text{٠}) + \text{٤} = \text{٤} \Leftarrow (\text{٠}،\text{٤})$ نقطة

تقاطع المنحنيين على محور الصادات $\text{س} = \text{٠}$

$\therefore (\text{٠}،\text{٤})$ تقع على المنحنيين

$$\text{هـ}(\text{٠}) = \text{٤} \Leftarrow (\text{٠})^{\text{٢}} - \text{٣}(\text{٠}) + \text{جـ} = \text{٤} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٤}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٤}$$

$$\text{هـ}(\text{٥}) = (\text{٥})^{\text{٢}} - \text{٣}(\text{٥}) + \text{٤} \Leftarrow \text{هـ}(\text{٥}) = \text{١٤}$$

مثال(٣٨): اذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{١}$ ؛جد $\text{ق}(\text{٣}) - \text{ق}(\text{١})$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} + \text{١})\,\text{دس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}^{\text{٤}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{\text{٣}} + \text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{٣}) = \frac{\text{١}}{\text{٤}}(\text{٣})^{\text{٤}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{٣})^{\text{٣}} + (\text{٣}) + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{٣}) = \frac{\text{٨١}}{\text{٤}} - \frac{\text{٢٧}}{\text{٣}} + \text{٣} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق}(\text{٣}) = \frac{\text{٥٧}}{\text{٤}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{١}) = \frac{\text{١}}{\text{٤}}(\text{١})^{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{١})^{\text{٣}} + (\text{١}) + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{١}) = \frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{٣}} + \text{١} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ق}(\text{١}) = \frac{\text{١٩}}{\text{١٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{٣}) - \text{ق}(\text{١}) \Leftarrow \frac{\text{٥٧}}{\text{٤}} + \text{جـ} - \left(\frac{\text{١٩}}{\text{١٢}} + \text{جـ}\right)$$

$$\text{ق}(\text{٣}) - \text{ق}(\text{١}) \Leftarrow \frac{\text{٥٧}}{\text{٤}} \cancel{+\text{جـ}} - \frac{\text{١٩}}{\text{١٢}} \cancel{-\text{جـ}}$$

$$\text{ق}(\text{٣}) - \text{ق}(\text{١}) \Leftarrow \frac{\text{١٥٢}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٣٨}}{\text{٣}}$$

مثال(٣٩): اذا كان $\int \text{ق}(\text{٢س})\,\text{ءس} = \text{٢س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{س}$

؛جد $\text{ق}'(\text{٤})$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \text{ق}(\text{٢س})\,\text{ءس} = \text{٢س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{س}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\int \text{ق}(\text{٢س})\,\text{ءس} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{٢س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٢}} - \text{س}\right)$$

$$\text{ق}(\text{٢س}) = \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٨س} - \text{١}$$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\,\text{ق}(\text{٢س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٨س} - \text{١}\right)$$

$$\text{ق}'(\text{٢س}) \times \text{٢} = \text{١٢س} + \text{٨}$$

$$\text{ق}'(\text{٢س}) = \text{٦س} + \text{٤}$$

$$\Leftarrow \text{٢س} = \text{٤} \Leftarrow \text{س} = \text{٢}$$

$$\text{ق}'(\text{٤}) = \text{ق}'(\text{٢}\times\text{٢}) = \text{٦}(\text{٢}) + \text{٤} = \text{١٦}$$

مثال(٤٠): اذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = -\text{٤جتا٢س}$ وكان للاقتران قيمة صغرى محلية قيمتها $(-\text{٢})$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}}$ ؛فجد قاعدة الاقتران ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

للاقتران قيمة صغرى محلية قيمتها $(-\text{٢})$ عند

$$\text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}} \Leftarrow \text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = -\text{٢}$$

$$\Leftarrow \text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{٠}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = -\text{٤جتا٢س}$$

$$\int \text{ق}''(\text{س})\,\text{ءس} = \int -\text{٤جتا٢س}\,\text{ءس}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{٤} \times \frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{٠} \Leftarrow -\text{٢جا٢}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٠}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{٢جا٢س}$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \int -\text{٢جا٢س}\,\text{ءس}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = -\text{٢} \times \frac{-\text{جتا٢س}}{\text{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا٢س} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = -\text{٢} \Leftarrow \text{جتا}\left(\text{٢} \times \frac{\pi}{\text{٢}}\right) + \text{جـ} = -\text{٢}$$

$$\Leftarrow -\text{١} + \text{جـ} = -\text{٢} \Leftarrow \text{جـ} = -\text{١}$$

اذا قاعدة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا٢س} - \text{١}$

الدرس الثالث : التكامل المحدود

قاعدة

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} م'(س)\,ءس = [م(س)]_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ)$$

حيث

أ : الحد السفلي للتكامل

ب : الحد العلوي للتكامل

م : معكوس المشتقة لاقتران ق(س)

- لإيجاد التكامل المحدود: نجد التكامل غير المحدود ونحذف (جـ) ونعوض الحد الاعلى ونطرح منه تعويض الحد الاسفل

مثال (١) : اذا كان ق(−١) = ٥ ، ق(٢) = −٤

جد $\int_{-١}^{٢} ق'(س)\,ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{-١}^{٢} ق'(س)\,ءس = [ق(س)]_{-١}^{٢}$$

$$= ق(٢) - ق(-١) = -٤ - ٥ = -٩$$

مثال (٢) : اذا كان ق(س) = ٣س^{٢} − ٤س + جـ

جد $\int_{٠}^{١} ق'(س)\,ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٠}^{١} ق'(س)\,ءس = [ق(س)]_{٠}^{١}$$

$$= ٣(١)^{٢} - ٤(١) + جـ - [٣(٠) - ٤(٠) + جـ]$$

$$= -١ + جـ - جـ = -١$$

مثال(٣): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int_{-١}^{٢} ٥\,ءس$

الحل:

$$\int_{-١}^{٢} ٥\,ءس = [٥س]_{-١}^{٢} = ٥(٢ - -١) = ١٥$$

- اذا $\int_{أ}^{ب} ثابت\,ءس = ثابت\,(ب - أ)$

---

٢) $\int_{٠}^{٣} \frac{-١}{٢}\,ءس$

الحل:

$$\int_{٠}^{٣} \frac{-١}{٢}\,ءس = \frac{-١}{٢}(٣ - ٠) = \frac{-٣}{٢}$$

---

٣) $\int_{-٢}^{٠} ٥أ\,ءس$

الحل:

$$\int_{-٢}^{٠} ٥أ\,ءس = ٥أ(٠ - -٢) = ١٠أ$$

---

٤) $\int_{٠}^{٢} ٢س\,ءس$

الحل:

$$\int_{٠}^{٢} ٢س\,ءس = [س^{٢}]_{٠}^{٢}$$

$$= \left((٢)^{٢} - (٠)^{٢}\right) = ٤ - ٠ = ٤$$

٥) $\int_{٠}^{٤} ٣\text{س} + ٢ \ \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{٠}^{٤} ٣\text{س} + ٢ \ \text{ءس} = \left[\frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right]_{٠}^{٤}$$

$$\left(\frac{٣}{٢}(٤)^{٢} + ٢(٤)\right) - \left(\frac{٣}{٢}(٠)^{٢} + ٢(٠)\right)$$

$$= (٢٤ + ٨) - ٠ = ٣٢$$

---

٦) $\int_{١}^{١٦} \sqrt{\text{س}} \ \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{١}^{١٦} \sqrt{\text{س}} \ \text{ءس} = \int_{١}^{١٦} (\text{س})^{\frac{١}{٢}} \ \text{ءس}$$

$$= \frac{٢}{٣}\left[\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{١٦} = \frac{٢}{٣}\left[\sqrt{\text{س}^{٣}}\right]_{١}^{١٦}$$

$$= \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(١٦)^{٣}} - \sqrt{(١)^{٣}}\right)$$

$$= \frac{٢}{٣}(٦٤ - ١) = \frac{٢}{\cancel{٣}_{١}} \times \cancel{٦٣}^{٢١} = ٤٢$$

---

٧) $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \ \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{١}^{٤} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \ \text{ءس} = ٢\left[\sqrt{\text{س}}\right]_{١}^{٤}$$

$$= ٢\sqrt{٤} - ٢\sqrt{١} = ٢$$

٨) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس ءس}$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس ءس} = \left[-\text{جتاس}\right]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= -\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٢} - \text{جتا}\frac{\pi}{٣}\right) = -\left(٠ - \frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$$

---

٩) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٦}} \text{قتاس ظتاس ءس}$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٦}} \text{قتاس ظتاس ءس} = \left[-\text{قتاس}\right]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= -\left(\text{قتا}\frac{\pi}{٦} - \text{قتا}\frac{\pi}{٣}\right) = -\left(٢ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)$$

$$= -٢ + \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-٢\sqrt{٣} + ٢}{\sqrt{٣}}$$

---

١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جتاس} - \text{جاس}\right)\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جتاس} - \text{جاس}\right)\text{ءس} = \left[\left(\text{جاس} + \text{جتاس}\right)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \left(\text{جا}\frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\frac{\pi}{٢}\right) - \left(\text{جا٠} + \text{جتا٠}\right)$$

$$= (١ + ٠) - (٠ + ١) = ١ - ١ = ٠$$

١١) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2\text{ظا}^2\text{س} - 2\text{قا}^2\text{س}\right)\text{ءس}$

الحل:

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\text{ظا}^2\text{س} - \text{قا}^2\text{س}\right)\text{ءس}$$

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -1\,\text{ءس} = -2\text{س} = -2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$$

١٢) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس}\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \text{ظا}\frac{\pi}{4} - \text{ظا}\frac{-\pi}{6} = 1 - \frac{-1}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

١٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(2\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتاس} - \text{جاس}\right)}{\text{جاس}}\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\text{جاس}}\left(2\text{جاس}\,\text{جتاس} - 1\right)}{\cancel{\text{جاس}}}\text{ءس}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(2\text{جاس}\,\text{جتاس} - 1\right)\text{ءس}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{جا}2\text{س} - 1\right)\text{ءس} = \left[\left(\frac{-\text{جتا}2\text{س}}{2} - \text{س}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{-\text{جتا}\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{-\text{جتا}(2\times 0)}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

١٤) $\int_{-2}^{1} \frac{\text{س}^3 - 27}{\text{س}^2 + 3\text{س} + 9}\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{-2}^{1} \frac{(\text{س} - 3)\cancel{(\text{س}^2 + 3\text{س} + 9)}}{\cancel{\text{س}^2 + 3\text{س} + 9}}\text{ءس}$$

$$\int_{-2}^{1} (\text{س} - 3)\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^2}{2} - 3\text{س}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{(1)^2}{2} - 3(1)\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} - 3(-2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 3\right) - (2 + 6)$$

$$= \frac{-5}{4} - 8 = \frac{-21}{2}$$

١٥) $\int_{0}^{2} (2\text{س} - 1)(4\text{س}^2 + 2\text{س} + 1)\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{0}^{2} (8\text{س}^3 - 1)\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{8\text{س}^4}{4} - \text{س}\right]_{0}^{2} = \left[2\text{س}^4 - \text{س}\right]_{0}^{2}$$

$$2(2)^4 - 2 - 0 = 32 - 2 = 30$$

١٦) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س}\,(س-٢)^{٢}\, ءس$

الحل:

$$\int_{٠}^{١} \sqrt{س}\,(س^{٢}-٤س+٤)\, ءس$$

$$\int_{٠}^{١} \left(س^{\frac{٥}{٢}}-٤س^{\frac{٣}{٢}}+٤س^{\frac{١}{٢}}\right) ءس$$

$$\left[\frac{٢}{٧}س^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٨}{٥}س^{\frac{٥}{٢}}+\frac{٨}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$$

$$\frac{٢}{٧}-\frac{٨}{٥}+\frac{٨}{٣}-٠=\frac{١٤٢}{١٠٥}$$

مثال (٤) : اذا كان

$م(س)=\int_{٠}^{٢س} جا٢ص\, ءص$ ، جد $م\left(\frac{\pi}{٤}\right)$???

الحل:

$$م(س)=\int_{٠}^{٢س} جا٢ص\, ءص$$

$$=\left[\frac{-جتا٢ص}{٢}\right]_{٠}^{٢س}=\frac{-جتا٤س}{٢}+\frac{جتا٠}{٢}$$

$$=\frac{-جتا٤س}{٢}+\frac{١}{٢}$$

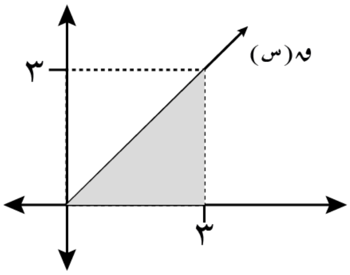
$$م\left(\frac{\pi}{٤}\right)=\frac{-جتا\pi}{٢}+\frac{١}{٢}=\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}=١$$

ملاحظة :

التكامل المحدود = المساحة المحصورة تحت منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات على الفترة [أ، ب]

مثال (٥): معتمدا على الشكل المجاور؛ جد

$\int_{٠}^{٣} ق(س)\, ءس$???



الحل:

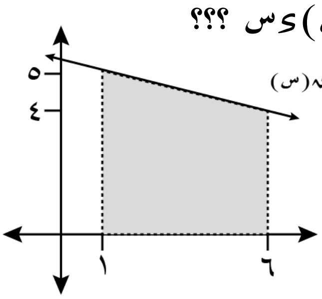
المساحة = $\int_{٠}^{٣} ق(س)\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢}\times٣\times٣=\frac{٩}{٢}$

مثال (٦) : معتمدا على الشكل المجاور جد

$\int_{١}^{٦} ق(س)\, ءس$???



الحل:

مساحة شبة المنحرف

$= \frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢}(٥+٤)\times٥=\frac{٤٥}{٢}$

مثال(٧): اذا كان $\int_{١}^{٢أ} ٢\, ءس=٦$ ؛ فما قيمة الثابت (أ) ???

