الرياضيات

التوجيهي العلمي

الفصل الدراسي الثاني

٢٠١٩

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

الجزء الثاني

المستوى الرابع

اعداد المعلم:

أحمد ابو مويس

0796023446

الدرس السادس : التكامل بالتعويض

- احدى طرق تكامل حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتقة للأخر (اقتران × مشتقة الاقتران)

حيث:

١) نفرض ص = الاقتران

٢) نشتق الفرض (ص)

٣) نعوض (ص) و (ءس)

٤) نغير حدود التكامل اذا كان التكامل محدود

٥) نختصر (س) نهائيا

٦) نكامل بالنسبة لـ (ص)

مثال(١): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

(نفرض ما داخل القوس)

١) $\int ٣س^{٢}\left(س^{٣}+١\right)^{٣} ءس$

الحل:

$$\int ٣س^{٢}\left(س^{٣}+١\right)^{٣} ءس$$

$$ص = س^{٣}+١$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{٣س^{٢}}\left(ص\right)^{٣} \frac{ءص}{\cancel{٣س^{٢}}}$$

$$= \int \left(ص\right)^{٣} ءص = \frac{١}{٤} ص^{٤} + جـ$$

$$= \frac{١}{٤}\left(س^{٣}+١\right)^{٤} + جـ$$

٢) $\int ٣س\left(٧-س^{٢}\right)^{٥} ءس$

الحل:

$$\int ٣س\left(٧-س^{٢}\right)^{٥} ءس$$

$$ص = ٧-س^{٢}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -٢س \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-٢س}$$

$$\Leftarrow \int ٣\cancel{س}\left(ص\right)^{٥} \frac{ءص}{-٢\cancel{س}}$$

$$= \frac{-٣}{٢}\int \left(ص\right)^{٥} ءص = \frac{-٣}{٢} \times \frac{١}{٦} ص^{٦} + جـ$$

$$= \frac{-١}{٤}\left(٧-س^{٢}\right)^{٦} + جـ$$

---

٣) $\int س^{٣}\sqrt{س^{٤}+١}\, ءس$

الحل:

$$\int س^{٣}\sqrt{س^{٤}+١}\, ءس$$

$$ص = س^{٤}+١$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٤س^{٣} \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{٤س^{٣}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{س^{٣}}\sqrt{ص}\, \frac{ءص}{٤\cancel{س^{٣}}}$$

$$= \frac{١}{٤}\int ص^{\frac{١}{٢}} ءص = \frac{١}{\cancel{٤}_{٢}} \times \frac{\cancel{٢}}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{١}{٦}\sqrt{\left(س^{٤}+١\right)^{٣}} + جـ$$

اعداد الاستاذ: أحمد ابوموييس٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

٤) $\int \frac{\text{٣س} - \text{٢}}{\left(\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س}\right)^{\text{٤}}} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{٣س} - \text{٢}}{\left(\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س}\right)^{\text{٤}}} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س}$$

$$\text{ءص} = \text{٦س} - \text{٤} \; \text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٦س} - \text{٤}}$$

$$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\left(\text{٣س} - \text{٢}\right)}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{٣س} - \text{٢}}}{\left(\text{ص}\right)^{\text{٤}}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\left(\cancel{\text{٣س} - \text{٢}}\right)}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \text{ص}^{-\text{٤}} \, \text{ءص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{-\text{١}}{\text{٣}} \, \text{ص}^{-\text{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٦}} \left(\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س}\right)^{-\text{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٦}\left(\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤س}\right)^{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

---

٥) $\int \text{س}^{\text{٣}} \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \; \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{س}^{\text{٣}} \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \; \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{١} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} = \text{ص} - \text{١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$$

$$\Leftarrow \int \text{س}^{\cancel{\text{٣}}\,\text{٢}} \sqrt{\text{ص}} \; \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \left(\text{ص} - \text{١}\right)\left(\text{ص}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \text{ءص}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \left(\text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right) \text{ءص}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(\frac{\text{٢}}{\text{٥}} \text{ص}^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}} - \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \sqrt{\left(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}\right)^{\text{٥}}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}} \sqrt{\left(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}\right)^{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

---

٦) $\int \text{٣س}^{\text{٥}} \sqrt{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٥}} \; \text{ءس}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{٥} \Leftarrow \text{س}^{\text{٣}} = \text{ص} + \text{٥}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{\text{٢}}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{٣}}\text{س}^{\cancel{\text{٥}}\,\text{٣}} \sqrt{\text{ص}} \; \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣س}^{\text{٢}}}}$$

$$= \int \text{س}^{\text{٣}} \left(\text{ص}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \text{ءص}$$

$$= \int \left(\text{ص} + \text{٥}\right)\left(\text{ص}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \text{ءص}$$

$$= \int \left(\text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{٥ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right) \text{ءص}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\text{٥}} \text{ص}^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}} + \frac{\text{١٠}}{\text{٣}} \text{ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{٢}}{\text{٥}} \sqrt{\left(\text{س}^{\text{٣}} - \text{٥}\right)^{\text{٥}}} + \frac{\text{١٠}}{\text{٣}} \sqrt{\left(\text{س}^{\text{٣}} - \text{٥}\right)^{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

٧) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}}}$

الحل:

$$\int \frac{\text{دس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}}}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}\left(\sqrt{\text{س}} - ١\right)}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} - ١$$

$$\text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,(\text{ص})}\, ٢\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{٢}{\text{ص}}\,\text{دص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{\text{س}} - ١\right| + \text{جـ}$$

---

٨) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}{٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = ٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}$$

$$\text{دص} = \frac{-٤}{٣}\,\text{س}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{-٣\,\text{دص}}{٤\,\text{س}^{\frac{١}{٣}}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}}{\text{ص}} \times \frac{-٣\,\text{دص}}{٤\,\cancel{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}} = \frac{-٣}{٤}\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\right| + \text{جـ}$$

سؤال وزاري:

جد $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}\left(١ + \sqrt{\text{س}}\right)^{٤}}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}\left(١ + \sqrt{\text{س}}\right)^{٤}}$$

$$\text{ص} = ١ + \sqrt{\text{س}}$$

$$\text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ص}^{٤}} \times ٢\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دص} = ٢\int \text{ص}^{-٤}\,\text{دص}$$

$$= ٢ \times \frac{-١}{٣}\,\text{ص}^{-٣} + \text{جـ} = \frac{-٢}{٣\left(١ + \sqrt{\text{س}}\right)^{٣}} + \text{جـ}$$

سؤال وزاري:

جد $\int_{٠}^{٤} \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}}\,\text{دس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٠}^{٤} \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩ \Leftarrow \text{س}^{٢} = \text{ص} - ٩$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$$

$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = (٠)^{٢} + ٩ = ٩$$

$$\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = (٤)^{٢} + ٩ = ٢٥$$

$$\Leftarrow \int_{٩}^{٢٥} \frac{\text{س}^{\cancel{٣}\,٢}}{\sqrt{\text{ص}^{٣}}} \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} \text{س}^{٢}\,(\text{ص})^{\frac{-٣}{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} (\text{ص} - ٩)(\text{ص})^{\frac{-٣}{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} \text{ص}^{\frac{-١}{٢}} - ٩\text{ص}^{\frac{-٣}{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{\cancel{١}}{\cancel{٢}}\left[\left(\cancel{٢}\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - ٩ \times -\cancel{٢} \times \text{ص}^{\frac{-١}{٢}}\right)\right]_{٩}^{٢٥}$$

$$= \left[\left(\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + ٩\text{ص}^{\frac{-١}{٢}}\right)\right]_{٩}^{٢٥}$$

$$= \left[\left(\sqrt{\text{ص}} + \frac{٩}{\sqrt{\text{ص}}}\right)\right]_{٩}^{٢٥}$$

$$= \left(\left(\sqrt{٢٥} + \frac{٩}{\sqrt{٢٥}}\right) - \left(\sqrt{٩} + \frac{٩}{\sqrt{٩}}\right)\right)$$

$$= \left(\left(٥ + \frac{٩}{٥}\right) - \left(٣ + \frac{٩}{٣}\right)\right)$$

$$= \left(٥ + \frac{٩}{٥} - ٣ - \frac{٩}{٣}\right) = \frac{٩}{٥} - ١ = \frac{٤}{٥}$$

الاشتقاق:

جا	جتا	ظا	ظتا	قا	قتا
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
جتا	−جا	قا²	−قتا²	قا ظا	−قتا ظتا

التكامل:

جا	جتا
$\Downarrow$	$\Downarrow$
−جتا	جا

جتا⁴ جا⁴ جتا² جا² } $\Leftarrow$ $\frac{١}{٢}$(١∓جتا٢)

جا⁴جتا⁴ جا²جتا² جاجتا } $\Leftarrow$ ٢جاجتا

جتا⁴−جا⁴ جتا²−جا² } $\Leftarrow$ جتا٢

ظا² } $\Leftarrow$ قا² − ١

ظتا² } $\Leftarrow$ قتا² − ١

مثال(٢): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

(نفرض زاوية الدائري)

١) $\int (\text{٥س}^{٤} - ٣)\,\text{جتا}(\text{س}^{٥} - \text{٣س} + ٢)\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{س}^{٥} - \text{٣س} + ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٥س}^{٤} - ٣ \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٥س}^{٤} - ٣}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٥س}^{٤} - ٣)}\,\text{جتا}(\text{ص})\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٥س}^{٤} - ٣}}$

$= \int \text{جتاص}\;\text{ءص} = \text{جاص} + \text{جـ}$

$= \text{جا}(\text{س}^{٥} - \text{٣س} + ٢) + \text{جـ}$

٢) $\int (\text{٣س}^{٢} + ٧)\,\text{قا}(\text{س}^{٣} + \text{٧س} - ١)\,\text{ظا}(\text{س}^{٣} + \text{٧س} - ١)\,\text{ءس}$

الحل:

$\int (\text{٣س}^{٢} + ٧)\,\text{قا}(\text{س}^{٣} + \text{٧س} - ١)\,\text{ظا}(\text{س}^{٣} + \text{٧س} - ١)\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} + \text{٧س} - ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{٢} + ٧ \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{٢} + ٧}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٣س}^{٢} + ٧)}\,\text{قا}(\text{ص})\,\text{ظا}(\text{ص})\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣س}^{٢} + ٧}}$

$= \int \text{قاص}\;\text{ظاص}\;\text{ءص} = \text{قاص} + \text{جـ}$

$= \text{قا}(\text{س}^{٣} + \text{٧س} - ١) + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}}\;\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = \text{٢ص}\;\text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}}\,٢\cancel{\text{ص}}\;\text{ءص}$

$= ٢\int \text{قتا}^{٢}\text{ص}\;\text{ءص} = -\text{٢ظتاص} + \text{جـ}$

$= -٢\text{ظتا}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{س}\;\text{قا}^{٢}(\text{٥س}^{٢} + ١)\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \text{س}\;\text{قا}^{٢}(\text{٥س}^{٢} + ١)\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{٥س}^{٢} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١٠س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{١٠س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}}\;\text{قا}^{٢}(\text{ص})\,\frac{\text{ءص}}{١٠\cancel{\text{س}}}$

$= \frac{١}{١٠}\int \text{قا}^{٢}\text{ص}\;\text{ءص} = \frac{١}{١٠}\text{ظاص} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٠}\text{ظا}(\text{٥س}^{٢} + ١) + \text{جـ}$

٥) $\int \frac{\text{س ظا}^2\sqrt{\text{س}^2-1}}{\sqrt{\text{س}^2-1}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{ص}=\sqrt{\text{س}^2-1} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{\text{س}^2-1}}$

$\text{ءس}=\frac{\sqrt{\text{س}^2-1}}{\text{س}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}}\,\text{ظا}^2\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}}\cdot\frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}}}\,\text{ءص}=\int \text{ظا}^2\text{ص ءص}$

$=\int(\text{قا}^2\text{ص}-1)\,\text{ءص}=\text{ظاص}-\text{ص}+\text{جـ}$

$=\text{ظا}\left(\sqrt{\text{س}^2-1}\right)-\sqrt{\text{س}^2-1}+\text{جـ}$

---

٦) $\int \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{قتا}^2\frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{قتا}^2\frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ص}=\frac{1}{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{-1}{\text{س}^2} \Leftarrow \text{ءس}=-\text{س}^2\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}}\,\text{قتا}^2\text{ص}\times-\cancel{\text{س}^2}\,\text{ءص}$

$=-\int \text{قتا}^2\text{ص ءص}=\text{ظتاص}+\text{جـ}$

$=\text{ظتا}\frac{1}{\text{س}}+\text{جـ}$

٧) $\int \frac{\text{س}^2}{\text{قتا}^2\text{س}^3}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{\text{س}^2}{\text{قتا}^2\text{س}^3}\,\text{ءس}$

$=\int \text{س}^2\,\text{جا}^2\text{س}^3\,\text{ءس}$

$\text{ص}=\text{س}^3$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=3\text{س}^2 \Leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^2}\,\text{جا}^2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$=\frac{1}{3}\int \text{جا}^2\text{ص ءص}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{2}(1-\text{جتا2ص})\,\text{ءص}$

$=\frac{1}{6}\left(\text{ص}-\frac{1}{2}\text{جا2ص}\right)+\text{جـ}$

$=\frac{1}{6}\text{س}^3-\frac{1}{12}\text{جا2س}^3+\text{جـ}$

---

٨) $\int 2\text{س}^2\,\text{جتا}^2 4\text{س}^3\,\text{ءس}$

الحل:

$\int 2\text{س}^2\,\text{جتا}^2 4\text{س}^3\,\text{ءس}$

$\text{ص}=4\text{س}^3$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=12\text{س}^2 \Leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{12\text{س}^2}$

$\Leftarrow \int \cancel{2}\cancel{\text{س}^2}\,\text{جتا}^2\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{12}^{6}\cancel{\text{س}^2}}$

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

$$= \frac{١}{٦} \int جتا^{٢}ص \, ءص$$

$$= \frac{١}{٦} \int \frac{١}{٢} \left(١ + جتا٢ص\right) ءص$$

$$= \frac{١}{١٢} \int \left(١ + جتا٢ص\right) ءص$$

$$= \frac{١}{١٢} \left(ص + \frac{١}{٢} جا٢ص\right) + جـ$$

$$= \frac{١}{١٢} \left(٤س^{٣} + \frac{١}{٢} جا٨س^{٣}\right) + جـ$$

$$= \frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٢٤} جا٨س^{٣} + جـ$$

---

٩) $\int \frac{ظا^{٢}\frac{١+س}{س}}{س^{٢}} ءس$

الحل:

$$ص = \frac{١+س}{س}$$

$$ءص = \frac{-١}{س^{٢}} ءس \Leftarrow ءس = -س^{٢} ءص$$

$$\Leftarrow \int \frac{ظا^{٢}ص}{\cancel{س^{٢}}} \times -\cancel{س^{٢}} ءص$$

$$= -\int ظا^{٢}ص \, ءص = -\int \left(قا^{٢}ص - ١\right) ءص$$

$$= \left(ص - ظا^{٢}ص\right) + جـ$$

$$= \frac{١+س}{س} - ظا^{٢}\left(\frac{١+س}{س}\right) + جـ$$

١٠) $\int \frac{جا لو_{هـ} س}{س} ءس$

الحل:

$$\int \frac{جا لو_{هـ} س}{س} ءس$$

$$ص = لو_{هـ} س$$

$$ءص = \frac{١}{س} ءس \Leftarrow ءس = س ءص$$

$$\int \frac{جاص}{\cancel{س}} \times \cancel{س} ءص = \int جاص ءص$$

$$= -جتاص + جـ = -جتا لو_{هـ} س + جـ$$

---

١١) $\int \sqrt{ظاس - ١} \, قتا^{٢}س ءس$

الحل:

$$\int \sqrt{ظاس - ١} \, قتا^{٢}س ءس$$

$$ص = ظاس - ١$$

$$ءص = -قتا^{٢}س ءس \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-قتا^{٢}س}$$

$$\int \sqrt{ص} \, قتا^{٢}س \frac{ءص}{-قتا^{٢}س} = -\int ص^{\frac{١}{٢}} ءص$$

$$= \frac{-٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{-٢}{٣} \sqrt{\left(ظاس - ١\right)^{٣}} + جـ$$

١٢) $\int_{\text{٠}}^{\sqrt{\text{٨}}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\Leftarrow \text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$

$\text{س} = \text{٠} \Leftarrow \text{ص} = (\text{٠})^{\text{٢}} + \text{١} = \text{١}$

$\text{س} = \sqrt{\text{٨}} \Leftarrow \text{ص} = \left(\sqrt{\text{٨}}\right)^{\text{٢}} + \text{١} = \text{٩}$

$\Leftarrow \int_{\text{١}}^{\text{٩}} \frac{\cancel{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int_{\text{١}}^{\text{٩}} (\text{ص})^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\,\text{ءص}$

$= \cancel{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \left(\left[\cancel{\text{٢}}\,\text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \right]_{\text{١}}^{\text{٩}} \right) = \left((\text{٩})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} - (\text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \right) = \text{٣} - \text{١} = \text{٢}$

مثال(٣): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

(نفرض اس هـ)

١) $\int (\text{٢س} + \text{٣})\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int (\text{٢س}+\text{٣})\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} + \text{٣} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢س}+\text{٣}}$

$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٢س}+\text{٣})}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٢س}+\text{٣}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س}} + \text{جـ}$

٢) $\int (\text{٦س}^{\text{٢}} - \text{٤س})\,\text{هـ}^{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{س}^{\text{٢}})}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int (\text{٦س}^{\text{٢}} - \text{٤س})\,\text{هـ}^{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{س}^{\text{٢}})}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}}$

$\text{ءص} = (\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س})\,\text{ءس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}}$

$\int \text{٢}(\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س})\,\text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}}$

$= \int \text{٢هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= \text{٢هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \text{٢هـ}^{(\text{س}^{\text{٣}}-\text{س}^{\text{٢}})} + \text{جـ}$

---

٣) $\int \text{جا٢س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \text{جا٢س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{ءص} = \text{٢جاس جتاس ءس}$

$\text{ءص} = \text{جا٢س ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جا٢س}}$

$\int \cancel{\text{جا٢س}}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جا٢س}}} = \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \text{هـ}^{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\int \frac{\text{هـ}^{\frac{٢}{\text{س}}}}{٣\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{\text{هـ}^{\frac{٢}{\text{س}}}}{٣\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \frac{٢}{\text{س}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢}{\text{س}^{٢}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{-٢}\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}}\,\frac{\cancel{\text{س}^{٢}}}{-٢}\,\text{ءص}$

$= \frac{-١}{٦}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{-١}{٦}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٦}\,\text{هـ}^{\frac{٢}{\text{س}}} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \frac{٤\text{س}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢}+١}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

$\text{ءس} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}{\text{س}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{٤\cancel{\text{س}}\,\text{هـ}^{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}}\,\frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}}}\,\text{ءص} = ٤\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= ٤\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = ٤\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}} + \text{جـ}$

٦) $\int \text{قا}^{٢}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \text{قا}^{٢}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{ظا}٢\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}٢\text{س} \times ٢ \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{قا}^{٢}٢\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{قا}^{٢}٢\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{قا}^{٢}٢\text{س}}}$

$= \frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}} + \text{جـ}$

مثال(٤): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

(نفرض الاس $\neq ١$)

١) $\int ٥\text{جاس}\,\text{جتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int ٥\text{جاس}\,\text{جتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس} \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int ٥\cancel{\text{جاس}}\,\text{ص}^{٣}\,\frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= -٥\int \text{ص}^{٣}\,\text{ءص} = -٥ \times \frac{١}{٤}\text{ص}^{٤} + \text{جـ}$

$= \frac{-٥}{٤}\text{جتا}^{٤}\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int ٥\,\text{جتاس}\,\text{جا}^{٤}\text{س}\;\text{ؤس}$

الحل:

$\int ٥\,\text{جتاس}\,\text{جا}^{٤}\text{س}\;\text{ؤس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\dfrac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ؤس} = \dfrac{\text{ؤص}}{\text{جتاس}}$

$\Leftarrow \int ٥\,\cancel{\text{جتاس}}\,\text{ص}^{٤}\,\dfrac{\text{ؤص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = ٥\int \text{ص}^{٤}\,\text{ؤص}$

$= ٥ \times \dfrac{١}{٥}\text{ص}^{٥} + \text{جـ} = \text{جا}^{٥}\text{س} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جا}^{٣}\text{س}\;\text{جتا}^{٤}\text{س}\;\text{ؤس}$

(نفرض الاس الزوجي)

الحل:

$\text{ص} = \text{جتاس} \Leftarrow \dfrac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ؤس} = \dfrac{\text{ؤص}}{-\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int \text{جا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{س}\;\text{ص}^{٤}\,\dfrac{\text{ؤص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= -\int \text{جا}^{٢}\text{س}\;\text{ص}^{٤}\,\text{ؤص} = -\int (١-\text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ص}^{٤}\,\text{ؤص}$

$= -\int (١-\text{ص}^{٢})\,\text{ص}^{٤}\,\text{ؤص} = -\int \text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦}\;\text{ؤص}$

$= -\dfrac{١}{٥}\text{ص}^{٥} + \dfrac{١}{٧}\text{ص}^{٧} + \text{جـ}$

$= -\dfrac{١}{٥}\text{جتا}^{٥}\text{س} + \dfrac{١}{٧}\text{جتا}^{٧}\text{س} + \text{جـ}$

٤) $\int ٥\,\text{جتا}^{٣}(٢\text{س})\,\text{جا}^{٤}(٢\text{س})\;\text{ؤس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{جا}٢\text{س}$

$\dfrac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = ٢\,\text{جتا}٢\text{س} \Leftarrow \text{ؤس} = \dfrac{\text{ؤص}}{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}$

$\Leftarrow ٥\int \text{جتا}^{\cancel{٣}\,٢}(٢\text{س})\;\text{ص}^{٤}\,\dfrac{\text{ؤص}}{٢\,\cancel{\text{جتا}٢\text{س}}}$

$= \dfrac{٥}{٢}\int \text{جتا}^{٢}(٢\text{س})\;\text{ص}^{٤}\,\text{ؤص}$

$= \dfrac{٥}{٢}\int \left(١-\text{جا}^{٢}٢\text{س}\right)\text{ص}^{٤}\,\text{ؤص}$

$= \dfrac{٥}{٢}\int (١-\text{ص}^{٢})\,\text{ص}^{٤}\,\text{ؤص} = \dfrac{٥}{٢}\int \text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦}\;\text{ؤص}$

$= \dfrac{٥}{٢}\left(\dfrac{١}{٥}\text{ص}^{٥} - \dfrac{١}{٧}\text{ص}^{٧}\right) + \text{جـ}$

$= \dfrac{١}{٢}\text{جا}^{٥}٢\text{س} - \dfrac{٥}{١٤}\text{جا}^{٧}٢\text{س} + \text{جـ}$

٥) $\int \text{جتا}^{٥}\text{س}\;\text{جا}^{٣}\text{س}\;\text{ؤس}$

(نفرض الاس الاكبر)

الحل:

$\Leftarrow \text{ص} = \text{جتاس}$

$\dfrac{\text{ؤص}}{\text{ؤس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ؤس} = \dfrac{\text{ؤص}}{-\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{٥}\,\text{جا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{س}\;\dfrac{\text{ؤص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= -\int \text{ص}^{٥}\,\text{جا}^{٢}\text{س}\;\text{ؤص}$

$= -\int \text{ص}^{٥}\,(١-\text{جتا}^{٢}\text{س})\;\text{ؤص}$

$= -\int \text{ص}^{٥}(١-\text{ص}^{٢})\;\text{ؤص} = -\int \text{ص}^{٥} - \text{ص}^{٧}\;\text{ؤص}$

$= \dfrac{-١}{٦}\text{ص}^{٦} + \dfrac{١}{٨}\text{ص}^{٨} + \text{جـ}$

$= \dfrac{-١}{٦}\text{جتا}^{٦}\text{س} + \dfrac{١}{٨}\text{جتا}^{٨}\text{س} + \text{جـ}$

٦) $\int \text{٤جا}^{٣}\text{٢س جتا}^{٣}\text{٢س ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{جتا٢س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{−٢جا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{−٢جا٢س}}$$

$$\Leftarrow \int \text{٤ جا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{٢س ص}^{٣}\ \frac{\text{ءص}}{\text{−٢}\cancel{\text{جا٢س}}}$$

$$= \text{−٢}\int \text{جا}^{٢}\text{٢س ص}^{٣}\ \text{ءص}$$

$$= \text{−٢}\int (\text{١}-\text{جتا}^{٢}\text{٢س})\,\text{ص}^{٣}\ \text{ءص}$$

$$= \text{−٢}\int (\text{١}-\text{ص}^{٢})\,\text{ص}^{٣}\ \text{ءص}$$

$$= \text{−٢}\int \text{ص}^{٣} - \text{ص}^{٥}\ \text{ءص}$$

$$= \text{−٢}\left(\frac{١}{٤}\text{ص}^{٤} - \frac{١}{٦}\text{ص}^{٦}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{ص}^{٤} + \frac{١}{٣}\text{ص}^{٦} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{جتا}^{٤}\text{٢س} + \frac{١}{٣}\text{جتا}^{٦}\text{٢س} + \text{جـ}$$

---

٧) $\int \text{٦جا}^{٥}\text{٣س جتا}^{٥}\text{٣س ءس}$

الحل:

$$\int \text{٦جا}^{٥}\text{٣س جتا}^{٥}\text{٣س ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا٣س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣جتا٣س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣جتا٣س}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{٦}\,\text{٢ص}^{٥}\ \text{جتا}^{\cancel{٥}\,٤}\text{٣س}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣}}\cancel{\text{جتا٣س}}}$$

$$= \int \text{٢ص}^{٥}\ \text{جتا}^{٤}\text{٣س ءص}$$

$$= \text{٢}\int \text{ص}^{٥}\left(\text{١}-\text{جا}^{٢}\text{٣س}\right)^{٢}\text{ءص}$$

$$= \text{٢}\int \text{ص}^{٥}\left(\text{١}-\text{ص}^{٢}\right)^{٢}\text{ءص}$$

$$= \text{٢}\int \text{ص}^{٥}\left(\text{١}-\text{٢ص}^{٢}+\text{ص}^{٤}\right)\text{ءص}$$

$$= \text{٢}\int \text{ص}^{٥} - \text{٢ص}^{٧} + \text{ص}^{٩}\ \text{ءص}$$

$$= \text{٢}\left(\frac{١}{٦}\text{ص}^{٦} - \frac{٢}{٨}\text{ص}^{٨} + \frac{١}{١٠}\text{ص}^{١٠}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{جا}^{٦}\text{٣س} - \frac{١}{٢}\text{جا}^{٨}\text{٣س} + \frac{١}{٥}\text{جا}^{١٠}\text{٣س} + \text{جـ}$$

مثال(٥): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{٤جتا}^{٣}\text{٢س ءس}$

الحل:

$$= \text{٤}\int \text{جتا}^{٢}\text{٢س} \times \text{جتا٢س ءس}$$

$$= \text{٤}\int (\text{١}-\text{جا}^{٢}\text{٢س})\,\text{جتا٢س ءس}$$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جتا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢جتا٢س}}$$

$$\Leftarrow \text{٤}\int (\text{١}-\text{ص}^{٢})\,\cancel{\text{جتا٢س}}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}}$$

$$= \text{٢}\int (\text{١}-\text{ص}^{٢})\text{ءص} = \text{٢}(\text{ص} - \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣}) + \text{جـ}$$

$$= \text{٢جا٢س} - \frac{٢}{٣}\text{جا}^{٣}\text{٢س} + \text{جـ}$$

٢) $\int ١٢\,\text{جا}^{٥}٣\text{س}\;\text{ءس}$

الحل:

$$\int ١٢\,\text{جا}^{٥}٣\text{س}\;\text{ءس}$$

$$= ١٢\int \text{جا}^{٤}٣\text{س}\times\text{جا}٣\text{س}\;\;\text{ءس}$$

$$= ١٢\int\left(١-\text{جتا}^{٢}٣\text{س}\right)^{٢}\text{جا}٣\text{س}\;\;\text{ءس}$$

$$\text{ص}=\text{جتا}٣\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=-٣\text{جا}٣\text{س}\Leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{-٣\text{جا}٣\text{س}}$$

$$\Leftarrow ١٢\int\left(١-\text{ص}^{٢}\right)^{٢}\cancel{\text{جا}٣\text{س}}\;\frac{\text{ءص}}{-٣\cancel{\text{جا}٣\text{س}}}$$

$$=-٤\int\left(١-\text{ص}^{٢}\right)^{٢}\text{ءص}$$

$$=-٤\int ١-٢\text{ص}^{٢}+\text{ص}^{٤}\;\text{ءص}$$

$$=-٤\left(\text{ص}-\frac{٢}{٣}\text{ص}^{٣}+\frac{١}{٥}\text{ص}^{٥}\right)+\text{جـ}$$

$$=-٤\text{جتا}٣\text{س}+\frac{٨}{٣}\text{جتا}^{٣}٣\text{س}-\frac{٤}{٥}\text{جتا}^{٥}٣\text{س}+\text{جـ}$$

✓ قا ظا $\Leftarrow$ $\text{قا}^{\text{فردي}}$ $\Leftarrow$ ص = قا
$\text{قا}^{\text{زوجي}}$ $\Leftarrow$ ص = ظا

✓ قتا ظتا $\Leftarrow$ $\text{قتا}^{\text{فردي}}$ $\Leftarrow$ ص = قتا
$\text{قتا}^{\text{زوجي}}$ $\Leftarrow$ ص = ظتا

مثال(٦): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\;\text{ظاس}\;\text{ءس}$

الحل:

$$\text{ص}=\text{ظاس}\Leftarrow\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\text{قا}^{٢}\text{س}\Leftarrow\text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$

$$\Leftarrow\int\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\;\text{ص}\;\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}=\int\text{ص}\;\text{ءص}$$

$$=\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢}+\text{جـ}=\frac{١}{٢}\text{ظا}^{٢}\text{س}+\text{جـ}$$

---

٢) $\int \text{قا}^{٦}\text{س}\;\text{ظا}^{٤}\text{س}\;\text{ءس}$

الحل:

$$\text{ص}=\text{ظاس}\Leftarrow\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\text{قا}^{٢}\text{س}\Leftarrow\text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$

$$\Leftarrow\int\text{قا}^{\cancel{٦}\,٤}\text{س}\;\text{ص}^{٤}\;\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$$

$$=\int\left(\text{ظا}^{٢}\text{س}-١\right)^{٢}\text{ص}^{٤}\text{ءص}$$

$$=\int\left(\text{ص}^{٢}-١\right)^{٢}\text{ص}^{٤}\text{ءص}$$

$$=\int\left(\text{ص}^{٤}-٢\text{ص}^{٢}+١\right)\text{ص}^{٤}\text{ءص}$$

$$=\int\left(\text{ص}^{٨}-٢\text{ص}^{٦}+\text{ص}^{٤}\right)\text{ءص}$$

$$=\frac{١}{٩}\text{ص}^{٩}-\frac{٢}{٧}\text{ص}^{٧}+\frac{١}{٥}\text{ص}^{٥}+\text{جـ}$$

$$=\frac{١}{٩}\text{ظا}^{٩}\text{س}-\frac{٢}{٧}\text{ظا}^{٧}\text{س}+\frac{١}{٥}\text{ظا}^{٥}\text{س}+\text{جـ}$$

٣) $\int \text{قا}^{٣}\,\text{٢س}\ \text{ظا}^{٥}\,\text{٢س}\ \text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{قا٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢قا٢س ظا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢ص ظا٢س}}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{\cancel{٣}\,٢}\ \text{ظا}^{\cancel{٥}\,٤}\,\text{٢س}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{ص}}\ \cancel{\text{ظا٢س}}}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{ص}^{٢} \left(\text{قا}^{٢}\text{٢س} - ١\right)^{٢} \text{ءص}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{ص}^{٢} \left(\text{ص}^{٢} - ١\right)^{٢} \text{ءص}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{ص}^{٢} \left(\text{ص}^{٤} - \text{٢ص}^{٢} + ١\right) \text{ءص}$

$= \frac{١}{٢} \int \left(\text{ص}^{٦} - \text{٢ص}^{٤} + \text{ص}^{٢}\right) \text{ءص}$

$= \frac{١}{٢} \left(\frac{١}{٧}\text{ص}^{٧} - \frac{٢}{٥}\text{ص}^{٥} + \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٤}\text{قا}^{٧}\text{٢س} - \frac{١}{٥}\text{قا}^{٥}\text{٢س} + \frac{١}{٦}\text{قا}^{٣}\text{٢س} + \text{جـ}$

---

٤) $\int \text{قتا}^{٥}\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{قتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{-قتاس ظتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{-ص ظتاس}}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{\cancel{٥}\,٤}\ \text{ظتا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{س}\ \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{ص}}\ \cancel{\text{ظتاس}}}$

$= -\int \text{ص}^{٤} \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right) \text{ءص}$

$= -\int \text{ص}^{٤} \left(\text{ص}^{٢} - ١\right) \text{ءص}$

$= \int \left(\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦}\right) \text{ءص}$

$= \frac{١}{٥}\text{ص}^{٥} - \frac{١}{٧}\text{ص}^{٧} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٥}\text{قتا}^{٥}\text{س} - \frac{١}{٧}\text{قتا}^{٧}\text{س} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س} \left(\text{ظا}^{٢}\text{س} - ١\right) \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}} \left(\text{ص}^{٢} - ١\right) \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$

$= \int \left(\text{ص}^{٢} - ١\right) \text{ءص} = \frac{١}{٣}\text{ص}^{٣} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٦) $\int \text{قتا}^{6}\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \text{قتا}^{2}\text{س} \times \text{قتا}^{4}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \int \text{قتا}^{2}\text{س} \times \left(\text{ظتا}^{2}\text{س} + 1\right)^{2}\ \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{ظتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{قتا}^{2}\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{قتا}^{2}\text{س}} \times \left(\text{ص}^{2} + 1\right)^{2} \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{قتا}^{2}\text{س}}}$$

$$= -\int \left(\text{ص}^{2} + 1\right)^{2} \text{ءص} = -\int \left(\text{ص}^{4} + 2\text{ص}^{2} + 1\right) \text{ءص}$$

$$= \frac{-1}{5}\text{ص}^{5} - \frac{2}{3}\text{ص}^{3} - \text{ص} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{5}\text{ظتا}^{5}\text{س} - \frac{2}{3}\text{ظتا}^{3}\text{س} - \text{ظتاس} + \text{جـ}$$

مثال(٧): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{2\text{ظاس}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$= 2\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ظاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{2}\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$$

$$\Leftarrow 2\int \cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}\ \text{ص} \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$$

$$= 2\int \text{ص}\ \text{ءص} = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}\text{ص}^{2} + \text{جـ} = \text{ظا}^{2}\text{س} + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{قتا}^{2}\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{قتا}^{2}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{2\text{جاس جتاس}}{\text{قتا}^{2}\text{س}}\ \text{ءس}$$

$$= 2\int \text{جاس جتاس} \times \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= 2\int \text{جا}^{3}\text{س جتاس}\ \text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow 2\int \text{ص}^{3} \times \cancel{\text{جتاس}} \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = 2\int \text{ص}^{3}\ \text{ءص}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4}\text{ص}^{4} + \text{جـ} = \frac{1}{2}\text{جا}^{4}\text{س} + \text{جـ}$$