الحل:

$$\int_{١}^{٢أ} ٢\, ءس=٦=٢(٢أ-١)=٦$$

$$٢أ-١=٣ \Leftarrow ٢أ=٤ \Leftarrow أ=٢$$

مثال(٨): اذا كان $\int_{-1}^{2} \text{ب}\, \text{دس} = 15$؛ جد قيمة الثابت (ب) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{-1}^{2} \text{ب}\, \text{دس} = 15 = \text{ب}(2 - -1) = 15$$

$$3\text{ب} = 15 \Leftarrow \text{ب} = 5$$

مثال(٩): اذا كان $\int_{2+\text{أ}}^{2+3\text{أ}} 5\, \text{دس} = 40$؛ جد قيمة الثابت(أ) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{2+\text{أ}}^{2+3\text{أ}} 5\, \text{دس} = 40 = 5\big(2+3\text{أ} - (2+\text{أ})\big) = 40$$

$$= 5(0+2\text{أ}) = 40 \Leftarrow 2\text{أ} = 8 \Leftarrow \text{أ} = 4$$

مثال(١٠): اذا كان $\int_{\text{أ}}^{2} 2\text{أ}\, \text{دس} = -30$؛ جد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{\text{أ}}^{2} 2\text{أ}\, \text{دس} = -30 = 2\text{أ}(2-\text{أ}) = -30$$

$$4\text{أ} - 2\text{أ}^2 = -30 \Leftarrow 2\text{أ}^2 - 4\text{أ} - 30 = 0$$

$$\text{أ}^2 - 2\text{أ} - 15 = 0 \Leftarrow (\text{أ}-5)(\text{أ}+3) = 0$$

$$\text{أ} = 5 \text{ ، } \text{أ} = -3$$

مثال(١١): اذا كان $\int_{-1}^{\text{جـ}} \text{س}\, \text{دس} = 0$؛ جد قيمة الثابت (جـ) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{-1}^{\text{جـ}} \text{س}\, \text{دس} = 0 = \left[\frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{-1}^{\text{جـ}} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left((\text{جـ})^2 - (-1)^2\right) = 0$$

$$\text{جـ}^2 = 1 \Leftarrow \text{جـ} = 1 \text{ ، } \text{جـ} = -1$$

- اذا كان ناتج التكامل يساوي صفرا من الاحتمال ان يكون الحد الاعلى يساوي الحد الادنى

مثال(١٢): اذا كان $\text{ق}(1) = 4$ ، $\text{ق}(2) = 12$ وكان $\int_{1}^{2} \text{أ}\,\text{ق}'(\text{س})\, \text{دس} = 16$ ، فجد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{1}^{2} \text{أ}\,\text{ق}'(\text{س})\, \text{دس} = \text{أ}\left[\text{ق}(\text{س})\right]_{1}^{2}$$

$$= \text{أ}\,\text{ق}(2) - \text{أ}\,\text{ق}(1) = 12\text{أ} - 4\text{أ} = 16$$

$$8\text{أ} = 16 \Leftarrow \text{أ} = 2$$

مثال(١٣): اذا كان $\int_{9}^{3\text{أ}-1} \text{أ}\, \text{دس} = 8$ ، جد قيمة (أ) ؟؟؟

الحل:

$$\text{أ}(3\text{أ} - 1 - 9) = 8$$

$$3\text{أ}^2 - 10\text{أ} - 8 = 0$$

$$(3\text{أ} - 2)(\text{أ} - 4) = 0$$

$$3\text{أ} = -2 \Leftarrow \text{أ} = \frac{-2}{3} \text{ ، } \text{أ} = 4$$

مثال(١٤): اذا كان $\int_{1}^{\text{ج}} (2\text{س}^2 + 6\text{س})\, \text{د}\text{س} = 0$ ؛ جد قيمة الثابت (ج) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{1}^{\text{ج}} 2\text{س}^2 + 6\text{س}\, \text{د}\text{س} = 0$$

$$\left[\frac{2}{3}\text{س}^3 + 3\text{س}^2\right]_{1}^{\text{ج}} = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}(\text{ج})^3 + 3(\text{ج})^2\right) - \left(\frac{2}{3}(1)^3 + 3(1)^2\right) = 0$$

$$\left(\left(\frac{2\text{ج}^3}{3} + 3\text{ج}^2\right) - \left(\frac{2}{3} + 3\right) = 0\right) \times 3$$

$$(2\text{ج}^3 + 9\text{ج}^2) - (2 + 9) = 0$$

$2\text{ج}^3 + 9\text{ج}^2 - 11 = 0 \Leftarrow$ اصفار نسبية

- بما انا ناتج التكامل يساوي صفرا اذا احدى الاحتمالات الحد الاعلى = الحد الادنى للتكامل

اذا ج $= 1$ احدى الحلول

$$2(1)^3 + 9(1)^2 - 11 = 0$$

$$11 - 11 = 0 \Leftarrow \therefore \text{ج} = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 9 & . & -11 \\ 1\ \times & & 2 & 11 & 11 \\ \hline & 2 & 11 & 11 & . \end{array}$$

$$(\text{ج} - 1)(2\text{ج}^2 + 11\text{ج} + 11) = 0$$

$$\Delta = \text{ب}^2 - 4\text{أج}$$

$$\Delta = (11)^2 - 4(2)(11)$$

$$\Delta = 121 - 88 = 33$$

اذا $\Leftarrow \text{ج} = 1$

$$\Leftarrow \text{ج} = \frac{-\text{ب} \mp \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}$$

$$\Leftarrow \text{ج} = \frac{-(11) \mp \sqrt{33}}{2(2)}$$

$$\Leftarrow \text{ج} = \frac{-11 + \sqrt{33}}{4}$$

$$\Leftarrow \text{ج} = \frac{-11 - \sqrt{33}}{4}$$

مثال(١٥): اذا كان:

$$\int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - 2\int_{0}^{\text{ج}} 3\text{م}\, \text{د}\text{م}\right) \text{د}\text{س} = -20 \text{ ،}$$

جد قيمة الثابت (ج) ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$\int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - 2\int_{0}^{\text{ج}} 3\text{م}\, \text{د}\text{م}\right) \text{د}\text{س} = -20$$

$$\int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - \cancel{2}\left(\frac{3\text{م}^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_{0}^{\text{ج}}\right) \text{د}\text{س} = -20$$

$$\int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - \left(3\text{ج}^2 - 0\right)\right) \text{د}\text{س} = -20$$

$$\int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - 3\text{ج}^2\right) \text{د}\text{س} = -20$$

$$\left[\text{س}^3 - 3\text{ج}^2\text{س}\right]_{-1}^{3} = -20$$

$$27 - 9\text{ج}^2 - (-1 + 3\text{ج}^2) = -20$$

$$27 - 9\text{ج}^2 + 1 - 3\text{ج}^2 = -20$$

$$-12\text{ج}^2 = -48 \Leftarrow \text{ج}^2 = 4 \Leftarrow \text{ج} = \pm 2$$

مثال (١٦): اذا كان : $\int_{2}^{\text{ب}} (2\text{س} - 3)\, \text{د}\text{س} = 20$ ، فجد الثابت (ب) ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$$\int_{2}^{\text{ب}} (2\text{س} - 3)\, \text{د}\text{س} = \left[\text{س}^2 - 3\text{س}\right]_{2}^{\text{ب}} = 20$$

$$\text{ب}^2 - 3\text{ب} - \left((2)^2 - 3(2)\right) = 20$$

$$\text{ب}^2 - 3\text{ب} + 2 = 20$$

$$\Leftarrow \text{ب}^2 - 3\text{ب} - 18 = 0$$

$$\Leftarrow (\text{ب} - 6)(\text{ب} + 3) = 0$$

$$\Leftarrow \text{ب} = 6 \text{ ، } \text{ب} = -3$$

مثال(١٧): جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الاولى

اذا كان $\text{ق}(٠)=١$ ، $\int_{٠}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٤$ ؟؟؟

الحل:

كثير حدود من الدرجة الاولى

$$\text{ق}(\text{س})=\text{أس}+\text{ب}$$

$$\text{ق}(٠)=١ \Leftarrow \text{ق}(٠)=\text{أ}(٠)+\text{ب}$$

$$\Leftarrow \text{ب}=١$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س})=\text{أس}+١$$

$$\int_{٠}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٤ \Leftarrow \int_{٠}^{١}(\text{أس}+١)\,\text{دس}=٤$$

$$\left[\frac{\text{أ}}{٢}\text{س}^{٢}+\text{س}\right]_{٠}^{١}=٤$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{٢}(١)^{٢}+(١)\right)-\left(\cancel{\frac{\text{أ}}{٢}(٠)^{٢}+(٠)}\right)=٤$$

$$\frac{\text{أ}}{٢}+١=٤ \Leftarrow \frac{\text{أ}}{٢}=٣ \Leftarrow \text{أ}=٦$$

$$\therefore \text{ق}(\text{س})=٦\text{س}+١$$

مثال(١٨): جد كثير الحدود ق(س) من الدرجة الاولى

حيث $\int_{١}^{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٦$ ، $\text{ق}(١)=٥$ ؟؟؟

الحل:

كثير حدود من الدرجة الاولى

$$\text{ق}(\text{س})=\text{أس}+\text{ب}$$

$$\text{ق}(١)=٥ \Leftarrow \text{ق}(١)=\text{أ}(١)+\text{ب}$$

$$\Leftarrow ٥=\text{أ}+\text{ب} \Leftarrow \text{أ}+\text{ب}-٥=٠ \quad ....(١)$$

$$\int_{١}^{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٦ \Leftarrow \int_{١}^{٢}\text{أس}+\text{ب}\,\text{دس}=٦$$

$$\left[\frac{\text{أ}}{٢}\text{س}^{٢}+\text{بس}\right]_{١}^{٢}=٦$$

$$\left(\frac{\text{أ}}{٢}(٢)^{٢}+\text{ب}(٢)\right)-\left(\frac{\text{أ}}{٢}(١)^{٢}+\text{ب}(١)\right)=٦$$

$$(٢\text{أ}+٢\text{ب})-\frac{\text{أ}}{٢}-\text{ب}=٦$$

$$٤\text{أ}+٤\text{ب}-\text{أ}-٢\text{ب}=١٢$$

$$٣\text{أ}+٢\text{ب}-١٢=٠ \quad ....(٢)$$

$$٢\times(١)-(٢)$$

$$٢\text{أ}+\cancel{٢\text{ب}}-١٠=٠$$

$$٣\text{أ}+\cancel{٢\text{ب}}-١٢=٠$$

$$-\text{أ}+٢=٠ \Leftarrow \text{أ}=٢$$

من $(١) \Leftarrow ٢+\text{ب}-٥=٠$

$$\Leftarrow \text{ب}-٣=٠$$

$$\Leftarrow \text{ب}=٣$$

اذا كثير الحدود $\text{ق}(\text{س})=٢\text{س}+٣$

مثال (١٩): اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الاولى وكان $\int_{٠}^{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٩$

$\int_{١}^{٣}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=١٢$ ،اكتب قاعدة ق(س) ؟؟؟

الحل:

$$\text{ق}(\text{س})=\text{أس}+\text{ب}$$

$$\int_{٠}^{٢}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس}=٩$$

$$\left[\left(\frac{\text{أس}^{٢}}{٢}+\text{بس}\right)\right]_{٠}^{٢}=٩$$

$$٢\text{أ}+٢\text{ب}-٠=٩ \Leftarrow ٢\text{أ}+٢\text{ب}=٩ \quad ...(١)$$

$$\int_{١}^{٣}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=١٢$$

$$\left[\left(\frac{\text{أس}^{٢}}{٢}+\text{بس}\right)\right]_{١}^{٣}=١٢$$

$$٢\text{أ}+\text{ب}=٦ \quad ...(٢)$$

وبحل المعادلتين $\text{ب}=٣$ ، $\text{أ}=\frac{٣}{٢}$

خصائص التكامل المحدود:

الخاصية الاولى: $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,ءس = ٠$

مثال(٢٠): جد $\int_{٢}^{٢} \sqrt{س^{٢}+١} - \frac{١}{س^{٢}}\,ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٢}^{٢} \sqrt{س^{٢}+١} - \frac{١}{س^{٢}}\,ءس = ٠$$

مثال(٢١): اذا كان $\int_{١}^{جـ} ق(س)\,ءس = ٠$ ؛جد احدى قيم (جـ) الممكنة ؟؟؟

الحل:

بما ان ناتج التكامل يساوي صفرا اذا جـ = ١ من قيم (جـ) المحتملة ويمكن ان يكون للثابت (جـ) قيم اخرى.

الخاصية الثانية: اذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = جـ$ ؛فان

$$\int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس = -جـ$$

مثال(٢٢): اذا كان $\int_{-١}^{١} ق(س)\,ءس = ٣$ ؛ جد

$$\int_{١}^{-١} ق(س)\,ءس \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

$$\int_{١}^{-١} ق(س)\,ءس = -\int_{-١}^{١} ق(س)\,ءس = -٣$$

الخاصية الثالثة: اذا كان $\int_{أ}^{ب} جـ\, ق(س)\,ءس$

$$= جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

مثال(٢٣): اذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = ٢$ ؛جد

$$\int_{٣}^{١} ٢ق(س)\,ءس \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

$$\int_{٣}^{١} ٢ق(س)\,ءس = ٢\int_{٣}^{١} ق(س)\,ءس$$

$$= -٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = -٢\times٢ = -٤$$

مثال (٢٤): اذا كان $\int_{أ}^{٢} \frac{س}{\sqrt{س-١}}\,ءس = ٥$

جد $\int_{أ}^{٢} \frac{٣س}{\sqrt{س-١}}\,ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{أ}^{٢} \frac{٣س}{\sqrt{س-١}}\,ءس = ٣\int_{أ}^{٢} \frac{س}{\sqrt{س-١}}\,ءس$$

$$= ٣\times٥ = ١٥$$

الخاصية الرابعة: اذا كان $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))\,ءس$

$$= \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس$$

يوزع التكامل في عملتي الجمع والطرح فقط

مثال(٢٥): اذا كان $\int_{-٢}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٣$ ،

$\int_{-٢}^{١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} = -١$؛ جد

$\int_{-٢}^{١} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{-٢}^{١} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{-٢}^{١} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= ٣ + -١ = ٢$$

مثال (٢٦) : اذا كان

$\int_{١}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س}) + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦\right)\text{ءس} = ١٢$،

فجد $\int_{١}^{٣} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - \text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$ ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$$\int_{١}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س}) + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦\right)\text{ءس} = ١٢$$

$$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{١}^{٣} \text{س}^{-٢}\,\text{ءس} - \int_{١}^{٣} ٦\,\text{ءس} = ١٢$$

$$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \left[\frac{-١}{\text{س}}\right]_{١}^{٣} - ٦(٣-١) = ١٢$$

$$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \frac{٢}{٣} - ١٢ = ١٢$$

$$\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٣٥}{٣}$$

$$\int_{١}^{٣} \left[\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - \text{س}^{٢}\right]\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣}$$

$$= \frac{٣٥}{٦} - \frac{٢٦}{٣} = \frac{-١٧}{٣}$$

مثال (٢٧) : اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \left(\int_{٠}^{-٢} ٤\text{س}\,\text{ءس} - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$$

فجد $\text{ق}'(-١)$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int \left(\int_{٠}^{-٢} ٤\text{س}\,\text{ءس} - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \int_{٠}^{-٢} ٤\,\text{ءس} - ٣\text{س}^{٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٤(-٢-٠) - ٣\text{س}^{٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = -٨ - ٣\text{س}^{٢}$$

$$\text{ق}'(-١) = -٨ - ٣(-١)^{٢} = -١١$$

مثال (٢٨) : اذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -١$ ، $\int_{١}^{٣} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = -٢$ ؛ جد ؟؟؟

١) $\int_{١}^{٣} \left(\text{ق(س)} - ٢\text{هـ(س)}\right)\text{دس}$

٢) $\int_{١}^{٣} \left(\text{ق(س)} - ٢\text{س}\right)\text{دس}$

٣) اذا كان $\text{ل(س)} = \int_{١}^{٣} \text{سهـ(س)}\,\text{دس} + ٣\text{س}^{٢}$

؛جد $\text{ل}'(١)$

٤) اذا كان

$\int_{١}^{٣} \left(\text{ق(س)} + \text{أهـ(س)} - ٢\text{أ}\right)\text{دس} = -٧$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل:

١) $\int_{١}^{٣} \left(\text{ق(س)} - ٢\text{هـ(س)}\right)\text{دس}$

$= \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} - ٢\int_{١}^{٣} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

$= -١ - ٢ \times -٢ = ٣$

---

٢) $\int_{١}^{٣} \left(\text{ق(س)} - ٢\text{س}\right)\text{دس}$

$= \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} ٢\text{س}\,\text{دس}$

$= -١ - \left[\frac{٢\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٣} = -١ - ٨ = -٩$

٣) $\text{ل(س)} = \int_{١}^{٣} \text{سهـ(س)}\,\text{دس} + ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ل}'(\text{س}) = ٠ + ٦\text{س}$

$\text{ل}'(١) = ٦ \times ١ = ٦$

---

٤) $\int_{١}^{٣} \left(\text{ق(س)} + \text{أهـ(س)} - ٢\text{أ}\right)\text{دس} = -٧$

$\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \text{أ}\int_{١}^{٣} \text{هـ(س)}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} ٢\text{أ}\,\text{دس}$

$= -٧$

$-١ - ٢\text{أ} - ٢\text{أ}(٣ - ١) = -٧$

$-١ - ٦\text{أ} = -٧ \Leftarrow -٦\text{أ} = -٦ \Leftarrow \text{أ} = ١$

الخاصية الخامسة: خاصية الاضافة

اذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

ولا يشترط ان تكون (جـ) محصورة بين (أ) و (ب)

مثال(٢٩): اذا كان $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -٢$ ،

$\int_{٥}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ١$ ؛ جد $\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{٥}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= -٢ + ١ = -١$

مثال(٣٠): اذا كان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس - \int_{٥}^{٣} ق(س)\,دس$$

$$= \int_{٣}^{١} ق(س)\,دس$$ ؛ جد قيمة (أ)، (ب) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس - \int_{٥}^{٣} ق(س)\,دس$$

$$= \int_{٣}^{١} ق(س)\,دس$$

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{٥}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{١} ق(س)\,دس$$

$$\therefore أ = ٥ \text{ ، } ب = ١$$

مثال(٣١): اذا كان

$$\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س) + ٢س\right)\,دس = ١٦$$

$$\int_{٣}^{٢} \left(\frac{ق(س)}{٣} - ٤س + ١\right)\,دس = ٩$$ ؛ جد

$$\int_{٢}^{١} \left(\frac{٢ق(س)}{٣} + ٤س - ٦\right)\,دس$$ ؟؟؟

الحل:

$$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ٢س\,دس = ١٦$$

$$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + [س^{٢}]_{١}^{٣} = ١٦$$

$$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + \left((٣)^{٢} - (١)^{٢}\right) = ١٦$$

$$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + (٨) = ١٦$$

$$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٨ \Leftarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٤$$

$$\int_{٣}^{١} ق(س)\,دس = -٤$$

$$\int_{٣}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}\,دس - \int_{٣}^{٢} ٤س\,دس + \int_{٣}^{٢} ١\,دس = ٩$$

$$\frac{١}{٣}\int_{٣}^{٢} ق(س)\,دس - [٢س^{٢}]_{٣}^{٢} + [س]_{٣}^{٢} = ٩$$

$$\frac{١}{٣}\int_{٣}^{٢} ق(س)\,دس - ٢(٤-٩) + (٢-٣) = ٩$$

$$\frac{١}{٣}\int_{٣}^{٢} ق(س)\,دس + ١٠ - ١ = ٩$$

$$\frac{١}{٣}\int_{٣}^{٢} ق(س)\,دس = ٠$$

$$\int_{٣}^{٢} ق(س)\,دس = ٠ \Leftarrow \int_{٢}^{٣} ق(س)\,دس = ٠$$

$$\frac{٢}{٣}\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{١} ٤س\,دس - \int_{٢}^{١} ٦\,دس$$

$$\frac{٢}{٣}\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس + [٢س^{٢}]_{٢}^{١} - [٦س]_{٢}^{١}$$

$$\frac{٢}{٣}\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس + ٢(١^{٢} - ٢^{٢}) - ٦(١-٢)$$

$$\frac{٢}{٣}\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس \cancel{-٦} + \cancel{٦} = \frac{٢}{٣}\int_{٢}^{١} ق(س)\,دس$$

$$= \frac{٢}{٣}\left(\int_{٢}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{١} ق(س)\,دس\right)$$

$$= \frac{٢}{٣}(٠ + -٤) = \frac{-٨}{٣}$$

مثال(٣٢): اذا كان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{٥}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$ ؛جد قيم كل من (أ) و (ب) ؟؟؟

الحل:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{٥}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$+ \int_{٥}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$\therefore \ \text{أ} = ١ \ ، \ \text{ب} = ٨$$

مثال(٣٣): جد

$$\int_{٠}^{٢} (٢\text{س} - ١)(٤\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١)\,\text{دس}$$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٠}^{٢} (٨\text{س}^{٣} - ١)\,\text{دس}$$

$$= \left[\frac{٨\text{س}^{٤}}{٤} - \text{س}\right]_{٠}^{٢} = \left[٢\text{س}^{٤} - \text{س}\right]_{٠}^{٢}$$

$$٢(٢)^{٤} - ٢ - ٠ = ٣٢ - ٢ = ٣٠$$

مثال(٣٤): اذا كان $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$؛

$\int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٣$؛ جد

$$\int_{١}^{٤} \left(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}\right)\text{دس}$$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤ \Leftarrow ٢\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$$

$$\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$$

$$\int_{١}^{٤} \left(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}\right)\text{دس}$$

$$= \int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٤} ٢\text{س}\,\text{دس}$$

$$= \int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \left[\text{س}^{٢}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \left(\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right) + \left(٤^{٢} - ١^{٢}\right)$$

$$= (٢ + ٣) + (١٦ - ١) = ٥ + ١٥ = ٢٠$$

سؤال وزاري :

اذا كان : $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س)+٣)\,دس = -١٧$ ،

وكان $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢$

فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س)-١)\,دس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢ \Rightarrow \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = -٦$$

$$\int_{٩}^{٢} (٢ق(س)+٣)\,دس = -١٧$$

$$\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس = ٢$$

وبالتالي

$$\int_{٥}^{٩} (٤ق(س)-١)\,دس$$

$$= ٤\int_{٥}^{٩} ق(س)\,دس - ١(٩-٥)$$

$$= ٤\left[\int_{٥}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٩} ق(س)\,دس\right] - ٤$$

$$= ٤[٦-٢] - ٤ = ١٢$$

مثال(٣٥): اذا كان $\int_{٠}^{١} ق(س)\,دس = ١٤$ ،

$$\int_{٠}^{٤} (٣ق(س)-١)\,دس = ٢$$

فجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٠} ق(س)\,دس + \int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس$$

لكن $\int_{٠}^{٤} (٣ق(س)-١)\,دس = ٢$

$$٣\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس - ٤ = ٢$$

$$٣\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس = ٦$$

$$\int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس = ٢$$

وبالتالي

$$\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٠} ق(س)\,دس + \int_{٠}^{٤} ق(س)\,دس$$

$$= -١٤ + ٢ = -١٢$$

مثال(٣٦): اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{ظاس} & ، \; 0 \le \text{س} < \frac{\pi}{4} \\ \frac{\text{قاس}}{\sqrt{2}} & ، \; \frac{\pi}{4} \le \text{س} \le \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \text{قاس ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \text{قاس ق}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قاس ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \text{قاس ق}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قاس ظاس}\,\text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\sqrt{2}}\,\text{ءس}$$

$$= \left[\text{قاس}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{\text{ظاس}}{\sqrt{2}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\text{قا}\frac{\pi}{4} - \text{قا}0\right) + \left(\frac{\text{ظا}\frac{\pi}{3} - \text{ظا}\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - 1\right) + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

مثال(٣٧): اذا كان $\int_{2}^{5} 3\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 6$ ؛

$\int_{5}^{2} \frac{1}{2}\text{ع}(\text{س})\,\text{ءس} = 4$ ؛جد

$\int_{2}^{5} 2\text{ق}(\text{س}) + \frac{\text{ع}(\text{س})}{4} + 2\text{س}\,\text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{2}^{5} 3\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 6 \Leftarrow 3\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 6$$

$$\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_{5}^{2} \text{ع}(\text{س})\,\text{ءس} = 4 \Leftarrow \int_{5}^{2} \text{ع}(\text{س})\,\text{ءس} = 8$$

$$\int_{2}^{5} \text{ع}(\text{س})\,\text{ءس} = -8$$

$$2\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \frac{1}{4}\int_{2}^{5} \text{ع}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{2}^{5} 2\text{س}\,\text{ءس}$$

$$2(2) + \frac{1}{4}(-8) + \left[\text{س}^2\right]_{2}^{5}$$

$$= 4 - 2 + \left(5^2 - 2^2\right) = 2 + (25 - 4)$$

$$= 2 + (21) = 23$$

مثال(٣٨): اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} & ، \ ٠ \le \text{س} \le ١ \\ ٢\text{س}+١ & ، \ ١ < \text{س} \le ٤ \end{cases} \quad \text{؛ جد ؟؟؟}$$

١) $\int_{٠}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

٢) $\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ ٣) $\int_{\frac{١}{٢}}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

الحل:

١) $\int_{٠}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

$$= \int_{٠}^{١} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{١}^{٤} ٢\text{س}+١\,\text{ءس}$$

$$= \left[\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\text{س}^{٢}+\text{س}\right)\right]_{١}^{٤}$$

$$= (١) + \left((١٦+٤)-(١+١)\right)$$

$$= (١) + (٢٠-٢) = ١٩$$

٢) $\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

$$= \int_{٠}^{١} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{١}^{٣} (٢\text{س}+١)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\text{س}^{٣}\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\text{س}^{٢}+\text{س}\right)\right]_{١}^{٣}$$

$$= (١-٠) + \left((٩+٣)-(١+١)\right)$$

$$= (١) + (١٢-٢) = ١١$$

٣) $\int_{\frac{١}{٢}}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

$$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} (٢\text{س}+١)\,\text{ءس}$$

$$= \left[\text{س}^{٣}\right]_{\frac{١}{٢}}^{١} + \left[\left(\text{س}^{٢}+\text{س}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$$\left(١-\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}\right) + \left((٢)^{٢}+٢\right) - \left((١)^{٢}+١\right)$$

$$= \left(١-\frac{١}{٨}\right) + (٤+٢) - (٢)$$

$$= \left(\frac{٧}{٨}\right) + ٤ = \frac{٧}{٨} + \frac{٣٢}{٨} = \frac{٣٩}{٨}$$

سؤال وزاري :

اذا كان : $\int_{١}^{\text{أ}} \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس} = ١$ ، حيث (أ) ثابت

فجد $\int_{١}^{\text{أ}} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{١}^{\text{أ}} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int_{١}^{\text{أ}} \frac{٢\sqrt{\text{س}} \times \cancel{\sqrt{\text{س}}}}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}}\,\text{ءس}$$

$$= ٢\int_{١}^{\text{أ}} \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس} = ٢ \times ١ = ٢$$

مثال(٣٩): جد $\int_{٠}^{٨} |\text{س} - ٦|\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف المطلق $|\text{س} - ٦|$

$\text{س} - ٦ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٦$

٦ − س ‏ ‏ ‏ س − ٦
-------- ٦ +++++

$$\int_{٠}^{٨} |\text{س} - ٦|\, \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٦} (٦ - \text{س})\, \text{ءس} + \int_{٦}^{٨} (\text{س} - ٦)\, \text{ءس}$$

$$= \left[\left(٦\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)\right]_{٠}^{٦} + \left[\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٦\text{س}\right)\right]_{٦}^{٨}$$

$$= (٣٦ - ١٨) + ((٣٢ - ٤٨) - (١٨ - ٣٦))$$

$$= (١٨) + ((-١٦) - (-١٨))$$

$$= (١٨) + (٢) = ٢٠$$

مثال(٤٠): جد $\int_{٠}^{١} |\text{س}^{٢} - ٤|\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف المطلق $|\text{س}^{٢} - ٤|$

$\text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow (\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -٢$

س² − ٤ ‏ ‏ ٤ − س² ‏ ‏ س² − ٤
++++ −٢ ---- ٢ ++++

$$\int_{٠}^{١} |\text{س}^{٢} - ٤|\, \text{ءس} = \int_{٠}^{١} (٤ - \text{س}^{٢})\, \text{ءس}$$

$$= \left[\left(٤\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right)\right]_{٠}^{١}$$

$$= \left(٤(١) - \frac{١}{٣}(١)^{٣}\right) - \left(٤(٠) - \frac{١}{٣}(٠)^{٣}\right)$$

$$= \left(٤ - \frac{١}{٣}\right) = \frac{١٢}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{١١}{٣}$$

مثال(٤١): جد $\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}\, \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٢} \sqrt{(\text{س} - ١)(\text{س} - ١)}\, \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٢} \sqrt{(\text{س} - ١)^{٢}}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{٢} |\text{س} - ١|\, \text{ءس}$$

نعيد تعريف $|\text{س} - ١|$

$\text{س} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

١ − س ‏ ‏ ‏ س − ١
-------- ١ +++++

$$= \int_{٠}^{٢} \sqrt{(\text{س} - ١)^{٢}}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{٢} |\text{س} - ١|\, \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{١} (١ - \text{س})\, \text{ءس} + \int_{١}^{٢} (\text{س} - ١)\, \text{ءس}$$

$$= \left[\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$$\left(\left(١ - \frac{١}{٢}\right) - (٠)\right) + \left((٢ - ٢) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right)$$

$$\frac{١}{٢} + \left(٠ - \frac{-١}{٢}\right) = ١$$

مثال(٤٢): جد $\int_{٠}^{٦} \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}\; ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$= \int_{٠}^{٦} \sqrt{(س-٢)(س-٢)}\; ءس$$

$$= \int_{٠}^{٦} \sqrt{(س-٢)^{٢}}\; ءس = \int_{٠}^{٦} |س-٢|\; ءس$$

نعيد تعريف |س − ٢|

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

٢ − س -------- ٢ +++++ س − ٢

$$= \int_{٠}^{٦} \sqrt{(س-٢)^{٢}}\; ءس = \int_{٠}^{٦} |س-٢|\; ءس$$

$$= \int_{٠}^{٢} (٢-س)\; ءس + \int_{٢}^{٦} (س-٢)\; ءس$$

$$= \left((٤-٢)-(٠)\right) + \left((١٨-١٢)-(٢-٤)\right)$$

$$= ٢ + \left((٦)-(-٢)\right) = ٢ + ٨ = ١٠$$

مثال(٤٣): جد $\int_{-١}^{١} س^{٢}\,|س|\; ءس$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف |س|

$س = ٠$

− س -------- ٠ +++++ س

$$\int_{-١}^{١} س^{٢}\,|س|\; ءس$$

$$= \int_{-١}^{٠} س^{٢} \times (-س)\; ءس + \int_{٠}^{١} س^{٢} \times (س)\; ءس$$

$$= -\int_{-١}^{٠} س^{٣}\; ءس + \int_{٠}^{١} س^{٣}\; ءس$$

$$= \int_{٠}^{-١} س^{٣}\; ءس + \int_{٠}^{١} س^{٣}\; ءس$$

$$= \left[\left(\frac{١}{٤} س^{٤}\right)\right]_{٠}^{-١} + \left[\left(\frac{١}{٤} س^{٤}\right)\right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١}{٤}\left((-١)^{٤} - (٠)^{٤}\right) + \frac{١}{٤}\left((١)^{٤} - (٠)^{٤}\right)$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

مثال(٤٤): جد $\int_{٠}^{\pi} |جتاس|\; ءس$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف |جتاس|

$$جتاس = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \in ٠ \le س \le \pi$$

$$جتاس = ٠ \Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٢} \notin ٠ \le س \le \pi$$

جتاس +++++ $\frac{\pi}{٢}$ -------- π − جتا س

$$\int_{٠}^{\pi} |جتاس|\; ءس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتاس)\; ءس + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} (-جتاس)\; ءس$$

$$= \left[(جاس)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} + \left[(-جاس)\right]_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$$

$$= \left(جا\frac{\pi}{٢} - جا٠\right) + \left(-\left(جا\pi - جا\frac{\pi}{٢}\right)\right)$$

$$= (١-٠) + \left(-(٠-١)\right) = ١ + ١ = ٢$$

مثال(٤٥): جد $\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{١-\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\ \text{ءس}$$

نعيد تعريف |جاس|

$\text{جاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ \quad \ni \quad ٠ \le \text{س} \le ٢\pi$

$\text{جاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pi \quad \ni \quad ٠ \le \text{س} \le ٢\pi$

$\text{جاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢\pi \quad \ni \quad ٠ \le \text{س} \le ٢\pi$

جاس - جاس

+++++ --------

٠ π ٢π

$$= \int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\ \text{ءس} = \int_{٠}^{\pi} \text{جاس}\ \text{ءس} + \int_{\pi}^{٢\pi} -\text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$= \left[(-\text{جتاس})\right]_{٠}^{\pi} + \left[\left(-(-\text{جتاس})\right)\right]_{\pi}^{٢\pi}$$

$$= -\left(\text{جتا}\pi - \text{جتا}٠\right) + \left(\text{جتا}٢\pi - \text{جتا}\pi\right)$$

$$= -(-١-١) + (١--١) = ٢+٢ = ٤$$

مثال (٤٦): جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١+\text{جا}٢\text{س}}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}+\text{جا}٢\text{س}}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{(\text{جاس}+\text{جتاس})^{٢}}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|\text{جاس}+\text{جتاس}|}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

جاس+جتاس −جاس−جتاس

++++++ −−−−−

٠ π

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس}+\text{جتاس}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ١\ \text{ءس} = ١\left(\frac{\pi}{٢}-٠\right) = \frac{\pi}{٢}$$

مثال(٤٧): جد $\int_{١}^{٤} [\text{س}+١]\ \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف $[\text{س}+١]$