---

٣) $\int \frac{\text{جتا}5\text{س}}{\text{قتا}^{3}5\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \text{جتا}5\text{س} \times \text{جا}^{3}5\text{س}\ \text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا}5\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 5\text{جتا}5\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{5\text{جتا}5\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{جتا}5\text{س}} \times \text{ص}^{3} \frac{\text{ءص}}{5\cancel{\text{جتا}5\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{5}\int \text{ص}^{3}\ \text{ءص} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\text{ص}^{4} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{20}\text{جا}^{4}5\text{س} + \text{جـ}$$

٤) $\int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}}{\sqrt{\text{جا٢س}}}\ \text{ءس}$

الحل:

$= \int \frac{\text{جتا٢س}}{\sqrt{\text{جا٢س}}}\ \text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جتا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢جتا٢س}}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{جتا٢س}}}{\sqrt{\text{ص}}}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}} = \frac{1}{2}\int (\text{ص})^{\frac{-1}{2}}\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = \sqrt{\text{جا٢س}} + \text{جـ}$

---

٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{٢س ظتا}^{5}\text{٢س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \text{قا}^{2}\text{٢س ظا}^{5}\text{٢س ءس}$

$\text{ص} = \text{ظا٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢قا}^{2}\text{٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢قا}^{2}\text{٢س}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{6} \Leftarrow \text{ص} = \text{ظا}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = \text{ظا}(2 \times 0) = 0$

$\Leftarrow \int_{0}^{\sqrt{3}} \cancel{\text{قا}^{2}\text{٢س}}\ \text{ص}^{5}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{قا}^{2}\text{٢س}}}$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}} \text{ص}^{5}\ \text{ءص} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\text{ص}^{6}\right]_{0}^{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{12}\left(\left(\sqrt{3}\right)^{6} - (0)^{6}\right)$

$= \frac{1}{12}(27) = \frac{27}{12}$

---

٦) $\int \text{جاس جتا}^{2}(\text{جتاس})\ \text{ءس}$

الحل:

$\Leftarrow \text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{جاس}}\ \text{جتا}^{2}(\text{ص})\ \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= -\int \text{جتا}^{2}\text{ص ءص} = -\int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا٢ص})\ \text{ءص}$

$= \frac{-1}{2}\left(\text{ص} + \frac{1}{2}\text{جا٢ص}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{2}\text{ص} - \frac{1}{4}\text{جا٢ص} + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{2}\text{جتاس} - \frac{1}{4}\text{جا}(\text{٢جتاس}) + \text{جـ}$

---

٧) $\int \text{س}^{2}\ \text{جاس}^{3}\ \text{جتا}^{4}\text{س}^{3}\ \text{ءس}$

الحل:

$\Leftarrow \text{ص} = \text{جتاس}^{3}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٣س}^{2}\ \text{جاس}^{3} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{٣س}^{2}\ \text{جاس}^{3}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{2}}\ \cancel{\text{جاس}^{3}}\ \text{ص}^{4}\ \frac{\text{ءص}}{-3\cancel{\text{س}^{2}}\ \cancel{\text{جاس}^{3}}}$

$= \frac{-1}{3}\int \text{ص}^{4}\ \text{ءص} = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{5}\text{ص}^{5} + \text{جـ}$

$= \frac{-1}{15}\text{جتا}^{5}\text{س}^{3} + \text{جـ}$

٨) $\int_{٠}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س}\left(١+\text{جا}٢\text{س}\right)\,\text{ءس}$

الحل:

$= \int_{٠}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س}\left(١+٢\,\text{جاس جتاس}\right)\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\pi} \left(\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢\,\text{جاس جتا}^{٣}\text{س}\right)\,\text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس} + ٢\int_{٠}^{\pi} \text{جاس جتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = \text{جتا}٠ = ١$

$\text{س} = \pi \Leftarrow \text{ص} = \text{جتا}\pi = -١$

$\Leftarrow \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\left(١+\text{جتا}٢\text{س}\right)\,\text{ءس}$

$+٢\int_{١}^{-١} \cancel{\text{جاس}}\ \text{ص}^{٣}\ \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= \frac{١}{٢}\left(\text{س}+\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}\Big]_{٠}^{\pi}\right) + -٢\left(\frac{١}{٤}\text{ص}^{٤}\Big]_{١}^{-١}\right)$

$= \frac{١}{٢}\left(\left(\pi+\frac{١}{٢}\text{جا}(٢\pi)\right)-\left(٠+\frac{١}{٢}\text{جا}(٠)\right)\right)$

$+\frac{-١}{٢}\left((-١)^{٤}-(١)^{٤}\right)$

$= \frac{١}{٢}\left((\pi+٠)-(٠-٠)\right)-٠ = \frac{\pi}{٢}$

٩) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جاس}-\text{جا}^{٣}\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جاس}-\text{جا}^{٣}\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جاس}\left(١-\text{جا}^{٢}\text{س}\right)}\ \text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جاس جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جتاس}|\ \sqrt{\text{جاس}}\ \text{ءس}$ (ربع اول)

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس}\left(\text{جاس}\right)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا}\frac{\pi}{٢} = ١$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = \text{جا}٠ = ٠$

$\Leftarrow \int_{٠}^{١} \cancel{\text{جتاس}}\ (\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int_{٠}^{١} (\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءص} = \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{٠}^{١}$

$= \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{\text{ص}^{٣}}\right)\Big]_{٠}^{١} = \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(١)^{٣}-(٠)^{٣}}\right) = \frac{٢}{٣}$

١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس\ جتاس}{\sqrt{١+جا^٢س}}\ ءس$

الحل:

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس\ جتاس}{\sqrt{١+جا^٢س}}\ ءس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جاس\ جتاس\left(١+جا^٢س\right)^{\frac{-١}{٢}}\ ءس$

$ص = ١+جا^٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢جاس\ جتاس \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{٢جاس\ جتاس}$

$س = ٠ \Leftarrow ص = ١+جا^٢(٠) = ١$

$س = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ص = ١+جا^٢\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ٢$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} \cancel{جاس\ جتاس}\ (ص)^{\frac{-١}{٢}} \frac{ءص}{٢\cancel{جاس\ جتاس}}$

$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٢} (ص)^{\frac{-١}{٢}}\ ءص = \frac{\cancel{١}}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢} \times ص^{\frac{١}{٢}}\Big]_{١}^{٢}$

$= \left(\sqrt{٢} - \sqrt{١}\right) = \sqrt{٢} - ١$

١١) $\int جا٢س\ \sqrt{٢+جتا٢س}\ ءس$

الحل:

$= \int جا٢س\ \left(٢+جتا٢س\right)^{\frac{١}{٢}}\ ءس$

$ص = ٢+جتا٢س$

$\frac{ءص}{ءس} = -٢جا٢س \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-٢جا٢س}$

$\Leftarrow \int \cancel{جا٢س}\ (ص)^{\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{-٢\cancel{جا٢س}}$

$= \frac{-١}{٢}\int (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ءص = \frac{-١}{٢} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{-١}{٣}\sqrt{\left(٢+جتا٢س\right)^{٣}} + جـ$

---

١٢) $\int جا٢س\ \sqrt{١-جاس}\ ءس$

الحل:

$= \int ٢جاس جتاس\ \left(١-جاس\right)^{\frac{١}{٢}}\ ءس$

$ص = ١-جاس \Leftarrow جاس = ١-ص$

$\frac{ءص}{ءس} = -جتاس \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-جتاس}$

$\Leftarrow ٢\int جاس\ \cancel{جتاس}\ (ص)^{\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{-\cancel{جتاس}}$

$= -٢\int (١-ص)\ (ص)^{\frac{١}{٢}}\ ءص$

$= -٢\int \left(ص^{\frac{١}{٢}} - ص^{\frac{٣}{٢}}\right) ءص$

$= -٢\left(\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}}\right) + جـ$

$= \frac{-٤}{٣}\sqrt{(١-جاس)^{٣}} + \frac{٤}{٥}\sqrt{(١-جاس)^{٥}} + جـ$

١٣) $\int \frac{\text{جتا٥س}}{\text{٥جا}^{٤}\text{٥س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$= \frac{١}{٥}\int \text{جتا٥س جا}^{-٤}\text{٥س ءس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا٥س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٥جتا٥س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٥جتا٥س}}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٥}\int \cancel{\text{جتا٥س}}\ \text{ص}^{-٤}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٥}\cancel{\text{جتا٥س}}}$$

$$= \frac{١}{٢٥}\int \text{ص}^{-٤}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢٥}\times\frac{-١}{٣}\text{ص}^{-٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٧٥}\times\frac{١}{\text{جا}^{٣}\text{٥س}} + \text{جـ}$$

مثال(٨): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{(\text{س}+١)^{٩}}{\text{س}^{١١}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \left(\frac{\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٩}\text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$= \int \left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٩}\text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$= \int \left(١+\text{س}^{-١}\right)^{٩}\text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = ١ + \text{س}^{-١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}^{-٢} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{س}^{-٢}}$$

$$\Leftarrow \int (\text{ص})^{٩}\,\cancel{\text{س}^{-٢}}\,\frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{س}^{-٢}}} = -\int (\text{ص})^{٩}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{-١}{١٠}\text{ص}^{١٠} + \text{جـ} = \frac{-١}{١٠}\left(١+\text{س}^{-١}\right)^{١٠} + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{(٢\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \frac{(٢\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٥}\times\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \int \left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٥}\text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$= \int \left(٢+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٥}\text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$= \int \left(٢+\text{س}^{-١}\right)^{٥}\text{س}^{-٢}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = ٢ + \text{س}^{-١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}^{-٢} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{س}^{-٢}}$$

$$\Leftarrow \int (\text{ص})^{٥}\,\cancel{\text{س}^{-٢}}\,\frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{س}^{-٢}}}$$

$$= -\int \text{ص}^{٥}\,\text{ءص} = \frac{-١}{٦}\text{ص}^{٦} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٦}\left(٢+\text{س}^{-١}\right)^{٦} + \text{جـ}$$

٣) $\int_{1}^{2} \frac{(\text{س}+1)^{5}}{\text{س}^{7}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int_{1}^{2} \left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}}\right)^{5} \times \text{س}^{-2}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{1}^{2} \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{5} \times \text{س}^{-2}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{1}^{2} \left(1+\text{س}^{-1}\right)^{5} \times \text{س}^{-2}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = 1+\text{س}^{-1}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}^{-2} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{س}^{-2}}$$

$$\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 1+\frac{1}{1} = 2$$

$$\text{س} = 2 \Leftarrow \text{ص} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftarrow \int_{1}^{2} (\text{ص})^{5} \times \cancel{\text{س}^{-2}}\, \frac{\text{ءص}}{\cancel{-\text{س}^{-2}}}$$

$$= -\int_{2}^{\frac{3}{2}} (\text{ص})^{5}\,\text{ءص} = -\left(\left[\frac{1}{6}\text{ص}^{6}\right]_{2}^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{-1}{6}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{6} - (2)^{6}\right)$$

$$= \frac{-1}{6}\left(\left(\frac{729}{64}\right) - 64\right)$$

$$= \frac{-1}{6}\left(\frac{-3367}{64}\right) = \frac{-3367}{384}$$

٤) $\int \frac{1}{\text{س}^{2}} \sqrt{\frac{2\text{س}+1}{\text{س}}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \text{س}^{-2} \sqrt{2+\frac{1}{\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$= \int \text{س}^{-2} \left(2+\text{س}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = 2+\text{س}^{-1}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}^{-2} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{س}^{-2}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-2}}\, (\text{ص})^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ءص}}{\cancel{-\text{س}^{-2}}}$$

$$= -\int (\text{ص})^{\frac{1}{2}}\,\text{ءص} = \frac{-2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-2}{3}\sqrt{\left(2+\frac{1}{\text{س}}\right)^{3}} + \text{جـ}$$

٥) $\int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3}{\sqrt{(\text{س}^2+9)^3}}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int_{0}^{2} \text{س}^3 (\text{س}^2+9)^{\frac{-3}{2}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^2 + 9 \Leftarrow \text{س}^2 = \text{ص} - 9$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$$

$$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = (0)^2 + 9 = 9$$

$$\text{س} = 2 \Leftarrow \text{ص} = (2)^2 + 9 = 13$$

$$\Leftarrow \int_{9}^{13} \text{س}^{\cancel{3}\,2} (\text{ص})^{\frac{-3}{2}} \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{9}^{13} (\text{ص}-9)(\text{ص})^{\frac{-3}{2}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{9}^{13} \text{ص}^{\frac{-1}{2}} - 9\text{ص}^{\frac{-3}{2}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[2\text{ص}^{\frac{1}{2}} + 18\text{ص}^{\frac{-1}{2}} \right]_{9}^{13} \right)$$

$$= \left[\text{ص}^{\frac{1}{2}} + 9\text{ص}^{\frac{-1}{2}} \right]_{9}^{13} = \left[\sqrt{\text{ص}} + \frac{9}{\sqrt{\text{ص}}} \right]_{9}^{13}$$

$$= \left(\sqrt{13} + \frac{9}{\sqrt{13}} \right) - \left(\sqrt{9} + \frac{9}{\sqrt{9}} \right)$$

$$= \left(\sqrt{13} + \frac{9}{\sqrt{13}} \right) - (3+3)$$

$$= \sqrt{13} - \frac{9}{\sqrt{13}}$$

---

٦) $\int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^7 + 5\text{س}^3}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^3(\text{س}^4+5)}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^3 \sqrt[3]{(\text{س}^4+5)}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^4 + 5$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^3 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^3} \sqrt[3]{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{4\cancel{\text{س}^3}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3}{16} \sqrt[3]{(\text{س}^4+5)^4} + \text{جـ}$$

---

٧) $\int \sqrt[3]{4\text{س}^5 + 2\text{س}^3}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \sqrt[3]{\text{س}^3(4\text{س}^2+2)}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س} \sqrt[3]{(4\text{س}^2+2)}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = 4\text{س}^2 + 2$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 8\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{8\text{س}}$$

$$= \int \cancel{\text{س}} \sqrt[3]{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{8\cancel{\text{س}}} = \frac{1}{8}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} \text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3}{32} \sqrt[3]{(4\text{س}^2+2)^4} + \text{جـ}$$

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

٨) $\int \left(\text{٧س}^{٥} - \text{٢س}\right)^{٣} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \left(\text{٧س}^{٥} - \text{٢س}\right)^{٣} \, \text{ءس}$$

$$= \int \left(\text{س}\left(\text{٧س}^{٤} - ٢\right)\right)^{٣} \, \text{ءس}$$

$$= \int \text{س}^{٣} \left(\text{٧س}^{٤} - ٢\right)^{٣} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{٧س}^{٤} - ٢$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢٨س}^{٣} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢٨س}^{٣}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{٣}} \left(\text{ص}\right)^{٣} \frac{\text{ءص}}{٢٨\cancel{\text{س}^{٣}}}$$

$$= \frac{١}{٢٨}\int \text{ص}^{٣} \, \text{ءص} = \frac{١}{٢٨} \times \frac{١}{٤} \text{ص}^{٤} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{١١٢}\left(\text{٧س}^{٤} - ٢\right)^{٤} + \text{جـ}$$

مثال(٩): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{س}^{١٤} \left(\text{س}^{٥} + ١\right)^{٨} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{س}^{١٤} \left(\text{س}^{٥} + ١\right)^{٨} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٥} + ١ \Leftarrow \text{س}^{٥} = \text{ص} - ١$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٥س}^{٤} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٥س}^{٤}}$$

$$\Leftarrow \int \text{س}^{\cancel{١٤}\,١٠} \left(\text{ص}\right)^{٨} \frac{\text{ءص}}{٥\cancel{\text{س}^{٤}}}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \left(\text{س}^{٥}\right)^{٢} \left(\text{ص}\right)^{٨} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \left(\text{ص} - ١\right)^{٢} \left(\text{ص}\right)^{٨} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \left(\text{ص}^{٢} - \text{٢ص} + ١\right)\left(\text{ص}\right)^{٨} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \left(\text{ص}^{١٠} - \text{٢ص}^{٩} + \text{ص}^{٨}\right) \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٥}\left(\frac{١}{١١}\text{ص}^{١١} - \frac{٢}{١٠}\text{ص}^{١٠} + \frac{١}{٩}\text{ص}^{٩}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{\left(\text{س}^{٥} + ١\right)^{١١}}{٥٥} - \frac{\left(\text{س}^{٥} + ١\right)^{١٠}}{٢٥} + \frac{\left(\text{س}^{٥} + ١\right)^{٩}}{٤٥} + \text{جـ}$$

٢) $\int (\text{س}^5 - 3\text{س})^3 \, \text{دس}$

الحل:

$= \int \left(\text{س}(\text{س}^4 - 3)\right)^3 \, \text{دس}$

$= \int \text{س}^3 (\text{س}^4 - 3)^3 \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^4 - 3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^3 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^3} (\text{ص})^3 \frac{\text{دص}}{4\cancel{\text{س}^3}}$

$= \frac{1}{4}\int (\text{ص})^3 \, \text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\text{ص}^4 + \text{جـ}$

$= \frac{1}{16}(\text{س}^4 - 3)^4 + \text{جـ}$

---

٣) $\int \sqrt{\text{س}^4 + 2\text{س}^2} \, \text{دس}$ ، $\text{س} > 0$

الحل:

$= \int \sqrt{\text{س}^2(\text{س}^2 + 2)} \, \text{دس}$

$= \int |\text{س}| \times \sqrt{(\text{س}^2 + 2)} \, \text{دس}$، $\text{س} > 0$

$= \int \text{س}(\text{س}^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}} (\text{ص})^{\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} = \frac{1}{2}\int (\text{ص})^{\frac{1}{2}} \, \text{دص}$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ} = \frac{1}{3}\sqrt{(\text{س}^2 + 1)^3} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^7 - \text{س}^3} \, \text{دس}$

الحل:

$= \int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^3(\text{س}^4 - 1)} \, \text{دس}$

$= \int \text{س}^2 \times \text{س} \sqrt[3]{(\text{س}^4 - 1)} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^4 - 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}^3 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^3} \sqrt[3]{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{4\cancel{\text{س}^3}}$

$= \frac{1}{4}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}} \, \text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{(\text{س}^4 - 1)^4} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \sqrt[3]{2\text{س}^3 + 3\text{س}^5} \, \text{دس}$

الحل:

$\int \sqrt[3]{2\text{س}^3 + 3\text{س}^5} \, \text{دس}$

$= \int \sqrt[3]{\text{س}^3(2 + 3\text{س}^2)} \, \text{دس}$

$= \int \text{س} \sqrt[3]{(2 + 3\text{س}^2)} \, \text{دس}$

$\text{ص} = 2 + 3\text{س}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{6\text{س}}$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}}\ \sqrt[3]{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{٦\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٦}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٦}\times\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٨}\sqrt[3]{\left(٢+٣\text{س}^{٢}\right)^{٤}} + \text{جـ}$$

---

٦) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\left(\text{س}+١\right)^{٥}}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \text{س}^{٣}\left(\text{س}+١\right)^{-٥}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{٣}\left(\text{س}\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)\right)^{-٥}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{٣}\,\text{س}^{-٥}\left(١+\text{س}^{-١}\right)^{-٥}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{-٢}\left(١+\text{س}^{-١}\right)^{-٥}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = ١+\text{س}^{-١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{س}^{-٢} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{س}^{-٢}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-٢}}\left(\text{ص}\right)^{-٥}\frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{س}^{-٢}}}$$

$$= -\int \text{ص}^{-٥}\,\text{دص} = -\frac{-١}{٤}\,\text{ص}^{-٤} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٤}} + \text{جـ}$$

٧) $\int \sqrt[3]{\text{س}^{\frac{-٣}{٤}}+١}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \sqrt[3]{\text{س}^{\frac{-٣}{٤}}\left(١+\frac{١}{\text{س}^{\frac{-٣}{٤}}}\right)}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{\frac{-١}{٤}}\sqrt[3]{١+\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = ١+\text{س}^{\frac{٣}{٤}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣}{٤}\,\text{س}^{\frac{-١}{٤}} \Leftarrow \text{دس} = \frac{٤}{٣}\times\frac{\text{دص}}{\text{س}^{\frac{-١}{٤}}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{\frac{-١}{٤}}}\ \sqrt[3]{\text{ص}}\ \frac{٤}{٣}\times\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{س}^{\frac{-١}{٤}}}}$$

$$= \frac{٤}{٣}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص} = \frac{٤}{٣}\times\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt[3]{\left(١+\sqrt[4]{\text{س}^{٣}}\right)^{٤}} + \text{جـ}$$

---

٨) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}^{٣}+٢\text{س}}}{\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

الحل:

$$= \int \text{س}^{-٤}\sqrt[3]{\text{س}^{٣}\left(١+\frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{-٤}\times\text{س}\sqrt[3]{\left(١+٢\text{س}^{-٢}\right)}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{-٣}\left(١+٢\text{س}^{-٢}\right)^{\frac{١}{٣}}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = ١ + ٢\text{س}^{-٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٤\text{س}^{-٣} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٤\text{س}^{-٣}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-٣}}\,(\text{ص})^{\frac{١}{٣}} \frac{\text{دص}}{-٤\cancel{\text{س}^{-٣}}}$

$= \frac{-١}{٤}\int (\text{ص})^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص} = \frac{-١}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times \text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{-٣}{١٦}\sqrt[٣]{(١+\text{س}^{-٢})^{٤}} + \text{جـ}$

---

٩) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س} - \text{س}^{٣}}}{\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

الحل:

$= \int \text{س}^{-٤} \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٤} \times \text{س} \sqrt[٣]{(\text{س}^{-٢} - ١)}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٣} \sqrt[٣]{(\text{س}^{-٢} - ١)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{-٢} - ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س}^{-٣} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٢\text{س}^{-٣}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-٣}} \sqrt[٣]{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{-٢\cancel{\text{س}^{-٣}}}$

$= \frac{-١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص} = \frac{-١}{٢} \times \frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{-٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{س}^{-٢} - ١)^{٤}} + \text{جـ}$

١٠) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس}$

الحل:

$= \int \text{س}^{-٥} \sqrt{\text{س}^{٤}\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٥} \times \text{س}^{٢} \sqrt{(\text{س}^{-٢} - ١)}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٣} \sqrt{(\text{س}^{-٢} - ١)}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{-٢} - ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س}^{-٣} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٢\text{س}^{-٣}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-٣}} \sqrt{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{-٢\cancel{\text{س}^{-٣}}}$

$= \frac{-١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = \frac{-١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{-٢} - ١)^{٣}} + \text{جـ}$

---

١١) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\,\text{دس}،\ \text{س} > ٠$

الحل:

$= \int \text{س}^{-٢} (\text{س}^{٢} + ١)^{\frac{-١}{٢}}\,\text{دس}،\ \text{س} > ٠$

$= \int \text{س}^{-٢} \left(\text{س}^{٢}\left(١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\right)^{\frac{-١}{٢}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٢} \times \text{س}^{-١} (١ + \text{س}^{-٢})^{\frac{-١}{٢}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٣} (١ + \text{س}^{-٢})^{\frac{-١}{٢}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ١ + \text{س}^{-٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س}^{-٣} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٢\text{س}^{-٣}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-٣}} (\text{ص})^{\frac{-١}{٢}} \frac{\text{دص}}{-٢\cancel{\text{س}^{-٣}}}$

$= \frac{-١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{-١}{٢}} \text{دص} = \frac{-١}{٢} \times ٢ \times \text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$= -\sqrt{١ + \text{س}^{-٢}} + \text{جـ}$

---

١٢) $\int \frac{\sqrt{\text{س}+٥}}{\sqrt{\text{س}^{٥}}} \text{دس}$

الحل:

$= \int \frac{\sqrt{\text{س}+٥}}{\sqrt{\text{س}^{٤}} \times \text{س}} \text{دس} = \int \frac{\sqrt{\text{س}+٥}}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}}} \text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٢} \sqrt{\frac{\text{س}+٥}{\text{س}}} \text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٢} \sqrt{١ + \frac{٥}{\text{س}}} \text{دس}$

$= \int \text{س}^{-٢} \left(١ + ٥\text{س}^{-١}\right)^{\frac{١}{٢}} \text{دس}$

$\text{ص} = ١ + ٥\text{س}^{-١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٥\text{س}^{-٢} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٥\text{س}^{-٢}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{س}^{-٢}} \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{دص}}{-٥\cancel{\text{س}^{-٢}}}$

$= \frac{-١}{٥}\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \text{دص} = \frac{-١}{٥} \times \frac{٢}{٣} \times \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{-٢}{١٥}\sqrt{\left(١ + ٥\text{س}^{-١}\right)^{٣}} + \text{جـ}$

١٣) $\int \frac{\left(٥ + \sqrt{\text{س}}\right)^{٧}}{\sqrt{\text{س}}} \text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$\Leftarrow \text{ص} = ٥ + \sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \text{دس} = ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}^{٧}}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}} ٢\cancel{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دص}$

$= ٢\int \text{ص}^{٧} \text{دص} = ٢ \times \frac{١}{٨} \text{ص}^{٨} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤}\left(٥ + \sqrt{\text{س}}\right)^{٨} + \text{جـ}$

مثال(١٠): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١}{\text{س}\sqrt{١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}} \text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١}{\text{س}} \left(١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{\frac{-١}{٢}} \text{دس} \Leftarrow \text{ص} = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = \text{س}\ \text{دص}$

$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}١ = ١$

$\text{س} = \text{هـ}^{٣} \Leftarrow \text{ص} = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٣} = ٤$

$$\Leftarrow \int_{1}^{4} \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \text{ص}^{\frac{-1}{2}} \cancel{\text{س}}\ \text{دص}$$

$$= \int_{1}^{4} \text{ص}^{\frac{-1}{2}} \text{دص} = \left[2\text{ص}^{\frac{1}{2}} \right]_{1}^{4}$$

$$= 2\left(\left(\sqrt{4}\right) - \left(\sqrt{1}\right) \right) = 2$$

---

٢) $\int \text{هـ}^{\text{س}^3 + 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{\text{س}^3 + 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{هـ}^{2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{س}^2\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^3$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$$

$$\Leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \cancel{\text{س}^2} \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{1}{3} \times \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{جـ}$$

٣) $\int \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{جتاس}\ \text{دس} \Leftarrow \text{ص} = \text{جاس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \cancel{\text{جتاس}} \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$$

---

٤) $\int \frac{2}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \text{س}\text{دص}$$

$$\int \frac{2}{\text{س}\text{ص}}\text{س}\text{دص} = \int \frac{2}{\text{ص}}\text{دص}$$

$$= 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = 2\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right| + \text{جـ}$$

٥) $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$\Leftarrow \text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$$

$$\tfrac{١}{٢}\text{جا٢س} = \text{جاس جتاس}$$

$$\tfrac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س} = \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}$$

$$= \int \left(\tfrac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\right)\text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \int \left(\tfrac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س}\right)\left(\tfrac{١}{٢}(\text{١}-\text{جتا٢س})\right)\text{ءس}$$

$$= \tfrac{١}{٨}\int \left(\text{جا}^{٢}\text{٢س}\right)\left(\text{١}-\text{جتا٢س}\right)\text{ءس}$$

$$= \tfrac{١}{٨}\int \left(\text{جا}^{٢}\text{٢س} - \text{جا}^{٢}\text{٢س جتا٢س}\right)\text{ءس}$$

$$= \tfrac{١}{٨}\left(\int \text{جا}^{٢}\text{٢س ءس} - \int \text{جا}^{٢}\text{٢س جتا٢س ءس}\right)$$

$$\text{ص} = \text{جا٢س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جتا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢جتا٢س}}$$

$$= \tfrac{١}{٨}\left(\int \tfrac{١}{٢}(\text{١}-\text{جتا٤س})\ \text{ءس} - \int \text{ص}^{٢}\ \cancel{\text{جتا٢س}}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}}\right)$$

$$= \tfrac{١}{٨}\left(\tfrac{١}{٢}\int(\text{١}-\text{جتا٤س})\ \text{ءس} - \tfrac{١}{٢}\int \text{ص}^{٢}\ \text{ءص}\right)$$

$$= \tfrac{١}{١٦}\left(\int(\text{١}-\text{جتا٤س})\ \text{ءس} - \int \text{ص}^{٢}\ \text{ءص}\right)$$

$$= \tfrac{١}{١٦}\left(\left(\text{س} - \tfrac{١}{٤}\text{جا٤س}\right) - \tfrac{١}{٣}\text{ص}^{٣}\right) + \text{جـ}$$

$$= \tfrac{١}{١٦}\left(\text{س} - \tfrac{١}{٤}\text{جا٤س} - \tfrac{١}{٣}\text{جا}^{٣}\text{٢س}\right) + \text{جـ}$$

٦) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ (\text{١}+\text{جاس})^{٧}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{١}+\text{جاس} \Leftarrow \text{جاس} = \text{ص} - \text{١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \int \text{جتا}^{\cancel{٣}\ ٢}\text{س}\ (\text{ص})^{٧}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ (\text{ص})^{٧}\ \text{ءص}$$

$$= \int (\text{١}-\text{جا}^{٢}\text{س})(\text{ص})^{٧}\ \text{ءص}$$

$$= \int (\text{١}-(\text{ص}-\text{١})^{٢})\ \text{ص}^{٧}\ \text{ءص}$$

$$= \int (\text{١}-(\text{ص}^{٢}-\text{٢ص}+\text{١}))\ \text{ص}^{٧}\ \text{ءص}$$

$$= \int (\cancel{\text{١}}-\text{ص}^{٢}+\text{٢ص}-\cancel{\text{١}})\ \text{ص}^{٧}\ \text{ءص}$$

$$= \int (-\text{ص}^{٢}+\text{٢ص})\ \text{ص}^{٧}\ \text{ءص}$$

$$= \int -\text{ص}^{٩}+\text{٢ص}^{٨}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{١٠}}\text{ص}^{١٠} + \frac{\text{٢}}{\text{٩}}\text{ص}^{٩} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{١٠}}(\text{١}+\text{جاس})^{١٠} + \frac{\text{٢}}{\text{٩}}(\text{١}+\text{جاس})^{٩} + \text{جـ}$$

٧) $\int \text{جاس}\left(\text{١}+\text{جتا٢س}\right)^{\text{٥}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١}+\text{جتا٢س}\right)$$

$$\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١}+\text{جتا٢س}$$

$$\Leftarrow \int \text{جاس}\left(\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س}\right)^{\text{٥}}\,\text{ءس}$$

$$= \int \text{جاس} \times \text{٣٢جتا}^{\text{١٠}}\text{س}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جتاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$$

$$\Leftarrow \text{٣٢}\int \cancel{\text{جاس}} \times \text{ص}^{\text{١٠}}\,\frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$$

$$= -\text{٣٢}\int \text{ص}^{\text{١٠}}\,\text{ءص} = -\text{٣٢} \times \frac{\text{١}}{\text{١١}}\text{ص}^{\text{١١}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{٣٢}}{\text{١١}}\text{جتا}^{\text{١١}}\text{س} + \text{جـ}$$

٨) $\int \text{جتا٢س}\left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)^{\text{٨}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{١}-\text{جا٢س}$$

$$\text{١}-\text{جا٢س} = \left(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}+\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}\right)-\left(\text{٢جاسجتاس}\right)$$

$$\text{١}-\text{جا٢س} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢جاسجتاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}$$

$$\text{١}-\text{جا٢س} = \left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)\left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)$$

$$\text{١}-\text{جا٢س} = \left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)^{\text{٢}}$$

$$\left(\text{١}-\text{جا٢س}\right)^{\text{٤}} = \left(\left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)^{\text{٢}}\right)^{\text{٤}}$$

$$\left(\text{١}-\text{جا٢س}\right)^{\text{٤}} = \left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)^{\text{٨}}$$

$$\Leftarrow \int \text{جتا٢س}\left(\text{١}-\text{جا٢س}\right)^{\text{٤}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{١}-\text{جا٢س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٢جتا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{٢جتا٢س}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{جتا٢س}}\left(\text{ص}\right)^{\text{٤}}\,\frac{\text{ءص}}{-\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{٢}}\int \text{ص}^{\text{٤}}\,\text{ءص} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{ص}^{\text{٥}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{١}}{\text{١٠}}\left(\text{١}-\text{جا٢س}\right)^{\text{٥}} + \text{جـ}$$

حل اخر:

$$= \int (\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س})(\text{جاس} - \text{جتاس})^{8}\, \text{ءس}$$

$$= \int (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جاس} - \text{جتاس})^{8}\, \text{ءس}$$

$$= -\int (\text{جاس} - \text{جتاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جاس} - \text{جتاس})^{8}\, \text{ءس}$$

$$= -\int (\text{جتاس} + \text{جاس})(\text{جاس} - \text{جتاس})^{9}\, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جاس} - \text{جتاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} + \text{جاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

$$\Leftarrow -\int \cancel{(\text{جتاس} + \text{جاس})}\,(\text{ص})^{9}\, \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس} + \text{جاس}}}$$

$$= -\int \text{ص}^{9}\, \text{ءص} = \frac{-1}{10}\text{ص}^{10} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-1}{10}(\text{جاس} - \text{جتاس})^{10} + \text{جـ}$$

مثال(١١): جد $\int 2^{\text{س}}\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = 2^{\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}2^{\text{س}}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$$

$$\frac{1}{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}2 \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2}$$

$$\int \text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2} = \int \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}2}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}2} \times \text{ص} + \text{جـ} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}2}(2^{\text{س}}) + \text{جـ}$$

سؤال وزاري:

جد $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}}{\text{جا}2\text{س}}\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \Leftarrow \text{ءص} = \frac{\text{قا}^{2}\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ءص} = \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ءص} = \frac{1}{\text{جاس}\,\text{جتاس}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ءص} = \frac{1}{\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}\,\text{ءص}$$

$$= \int \frac{\text{ص}}{\text{جا}2\text{س}} \times \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}\,\text{ءص} = \frac{1}{2}\int \text{ص}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ} = \frac{1}{4}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\right)^{2} + \text{جـ}$$

مثال(١٢): اثبت ان

$$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ} \times (\text{ن}+1)} + \text{جـ} \;؟؟؟$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$$

$$\text{ءص} = \text{أ}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{أ}}$$

$$\int \text{ص}^{\text{ن}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1) \times \text{أ}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1) \times \text{أ}} + \text{جـ}$$

مثال(١٣): اثبت ان ؟؟؟

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+2}}\,\text{دس} = \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن}+1} : \text{ن فردي} \\ \frac{1}{\text{ن}+1} : \text{ن زوجي} \end{cases}$$

(كتاب)

الحل:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{ص} = 1-\frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \text{س}^{2}\,\text{دص}$$

$$\text{س} = \tfrac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = -1$$

$$\text{س} = 1 \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = 0$$

$$\int_{-1}^{0} \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}} \times \text{س}^{2}\,\text{دس} = \int_{-1}^{0} \text{ص}^{\text{ن}}\,\text{دص}$$

$$= 0 - \left(\frac{(-1)^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right)$$

$$\text{ن : فردي} = -\left(\frac{1}{\text{ن}+1}\right) = \frac{-1}{\text{ن}+1}$$

$$\text{ن : زوجي} = -\left(\frac{-1}{\text{ن}+1}\right) = \frac{-1}{\text{ن}+1}$$

مثال(١٤): اذا كان $\int_{0}^{8} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 14$ ، فجد

$$\int_{1}^{3} \text{س ق}\left(\text{س}^{2}-1\right)\text{دس} \;???$$

الحل :

$$\text{ص} = \text{س}^{2} - 1$$

$$\text{دص} = 2\text{س}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$$

$$\text{س} = 1 \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = 0$$

$$\text{س} = 3 \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = 8$$

$$\Leftarrow \int_{0}^{8} \text{س ق}(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{8} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

مثال(١٥): اذا كان $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$ ، فجد

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3\text{جتا}2\text{س ق}\left(\text{جا}2\text{س}\right)\text{دس} \;???$$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{جا}2\text{س}$$

$$\text{دص} = 2\text{جتا}2\text{س}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{جتا}2\text{س}}$$

$$\text{س} = 0 \quad \Leftarrow \quad \text{ص} = 0$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \quad \text{ص} = 1$$

$$\Leftarrow \int_{0}^{1} 3\text{جتا}2\text{س ق}(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{2\text{جتا}2\text{س}}$$

$$= \frac{3}{2} \int_{0}^{8} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

مثال(١٦): اذا كان $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٢$ ، جد

$$\int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ق}(٢\text{س}^{٣})\,\text{دس} \quad ؟؟؟$$

الحل:

$$\text{ص} = ٢\text{س}^{٣}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٦\text{س}^{٢}}$$

$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٢(٠)^{٣} = ٠$$

$$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ٢(١)^{٣} = ٢$$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{٢} \cancel{\text{س}^{٢}}\,\text{ق}(\text{ص}) \times \frac{\text{دص}}{٦\cancel{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٦}\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{ص}) \times \text{دص} = \frac{١}{٦}(١٢) = ٢$$

مثال(١٧): اذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٨$ ، جد

$$\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}^{٣})\,\text{دس} \quad ؟؟؟$$ (كتاب)

الحل:

$$\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}^{٣})\,\text{دس} \Leftarrow \text{ص} = \text{س}^{٣}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = (١)^{٣} = ١$$

$$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = (٢)^{٣} = ٨$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٨} \cancel{\text{س}^{٢}}\,\text{ق}(\text{ص}) \times \frac{\text{دص}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٣}\int_{١}^{٨} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \frac{١}{٣} \times ١٨ = ٦$$

سؤال وزاري:

اذا كان $\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$ ،

$$\int_{٠}^{٣} \text{أ}\,\text{ق}(٣ - \text{س}) + (٦\text{س} + ١)\,\text{دس} = ٤٢$$

فجد قيمة الثابت (أ) ؟؟؟

الحل :

$$\int_{٠}^{٣} \text{أ}\,\text{ق}(٣ - \text{س}) + (٦\text{س} + ١)\,\text{دس} = ٤٢$$

$$\underbrace{\text{أ}\int_{٠}^{٣} \text{ق}(٣ - \text{س})\,\text{دس}}_{(١)} + \underbrace{\int_{٠}^{٣} (٦\text{س} + ١)\,\text{دس}}_{(٢)} = ٤٢$$

$$(١) \quad \text{أ}\int_{٠}^{٣} \text{ق}(٣ - \text{س})\,\text{دس} \Leftarrow \text{ص} = ٣ - \text{س}$$

$$\text{دص} = -\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = -\text{دص}$$

$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٣$$

$$\text{س} = ٣ \Leftarrow \text{ص} = ٠$$

$$\text{أ}\int_{٣}^{٠} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = -\text{أ}\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = -٤\text{أ}$$

$$(٢) \quad \int_{٠}^{٣} (٦\text{س} + ١)\,\text{دس}$$

$$= \left[\frac{٦\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\right]_{٠}^{٣} = ٣٠$$

$$(١) + (٢) = ٤٢ \Leftarrow -٤\text{أ} + ٣٠ = ٤٢ \Leftarrow \text{أ} = -٣$$

مثال(١٨): اذا كان $\int_{٢}^{٣} \text{س ق(٥س) ءس} = ٤$ ؛ جد

$$\int_{٠}^{١} (\text{٣س}+٦)\,\text{ق(٥س}+١٠)\,\text{ءس} \quad ???$$

الحل:

$$\text{٥ص} = \text{٥س} + ١٠ \Leftarrow \text{ص} = \text{س} + ٢$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ \Leftarrow \text{ءس} = \text{ءص}$$

$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = (٠) + ٢ = ٢$$

$$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = (١) + ٢ = ٣$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{٣} (٣(\text{س}+٢))\,\text{ق(٥ص)}\,\text{ءص}$$

$$= ٣\int_{٢}^{٣} (\text{ص})\,\text{ق(٥ص)}\,\text{ءص} = ٣ \times (٤) = ١٢$$

مثال(١٩): اذا كان $\int_{-١}^{١} \text{٢ق(س) ءس} = ١٠$ ؛ جد

$$\int_{٢}^{٤} (\text{ق(س}-٣) + \text{س})\,\text{ءس} \quad ???$$

الحل:

$$\int_{٢}^{٤} (\text{ق(س}-٣) + \text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٢}^{٤} \text{ق(س}-٣)\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٤} \text{س ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س} - ٣$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ \Leftarrow \text{ءس} = \text{ءص}$$

$$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = (٢) - ٣ = -١$$

$$\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{ص} = (٤) - ٣ = ١$$

$$= \int_{-١}^{١} \text{ق(ص) ءص} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{٢}^{٤}$$

لكن $\int_{-١}^{١} \text{٢ق(س) ءس} = ١٠$

اذا $٢\int_{-١}^{١} \text{ق(س) ءس} = ١٠$

$$\Leftarrow \int_{-١}^{١} \text{ق(س) ءس} = ٥$$

وعليه $\Leftarrow (٥) + \frac{١}{٢}\left((٤)^{٢} - (٢)^{٢}\right)$

$$= ٥ + \frac{١}{٢}(١٦ - ٤)$$

$$= ٥ + ٦ = ١١$$

مثال(٢٠): اذا كان $\int_{أ}^{ب}$ س ق(٢س + ١) ءس = م ؛

جد $\int_{أ-٢}^{ب-٢}$ (٢س + ٤) ق(٢س + ٥) ءس ؟؟؟

الحل: (كتاب)

٢ص + ١ = ٢س + ٥

٢ص = ٢س + ٤

ص = س + ٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = ١ ⇐ ءس = ءص

س = أ − ٢ ⇐ ص = أ − ٢ + ٢ ⇐ ص = أ

س = ب − ٢ ⇐ ص = ب − ٢ + ٢ ⇐ ص = ب

⇐ $\int_{أ}^{ب}$ (٢ص) ق(٢ص + ١) ءص

= ٢ $\int_{أ}^{ب}$ ص ق(٢ص + ١) ءص = ٢م

الدرس السابع : التكامل بالأجزاء

$\int$ (اقتران يصلح للاشتقاق)×(اقتران يصلح للتكامل) دس

احدهما ليس مشتقة الاخر

$$\int \text{ق . دهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \times \text{دق}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ق} & \text{دهـ} \\ \text{دق} & \text{هـ} \end{array}$$

$$\text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \times \text{دق}$$

مثال(١): اثبت ان $\int \text{ق.دهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \times \text{دق}$ ؟؟؟

الحل:

$$(\text{ق} \times \text{هـ})' = \text{ق} \times \text{هـ}' + \text{هـ} \times \text{ق}'$$

خذ $\int$ للطرفين

$$\int (\text{ق} \times \text{هـ})' \,\text{دس} = \int (\text{ق} \times \text{هـ}' + \text{هـ} \times \text{ق}')\,\text{دس}$$

$$\text{ق} \times \text{هـ} = \int \text{ق} \times \text{هـ}' \,\text{دس} + \int \text{هـ} \times \text{ق}' \,\text{دس}$$

لكن:

$$\text{هـ}' = \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} \Leftarrow \text{دهـ} = \text{هـ}' \,\text{دس}$$

$$\text{ق}' = \frac{\text{دق}}{\text{دس}} \Leftarrow \text{دق} = \text{ق}' \,\text{دس}$$

عوض:

$$\text{ق} \times \text{هـ} = \int \text{ق} \times (\text{دهـ}) + \int \text{هـ} \times (\text{دق})$$

اذا:

$$\int \text{ق.دهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \times \text{دق}$$

مثال(٢): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int (\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) \sqrt{\text{س} + ٣}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int (\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) \sqrt{\text{س} + ٣}\ \text{دس}$$

$$= \int (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\,(\text{س} + ٣)^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$$

وباستخدام طريقة الجدول:

ق (تشتق)	دهـ (تكامل)
$\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$	$(\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}$
$٢\text{س} - ٢$	$\frac{٢}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}$
٢	$\frac{٤}{١٥}(\text{س}+٣)^{\frac{٥}{٢}}$
٠	$\frac{٨}{١٠٥}(\text{س}+٣)^{\frac{٧}{٢}}$

$$= \frac{٢}{٣}(\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\sqrt{(\text{س}+٣)^{٣}}$$

$$- \frac{٤}{١٥}(٢\text{س} - ٢)\sqrt{(\text{س}+٣)^{٥}}$$

$$+ \frac{١٦}{١٠٥}\sqrt{(\text{س}+٣)^{٧}}$$

؟؟؟ متى يمكن استخدم طريقة الجدول ؟؟؟

- دائري زاويته خطية
- كثير حدود (×) هـ(الاس خطي)
- (خطي)^اس

٢) $\int \text{٥س}\sqrt{\text{س}+٣}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$= \int \text{٥س}\,(\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$

وباستخدام طريقة الجدول:

ق	ءهـ
٥س	$(\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}$
٥	$\frac{٢}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}$
٠	$\frac{٤}{١٥}(\text{س}+٣)^{\frac{٥}{٢}}$

$= \frac{١٠}{٣}\text{س}\,(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$

٣) $\int (\text{٢س}^{٢} - ٥)\,\text{جاس ءس}$

الحل:

$\int (\text{٢س}^{٢} - ٥)\,\text{جاس ءس}$

ق	ءهـ
$\text{٢س}^{٢} - ٥$	جاس
٤س	−جتاس
٤	−جاس
٠	جتاس

$= -(\text{٢س}^{٢} - ٥)\text{جتاس} + \text{٤س جاس} + \text{٤جتاس} + \text{جـ}$

مثال(٣): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

$\int$ (كثير حدود) × (دائري زاوية خطية) ءس

١) $\int \text{٢س جاس ءس}$ (كتاب)

الحل:

ق = ٢س ءهـ = جاس ءس

ءق = ٢ ءس هـ = −جتاس

$= (\text{٢س})(-\text{جتاس}) - \int ٢ \times (-\text{جتاس})\ \text{ءس}$

$= -\text{٢س جتاس} + ٢\ \text{جاس} + \text{جـ}$

٢) $\int (\text{٢س} - ١)\ \text{جتا٣س ءس}$ (كتاب)

الحل:

ق = ٢س − ١ ءهـ = جتا٣س ءس

ءق = ٢ ءس $\text{هـ} = \frac{١}{٣}\ \text{جا٣س}$

$= (\text{٢س} - ١)\left(\frac{١}{٣}\text{جا٣س}\right)$

$- \int ٢ \times \frac{١}{٣}\text{جا٣س ءس}$

$- \int ٢ \times \frac{١}{٣}\text{جا٣س ءس}$

$= (\text{٢س} - ١)\left(\frac{١}{٣}\text{جا٣س}\right) + \frac{٢}{٩}\text{جتا٣س} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{(\text{٥س}+\text{٣})}{\text{قا٥س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{(\text{٥س}+\text{٣})}{\text{قا٥س}}\,\text{ءس} = \int (\text{٥س}+\text{٣})\,\text{جتا٥س ءس}$

$\text{ع} = \text{٥س} + \text{٣}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جتا٥س ءس}$

$\text{ءع} = \text{٥ ءس}$ ، $\text{هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{جا٥س}$

$= (\text{٥س}+\text{٣})\left(\frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{جا٥س}\right) - \int \text{٥} \times \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{جا٥س ءس}$

$= (\text{٥س}+\text{٣})\left(\frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{جا٥س}\right) - \int \text{جا٥س ءس}$

$= \text{س جا٥س} + \frac{\text{٣}}{\text{٥}}\text{جا٥س} + \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{جتا٥س} + \text{جـ}$

---

٤) $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{٣س جاس ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\text{ع} = \text{٣س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جاس ءس}$

$\text{ءع} = \text{٣ءس}$ ، $\text{هـ} = -\text{جتاس}$

$= \Big[(\text{٣س})(-\text{جتاس})\Big]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} + \text{٣}\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جتاس ءس}$

$= -\text{٣}\Big[(\text{س جتاس})\Big]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} + \Big[\text{٣ جاس}\Big]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}}$

$= -\text{٣}\left(\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right)\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٢}} - (\text{٠})\text{جتا٠}\right) + \text{٣}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}} - \text{جا٠}\right)$

$= -\text{٣}(\text{٠}-\text{٠}) + \text{٣}(\text{١}-\text{٠}) = \text{٣}$

---

٥) $\int \text{جتاس}\left(\text{٢س}+\text{قا}^{\text{٣}}\text{س}\right)\text{ءس}$

الحل:

$= \int \left(\text{٢س جتاس} + \text{جتاس قا}^{\text{٣}}\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{٢س جتاس} + \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \text{٢س جتاس ءس} + \int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س ءس}$

$= \int \text{٢س جتاس ءس} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

$\text{ع} = \text{٢س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جتاس ءس}$

$\text{ءع} = \text{٢ءس}$ ، $\text{هـ} = \text{جاس}$

$= (\text{٢س})\,\text{جاس} - \text{٢}\int \text{جاس ءس} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

$= \text{٢س جاس} + \text{٢جتاس} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

---

٦) $\int \text{س}\left(\text{جاس}+\text{جتاس}\right)^{\text{٢}}\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$= \int \text{س}\left(\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{٢جاس جتاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \text{س}\left(\text{١}+\text{جا٢س}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س} + \text{س جا٢س}\right)\text{ءس}$

$= \int \text{س ءس} + \int \text{س جا٢س ءس}$

$\text{ع} = \text{س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جا٢س ءس}$

$\text{ءع} = \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٢س}$

$= \int \text{س ءس} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\int \text{جتا٢س ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\int \text{جتا٢س ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جا٢س} + \text{جـ}$

٧) $\int \text{٣س}^{٢}\,\text{جاس ءس}$

الحل:

$\int \text{٣س}^{٢}\,\text{جاس ءس}$

ق	ءهـ
٣س^{٢}	جاس
٦س	−جتاس
٦	−جاس
٠	جتاس

$= -\text{٣س}^{٢}\,\text{جتاس} + \text{٦س جاس} + \text{٦جتاس} + \text{جـ}$

---

٨) $\int \text{س قا}^{٢}\text{س ءس}$

الحل:

$\int \text{س قا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ق} = \text{س} \qquad \text{ءهـ} = \text{قا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ءق} = \text{ءس} \qquad \text{هـ} = \text{ظاس}$

$= \text{س ظاس} - \int \text{ظاس ءس}$

$= \text{س ظاس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{س ظاس} + \int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{س ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

٩) $\int (\text{٣س}+١)^{٢}\,\text{جتا}(\text{س}-٥)\,\text{ءس}$

الحل:

$\int (\text{٣س}+١)^{٢}\,\text{جتا}(\text{س}-٥)\,\text{ءس}$

ق	ءهـ
(٣س+١)^{٢}	جتا(س−٥)
٦(٣س+١)	جا(س−٥)
٦×٣	−جتا(س−٥)
٠	−جا(س−٥)

$= (\text{٣س}+١)^{٢}\,\text{جا}(\text{س}-٥)$

$+ ٦(\text{٣س}+١)\text{جتا}(\text{س}-٥)$

$- ١٨\,\text{جا}(\text{س}-٥) + \text{جـ}$

---

١٠) $\int \text{٢س جا}^{٢}\text{س ءس}$

الحل:

$\int \text{٢س جا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ق} = \text{٢س} \qquad \text{ءهـ} = \text{جا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ءهـ} = \frac{١}{٢}\left(١ - \text{جتا٢س}\right)\text{ءس}$

$\text{ءق} = \text{٢ءس} \qquad \text{هـ} = \frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right)$

$= \text{س}\left(\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right) - \int \left(\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right)\text{ءس}$

$= \text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س جا٢س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\text{جتا٢س} + \text{جـ}$

(١١) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$= \int \text{س جاس جتاس ءس}$

$\Leftarrow \text{جا٢س} = \text{٢جاس جتاس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} = \text{جاس جتاس}$

$= \int \text{س}\left(\frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right)\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int \text{س جا٢س ءس}$

ع	ءهـ
س	جا٢س
١	$\frac{-١}{٢}$جتا٢س
٠	$\frac{-١}{٤}$جا٢س

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{-١}{٢}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٤}\text{جا٢س}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٤}\text{س جتا٢س} + \frac{١}{٨}\text{جا٢س} + \text{جـ}$

---

(١٢) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{س جاس جتا}^{-٣}\text{س ءس}$

$\text{ع} = \text{س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جاس جتا}^{-٣}\text{س ءس}$

$\text{ءع} = \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \int \text{جاس جتا}^{-٣}\text{س ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{جاس}}\ \text{ص}^{-٣} \times \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}} = -\int \text{ص}^{-٣}\,\text{ءص}$

$= \frac{-١}{-٢}\text{ص}^{-٢} = \frac{١}{٢}\text{جتا}^{-٢}\text{س}$

$\Leftarrow \text{س}\left(\frac{١}{٢}\text{جتا}^{-٢}\text{س}\right) - \int \frac{١}{٢}\text{جتا}^{-٢}\text{س ءس}$

$= \text{س}\left(\frac{١}{٢}\text{جتا}^{-٢}\text{س}\right) - \int \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\text{س ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س جتا}^{-٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\text{ظاس} + \text{جـ}$

حل اخر:

$\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتاس} \times \text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س ظاس قا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ع} = \text{س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{ظاس قا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ءع} = \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \int \text{ظاس قا}^{٢}\text{س ءس}$

$\text{ص} = \text{قا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\text{هـ} = \int \text{ص}\,\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}} = \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} = \frac{١}{٢}\text{ظا}^{٢}\text{س}$

$= \frac{١}{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\int \text{ظا}^{٢}\text{س ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\int \left(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١\right)\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\left(\text{ظاس} - \text{س}\right) + \text{جـ}$

١٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{س}}{\text{جتا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{س}}{\text{جتا}^{2}\frac{\text{س}}{2}}\,\text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{س قا}^{2}\frac{\text{س}}{2}\,\text{ءس}$$

$\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{ءه} = \text{قا}^{2}\frac{\text{س}}{2}\,\text{ءس}$

$\text{ءق} = \text{ءس}$ ، $\text{ه} = 2\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}$

$$= \left[\text{س} \times 2\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}\,\text{ءس}$$

$$= \left[2\text{س ظا}\frac{\text{س}}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - 2 \times -2\left[\text{لو}_{\text{ه}}\left|\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}\right|\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi + 4\,\text{لو}_{\text{ه}}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$$

سؤال وزاري: جد $\int \frac{2\text{س} + 3\,\text{ظاس}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \left(\frac{2\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} + \frac{3\,\text{ظاس}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}\right)\text{ءس}$$

$$\underbrace{\int 2\text{س قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}}_{(1)} + \underbrace{\int 3\,\text{ظاس قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}}_{(2)}$$

(١) $\text{ق} = 2\text{س}$ ، $\text{ءه} = \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ءق} = 2\,\text{ءس}$ ، $\text{ه} = \text{ظاس}$

$$= 2\text{س ظاس} - \int 2\,\text{ظاس}\,\text{ءس}$$

$$= 2\text{س ظاس} - \int 2\,\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ءس}$$

$$= 2\text{س ظاس} - \left(-2\,\text{لو}_{\text{ه}}|\text{جتاس}|\right)$$

$$= 2\text{س ظاس} + 2\,\text{لو}_{\text{ه}}|\text{جتاس}|$$

(٢) $\int 3\,\text{ظاس قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\text{ءص} = \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$$\int 3\text{ص}\,\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}} = \int 3\text{ص}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{3}{2}\text{ص}^{2} = \frac{3}{2}\text{ظا}^{2}\text{س}$$

(١) + (٢)

$$2\text{س ظاس} + 2\,\text{لو}_{\text{ه}}|\text{جتاس}| + \frac{3}{2}\text{ظا}^{2}\text{س} + \text{جـ}$$

مثال(٤): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

$\int$ (دائري زاويته غير خطية) ءس

⇐بالفرض $\int$ (كثير حدود)$\times$(دائري زاويته خطية) ءس

١) $\int$ جا$\sqrt{\text{س}}$ ءس

الحل:

ص $=\sqrt{\text{س}}$ ⇐ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

ءس $=٢\sqrt{\text{س}}$ ءص ⇐ ءس $=$ ٢ص ءص

⇐ $\int$ جاص $\times$ ٢ص ءص

$=٢\int$ ص جاص ءص

ق $=$ ص ، ءه $=$ جاص ءص

ءق $=$ ءص ، ه $=-$جتاص

$=٢\left(-\text{ص جتاص}+\int\text{جتاص ءص}\right)$

$=-$٢ص جتاص $+$ ٢جاص $+$ جـ

$=-٢\sqrt{\text{س}}$ جتا$\sqrt{\text{س}}+٢$جا$\sqrt{\text{س}}+$ جـ

٢) $\int\frac{١}{٢}$ جتا$\sqrt{٤\text{س}+٥}$ ءس

الحل:

ص $=\sqrt{٤\text{س}+٥}$ ⇐ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\dfrac{\cancel{٤}^{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٤\text{س}+٥}}$

ءس $=\dfrac{\sqrt{٤\text{س}+٥}}{٢}$ ءص ⇐ ءس $=\dfrac{\text{ص}}{٢}$ ءص

⇐ $\frac{١}{٢}\int$ جتاص $\times\frac{\text{ص}}{٢}$ ءص $=\frac{١}{٤}\int$ ص جتاص ءص

ق $=$ ص ، ءه $=$ جتاص ءص

ءق $=$ ءص ، ه $=$ جاص

$=\frac{١}{٤}\left(\text{ص جاص}-\int\text{جاص ءص}\right)$

$=\frac{١}{٤}\left(\text{ص جاص}+\text{جتاص}\right)+$ جـ

$=\dfrac{\sqrt{٤\text{س}+٥}\ \text{جا}\sqrt{٤\text{س}+٥}}{٤}+\dfrac{\text{جتا}\sqrt{٤\text{س}+٥}}{٤}+$ جـ

٣) $\int$ جا$\sqrt[٣]{\text{س}}$ ءس

الحل:

ص $=\sqrt[٣]{\text{س}}$ ⇐ ص$^{٣}=$ س

٣ص$^{٢}\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=١$ ⇐ ءس $=$ ٣ص^{٢} ءص

⇐ $\int$ جاص ٣ص^{٢} ءص $=٣\int$ ص^{٢} جاص ءص

ق	ءه
ص^{٢}	جتاص
٢ص	جاص
٢	−جتاص
٠	−جاص

$=٣\left(\text{ص}^{٢}\ \text{جاص}+\text{٢ص جتاص}-\text{٢جاص}\right)+$ جـ

$=٣\sqrt[٣]{\text{س}}^{\,٢}$ جا$\sqrt[٣]{\text{س}}+٦\sqrt[٣]{\text{س}}$ جتا$\sqrt[٣]{\text{س}}$

-٦جا$\sqrt[٣]{\text{س}}+$ جـ

مثال(٥): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{س}^{٣}\ \text{جتاس}^{٢}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢س}}$$

$$\int \text{س}^{\cancel{٣}}\ \text{جتاص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٢}\int \text{ص جتاص ءص}$$

ل	ءه
ص	جتاص
١	جاص
٠	−جتاص

$$= \frac{١}{٢}\left(\text{ص جاص} + \text{جتاص}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\text{س}^{٢}\ \text{جاس}^{٢} + \text{جتاس}^{٢}\right) + \text{جـ}$$

---

٢) $\int \text{س}^{٥}\ \text{جتاس}^{٣}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{٢} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{٢}}$$

$$\Leftarrow \int \text{س}^{\cancel{٥}\,٣}\ \text{جتاص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٣س}^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{٣}\int \text{س}^{٣}\ \text{جتاص ءص} = \frac{١}{٣}\int \text{ص جتاص ءص}$$

ل	ءه
ص	جتاص
١	جاص
٠	−جتاص

$$= \frac{١}{٣}\left(\text{ص جاص} + \text{جتاص}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\text{س}^{٣}\ \text{جاس}^{٣} + \text{جتاس}^{٣}\right) + \text{جـ}$$

٣) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = \text{٢ص ءص}$$

$$\Leftarrow \int \text{جاص جتا}^{٣}\text{ص} \times \text{٢ص ءص}$$

$$= \int \text{٢ص جاص جتا}^{٣}\text{ص ءص}$$

$$\text{ل} = \text{٢ص} \qquad \text{ءه} = \text{جاص جتا}^{٣}\text{ص ءص}$$

$$\text{ءل} = \text{٢ءص} \qquad \text{ه} = \int \text{جاص جتا}^{٣}\text{ص ءص}$$

$$\text{ع} = \text{جتاص}$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = -\text{جاص} \Leftarrow \text{ءص} = \frac{\text{ءع}}{-\text{جاص}}$$

$$\Leftarrow \text{ه} = \int \cancel{\text{جاص}}\ \text{ع}^{٣} \times \frac{\text{ءع}}{-\cancel{\text{جاص}}}$$

$$\text{ه} = -\int \text{ع}^{٣}\ \text{ءع} \Leftarrow \text{ه} = \frac{-١}{٤}\text{ع}^{٤}$$

$$\text{ه} = \frac{-١}{٤}\text{جتا}^{٤}\text{ص}$$

$$\Leftarrow \text{٢ص}\left(\frac{-١}{٤}\text{جتا}^{٤}\text{ص}\right) + \frac{١}{٢}\int \text{جتا}^{٤}\text{ص ءص}$$

$$= \text{٢ص}\left(\frac{-١}{٤}\text{جتا}^{٤}\text{ص}\right) + \frac{١}{٢}\int \left(\text{جتا}^{٢}\text{ص}\right)^{٢}\text{ءص}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{ص جتا}^{٤}\text{ص} + \frac{١}{٢}\int \left(\left(\frac{١}{٢}\right)\left(١+\text{جتا٢ص}\right)\right)^{٢}\text{ءص}$$

$= -\frac{1}{2}\text{ص جتا}^{4}\text{ص} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{4}\left(1+\text{جتا}2\text{ص}\right)^{2}\text{ءص}$

$= -\frac{1}{2}\text{ص جتا}^{4}\text{ص}$

$+ \frac{1}{8}\int \left(1+2\text{جتا}2\text{ص}+\text{جتا}^{2}2\text{ص}\right)\text{ءص}$

$= -\frac{1}{2}\text{ص جتا}^{4}\text{ص} + \frac{\text{ص}}{8} + \frac{\text{جا}2\text{ص}}{8}$

$+ \frac{1}{8}\int \text{جتا}^{2}2\text{ص ءص}$

$= -\frac{1}{2}\text{ص جتا}^{4}\text{ص} + \frac{\text{ص}}{8} + \frac{\text{جا}2\text{ص}}{8}$

$+ \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\left(1+\text{جتا}4\text{ص}\right)\text{ءص}$

$= -\frac{1}{2}\text{ص جتا}^{4}\text{ص} + \frac{\text{ص}}{8} + \frac{\text{جا}2\text{ص}}{8}$

$+ \frac{1}{16}\left(\text{ص} + \frac{1}{4}\text{جا}4\text{ص}\right) + \text{ج}$

$= -\frac{1}{2}\text{ص جتا}^{4}\text{ص} + \frac{\text{ص}}{8} + \frac{\text{جا}2\text{ص}}{8}$

$+ \frac{\text{ص}}{16} + \frac{\text{جا}4\text{ص}}{64} + \text{ج}$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا}^{4}\sqrt{\text{س}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{8} + \frac{\text{جا}2\sqrt{\text{س}}}{8}$

$+ \frac{\sqrt{\text{س}}}{16} + \frac{\text{جا}4\sqrt{\text{س}}}{64} + \text{ج}$

مثال(٦): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

$\int (\text{كثير حدود}) \times \text{هـ}^{\text{خطي}}\,\text{ءس}$

١) $\int \text{س هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \text{س هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ق} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءم} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءق} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{م} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{س هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

---

٢) $\int \text{س}^{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\int \text{س}^{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

ق	ءم
س^{2}	$\text{هـ}^{\text{س}}$
2س	$\text{هـ}^{\text{س}}$
2	$\text{هـ}^{\text{س}}$
0	$\text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{س}^{2}\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{س هـ}^{\text{س}} + 2\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

٣) $\int س^{٢}\, هـ^{٣س}\, ءس$

الحل:

$\int س^{٢}\, هـ^{٣س}\, ءس$

و	ءم
$س^{٢}$	$هـ^{٣س}$
$٢س$	$\frac{١}{٣} هـ^{٣س}$
٢	$\frac{١}{٩} هـ^{٣س}$
٠	$\frac{١}{٢٧} هـ^{٣س}$

$= \frac{١}{٣} س^{٢} هـ^{٣س} - \frac{٢}{٩} س هـ^{٣س} + \frac{٢}{٢٧} هـ^{٣س} + جـ$

---

٤) $\int (س^{٣} + ٢س)\, هـ^{س}\, ءس$ (كتاب)

الحل:

$\int (س^{٣} + ٢س)\, هـ^{س}\, ءس$

و	ءم
$س^{٣} + ٢س$	$هـ^{س}$
$٣س^{٢} + ٢$	$هـ^{س}$
$٦س$	$هـ^{س}$
٦	$هـ^{س}$
٠	$هـ^{س}$

$= (س^{٣} + ٢س) هـ^{س} - (٣س^{٢} + ٢) هـ^{س}$

$+ ٦س هـ^{س} - ٦هـ^{س} + جـ$

٥) $\int س^{٢}\, هـ^{س-١}\, ءس$

الحل:

$\int س^{٢}\, هـ^{س-١}\, ءس$

$و = س^{٢}$ ، $ءم = هـ^{س-١} ءس$

$ءو = ٢س ءس$ ، $م = هـ^{س-١}$

$= س^{٢} هـ^{س-١} - \int ٢س هـ^{س-١} ءس$

$و = ٢س$ ، $ءم = هـ^{س-١} ءس$

$ءو = ٢ءس$ ، $م = هـ^{س-١}$

$س^{٢} هـ^{س-١} - ٢س هـ^{س-١} - \int ٢هـ^{س-١} ءس$

$س^{٢} هـ^{س-١} - ٢س هـ^{س-١} - ٢هـ^{س-١} + جـ$

---

٦) $\int \frac{س هـ^{٢س}}{هـ^{٣س-١}}\, ءس$

الحل:

$\int \frac{س هـ^{٢س}}{هـ^{٣س-١}}\, ءس = \int س هـ^{١-س}\, ءس$

$و = س$ ، $ءم = هـ^{١-س} ءس$

$ءو = ءس$ ، $م = -هـ^{١-س}$

$= -س هـ^{١-س} + \int هـ^{١-س} ءس$

$= -س هـ^{١-س} - هـ^{١-س} + جـ$

٧) $\int \text{ه}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

$\Leftarrow \int \text{ه}^{\text{ص}} \times ٢\text{ص}\ \text{ءص} = \int ٢\text{ص}\,\text{ه}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

م	ءع
٢ص	$\text{ه}^{\text{ص}}$
٢	$\text{ه}^{\text{ص}}$
٠	$\text{ه}^{\text{ص}}$

$= ٢\text{ص}\ \text{ه}^{\text{ص}} - ٢\text{ه}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\ \text{ه}^{\sqrt{\text{س}}} - ٢\text{ه}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

---

٨) $\int \text{ه}^{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل:

$\int \text{ه}^{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{ءس} \Leftarrow \text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٣} = \text{س}$

$٣\text{ص}^{٢}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ \Leftarrow \text{ءس} = ٣\text{ص}^{٢}\ \text{ءص}$

$\Leftarrow \int \text{ه}^{\text{ص}} \times ٣\text{ص}^{٢}\ \text{ءص}$

$= \int ٣\text{ص}^{٢}\,\text{ه}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

م	ءع
$٣\text{ص}^{٢}$	$\text{ه}^{\text{ص}}$
٦ص	$\text{ه}^{\text{ص}}$
٦	$\text{ه}^{\text{ص}}$
٠	$\text{ه}^{\text{ص}}$

$= ٣\text{ص}^{٢}\,\text{ه}^{\text{ص}} - ٦\text{ص}\,\text{ه}^{\text{ص}} + ٦\text{ه}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= ٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\ \text{ه}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} - ٦\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{ه}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} + ٦\text{ه}^{\sqrt[٣]{\text{س}}} + \text{جـ}$

٩) $\int_{١}^{٢} \frac{\text{ه}^{\frac{٣}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل:

$\int_{١}^{٢} \frac{\text{ه}^{\frac{٣}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس} = \int_{١}^{٢} \text{س}^{-٢}\,\text{ه}^{\frac{٣}{\text{س}}}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}} = ٣\text{س}^{-١} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\text{س}^{-٢}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-٣\text{س}^{-٢}}$

$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = \frac{٣}{١} = ٣$

$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow \int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \cancel{\text{س}^{-٢}}\ \text{ه}^{\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{-٣\cancel{\text{س}^{-٢}}}$

$= \frac{١}{-٣}\int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \text{ه}^{\text{ص}}\ \text{ءص} = \frac{١}{-٣}\left(\left[\text{ه}^{\text{ص}}\right]_{٣}^{\frac{٣}{٢}}\right)$

$= \frac{-١}{٣}\left(\text{ه}^{\frac{٣}{٢}} - \text{ه}^{٣}\right)$

(١٠) $\int \frac{\text{س}}{\text{ه}^{٢\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$ (كتاب)

الحل:

$$\int \frac{\text{س}}{\text{ه}^{٢\text{س}}}\,\text{د}\text{س} = \int \text{س}\ \text{ه}^{-٢\text{س}}\,\text{د}\text{س}$$

$\text{و} = \text{س}$ ، $\text{د}\text{م} = \text{ه}^{-٢\text{س}}\,\text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{و} = \text{د}\text{س}$ ، $\text{م} = \frac{-١}{٢}\text{ه}^{-٢\text{س}}$

$$= \frac{-١}{٢}\text{س}\ \text{ه}^{-٢\text{س}} + \frac{١}{٢}\int \text{ه}^{-٢\text{س}}\,\text{د}\text{س}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{س}\ \text{ه}^{-٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{ه}^{-٢\text{س}} + \text{جـ}$$

---

(١١) $\int \frac{\text{س}\ \text{ه}^{\text{س}}}{(١+\text{س})^{٢}}\,\text{د}\text{س}$ (كتاب)

الحل:

$$\int \frac{\text{س}\ \text{ه}^{\text{س}}}{(١+\text{س})^{٢}}\,\text{د}\text{س} = \int \text{س}\ \text{ه}^{\text{س}}(١+\text{س})^{-٢}\,\text{د}\text{س}$$

$\text{و} = \text{س}\text{ه}^{\text{س}}$ ، $\text{د}\text{ع} = (١+\text{س})^{-٢}\,\text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{و} = \text{س}\text{ه}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{س}}\,\text{د}\text{س}$ ، $\text{ع} = -(١+\text{س})^{-١}$

$\text{د}\text{و} = \text{ه}^{\text{س}}(\text{س}+١)$

$$= \frac{-\text{س}}{\text{س}+١}\text{ه}^{\text{س}} + \int \frac{١}{\cancel{\text{س}+١}} \times \text{ه}^{\text{س}}\cancel{(\text{س}+١)}\,\text{د}\text{س}$$

$$= \frac{-\text{س}}{\text{س}+١}\text{ه}^{\text{س}} + \int \text{ه}^{\text{س}}\,\text{د}\text{س}$$

$$= \frac{-\text{س}}{\text{س}+١}\text{ه}^{\text{س}} + \text{ه}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