طول الدرجة $(\text{ل}) = \frac{١}{|١|} = ١$

نقطة الاسناد $\text{س} = ٠$

$$\begin{cases} ٢ & ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ٢ \le \text{س} < ٣ \\ ٤ & ٣ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

$$= \int_{١}^{٤} [\text{س}+١]\ \text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٢} (٢)\ \text{ءس} + \int_{٢}^{٣} (٣)\ \text{ءس} + \int_{٣}^{٤} (٤)\ \text{ءس}$$

$$= ٢(٢-١) + ٣(٣-٢) + ٤(٤-٣)$$

$$= ٢+٣+٤ = ٩$$

مثال(٤٨): جد $\int_{٠}^{٣} \left[\frac{١}{٢}س+٤\right] دس$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف $\left[\frac{١}{٢}س+٤\right]$

طول الدرجة (ل) $= \frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|} = ٢$

نقطة الاسناد $س = ٠$

$$\begin{cases} ٤ & ٠ \le س < ٢ \\ ٥ & ٢ \le س < ٤ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{٣} \left[\frac{١}{٢}س+٤\right] دس = \int_{٠}^{٢} (٤) دس + \int_{٢}^{٣} (٥) دس$$

$$= ٤(٢-١) + ٥(٣-٢) = ٨ + ٥ = ١٣$$

مثال(٤٩): جد $\int_{٢}^{٥} [٧-س] دس$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف $[٧-س]$

طول الدرجة (ل) $= \frac{١}{|-١|} = ١$

نقطة الاسناد $س = ٠$

$$\begin{cases} ٤ & ٢ < س \le ٣ \\ ٣ & ٣ < س \le ٤ \\ ٢ & ٤ < س \le ٥ \end{cases}$$

$$\int_{٢}^{٥} [٧-س] دس$$

$$= \int_{٢}^{٣} (٤) دس + \int_{٣}^{٤} (٣) دس + \int_{٤}^{٥} (٢) دس$$

$$= ٤(٣-٢) + ٣(٤-٣) + ٢(٥-٤)$$

$$= ٤ + ٣ + ٢ = ٩$$

مثال(٥٠): اذا كـــــــــــان

$$\int_{-١}^{١} \left[٣ق(س) + (س+١)^{٣}\right] دس = -٢$$

جد $\int_{-١}^{١} \frac{٢س^{٢} - س\,ق(س)}{س} دس$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{-١}^{١} \left[٣ق(س) + (س+١)^{٣}\right] دس$$

$$= ٣\int_{-١}^{١} ق(س) دس + \int_{-١}^{١} (س+١)^{٣} دس$$

$$= ٣\int_{-١}^{١} ق(س) دس + \left[\frac{(س+١)^{٤}}{٤}\right]_{-١}^{١}$$

$$٣\int_{-١}^{١} ق(س) دس + ٤ = -٢$$

$$\int_{-١}^{١} ق(س) دس = -٢$$

$$\Leftarrow \int_{-١}^{١} \frac{٢س^{٢} - س\,ق(س)}{س} دس$$

$$= \int_{-١}^{١} (٢س - ق(س)) دس$$

$$= [س^{٢}]_{-١}^{١} - \int_{-١}^{١} ق(س) دس$$

$$= ٠ - (-٢) = ٢$$

مثال(٥١): جد $\int_{١}^{٢} [\text{س} + ٠,٢]\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف $[\text{س} + ٠,٢]$

طول الدرجة (ل) $= \frac{١}{|١|} = ١$

نقطة الاسناد س $\Leftarrow \text{س} + ٠,٢ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٠,٢$

$$\begin{cases} ١ & ٠,٨ \le \text{س} < ١,٨ \\ ٢ & ١,٨ \le \text{س} < ٢,٨ \end{cases}$$

$$\int_{١}^{٢} [\text{س} + ٠,٢]\,\text{ءس} = \int_{١}^{١,٨} (١)\,\text{ءس} + \int_{١,٨}^{٢} (٢)\,\text{ءس}$$

$$= ١(١,٨ - ١) + ٢(٢ - ١,٨)$$

$$= ٠,٨ + ٠,٤ = ١,٢$$

مثال(٥٢): اذا كان $\int_{١}^{\text{جـ}} \left[\frac{١}{٣}\text{س} + ١\right] \text{ءس} = ١٢$ ، $\text{جـ} > ١$ ؛ جد قيمة الثابت (جـ) ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف $\left[\frac{١}{٣}\text{س} + ١\right]$

طول الدرجة (ل) $= \frac{١}{\left|\frac{١}{٣}\right|} = ٣$

نقطة الاسناد س $= ٠$

$$\begin{cases} ١ & ٠ \le \text{س} < ٣ \\ ٢ & ٣ \le \text{س} < ٦ \\ ٣ & ٦ \le \text{س} < ٩ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\int_{١}^{٣} (١)\,\text{ءس} + \int_{٣}^{٦} (٢)\,\text{ءس} + \cdots = ١٢$$

$$= ١(٣-١) + ٢(٦-٣) + \int_{٦}^{\text{جـ}} (٣)\,\text{ءس} + \cdots = ١٢$$

$$= ٢ + ٦ + \int_{٦}^{\text{جـ}} (٣)\,\text{ءس} + \cdots = ١٢$$

$$= \int_{٦}^{\text{جـ}} (٣)\,\text{ءس} + \cdots = ٤$$

$$٣(\text{جـ} - ٦) = ٤ \Leftarrow ٣\text{جـ} - ١٨ = ٤$$

$$٣\text{جـ} = ٢٢ \Leftarrow \text{جـ} = \frac{٢٢}{٣}$$

مثال(٥٣): اذا كان $\int_{١}^{\text{جـ}} \left[\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right] \text{ءس} = ١٧$ ؛ جد (جـ) ؟؟؟

الحل:

نعيد تعريف $\left[\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right]$

طول الدرجة (ل) $= \frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|} = ٢$

نقطة الاسناد س $= ٠$

$$\begin{cases} ١ & ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ٢ & ٢ \le \text{س} < ٤ \\ ٣ & ٤ \le \text{س} < ٦ \\ ٤ & ٦ \le \text{س} < ٨ \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\int_{١}^{\text{جـ}} \left[\frac{١}{٢}\text{س} + ١\right] \text{ءس} = ١٧$$

$$= \int_{١}^{٢} (١)\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٤} (٢)\,\text{ءس} + \cdots = ١٧$$

$$= ١(٢-١) + ٢(٤-٢) + \int_{٤}^{٦} (٣)\,\text{ءس} + \cdots = ١٧$$

$$= ١ + ٤ + ٣(٦-٤) + \int_{٤}^{٦} (٣)\,\text{ءس} + \cdots = ١٧$$

$$= ٥ + ٦ + \int_{٦}^{\text{جـ}} (٤)\,\text{ءس} + \cdots = ١٧$$

$$= ١١ + \int_{٦}^{\text{جـ}} (٤)\,\text{ءس} + \cdots = ١٧$$

$$= \int_{٦}^{\text{جـ}} (٤)\,\text{ءس} = ٦ = ٤(\text{جـ} - ٦) = ٦$$

$$٤\text{جـ} - ٢٤ = ٦ \Leftarrow ٤\text{جـ} = ٣٠ \Leftarrow \text{جـ} = \frac{١٥}{٢}$$

الخاصية السادسة : خاصية المقارنة

- اذا كان $\text{ق}(\text{س}) \geq ٠$ في الفترة $[\text{أ}،\text{ب}]$ ؛ فان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \geq ٠$$

القصد: لنفرض ان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٤$:

١) في الفترة $[٣،٥]$:

فان: $٢\text{س} - ٤ = ٠ \Leftarrow ٢\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢$

---- ++++++++++++

٢ ٣ ٥

$\text{ق}(\text{س})$ موجب في الفترة $[٣،٥]$

وعليه فان $\int_{٣}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ يجب ان يكون موجب

اثبات:

$$\int_{٣}^{٥} (٢\text{س}-٤)\,\text{ءس} = \left[\left(\text{س}^{٢} - ٤\text{س}\right)\right]_{٣}^{٥}$$

$$= \left((٥)^{٢} - ٤(٥)\right) - \left((٣)^{٢} - ٤(٣)\right)$$

$$= (٢٥-٢٠) - (٩-١٢) = ٥ + ٣ = ٨$$

ناتج التكامل موجب ايضا.

٢) في الفترة $[٠،٢]$

فان: $٢\text{س} - ٤ = ٠ \Leftarrow ٢\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢$

----------- +++++++++

٢

$\text{ق}(\text{س})$ سالب في الفترة $[٠،٢]$

وعليه فان $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ يجب ان يكون سالب

اثبات:

$$\int_{٠}^{٢} (٢\text{س}-٤)\,\text{ءس} = \left[\left(\text{س}^{٢} - ٤\text{س}\right)\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \left((٢)^{٢} - ٤(٢)\right) - \left((٠)^{٢} - ٤(٠)\right)$$

$$= (٤-٨) - (٠) = -٤$$

ناتج التكامل سالب ايضا.

- اذا كان $\text{ق}(\text{س}) \leq \text{هـ}(\text{س})$ في الفترة $[\text{أ}،\text{ب}]$

؛فان : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \leq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

القصد: لنفرض ان :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + ١$ في الفترة $[٢،٥]$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$ في الفترة $[٢،٥]$

حتى نعرف أي الاقترانين اكبر في الفترة $[٢،٥]$

نطرح الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})$ وندرس الاشارة ثم نحدد الفترة:

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) = ٠$$

$$(\text{س} + ١) - (\text{س}^{٢} + ١) = ٠$$

$$\text{س} + \cancel{١} - \text{س}^{٢} - \cancel{١} = ٠ \Leftarrow \text{س}(١ - \text{س}) = ٠$$

$$\text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ١$$

--- +++ ----------

٠ ١ ٢ ٥

في الفترة $[٢،٥]$ $\text{هـ}(\text{س}) \geq \text{ق}(\text{س})$

وعليه $\int_{٢}^{٥} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} \geq \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

اثبات:

$$\int_{٢}^{٥} (س^{٢}+١)\,دس \ge \int_{٢}^{٥} (س+١)\,دس$$

$$\left[\left(\frac{١}{٣}س^{٣}+س\right)\right]_{٢}^{٥} \ge \left[\left(\frac{١}{٢}س^{٢}+س\right)\right]_{٢}^{٥}$$

$$\left(\frac{١٢٥}{٣}+٥\right)-\left(\frac{٨}{٣}+٢\right) \ge \left(\frac{٢٥}{٢}+٥\right)-\left(\frac{٤}{٢}+٢\right)$$

$$\left(\frac{١٤٠}{٣}\right)-\left(\frac{١٤}{٣}\right) \ge \left(\frac{٣٥}{٢}\right)-\left(\frac{٨}{٢}\right)$$

$$\left(\frac{١٢٦}{٣}\right) \ge \left(\frac{٢٧}{٢}\right)$$

مثال(٥٤): دون حساب قيمة التكامل ما اشارة التكامل

$\int_{١}^{٢} س^{٣}\,دس$ ؟؟؟

- - - - - -   +++++

الحل:

$س^{٣}=٠ \Rightarrow س=٠$

اشارة $س^{٣}$ في الفترة $[١،٢]$ موجب

$\therefore \int_{١}^{٢} س^{٣}\,دس$ (موجب)

مثال(٥٥): اذا كان $ق(س) \ge ٦$ في الفترة $[١،٥]$

جد اصغر قيمة للمقدار؛ $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$ ؟؟؟

الحل:

$ق(س) \ge ٦$

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس \ge \int_{١}^{٥} (٦)\,دس$$

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس \ge ٢٤$$

اذا اصغر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$ هي (٢٤)

مثال(٥٦): اذا كان $ق(س) \le ٤$ في الفترة $[٢،٥]$

جد اكبر قيمة ممكنة للمقدار؛

$\int_{٢}^{٥} (٢ق(س)+٣)\,دس$ ؟؟؟

الحل:

$ق(س) \le ٤$

$٢ق(س) \le ٨$

$٢ق(س)+٣ \le ١١$

$$\int_{٢}^{٥} (٢ق(س)+٣)\,دس \le \int_{٢}^{٥} (١١)\,دس$$

$$\int_{٢}^{٥} (٢ق(س)+٣)\,دس \le ١١(٥-٢)$$

$$\int_{٢}^{٥} (٢ق(س)+٣)\,دس \le ٣٣$$

اذا اكبر قيمة ممكنة للمقدار

$\int_{٢}^{٥} (٢ق(س)+٣)\,دس$ هي (٣٣)

مثال(٥٧): اذا كان $٢ \le ق(س) \le ٥$ لكل $س \in [٣،٥]$ ؛جد اكبر واصغر قيمة

للمقدار $\int_{٣}^{٥} (٣ - ٢ق(س))\,دس$ ؟؟؟

الحل:

$$٢ \le ق(س) \le ٥$$

$$-٤ \ge -٢ق(س) \ge -١٠$$

$$-١٠ \le -٢ق(س) \le -٤$$

$$-٧ \le ٣ - ٢ق(س) \le -١$$

$$\int_{٣}^{٥}(-٧)\,دس \le \int_{٣}^{٥}(٣ - ٢ق(س))\,دس \le \int_{٣}^{٥}(-١)\,دس$$

$$-٧(٥-٣) \le \int_{٣}^{٥}(٣ - ٢ق(س))\,دس \le -١(٥-٣)$$

$$-١٤ \le \int_{٣}^{٥}(٣ - ٢ق(س))\,دس \le -٢$$

اصغر قيمة $\int_{٣}^{٥}(٣ - ٢ق(س))\,دس$ هي (-١٤)

اكبر قيمة $\int_{٣}^{٥}(٣ - ٢ق(س))\,دس$ هي (-٢)

مثال(٥٨): بين ان $٠ \le \int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{٢}}\,دس \le ٢$ ؟؟؟

الحل:

الطريقة الاولى:

$$-١ \le س \le ١ \Rightarrow ٠ \le س^{٢} \le ١$$

$$٠ \ge -س^{٢} \ge -١ \Rightarrow -١ \le -س^{٢} \le ٠$$

$$٠ \le ١ - س^{٢} \le ١ \Rightarrow ٠ \le \sqrt{١ - س^{٢}} \le ١$$

$$\int_{-١}^{١}(٠)\,دس \le \int_{-١}^{١}\left(\sqrt{١ - س^{٢}}\right)دس \le \int_{-١}^{١}(١)\,دس$$

$$٠ \le \int_{-١}^{١}\left(\sqrt{١ - س^{٢}}\right)دس \le ١(١ - -١)$$

$$٠ \le \int_{-١}^{١}\left(\sqrt{١ - س^{٢}}\right)دس \le ٢$$ وهو المطلوب

الطريقة الثانية:

افرض ان $ق(س) = \sqrt{١ - س^{٢}}$

نجد القيم العظمى والصغرى للاقتران $ق(س)$

١) اطراف حدود التكامل $س = ١$ ، $س = -١$

٢) نشتق $\Rightarrow ق'(س) = \dfrac{-\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٣) $ق'(س) = ٠ \Rightarrow \dfrac{-س}{\sqrt{١ - س^{٢}}} = ٠$

$$-س = ٠ \Rightarrow س = ٠$$

٤) اصفار المقام

$\Leftarrow \sqrt{١ - س^٢} = ٠ \Leftarrow ١ - س^٢ = ٠$

$(١ + س)(١ - س) = ٠$

$\Leftarrow (١ + س) = ٠ \Leftarrow س = -١$

$\Leftarrow (١ - س) = ٠ \Leftarrow س = ١$

٥) نجد الصور

$ق(٠) = \sqrt{١ - (٠)^٢} = ١$

$ق(١) = \sqrt{١ - (١)^٢} = ٠$

$ق(-١) = \sqrt{١ - (-١)^٢} = ٠$

اذا $٠ \le ق(س) \le ١$

$٠ \le \sqrt{١ - س^٢} \le ١$

$\int_{-١}^{١} (٠) ءس \le \int_{-١}^{١} \left(\sqrt{١ - س^٢}\right) ءس \le \int_{-١}^{١} (١) ءس$