سؤال وزاري: جد $\int_{٢}^{٥} \text{ه}^{\left(١+\sqrt{\text{س}-١}\right)}\,\text{د}\text{س}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٢}^{٥} \text{ه}^{\left(١+\sqrt{\text{س}-١}\right)}\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{ص} = ١+\sqrt{\text{س}-١} \Leftarrow \sqrt{\text{س}-١} = \text{ص}-١$$

$$\text{د}\text{ص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}-١}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{د}\text{س} = ٢\sqrt{\text{س}-١}\,\text{د}\text{ص}$$

$$\Leftarrow \text{د}\text{س} = ٢(\text{ص}-١)\,\text{د}\text{ص}$$

$$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ١+\sqrt{(٢)-١} = ٢$$

$$\text{س} = ٥ \Leftarrow \text{ص} = ١+\sqrt{(٥)-١} = ٣$$

$$\int_{٢}^{٣} \text{ه}^{\text{ص}} \times ٢(\text{ص}-١)\,\text{د}\text{ص}$$

$\text{و} = ٢(\text{ص}-١)$ ، $\text{د}\text{م} = \text{ه}^{\text{ص}}\,\text{د}\text{ص}$

$\text{د}\text{و} = \text{د}\text{ص}$ ، $\text{م} = \text{ه}^{\text{ص}}$

$$٢(\text{ص}-١)\text{ه}^{\text{ص}}\Big]_{٢}^{٣} - \int_{٢}^{٣} ٢\text{ه}^{\text{ص}}\,\text{د}\text{ص}$$

$$٤\text{ه}^{٣} - ٢\text{ه}^{٢} - \left(٢\text{ه}^{\text{ص}}\right)_{٢}^{٣}$$

$$٤\text{ه}^{٣} - ٢\text{ه}^{٢} - ٢\text{ه}^{٣} + ٢\text{ه}^{٢} = ٢\text{ه}^{٣}$$

مثال(٧): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ظاس}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢\sqrt{\text{ظاس}}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٢\text{ص}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{٢\text{ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{٢\text{ص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}\ \text{ءص}$$

$$= \int ٢\text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

ق	ءهـ
٢ص	$\text{هـ}^{\text{ص}}$
٢	$\text{هـ}^{\text{ص}}$
٠	$\text{هـ}^{\text{ص}}$

$$= ٢\text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}} - ٢\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= ٢\sqrt{\text{ظاس}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} - ٢\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} + \text{جـ}$$

٢) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{ءهـ} = \text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ءق} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} \qquad \text{هـ} = -\text{جتاس}$$

$$= -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{ءهـ} = \text{جتاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ءق} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} \qquad \text{هـ} = \text{جاس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}$$

$$- \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$٢\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\left(-\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس}\right) + \text{جـ}$$

٣) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس}$

الحل:

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جتا٣س ءس}$

$\text{ءق} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \frac{1}{3}\text{جا٣س}$

$= \frac{1}{3}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}} - \frac{1}{3}\int \text{جا٣س هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ءهـ} = \text{جا٣س ءس}$

$\text{ءق} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \frac{-1}{3}\text{جتا٣س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس} = \frac{1}{3}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}}$
$-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\text{جتا٣س هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{3}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس}\right)$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس} = \frac{1}{3}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}}$
$+\frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س} - \frac{1}{9}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس} + \frac{1}{9}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس}$

$= \frac{1}{3}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}} + \frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س}$

$\frac{10}{9}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس} = \frac{1}{3}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}}$
$+\frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس} = \frac{\cancel{9}^{3}}{10} \times \frac{1}{\cancel{3}}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}}$
$+\frac{\cancel{9}}{10} \times \frac{1}{\cancel{9}}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س ءس} = \frac{3}{10}\text{جا٣س هـ}^{\text{س}}$
$+\frac{1}{10}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٣س} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}})\ \text{ءس}$

الحل:

$\int \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}})\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\Leftarrow \int (\text{هـ}^{\text{س}})^{\cancel{2}}\ \text{جاص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاص ءص} = \int \text{ص جاص ءص}$

ق	ءهـ
ص	جاص
١	−جتاص
٠	−جاص

$= -\text{ص جتاص} + \text{جاص} + \text{جـ}$

$= -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{جـ}$

$$\text{٥) } \int \text{٢هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس جتاس ءس}$$ (كتاب)

الحل:

$$\Leftarrow \int \text{٢هـ}^{\text{س}} \left(\tfrac{1}{2}\text{جا٢س}\right) \text{ءس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{ءهـ} = \text{جا٢س ءس}$$

$$\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \tfrac{-1}{2}\text{جتا٢س}$$

$$= \tfrac{-1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا٢س} + \tfrac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س ءس}$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{ءهـ} = \text{جتا٢س ءس}$$

$$\text{ءع} = \text{هـ}^{\text{س}}\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \tfrac{1}{2}\text{جا٢س}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس} = \tfrac{-1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س} - \tfrac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}\right)$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس} = \tfrac{-1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \tfrac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س} - \tfrac{1}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس} + \tfrac{1}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}$$

$$= \tfrac{-1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \tfrac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س}$$

$$\tfrac{5}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}$$

$$= \tfrac{-1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \tfrac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}$$

$$= \tfrac{4}{5}\times\tfrac{-1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \tfrac{4}{5}\times\tfrac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س ءس}$$

$$= \tfrac{-2}{5}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا٢س} + \tfrac{1}{5}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جا٢س}$$

$$\text{٦) } \int \text{جا٢س هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جاس جتاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جا٢س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جا٢س}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{جا٢س}}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جا٢س}}}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} + \text{جـ}$$

$$\text{٧) } \int \text{جا٢س هـ}^{\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{جاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \int \text{جا٢س هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$= \int \text{٢جاس}\ \cancel{\text{جتاس}}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \text{٢}\int \text{جاس هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص} = \text{٢}\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

ع	ءهـ
ص	$\text{هـ}^{\text{ص}}$
١	$-$ $\text{هـ}^{\text{ص}}$
٠	$\text{هـ}^{\text{ص}}$

$$= \text{٢}\left(\text{ص هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}}\right) + \text{جـ}$$

$$= \text{٢جاس هـ}^{\text{جاس}} - \text{٢هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$$

تكامل اللوغاريتم:

الحالة الاولى: اذا كان اللوغاريتم لوحده يكامل اجزاء

بفرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}$

الحالة الثانية: اذا كان اللوغاريتم في المقام يكامل تعويض بفرض $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}$ ثم اجزاء

الحالة الثالثة: ما عدا ذلك نقوم باختبار الفرض:

- ان نفرض اللوغاريتم كاملا
- ان نفرض ما داخل اللوغاريتم فقط
- ان يحل اجزاء من البداية بفرض $\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}$

مثال(٨): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

لـو لوحده وما داخله خطي

١) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{ءس}$$

$$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءس}$$

$$= \text{ق} = \frac{1}{\text{س}}\text{ءس} \longrightarrow \text{ءهـ} = \text{س}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \frac{1}{\text{س}} \times \text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int 1\ \text{ءس}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$$

٢) $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءس}$$

$$\text{ءق} = \frac{1}{\text{س}}\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{س}$$

$$= \left[\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right]_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} - \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} 1\ \text{ءس}$$

$$= \left(\text{هـ}^2\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^2 - \text{هـ}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}\right) - \left(\text{هـ}^2 - \text{هـ}\right)$$

$$= 2\text{هـ}^2 - \text{هـ} - \text{هـ}^2 + \text{هـ} = \text{هـ}^2$$

$$\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{ءس} = \text{هـ}^2$$

---

٣) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)\ \text{ءس}$

الحل:

$$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2) \qquad \text{ءهـ} = \text{ءس}$$

$$\text{ءق} = \frac{1}{\text{س}+2}\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{س}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2) - \int \frac{\text{س}}{\text{س}+2}\ \text{ءس}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \text{س} & \text{س}+2 \\ \text{س}+2 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2) - \int 1 + \frac{-2}{\text{س}+2}\ \text{ءس}$$

$$= \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2) - \text{س} + 2\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$$

٤) $\int \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} \text{ءس}$

الحل:

$$\text{ق} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءس}$$

$$\text{ءق} = ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{س}$$

$$= \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - ٢\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس}$$

$$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءس}$$

$$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{س}$$

$$= \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - ٢\left(\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int ١\,\text{ءس}\right)$$

$$= \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - ٢\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س} + \text{جـ}$$

حل اخر:

$$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{ءس} = \text{س}\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \int (\text{ص})^{٢} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$$

ق	ءهـ
$\text{ص}^{٢}$	$\text{هـ}^{\text{ص}}$
٢ص	$\text{هـ}^{\text{ص}}$
٢	$\text{هـ}^{\text{ص}}$
٠	$\text{هـ}^{\text{ص}}$

$$= \text{ص}^{٢}\text{هـ}^{\text{ص}} - ٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + ٢\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} - ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{جـ}$$

$$= \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - ٢\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س} + \text{جـ}$$

---

٥) $\int ١٢\text{س} \times \text{لـو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٩}\;\text{ءس}$

الحل:

$$\int ١٢\text{س} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢} + ٩\right)^{\frac{١}{٣}} \text{ءس}$$

$$\int ٤\text{س} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢} + ٩\right)\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$$

$$\int \cancel{٤\text{س}}^{\,٢} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{س}}} = \int ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\;\text{ءص}$$

$$\text{ق} = ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءص}$$

$$\text{ءق} = \frac{٢}{\text{ص}}\,\text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{ص}$$

$$= ٢\text{ص}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int ٢\,\text{ءص}$$

$$= ٢\left(\text{س}^{٢} + ٩\right)\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢} + ٩\right) - ٢\left(\text{س}^{٢} + ٩\right) + \text{جـ}$$

لـو موجود في المقام نفرض ص = لـو

٦) $\int \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}} \times \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{ءس} = \text{س}\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \int \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{1}{\text{ص}}\,\cancel{\text{س}}\,\text{ءص}$$

$$= \int \frac{1}{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$$

مثال(٩): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\text{س}+1}\,\text{ءس}$

الحل:

$$= \int \frac{1}{(\text{س}+1)}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{(\text{س}+1)}$$

$$\text{ءس} = (\text{س}+1)\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \int \frac{1}{\cancel{(\text{س}+1)}}\,\text{ص}\,\cancel{(\text{س}+1)}\,\text{ءص}$$

$$= \int \text{ص}\,\text{ءص} = \frac{1}{2}\text{ص}^2 + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\right)^2 + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt[5]{\text{س}^2+2\text{س}+1}\right)}{6\text{س}+6}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left((\text{س}^2+2\text{س}+1)^{\frac{1}{5}}\right)}{6\text{س}+6}\,\text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(((\text{س}+1)^2)^{\frac{1}{5}}\right)}{6(\text{س}+1)}\,\text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^{\frac{2}{5}}}{6(\text{س}+1)}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{15}\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\text{س}+1}\,\text{ءس}$$

مشتقة اللوغاريتم موجودة تماما خارج اللوغاريتم

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}+1}$$

$$\text{ءس} = (\text{س}+1)\,\text{ءص}$$

$$= \frac{1}{15}\int \frac{\text{ص}}{\cancel{(\text{س}+1)}}\,\cancel{(\text{س}+1)}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{1}{30}\text{ص}^2 + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{30}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\right)^2 + \text{جـ}$$

٣) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}\,\cancel{\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\text{ص}^2 + \text{جـ}$

$\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2 + \text{جـ}$

حل اخر:

$\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|$

$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{1}{\text{س}} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\,\text{دس}$

$\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2 - \int \frac{1}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\,\text{دس}$

$2\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2 + \text{جـ}$

$\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2 + \text{جـ}$

٤) $\int \frac{\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2}{\text{س}}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$\int \frac{\text{ص}^2}{\cancel{\text{س}}}\,\cancel{\text{س}}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{جـ}$

$\int \frac{\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^2}{\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{3}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^3 + \text{جـ}$

---

٥) $\int \text{ظتاس}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}^{\circ}\text{س}\right)\text{دس}$

الحل:

$= 5\int \text{ظتاس}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جاس}\right)\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جاس}\right) \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ظتاس}}$

$= 5\int \cancel{\text{ظتاس}}\ \text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{ظتاس}}} = \frac{5}{2}\text{ص}^2 + \text{جـ}$

$\int \text{ظتاس}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}^{\circ}\text{س}\right)\text{دس} = \frac{5}{2}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\right)^2 + \text{جـ}$

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

٦) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{(\text{س}+1)}\right)}{(\text{س}+1)}\,\text{ءس}$

الحل:

$$= \int \frac{1}{(\text{س}+1)}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{(\text{س}+1)}\right)\text{ءس}$$

$$= \int \frac{1}{(\text{س}+1)}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left((\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\right)\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\text{س}+1)}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}+1}$$

$$\text{ءس} = (\text{س}+1)\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cancel{(\text{س}+1)}}\,\text{ص}\,\cancel{(\text{س}+1)}\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \frac{1}{2}\int \text{ص}\,\text{ءص} = \frac{1}{4}\text{ص}^{2} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\right)^{2} + \text{جـ}$$

---

٧) $\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{ءس}$

كثير حدود × لـو(ما داخله خطي)

الحل:

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{س}\ \text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{1}{\text{س}}\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = \frac{1}{2}\text{س}^{2}$

$$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{س}^{2} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^{2} + \text{جـ}$$

---

٨) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)\,\text{ءس}$$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$ $\qquad$ $\text{ءع} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{ع} = 2(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}$

$$= 2(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - 2\int \frac{(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}}{(\text{س}+1)}\,\text{ءس}$$

$$= 2(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - 2\int (\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ءس}$$

$$= 2\sqrt{\text{س}+1}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1) - 4\sqrt{\text{س}+1} + \text{جـ}$$

٩) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\,\text{دس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{-٢}{٣}} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}\,\text{دس}$$

$$= ٣\int \text{س}^{\frac{-٢}{٣}} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{دس}$$

$\text{ع} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{س}^{\frac{-٢}{٣}}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{هـ} = ٣\,\text{س}^{\frac{١}{٣}}$

$$= ٣\left(٣\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ٣\int \text{س}^{\frac{١}{٣}} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}\right)$$

$$= ٣\left(٣\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ٣\int \text{س}^{\frac{-٢}{٣}}\,\text{دس}\right)$$

$$= ٣\left(٣\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ٩\,\text{س}^{\frac{١}{٣}}\right) + \text{جـ}$$

$$= ٩\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ٢٧\sqrt[٣]{\text{س}} + \text{جـ}$$

---

١٠) $\int \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢}\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ع} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢}$ ، $\text{دهـ} = \text{س}\,\text{دس}$

$\text{دع} = ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢} - \int \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{دس}$$

$\text{ع} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{س}\,\text{دس}$

$\text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢}$$

$$-\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \frac{١}{٢}\int \text{س}\,\text{دس}\right)$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

حل اخر:

$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} \Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}} = \text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = \text{س}\,\text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{س}\,\text{ص}^{٢} \times \text{س}\,\text{دص}$

$= \int \text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \int \text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{دص}$

ع	دهـ
$\text{ص}^{٢}$	$\text{هـ}^{٢\text{ص}}$
٢ص	$\frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{ص}}$
٢	$\frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{ص}}$
٠	$\frac{١}{٨}\text{هـ}^{٢\text{ص}}$

$$= \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{ص}} - \frac{١}{٢}\text{ص}\,\text{هـ}^{٢\text{ص}} + \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢}\text{هـ}^{٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\,\text{هـ}^{٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$$

$$+ \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{جـ}$$

(١١) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ءص} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = 2\text{ص}\ \text{ءص}$

$\int 2\text{ص}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{ءس}$

$\text{ع} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءم} = 2\text{ص}\ \text{ءص}$

$\text{ءع} = \frac{1}{\text{ص}}\ \text{ءص} \qquad \text{م} = \text{ص}^2$

$= \text{ص}^2\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{ص}\ \text{ءص}$

$= \text{ص}^2\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ}$

$= \text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} - \frac{\text{س}}{2} + \text{جـ}$

(١٢) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3)}{\sqrt{\text{س}+3}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$= \int (\text{س}+3)^{-\frac{1}{2}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3)\ \text{ءس}$

$\text{ع} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3) \qquad \text{ءهـ} = (\text{س}+3)^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءس}$

$\text{ءع} = \frac{1}{\text{س}+3}\ \text{ءس} \qquad \text{هـ} = 2(\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}$

$= 2(\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3)$

$- \int \frac{1}{\text{س}+3} \times 2(\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}\ \text{ءس}$

$= 2\sqrt{\text{س}+3}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3)$

$- 2\int (\text{س}+3)^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءس}$

$= 2\sqrt{\text{س}+3}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3) - 2\times 2(\text{س}+3)^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{س}+3}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3) - 4\sqrt{\text{س}+3} + \text{جـ}$

(١٣) $\int \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{\text{س}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = 1 + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}} \Leftarrow \text{ءس} = \text{س}\ \text{ءص}$

$\Leftarrow \int \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \frac{1}{\sqrt{\text{ص}}}\ \cancel{\text{س}}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{ءص} = \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءص}$

$= 2\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ} = 2\sqrt{1+\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{جـ}$

١٤) $\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{لـو}_{\text{هـ}}^{3} \text{س} \, \text{دس}$ ، $\text{ن} \in \text{ط}$

الحل:

$$\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{لـو}_{\text{هـ}}^{3} \text{س} \, \text{دس}$$

$$= 3 \int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس}$$

$$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{س}^{\text{ن}} \, \text{دس}$$

$$\text{دق} = \frac{1}{\text{س}} \text{دس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{1}{\text{ن}+1} \text{س}^{\text{ن}+1}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}+1} \text{س}^{\text{ن}+1} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \int \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{\text{ن}+1} \int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{\text{ن}+1} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)^2} + \text{جـ}$$

---

١٥) $\int \text{س}^{2} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{س}^{2} \, \text{دس}$$

$$\text{دق} = \frac{1}{\text{س}} \text{دس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{1}{3} \text{س}^{3}$$

$$= \frac{1}{3} \text{س}^{3} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{3} \int \text{س}^{3} \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{دس}$$

$$= \frac{1}{3} \text{س}^{3} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{1}{9} \text{س}^{3} + \text{جـ}$$

سؤال وزاري: اذا علمت ان

$$\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس} = \frac{4\text{هـ}^{5}+1}{25}$$ ؛ فجــد

$$\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} \left(\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}\right)^{2} \text{دس}$$

الحل:

$$\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}^{4} \left(\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}\right)^{2} \text{دس}$$

$$\text{ق} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}\right)^{2} \qquad \text{دم} = \text{س}^{4} \, \text{دس}$$

$$\text{دق} = 2 \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} \longrightarrow \text{م} = \frac{1}{5} \text{س}^{5}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{5}}{5} \left(\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}\right)^{2}\right]_{1}^{\text{هـ}}$$

$$- \int 2 \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} \times \frac{1}{5} \text{س}^{5} \times \text{دس}$$

$$= \frac{1}{5} \text{هـ}^{5} - \frac{2}{5} \int \text{س}^{4} \, \text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س} \, \text{دس}$$

$$= \frac{1}{5} \text{هـ}^{5} - \frac{2}{5} \left(\frac{4\text{هـ}^{5}+1}{25}\right)$$

$$= \frac{1}{5} \text{هـ}^{5} - \frac{8\text{هـ}^{5}+2}{125} = \frac{17\text{هـ}^{5}-2}{125}$$

مثال(١٠): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{ءص}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{ص}\ \frac{\text{ظاس}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}\ \text{ءص}$

$= \int \text{ص ظاس ءص} = \int \text{ص} \times \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$\text{و} = \text{ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$\text{ءو} = \text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص} = \text{صهـ}^{\text{ص}} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$\int \text{ص هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص} = \text{صهـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}} - \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

حل اخر: $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\Leftarrow \int \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص ءص}$

$\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءص}$

$\text{ءو} = \frac{1}{\text{ص}}\ \text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{ص}$

$= \text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \frac{1}{\text{ص}} \times \text{ص ءص}$

$= \text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

حل اخر: $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس ءس}$

$\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \qquad \text{ءهـ} = \text{قا}^2\text{س ءس}$

$\text{ءو} = \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} \longrightarrow \text{هـ} = \text{ظاس}$

$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\cancel{\text{ظاس}}} \times \cancel{\text{ظاس}}\ \text{ءس}$

$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \int \text{قا}^2\text{س ءس}$

$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{2}\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \text{قا}^{\cancel{4}\,2}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$$

$$= \int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$= \int (\text{ظا}^{2}\text{س}+1)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$= \int (\text{ص}^{2}+1)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = (\text{ص}^{2}+1)\ \text{ءص}$$

$$\text{ءو} = \frac{1}{\text{ص}}\text{ءص} \qquad \text{هـ} = \frac{1}{3}\text{ص}^{3}+\text{ص}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\text{ص}^{3}+\text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int\left(\frac{1}{3}\text{ص}^{3}+\text{ص}\right)\times\frac{1}{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\text{ص}^{3}+\text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \frac{1}{3}\text{ص}^{2}+1\ \text{ءص}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\text{ص}^{3}+\text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{1}{9}\text{ص}^{3} - \text{ص} + \text{جـ}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\text{ظا}^{3}\text{س}+\text{ظاس}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}$$

$$- \frac{1}{9}\text{ظا}^{3}\text{س} - \text{ظاس} + \text{جـ}$$

٣) $\int \text{جتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int \text{جتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \int \cancel{\text{جتاس}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{ءهـ} = \text{ءص}$$

$$\text{ءو} = \frac{1}{\text{ص}}\text{ءص} \qquad \text{هـ} = \text{ص}$$

$$= \text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \frac{1}{\text{ص}}\times\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$= \text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int 1\ \text{ءص}$$

$$= \text{ص}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$$

$$= \text{جاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$$

---

٤) $\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} \qquad \text{ءهـ} = \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$\text{ءو} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{ءس} \qquad \text{هـ} = \text{ظاس}$$

$$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \int \text{ظاس}\times\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \int \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\times\frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جاس}}}\ \text{ءس}$$

$$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \int 1\ \text{ءس}$$

$$= \text{ظاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \text{س} + \text{جـ}$$

مثال(١١): اذا كان $\int_{1}^{2} ق(س)\,ءس = 3$ ، $ق(1) = 5$ ، $ق(2) = 8$ ؛ جد $\int_{1}^{2} س\,ق'(س)\,ءس$ ؟؟؟

(كتاب)

الحل:

$$\int_{1}^{2} ق(س)\,ءس = 3$$

$$ق = س \qquad ءه = ق'(س)\,ءس$$
$$ءق = ءس \qquad ه = ق(س)$$

$$= \Big[س\,ق(س)\Big]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} ق(س)\,ءس$$

$$= \Big[س\,ق(س)\Big]_{1}^{2} - 3$$

$$= \big((2)ق(2)\big) - \big((1)ق(1)\big) - 3$$

$$= (16) - (5) - 3 = 8$$

مثال(١٢): اذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق وكان $\int_{1}^{2} ق(س)\,ءس = 10$ ، $ق(2) = 3$ ، $ق(1) = -1$؛ جد $\int_{0}^{1} س^{5}\,ق'(س^{3}+1)\,ءس$ ؟؟؟

(كتاب)

الحل:

$$ص = س^{3} + 1 \Leftarrow س^{3} = ص - 1$$

$$\frac{ءص}{ءس} = 3س^{2} \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{3س^{2}}$$

$$س = 0 \Leftarrow ص = (0)^{3} + 1 = 1$$

$$س = 1 \Leftarrow ص = (1)^{3} + 1 = 2$$

$$\Leftarrow \int_{1}^{2} س^{\cancel{5}\,3}\,ق'(ص)\,\frac{ءص}{3\cancel{س^{2}}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{1}^{2} س^{3}\,ق'(ص)\,ءص$$

$$= \frac{1}{3}\int_{1}^{2} (ص-1)\,ق'(ص)\,ءص$$

$$ق = ص - 1 \qquad ءه = ق'(ص)\,ءص$$
$$ءق = ءص \qquad ه = ق(ص)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\Big[(ص-1)ق(ص)\Big]_{1}^{2} - \int_{1}^{2} ق(ص)\,ءص\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\Big[(ص-1)ق(ص)\Big]_{1}^{2} - 10\right)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\big((2)-1\big)ق(2) - \big((1)-1\big)ق(1) - 10\Big)$$

$$= \frac{1}{3}\big(ق(2) - 10\big) = \frac{1}{3}(3 - 10) = \frac{-7}{3}$$

مثال(١٣): اذا كان م(س) معكوسا لمشتقة ق(س) جد؛ $\int_{2}^{3} س\,ق'(س)\,ءس$ ، اذا علمت ان $ق(2) = 5$ ، $ق(3) = 1$ ، $م(2) = 1$ ، $م(3) = 7$ ؟؟؟

الحل:

م(س) معكوسا لمشتقة ق(س)

$$م(س) \Leftarrow ق(س)$$

$$\int ق(س)\,ءس \Leftarrow م(س)$$

$$\int_{2}^{3} س\,ق'(س)\,ءس$$

$$ق = س \qquad ءه = ق'(س)\,ءس$$
$$ءق = ءس \qquad ه = ق(س)$$

$$= \Big[س\,ق(س)\Big]_{2}^{3} - \int_{2}^{3} ق(س)\,ءس$$

$$= \big((3)\,ق(3)\big) - \big((2)\,ق(2)\big) - \Big[م(س)\Big]_{2}^{3}$$

$$= \big((3)\,(1)\big) - \big((2)(5)\big) - \big(م(3) - م(2)\big)$$

$$= (3) - (10) - (7 - 1)$$

$$= -7 - 6 = -13$$

مثال(١٤): اذا كان $\int_{٢}^{٥} \text{س ق}'(\text{س})\, \text{ءس} = ٢٠$، وكان

$\text{ق}(٥) = ٨$ ، $\text{ق}(٢) = ٣$ ؛ جد

$\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس}$$

$\text{ق} = \text{ق}(\text{س})$ $\qquad$ $\text{ءهـ} = \text{ءس}$

$\text{ءق} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{س}$

$$= \text{س ق}(\text{س})\Big]_{٢}^{٥} - \int_{٢}^{٥} \text{س ق}'(\text{س})\, \text{ءس}$$

$$= \big((٥)\,\text{ق}(٥)\big) - \big((٢)\,\text{ق}(٢)\big) - ٢٠$$

$$= \big(٥\,(٨)\big) - \big(٢\,(٣)\big) - ٢٠$$

$$= (٤٠) - (٦) - ٢٠ = ١٤$$

حل اخر: $\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس}$

$\text{ق} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءهـ} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس}$

$\text{ءق} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{ق}(\text{س})$

$$= \text{س ق}(\text{س})\Big]_{٢}^{٥} - \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٢٠$$

$$= \big((٥)\text{ق}(٥)\big) - \big((٢)\text{ق}(٢)\big) - \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٢٠$$

$$= (٤٠) - (٦) - \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٢٠$$

$$= ٣٤ - \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ٢٠$$

$$= \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} = ١٤$$

مثال(١٥): جد قيمة $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ق}(\text{س})}\, \text{ءس}$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ق}(\text{س})$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{ق}'(\text{س})}\,\text{ءص}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{ق}'(\text{س})}}{\cancel{\text{ق}(\text{س})} \times \text{ص}} \times \frac{\cancel{\text{ق}(\text{س})}}{\cancel{\text{ق}'(\text{س})}}\, \text{ءص}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}}\, \text{ءص} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} \big|\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ق}(\text{س})\big| + \text{جـ}$$

- ✓ اذا جاء اللوغاريتم في المقام يكامل بالتعويض

  ص = لــو

- ✓ اذا جاء اللوغاريتم لوحده يكامل أجزاء مباشرة

  ق = لــو

- ✓ اذا جاء اللوغاريتم معه اقتران وليس بالمقام

  بعد أجراء التبسيط والاختصار

  اختبار الفرض

- **الحالة الاولى:** نفرض اللوغاريتم كاملا

  ص = لــو

- **الحالة الثانية:** فرض ما داخل اللوغاريتم

  ص = (   )

- **الحالة الثالثة:** أجزاء مباشرة

  ق = لــو

الدرس الثامن : التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}\,\text{ءس}$$

بشرط:

⇐ لا يوجد تبسيط واختصار ⇒

⇐ البسط ليس مشتقة المقام ⇒

⇐ المقام ليس مربع كامل ⇒

تذكر:

⇐ $\int \frac{\text{ثابت}}{\text{أس+ب}}\,\text{ءس} = \left(\frac{\text{ثابت}}{\text{أ}}\right) \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\text{أس} + \text{ب}\right|$ ⇒

⇐ $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\text{ق}(\text{س})\right| + \text{جـ}$ ⇒

⇐ $\int \frac{\text{أ}}{\text{بس} \pm \text{ء}}\,\text{ءس} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\text{بس} \pm \text{ء}\right| + \text{جـ}$ ⇒

مثال(١): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{٣}{\text{س}^{٣}\left(٢ + \text{س}^{-٢}\right)}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{٣\text{س}^{-٣}}{٢ + \text{س}^{-٢}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-٣}{٢} \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|٢ + \text{س}^{-٢}\right| + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٧} + \text{س}^{٤}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٧}\left(١ + \text{س}^{-٣}\right)}\,\text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{س}^{-٤}}{\left(١ + \text{س}^{-٣}\right)}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-١}{٣} \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|١ + \text{س}^{-٣}\right| + \text{جـ}$$

---

٢) $\int \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{\cancel{\text{س} - ٢}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(\text{س} - ٣)}\,\text{ءس}$$

$$\int \frac{١}{(\text{س} - ٣)}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\text{س} - ٣\right| + \text{جـ}$$

---

٣) $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣}\,\text{ءس}$

الحل:

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣\right| + \text{جـ}$$

٤) $\int \frac{س-٥}{س^{٢}-٤س+٤}\,ءس$

الحل:

$\int \frac{س-٥}{(س-٢)(س-٢)}\,ءس$

$\int \frac{س-٥}{(س-٢)^{٢}}\,ءس$

$= \int (س-٥)(س-٢)^{-٢}\,ءس$

$ق = س-٥ \qquad ءهـ = (س-٢)^{-٢}\,ءس$

$ءق = ءس \qquad هـ = \frac{-١}{س-٢}$

$= \frac{٥-س}{س-٢} + \int \frac{١}{س-٢}\,ءس$

$\int \frac{س-٥}{س^{٢}-٤س+٤}\,ءس = \frac{٥-س}{س-٢} + \text{لـو}_{هـ}|س-٢| + جـ$

$\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}\,ءس$

نستخدم الكسور الجزئية **بعد التأكد من**:

١) عدم وجود اختصار او تبسيط يمكن ان نقوم به

٢) عدم وجود مشتقة المقام بالبسط

٣) المقام ليس مربع كاملا (نستخدم التعويض)

اولا: درجة البسط اقل من درجة المقام

⇐ المقام **تربيعي** ويحلل الى جذرين **مختلفين** ⇒

مثال(٢): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{٢}{س^{٢}-٤}\,ءس$

الحل:

$\Leftarrow \frac{٢}{س^{٢}-٤} = \frac{٢}{(س-٢)(س+٢)}$

$\frac{٢}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢}$

$\frac{٢}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{أ(س+٢)+ب(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}$

$\Leftarrow ٢ = أ(س+٢)+ب(س-٢)$

$س = -٢ \Leftarrow ٢ = \cancel{أ(-٢+٢)} + ب(-٢-٢)$

$\frac{\cancel{٢}}{-\cancel{٤}_{٢}} = \frac{\cancel{-٤}ب}{\cancel{-٤}} \Leftarrow ب = \frac{-١}{٢}$

$س = ٢ \Leftarrow ٢ = أ(٢+٢) + \cancel{ب(٢-٢)}$

$\frac{\cancel{٢}}{\cancel{٤}_{٢}} = \frac{\cancel{٤}أ}{\cancel{٤}} \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \int \frac{٢}{س^{٢}-٤}\,ءس = \int \frac{\frac{١}{٢}}{س-٢} + \frac{\frac{-١}{٢}}{س+٢}\,ءس$

$= \frac{١}{٢}\,\text{لـو}_{هـ}|س-٢| - \frac{١}{٢}\,\text{لـو}_{هـ}|س+٢| + جـ$

٢) $\int \frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣} \, ءس$

الحل:

$$\Leftarrow \frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{٥}{(س-٣)(س-١)}$$

$$\frac{٥}{(س-٣)(س-١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-١}$$

$$\frac{٥}{(س-٣)(س-١)} = \frac{أ(س-١) + ب(س-٣)}{(س-٣)(س-١)}$$

$$\Leftarrow ٥ = أ(س-١) + ب(س-٣)$$

$$س = ٣ \Leftarrow أ = \frac{٥}{٢}$$

$$س = ١ \Leftarrow ب = \frac{-٥}{٢}$$

$$\Leftarrow \int \frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣} \, ءس = \int \frac{\frac{٥}{٢}}{س-٣} + \frac{\frac{-٥}{٢}}{س-١} \, ءس$$

$$\int \frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣} \, ءس$$

$$= \frac{٥}{٢} \text{لو}_{هـ} |س-٣| - \frac{٥}{٢} \text{لو}_{هـ} |س-١| + جـ$$

---

٣) $\int \frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠} \, ءس$ (كتاب)

الحل:

$$\int \frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠} \, ءس$$

$$\frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠} = \frac{٧}{(س+٢)(س-٥)}$$

$$\frac{٧}{(س+٢)(س-٥)} = \frac{أ}{(س+٢)} + \frac{ب}{(س-٥)}$$

$$\frac{٧}{(س+٢)(س-٥)} = \frac{أ(س-٥) + ب(س+٢)}{(س+٢)(س-٥)}$$

$$\Leftarrow ٧ = أ(س-٥) + ب(س+٢)$$

$$س = ٥ \Leftarrow ب = ١$$

$$س = -٢ \Leftarrow أ = -١$$

$$\int \frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠} \, ءس = \int \frac{-١}{س+٢} + \frac{١}{س-٥} \, ءس$$

$$\int \frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠} \, ءس$$

$$= \text{لو}_{هـ} |س-٥| - \text{لو}_{هـ} |س+٢| + جـ$$

---

٤) $\int \frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦} \, ءس$

الحل:

$$\Leftarrow \frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦} = \frac{س}{(س+٣)(س+٢)}$$

$$\frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦} = \frac{أ}{(س+٣)} + \frac{ب}{(س+٢)}$$

$$\frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦} = \frac{أ(س+٢) + ب(س+٣)}{س^{٢} + ٥س + ٦}$$

$$س = أ(س+٢) + ب(س+٣)$$

$$س = -٢ \Leftarrow -٢ = ب$$

$$س = -٣ \Leftarrow ٣ = أ$$

$$\int \frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦} = \int \frac{٣}{(س+٣)} + \frac{-٢}{(س+٢)} \, ءس$$

$$\int \frac{س}{س^{٢} + ٥س + ٦}$$

$$= ٣ \text{لو}_{هـ} |س+٣| - ٢ \text{لو}_{هـ} |س+٢| + جـ$$

٥) $\int \frac{س - ١٣}{٢س^{٢} - ٧س + ٣} \, ءس$ (كتاب)

الحل:

$٢س^{٢} - ٧س + ٣ \Rightarrow س^{٢} - ٧س + ٦$

$(س - ٦)(س - ١) \Rightarrow \left(س - \frac{٦}{٢}\right)\left(س - \frac{١}{٢}\right)$

$(س - ٣)(٢س - ١)$

$\Rightarrow \int \frac{س - ١٣}{(س - ٣)(٢س - ١)} \, ءس$

$\frac{س - ١٣}{(س - ٣)(٢س - ١)} = \frac{أ}{(س - ٣)} + \frac{ب}{(٢س - ١)}$

$= \frac{أ(٢س - ١) + ب(س - ٣)}{(س - ٣)(٢س - ١)}$

$\Rightarrow س - ١٣ = أ(٢س - ١) + ب(س - ٣)$

$س = \frac{١}{٢} \Rightarrow ب = ٥$

$س = ٣ \Rightarrow أ = -٢$

$= \int \frac{-٢}{س - ٣} + \frac{٥}{٢س - ١} \, ءس$

$\int \frac{س - ١٣}{٢س^{٢} - ٧س + ٣} \, ءس$

$= -٢ لو_{هـ}|س - ٣| + \frac{٥}{٢} لو_{هـ}|٢س - ١| + جـ$

٦) $\int \frac{٢س - ٣}{(س^{٢} - س)} \, ءس$

الحل:

$\frac{٢س - ٣}{س(س - ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١}$

$\frac{٢س - ٣}{س(س - ١)} = \frac{أ(س - ١) + ب س}{س(س - ١)}$

$\Rightarrow ٢س - ٣ = أ(س - ١) + ب س$

$س = ١ \Rightarrow ٢(١) - ٣ = \cancel{أ(١ - ١)} + ب(١)$

$-١ = ب$

$س = ٠ \Rightarrow ٢(٠) - ٣ = أ(٠ - ١) + \cancel{ب(٠)}$

$-٣ = -أ \Rightarrow أ = ٣$

$\Rightarrow \int \frac{٢س - ٣}{س(س - ١)} \, ءس = \int \frac{٣}{س} + \frac{-١}{س - ١} \, ءس$

$\int \frac{٢س - ٣}{س(س - ١)} \, ءس$

$= ٣ لو_{هـ}|س| - لو_{هـ}|س - ١| + جـ$

٧) $\int \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٨}{\text{س}^٣ - ٤\text{س}} \,\text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{(\text{س}-٤)(\text{س}-٢)}{\text{س}(\text{س}^٢-٤)} \,\text{ءس}$$

$$\int \frac{(\text{س}-٤)\cancel{(\text{س}-٢)}}{\text{س}(\text{س}+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}} \,\text{ءس}$$

$$\frac{\text{س}-٤}{\text{س}(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$$\frac{\text{س}-٤}{\text{س}(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}\text{س}}{\text{س}(\text{س}+٢)}$$

$$\text{س} - ٤ = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}\text{س}$$

$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = -٢$$

$$\text{س} = -٢ \Leftarrow \text{ب} = ٣$$

$$\int \frac{\text{س}-٤}{\text{س}(\text{س}+٢)} \,\text{ءس} = \int \frac{-٢}{\text{س}} \,\text{ءس} + \int \frac{٣}{\text{س}+٢} \,\text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٨}{\text{س}^٣ - ٤\text{س}} \,\text{ءس}$$

$$= ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| - ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

٨) $\int_{٢}^{٤} \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢} \,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\Leftarrow \frac{٤\text{س}-١}{\text{س}^٢+\text{س}-٢} = \frac{٤\text{س}-١}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$$

$$\frac{٤\text{س}-١}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$$\frac{٤\text{س}-١}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$$

$$٤\text{س} - ١ = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س}-١)$$

$$\text{س} = -٢ \Leftarrow ٤(-٢) - ١ = \text{أ}\cancel{(-٢+٢)} + \text{ب}(-٢-١)$$

$$-٩ = -٣\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = ٣$$

$$\text{س} = ١ \Leftarrow ٤(١) - ١ = \text{أ}(١+٢) + \text{ب}\cancel{(١-١)}$$

$$٣ = ٣\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ١$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{٤} \frac{٤\text{س}-١}{\text{س}^٢+\text{س}-٢} \,\text{ءس} = \int_{٢}^{٤} \frac{١}{\text{س}-١} + \frac{٣}{\text{س}+٢} \,\text{ءس}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| \Big]_{٢}^{٤} + ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| \Big]_{٢}^{٤}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|٤-١| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|٢-١|$$

$$+ ٣\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}|٤+٢| - \text{لـو}_{\text{هـ}}|٢+٢|\right)$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}}٣ - \cancel{\text{لـو}_{\text{هـ}}١} + ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٦ - ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٤$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}}٣ + ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٦ - ٣\,\text{لـو}_{\text{هـ}}٤$$

٩) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢} \, \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢} \, \text{ءس}$$

$$\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢} = \frac{٢\text{س}}{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٢)}$$

$$\frac{٢\text{س}}{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{(\text{س} - ٦)} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} + ٢)}$$

$$\frac{٢\text{س}}{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{أ}(\text{س} + ٢) + \text{ب}(\text{س} - ٦)}{(\text{س} - ٦)(\text{س} + ٢)}$$

$$\Leftarrow \; ٢\text{س} = \text{أ}(\text{س} + ٢) + \text{ب}(\text{س} - ٦)$$

$$\text{س} = -٢ \Leftarrow ٢(-٢) = \cancel{\text{أ}(-٢+٢)} + \text{ب}(-٢-٦)$$

$$-٤ = -٨\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{س} = ٦ \Leftarrow ٢(٦) = \text{أ}(٦+٢) + \cancel{\text{ب}(٦-٦)}$$

$$١٢ = ٨\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٢}$$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢} \, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س} - ٦} + \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س} + ٢} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{٣}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٦| \Big]_{١}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ٢| \Big]_{١}^{٣}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لـو}_{\text{هـ}}٥$$

١٠) $\int_{٠}^{١} \frac{٦[\text{س} + ٢]}{٤\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{ءس}$

الحل:

نعيد تعريف $[\text{س} + ٢]$ في الفترة $[٠، ١]$

$$\text{ل} = \frac{١}{|١|} = ١$$

$$\begin{cases} ٢ \text{ ، } ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٣ \text{ ، } ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{١} \frac{٦(٢)}{٤\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{ءس} = \int_{٠}^{١} \frac{١٢}{٤\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{ءس}$$

$$\frac{١٢}{٤\text{س}^{٢} - ٩} = \frac{\text{أ}}{٢\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{٢\text{س} + ٣}$$

$$\frac{١٢}{٤\text{س}^{٢} - ٩} = \frac{\text{أ}(٢\text{س} + ٣) + \text{ب}(٢\text{س} - ٣)}{(٢\text{س} - ٣)(٢\text{س} + ٣)}$$

$$١٢ = \text{أ}(٢\text{س} + ٣) + \text{ب}(٢\text{س} - ٣)$$

$$\text{س} = \frac{-٣}{٢} \; \Leftarrow \; \text{ب} = -٢$$

$$\text{س} = \frac{٣}{٢} \; \Leftarrow \; \text{أ} = ٢$$

$$= \int_{٠}^{١} \frac{٢}{٢\text{س} - ٣} \, \text{ءس} + \int_{٠}^{١} \frac{-٢}{٢\text{س} + ٣} \, \text{ءس}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}}|٢\text{س} - ٣| \Big]_{٠}^{١} - \text{لـو}_{\text{هـ}}|٢\text{س} + ٣| \Big]_{٠}^{١}$$

$$= \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}١ - \text{لـو}_{\text{هـ}}٣\right) - \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لـو}_{\text{هـ}}٣\right)$$

$$\int_{٠}^{١} \frac{٦[\text{س} + ٢]}{٤\text{س}^{٢} - ٩} \, \text{ءس} = -\text{لـو}_{\text{هـ}}٥$$

(١١) $\int_{-1}^{1} \frac{|\text{١} - \text{س}|}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} \, \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\text{١} - \text{س}|}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} \, \text{ءس}$$

نعيد تعريف $|\text{١} - \text{س}|$ في الفترة $[-\text{١}،\text{١}]$

$$\text{١} - \text{س} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{١}$$

$$\begin{array}{c|c} \text{س} - \text{١} & \text{١} - \text{س} \\ \hline - - - - - - - & + + + + + \end{array}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{١} - \text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} \, \text{ءس}$$

$$\frac{\text{١} - \text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} = \frac{\text{١} - \text{س}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} - \text{٢})}$$

$$\frac{\text{١} - \text{س}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} - \text{٢})} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - \text{٣}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - \text{٢}}$$

$$\frac{\text{١} - \text{س}}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} - \text{٢})} = \frac{\text{أ}(\text{س} - \text{٢}) + \text{ب}(\text{س} - \text{٣})}{(\text{س} - \text{٣})(\text{س} - \text{٢})}$$

$$\Leftarrow \text{١} - \text{س} = \text{أ}(\text{س} - \text{٢}) + \text{ب}(\text{س} - \text{٣})$$

$$\text{س} = \text{٢} \Leftarrow \text{ب} = \text{١}$$

$$\text{س} = \text{٣} \Leftarrow \text{أ} = -\text{٢}$$

$$\Leftarrow \int_{-1}^{1} \frac{\text{١} - \text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٦}} \, \text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{-\text{٢}}{\text{س} - \text{٣}} + \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٢}} \, \text{ءس}$$

$$= \text{٢لـو}_{\text{هـ}}\text{٢} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{٣}$$

ثانيا: درجة البسط اكبر او يساوي درجة المقام

⇐أجراء عملية القسمة الطويلة⇒

مثال(٣): جد التكاملات الاتية ???

١) $\int \frac{\text{٥} - \text{٨س}}{\text{١} - \text{٢س}} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & \text{٤} \\ \hline -\text{٢س} + \text{١} & -\text{٨س} + \text{٥} \\ & -(-\text{٨س} + \text{٤}) \\ \hline & \text{١} \end{array}$$

$$\int \frac{\text{٥} - \text{٨س}}{\text{١} - \text{٢س}} \, \text{ءس} = \int \text{٤} + \frac{\text{١}}{-\text{٢س} + \text{١}} \, \text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{٥} - \text{٨س}}{\text{١} - \text{٢س}} \, \text{ءس} = \text{٤س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لـو}_{\text{هـ}} |-\text{٢س} + \text{١}| + \text{جـ}$$

---

٢) $\int \frac{\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٥س}}{\text{٢س} + \text{١}} \, \text{ءس}$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & \text{٣س} + \text{١} \\ \hline \text{٢س} + \text{١} & \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٥س} \\ & -(\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٣س}) \\ \hline & \text{٢س} \\ & -(\text{٢س} + \text{١}) \\ \hline & -\text{١} \end{array}$$

$$\int \frac{\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٥س}}{\text{٢س} + \text{١}} \, \text{ءس}$$

$$= \int (\text{٣س} + \text{١}) - \frac{\text{١}}{\text{٢س} + \text{١}} \, \text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٥س}}{\text{٢س} + \text{١}} \, \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{٢س} + \text{١}| + \text{جـ}$$

٣) $\int \frac{٢س^{٢}+٣}{س^{٢}-س}\,ءس$ (كتاب)

درجة البسط ≤ درجة المقام

الحل:

$$\int \frac{٢س^{٢}+٣}{س^{٢}-س}\,ءس$$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢س^{٢}+٣ & س^{٢}-س \\ ٢س^{٢}-٢س & \\ \hline ٢س+٣ & \end{array}$$

$$\Leftarrow \int ٢+\frac{٢س+٣}{س^{٢}-س}\,ءس$$

$$\frac{٢س+٣}{س^{٢}-س}=\frac{٢س+٣}{س(س-١)}=\frac{أ}{س}+\frac{ب}{س-١}$$

$$\frac{٢س+٣}{س(س-١)}=\frac{أ(س-١)+ب\,س}{س(س-١)}$$

$$\Leftarrow ٢س+٣=أ(س-١)+ب\,س$$

$$س=١ \Leftarrow ٢\times١+٣=\cancel{أ(١-١)}+ب\times١$$

$$ب=٥$$

$$س=٠ \Leftarrow ٢(٠)+٣=أ(٠-١)+\cancel{ب(٠)}$$

$$٣=-أ \Leftarrow أ=-٣$$

$$\Leftarrow \int \frac{٢س+٣}{س^{٢}-س}\,ءس=\int \frac{-٣}{س}+\frac{٥}{س-١}\,ءس$$

$$=٢س-٣\,لو_{هـ}|س|+٥\,لو_{هـ}|س-١|+جـ$$

٤) $\int \frac{س^{٣}+٤س-٨}{س^{٢}-٩}\,ءس$ (كتاب)

الحل:

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline س^{٣}+٤س-٨ & س^{٢}-٩ \\ -س^{٣}-٩س & \\ \hline ١٣س-٨ & \end{array}$$

$$\Leftarrow \int س+\frac{١٣س-٨}{س^{٢}-٩}\,ءس$$

$$\frac{١٣س-٨}{س^{٢}-٩}=\frac{١٣س-٨}{(س-٣)(س+٣)}$$

$$\frac{١٣س-٨}{(س-٣)(س+٣)}=\frac{أ}{(س-٣)}+\frac{ب}{(س+٣)}$$

$$\frac{١٣س-٨}{(س-٣)(س+٣)}=\frac{أ(س+٣)+ب(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)}$$

$$\Leftarrow ١٣س-٨=أ(س+٣)+ب(س-٣)$$

$$س=-٣ \Leftarrow ١٣(-٣)-٨=ب(-٣-٣)$$

$$٤٧=-٦ب \Leftarrow ب=\frac{٤٧}{٦}$$

$$س=٣ \Leftarrow ١٣(٣)-٨=أ(٣+٣)$$

$$٣١=٦أ \Leftarrow أ=\frac{٣١}{٦}$$

$$=\int س+\frac{\frac{٣١}{٦}}{س-٣}+\frac{\frac{٤٧}{٦}}{س+٣}\,ءس$$

$$=\frac{١}{٢}س^{٢}+\frac{٣١}{٦}\,لو_{هـ}|س-٣|$$

$$+\frac{٤٧}{٦}\,لو_{هـ}|س+٣|+جـ$$

٥) $\int \frac{\text{س}(\text{س}+٢)^٢}{\text{س}^٢+٤\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

الحل:

$\int \frac{\text{س}^٣+٤\text{س}^٢+٤\text{س}}{\text{س}^٢+٤\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

$$\begin{array}{r} \text{س} \\ \text{س}^٢+٤\text{س}+٣ \;\big)\; \text{س}^٣+٤\text{س}^٢+٤\text{س} \\ \text{س}^٣+٤\text{س}^٢+٣\text{س} \\ \hline \text{س} \end{array}$$

$= \int \left(\text{س} + \frac{\text{س}}{\text{س}^٢+٤\text{س}+٣}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س} + \frac{\text{س}}{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)}\right)\text{ءس}$

$\frac{\text{س}}{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$

$\frac{\text{س}}{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+١)+\text{ب}(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)}$

$\Leftarrow \quad \text{س} = \text{أ}(\text{س}+١)+\text{ب}(\text{س}+٣)$

$\text{س} = -١ \Leftarrow -١ = \cancel{\text{أ}(-١+١)} + \text{ب}(-١+٣)$

$-١ = ٢\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$

$\text{س} = -٣ \Leftarrow -٣ = \text{أ}(-٣+١) + \cancel{\text{ب}(-٣+٣)}$

$-٣ = -٢\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٢}$

$\Leftarrow \int \text{س} + \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س}+٣} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \frac{٣}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٣| - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{جـ}$

٦) $\int \frac{٤\text{س}^٢}{٢\text{س}^٢+٣\text{س}-٢}\,\text{ءس}$

الحل:

$$\begin{array}{r} ٢ \\ ٢\text{س}^٢+٣\text{س}-٢ \;\big)\; ٤\text{س}^٢ \\ ٤\text{س}^٢+٦\text{س}-٤ \\ \hline -٦\text{س}+٤ \end{array}$$

$\int \left(٢ + \frac{٤-٦\text{س}}{٢\text{س}^٢+٣\text{س}-٢}\right)\text{ءس}$

$\int \left(٢ + \frac{٤-٦\text{س}}{(٢\text{س}-١)(\text{س}+٢)}\right)\text{ءس}$

$\frac{٤-٦\text{س}}{(٢\text{س}-١)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{٢\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$

$\frac{٤-٦\text{س}}{(٢\text{س}-١)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}(\text{س}+٢)+\text{ب}(٢\text{س}-١)}{(٢\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$

$\Leftarrow \quad ٤-٦\text{س} = \text{أ}(\text{س}+٢)+\text{ب}(٢\text{س}-١)$

$\text{س} = -٢ \Leftarrow ٤-٦(-٢) = \text{ب}(٢(-٢)-١)$

$١٦ = -٥\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١٦}{٥}$

$\text{س} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٤-٦\left(\frac{١}{٢}\right) = \text{أ}\left(\frac{١}{٢}+٢\right)$

$١ = \frac{٥}{٢}\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٢}{٥}$

$\Leftarrow \int ٢ + \frac{\frac{٢}{٥}}{٢\text{س}-١} + \frac{\frac{-١٦}{٥}}{\text{س}+٢}\,\text{ءس}$

$= ٢\text{س} + \frac{١}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}-١| - \frac{١٦}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{جـ}$

٧) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}{٣\text{س}^{٢} - ١٢}\, \text{ءس}$

الحل:

$$= \int \frac{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٢)}{٣(\text{س}^{٢} - ٤)}\, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{(\text{س} - ٥)\cancel{(\text{س} + ٢)}}{٣(\text{س} - ٢)\cancel{(\text{س} + ٢)}}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٣} \int \frac{(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٢)}\, \text{ءس}$$

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{س} - ٥ & \text{س} - ٢ \\ \text{س} - ٢ & \\ \hline -٣ & \end{array}$$

$$= \frac{١}{٣} \int ١ - \frac{٣}{\text{س} - ٢}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢| + \text{جـ}$$

٨) $\int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س} - ١}\, \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س} - ١}\, \text{ءس}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ & \\ \hline \text{س}^{٣} + \text{س} & \text{س} - ١ \\ \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} & \\ \hline ٢\text{س} & \\ ٢\text{س} - ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{٣} (\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢) + \frac{٢}{\text{س} - ١}\, \text{ءس}$$

$$= \left[\left(\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right)\right]_{٢}^{٣} + ٢\left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١|\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{١}{٣}(٣^{٣} - ٢^{٣}) + \frac{١}{٢}(٣^{٢} - ٢^{٢}) + ٢(٣ - ٢)$$

$$+ ٢\left(\text{لو}_{\text{هـ}} |٣ - ١| - \cancel{\text{لو}_{\text{هـ}} |٢ - ١|}\right)$$

$$= \frac{١٩}{٣} + \frac{٥}{٢} + ٢ + ٢\text{لو}_{\text{هـ}} |٢|$$

$$= \frac{٣٨}{٦} + \frac{١٥}{٦} + \frac{١٢}{٦} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}} |٢|$$

$$= \frac{٦٥}{٦} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}} ٢$$

٩) $\int_{٠}^{١} \frac{\text{٣س}^{٢}+٢}{\text{٣س}^{٢}-\text{س}-٤}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{٣س}^{٢}+٢ & \text{٣س}^{٢}-\text{س}-٤ \\ -\;(\text{٣س}^{٢}-\text{س}-٤) & \\ \hline \text{س}+٦ & \end{array}$$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{١} ١+\frac{\text{س}+٦}{\text{٣س}^{٢}-\text{س}-٤}\,\text{دس}$$

$$\frac{\text{س}+٦}{\text{٣س}^{٢}-\text{س}-٤}=\frac{\text{س}+٦}{(\text{٣س}-٤)(\text{س}+١)}$$

$$\frac{\text{س}+٦}{(\text{٣س}-٤)(\text{س}+١)}=\frac{\text{أ}}{\text{٣س}-٤}+\frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$$

$$\frac{\text{س}+٦}{(\text{٣س}-٤)(\text{س}+١)}=\frac{\text{أ}(\text{س}+١)+\text{ب}(\text{٣س}-٤)}{(\text{٣س}-٤)(\text{س}+١)}$$

$$\Leftarrow \text{س}+٦=\text{أ}(\text{س}+١)+\text{ب}(\text{٣س}-٤)$$

$$\text{س}=-١ \Leftarrow \text{ب}=\frac{-٥}{٧}$$

$$\text{س}=\frac{٤}{٣} \Leftarrow \text{أ}=\frac{٢٢}{٧}$$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{١} ١+\frac{\frac{٢٢}{٧}}{\text{٣س}-٤}+\frac{\frac{-٥}{٧}}{\text{س}+١}\,\text{دس}$$

$$=[\text{س}]_{٠}^{١}+\frac{٢٢}{٢١}\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٣س}-٤|\Big]_{٠}^{١}-\frac{٥}{٧}\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١|\Big]_{٠}^{١}$$

$$=١+\frac{٢٢}{٢١}\left(٠-\text{لو}_{\text{هـ}}٤\right)-\frac{٥}{٧}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}٢-٠\right)$$

$$=١-\frac{٢٢}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}٤-\frac{٥}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}٢$$

$$=١-\frac{٤٤}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}٢-\frac{١٥}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}٢=١-\frac{٢٣}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}٢$$

مثال(٤): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{٢}{\text{س}-٣\sqrt{\text{س}}-٤}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص}=\sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٢}=\text{س}$$

$$\text{٢ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=١ \Leftarrow \text{دس}=\text{٢ص دص}$$

$$\Leftarrow \int \frac{٢}{\text{ص}^{٢}-\text{٣ص}-٤}\times\text{٢ص دص}$$

$$=\int \frac{\text{٤ص}}{\text{ص}^{٢}-\text{٣ص}-٤}\,\text{دص}$$

$$\frac{\text{٤ص}}{\text{ص}^{٢}-\text{٣ص}-٤}=\frac{\text{٤ص}}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+١)}$$

$$\frac{\text{٤ص}}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+١)}=\frac{\text{أ}}{\text{ص}-٤}+\frac{\text{ب}}{\text{ص}+١}$$

$$\frac{\text{٤ص}}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+١)}=\frac{\text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب}(\text{ص}-٤)}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+١)}$$

$$\Leftarrow \text{٤ص}=\text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب}(\text{ص}-٤)$$

$$\text{ص}=-١ \Leftarrow \text{ب}=\frac{٤}{٥}$$

$$\text{ص}=٤ \Leftarrow \text{أ}=\frac{١٦}{٥}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\frac{١٦}{٥}}{(\text{ص}-٤)}+\frac{\frac{٤}{٥}}{(\text{ص}+١)}\,\text{دص}$$

$$=\frac{١٦}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٤|+\frac{٤}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١|+\text{جـ}$$

$$=\frac{١٦}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}-٤|+\frac{٤}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}+١|+\text{جـ}$$

سؤال وزاري: جد $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س} - \sqrt{\text{س}+٢}}$

الحل:

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+٢} \Leftarrow \text{ص}^{٢} - ٢ = \text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+٢}} \Leftarrow \text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{(\text{ص}^{٢}-٢)-\text{ص}}\ ٢\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢}-\text{ص}-٢}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}}{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٢)}\ \text{ءص}$$

$$\frac{٢\text{ص}}{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}+١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-٢}$$

$$\frac{٢\text{ص}}{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٢)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}-٢)+\text{ب}(\text{ص}+١)}{(\text{ص}+١)(\text{ص}-٢)}$$

$$\Leftarrow ٢\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}-٢)+\text{ب}(\text{ص}+١)$$

$$\text{ص} = ٢ \Leftarrow \text{ب} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{ص} = -١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{٢}{٣}$$

$$\Leftarrow \int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢}-\text{ص}-٢}\ \text{ءص} = \int \frac{\frac{٢}{٣}}{\text{ص}+١} + \frac{\frac{٤}{٣}}{\text{ص}-٢}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{٢}{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}+١| + \frac{٤}{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}-٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}+٢}+١|$$

$$+ \frac{٤}{٣}\ \text{لـو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}+٢}-٢| + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{٨\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ١٦}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{٨\cancel{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢}-١٦} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ص}}} = \int \frac{٨}{\text{ص}^{٢}-١٦}\ \text{ءص}$$

$$\frac{٨}{\text{ص}^{٢}-١٦} = \frac{٨}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+٤)}$$

$$\frac{٨}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+٤)} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص}-٤)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}+٤)}$$

$$\frac{٨}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+٤)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+٤)+\text{ب}(\text{ص}-٤)}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+٤)}$$

$$\Leftarrow ٨ = \text{أ}(\text{ص}+٤)+\text{ب}(\text{ص}-٤)$$

$$\text{ص} = -٤ \Leftarrow ٨ = \cancel{\text{أ}(-٤+٤)} + \text{ب}(-٤-٤)$$

$$٨ = -٨\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -١$$

$$\text{ص} = ٤ \Leftarrow ٨ = \text{أ}(٤+٤) + \cancel{\text{ب}(٤-٤)}$$

$$٨ = ٨\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = ١$$

$$\Leftarrow \int \frac{٨}{\text{ص}^{٢}-١٦}\ \text{ءص} = \int \frac{١}{(\text{ص}-٤)} + \frac{-١}{(\text{ص}+٤)}\ \text{ءص}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}-٤| - \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}+٤| + \text{جـ}$$

$$= \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}}-٤| - \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}}+٤| + \text{جـ}$$

سؤال وزاري: جد $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{٢هـ}^{\text{٢س}} - \text{٥هـ}^{\text{س}} + ٢}\, \text{دس}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{ص}}}{\text{٢ص}^٢ - \text{٥ص} + ٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{ص}}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{(\text{٢ص} - ١)(\text{ص} - ٢)}\, \text{دص}$$

$$\frac{١}{(\text{٢ص} - ١)(\text{ص} - ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{٢ص} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ٢}$$

$$\frac{١}{(\text{٢ص} - ١)(\text{ص} - ٢)} = \frac{\text{أ}(\text{ص} - ٢) + \text{ب}(\text{٢ص} - ١)}{(\text{٢ص} - ١)(\text{ص} - ٢)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص} - ٢) + \text{ب}(\text{٢ص} - ١)$$

$$\text{ص} = ٢ \Leftarrow ١ = \cancel{\text{أ}(٢ - ٢)} + \text{ب}(٢(٢) - ١)$$

$$١ = \text{٣ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ١ = \text{أ}\left(\frac{١}{٢} - ٢\right) + \cancel{\text{ب}\left(٢\left(\frac{١}{٢}\right) - ١\right)}$$

$$١ = \frac{-٣}{٢}\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-٢}{٣}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\frac{-٢}{٣}}{\text{٢ص} - ١} + \frac{\frac{١}{٣}}{\text{ص} - ٢}\, \text{دص}$$

$$= \frac{-١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢ص} - ١| + \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٢| - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٢هـ}^{\text{س}} - ١| + \text{جـ}$$

٣) $\int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{٥ظا}^٢\text{س} - \text{٣ظاس} - ٢}\, \text{دس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{قا}^٢\text{س}}}{\text{٥ص}^٢ - \text{٣ص} - ٢} \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^٢\text{س}}}$$

$$= \int \frac{١}{\text{٥ص}^٢ - \text{٣ص} - ٢}\, \text{دص}$$

$$\text{٥ص}^٢ - \text{٣ص} - ٢ = (\text{ص} - ١)(\text{٥ص} + ٢)$$

$$\frac{١}{\text{٥ص}^٢ - \text{٣ص} - ٢} = \frac{١}{(\text{ص} - ١)(\text{٥ص} + ٢)}$$

$$\frac{١}{(\text{ص} - ١)(\text{٥ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص} - ١)} + \frac{\text{ب}}{(\text{٥ص} + ٢)}$$

$$\frac{١}{(\text{ص} - ١)(\text{٥ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}(\text{٥ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ١)}{(\text{ص} - ١)(\text{٥ص} + ٢)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{٥ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ١)$$

$$\text{ص} = \frac{-٢}{٥} \Leftarrow \text{ب} = \frac{-٥}{٧}$$

$$\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٧}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{\text{٥ص}^٢ - \text{٣ص} - ٢}\, \text{دص}$$

$$= \int \frac{\frac{١}{٧}}{(\text{ص} - ١)} + \frac{\frac{-٥}{٧}}{(\text{٥ص} + ٢)}\, \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ١| - \frac{٥}{٧ \times ٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٥ص} + ٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظاس} - ١| - \frac{١}{٧} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{٥ظاس} + ٢| + \text{جـ}$$

٤) $\displaystyle\int \frac{\text{ظاس}}{25-\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}\right)^2}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{ظاس}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{ظاس}}}{25-\text{ص}^2}\,\frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{ظاس}}}$$

$$= -\int \frac{1}{25-\text{ص}^2}\,\text{ءص} = \int \frac{1}{\text{ص}^2-25}\,\text{ءص}$$

$$\frac{1}{\text{ص}^2-25} = \frac{1}{(\text{ص}-5)(\text{ص}+5)}$$

$$\frac{1}{(\text{ص}-5)(\text{ص}+5)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-5} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+5}$$

$$\Leftarrow 1 = \text{أ}(\text{ص}+5) + \text{ب}(\text{ص}-5)$$

$$\text{ص} = -5 \Leftarrow \text{ب} = \frac{-1}{10}$$

$$\text{ص} = 5 \Leftarrow \text{أ} = \frac{1}{10}$$

$$\Leftarrow \int \frac{1}{\text{ص}^2-25}\,\text{ءص} = \int \frac{\frac{1}{10}}{\text{ص}-5}\,\text{ءص} + \int \frac{\frac{-1}{10}}{\text{ص}+5}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{1}{10}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-5| - \frac{1}{10}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+5| + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{10}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}-5|$$

$$-\frac{1}{10}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}+5| + \text{جـ}$$

٥) $\displaystyle\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-\text{قا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-(\text{ظا}^2\text{س}+1)}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{4-\text{ظا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}{4-\text{ص}^2}\,\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}} = \int \frac{1}{4-\text{ص}^2}\,\text{ءص}$$

$$\frac{1}{4-\text{ص}^2} = \frac{1}{(2+\text{ص})(2-\text{ص})}$$

$$\frac{1}{(2+\text{ص})(2-\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{(2+\text{ص})} + \frac{\text{ب}}{(2-\text{ص})}$$

$$\frac{1}{(2+\text{ص})(2-\text{ص})} = \frac{\text{أ}(2-\text{ص}) + \text{ب}(2+\text{ص})}{(2+\text{ص})(2-\text{ص})}$$

$$\Leftarrow 1 = \text{أ}(2-\text{ص}) + \text{ب}(2+\text{ص})$$

$$\text{ص} = 2 \Leftarrow 1 = \cancel{\text{أ}(2-2)} + \text{ب}(2+2)$$

$$1 = 4\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ص} = -2 \Leftarrow 1 = \text{أ}(2--2) + \cancel{\text{ب}(-2+2)}$$

$$1 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftarrow \int \frac{1}{4-\text{ص}^2}\,\text{ءص} = \int \frac{\frac{1}{4}}{2+\text{ص}}\,\text{ءص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{2-\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ص}| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ظاس}| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ظاس}| + \text{جـ}$$

٦) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٨+\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٨+(١-\text{جا}^{٢}\text{س})}\,\text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٩-\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{جاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = \text{جا}(٠) = ٠$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow \text{ص} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ١$$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{١} \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{٩-\text{ص}^{٢}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}} = \int_{٠}^{١} \frac{١}{٩-\text{ص}^{٢}}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{٩-\text{ص}^{٢}} = \frac{١}{(٣-\text{ص})(٣+\text{ص})}$$

$$\frac{١}{(٣-\text{ص})(٣+\text{ص})} = \frac{\text{ا}}{٣-\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{٣+\text{ص}}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{ا}(٣+\text{ص}) + \text{ب}(٣-\text{ص})$$

$$\text{ص} = -٣ \Leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٦}$$

$$\text{ص} = ٣ \Leftarrow \text{ا} = \frac{١}{٦}$$

$$\int_{٠}^{١} \frac{١}{٩-\text{ص}^{٢}}\,\text{ءص} = \int_{٠}^{١} \frac{\frac{١}{٦}}{٣-\text{ص}} + \frac{\frac{١}{٦}}{٣+\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{-١}{٦}\text{لو}_{\text{ه}}|٣-\text{ص}|\Big]_{٠}^{١} + \frac{١}{٦}\text{لو}_{\text{ه}}|٣+\text{ص}|\Big]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١}{٦}\text{لو}_{\text{ه}}|٢|$$

٧) $\int \frac{١}{\text{ه}^{\text{س}}+١}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ص} = \text{ه}^{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ه}^{\text{س}}$$

$$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ه}^{\text{س}}} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}+١} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ص}} = \int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)} = \frac{\text{ا}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+١}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)} = \frac{\text{ا}(\text{ص}+١)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}+١)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{ا}(\text{ص}+١) + \text{ب ص}$$

$$\text{ص} = -١ \Leftarrow ١ = \cancel{\text{ا}(-١+١)} + \text{ب}(-١)$$

$$١ = -\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -١$$

$$\text{ص} = ٠ \Leftarrow ١ = \text{ا}(٠+١) + \cancel{\text{ب}(٠)} \Leftarrow \text{ا} = ١$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)}\,\text{ءص} = \int \frac{١}{\text{ص}} + \frac{-١}{\text{ص}+١}\,\text{ءص}$$

$$= \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}| - \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}+١| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ه}^{\text{س}}| - \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ه}^{\text{س}}+١| + \text{جـ}$$

ويمكن حلها بالضرب التكامل $\left(\frac{\text{ه}^{-\text{س}}}{\text{ه}^{-\text{س}}}\right)$

٨) $\displaystyle\int \frac{1}{\text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{2}-4\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\text{ص}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{1}{\text{س}} \Leftarrow \text{ءس}=\text{س}\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \displaystyle\int \frac{1}{\cancel{\text{س}}\left(\text{ص}^{2}-4\right)}\times \cancel{\text{س}}\,\text{ءص}$

$=\displaystyle\int \frac{1}{\text{ص}^{2}-4}\,\text{ءص}$

$\dfrac{1}{\text{ص}^{2}-4}=\dfrac{1}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}$

$\dfrac{1}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}=\dfrac{\text{أ}}{\text{ص}-2}+\dfrac{\text{ب}}{\text{س}+2}$

$\dfrac{1}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}=\dfrac{\text{أ}(\text{ص}+2)+\text{ب}(\text{ص}-2)}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}$

$\Leftarrow\ 1=\text{أ}(\text{ص}+2)+\text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{ص}=-2 \Leftarrow 1=\cancel{\text{أ}(-2+2)}+\text{ب}(-2-2)$

$1=-4\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\dfrac{-1}{4}$

$\text{ص}=2 \Leftarrow 1=\text{أ}(2+2)+\cancel{\text{ب}(2-2)}$

$1=4\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\dfrac{1}{4}$

$=\displaystyle\int \frac{1}{\text{ص}^{2}-4}\,\text{ءص}=\int \frac{\frac{1}{4}}{\text{ص}-2}+\frac{\frac{-1}{4}}{\text{ص}+2}\,\text{ءص}$

$\frac{1}{4}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2|-\frac{1}{4}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2|+\text{جـ}$

$\frac{1}{4}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}-2|-\frac{1}{4}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}+2|+\text{جـ}$

سؤال وزاري:

جد $\displaystyle\int_{1}^{\text{هـ}} \frac{2}{\text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}-2\right)\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}+1\right)}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{ص}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{1}{\text{س}} \Leftarrow \text{ءس}=\text{س}\,\text{ءص}$

$\text{س}=1 \Leftarrow \text{ص}=\text{لـو}_{\text{هـ}}1=0$

$\text{س}=\text{هـ} \Leftarrow \text{ص}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}=1$

$\Leftarrow \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2}{\cancel{\text{س}}(\text{ص}-2)(\text{ص}+1)}\times \cancel{\text{س}}\,\text{ءص}$