$٠ \le \int_{-١}^{١} \left(\sqrt{١ - س^٢}\right) ءس \le ١(١ - - ١)$

$٠ \le \int_{-١}^{١} \left(\sqrt{١ - س^٢}\right) ءس \le ٢$ وهو المطلوب

مثال(٥٩): بين ان $٦ \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le ١٤$ ؟؟؟

الحل:

الطريقة الاولى:

$١ \le س \le ٣ \quad \Leftarrow \quad ٢ \le ٢س \le ٦$

$٣ \le ٢س + ١ \le ٧$

$\int_{١}^{٣} (٣) ءس \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le \int_{١}^{٣} (٧) ءس$

$٣(٣ - ١) \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le ٧(٣ - ١)$

$٦ \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le ١٤$ وهو المطلوب

الطريقة الثانية:

افرض ان $ق(س) = ٢س + ١$

١) اطراف التكامل $\Leftarrow س = ١ ، س = ٣$
٢) نشتق $\Leftarrow ق'(س) = ٢$
٣) $ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٢ \ne ٠$
٤) لا يوجد اصفار مقام
٥) نجد الصور:

$ق(١) = ٢(١) + ١ = ٣$

$ق(٣) = ٢(٣) + ١ = ٧$

$٣ \le ق(س) \le ٧$

$٣ \le ٢س + ١ \le ٧$

$\int_{١}^{٣} (٣) ءس \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le \int_{١}^{٣} (٧) ءس$

$٣(٣ - ١) \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le ٧(٣ - ١)$

$٦ \le \int_{١}^{٣} (٢س + ١) ءس \le ١٤$ وهو المطلوب

مثال(٦٠): دون حساب قيمة التكامل

$$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢}\,\text{ءس}$$ بين ان

$$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢}\,\text{ءس} \le \frac{\pi}{٢}$$ ؟؟؟

الحل:

$$-١ \le \text{جتاس} \le ١ \Leftarrow ٠ \le \text{جتا}^{٢}\text{س} \le ١$$

$$٠ \le ٣\text{جتا}^{٢}\text{س} \le ٣ \Leftarrow ٢ \le ٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢ \le ٥$$

$$\frac{١}{٥} \le \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢} \le \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} \ge \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢} \ge \frac{١}{٥}$$

$$\int_{٠}^{\pi}\left(\frac{١}{٢}\right)\text{ءس} \ge \int_{٠}^{\pi}\left(\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢}\right)\text{ءس} \ge \int_{٠}^{\pi}\left(\frac{١}{٥}\right)\text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢}(\pi-٠) \ge \int_{٠}^{\pi}\left(\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢}\right)\text{ءس} \ge \frac{١}{٥}(\pi-٠)$$

$$\frac{\pi}{٢} \ge \int_{٠}^{\pi}\left(\frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢}\right)\text{ءس} \ge \frac{\pi}{٥}$$ وهو المطلوب

مثال(٦١): دون حساب قيمة التكامل بين ان

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس} \ge ٠$$ ؟؟؟

الحل:

$\text{جتا}\sqrt{\text{س}}$ في الفترة $\left[٠،\frac{\pi}{٤}\right]$ ربع اول ∴ جتا

موجب $\left(\text{جتا}\sqrt{\text{س}} > ٠\right)$ في الفترة $\left[٠،\frac{\pi}{٤}\right]$

$$\therefore \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس} > ٠$$

مثال(٦٢): دون حساب قيمة التكامل بين ان

$$\int_{٠}^{٢\pi}(١+\text{جاس})\,\text{ءس} \ge ٠$$ ؟؟؟

الحل:

$-١ \le \text{جاس} \le ١$ في الفترة $[٠،٢\pi]$

$١+\text{جاس} \ge ٠$ في الفترة $[٠،٢\pi]$

$$\therefore \int_{٠}^{٢\pi}(١+\text{جاس})\,\text{ءس} \ge ٠$$

مثال (٦٣) : دون اجراء التكامل بين ان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{ءس} < ٠$$ لكل أ، ب $\in$ ح

بحيث أ > ب ؟؟؟

الحل:

$\text{س}^{٢}+١ \ne ٠$

$\text{س}^{٢}+١ > ٠$

اشارة $\text{س}^{٢}+١$ على $[\text{ب}،\text{أ}]$

+ + + + + + + + + + + + +
ب ——— أ

وبالتالي $$\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{ءس} > ٠$$

$$-\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{ءس} > ٠$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}(\text{س}^{٢}+١)\,\text{ءس} < ٠$$

مثال (٦٤) : دون اجراء التكامل بين ان

$$\int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢})\, \text{ءس} \geq ٠ \quad ؟؟؟$$

الحل:

$$٤ - \text{س}^{٢} = ٠$$

$$\leftarrow \text{س} = \pm ٢$$

-- -- ++++++ -- --
(−٢ ، ٢)

$$٤ - \text{س}^{٢} \geq ٠ \quad \text{لكل س} \in [-٢ ، ٢]$$

$$\text{وبالتالي} \quad \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢}) \geq ٠$$

مثال (٦٥): بين ان $\int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\, \text{ءس} \leq \int_{٠}^{١} \text{س ءس}$

دون اجراء التكامل ؟؟؟

الحل:

$$\text{افرض ق(س)} = \text{س}^{٢} \text{ ، هـ(س)} = \text{س}$$

$$\text{ل(س)} = \text{ق(س)} - \text{هـ(س)}$$

$$\text{ل(س)} = \text{س}^{٢} - \text{س}$$

$$\text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$$

+++ ------ +++
(٠ ، ١)

$$\text{س(س} - ١) = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠ \text{ ، س} = ١$$

$$\text{ل(س)} \leq ٠ \quad \text{لكل س} \in [٠ ، ١]$$

$$\text{ق(س)} - \text{هـ(س)} \leq ٠ \quad \text{لكل س} \in [٠ ، ١]$$

$$\text{ق(س)} \leq \text{هـ(س)} \quad \text{لكل س} \in [٠ ، ١]$$

$$\int_{٠}^{١} \text{ق(س) ءس} \leq \int_{٠}^{١} \text{هـ(س) ءس}$$

مثال(٦٦): بين ان $\int_{٠}^{٢\pi} (٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس}$ ينحصر

بين ٦π ، ٨π ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$-١ \leq \text{جتاس} \leq ١$$

$$٠ \leq \text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ١$$

$$٣ \leq ٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ٤$$

$$\int_{٠}^{٢\pi} (٣)\, \text{ءس} \leq \int_{٠}^{٢\pi} (٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس} \leq \int_{٠}^{٢\pi} (٤)\, \text{ءس}$$

$$٣(٢\pi - ٠) \leq \int_{٠}^{٢\pi} (٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس} \leq ٤(٢\pi - ٠)$$

$$٦\pi \leq \int_{٠}^{٢\pi} (٣ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس} \leq ٨\pi \quad \text{و هو المطلوب}$$

مثال (٦٧) : بين ان $\int_{٠}^{٢\pi} (٢ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس}$

ينحصر بين ٤π ، ٦π ؟؟؟

الحل:

$$-١ \leq \text{جتاس} \leq ١$$

$$٠ \leq \text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ١$$

$$٢ \leq ٢ + \text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ٣$$

$$\int_{٠}^{٢\pi} ٢\, \text{ءس} \leq \int_{٠}^{٢\pi} (٢ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس} \leq \int_{٠}^{٢\pi} ٣\, \text{ءس}$$

$$٤\pi \leq \int_{٠}^{٢\pi} (٢ + \text{جتا}^{٢}\text{س})\, \text{ءس} \leq ٦\pi$$

مثال(٦٨): اذا علمت ان $م \le \int_{٠}^{١} \left(\frac{٢}{١+س^{٢}}\right) ءس \le ك$ ؛جد اكبر قيمة ممكنة للثابت (م) واصغر قيمة للثابت (ك) تحقق المتباينة دون حساب قيمة التكامل ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$٠ \le س \le ١ \Rightarrow ٠ \le س^{٢} \le ١$$

$$١ \le ١+س^{٢} \le ٢ \Rightarrow ١ \ge \frac{١}{١+س^{٢}} \ge \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} \le \frac{١}{١+س^{٢}} \le ١ \Rightarrow ١ \le \frac{٢}{١+س^{٢}} \le ٢$$

$$\int_{٠}^{١} (١) ءس \le \int_{٠}^{١} \left(\frac{٢}{١+س^{٢}}\right) ءس \le \int_{٠}^{١} (٢) ءس$$

$$١(١-٠) \le \int_{٠}^{١} \left(\frac{٢}{١+س^{٢}}\right) ءس \le ٢(١-٠)$$

$$١ \le \int_{٠}^{١} \left(\frac{٢}{١+س^{٢}}\right) ءس \le ٢$$

اذا اصغر قيمة للثابت (م) $\Rightarrow م = ١$

واكبر قيمة للثابت (ك) $\Rightarrow ك = ٢$

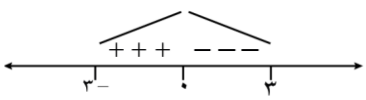
سؤال وزاري :

اذا علمت ان $م \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-س^{٢}}\, ءس \le ك$ ، فجد اكبر قيمة للثابت (م) واصغر قيمة للثابت (ك) ؟؟؟

الحل:

$$ق(س) = \sqrt{٩-س^{٢}}$$

$$ق'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٩-س^{٢}}}$$



$$ق(٠) = ٣ \quad ، \quad ق(-٣) = ق(٣) = ٠$$

$$٠ \le \sqrt{٩-س^{٢}} \le ٣$$

$$\int_{-٣}^{٣} ٠\, ءس \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-س^{٢}}\, ءس \le \int_{-٣}^{٣} ٣\, ءس$$

$$٠ \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-س^{٢}}\, ءس \le ١٨$$

$$\Rightarrow م = ٠ \quad ، \quad ك = ١٨$$

سؤال وزاري :

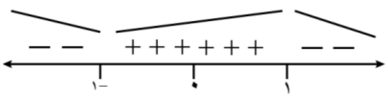
اذا علمت ان $م \le \int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}} ءس \le ك$ ، فجد اكبر قيمة ممكنة للثابت (م) واصغر قيمة ممكنة للثابت (ك) دون حساب $\int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}} ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$ق(س) = \frac{س}{١+س^{٢}}$$

$$ق'(س) = \frac{١-س^{٢}}{\left(١+س^{٢}\right)^{٢}}$$

$$١-س^{٢} = ٠ \Rightarrow س = \pm ١$$



$$ق(٠) = ٠ \quad ، \quad ق(١) = \frac{١}{٢}$$

$$٠ \le ق(س) \le \frac{١}{٢} \quad \text{لكل } س \in [٠،١]$$

$$\int_{٠}^{١} ٠\, ءس \le \int_{٠}^{١} ق(س)\, ءس \le \int_{٠}^{١} \frac{١}{٢}\, ءس$$

$$٠ \le \int_{٠}^{١} ق(س)\, ءس \le \frac{١}{٢}$$

$$٠ \le \int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^{٢}}\, ءس \le \frac{١}{٢}$$

$$م = ٠ \quad ، \quad ك = \frac{١}{٢}$$

مثال(٦٩): اذا علمت ان $م \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\, ءس \le ك$ ، جد اكبر قيمة لـ (م) واصغر قيمة للثابت (ك) دون حساب $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\, ءس$ ؟؟؟

الحل:

$٠ \le \text{جاس} \le ١$ لكل $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٠\, ءس \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\, ءس \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ١\, ءس$$

$$٠ \le \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\, ءس \le \frac{\pi}{٢} \Leftarrow م = ٠ ، ك = \frac{\pi}{٢}$$

مثال(٧٠): اذا علمت $م \le \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (١ - \text{جتاس})\, ءس \le ك$ ، جد اكبر قيمة لـ (م) واصغر قيمة لـ (ك) دون حساب $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (١ - \text{جتاس})\, ءس$ ؟؟؟

الحل:

$\text{جتا}\frac{\pi}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{جتا}\frac{\pi}{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$\frac{١}{٢} \le \text{جتاس} \le \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \le -\text{جتاس} \le -\frac{١}{٢}$$

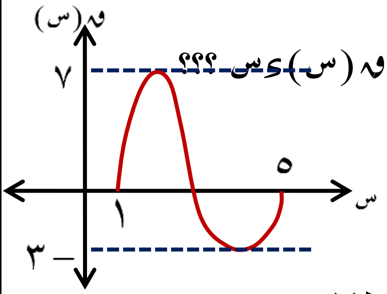
$$١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \le ١ - \text{جتاس} \le \frac{١}{٢}$$

$$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) ءس \le \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (١ - \text{جتاس})\, ءس \le \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{١}{٢}\, ءس$$

$$\frac{\pi}{٦}\left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) \le \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (١ - \text{جتاس})\, ءس \le \frac{\pi}{١٢}$$

$$م = \frac{\pi}{٦}\left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) ، ك = \frac{\pi}{١٢}$$

مثال(٧١): معتمدا على الرسم؛ جد اكبر قيمة واصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس$ ؟؟؟



الحل:

$$-٣ \le ق(س) \le ٧$$

$$\int_{١}^{٥} (-٣)\, ءس \le \int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس \le \int_{١}^{٥} (٧)\, ءس$$

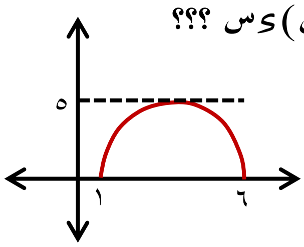
$$-٣(٥-١) \le \int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس \le ٧(٥-١)$$

$$-١٢ \le \int_{١}^{٥} ق(س)\, ءس \le ٢٨$$

اذا اصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} ق(س)$ هي (-١٢)

واكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} ق(س)$ هي (٢٨)

مثال(٧٢): معتمد على الرسم جد اكبر قيمة واصغر قيمة للمقدار $\int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟؟؟



الحل:

$$0 \le \text{ق}(\text{س}) \le 5$$

$$\int_{1}^{6} (0)\,\text{دس} \le \int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{1}^{6} (5)\,\text{دس}$$

$$0(6-1) \le \int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le 5(6-1)$$

$$0 \le \int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le 25$$

اذا اصغر قيمة للمقدار $\int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ هي (٠)

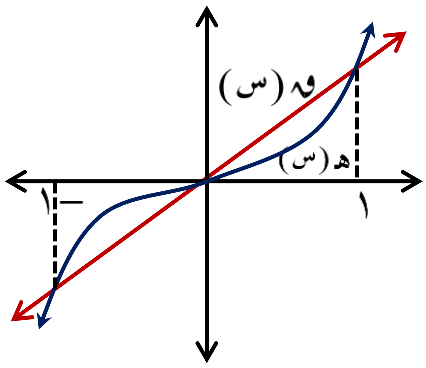
واكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ هي (٢٥)

مثال(٧٣): معتمدا على الشكل قارن بين قيمتي ؟؟؟

١) $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ، $\int_{0}^{1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

٢) $\int_{-1}^{0} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ، $\int_{-1}^{0} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

٣) $\int_{1}^{0} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ، $\int_{1}^{0} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$



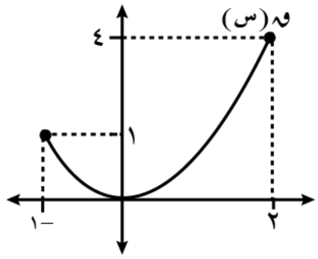
الحل:

١) $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \ge \int_{0}^{1} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

٢) $\int_{-1}^{0} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{-1}^{0} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

٣) $\int_{1}^{0} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{1}^{0} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال (٧٤): الشكل المجاور لمنحنى و(س) بين ان $0 \le \int_{-1}^{2} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \le 12$ ، دون حساب التكامل ؟؟؟



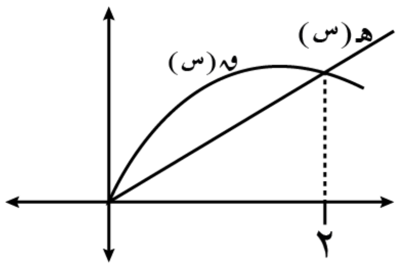
الحل:

$0 \le \text{و}(\text{س}) \le 4$ لكل س ∈ [-١، ٢]

$$\int_{-1}^{2} 0\,\text{دس} \le \int_{-1}^{2} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{-1}^{2} 4\,\text{دس}$$

$0 \le \int_{-1}^{2} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \le 12$ وهو المطلوب

مثال(٧٥): معتمدا على الشكل المجاور بين ان $\int_{0}^{2} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \ge \int_{0}^{2} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟؟؟

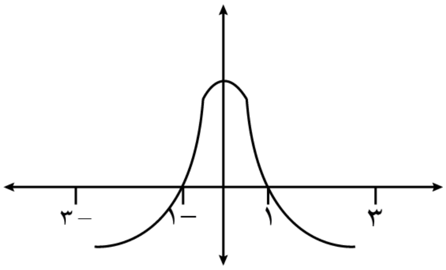


الحل:

$\text{و}(\text{س}) \ge \text{هـ}(\text{س})$ لكل س ∈ [٠، ٢] بناء على الشكل

$$\int_{0}^{2} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \ge \int_{0}^{2} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$$

مثال(٧٦): معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى و(س) على الفترة [-٣، ٣] ؟؟؟



أ) ما اشارة $\int_{-3}^{-1} \text{و}(\text{س})\,\text{دس}$

ب) ما اشارة $\int_{-1}^{1} \text{و}(\text{س})\,\text{دس}$

ج) ما اشارة $\int_{1}^{3} \text{و}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل:

$\int_{-3}^{-1} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \le 0$

لأنه $\text{و}(\text{س}) \le 0$ لكل س ∈ [-٣، -١]

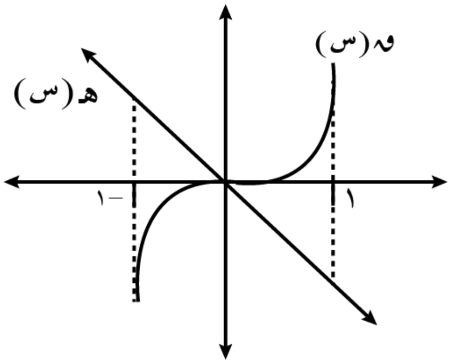
$\int_{-1}^{1} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \ge 0$

لأنه $\text{و}(\text{س}) \ge 0$ لكل س ∈ [-١، ١]

$\int_{1}^{3} \text{و}(\text{س})\,\text{دس} \le 0$

لأنه $\text{و}(\text{س}) \le 0$ لكل س ∈ [١، ٣]

مثال (٧٧): أي العبارات الاتية صحيحة بناء على الشكل المجاور ؟؟؟



١) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{هـ(س)}\,\text{دس} \le \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

٢) $\int_{\text{١-}}^{\text{١}} \text{هـ(س)}\,\text{دس} \le \int_{\text{١-}}^{\text{٠}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

٣) $\text{٠} \le \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{هـ(س)}\,\text{دس}$

٤) $\text{٠} \le \int_{\text{١-}}^{\text{٠}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل:

الاجابة الصحيحة هي (١)

الدرس الرابع: مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي

اللوغاريتم الطبيعي: $\text{لو}_{\text{هـ}}$

⇐ الأساس: **هـ** :عدد نيبيري $(\approx ٢,٧١)$

$\text{أ}^{\text{ب}} = \text{جـ} \Leftarrow \text{لو}_{\text{أ}}(\text{جـ}) = \text{ب}$

- اللوغاريتم هو معكوس الصيغة الاسية
- طبيعي $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = \text{س}$

من خصائص اللوغاريتمات:

١) ما داخل اللوغاريتم موجب

٢) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = ١$

طبيعي $\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$

٣) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ق}(\text{س})^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ق}(\text{س})$

طبيعي $\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س})^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س})$

- $\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س})^{\text{ن}} \neq \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}}$

٤) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ}^{\text{ق}(\text{س})} = \text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = \text{ق}(\text{س})$

طبيعي $\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})} = \text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = \text{ق}(\text{س})$

٥) $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{أ}\times\text{ب}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}$

٦) $\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}$

- **الهدف : حساب** $\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

قاعدة: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س})$ فان

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$$

مثال(١): جد المشتقة الاولى لكل من الاتي ؟؟؟

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٤\text{س})$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٤\text{س})$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\cancel{٤}}{\cancel{٤}\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$$

---

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}^٢ - ٣)$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}^٢ - ٣)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٤\text{س}}{٢\text{س}^٢ - ٣}$$

---

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢)$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١٥\text{س}^٢ - ٤\text{س}}{٥\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢}$$

٤) $ق(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{س}{٣}\right)$

الحل:

$$ق(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{س}{٣}\right)$$

$$ق'(س) = \frac{\cancel{\frac{١}{٣}}}{\cancel{\frac{١}{٣}}\,س} = \frac{١}{س}$$

---

٥) $ق(س) = لـو_{هـ}\left(٢س^{٥}\right)$

الحل:

$$ق(س) = لـو_{هـ}\left(٢س^{٥}\right)$$

$$ق(س) = ٥\,لـو_{هـ}(٢س)$$

$$ق'(س) = ٥ \times \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}س} = \frac{٥}{س}$$

---

٦) $ق(س) = لـو_{هـ}|س + ٢|$

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} لـو_{هـ}(-س-٢) &، \quad س \leq -٢ \\ لـو_{هـ}(س+٢) &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

$$ق'(س) = \begin{cases} \frac{١}{س+٢} &، \quad س < -٢ \\ \frac{١}{س+٢} &، \quad س > -٢ \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad ق'(س) = \frac{١}{س+٢}$$

ملاحظة :

معكـــوس مشـــتقة الاقتـــران $ق'(س) = \frac{١}{س+٢}$

هو $ق(س) = لـو_{هـ}|س+٢| + جـ$

---

٧) $ق(س) = لـو_{هـ}|٢ - س|$

الحل:

$$ق'(س) = \frac{-١}{٢ - س}$$

- **ما داخل اللوغاريتم موجب اذا لسنا بحاجة الى اعادة التعريف**

مثال(٢): جد معكوس المشتقة للاقترانات الاتية ؟؟؟

١) $ق(س) = \frac{١}{س}$

الحل:

$$م(س) = لـو_{هـ}|س| + جـ$$

---

٢) $هـ(س) = \frac{٢س}{س^{٢} + ٣}$

الحل:

$$م(س) = لـو_{هـ}|س^{٢} + ٣| + جـ$$

مثال(٣): جد المشتقة الاولى في كل مما يلي ؟؟؟

١) $ق(س) = لـو_{هـ}(جاس)$

الحل:

$ق(س) = لـو_{هـ}(جاس)$

$ق'(س) = \frac{جتاس}{جاس}$

$ق'(س) = ظتاس$

---

٢) $ق(س) = لـو_{هـ}|جتا^{٣}س|$

الحل:

$ق(س) = ٣ لـو_{هـ}|جتاس|$

$ق'(س) = ٣ \times \frac{-جاس}{جتاس}$

$ق'(س) = -٣ظاس$

---

٣) $ص = لـو_{هـ}(١١)$

الحل:

$ص = لـو_{هـ}(١١) \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٠$

٤) $ق(س) = لـو_{هـ}(جا^{٢}٢س)$

الحل:

$ق(س) = لـو_{هـ}(جا^{٢}٢س)$

$ق(س) = ٢ لـو_{هـ}(جا٢س)$

$ق'(س) = ٢ \times \frac{جتا٢س \times ٢}{جا٢س}$

$ق'(س) = ٤ظتا٢س$

مثال(٤): جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي ؟؟؟

١) $ص = لـو_{هـ}(\sqrt{٤س^{٣} - ٢س})$

الحل:

$ص = لـو_{هـ}(\sqrt{٤س^{٣} - ٢س})$

$ص = لـو_{هـ}((٤س^{٣} - ٢س)^{\frac{١}{٢}})$

$ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ}(٤س^{٣} - ٢س)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢} \times \frac{١٢س^{٢} - ٢}{٤س^{٣} - ٢س}$

٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ١}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\left(\text{س}^{٣} - ١\right)^{\frac{١}{٣}}\right)$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} - ١\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\cancel{٣}} \times \frac{\cancel{٣}\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - ١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - ١}$$

---

٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(٢\text{س} + \sqrt{\text{س} - ١}\right)$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س} - ١}}}{٢\text{س} + \sqrt{\text{س} - ١}}$$

---

٤) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ٤\right)^{٣}$

الحل:

$$\text{ص} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ٤\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣ \times \frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ٤}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٩\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ٤}$$

---

٥) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(٥\text{س}^{٢}\right)^{٢}$

الحل:

$$\text{ص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(٥\text{س}^{٢}\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \times \frac{\cancel{١٠}^{٢}\cancel{\text{س}}}{\cancel{٥}\text{س}^{\cancel{٢}}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤}{\text{س}}$$

---

٦) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٤\text{س}^{٢}}{٦ - \text{س}}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(٤\text{س}^{٢}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(٦ - \text{س}\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\cancel{٨}^{٢}\cancel{\text{س}}}{\cancel{٤}\text{س}^{\cancel{٢}}} - \frac{-١}{٦ - \text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{\text{س}} + \frac{١}{٦ - \text{س}}$$

---

٧) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س}}\right)$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢} + \text{س}\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٦\text{س}^{٢} - ٨\text{س}}{٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}} - \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$$

٨) $\text{ص} = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left(\sqrt{\dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}}{٦\text{س} - ٢}}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left(\left(\dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}}{٦\text{س} - ٢}\right)^{\frac{١}{٢}}\right)$$

$$\text{ص} = \dfrac{١}{٢}\,\underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left(\dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}}{٦\text{س} - ٢}\right)$$

$$\text{ص} = \dfrac{١}{٢}\left(\underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}(\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}) - \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}(٦\text{س} - ٢)\right)$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{١}{٢}\left(\dfrac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}} - \dfrac{٦}{٦\text{س} - ٢}\right)$$

---

٩) $\text{ص} = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left(\dfrac{(\text{س} - ٤\text{س}^{٢})^{٢}}{(\text{س}^{٣} + ١)^{٣}}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left((\text{س} - ٤\text{س}^{٢})^{٢}\right) - \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left((\text{س}^{٣} + ١)^{٣}\right)$$

$$\text{ص} = ٢\,\underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}(\text{س} - ٤\text{س}^{٢}) - ٣\,\underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}(\text{س}^{٣} + ١)$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\left(\dfrac{١ - ٨\text{س}}{\text{س} - ٤\text{س}^{٢}}\right) - ٣\left(\dfrac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ١}\right)$$

مثال(٥): جد المشتقة لكل مما يلي ؟؟؟

١) $\text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\,\text{جا}^{٤}\,٣\text{س}$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = ٤\,\underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\,\text{جا}٣\text{س}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٤\,\dfrac{٣\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ١٢\,\text{ظتا}٣\text{س}$$

---

٢) $\text{ص} = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\left((\text{س}^{٢} + ١)\text{جتاس}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}(\text{س}^{٢} + ١) + \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}(\text{جتاس})$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} + \dfrac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} - \text{ظاس}$$

---

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\,\text{ظاس}$

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \times \dfrac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}} + \underset{\text{هـ}}{\text{لـو}}\,\text{ظاس}$$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{٥س}\right)$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{٥س}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}^{٣}\text{س}\right) + \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جتا}^{٢}\text{٥س}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٣\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جاس}\right) + ٢\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جتا٥س}\right)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣ \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + ٢ \times \frac{-\text{جا٥س} \times ٥}{\text{جتا٥س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{ظتاس} - ١٠\text{ظا٥س}$$

---

٥) $\text{ص} = \text{جالـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \text{جالـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتالـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)\frac{٢\cancel{\text{س}}}{\text{س}^{\cancel{٢}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢}{\text{س}}\ \text{جتالـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)$$

٦) $\text{ص} = \text{جتالـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}\right)$

الحل:

$$\text{ص}' = -\text{جالـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}\right) \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}\right)\right)$$

$$\text{ص}' = -\text{جالـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}\right) \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(٢\text{س}^{٢}\right) - \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}+١\right)\right)$$

$$\text{ص}' = -\text{جالـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}\right) \times \left(\frac{\cancel{٤}^{٢}\cancel{\text{س}}}{\cancel{٢}\text{س}^{\cancel{٢}}} - \frac{١}{\text{س}+١}\right)$$

$$\text{ص}' = -\text{جالـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}+١}\right) \times \left(\frac{٢}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}+١}\right)$$

---

٧) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)$

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}^{\cancel{٣}} \times \frac{٢\text{س}}{\cancel{\text{س}^{٢}}} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right) \times ٦\text{س}^{٢}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} + ٦\text{س}^{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}\right)$$

٨) $ق(س) = جا٢س\ لـو_{هـ}(٢س^٣)$

الحل:

$$ق(س) = جا٢س\ لـو_{هـ}(٢س^٣)$$

$$قَ(س) = جا٢س \frac{\cancel{٦}س^{\cancel{٢}}}{\cancel{٢}\cancel{س^٣}}$$

$$+ لـو_{هـ}(٢س^٣) \times جتا٢س \times ٢$$

$$قَ(س) = \frac{٣}{س} جا٢س + ٢جتا٢س\ لـو_{هـ}(٢س^٣)$$

مثال(٦): اذا كان $\left(٢س^٣ = لـو_{هـ}(٣ص^٢)\right)$

جد؛ $\frac{ءص}{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$٢س^٣ = لـو_{هـ}(٣ص^٢)$$

$$٦س^٢ = \frac{\cancel{٦}\cancel{ص}^{٢}\frac{ءص}{ءس}}{\cancel{٣}\cancel{ص^٢}}$$

$$٦س^٢ = \frac{٢}{ص} \times \frac{ءص}{ءس}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ص$$

مثال(٧): جد مشتقة $ق(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{جتاس}{\sqrt{٤-٣س^٢}}\right)$

الحل: (كتاب)

$$ق(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{جتاس}{\sqrt{٤-٣س^٢}}\right)$$

$$ق(س) = لـو_{هـ}(جتاس) - لـو_{هـ}\left(\sqrt{٤-٣س^٢}\right)$$

$$ق(س) = لـو_{هـ}(جتاس) - لـو_{هـ}\left((٤-٣س^٢)^{\frac{١}{٢}}\right)$$

$$ق(س) = لـو_{هـ}(جتاس) - \frac{١}{٢} لـو_{هـ}(٤-٣س^٢)$$

$$قَ(س) = \frac{-جاس}{جتاس} - \frac{١}{٢} \times \frac{-٦س}{٤-٣س^٢}$$

$$قَ(س) = -ظاس + \frac{٣س}{٤-٣س^٢}$$

مثال(٨): اذا كان $ق(س) = لـو_{هـ}(س^٣)\ ظاس$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ ؟؟؟

الحل: (كتاب)

$$ق(س) = لـو_{هـ}(س^٣)\ ظاس$$

$$قَ(س) = لـو_{هـ}(س^٣) \times قا^٢س + ظاس \times \frac{٣س^{\cancel{٢}}}{\cancel{س^٣}}$$

$$قَ(س) = قا^٢س\ لـو_{هـ}(س^٣) + \frac{٣}{س} ظاس$$

مثال(٩): اذا كان $ق(س) = لو_{هـ}\left(س + \sqrt{س^{٢} - ١}\right)$

اثبت ان $ق^{\prime}(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$ق(س) = لو_{هـ}\left(س + \sqrt{س^{٢} - ١}\right)$$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{١ + \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^{٢} - ١}}}{س + \sqrt{س^{٢} - ١}}$$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{\frac{\sqrt{س^{٢} - ١} + س}{\sqrt{س^{٢} - ١}}}{س + \sqrt{س^{٢} - ١}}$$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{\cancel{\sqrt{س^{٢} - ١} + س}}{\sqrt{س^{٢} - ١}} \times \frac{١}{\cancel{س + \sqrt{س^{٢} - ١}}}$$

$$ق^{\prime}(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$$ وهو المطلوب

مثال(١٠): اذا كان $ص = لو_{هـ}\left(س^{٢} - ١\right)$

؛ جد $\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}}$ ؟؟؟

الحل:

$$ص = لو_{هـ}\left(س^{٢} - ١\right)$$

$$\frac{ىص}{ىس} = \frac{٢س}{س^{٢} - ١}$$

$$\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}} = \frac{\left(س^{٢} - ١\right) \times (٢) - (٢س)(٢س)}{\left(س^{٢} - ١\right)^{٢}}$$

$$\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}} = \frac{٢س^{٢} - ٢ - ٤س^{٢}}{\left(س^{٢} - ١\right)^{٢}}$$

$$\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}} = \frac{-٢س^{٢} - ٢}{\left(س^{٢} - ١\right)^{٢}}$$