$=\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+1)}\,\text{ءص}$

$\dfrac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+1)}=\dfrac{\text{أ}(\text{ص}+1)+\text{ب}(\text{ص}-2)}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+1)}$

$\Leftarrow\ 2=\text{أ}(\text{ص}+1)+\text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{ص}=-1 \Leftarrow \text{ب}=\dfrac{-2}{3}$

$\text{ص}=2 \Leftarrow \text{أ}=\dfrac{2}{3}$

$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+1)}\,\text{ءص}=\int_{0}^{1} \frac{\frac{2}{3}}{\text{ص}-2}+\frac{\frac{-2}{3}}{\text{ص}+1}\,\text{ءص}$

$=\frac{2}{3}\left[\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2|\right]_{0}^{1}+\frac{-2}{3}\left[\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1|\right]_{0}^{1}$

$=\frac{2}{3}\left(\cancel{\text{لـو}_{\text{هـ}}|-1|}-\text{لـو}_{\text{هـ}}|-2|\right)$

$+\frac{-2}{3}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}|2|-\cancel{\text{لـو}_{\text{هـ}}|1|}\right)$

$=\frac{-4}{3}\text{لـو}_{\text{هـ}}2$

مثال(٥): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-١}{\sqrt[3]{\text{س}^{٢}}-٤}\,\text{ءس}$

الحل:

$\text{ص}=\sqrt[3]{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٣}=\text{س}$

$٣\text{ص}^{٢}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=١ \Leftarrow \text{ءس}=٣\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}$

$\int \frac{\text{ص}-١}{\text{ص}^{٢}-٤}\times ٣\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}=٣\int \frac{\text{ص}^{٣}-\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}-٤}\,\text{ءص}$

$$\begin{array}{r|l} & \text{ص}-١ \\ \hline \text{ص}^{٢}-٤ & \text{ص}^{٣}-\text{ص}^{٢} \\ & \text{ص}^{٣}-٤\text{ص} \\ \hline & -\text{ص}^{٢}+٤\text{ص} \\ & -\text{ص}^{٢}+٤ \\ \hline & ٤\text{ص}-٤ \end{array}$$

$\Leftarrow ٣\int (\text{ص}-١)+\frac{٤\text{ص}-٤}{\text{ص}^{٢}-٤}\,\text{ءص}$

$\frac{٤\text{ص}-٤}{(\text{ص}+٢)(\text{ص}-٢)}=\frac{\text{أ}(\text{ص}-٢)+\text{ب}(\text{ص}+٢)}{(\text{ص}-٢)(\text{ص}+٢)}$

$\Leftarrow ٤\text{ص}-٤=\text{أ}(\text{ص}-٢)+\text{ب}(\text{ص}+٢)$

$\text{ص}=٢ \Leftarrow \text{ب}=١$

$\text{ص}=-٢ \Leftarrow \text{أ}=٣$

$=٣\int (\text{ص}-١)+\frac{٣}{(\text{ص}+٢)}+\frac{١}{(\text{ص}-٢)}\,\text{ءص}$

$=٣\left(\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢}-\text{ص}+٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+٢|+\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٢|\right)+\text{جـ}$

$=\frac{٣}{٢}\sqrt[3]{\text{س}^{٢}}-٣\sqrt[3]{\text{س}}+٩\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt[3]{\text{س}}+٢\right|+٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt[3]{\text{س}}-٢\right|+\text{جـ}$

٢) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}-٣\text{هـ}^{\text{س}}-٤}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \Leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}^{\cancel{٣}\,٢}}{\text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤}\times\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ص}}}$

$=\int \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤}\,\text{ءص}$

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline \text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤ & \text{ص}^{٢} \\ & \text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤ \\ \hline & ٣\text{ص}+٤ \end{array}$$

$\Leftarrow \int ١+\frac{٣\text{ص}+٤}{\text{ص}^{٢}-٣\text{ص}-٤}\,\text{ءص}$

$\frac{٣\text{ص}+٤}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+١)}=\frac{\text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب}(\text{ص}-٤)}{(\text{ص}-٤)(\text{ص}+١)}$

$\Leftarrow ٣\text{ص}+٤=\text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب}(\text{ص}-٤)$

$\text{ص}=-١ \Leftarrow \text{ب}=\frac{-١}{٥}$

$\text{ص}=٤ \Leftarrow \text{أ}=\frac{١٦}{٥}$

$\Leftarrow \int ١+\frac{\frac{١٦}{٥}}{\text{ص}-٤}+\frac{\frac{-١}{٥}}{\text{ص}+١}\,\text{ءص}$

$=\text{ص}+\frac{١٦}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٤|-\frac{١}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١|+\text{جـ}$

$=\text{هـ}^{\text{س}}+\frac{١٦}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-٤|$

$-\frac{١}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١|+\text{جـ}$

٣) $\int \sqrt{١-هـ^{س}}\, ءس$ (كتاب)

الحل:

$ص = \sqrt{١-هـ^{س}} \Leftarrow ص^{٢} = ١-هـ^{س}$

$هـ^{س} = ١-ص^{٢}$

$٢ص\frac{ءص}{ءس} = -هـ^{س} \Leftarrow ءس = \frac{-٢ص}{هـ^{س}}ءص$

$\Leftarrow ءس = \frac{-٢ص}{١-ص^{٢}}ءص$

$\int ص \times \frac{-٢ص}{١-ص^{٢}}ءص = ٢\int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢}-١}ءص$

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline ص^{٢}-١ & ص^{٢} \\ & -\;ص^{٢}-١ \\ \hline & ١ \end{array}$$

$\Leftarrow ٢\int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢}-١}ءص = ٢\int ١+\frac{١}{ص^{٢}-١}ءص$

$\frac{١}{(ص-١)(ص+١)} = \frac{أ(ص+١)+ب(ص-١)}{(ص-١)(ص+١)}$

$\Leftarrow ١ = أ(ص+١)+ب(ص-١)$

$ص = -١ \Leftarrow ب = \frac{-١}{٢}$

$ص = ١ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow ٢\int ١+\frac{١}{ص^{٢}-١}ءص$

$= ٢\int ١+\frac{\frac{١}{٢}}{ص-١}+\frac{\frac{-١}{٢}}{ص+١}ءص$

$= ٢\left(ص+\frac{١}{٢}لو_{هـ}|ص-١|-\frac{١}{٢}لو_{هـ}|ص+١|\right)+جـ$

$= ٢ص+لو_{هـ}|ص-١|-لو_{هـ}|ص+١|+جـ$

$= ٢\sqrt{١-هـ^{س}}+لو_{هـ}\left|\sqrt{١-هـ^{س}}-١\right|$

$= -لو_{هـ}\left|\sqrt{١-هـ^{س}}+١\right|+جـ$

٤) $\int \frac{ءس}{\sqrt[٣]{س^{٢}}-\sqrt[٣]{س}-٢}$

الحل:

$ص = \sqrt[٣]{س} \Leftarrow ص^{٢} = \sqrt[٣]{س^{٢}} \Leftarrow ص = س^{\frac{١}{٣}}$

$ءص = \frac{١}{٣}س^{\frac{-٢}{٣}}ءس \Leftarrow ءس = ٣س^{\frac{٢}{٣}}ءص$

$ءس = ٣ص^{٢}ءص$

$\Leftarrow \int \frac{٣ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}ءص$

$$\begin{array}{r|l} & ٣ \\ \hline ص^{٢}-ص-٢ & ٣ص^{٢} \\ & -\;٣س^{٢}-٣ص-٦ \\ \hline & ٣ص+٦ \end{array}$$

$\int\left(٣+\frac{٣ص+٦}{(ص-٢)(ص+١)}\right)ءص$

$\frac{٣ص+٦}{(ص-٢)(ص+١)} = \frac{أ}{ص-٢}+\frac{ب}{ص+١}$

$\frac{٣ص+٦}{(ص-٢)(ص+١)} = \frac{أ(ص+١)+ب(ص-٢)}{(ص-٢)(ص+١)}$

$\Leftarrow ٣ص+٦ = أ(ص+١)+ب(ص-٢)$

$ص = -١ \Leftarrow ب = -١$

$ص = ٢ \Leftarrow أ = ٤$

$\int\left(٣+\frac{٤}{ص-٢}-\frac{-١}{ص+١}\right)ءص$

$= ٣ص+٤لو_{هـ}|ص-٢|-لو_{هـ}|ص+١|+جـ$

$= ٣\sqrt[٣]{س}+٤لو_{هـ}\left|\sqrt[٣]{س}-٢\right|-لو_{هـ}\left|\sqrt[٣]{س}+١\right|+جـ$

٥) $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{\text{س}+1}-1}{\sqrt{\text{س}+1}+1}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+1} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\text{ص}} \Leftarrow \text{ءس} = 2\text{ص}\,\text{ءص}$

$\Leftarrow \text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{0+1} = 1$

$\Leftarrow \text{س} = 3 \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{3+1} = 2$

$\Leftarrow \int_{1}^{2} \frac{\text{ص}-1}{\text{ص}+1} \times 2\text{ص}\,\text{ءص} = 2\int_{1}^{2} \frac{\text{ص}^2-\text{ص}}{\text{ص}+1}\,\text{ءص}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \text{ص}-2 \\
\hline
\text{ص}+1 & \text{ص}^2-\text{ص} \\
 & -(\text{ص}^2+\text{ص}) \\
\hline
 & -2\text{ص} \\
 & -(-2\text{ص}-2) \\
\hline
 & 2
\end{array}
$$

$\Leftarrow 2\int_{1}^{2} (\text{ص}-2) + \frac{2}{\text{ص}+1}\,\text{ءص}$

$= 2\left(\left[\frac{1}{2}\text{ص}^2 - 2\text{ص}\right]_{1}^{2} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1|\Big]_{1}^{2}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2}(2^2-1^2) - 2(2-1)\right)$

$+ 4\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|2+1| - \text{لو}_{\text{هـ}}|1+1|\right)$

$= 2\left(\frac{3}{2}-2\right) + 4\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|3| - \text{لو}_{\text{هـ}}|2|\right)$

$= -1 + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3| - 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2|$

٦) $\int_{9}^{16} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-4}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{س}$

$\Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

$\text{ءس} = 2\sqrt{\text{س}}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = 2\text{ص}\,\text{ءص}$

$\text{س} = 9 \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{9} = 3$

$\text{س} = 16 \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{16} = 4$

$\Leftarrow \int_{3}^{4} \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2-4} \times 2\text{ص}\,\text{ءص} = \int_{3}^{4} \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2-4}\,\text{ءص}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2 \\
\hline
\text{ص}^2-4 & 2\text{ص}^2 \\
 & -(2\text{ص}^2-8) \\
\hline
 & 8
\end{array}
$$

$\int_{3}^{4} 2 + \frac{8}{\text{ص}^2-4}\,\text{ءص}$

$\frac{8}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+2)+\text{ب}(\text{ص}-2)}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)}$

$\Leftarrow 8 = \text{أ}(\text{ص}+2)+\text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{ص} = -2 \Leftarrow \text{ب} = -2$

$\text{ص} = 2 \Leftarrow \text{أ} = 2$

$\Leftarrow \int_{3}^{4} 2 + \frac{2}{\text{ص}-2} + \frac{-2}{\text{ص}+2}\,\text{ءص}$

$= 2(4-3) + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2|\Big]_{3}^{4}$

$-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2|\Big]_{3}^{4}$

$= 2 + 2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|2| - 0\right) - 2\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|6| - \text{لو}_{\text{هـ}}|5|\right)$

$= 2 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2| - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|6| + \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|5|$

مثال(٦): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}+\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\text{س}^{\cancel{٢}}\left(\text{س}^{٢}+١\right)}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{١}{\text{س}\left(\text{س}^{٢}+١\right)}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \Leftarrow \text{س}^{٢} = \text{ص}-١$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{\text{س}\times\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{س}^{٢}\,\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int \frac{١}{(\text{ص}-١)\,\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}^{٢}-\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-١}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-١)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}-١)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}-١)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص}-١)+\text{ب ص}$$

$$\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{ب} = ١$$

$$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = -١$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}^{٢}-\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢}\int \frac{-١}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ص}-١}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١|\right)$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+١| + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}|$$

حل اخر:

$\int \frac{\text{ثابت}}{\text{س}^{ن}\pm\text{س}}\,\text{ءس}$ نأخذ $\text{س}^{ن}$ عامل مشترك

ليصبح البسط مشتقة المقام ثم تعويض

$$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}+\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\text{س}^{\cancel{٤}\,٣}\left(١+\text{س}^{-٢}\right)}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{١}{\text{س}^{٣}\left(١+\text{س}^{-٢}\right)}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{-٣}}{\left(١+\text{س}^{-٢}\right)}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = ١+\text{س}^{-٢} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-٢\text{س}^{-٣}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}^{-٣}}}{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{-٢\cancel{\text{س}^{-٣}}} = \frac{-١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \frac{-١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{س}^{-٢}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\left|١+\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right| + \text{جـ}$$

حل اخر:

$$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}+\text{س}^{٢}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{س}}{\left(\text{س}^{٢}\right)^{٢}+\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}+١)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب ص}$$

$$\text{ص} = -١ \Leftarrow \text{ب} = -١$$

$$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ١$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}^{٢}+\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص}} + \frac{-١}{\text{ص}+١}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١|\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}| - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+١| + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{٢\text{س}^{٤} + \text{س}^{٨}} \, \text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \frac{\cancel{\text{س}^{٣}}}{\text{س}^{\cancel{٨}\,٥}\left(٢\text{س}^{-٤}+١\right)} \, \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{س}^{-٥}}{١+٢\text{س}^{-٤}} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = ١+٢\text{س}^{-٤} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٨\text{س}^{-٥}$$

$$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-٨\text{س}^{-٥}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}^{-٥}}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{-٨\cancel{\text{س}^{-٥}}} = \frac{-١}{٨} \int \frac{١}{\text{ص}} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{-١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ} = \frac{-١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |١+٢\text{س}^{-٤}| + \text{جـ}$$

حل اخر:

$$\int \frac{\cancel{\text{س}^{٣}}}{\text{س}^{\cancel{٤}}\left(٢+\text{س}^{٤}\right)} \, \text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}\left(٢+\text{س}^{٤}\right)} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٤}+٢ \Leftarrow \text{س}^{٤} = \text{ص}-٢$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٣} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٤\text{س}^{٣}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{\text{س}\times\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{٤\text{س}^{٣}} = \frac{١}{٤} \int \frac{١}{\text{س}^{٤}\times\text{ص}} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٤} \int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-٢)} \, \text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-٢)} = \frac{\text{أص}+\text{ب}(\text{ص}-٢)}{\text{ص}(\text{ص}-٢)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أص}+\text{ب}(\text{ص}-٢)$$

$$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$$

$$\text{ص} = ٢ \Leftarrow\Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٤} \int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص}-٢)} \, \text{ءص} = \frac{١}{٤} \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص}-٢} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{ص}} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}-٢| - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}|\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٤}| - \frac{١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٤}+٢| + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} \left|\frac{\text{س}^{٤}+٢}{\text{س}^{٤}}\right| + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |١+٢\text{س}^{-٤}| + \text{جـ}$$

حل اخر:

$$\int \frac{\text{س}^{٣}}{٢\text{س}^{٤}+\text{س}^{٨}} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{٣}}{٢\text{س}^{٤}+\left(\text{س}^{٤}\right)^{٢}} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٤} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٣} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٤\text{س}^{٣}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}^{٣}}}{\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{٤\cancel{\text{س}^{٣}}}$$

$$= \frac{١}{٤} \int \frac{١}{\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}} \, \text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+٢)} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+٢)+\text{ب ص}}{\text{ص}(\text{ص}+٢)}$$

$$\Leftarrow ١ = \text{أ}(\text{ص}+٢)+\text{ب ص}$$

$$\text{ص} = -٢ \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$$

$$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٤} \int \frac{١}{\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}} \, \text{ءص} = \frac{١}{٤} \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص}} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{ص}+٢} \, \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \frac{-١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}+٢| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٤}| + \frac{-١}{٨} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٤}+٢| + \text{جـ}$$

مثال(٧): جد التكاملات الاتية ؟؟؟

١) $\int \frac{\text{جتاس}}{1+3\text{جاس}-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$= \int \frac{\text{جتاس}}{1+3\text{جاس}-\left(1-2\text{جا}^2\text{س}\right)}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{جتاس}}{\cancel{1}+3\text{جاس}+\cancel{1}+2\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{جتاس}}{3\text{جاس}+2\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص}=\text{جاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس}=\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{3\text{ص}+2\text{ص}^2}\times\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \int \frac{1}{\text{ص}(2\text{ص}+3)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{1}{\text{ص}(3+2\text{ص})}=\frac{\text{أ}(2\text{ص}+3)+\text{ب}\text{ص}}{\text{ص}(2\text{ص}+3)}$$

$$\Leftarrow 1=\text{أ}(2\text{ص}+3)+\text{ب}\text{ص}$$

$$\text{ص}=\frac{-3}{2} \Leftarrow \text{ب}=\frac{-2}{3}$$

$$\text{ص}=0 \Leftarrow \text{أ}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftarrow \int \frac{1}{\text{ص}(3+2\text{ص})}\,\text{ءص}=\int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}}+\frac{\frac{-2}{3}}{2\text{ص}+3}\,\text{ءص}$$

$$=\frac{1}{3}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|-\frac{2}{3\times 2}\text{لـو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}+3|+\text{ج}$$

$$=\frac{1}{3}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}|-\frac{1}{3}\text{لـو}_{\text{هـ}}|2\text{جاس}+3|+\text{ج}$$

٢) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right)\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\text{ق}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right) \qquad \text{ءهـ}=\text{ءس}$$

$$\text{ءق}=\frac{2\text{س}}{\text{س}^2-9} \longrightarrow \text{هـ}=\text{س}$$

$$=\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right)-\int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-9}\,\text{ءس}$$

$$=\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right)-2\int \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2-9}\,\text{ءس}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline \text{س}^2-9 & \text{س}^2 \\ & -(\text{س}^2-9) \\ \hline & 9 \end{array}$$

$$\Leftarrow \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right)-2\int 1+\frac{9}{\text{س}^2-9}\,\text{ءس}$$

$$\frac{9}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}=\frac{\text{أ}(\text{س}+3)+\text{ب}(\text{س}-3)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}$$

$$\Leftarrow 9=\text{أ}(\text{س}+3)+\text{ب}(\text{س}-3)$$

$$\text{س}=-3 \Leftarrow \text{ب}=\frac{-3}{2}$$

$$\text{س}=3 \Leftarrow \text{أ}=\frac{3}{2}$$

$$=\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right)-2\int 1+\frac{\frac{3}{2}}{\text{س}-3}+\frac{\frac{-3}{2}}{\text{س}+3}\,\text{ءس}$$

$$=\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^2-9\right)-2\text{س}-3\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}-3)$$

$$+3\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3)+\text{ج}$$

٣) $\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤\text{س}-٨}-٢}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل:

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤(\text{س}-٢)}-٢}\,\text{ءس} = \int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{٢\sqrt{\text{س}-٢}-٢}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{٢\left(\sqrt{\text{س}-٢}-١\right)}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}-٢} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}-٢}}$$

$$\text{ءس} = ٢\sqrt{\text{س}-٢}\,\text{ءص} \Leftarrow \text{ءس} = ٢\text{ص}\,\text{ءص}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢}\int \frac{\text{ص}+١}{\text{ص}-١} \times ٢\text{ص}\,\text{ءص} = \int \frac{\text{ص}^٢+\text{ص}}{\text{ص}-١}\,\text{ءص}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{ص}^٢+\text{ص} & \text{ص}-١ \\ \hline -(\text{ص}^٢-\text{ص}) & \text{ص}+٢ \\ ٢\text{ص} & \\ -(٢\text{ص}-٢) & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}^٢+\text{ص}}{\text{ص}-١}\,\text{ءص} = \int \text{ص}+٢+\frac{٢}{\text{ص}-١}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} + ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١| + \text{جـ}$$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}-٢}+١}{\sqrt{٤\text{س}-٨}-٢}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}(\text{س}-٢) + ٢\sqrt{\text{س}-٢}$$

$$+ ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{\text{س}-٢}-١\right| + \text{جـ}$$

٤) $\int \frac{\text{قتا}^٢\text{س}}{٢-\text{قتا}^٢\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل:

$$= \int \frac{\text{قتا}^٢\text{س}}{١+١-\text{قتا}^٢\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{قتا}^٢\text{س}}{١-(\text{ظتا}^٢\text{س})}\,\text{ءس}$$

$$\text{ص} = \text{ظتاس} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}^٢\text{س} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{قتا}^٢\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{قتا}^٢\text{س}}}{١-\text{ص}^٢} \times \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{قتا}^٢\text{س}}} = \int \frac{١}{\text{ص}^٢-١}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{\text{ص}^٢-١} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+١}$$

$$\frac{١}{\text{ص}^٢-١} = \frac{\text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب}(\text{ص}-١)}{(\text{ص}-١)(\text{ص}+١)}$$

$$\Leftarrow \quad ١ = \text{أ}(\text{ص}+١)+\text{ب}(\text{ص}-١)$$

$$\text{ص} = -١ \Leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٢}$$

$$\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow \int \frac{١}{\text{ص}^٢-١}\,\text{ءص} = \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص}-١} + \frac{\frac{-١}{٢}}{\text{ص}+١}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١| - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}-١| - \frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}+١| + \text{جـ}$$

سؤال وزاري: جد $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1)\,\text{دس}$

الحل:

$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) \qquad \text{دع} = \text{دس}$

$\text{دق} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^{2}-1}\,\text{دس} \longrightarrow \text{ع} = \text{س}$

$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \int \frac{2\text{س}^{2}}{\text{س}^{2}-1}\,\text{دس}$

٢

٢س² ÷ (س² − ١)

٢س² − ٢

٢

$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \int 2 + \frac{2}{\text{س}^{2}-1}\,\text{دس}$

$\frac{2}{\text{س}^{2}-1} = \frac{2}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)}$

$\frac{2}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+1} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-1}$

$\frac{2}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)} = \frac{\text{أ}(\text{س}-1)+\text{ب}(\text{س}+1)}{(\text{س}+1)(\text{س}-1)}$

$\Leftarrow 2 = \text{أ}(\text{س}-1)+\text{ب}(\text{س}+1)$

$\text{س} = 1 \Leftarrow 2 = \cancel{\text{أ}(1-1)} + \text{ب}(1+1)$

$2 = 2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = 1$

$\text{س} = -1 \Leftarrow 2 = \text{أ}(-1-1) + \cancel{\text{ب}(-1+1)}$

$2 = -2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -1$

$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - \int 2 + \frac{-1}{\text{س}+1} + \frac{1}{\text{س}-1}\,\text{دس}$

$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}-1) - 2\text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1|$

$+\,\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}$

الدرس التاسع: المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحوي مشتقات $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}} ، \frac{\text{دع}}{\text{دن}} ، \text{صَ} ، \text{قَ(س)} ، \text{قً(س)} \ldots\right)$ او تفاضلات $(\text{دص} ، \text{دس} ، \text{دع} ، \text{دن} \ldots)$

حل المعادلة التفاضلية :

استخدام التكامل للتخلص من التفاضلات او المشتقات أو ايجاد علاقة تربط بين متغيراتها لتحقق المعادلة التفاضلية.

خطوات الحل:

١) اجعل (دص) في طرف و (دس) في الطرف الاخر
٢) اجعل المتغير (ص) مع (دص) والمتغير س مع (دس)
٣) نكامل الطرفين
٤) نكتب العلاقة الناتجة بدلالة (ص)

طرق صياغة السؤال ؟؟؟

١) حل المعادلة التفاضلية
٢) جد العلاقة
٣) أكتب القاعدة(يجب ان نجعل (ص) موضوعا للقانون)

صور للمعادلة التفاضلية :

١) $\text{٢س صَ} + \text{٣ص} = ٠$

٢) $\text{صً} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

٣) $\text{دس} + \text{دص} = \text{س دص}$

مثال(١): حل المعادلات التفاضلية الاتية ؟؟؟

١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}$

الحل:

$$\text{دص} = \text{٣س}^{٢}\,\text{ص}^{٢}\,\text{دس}$$

$$\frac{١}{\text{ص}^{٢}}\,\text{دص} = \text{٣س}^{٢}\,\text{دس}$$

$$\int \text{ص}^{-٢}\,\text{دص} = \int \text{٣س}^{٢}\,\text{دس}$$

$$\frac{\text{ص}^{-١}}{-١} = \frac{\cancel{٣}\text{س}^{٣}}{\cancel{٣}} + \text{جـ}$$

$$\frac{-١}{\text{ص}} = \text{س}^{٣} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ص} = \frac{-١}{\text{س}^{٣} + \text{جـ}}$$

---

٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$$

$$\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$$

$$\left(\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}\right) \times \frac{٣}{٢}$$

$$\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} = \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ص} = \left(\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}\right)^{\frac{٢}{٣}}$$

$$\text{ص} = \sqrt[٣]{\left(\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}\right)^{٢}}$$

٣) $(س^٢ - ٣س)ءص = هـ^{-ص}(س^٢ + س - ١٢)ءس$

الحل:

$$\frac{ءص}{هـ^{-ص}} = \frac{(س^٢ + س - ١٢)}{(س^٢ - ٣س)}ءس$$

$$هـ^{ص}ءص = \frac{(س+٤)\cancel{(س-٣)}}{س\cancel{(س-٣)}}ءس$$

$$\int هـ^{ص}ءص = \int \frac{(س+٤)}{س}ءس$$

$$\int هـ^{ص}ءص = \int ١ + \frac{٤}{س}ءس$$

$$هـ^{ص} = س + ٤لـو_{هـ}|س| + جـ$$

$$لـو_{هـ}(هـ^{ص}) = لـو_{هـ}\left(س + ٤لـو_{هـ}|س| + جـ\right)$$

$$ص = لـو_{هـ}\left(س + ٤لـو_{هـ}|س| + جـ\right)$$

٤) $\frac{ءص}{ءس} = ١ - ص + س^٢ - صس^٢$

الحل:

$$\frac{ءص}{ءس} = ١ - ص + س^٢(١ - ص)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = (١ - ص)(١ + س^٢)$$

$$ءص = (١ - ص)(١ + س^٢)ءس$$

$$\int \frac{ءص}{١ - ص} = \int (١ + س^٢)ءس$$

$$-لـو_{هـ}|١ - ص| = س + \frac{١}{٣}س^٣ + جـ$$

$$لـو_{هـ}|١ - ص| = -س - \frac{١}{٣}س^٣ - جـ$$

$$|١ - ص| = هـ^{-س - \frac{١}{٣}س^٣ - جـ}$$

$$|١ - ص| = هـ^{-س - \frac{١}{٣}س^٣} \times هـ^{-جـ}$$

$|١ - ص| = أ \times هـ^{-س - \frac{١}{٣}س^٣}$ ؛حيث $أ = هـ^{-جـ}$

٥) $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt[٣]{هـ^{٦ص - ٣س}}$

الحل:

$$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt[٣]{هـ^{٣(٢ص - س)}}$$

$$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \left(هـ^{\cancel{٣}(٢ص - س)}\right)^{\cancel{\frac{١}{٣}}}$$

$$\Leftarrow ءص = هـ^{(٢ص - س)}ءس$$

$$\Leftarrow ءص = هـ^{٢ص} \times هـ^{-س}ءس$$

$$\Leftarrow \frac{١}{هـ^{٢ص}}ءص = هـ^{-س}ءس$$

$$\Leftarrow \int هـ^{-٢ص}ءص = \int هـ^{-س}ءس$$

$$\Leftarrow \left(\frac{هـ^{-٢ص}}{-٢} = \frac{هـ^{-س}}{-١} + جـ\right) \times -٢$$

$$\Leftarrow هـ^{-٢ص} = ٢هـ^{-س} - ٢جـ$$

$\Leftarrow هـ^{-٢ص} = ٢هـ^{-س} + جـ_{١}$ حيث $جـ_{١} = -٢جـ$

$$\Leftarrow -٢ص = لـو_{هـ}\left(٢هـ^{-س} + جـ_{١}\right)$$

$$\Leftarrow ص = \frac{لـو_{هـ}\left(٢هـ^{-س} + جـ_{١}\right)}{-٢}$$

٦) $\frac{دص}{دس} = \sqrt{سص - ٢ص + ٣س - ٦}$

حيث س > ٢ ، ص > -٣

الحل:

$$\frac{دص}{دس} = \sqrt{ص(س-٢)+٣(س-٢)}$$

$$\frac{دص}{دس} = \sqrt{(س-٢)(ص+٣)}$$

$$دص = \sqrt{(س-٢)} \times \sqrt{(ص+٣)}\ دس$$

$$\frac{١}{\sqrt{ص+٣}}\ دص = \sqrt{(س-٢)}\ دس$$

$$\int (ص+٣)^{-\frac{١}{٢}}\ دص = \int (س-٢)^{\frac{١}{٢}}\ دس$$

$$٢(ص+٣)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}(س-٢)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$٢\sqrt{ص+٣} = \frac{٢}{٣}\sqrt{(س-٢)^{٣}} + جـ$$

سؤال وزاري: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \sqrt[٣]{\frac{ص}{س}}$

الحل:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{\frac{١}{٣}}}{س^{\frac{١}{٣}}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{س^{-\frac{١}{٣}}}{ص^{-\frac{١}{٣}}}$$

$$\int ص^{-\frac{١}{٣}}\ دص = \int س^{-\frac{١}{٣}}\ دس$$

$$\frac{٣}{٢}ص^{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣}{٢}س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$$

$$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ص^{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{س^{٢}} + جـ$$

مثال(٢): حل المعادلات التفاضلية الاتية ؟؟؟

١) $هـ^{-ص}\ جاس - \frac{دص}{دس}\ جتا^{٢}س = ٠$ (كتاب)

الحل:

$$هـ^{-ص}\ جاس = \frac{دص}{دس}\ جتا^{٢}س$$

$$دص\ جتا^{٢}س = هـ^{-ص}\ جاس\ دس$$

$$\frac{١}{هـ^{-ص}}\ دص = \frac{١}{جتا^{٢}س} \times جاس\ دس$$

$$\int هـ^{ص}\ دص = \int قاس\ ظاس\ دس$$

$$هـ^{ص} = قاس + جـ \Leftarrow لو_{هـ}\ هـ^{ص} = لو_{هـ}(قاس+جـ)$$

$$ص = لو_{هـ}(قاس+جـ)$$

٢) $قا^{٢}\frac{س}{٢}\ دص - جا^{٢}\frac{س}{٢}\ دس = ٠$

الحل:

$$قا^{٢}\frac{س}{٢}\ دص = جا^{٢}\frac{س}{٢}\ دس$$

$$دص = \frac{١}{قا^{٢}\frac{س}{٢}} \times جا^{٢}\frac{س}{٢}\ دس$$

$$دص = جتا^{٢}\frac{س}{٢} \times جا^{٢}\frac{س}{٢}\ دس$$

$$\int دص = \int جتا^{٢}\frac{س}{٢}\ جا^{٢}\frac{س}{٢}\ دس$$

$$\Leftarrow جا٢س = ٢جاسجتاس$$

$$\frac{١}{٢}جاس = جا\frac{س}{٢}جتا\frac{س}{٢}$$

$$\frac{١}{٤}جا^{٢}س = جا^{٢}\frac{س}{٢}جتا^{٢}\frac{س}{٢}$$

$$\Leftarrow \int دص = \int \frac{١}{٤}جا^{٢}س\ دس$$

$$ص = \int \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}(١-جتا٢س)\ دس$$

$$ص = \frac{١}{٨}\left(س - \frac{١}{٢}جا٢س\right) + جـ$$

سؤال وزاري: حل المعادلة التفاضلية ؟؟؟

$$\text{جا}^2\text{س}\ \text{ءص} + \text{ص}\ \text{ءس} = \text{ءص}$$

الحل:

$$\text{جا}^2\text{س}\ \text{ءص} - \text{ءص} = -\text{ص}\ \text{ءس}$$

$$\text{ءص}\left(\text{جا}^2\text{س} - 1\right) = -\text{ص}\ \text{ءس}$$

$$\frac{\text{ءص}\left(\cancel{-\text{جتا}^2\text{س}}\right)}{\cancel{\text{جتا}^2\text{س}} \times \text{ص}} = \frac{\cancel{-\text{ص}}\ \text{ءس}}{\cancel{\text{ص}} \times \text{جتا}^2\text{س}}$$

$$\frac{1}{\text{ص}}\text{ءص} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\text{ءس}$$

$$\frac{1}{\text{ص}}\text{ءص} = \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس}$$

$$\int \frac{1}{\text{ص}}\text{ءص} = \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{ظاس} + \text{جـ}$$

$$\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|} = \text{هـ}^{\text{ظاس}+\text{جـ}}$$

$$|\text{ص}| = \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times \text{هـ}^{\text{جـ}}$$

$$|\text{ص}| = \text{أ} \times \text{هـ}^{\text{ظاس}} \quad \text{حيث} \quad \text{أ} = \text{هـ}^{\text{جـ}}$$

$$\text{ص} = \text{أ} \times \text{هـ}^{\text{ظاس}}$$

$$\text{أو} \quad \text{ص} = -\text{أ} \times \text{هـ}^{\text{ظاس}}$$

ميل المماس هو المشتقة $\Leftarrow$
- $\bar{\text{ق}}(\text{س}) \Leftarrow$ سلوحدها
- $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \Leftarrow$ ضمني

ميل المماس= $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$

مثال(٣): حل المعادلات التفاضلية الاتية ؟؟؟

١) $\text{ءص} + \text{ءس} = \text{ص}\ \text{ءس}$

الحل:

$$\text{ءص} = \text{ص}\ \text{ءس} - \text{ءس}$$

$$\text{ءص} = (\text{ص} - 1)\ \text{ءس}$$

$$\int \frac{1}{\text{ص} - 1} \times \text{ءص} = \int \text{ءس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - 1| = \text{س} + \text{جـ}$$

$$|\text{ص} - 1| = \text{هـ}^{\text{س}+\text{جـ}}$$

$$|\text{ص} - 1| = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{جـ}}$$

$$|\text{ص} - 1| = \text{أهـ}^{\text{س}} \quad \text{حيث} \quad \text{أ} = \text{هـ}^{\text{جـ}}$$

---

٢) $\text{ءس} - \text{ءص} = \text{جتا}^2\text{ص}\ \text{ءس} - \text{جا}^2\text{س}\ \text{ءص}$

الحل:

$$\text{جا}^2\text{س}\ \text{ءص} - \text{ءص} = \text{جتا}^2\text{ص}\ \text{ءس} - \text{ءس}$$

$$\left(\text{جا}^2\text{س} - 1\right)\text{ءص} = \left(\text{جتا}^2\text{ص} - 1\right)\text{ءس}$$

$$\cancel{-}\text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءص} = \cancel{-}\text{جا}^2\text{ص}\ \text{ءس}$$

$$\frac{1}{\text{جا}^2\text{ص}}\text{ءص} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\text{ءس}$$

$$\int \text{قتا}^2\text{ص}\ \text{ءص} = \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{ءس}$$

$$-\text{ظتاص} = \text{ظاس} + \text{جـ}$$

مثال(٤): جد قاعدة (ص) حيث

$$\sqrt{\text{س}}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{ص}+\sqrt{\text{س}}} \quad ; \quad \text{س} > ٠ \quad ???$$

الحل:

$$\sqrt{\text{س}}\ \text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$$

$$\frac{١}{\text{هـ}^{\text{ص}}}\ \text{دص} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \times \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$$

$$\int \text{هـ}^{-\text{ص}}\ \text{دص} = \int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \times \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$$

$$-\text{هـ}^{-\text{ص}} = \int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \times \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ع}^{٢} = \text{س} \Leftarrow ٢\text{ع}\ \text{دع} = \text{دس}$$

$$-\text{هـ}^{-\text{ص}} = \int \frac{١}{\cancel{\text{ع}}} \times \text{هـ}^{\text{ع}} \times ٢\cancel{\text{ع}}\ \text{دع}$$

$$-\text{هـ}^{-\text{ص}} = ٢\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{جـ}$$

$$\text{هـ}^{-\text{ص}} = -٢\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$$

$$-\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(-٢\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}\right)$$

$$\text{ص} = -\text{لو}_{\text{هـ}}\left(-٢\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}\right)$$

مثال(٥): اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$ ؛حيث هـ:العدد النيبيري ، فجد قاعدة العلاقة (ص) علما بأن منحناها يمر بالنقطة(١،٠) ???

الحل: (كتاب)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}\left(\text{هـ}^{\text{س}}+١\right)}$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\ \text{دس}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\ \text{دس}$$

$$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+١\right| + \text{جـ}$$

$$(١،٠) \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{١}+١\right| + \text{جـ}$$

$$١ = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}+١\right| + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}+١\right|$$

$$\Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+١\right| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}+١\right|$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+١\right| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}+١\right|\right)$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+١\right| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}+١\right|\right)$$

مثال(٦): اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\text{جاس} - \text{قا}^{2}\text{س}}{3\text{ص}^{2}}$ ، فجد قاعدة العلاقة علما بان النقطة $\left(\frac{\pi}{4} ، 4\right)$ تقع على منحناها ؟؟؟

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جاس} - \text{قا}^{2}\text{س}}{3\text{ص}^{2}}$$

$$\int 3\text{ص}^{2}\,\text{دص} = \int (\text{جاس} - \text{قا}^{2}\text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{ص}^{3} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$$

لكن $\left(\frac{\pi}{4} ، 4\right)$ على منحنى العلاقة

$$(4)^{3} = -\text{جتا}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{ظا}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{جـ}$$

$$64 = \frac{-1}{\sqrt{2}} - 1 + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \frac{65\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}^{3} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \frac{65\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

مثال(٧): اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) عند أي نقطة عليها هو $\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{ص}} + 1$ ؛ جد قاعدة العلاقة ؟؟؟

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{-\text{ص}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{ص}} + 1$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\text{هـ}^{-\text{ص}} + 1\right) + \left(\text{هـ}^{-\text{ص}} + 1\right)$$

$$\text{دص} = \left(\text{هـ}^{-\text{ص}} + 1\right)\left(\text{هـ}^{\text{س}} + 1\right)\text{دس}$$

$$\int \frac{1}{\left(\text{هـ}^{-\text{ص}} + 1\right)}\,\text{دص} = \int \left(\text{هـ}^{\text{س}} + 1\right)\text{دس}$$

$$\int \frac{1}{\left(\text{هـ}^{-\text{ص}} + 1\right)} \times \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{1 + \text{هـ}^{\text{ص}}}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\left|1 + \text{هـ}^{\text{ص}}\right| = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}$$

$$\left|1 + \text{هـ}^{\text{ص}}\right| = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}}$$

مثال(٨): اذا كان ميل المماس يساوي $\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}^{2} - 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}$ لمنحنى العلاقة عند أي نقطة (س،ص) ؛ جد قاعدة العلاقة ؟؟؟

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}^{2} - 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}} \Leftarrow \text{س} \times \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{2}}}{\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^{2}}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{2}}}{\text{ص}^{2}}$$

$$\int \text{ص}^{2}\,\text{دص} = \int \text{سهـ}^{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$$

$$\text{ع} = \text{س}^{2} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 2\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دع}}{2\text{س}}$$

$$\frac{1}{3}\text{ص}^{3} = \int \cancel{\text{س}}\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\frac{\text{دع}}{2\cancel{\text{س}}} \Leftarrow \frac{1}{3}\text{ص}^{3} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{ع}} + \text{جـ}$$

$$\text{ص}^{3} = \frac{3}{2}\text{هـ}^{\text{س}^{2}} + 3\text{جـ} \Leftarrow \text{ص} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\text{هـ}^{\text{س}^{2}} + 3\text{جـ}}$$

مثال(٩): اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة عند أي نقطة عليها مثل $(\text{س}،\text{ص})$ يساوي $\frac{-\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{ص}}$ ، النقطة $(\text{هـ}،١)$ تقع على منحنى العلاقة ؛ جد قاعدة (ص) حيث ص > ٠ ؟؟؟

الحل:

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-١}{\text{ص}'} = \frac{-١}{\text{ق}'(\text{س})} = \frac{-١}{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-\text{دس}}{\text{دص}}$$

$$\frac{\cancel{-}\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{\cancel{-}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دص} = \text{ص}\ \text{دس}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}}\text{دص} = \int \frac{١}{\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}\text{دس}$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \int \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}\text{دس}$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$$

النقطة $(\text{هـ}،١)$ تقع على منحنى العلاقة

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}١ = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}| + \text{جـ}$$

$$٠ = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٠$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}|$$

$$|\text{ص}| = |\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}|$$

$$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \quad \text{او} \quad \text{ص} = -\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$١ = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ} \Leftarrow ١ = ١ \ ✓$$

$$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \ ،\ \text{ص} > ٠$$

مثال(١٠): اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة (ص) عند النقطة $(\text{س}،\text{ص})$ يساوي $\text{س}\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ ، فجد قاعدة العلاقة (ص) ؛علما بأن منحناها يمر بالنقطة $(\text{هـ}،٤)$، حيث

هـ: العدد النيبيري ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

$$\frac{-\text{دس}}{\text{دص}} = \text{س}\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$$

$$\text{س}\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دص} = -\text{دس}$$

$$\int \text{دص} = \int \frac{-١}{\text{س}\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\text{دس}$$

$$\text{ع} = \sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} \Leftarrow \text{ع}^٢ = ٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$٢\text{ع}\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = ٢\text{ع}\,\text{س}\ \text{دع}$$

$$\text{ص} = \int \frac{-١}{\cancel{\text{س}}\cancel{\text{ع}}} \times ٢\cancel{\text{ع}}\cancel{\text{س}}\ \text{دع}$$

$$\text{ص} = \int -٢\ \text{دع} \Leftarrow \text{ص} = -٢\text{ع} + \text{جـ}$$

$$\text{ص} = -٢\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{جـ}$$

$$(\text{هـ}،٤) \Leftarrow ٤ = -٢\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}} + \text{جـ}$$

$$٤ = -٢\sqrt{٣ + ١} + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٨$$

$$\Leftarrow \text{ص} = -٢\sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + ٨$$

مثال(١١): اذا كان ميل العمودي عند أي نقطة مثل (س،ص) هو $\frac{\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}}}}{\sqrt{\text{ص}}\,\text{جتا}^{٢}\sqrt{\text{ص}}}$ ؛ جد قاعدة العلاقة ؟؟؟

الحل:

$$\frac{-\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{\left(\text{هـ}^{\cancel{٢}\text{س}}\right)^{\cancel{\frac{١}{٢}}}}{\sqrt{\text{ص}}\,\text{جتا}^{٢}\sqrt{\text{ص}}}$$

$$\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءص} = \sqrt{\text{ص}}\,\text{جتا}^{٢}\sqrt{\text{ص}} \times -\text{ءس}$$

$$\int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}\,\text{جتا}^{٢}\sqrt{\text{ص}}}\,\text{ءص} = \int \frac{-١}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{٢}\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{ءص} = \int -\text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ص}} \Leftarrow \text{ع}^{٢} = \text{ص} \Leftarrow ٢\text{ع}\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = ١$$

$$\text{ءص} = ٢\text{ع}\,\text{ءع}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{٢}\,\text{ع}}{\cancel{\text{ع}}}\,٢\cancel{\text{ع}}\,\text{ءع} = \int -\text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$٢\text{ظاع} = \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$$

$$٢\text{ظا}\sqrt{\text{ص}} = \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$$

مثال(١٢): اذا كانت $\text{قَ(س)} - ٢\text{س ق(س)} = ٠$ ؛ جد قاعدة ق(س) حيث $(١،\text{هـ}^{٢})$ تقع على منحناه ؟؟؟

الحل:

$$\left(\text{قَ(س)} = ٢\text{س ق(س)}\right) \div \text{ق(س)}$$

$$\int \frac{\text{قَ(س)}}{\text{ق(س)}}\,\text{ءس} = \int ٢\text{س}\,\text{ءس}$$

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ق(س)}| = \text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

$(١،\text{هـ}^{٢})$ تقع على منحناه

$$\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{٢}| = (١)^{٢} + \text{جـ} \Leftarrow ٢ = ١ + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{جـ} = ١$$

$$|\text{ق(س)}| = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}$$

$$\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١} \quad \text{أو} \quad \text{ق(س)} = -\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}$$

$$\text{هـ}^{٢} = \text{هـ}^{١+١} \checkmark$$

$$\Leftarrow \text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}$$

مثال(١٣): خزان ماء فارغ سعته (٦) م^٣ ، يصب فيه الماء بمعدل (ن + ٢) م^٣/ساعة ، متى يمتلئ الخزان ؟؟؟

الحل:

ع : حجم الماء

ن : الزمن (عدد الساعات)

$$\frac{دع}{دن} = ن + ٢$$

$$\int دع = \int (ن + ٢)\, دن$$

$$ع = \frac{١}{٢} ن^{٢} + ٢ن + جـ$$

لكن ع = ٠ عندما ن = ٠

$$٠ = \frac{١}{٢}(٠)^{٢} + ٢(٠) + جـ \Rightarrow جـ = ٠$$

$$ع = \frac{١}{٢} ن^{٢} + ٢ن$$

يمتلئ الخزان عندما يكون ع = ٦

$$\left(٦ = \frac{١}{٢} ن^{٢} + ٢ن\right) \times ٢$$

$$١٢ = ن^{٢} + ٤ن \Rightarrow ن^{٢} + ٤ن - ١٢ = ٠$$

$$(ن + ٦)(ن - ٢) = ٠$$

ن = −٦ ترفض

ن = ٢ ساعة

يمتلئ الخزان بعد (٢) ساعة

مثال(١٤): اذا كان تسارع جسيم بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ت = ٦ن + ٤ ، جد المسافة بعد (٣) ثواني ؛علما بأن السرعة الابتدائية (٢) م/ث وأنه قطع مسافة (٢١) م في أول ثانيتين ؟؟؟

الحل:

$$ع(ن) = \int ت\, دن = \int ٦ن + ٤\, دن$$

$$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ_{١}$$

السرعة الابتدائية (٢) م/ث $\Rightarrow$ ع(٠) = ٢

$$ع(٠) = ٣(٠)^{٢} + ٤(٠) + جـ_{١} = ٢$$

$$جـ_{١} = ٢$$

$$\Rightarrow ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢$$

$$ف(ن) = \int ع(ن)\, دن = \int ٣ن^{٢} + ٤ن + ٢$$

$$ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ_{٢}$$

قطع مسافة (٢١) في ثانيتين $\Rightarrow$ ف(٢) = ٢١

$$(٢)^{٣} + ٢(٢)^{٢} + ٢(٢) + جـ_{٢} = ٢١$$

$$٢٠ + جـ_{٢} = ٢١ \Rightarrow جـ_{٢} = ١$$

$$\Rightarrow ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + ١$$

$$\therefore ف(٣) = (٣)^{٣} + ٢(٣)^{٢} + ٢(٣) + ١$$

$$ف(٣) = ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١ = ٥٢$$

مثال(١٥): يسير جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة $ت = ٢\sqrt{ع}$ ، $ع > ٠$ ؛ فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة (٩) م/ث ، وقطع الجسيم مسافة $\left(\frac{٦٤}{٣}\right)$ م في أول ثانية من حركته ؛ جد المسافة التي يقطعها بعد (٣)ث من الحركة ؟؟؟

الحل:

$$ت = ٢\sqrt{ع}$$

$$\text{لكن } ت = \acute{ع} = \frac{دع}{دن}$$

$$\frac{دع}{دن} = ٢\sqrt{ع} \Leftarrow دع = ٢\sqrt{ع}\, دن$$

$$\frac{١}{\sqrt{ع}}\, دع = ٢ دن \Leftarrow \int ع^{\frac{-١}{٢}}\, دع = \int ٢ دن$$

$$٢ع^{\frac{١}{٢}} = ٢ن + جـ_١$$

$$\text{لكن } ع = ٩ \text{ عندما } ن = ٠$$

$$٢(٩)^{\frac{١}{٢}} = ٢(٠) + جـ_١ \Leftarrow جـ_١ = ٦$$

$$٢\sqrt{ع} = ٢ن + ٦$$

$$\sqrt{ع} = ن + ٣ \Leftarrow ع = (ن+٣)^٢$$

$$\text{لكن } ع = \acute{ف} = \frac{دف}{دن}$$

$$\frac{دف}{دن} = (ن+٣)^٢$$

$$\int دف = \int (ن+٣)^٢\, دن$$

$$ف = \frac{(ن+٣)^٣}{٣} + جـ_٢$$

$$\text{لكن } ف = \frac{٦٤}{٣} \text{ عندما } ن = ١$$

$$\frac{٦٤}{٣} = \frac{((١)+٣)^٣}{٣} + جـ_٢$$

$$\frac{٦٤}{٣} = \frac{٦٤}{٣} + جـ_٢ \Leftarrow جـ_٢ = ٠$$

$$ف = \frac{(ن+٣)^٣}{٣}$$

$$ف(٣) = \frac{((٣)+٣)^٣}{٣} = \frac{\cancel{٦}^٢ \times ٦^٢}{\cancel{٣}^١} = ٧٢م$$

مثال(١٦): يتحرك جسيم على خط مستقيم من السكون ومن نقطة الأصل وفق العلاقة $ت = ع + ١$ ، $ع > ٠$ ؛ جد معادلة الحركة (ف(ن)) ؟؟؟

الحل:

$$\text{لكن } ت = \acute{ع} = \frac{دع}{دن}$$

$$\frac{دع}{دن} = ع + ١$$

$$دع = (ع+١)\, دن$$

$$\int \frac{١}{(ع+١)}\, دع = \int دن$$

$$لو_هـ|ع+١| = ن + جـ_١$$

$$\text{لكن } ع = ٠ \text{ عندما } ن = ٠$$

$$لو_هـ|(٠)+١| = (٠) + جـ_١ \Leftarrow جـ_١ = ٠$$

$$لو_هـ|ع+١| = ن$$

$$|ع+١| = هـ^ن$$

$$ع + ١ = هـ^ن \Leftarrow ع = هـ^ن - ١$$

$$\text{أو } ع = -هـ^ن - ١ \text{ تهمل } (ع > ٠)$$

$$\text{لكن } ع = \acute{ف} = \frac{دف}{دن}$$

$$\frac{دف}{دن} = هـ^ن - ١$$

$$\int دف = \int (هـ^ن - ١)\, دن$$

$$ف = هـ^ن - ن + جـ_٢$$

$$\text{لكن } ف = ٠ \text{ عندما } ن = ٠$$

$$٠ = هـ^{(٠)} - (٠) + جـ_٢ \Leftarrow جـ_٢ = -١$$

$$ف = هـ^ن - ن - ١$$

مثال(١٧): يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $\text{ت} = \text{أ}\sqrt[3]{\text{ع}}$ ، $\text{ع} > ٠$ ، من السكون ؛ جد قيمة الثابت (أ) التي تجعل سرعته بعد (٣)ث تساوي (٨)سم/ث ؟؟؟

الحل:

لكن $\text{ت} = \bar{\text{ع}} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{أ}\sqrt[3]{\text{ع}}$$

$$\text{دع} = \text{أ}\sqrt[3]{\text{ع}}\ \text{دن}$$

$$\frac{١}{\sqrt[3]{\text{ع}}}\ \text{دع} = \text{أدن}$$

$$\int \text{ع}^{\frac{-١}{٣}}\ \text{دع} = \int \text{أدن}$$

$$\frac{٣}{٢}\ \text{ع}^{\frac{٢}{٣}} = \text{أن} + \text{جـ}$$

لكن $\text{ع} = ٠$ عندما $\text{ن} = ٠$

$$\frac{٣}{٢}(٠)^{\frac{٢}{٣}} = \text{أ}(٠) + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٠$$

$$\frac{٣}{٢}\sqrt[3]{\text{ع}^{٢}} = \text{أن}$$

لكن $\text{ع} = ٨$ عندما $\text{ن} = ٣$

$$\frac{٣}{٢}\sqrt[3]{(٨)^{٢}} = \text{أ}(٣) \Leftarrow \text{أ} = ٢$$

مثال(١٨): ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الاصل على محور السينات وفقا للعلاقة $\text{ت} = -٤\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$ ، حيث $\text{ع} > ٠$ ، ت:تسارع الجسيم ، ع: سرعة الجسيم ؛ فاذا كانت سرعته عند بدء الحركة (٤) م/ث اثبت ان $\text{ف} = ٢\text{ن}\sqrt{\text{ع}}$ ؟؟؟

(كتاب)

الحل:

الحركة من نقطة الاصل $\Leftarrow \text{ف}(٠) = ٠$

السرعة عند بدء الحركة $(٤) \Leftarrow \text{ع}(٠) = ٤$

$$\text{ت} = -٤\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{ت} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٤\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}} = -٤\text{دن} \Leftarrow \text{ع}^{\frac{-٣}{٢}}\ \text{دع} = -٤\text{دن}$$

$$\int \text{ع}^{\frac{-٣}{٢}}\ \text{دع} = \int -٤\ \text{دن}$$

$$-٢\text{ع}^{\frac{-١}{٢}} = -٤\text{ن} + \text{جـ} \Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{\text{ع}}} = -٤\text{ن} + \text{جـ}$$

$$\text{ع}(٠) = ٤ \Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{٤}} = -٤(٠) + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = -١$$

$$\Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{\text{ع}}} = -٤\text{ن} - ١\left(١٦\text{ن} - \text{ن}^{٢}\right)$$

$$\sqrt{\text{ع}} = \frac{-٢}{-٤\text{ن} - ١} \Leftarrow \sqrt{\text{ع}} = \frac{٢}{٤\text{ن} + ١}$$

$$\text{ع} = \frac{٤}{(٤\text{ن} + ١)^{٢}} \Leftarrow \int \text{ع}\ \text{دن} = \int \frac{٤}{(٤\text{ن} + ١)^{٢}}\ \text{دن}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \int ٤(٤\text{ن} + ١)^{-٢}\ \text{دن}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{٤(٤\text{ن} + ١)^{-١}}{-١ \times ٤} + \text{جـ}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{-١}{(٤\text{ن} + ١)} + \text{جـ}$$

$$\text{ف}(٠) = ٠ \Leftarrow ٠ = \frac{-١}{(٤(٠) + ١)} + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ١$$

$$\Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \frac{-١}{(٤\text{ن} + ١)} + ١$$

توحيد مقامات $\Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \frac{-١}{٤\text{ن} + ١} + \frac{٤\text{ن} + ١}{٤\text{ن} + ١}$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{٤\text{ن}}{٤\text{ن} + ١}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{٢}{٤\text{ن} + ١} \times ٢\text{ن}$$

بالتعويض $\Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \sqrt{\text{ع}} \times ٢\text{ن}$

$\therefore \text{ف}(\text{ن}) = ٢\text{ن}\sqrt{\text{ع}}$ و هو المطلوب

مثال(١٩): الة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار تتناقص قيمتها بمرور الزمن حسب العلاقة $\frac{\text{دق}}{\text{دن}} = \frac{\text{٥٠٠-}}{(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}}$ ، حيث (ق) قيمتها بعد مرور (ن) سنة ؛ أحسب قيمة الالة بعد (٣) سنوات من شرائها ؟؟؟

الحل:

$$\text{دق} = \frac{\text{٥٠٠-}}{(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢}}}\,\text{دن}$$

$$\int \text{دق} = \int \text{٥٠٠-}(\text{ن}+\text{١})^{\text{٢-}}\,\text{دن}$$

$$\text{ق} = \frac{\text{٥٠٠-}(\text{ن}+\text{١})^{\text{١-}}}{\text{١-}\times\text{١}} + \text{جـ}$$

$$\text{ق} = \frac{\text{٥٠٠}}{(\text{ن}+\text{١})} + \text{جـ}$$

لكن ق $= \text{٢٥٠٠}$ عندما ن $= \text{٠}$

$$\text{٢٥٠٠} = \frac{\text{٥٠٠}}{(\text{١}+(\text{٠}))} + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٢٠٠٠}$$

$$\text{ق} = \frac{\text{٥٠٠}}{(\text{ن}+\text{١})} + \text{٢٠٠٠}$$

السعر بعد (٣) سنوات من شرائها

$$\text{ق} = \frac{\text{٥٠٠}}{(\text{١}+(\text{٣}))} + \text{٢٠٠٠} = \text{٢١٢٥}\ \text{دينار}$$

سؤال وزاري: يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة : $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{٠,٠٢٥}\ \text{ع}$ حيث : (ع) عدد السكان ، (ن) الزمن بالسنوات ، اذا علمت ان عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥) ، فجد سكانها بعد (٤٠) عاما ؟؟؟

الحل:

$$\text{ع}(\text{٠}) = \text{٢٠٠٠٠٠}$$

$$\text{دع} = \text{٠,٠٢٥}\ \text{ع}\ \text{دن}$$

$$\int \frac{\text{١}}{\text{ع}}\,\text{دع} = \int \text{٠,٠٢٥}\,\text{دن}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| = \text{٠,٠٢٥}\ \text{ن} + \text{جـ}$$

$$\text{ع}(\text{٠}) = \text{٢٠٠٠٠٠}$$

$$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}| = \text{٠,٠٢٥}(\text{٠}) + \text{جـ}$$

$$\Leftarrow \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| = \text{٠,٠٢٥}\ \text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|$$

$$\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}|} = \text{هـ}^{\text{٠,٠٢٥ ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|}$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{٠,٠٢٥ ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|}$$

$$\text{ع}(\text{٤٠}) = \text{هـ}^{\text{٠,٠٢٥}(\text{٤٠}) + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|}$$

$$\text{ع}(\text{٤٠}) = \text{هـ}^{\text{١} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|}$$

$$\text{ع}(\text{٤٠}) = \text{هـ} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢٠٠٠٠٠}|}$$

$$\text{ع}(\text{٤٠}) = \text{٢,٧} \times \text{٢٠٠٠٠٠}$$

$$\text{ع}(\text{٤٠}) = \text{٥٤٠٠٠٠}\ \text{نسمة}$$

مثال(٢٠): قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠ م/ث) وبتسارع مقداره (−١٠ م/ث٢) ، فاذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية واحدة من بدء الحركة يساوي (٨٠م) ، فجد اقصى ارتفاع وصله الجسم ؟؟؟

الحل: (كتاب)

ع(٠) = ٤٠

ف(١) = ٨٠

ت = −١٠

∫ت ءن = ع(ن) ⇐ ع(ن) = ∫−١٠ ءن

ع(ن) = −١٠ن + جـ١

ع(٠) = ٤٠ ⇐ −١٠(٠) + جـ١ = ٤٠

⇐ جـ١ = ٤٠ ⇐ ع(ن) = −١٠ن + ٤٠

∫ع(ن) ءن = ف(ن)

ف(ن) = ∫−١٠ن + ٤٠ ءن

ف(ن) = −٥ن٢ + ٤٠ن + جـ٢

ف(١) = ٨٠ ⇐ −٥(١)٢ + ٤٠(١) + جـ٢ = ٨٠

٣٥ + جـ٢ = ٨٠ ⇐ جـ٢ = ٤٥

⇐ ف(ن) = −٥ن٢ + ٤٠ن + ٤٥

اقصى ارتفاع ⇐ ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٠ ⇐ −١٠ن + ٤٠ = ٠ ⇐ ن = ٤

اقصى ارتفاع عندما ن = ٤

ف(٤) = −٥(٤)٢ + ٤٠(٤) + ٤٥

ف(٤) = −٨٠ + ١٦٠ + ٤٥ = ١٢٥

مثال(٢١): قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥)م عن سطح الارض ، ورأسيا للأعلى بسرعة ابتدائية (٤٠)م/ث وبتسارع (−١٠) م/ث٢ ؛ جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود الى سطح الارض ؟؟؟

الحل:

لكن ت = عَ = ءع/ءن

ءع/ءن = −١٠

∫ءع = ∫−١٠ ءن

ع = −١٠ن + جـ١

لكن ع = ٤٠ عندما ن = ٠

٤٠ = −١٠(٠) + جـ١ ⇐ جـ١ = ٤٠

ع = −١٠ن + ٤٠

لكن ع = فَ = ءف/ءن

ءف/ءن = −١٠ن + ٤٠

∫ءف = ∫(−١٠ن + ٤٠) ءن

ف = −٥ن٢ + ٤٠ن + جـ٢

لكن ف = ٤٥ عندما ن = ٠

٤٥ = −٥(٠)٢ + ٤٠(٠) + جـ٢ ⇐ جـ٢ = ٤٥

ف = −٥ن٢ + ٤٠ن + ٤٥

عندما تعود الكرة الى سطح الارض تكون المسافة المقطوعة صفرا

٠ = −٥ن٢ + ٤٠ن + ٤٥

ن٢ − ٨ن − ٩ = ٠

(ن − ٩)(ن + ١) = ٠

ن = −١ ترفض

ن = ٩

تعود الكرة الى سطح الارض بعد (٩) ث

مثال(٢٢): سيارة ثمنها (٢٠٠٠٠٠)دينار ، يتناقص سعرها بنسبة (١٥٪) سنويا ؛ جد سعرها بعد مرور (٢٠) سنة من شرائها ؟؟؟

الحل: اعتبر $(هـ^{٣} = ٢٠)$

ع : القيمة الشرائية (ثمن السيارة)

$$\frac{دع}{دن} = \frac{-١٥}{١٠٠} \times ع$$

$$دع = \frac{-١٥}{١٠٠} \times ع\ دن$$

$$\int \frac{١}{ع}\ دع = \int \frac{-١٥}{١٠٠}\ دن$$

$$لـو_{هـ}|ع| = \frac{-١٥}{١٠٠}ن + جـ$$

لكن ع = ٢٠٠٠٠٠ عندما ن = ٠

$$لـو_{هـ}|٢٠٠٠٠٠| = \frac{-١٥}{١٠٠}(٠) + جـ$$

$$جـ = لـو_{هـ}|٢٠٠٠٠٠|$$

$$لـو_{هـ} ع = \frac{-١٥}{١٠٠}ن + لـو_{هـ}(٢٠٠٠٠٠)$$

(ما في داعي للمطلق ثمن)

$$ع = هـ^{\frac{-١٥}{١٠٠}ن + لـو_{هـ}(٢٠٠٠٠٠)}$$

$$ع = هـ^{\frac{-١٥}{١٠٠}ن} \times هـ^{لـو_{هـ}(٢٠٠٠٠٠)}$$

$$ع = ٢٠٠٠٠٠هـ^{\frac{-١٥}{١٠٠}ن}$$

سعرها بعد (٢٠) سنة

$$ع = ٢٠٠٠٠٠هـ^{\frac{-١٥}{١٠٠}(٢٠)} \Leftarrow ع = ٢٠٠٠٠٠هـ^{-٣}$$

$$ع = \frac{٢٠٠٠٠٠}{هـ^{٣}} = \frac{٢٠٠٠٠٠}{٢٠} = ١٠٠٠٠ \text{ دينار}$$

مثال(٢٣): يتكاثر عدد النحل في الخلية فيزداد العدد بمعدل (٣٠٪) كل أسبوع ، فاذا كان عدد النحل في البداية (٦٥) نحلة ؛ جد عدد النحل بعد (١٠) أسابيع ؟؟؟

الحل:

ل : عدد النحل

$$\frac{دل}{دن} = \frac{٣٠}{١٠٠} \times ل$$

$$دل = \frac{٣٠}{١٠٠} \times ل\ دن$$

$$\int \frac{١}{ل}\ دل = \int \frac{٣٠}{١٠٠}\ دن$$

$$لـو_{هـ}|ل| = \frac{٣٠}{١٠٠}ن + جـ$$

(ما في داعي للمطلق عدد نحل)

لكن ل = ٦٥ عندما ن = ٠

$$لـو_{هـ}(٦٥) = \frac{٣٠}{١٠٠}(٠) + جـ \Leftarrow جـ = لـو_{هـ}(٦٥)$$

$$لـو_{هـ} ل = \frac{٣٠}{١٠٠}ن + لـو_{هـ}(٦٥)$$

$$ل = هـ^{\frac{٣٠}{١٠٠}ن + لـو_{هـ}(٦٥)}$$

$$ل = هـ^{\frac{٣٠}{١٠٠}ن} \times هـ^{لـو_{هـ}(٦٥)}$$

$$ل = ٦٥هـ^{\frac{٣٠}{١٠٠}ن}$$

عدد النحل بعد (١٠) أسابيع

$$ل = ٦٥هـ^{\frac{٣٠}{١٠٠}(١٠)}$$

$$ل = ٦٥هـ^{٣} \text{ نحلة}$$

مثال(٢٤): اذا كان سكان أحدى القرى سنة (٢٠١٨) هو (٨٠٠٠) نسمة ، لوحظ ان عددهم يزداد وبمعدل (٢٪) سنويا ؛ جد عددهم سنة (٢٠٢٣) ؟؟؟

الحل:

ع : عدد السكان

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٢}{١٠٠} \times \text{ع}$$

$$\text{دع} = \frac{٢}{١٠٠} \times \text{ع دن}$$

$$\int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{دع} = \int \frac{٢}{١٠٠}\,\text{دن}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| = \frac{٢}{١٠٠}\text{ن} + \text{جـ}$$

(ما في داعي للمطلق عدد سكان)

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع} = \frac{٢}{١٠٠}\text{ن} + \text{جـ}$$

لكن ع = ٨٠٠٠ عندما ن = ٠

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(٨٠٠٠) = \frac{٢}{١٠٠}(٠) + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٨٠٠٠)$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع} = \frac{٢}{١٠٠}\text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٨٠٠٠)$$

عدد السكان سنة (٢٠٢٣) أي بعد = ٢٠٢٣ − ٢٠١٨ = ٥ سنوات

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ع} = \frac{٢}{١٠٠}(٥) + \text{لو}_{\text{هـ}}(٨٠٠٠)$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\frac{١}{١٠} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٨٠٠٠)}$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{\frac{١}{١٠}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(٨٠٠٠)}$$

$$\text{ع} = ٨٠٠٠\,\text{هـ}^{\frac{١}{١٠}}$$

مثال(٢٥): يتناقص عدد الحضور لمباريات كرة القدم بمعدل (٥٪) لكل مباراة ، بسبب خسارته في أحدى المواسم ، فاذا كان عدد الحضور في المباراة الاولى (٢٣٥٠٠) شخص ؛ جد عدد الحضور بعد (٢٠) مباراة ؟؟؟

الحل: (اعتبر $\text{هـ}^{-٠,٩٥} = ٠,٣٨٦$)

ع : عدد الحضور

ن : عدد المباريات

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{-٥}{١٠٠} \times \text{ع}$$

$$\text{دع} = \frac{-٥}{١٠٠} \times \text{ع دن}$$

$$\int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{دع} = \int \frac{-٥}{١٠٠}\,\text{دن}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ع}| = \frac{-٥}{١٠٠}\text{ن} + \text{جـ}$$

(ما في داعي للمطلق عدد حضور)

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ع}) = \frac{-٥}{١٠٠}\text{ن} + \text{جـ}$$

لكن ع = ٢٣٥٠٠ عندما ن = ١

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(٢٣٥٠٠) = \frac{-٥}{١٠٠}(١) + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢٣٥٠٠) + \frac{٥}{١٠٠}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ع}) = \frac{-٥}{١٠٠}\text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٢٣٥٠٠) + \frac{٥}{١٠٠}$$

عدد الحضور بعد (٢٠) مباراة

$$\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ع}) = \frac{-٥}{١٠٠}(٢٠) + \text{لو}_{\text{هـ}}(٢٣٥٠٠) + \frac{٥}{١٠٠}$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{-١ + \text{لو}_{\text{هـ}}(٢٣٥٠٠) + \frac{٥}{١٠٠}}$$

$$\text{ع} = \text{هـ}^{-٠,٩٥} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(٢٣٥٠٠)}$$

$$\text{ع} = ٠,٣٨٦ \times ٢٣٥٠٠ = ٩٠٧١ \text{ شخص}$$

مثال(٢٦): بالون حجمه الحالي (هـ)سم^{٣} ، حيث هـ : العدد النيبيري ، بدأنا بنفخه ليزداد حجمه الى الضعف في كل دقيقة متى يصبح حجمه $\left(هـ^{٧}\right)$سم^{٣} ؟؟؟

الحل:

ع : حجم البالون

$\frac{ءع}{ءن} = ٢ع$

$ءع = ٢ع \ ءن$

$\int \frac{١}{ع} ءع = \int ٢ \ ءن$

$لـو_{هـ}|ع| = ٢ن + جـ$

(ما في داعي للمطلق حجم بالون)

$لـو_{هـ}(ع) = ٢ن + جـ$

لكن ع = هـ عندما ن = ٠

$لـو_{هـ}(هـ) = ٢(٠) + جـ \Leftarrow جـ = ١$

$لـو_{هـ}(ع) = ٢ن + ١$

متي يصبح حجمه $\left(هـ^{٧}\right)$

$لـو_{هـ}\left(هـ^{٧}\right) = ٢ن + ١$

$٧ = ٢ن + ١ \Leftarrow ن = ٣$ دقائق

مثال(٢٧): انطلق جسيم في خط مستقيم من النقطة (أ) فاذا كانت سرعته (م/ث) بعد زمن قدره (ن) ثانية تعطى بالعلاقة

$$ع = \begin{cases} ٣ن^{٢} & ، ٠ \le ن < ٢ \\ ١٦ - ٢ن & ، ٢ \le ن \le ٨ \end{cases}$$

؛ جد بعد الجسيم عن النقطة (أ) عندما ن = ٥ث ؟؟؟

الحل:

ز : الازاحة في الفترة [٠،٥]

$ز = \int_{٠}^{٥} ع(ن) \ ءن$

$ز = \int_{٠}^{٢} ع(ن) \ ءن + \int_{٢}^{٥} ع(ن) \ ءن$

$ز = \int_{٠}^{٢} ٣ن^{٢} \ ءن + \int_{٢}^{٥} (١٦ - ٢ن) \ ءن$

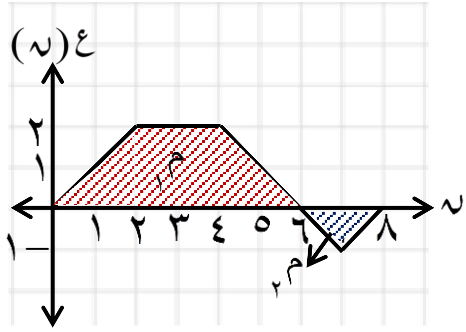
$ز = \left[ن^{٣}\right]_{٠}^{٢} + \left[\left(١٦ن - ن^{٢}\right)\right]_{٢}^{٥}$

$ز = (٢)^{٣} + \left((٨٠ - ٢٥) - (٣٢ - ٤)\right)$

$ز = ٨ + (٥٥ - ٢٨)$

$ز = ٨ + ٢٧ = ٣٥م$

مثال(٢٨): يمثل الشكل المرسوم العلاقة بين السرعة والزمن لجسيم يتحرك على خط مستقيم في الفترة الزمنية $[\text{٠، ٨}]$ جد ؟؟؟



١) المسافة المقطوعة في الفترة $[\text{٠، ٨}]$

الحل:

$$م_١ = \frac{١}{٢}(\text{مجموع القاعدتين}) \times \text{الارتفاع}$$

$$م_١ = \frac{١}{٢} \times (٦+٢) \times ٢ = ٨$$

$$م_٢ = \frac{١}{٢} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$م_٢ = \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$$

$$\text{المسافة} = \int_{٠}^{٨} |ع(ن)|\, دن = \text{مجموع المساحات}$$

$$\text{المسافة} = م_١ + م_٢ = ٨ + ٢ = ١٠\text{م}$$

---

٢) الازاحة المقطوعة في الفترة $[\text{٠، ٨}]$

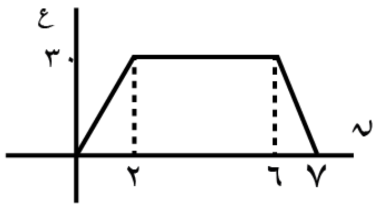
الحل:

$$\text{الازاحة(بعد الجسيم)} = \int_{٠}^{٨} ع(ن)\, دن$$

$$\text{الازاحة} = \int_{٠}^{٦} ع(ن)\, دن + \int_{٦}^{٨} ع(ن)\, دن$$

$$\text{الازاحة} = (٨) + (-٢) = ٦\text{م}$$

مثال(٢٩): يمثل الشكل العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم ، فجد المسافة المقطوعة في الفترة $[\text{٠، ٧}]$ ؟؟؟



الحل:

$$ع = \frac{دف}{دن}$$

$$دف = ع\, دن$$

$$ف = \int_{٠}^{٧} ع\, دن$$

$$ف = \text{مساحة شبه المنحرف}$$

$$ف = \frac{١}{٢}(٧+٤) \times ٣٠ = ١٦٥\text{مترا}$$

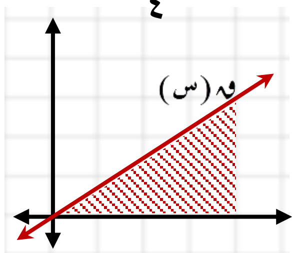
الدرس العاشر : المساحة

كيف يمكن حساب المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين ???