الدرس الخامس : مشتقة اقتران الأسي الطبيعي

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}$ هـ : العدد النيبيري

$\text{الناتج} = (\text{الاساس})^{\text{الاس}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{الناتج}) = \text{الاس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ الاقتران العكسي $\text{ق}^{-1}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$\text{هـ}^{\text{س}} \neq ٠$

تذكر

١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})} = \text{ق}(\text{س})$

٣) $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س})} = \text{ق}(\text{س})$

قاعدة: اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ؛ فان

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

اثبات :

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{س}})$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}$

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ١ \Leftarrow \text{ص}' = \text{ص}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

قاعدة: اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}$ ؛ فان

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}$$

اثبات: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}$

نأخذ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ للطرفين

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$

اشتق $\Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{ق}'(\text{س}) \Leftarrow \text{ص}' = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{ص}$

عوض $\Leftarrow \text{ص}' = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})}$

مثال(١): جد المشتقة الاولى لكل من الاتي ؟؟؟

١) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}^{٣}-٧}$

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}^{٣}-٧}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(٦\text{س}^{٢}\right) \times \text{هـ}^{٢\text{س}^{٣}-٧}$

---

٢) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢}+١} + \text{هـ}^{\text{س}}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢}+١} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ص}' = \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ص}' = \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}} + \text{هـ}^{\text{س}}$

٣) $ص = هـ^{\frac{١}{س}}$

الحل:

$$ص = هـ^{\frac{١}{س}}$$

$$ص' = \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right) \times هـ^{\frac{١}{س}}$$

٤) $ص = \frac{١}{س} + هـ^{٥س^{٢}}$

الحل:

$$ص = \frac{١}{س} + هـ^{٥س^{٢}}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^{٢}} + (١٠س) \times هـ^{٥س^{٢}}$$

٥) $ص = \sqrt{هـ^{٢س^{٢}}}$

الحل:

$$ص = \left(هـ^{٢س^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow ص = هـ^{س^{٢}}$$

$$ص' = (٢س) \times هـ^{س^{٢}}$$

٦) $ص = \left(هـ^{٣س^{٢}}\right)^{٢}$

الحل:

$$ص = \left(هـ^{٣س^{٢}}\right)^{٢}$$

$$ص = هـ^{٦س^{٢}} \Leftarrow ص' = (١٢س) \times هـ^{٦س^{٢}}$$

٧) $ص = \sqrt{٣س^{٢} + س} - \left(هـ^{٢س}\right)^{س^{٢}}$

الحل:

$$ص = \sqrt{٣س^{٢} + س} - هـ^{٢س^{٣}}$$

$$ص' = \frac{٦س + ١}{٢\sqrt{٣س^{٢} + س}} - \left(٦س^{٢}\right) \times هـ^{٢س^{٣}}$$

٨) $ص = \sqrt{هـ^{٢س} + ٢س}$

الحل:

$$ص' = \frac{\cancel{٢} \times هـ^{٢س} + \cancel{٢}^{١}}{\cancel{٢}\sqrt{هـ^{٢س} + ٢س}}$$

$$ص' = \frac{هـ^{٢س} + ١}{\sqrt{هـ^{٢س} + ٢س}}$$

٩) $ص = س^{٣} هـ^{س^{٢}}$

الحل:

$$\frac{دص}{دس} = س^{٣}\left(٢س هـ^{س^{٢}}\right) + هـ^{س^{٢}}\left(٣س^{٢}\right)$$

$$\frac{دص}{دس} = ٢س^{٤} هـ^{س^{٢}} + ٣س^{٢} هـ^{س^{٢}}$$

١٠) $ص = \sqrt{١ - هـ^{٢س}}$

الحل:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-\cancel{٢} هـ^{٢س}}{\cancel{٢}\sqrt{١ - هـ^{٢س}}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{- هـ^{٢س}}{\sqrt{١ - هـ^{٢س}}}$$

١١) $\text{ص} = \left(\text{هـ}^{٣\text{س}} - \text{س}\right)^{٣}$

الحل:

$$\text{ص} = \left(\text{هـ}^{٣\text{س}} - \text{س}\right)^{٣}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\left(\text{هـ}^{٣\text{س}} - \text{س}\right)^{٢}\left(٣\text{هـ}^{٣\text{س}} - ١\right)$$

---

١٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \left(\frac{-١}{\text{س}^{٢}}\right)\text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}} + \frac{١}{٢\text{س}}$$

---

١٣) $\text{ص} = \frac{١ - \text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}$

الحل:

$$\text{ص} = \frac{١ - \text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}} - \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}}$$

$$\text{ص} = \text{هـ}^{-\text{س}^{٢}} - \text{هـ}^{٢\text{س}-\text{س}^{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (-٢\text{س})\,\text{هـ}^{-\text{س}^{٢}} - (٢ - ٢\text{س})\,\text{هـ}^{٢\text{س}-\text{س}^{٢}}$$

---

١٤) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}$

الحل:

$$\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١\right)\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right) - \text{هـ}^{\text{س}}\left(٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\right)}{\left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١\right)^{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١\right)^{٢}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{٣\text{س}}}{\left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١\right)^{٢}}$$

---

١٥) $\text{ص} = \text{جاهـ}^{\text{س}}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{جاهـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ص}' = \text{جتاهـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاهـ}^{\text{س}}$$

---

١٦) $\text{ص} = \text{ظا}\left(\text{هـ}^{٢\text{س}}\right)$

الحل:

$$\text{ص} = \text{ظا}\left(\text{هـ}^{٢\text{س}}\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\left(\text{هـ}^{٢\text{س}}\right) \times (٢)\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{قا}^{٢}\left(\text{هـ}^{٢\text{س}}\right)$$

١٧) $\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

الحل:

$\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

$\text{ل}'(\text{س}) = (-\text{جاس}) \times \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

---

١٨) $\text{ص} = \text{قاس}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}}$

الحل:

$\text{ص} = \text{قاس}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس} \times \text{قا}^2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times \text{قاس ظاس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^3\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{قاس ظاس}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}}$$

سؤال وزاري :

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

وكان $\text{ق}'(1) = \text{هـ}$ ؛ فجد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س})^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \tfrac{1}{2} \times \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \frac{\text{أ}}{2} \times \frac{1}{\text{س}}$$

لكن $\text{ق}'(1) = \text{هـ}$

$$\Leftarrow \frac{-1}{(1)^2}\,\text{هـ}^{\frac{1}{1}} + \frac{\text{أ}}{2} \times \frac{1}{\text{س}} = \text{هـ}$$

$$-\text{هـ} + \frac{\text{أ}}{2} = \text{هـ} \Leftarrow \frac{\text{أ}}{2} = 2\text{هـ}$$

$$\Leftarrow \text{أ} = 4\text{هـ}$$

مثال(٢): اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$؛ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{2}$ ؟؟؟

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (-\text{جاس}) \times \text{هـ}^{\text{جتاس}}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{2}} = \left(-\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \times \text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{2}}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{2}} = (-1) \times \text{هـ}^{0} = -1 \times 1 = -1$$

مثال(٣): جد المشتقة الاولى لكل مما يلي ؟؟؟

١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{3\text{س}^5}\right) - 6\text{س}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{3\text{س}^5}\right) - 6\text{س}$

$\text{ص} = 3\text{س}^5 - 6\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 15\text{س}^4 - 6$

---

٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س})}$

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س})}$

$\text{ص} = 2\text{س} \Leftarrow \text{ص}' = 2$

٣) $\text{ص} = ٢\text{س}^{٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)$

الحل:

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} \times \text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}\right)$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٤} \times (١) \Leftarrow \text{ص}' = ٨\text{س}^{٣}$

---

٤) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس})}$

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس})} \Leftarrow \text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتا}^{٢}\text{س})}$

$\text{ص} = \text{جتا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \text{ص}' = ٢\text{جتاس} \times -\text{جاس}$

$\text{ص}' = -٢\text{جاسجتاس} \Leftarrow \text{ص}' = -\text{جا}٢\text{س}$

---

٥) $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

الحل:

$\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftarrow ١ = \text{ص}' \times \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{ص}' = \frac{١}{\text{هـ}^{\text{ص}}} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{\text{س}}$

مثال(٤): اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(١+\text{جا}^{٢}\text{س})}$ ؛جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٣}$ ؟؟؟

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(١+\text{جا}^{٢}\text{س})} \Leftarrow \text{ص} = ١+\text{جا}^{٢}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{جاس}\times\text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٣}} = ٢\text{جا}\left(\frac{\pi}{٣}\right)\times\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٣}} = \cancel{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\cancel{١}}{\cancel{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

مثال(٥): اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$ ؛ اثبت ان $\text{ص}'' - ٢\text{ص}' + ٢\text{ص} = ٠$ ؟؟؟

الحل:

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$

$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{جتاس}\right) + \text{جاس}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)$

$\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)$

$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\cancel{-\text{جاس}}+\text{جتاس}\right)$

$+\left(\text{جتاس} + \cancel{\text{جاس}}\right)\times \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ص}'' = \text{هـ}^{\text{س}}\left(٢\text{جتاس}\right) \Leftarrow \text{ص}'' = ٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

$٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} - ٢\left(\text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{جتاس}+\text{جاس}\right)\right)$

$+ ٢\left(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\right)$

$\cancel{٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}} - \cancel{٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}}$

$-\cancel{٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}} + \cancel{٢\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}} = ٠$

وهو المطلوب

مثال(٦): اذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ ؛ اثبت ان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$ ؟؟؟

الحل:

$$\left(\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}\right) \times \text{هـ}^{\text{س ص}} = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{س هـ}^{\text{س ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص هـ}^{\text{س ص}} = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{س هـ}^{\text{س ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١\right) = ١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} - ١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ - \text{ص}(\text{س} + \text{ص})}{\text{س}(\text{س} + \text{ص}) - ١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ - \text{س ص} + \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$$ وهو المطلوب

سؤال وزاري : اذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} - \text{ص}$ ، اثبت ان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^{٢} - \text{س ص} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س ص} + ١}$ ؟؟؟

الحل :

$$\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} - \text{ص}$$

$$(\text{س ص}' + \text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = ١ - \text{ص}'$$

$$\text{ص}'\,\text{س هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص هـ}^{\text{س ص}} = ١ - \text{ص}'$$

$$\text{ص}' = \frac{١ - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} + ١}$$

لكن $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} - \text{ص}$

$$\text{ص}' = \frac{١ - \text{ص}(\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - \text{ص}) + ١}$$

$$\text{ص}' = \frac{١ - \text{س ص} + \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} - \text{س ص} + ١}$$ وهو المطلوب

مثال(٧): اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$؛ جد قيمة الثابت (أ) التي تحقق المعادلة $\text{ص}'' - \text{ص}' - ٦\text{ص} = ٠$ ؛ $\text{أ} \in \text{ع}^{+}$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}} \Leftarrow \text{ص}' = \text{أهـ}^{\text{أس}} \Leftarrow \text{ص}'' = \text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}'' - \text{ص}' - ٦\text{ص} = ٠$$

$$\left(\text{أ}^{٢}\text{هـ}^{\text{أس}}\right) - \left(\text{أهـ}^{\text{أس}}\right) - ٦\left(\text{هـ}^{\text{أس}}\right) = ٠$$

$$\text{هـ}^{\text{أس}}\left(\text{أ}^{٢} - \text{أ} - ٦\right) = ٠$$

$\text{هـ}^{\text{أس}} = ٠ \Leftarrow$ (مرفوض)

$$\left(\text{أ}^{٢} - \text{أ} - ٦\right) = ٠ \Leftarrow (\text{أ} - ٣)(\text{أ} + ٢)$$

$\Leftarrow \text{أ} = -٢$ (تهمل) $\Leftarrow \text{أ} \in \text{ع}^{+}$

$$\Leftarrow \therefore \text{أ} = ٣$$

مثال(٨): جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $\text{ص} = (\text{س} - ١)\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) + ٢$ عند النقطة $(١،٢)$ ؟؟؟

الحل:

لإيجاد معادلة المماس (خط مستقيم) يلزم:

١) نقطة التماس $(\text{س}_١، \text{ص}_١) \Leftarrow (١،٢)$

٢) الميل(م) $\Leftarrow$ المشتقة $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\text{س}_١}\right)$

$$\text{ص} = (\text{س} - ١)\text{هـ}^{\text{س}} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) + ٢$$

$$\text{ص}' = (\text{س} - ١)\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + ٣ \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$\text{ص}' = (\text{س} - ١)\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}}$$

الميل (م)

$$\Leftarrow \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = ((١) - ١)\,\text{هـ}^{(١)} + \text{هـ}^{(١)} + \frac{٣}{(١)}$$

$$\text{م} = \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = \text{هـ} + ٣$$

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} - ٢ = (\text{هـ} + ٣)(\text{س} - ١)$$

مثال(٩): اذا كان $\text{ص} = ٢^{٣\text{س}}$ ؛ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = ٢^{٣\text{س}}$$

خذ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ للطرفين

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢^{٣\text{س}})$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = ٣\text{س} \times \text{لو}_{\text{هـ}}(٢)$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٢) \times \text{س}$$

اشتق $\Leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٢)$

$$\text{ص}' = ٣\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٢)$$

عوض $\Leftarrow \text{ص}' = ٣(٢^{٣\text{س}})\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٢)$

مثال(١٠): اذا كان $\text{ص} = ٤^{(\text{س}^٢+٥\text{س})}$؛ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = ٤^{(\text{س}^٢+٥\text{س})}$$

خذ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ للطرفين

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(٤^{(\text{س}^٢+٥\text{س})}\right)$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = (\text{س}^٢ + ٥\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٤)$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٤)(٢\text{س} + ٥)$$

$$\text{ص}' = \text{ص}(٢\text{س} + ٥)\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٤)$$

$$\text{ص}' = \left(٤^{(\text{س}^٢+٥\text{س})}\right)(٢\text{س} + ٥)\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٤)$$

مثال(١١): اذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق}(\text{س})}$؛ اثبت ان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{أ}) \times \text{ق}'(\text{س})$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق}(\text{س})}$$

خذ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ للطرفين

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{أ}^{\text{ق}(\text{س})}\right)$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}) = \text{ق}(\text{س})\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{أ})$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{أ}) \times \text{ق}'(\text{س})$$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{أ}) \times \text{ق}'(\text{س})$ و هو المطلوب

مثال(١٢): اذا كان $ص = ٤^{ق(س)}$ ؛اثبت ان $\frac{ءص}{ءس} = ٤^{ق(س)} \times لو_{هـ}(٤) \times ق'(س)$ ؟؟؟

الحل:

$ص = ٤^{ق(س)}$ خذ $لو_{هـ}$ للطرفين

$$لو_{هـ}(ص) = لو_{هـ}\left(٤^{ق(س)}\right)$$

$$لو_{هـ}(ص) = ق(س)\, لو_{هـ}(٤)$$

$$\frac{ص'}{ص} = لو_{هـ}(٤) \times ق'(س)$$

$$ص' = ص \times لو_{هـ}(٤) \times ق'(س)$$

$$ص' = ٤^{ق(س)} \times لو_{هـ}(٤) \times ق'(س)$$

وهو المطلوب

مثال (١٣): اذا كان $س = هـ^{\frac{س}{ص}}$ ، اثبت ان $ص' = \frac{١}{لو_{هـ} س} - \frac{١}{\left(لو_{هـ} س\right)^٢}$ ؟؟؟

الحل :

$$س = هـ^{\frac{س}{ص}}$$

$$١ = \frac{ص(١) - س ص'}{ص^٢}\, هـ^{\frac{س}{ص}}$$

$$ص^٢ = \left(ص - س ص'\right) هـ^{\frac{س}{ص}}$$

$$ص^٢ = ص هـ^{\frac{س}{ص}} - س ص' هـ^{\frac{س}{ص}}$$

$$ص هـ^{\frac{س}{ص}} - ص^٢ = س ص' هـ^{\frac{س}{ص}}$$

$$\Leftarrow ص' = \frac{ص هـ^{\frac{س}{ص}} - ص^٢}{س هـ^{\frac{س}{ص}}}$$

$$ص' = \frac{س ص - ص^٢}{س^٢} \Leftarrow ص' = \frac{ص}{س} - \left(\frac{ص}{س}\right)^٢$$

لكن $س = هـ^{\frac{س}{ص}} \Leftarrow \frac{س}{ص} = لو_{هـ} س$

$$\Leftarrow \frac{ص}{س} = \frac{١}{لو_{هـ} س}$$

$$ص' = \frac{١}{لو_{هـ} س} - \frac{١}{\left(لو_{هـ} س\right)^٢}$$

مثال (١٤): اذا كان $ق(س) = ٣^{ل(س)}$ ، حيث $ل(س)$ قابل للاشتقاق ، فاثبت ان $ق'(س) = ٣^{ل(س)} \times ل'(س)\, لو_{هـ} ٣$ ؟؟؟

الحل: (الكتاب)

$$ص = ٣^{ل(س)}$$

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٣^{ل(س)}$$

$$لو_{هـ} ص = ل(س)\, لو_{هـ} ٣$$

$$\frac{١}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = ل'(س)\, لو_{هـ} ٣$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ص ل'(س)\, لو_{هـ} ٣$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣^{ل(س)} \times ل'(س)\, لو_{هـ} ٣$$

وهو المطلوب

مثال(١٥): جد المشتقة الاولى

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{٣لـو}_{\text{هـ}}(\text{١+جاس})}$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{٣لـو}_{\text{هـ}}(\text{١+جاس})}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{١+جاس})^{٣}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{١+جاس}\right)^{٣}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\left(\text{١+جاس}\right)^{٢} \times \text{جتاس}$$

مثال(١٦): برهن ان اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ل}(\text{س})}$

؛فان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ل}(\text{س})}$$

خذ $\text{لـو}_{\text{هـ}}$ للطرفين

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ل}(\text{س})}\right)$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ل}(\text{س}) \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}$$

$$\cancel{\text{لـو}_{\text{هـ}}}\text{ق}(\text{س}) = \cancel{\text{لـو}_{\text{هـ}}}\text{ل}(\text{س}) \times (١)$$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$ وهو المطلوب

مثال(١٧): اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{٥} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{قاس}\right)$ ؛

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{٥} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{قاس}\right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٠) + \frac{\cancel{\text{قاس}}\,\text{ظاس}}{\cancel{\text{قاس}}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ظاس}$$

مثال(١٨): اذا كان

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جتاس}\right) + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{دس}}{\text{١+ظا}^{٢}\text{س}}$$ ؛وكان

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \text{٢هـ+١}$ ؛ جد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جتاس}\right) + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\text{دس}}{\text{١+ظا}^{٢}\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\left(\frac{\text{−جاس}}{\text{جتاس}}\right) + (٠)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س هـ}^{\text{ظاس}} - \text{أظاس}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \text{قا}^{٢}\left(\frac{\pi}{٤}\right)\text{هـ}^{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)} - \text{أظا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \left(\sqrt{٢}\right)^{٢}\text{هـ}^{١} - \text{أ}(١) = \text{٢هـ+١}$$

$$\cancel{\text{٢هـ}} - \text{أ} = \cancel{\text{٢هـ}} + ١ \Leftarrow \text{أ} = -١$$

مثال(١٩): اذا كان $\int ق'(س)\,ءس = هـ^{١-س^٢} + ٤هـ$ ؛ $ق'(ب) = -٢ب$ ، ب $\neq$ ٠ ؛جد قيمة (قيم) الثابت (ب) ؟؟؟

الحل:

$$\int ق'(س)\,ءس = هـ^{١-س^٢} + ٤هـ$$

باشتقاق الطرفين

$$ق'(س) = (-٢س)\,هـ^{١-س^٢} + (٠)$$

$$ق'(س) = -٢س\,هـ^{١-س^٢}$$

$$ق'(ب) = -٢ب$$

$$\Leftarrow \frac{\cancel{-٢(ب)}\,هـ^{١-(ب)^٢}}{\cancel{-٢ب}} = \frac{\cancel{-٢ب}}{\cancel{-٢ب}}$$

$$هـ^{١-ب^٢} = ١ \Leftarrow هـ^{١-ب^٢} = هـ^{٠}$$

$$١ - ب^٢ = ٠ \Leftarrow (١+ب)(١-ب) = ٠$$

$$\Leftarrow ب = \pm ١$$

تكامل الاقتران الاسي الطبيعي:

قاعدة: $\int م\,هـ^{أس+ب}\,ءس = \frac{م}{أ}\,هـ^{أس+ب} + جـ$ ؛حيث م،أ،ب ثوابت ؛ أ $\neq$ ٠

مثال(٢٠): جد التكاملات الأتية ؟؟؟

١) $\int ٦هـ^{٢س}\,ءس$

الحل:

$$\int ٦هـ^{٢س}\,ءس$$

$$= \frac{٦}{٢}\,هـ^{٢س} + جـ = ٣هـ^{٢س} + جـ$$

---

٢) $\int هـ^{٧س-١}\,ءس$

الحل:

$$\int هـ^{٧س-١}\,ءس = \frac{١}{٧}\,هـ^{٧س-١} + جـ$$

---

٣) $\int ٢هـ^{٤-س}\,ءس$

الحل:

$$\int ٢هـ^{٤-س}\,ءس$$

$$= -٢هـ^{٤-س} + جـ$$

٤) $\int ٥هـ^{٢-\frac{١}{٣}س} \, ءس$

الحل:

$$\int ٥هـ^{٢-\frac{١}{٣}س} \, ءس$$

$$= -١٥هـ^{٢-\frac{١}{٣}س} + جـ$$

---

٥) $\int_{٠}^{١} هـ^{س} \, ءس$

الحل:

$$\int_{٠}^{١} هـ^{س} \, ءس$$

$$\left[هـ^{س}\right]_{٠}^{١} = \left(هـ^{١} - هـ^{٠}\right) = هـ - ١$$

---

٦) $\int \sqrt{هـ^{٢س+٤}} \, ءس$

الحل:

$$\int \sqrt{هـ^{٢س+٤}} \, ءس$$

$$\int \left(هـ^{٢س+٤}\right)^{\frac{١}{٢}} ءس = \int \left(هـ^{٢(س+٢)}\right)^{\frac{١}{٢}} ءس$$

$$\int هـ^{(س+٢)} ءس = هـ^{(س+٢)} + جـ$$

٧) $\int \sqrt[٣]{هـ^{٩س-٦}} + هـ^{٢س} \, ءس$

الحل:

$$\int \sqrt[٣]{هـ^{٩س-٦}} + هـ^{٢س} \, ءس$$

$$\int \left(هـ^{٩س-٦}\right)^{\frac{١}{٣}} + هـ^{٢س} \, ءس$$

$$\int \left(هـ^{٣(٣س-٢)}\right)^{\frac{١}{٣}} + هـ^{٢س} \, ءس$$

$$\int هـ^{٣س-٢} + هـ^{٢س} \, ءس$$

$$= \frac{١}{٣}هـ^{٣س-٢} + \frac{١}{٢}هـ^{٢س} + جـ$$

---

٨) $\int \frac{١}{\sqrt{هـ^{٤س}}} \, ءس$

الحل:

$$\int \frac{١}{\sqrt{هـ^{٤س}}} \, ءس$$

$$\int \left(هـ^{٤س}\right)^{\frac{-١}{٢}} ءس$$

$$\int هـ^{-٢س} \, ءس$$

$$= \frac{١}{-٢}هـ^{-٢س} + جـ$$

٩) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{ءس} \Leftarrow \int ١ - \text{هـ}^{-\text{س}} \, \text{ءس}$$

$$= \text{س} + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ} = \text{س} + \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{جـ}$$

---

١٠) $\int \frac{٢ - ٥\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٥\text{س}}} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{٢}{\text{هـ}^{٥\text{س}}} - \frac{٥\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٥\text{س}}} \, \text{ءس}$$

$$\int ٢\text{هـ}^{-٥\text{س}} - ٥\text{هـ}^{-٢\text{س}} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{-٢}{٥} \text{هـ}^{-٥\text{س}} + \frac{٥}{٢} \text{هـ}^{-٢\text{س}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-٢}{٥\text{هـ}^{٥\text{س}}} + \frac{٥}{٢\text{هـ}^{٢\text{س}}} + \text{جـ}$$

---

١١) $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{٣} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\left[\text{هـ}^{٣}\text{س}\right]_{٠}^{٢} = \text{هـ}^{٣}\,(٢ - ٠) = ٢\text{هـ}^{٣}$$

١٢) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{هـ} - ١} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{١}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{١}{\text{هـ} - ١} \, \text{ءس} = \left[\left(\frac{١}{\text{هـ} - ١}\right)\text{س}\right]_{١}^{\text{هـ}^{٢}}$$

$$\left(\frac{١}{\text{هـ} - ١}\right)\left(\text{هـ}^{٢} - ١\right)$$

$$\left(\frac{١}{\cancel{\text{هـ} - ١}}\right)\cancel{(\text{هـ} - ١)}\,(\text{هـ} + ١) = (\text{هـ} + ١) = \text{هـ} + ١$$

---

١٣) $\int ٥\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢})} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int ٥\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢})} \, \text{ءس}$$

$$\int ٥\text{س}^{٢} \times \text{س}^{٢} \, \text{ءس} = \int ٥\text{س}^{٤} \, \text{ءس}$$

$$= \text{س}^{٥} + \text{جـ}$$

---

١٤) $\int \text{هـ}^{٥\text{س}}\left(١ - \text{هـ}^{٤\text{س}}\right) \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{٥\text{س}}\left(١ - \text{هـ}^{٤\text{س}}\right) \text{ءس} = \int \left(\text{هـ}^{٥\text{س}} - \text{هـ}^{٩\text{س}}\right) \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{٥\text{س}}}{٥} - \frac{\text{هـ}^{٩\text{س}}}{٩} + \text{جـ}$$

١٥) $\int \frac{١}{ه^{٢س}} ءس$

الحل:

$$\int \frac{١}{ه^{٢س}} ءس = \int ه^{-٢س} ءس = \frac{ه^{-٢س}}{-٢} + ج$$

---

١٦) $\int \left(ه^{٢س} + ٢\right)^{٢} ءس$

الحل:

$$= \int \left(ه^{٤س} + ٤ه^{٢س} + ٤\right) ءس$$

$$= \frac{ه^{٤س}}{٤} + \frac{٤ه^{٢س}}{٢} + ٤س + ج$$

---

١٧) $\int \frac{ه^{٢س} + ٣ه^{س} - ١٠}{ه^{س} - ٢} ءس$

الحل:

$$\int \frac{ه^{٢س} + ٣ه^{س} - ١٠}{ه^{س} - ٢} ءس$$

$$\int \frac{\left(ه^{س} + ٥\right)\left(ه^{س} - ٢\right)}{ه^{س} - ٢} ءس$$

$$\int \left(ه^{س} + ٥\right) ءس = ه^{س} + ٥س + ج$$

١٨) $\int \frac{ه^{٥س} - ٤ه^{١-٢س}}{ه^{٣س-١}} ءس$

الحل:

$$\int \frac{ه^{٥س} - ٤ه^{١-٢س}}{ه^{٣س-١}} ءس$$

$$= \int ه^{١-٣س}\left(ه^{٥س} - ٤ه^{١-٢س}\right) ءس$$

$$= \int \left(ه^{٢س+١} - ٤ه^{٢-٥س}\right) ءس$$

$$= \frac{ه^{٢س+١}}{٢} - \frac{٤ه^{٢-٥س}}{-٥} + ج$$

---

١٩) $\int \frac{ه^{٤س} - ٩س^{٢}}{ه^{٢س} - ٣س} ءس$

الحل:

$$\int \frac{ه^{٤س} - ٩س^{٢}}{ه^{٢س} - ٣س} ءس$$

$$\int \frac{\cancel{\left(ه^{٢س} - ٣س\right)}\left(ه^{٢س} + ٣س\right)}{\cancel{ه^{٢س} - ٣س}} ءس$$

$$\int \left(ه^{٢س} + ٣س\right) ءس = \frac{ه^{٢س}}{٢} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + ج$$

٢٠) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٨}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ٤}\, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٨}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ٤}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} - ٢)(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ٤)}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + ٤}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int (\text{هـ}^{\text{س}} - ٢)\, \text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س} + \text{جـ}$$

---

٢١) $\int \text{هـ}^{٣ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}}\, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{٣ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int \text{هـ}^{٣}\, \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جاس}}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int \text{هـ}^{٣}\, \text{جاس}\, \text{ء}\text{س} = -\text{هـ}^{٣}\, \text{جتاس} + \text{جـ}$$

٢٢) $\int \text{هـ}^{٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتا}^{٢}\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتا}^{٢}\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتا}^{٢}\text{س}}}\, \text{ء}\text{س} = \int \frac{\text{هـ}^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \int \text{هـ}^{٢}\, \text{قا}^{٢}\text{س}\, \text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{٢}\, \text{ظاس} + \text{جـ}$$

مثال (٢١): جد $\int ٣\text{س}\, \text{هـ}^{٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٢}}\, \text{ء}\text{س}$ ؟؟؟ (الكتاب)

الحل:

$$\int ٣\text{س} \times \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٢}}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int ٣\text{س} \times \text{هـ}^{٢} \times \text{س}^{٢}\, \text{ء}\text{س}$$

$$\int ٣\text{هـ}^{٢}\, \text{س}^{٣}\, \text{ء}\text{س} = \frac{٣\text{هـ}^{٢}\, \text{س}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$$

مثال (٢٢): جد $\int هـ^{٥س} \sqrt{هـ^{٢س} + ٤هـ^{س} + ٤}\, ءس$ ؟؟؟

الحل: (الكتاب)

$$\int هـ^{٥س} \sqrt{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}\, ءس$$

$$\int هـ^{٥س} |هـ^{س} + ٢|\, ءس$$

$$\int هـ^{٥س} (هـ^{س} + ٢)\, ءس$$

$$\int (هـ^{٦س} + ٢هـ^{٥س})\, ءس$$

$$= \frac{هـ^{٦س}}{٦} + \frac{٢هـ^{٥س}}{٥} + جـ$$

سؤال وزاري :

اذا كـــان

$$ق(س) = \begin{cases} |هـ^{س} - ١| & ، \quad -١ \le س \le ١ \\ [٣ - س] & ، \quad ١ < س \le ٢ \end{cases}$$

فجد $\int_{-١}^{٢} ق(س)\, ءس$ ؟؟؟

الحل:

$$|هـ^{س} - ١| = ٠ \Leftarrow هـ^{س} - ١ = ٠$$

$$هـ^{س} = ١ \Leftarrow س = ٠$$

$$[٣ - س] = \begin{cases} ١ & ، \quad ١ < س \le ٢ \\ ٠ & ، \quad ٢ < س \le ٣ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ١ - هـ^{س} & ، \quad -١ \le س < ٠ \\ هـ^{س} - ١ & ، \quad ٠ \le س \le ١ \\ ٢ & ، \quad ١ < س \le ٢ \end{cases}$$

$$\int_{-١}^{٢} ق(س)\, ءس =$$

$$\int_{-١}^{٠} (١ - هـ^{س})\, ءس + \int_{٠}^{١} (هـ^{س} - ١)\, ءس + \int_{١}^{٢} ١\, ءس$$

$$= [س - هـ^{س}]_{-١}^{٠} + [هـ^{س} + س]_{٠}^{١} + (٢ - ١)$$

$$= \frac{١}{هـ} + هـ - ١$$