المساحة (م) تعني التكامل المحدود

$$\text{م} = \int_{\text{يمين}}^{\text{يسار}} \left|(\text{فوق} - \text{تحت})\right| \, \text{ءس}$$

مثال(١): جد مساحة المنطقة المضللة في الشكل اذا علمت ان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{٤}\text{س}$ ؟؟؟



الحل:

الطريقة الاولى: مساحة المنطقة المضللة مثلثا

$$\text{المساحة}(\text{م}) = \frac{١}{٢} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ = ٦$$

الطريقة الثانية: بالتكامل

$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} \frac{٣}{٤}\text{س} \, \text{ءس} = \left[\frac{٣}{٨}\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{٤}$$

$$\text{م} = \frac{٣}{٨}\left((٤)^{٢} - (٠)^{٢}\right) = ٦$$

تذكر

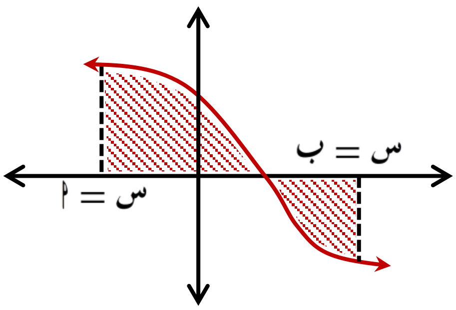
المساحة دائما موجبة حتى لو كانت المنطقة اسفل محور السينات

الحالات التي لا تحتاج الى رسم

الحالة الاولى: المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات وفترة

اقتران & محور السينات & فترة [أ،ب]

$[\text{أ،ب}] \Leftarrow \text{س} = \text{أ} ,\ \text{س} = \text{ب} \Leftarrow$ حدود التكامل (أعمدة)



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس}$$

؟؟؟ ما الفرق بين ؟؟؟

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس} \quad \& \quad \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس}\right|$$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس}$: نعيد تعريف ق(س) على الفترة [أ،ب]

$\left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس}\right|$: لا نعيد تعريف ق(س) وانما نكامل ونأخذ مطلق للجواب النهائي

مثال(٢): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٩ - \text{س}^{٢}$ ، ومحور السينات على الفترة $[٠، ٤]$ ؟؟؟

الحل:

الاقترانات:

$\text{ق}(\text{س}) = ٩ - \text{س}^{٢}$ ؛محور السينات $\Leftarrow \text{ص} = ٠$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} \left|٩ - \text{س}^{٢}\right| \text{ءس}$$

نعيد تعريف $\left|٩ - \text{س}^{٢}\right|$ على الفترة $[٠، ٤]$

$٩ - \text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ٩$

$\text{س} = ٣$ ، $\text{س} = -٣$

$++ \; [\; +++ \; -- \;]$: -٣ ، ٠ ، ٣ ، ٤

$$\text{م} = \int_{٠}^{٣} \left(٩ - \text{س}^{٢}\right) \text{ءس} + \int_{٣}^{٤} \left(\text{س}^{٢} - ٩\right) \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\left(٩\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right)\right]_{٠}^{٣} + \left[\left(\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٩\text{س}\right)\right]_{٣}^{٤}$$

$$\text{م} = (١٨ - ٠) + \left(\frac{-٤٤}{٣} - (-١٨)\right)$$

$\text{م} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة

مثال(٣): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = ٣ - ٣\text{س}^{٢}$ ومحور السينات في الفترة $[-٣، ٣]$ ؟؟؟

الحل:

$$\text{م} = \int_{-٣}^{٣} \left|\text{ق}(\text{س})\right| \text{ءس} = \int_{-٣}^{٣} \left|٣ - ٣\text{س}^{٢}\right| \text{ءس}$$

نعيد تعريف $\left|٣ - ٣\text{س}^{٢}\right|$ على الفترة $[-٣، ٣]$

$٣ - ٣\text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ١$

$[\; -- \; +++ \; -- \;]$: -٣ ، -١ ، ١ ، ٣

$$\text{م} = \int_{-٣}^{-١} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} + \int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس} + \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{-٣}^{-١} \left(٣\text{س}^{٢} - ٣\right) \text{ءس} + \int_{-١}^{١} \left(٣ - ٣\text{س}^{٢}\right) \text{ءس}$$

$$+ \int_{١}^{٣} \left(٣\text{س}^{٢} - ٣\right) \text{ءس}$$

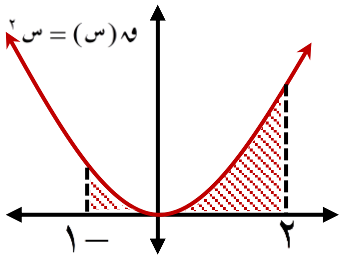
$$\text{م} = \left[\left(\text{س}^{٣} - ٣\text{س}\right)\right]_{-٣}^{-١} + \left[\left(٣\text{س} - \text{س}^{٣}\right)\right]_{-١}^{١}$$

$$+ \left[\left(\text{س}^{٣} - ٣\text{س}\right)\right]_{١}^{٣}$$

$$\text{م} = (٢ + ١٨) + (٢ + ٢) + (١٨ + ٢)$$

$\text{م} = ٤٤$ وحدة مربعة

مثال(٤): جد المساحة المظللة في الشكل ؟؟؟

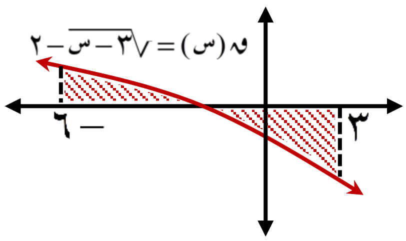


الحل:

$$م = \int_{-١}^{٢} س^{٢} \, ءس$$

$$م = \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-١}^{٢} = \frac{٨}{٣} + \frac{١}{٣} = ٣$$ وحدات مربعة

مثال(٥): جد المساحة المظللة في الشكل ؟؟؟



الحل:

الاقترانات:

$$ق(س) = \sqrt{٣ - س} - ٢$$

محور السينات $\Leftarrow ص = ٠$

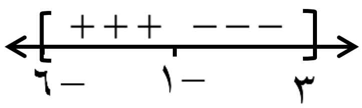
$$م = \int_{-٦}^{٣} |ق(س)| \, ءس = \int_{-٦}^{٣} \left|\sqrt{٣ - س} - ٢\right| ءس$$

نعيد تعريف $\left|\sqrt{٣ - س} - ٢\right|$ في الفترة $[-٦ ، ٣]$

$$\sqrt{٣ - س} - ٢ = ٠$$

$$\sqrt{٣ - س} = ٢$$

$$٣ - س = ٤ \Leftarrow س = -١$$



$$م = \int_{-٦}^{-١} \left(\sqrt{٣ - س} - ٢\right) ءس + \int_{-١}^{٣} \left(٢ - \sqrt{٣ - س}\right) ءس$$

$$م = \int_{-٦}^{-١} \left((٣ - س)^{\frac{١}{٢}} - ٢\right) ءس$$

$$+ \int_{-١}^{٣} \left(٢ - (٣ - س)^{\frac{١}{٢}}\right) ءس$$

$$م = \left[\left(\frac{-٢}{٣}(٣ - س)^{\frac{٣}{٢}} - ٢س\right)\right]_{-٦}^{-١}$$

$$+ \left[\left(٢س + \frac{٢}{٣}(٣ - س)^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{-١}^{٣}$$

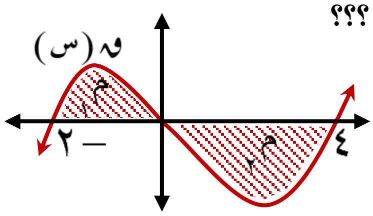
$$م = \left(\left(\frac{-١٦}{٣} + ٢\right) - \left(\frac{-٥٤}{٣} + ١٢\right)\right)$$

$$+ \left((٦ - ٠) - \left(-٢ + \frac{١٦}{٣}\right)\right)$$

$$م = \left(\frac{-١٠}{٣} + ٦\right) + \left(٦ - \frac{١٠}{٣}\right)$$

$$م = \frac{-٢٠}{٣} + ١٢ = \frac{١٦}{٣}$$ وحدة مربعة

مثال(٦): اذا كان منحنى (ق) يعطى بالشكل المجاور وكانت المساحة $م_{١} = ٣$ ، $م_{٢} = ٥$ ، جد ما يأتي ؟؟؟



أ) المساحة المحصورة بين منحنى (ق) ومحور السينات في الفترة $[-٢ ، ٤]$

الحل:

$$م = م_{١} + م_{٢} = ٣ + ٥ = ٨$$ وحدات مربعة

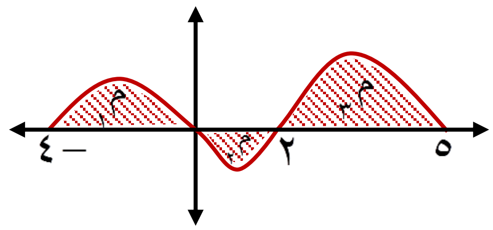
ب) $\int_{-٢}^{٤} ق(س) \, ءس$

الحل:

$$= \int_{-٢}^{٠} ق(س) \, ءس + \int_{٠}^{٤} ق(س) \, ءس$$

$$= م_{١} + -م_{٢} = ٣ + -٥ = -٢$$

سؤال وزاري: معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق اذا كانت $م_١ = ٧$، $م_٢ = ٤$ ، $م_٣ = ٥$ ، جد ما يأتي؟؟؟



أ) $\int_{٢}^{-٤} \frac{ق(س)}{٢}\,دس$

الحل:

$$\int_{-٤}^{٢} ق(س)\,دس = \int_{-٤}^{٠} ق(س)\,دس + \int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس$$

$$\int_{-٤}^{٢} ق(س)\,دس = ٧ + -٤ = ٣$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{-٤} \frac{ق(س)}{٢}\,دس = \frac{١}{٢}\int_{٢}^{-٤} ق(س)\,دس$$

$$= \frac{١}{٢} \times -٣ = \frac{-٣}{٢}$$

ب) المساحة المحصورة بين منحنى (ق) ومحور السينات في الفترة $[-٤، ٥]$ ؟؟؟

الحل:

$$م = م_١ + م_٢ + م_٣$$

$م = ٧ + ٤ + ٥ = ١٦$ وحدة مربعة

مثال(٧): اذا كان $ق(س) = جاس$، $س \in [٠، ٢\pi]$؛ فجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران (ق) ومحور السينات في الفترة $[٠، ٢\pi]$ ؟؟؟

الحل: (كتاب)

الاقترانات:

$ق(س) = جاس$

محور السينات $\Leftarrow ص = ٠$

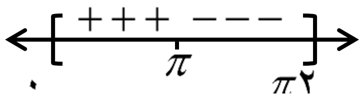
$$م = \int_{٠}^{٢\pi} |ق(س)|\,دس = \int_{٠}^{٢\pi} |جاس|\,دس$$

نعيد تعريف $|جاس|$ على الفترة $[٠، ٢\pi]$

$جاس = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\Leftarrow س = \pi$

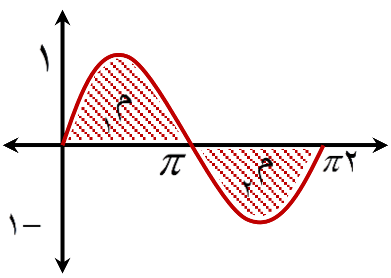
$\Leftarrow س = ٢\pi$



$$م = \int_{٠}^{\pi} (جاس)\,دس + \int_{\pi}^{٢\pi} (-جاس)\,دس$$

$$م = \left[(-جتاس)\right]_{٠}^{\pi} + \left[(جتاس)\right]_{\pi}^{٢\pi}$$

$م = (١+١) + (١+١) = ٤$ وحدة مربعة



مثال(٨): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) =جتا(πس) ؛ومحور السينات في الفترة [٠، ٢] ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

الاقترانات:

$ق(س) = جتا(\pi س)$

محور السينات ⇐ ص = ٠

$م = \int_{٠}^{٢} |ق(س)| \, ءس = \int_{٠}^{٢} |جتا(\pi س)| \, ءس$

نعيد تعريف $|جتا(\pi س)|$ في الفترة [٠، ٢]

$جتا(\pi س) = ٠ \Leftarrow \pi س = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \pi س = \frac{٣\pi}{٢} \Leftarrow س = \frac{٣}{٢}$

[+ + − − − − + +]: ٠، $\frac{١}{٢}$، $\frac{٣}{٢}$، ٢

$م = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} جتا(\pi س) \, ءس + \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} -جتا(\pi س) \, ءس$

$+ \int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} جتا(\pi س) \, ءس$

$م = \left[\frac{جا(\pi س)}{\pi}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + \left[\frac{-جا(\pi س)}{\pi}\right]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \left[\frac{جا(\pi س)}{\pi}\right]_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

$م = \left(\frac{١}{\pi} - ٠\right) + \left(\frac{١}{\pi} + \frac{١}{\pi}\right) + \left(٠ + \frac{١}{\pi}\right)$

$م = \frac{٤}{\pi}$ وحدة مربعة

تذكر

لرسم اقتران الـ ⇐ ق(س) = جا ، ق(س) = جتا

١) دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|معامل\ س|}$

٢) ربع الدورة = $\frac{دورة\ الاقتران}{٤}$

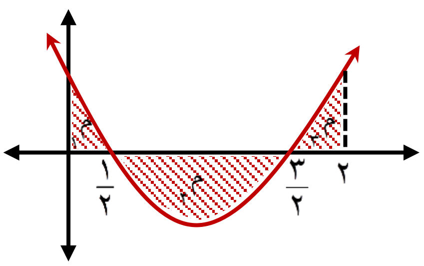
٣) شكل الجدول ثم نعوض ثم نرسم

حسب المثال السابق ؟؟؟

دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|\pi|} = ٢$

ربع الدورة = $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

٢	$\frac{٣}{٢}$	١	$\frac{١}{٢}$	٠	س
١	٠	−١	٠	١	ق(س)



مثال(٩): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}+١} - ١$ ومحور السينات في الفترة $[-١ ، ٣]$ ؟؟؟

الحل :

الاقترانات:

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}+١} - ١$

محور السينات $\Leftarrow \text{ص} = ٠$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٣} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{دس} = \int_{-١}^{٣} \left|\sqrt{\text{س}+١} - ١\right| \, \text{دس}$$

نعيد تعريف $\left|\sqrt{\text{س}+١} - ١\right|$ في الفترة $[-١ ، ٣]$

$\sqrt{\text{س}+١} - ١ = ٠$

$\sqrt{\text{س}+١} = ١$

$\text{س}+١ = ١ \Leftarrow \text{س} = ٠$

$- - - \quad + + +$ (-١ ، ٠ ، ٣)

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} \left(١ - \sqrt{\text{س}+١}\right) \text{دس} + \int_{٠}^{٣} \left(\sqrt{\text{س}+١} - ١\right) \text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\left(\text{س} - \frac{٢}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{-١}^{٠}$$

$$+ \left[\left(\text{س} - \frac{٢}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{٣}$$

$$\text{م} = \left(\frac{-٢}{٣} + ١\right) - \left(\left(\frac{١٦}{٣} - ٣\right) - \left(\frac{-٢}{٣}\right)\right)$$

$$\text{م} = \left(\frac{١}{٣}\right) - \left(\frac{-٧}{٣} + \frac{٢}{٣}\right) = ٢ \text{ وحدة مربعة}$$

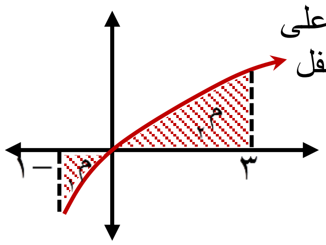
لرسم $\text{ق}(\text{س}) = \pm \sqrt{\pm\text{س} + \text{ب}} \pm \text{جـ}$

١) حدد نقطة الانطلاق (رأس القلم) :
(صفر ما داخل الجذر، ثابت (جـ))

٢) اشارة معامل (س) :
أ) موجبة الى اليمين
ب) سالبة الى اليسار

٣) اشارة الجذر :
أ) موجبة الى الاعلى
ب) سالبة الى الاسفل

حسب المثال السابق ؟؟؟



مثال(١٠): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}$ ومحور السينات ؟؟؟

الحل:

الاقترانات:

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}$

محور السينات $\Leftarrow \text{ص} = ٠$

نساوي الاقترانات:

$\text{س}^{٣} - \text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س}(\text{س}^{٢} - ١) = ٠$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = -١$

$- - - \quad + + \quad - - - \quad + +$ (-١ ، ٠ ، ١)

حدود التكامل:

$\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = -١$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} \text{ق}(\text{س}) \text{دس} + \int_{٠}^{١} -\text{ق}(\text{س}) \text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} (\text{س}^{٣} - \text{س}) \text{دس} + \int_{٠}^{١} (\text{س} - \text{س}^{٣}) \text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)\right]_{-١}^{٠} + \left[\left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٤}\right)\right]_{٠}^{١}$$

$$\text{م} = \left((٠) - \left(\frac{-١}{٤}\right)\right) + \left((٠) - \left(\frac{-١}{٤}\right)\right)$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(١١): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س(س+١)^٢$ ومحور السينات ؟؟؟

الحل:

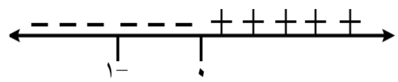
الاقترانات:

$ق(س) = س(س+١)^٢$

محور السينات $\Leftarrow ص = ٠$

نساوي الاقترانات:

$س(س+١)^٢ = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = -١$



حدود التكامل:

$س = ٠ ، س = -١$

$$م = \int_{-١}^{٠} \left| س(س+١)^٢ \right| دس$$

$$م = -\int_{-١}^{٠} س(س+١)^٢ \, دس$$

$$م = -\int_{-١}^{٠} \left(س^٣ + ٢س^٢ + س\right) دس$$

$$م = \left[\left(\frac{-س^٤}{٤} - \frac{٢س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢}\right)\right]_{-١}^{٠}$$

$م = \frac{١}{١٢}$ وحدة مربعة

مثال(١٢): جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = س^٤ - ٤س^٢$ ومحور السينات ؟؟؟

الحل:

الاقترانات:

$ق(س) = س^٤ - ٤س^٢$

محور السينات $\Leftarrow ص = ٠$

نساوي الاقترانات:

$س^٤ - ٤س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ \left(س^٢ - ٤\right) = ٠$

$س^٢ (س+٢)(س-٢) = ٠$

حدود التكامل:

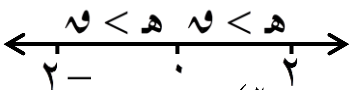
$س = ٠ ، س = -٢ ، س = ٢$

$ق(-١) = -٣ \quad ، \quad هـ(-١) = ٠$

$\Leftarrow هـ > ق$

$ق(١) = -٣ \quad ، \quad هـ(١) = ٠$

$\Leftarrow هـ > ق$



$$م = \int_{-٢}^{٠} \left(٠ - س^٤ + ٤س^٢\right) دس$$

$$+ \int_{٠}^{٢} \left(٠ - س^٤ + ٤س^٢\right) دس$$

$$م = \left[\left(\frac{-١}{٥} س^٥ + \frac{٤}{٣} س^٣\right)\right]_{-٢}^{٠}$$

$$+ \left[\left(\frac{-١}{٥} س^٥ + \frac{٤}{٣} س^٣\right)\right]_{٠}^{٢}$$

$$م = \left(\frac{-٣٢}{٥} + \frac{٣٢}{٣}\right) - \left(\frac{٣٢}{٥} - \frac{٣٢}{٣}\right)$$

$$م = \frac{-٣٢}{٥} + \frac{٣٢}{٣} - \frac{٣٢}{٥} + \frac{٣٢}{٣}$$

$م = \frac{-٦٤}{٥} + \frac{٦٤}{٣} = \frac{١٢٨}{١٥}$ وحدة مربعة

ويمكن ان :

$$م = \int_{-٢}^{٢} \left(-س^٤ + ٤س^٢\right) دس$$

مثال(١٣): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = ٤ - \text{س}^{٢}$ والمستقيمين

$\text{س} = -٢ ، \text{س} = ٠$ ؟؟؟

الحل:

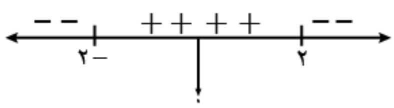
الاقترانات:

$\text{ق}(\text{س}) = ٤ - \text{س}^{٢}$

محور السينات $\Leftarrow$ ص = ٠

نساوي الاقترانات:

$٤ - \text{س}^{٢} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ٢$



حدود التكامل:

$\text{س} = ٢ ، \text{س} = ٠ ، \text{س} = -٢$

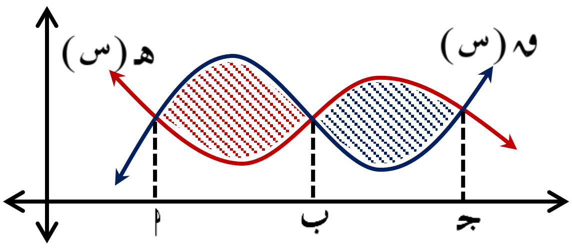
$$\text{م} = \int_{-٢}^{٠} (٤ - \text{س}^{٢})\, ء\text{س}$$

$$\text{م} = \left[\left(٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right) \right]_{-٢}^{٠} = \frac{١٦}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

الحالة الثانية: المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين من نفس النوع

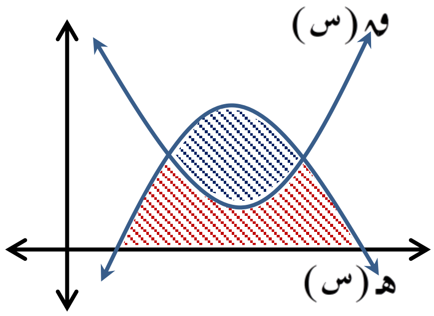
اقتران ق(س) & اقتران هـ(س)

حدود التكامل نقاط التقاطع



نجد نقاط التقاطع بين الاقترانين (أ،ب،جـ) والتي هي حدود التكامل للمساحة المطلوبة

$$\text{م} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\, ء\text{س} \right| + \left| \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} (\text{هـ} - \text{ق})\, ء\text{س} \right|$$



المساحة المحصورة بين الاقترانين = الحمراء — الزرقاء

مثال(١٤): جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٩ - \text{س}^{٢}$ ؟؟؟

الحل:

حدود التكامل $\Leftarrow \text{ق} = \text{هـ}$

$\text{س}^{٢} + ١ = ٩ - \text{س}^{٢}$

$٢\text{س}^{٢} = ٨ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{س} = \pm ٢$

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{٢} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{٢} \left((\text{س}^{٢} + ١) - (٩ - \text{س}^{٢}) \right) \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{٢} (٢\text{س}^{٢} - ٨)\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left[\left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - ٨\text{س} \right) \right]_{-٢}^{٢} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left(\frac{١٦}{٣} - ١٦ \right) - \left(\frac{-١٦}{٣} + ١٦ \right) \right|$$

$$\text{م} = \left| \frac{١٦}{٣} - ١٦ + \frac{١٦}{٣} - ١٦ \right| = \left| \frac{٣٢}{٣} - ٣٢ \right|$$

$$\text{م} = \left| \frac{-٦٤}{٣} \right| = \frac{٦٤}{٣}$$ وحدة مربعة

ويمكن استبدال القيمة المطلقة بأجراء اختبار لمعرفة أي الاقترانات قيمته أكبر وبالتالي نطرح الاصغر من الاكبر عن طريق ايجاد صور ضمن فترة التكامل والصورة الاكبر تدل ان قيمة الاقتران عندها اكبر ضمن تلك الفترة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left((\text{فوق الاكبر}) - (\text{تحت الاصغر}) \right) \text{ءس}$$

حسب المثال السابق ؟؟؟

$\text{ق}(٠) = (٠)^{٢} + ١ = ١$

$\text{هـ}(٠) = ٩ - (٠)^{٢} = ٩$

$\text{هـ}(\text{س}) > \text{ق}(\text{س})$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (\text{هـ} - \text{ق})\, \text{ءس}$$

مثال(١٥): جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٤\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥\text{س}$ ؟؟؟

الحل:

حدود التكامل $\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\text{س}^{٣} - ٤\text{س} = ٥\text{س} \Leftarrow \text{س}^{٣} - ٩\text{س} = ٠$

$\Leftarrow \text{س}(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣) = ٠$

$\text{س} = ٣$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = -٣$

$$\text{م} = \left| \int_{-٣}^{٠} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{ءس} \right| + \left| \int_{٠}^{٣} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \int_{-٣}^{٠} (\text{س}^{٣} - ٤\text{س} - ٥\text{س})\, \text{ءس} \right|$$

$$+ \left| \int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٣} - ٤\text{س} - ٥\text{س})\, \text{ءس} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left[\left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٩}{٢}\text{س}^{٢} \right) \right]_{-٣}^{٠} \right|$$

$$+ \left| \left[\left(\frac{١}{٤}\text{س}^{٤} - \frac{٩}{٢}\text{س}^{٢} \right) \right]_{٠}^{٣} \right|$$

$$\text{م} = \left| ٠ - \left(\frac{٨١}{٤} - \frac{٨١}{٢} \right) \right| + \left| \left(\frac{٨١}{٤} - \frac{٨١}{٢} \right) - ٠ \right|$$

$$\text{م} = \left| ٠ - \left(\frac{-٨١}{٤} \right) \right| + \left| \left(\frac{-٨١}{٤} \right) - ٠ \right|$$

$$\text{م} = \frac{٨١}{٤} + \frac{٨١}{٤} = \frac{٨١}{٢}$$ وحدة مربعة

مثال(١٦): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = ٤ - \text{س}^{٢}$ ؛ $\text{ل}(\text{س}) = \text{س} + ٢$??? (كتاب)

الحل:

حدود التكامل $\text{ق} = \text{ل} \Leftarrow$

$٤ - \text{س}^{٢} = \text{س} + ٢ \Leftarrow \text{س}^{٢} + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س}+٢)(\text{س}-١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٢ ، \text{س} = ١$

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{١} (\text{ق} - \text{ل})\, \text{د}\text{س} \right|$$

$$\text{م} = \left| \int_{-٢}^{١} (٤ - \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)\, \text{د}\text{س} \right|$$

$$\text{م} = \left[\left(\frac{-١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س} \right) \right]_{-٢}^{١}$$

$$\text{م} = \left(\frac{-١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢ \right) - \left(\frac{٨}{٣} - ٢ - ٤ \right)$$

$$\text{م} = \frac{-٥}{٦} + ٢ - \frac{٨}{٣} + ٦ = \frac{-٢١}{٦} + ٨$$

$$\text{م} = \frac{٢٧}{٦} = \frac{٩}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

تذكر

لرسم الاقتران التربيعي $\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

حسب المثال السابق ???

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = ٤ - \text{س}^{٢}$

رأس القطع:

$$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٠}{٢(-١)} = ٠$$

$$\text{ق}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) = \text{ق}(٠) = ٤ - (٠)^{٢} = ٤$$

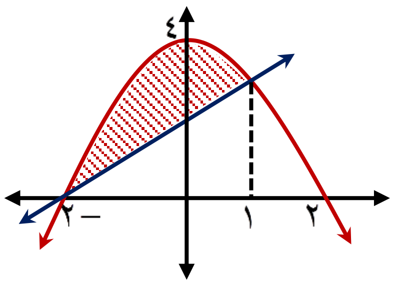
س	٢-	١-	٠	١	٢
ق(س)	٠	٣	٤	٣	٠

لرسم الاقتران الخطي $\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$

حسب المثال السابق ???

$\Leftarrow \text{ل}(\text{س}) = \text{س} + ٢$

نجد المقطع السيني $(\text{ص} = ٠)$ ونجد المقطع الصادي $(\text{س} = ٠) \Leftarrow (\text{س}،٠)،(٠،\text{ص})$



مثال(١٧): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥\text{س}$??? (كتاب)

الحل:

حدود التكامل $\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ٥\text{س}$

$٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٥\text{س} = ٠ \Leftarrow ٤\text{س}^{٢} - ٨\text{س} = ٠$

$٤\text{س}(\text{س} - ٢) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ ، \text{س} = ٢$

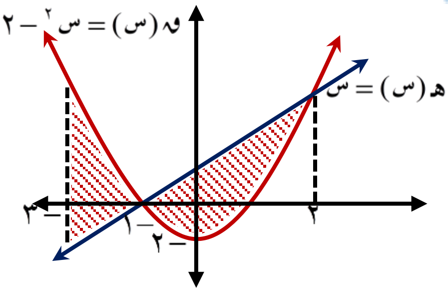
$$\text{م} = \left| \int_{٠}^{٢} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{د}\text{س} \right|$$

$$\text{م} = \left| \int_{٠}^{٢} (٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٥\text{س})\, \text{د}\text{س} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left[\left(\frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} \right) \right]_{٠}^{٢} \right|$$

$$\text{م} = \left| \left(\left(\frac{٣٢}{٣} - ١٦ \right) - ٠ \right) \right| = \frac{١٦}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(١٨): جد المساحة المظللة في الشكل ؟؟؟



الحل:

حدود التكامل ⇐ ق(س) = هـ(س)

$$\text{س}^{٢} - ٢ = \text{س} \Leftarrow \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠$$

$$(\text{س}+١)(\text{س}-٢)=٠ \Leftarrow \text{س} = -١ \text{ ، } \text{س} = ٢$$

$$\text{م} = \int_{-٣}^{-١} \left(\text{س}^{٢} - ٢ - \text{س}\right) \text{ءس}$$

$$+ \int_{-١}^{٢} \left(\text{س} - (\text{س}^{٢} - ٢)\right) \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{-٣}^{-١}$$

$$+ \left[\frac{-١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\right]_{-١}^{٢}$$

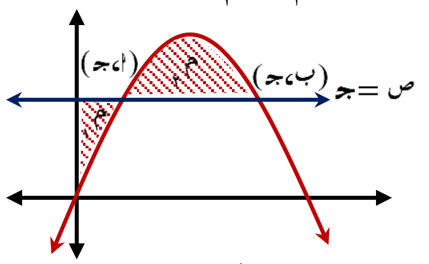
$$\text{م} = \frac{١}{٣}(-١+٢٧) - \frac{١}{٢}(١-٩) - ٢(-١+٣)$$

$$- \frac{١}{٣}(٨+١) + \frac{١}{٢}(٤-١) + ٢(٢+١)$$

$$\text{م} = \frac{٢٦}{٣} + ٤ - ٤ - ٣ + \frac{٣}{٢} + ٦$$

$$\text{م} = \frac{٦١}{٦} + ٣ = \frac{٧٩}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

سؤال وزاري: رسم المستقيم ص = جـ فقطع منحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٣}$ في النقطتين (أ ، جـ) ، (ب ، جـ) حيث أ ، ب ، جـ اعداد حقيقية موجبة مكونا المنطقتين $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ كما في الشكل الآتي ، جد قيمة (جـ) التي تجعل مساحتي المنطقتين $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ متساويتين ؟؟؟



الحل:

$$\text{م}_{١} = \text{م}_{٢}$$

$$\int_{٠}^{\text{أ}} \left(\text{جـ} - ٢\text{س} + ٣\text{س}^{٣}\right) \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(٢\text{س} - ٣\text{س}^{٣} - \text{جـ}\right) \text{ءس}$$

$$\left[\text{جـس} - \text{س}^{٢} + \frac{٣\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{\text{أ}} = \left[\text{س}^{٢} - \frac{٣\text{س}^{٤}}{٤} - \text{جـس}\right]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$\text{جـأ} - \text{أ}^{٢} + \frac{٣\text{أ}^{٤}}{٤} = \text{ب}^{٢} - \frac{٣\text{ب}^{٤}}{٤} - \text{جـب} - \text{أ}^{٢} + \frac{٣\text{أ}^{٤}}{٤} + \text{جـأ}$$

$$\text{ب}^{٢} - \frac{٣\text{ب}^{٤}}{٤} - \text{جـب} = ٠$$

لكن $\text{ق}(\text{ب}) = \text{جـ} \Leftarrow ٢\text{ب} - ٣\text{ب}^{٣} = \text{جـ}$

$$\text{ب}^{٢} - \frac{٣\text{ب}^{٤}}{٤} - \left(٢\text{ب} - ٣\text{ب}^{٣}\right)\text{ب} = ٠$$

$$\text{ب}^{٢} - \frac{٣\text{ب}^{٤}}{٤} - ٢\text{ب}^{٢} + ٣\text{ب}^{٤} = ٠$$

$$\frac{٩\text{ب}^{٤}}{٤} - \text{ب}^{٢} = ٠$$

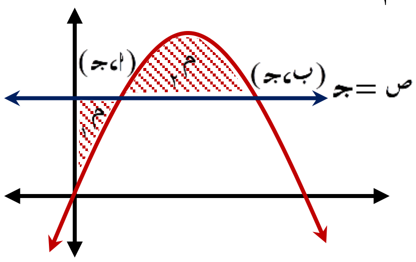
$$\text{ب}^{٢}\left(\frac{٩\text{ب}^{٢}}{٤} - ١\right) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ب} = ٠ \ \times \qquad \text{ب} = \frac{٢}{٣} \ \checkmark \text{ ، } \frac{-٢}{٣} \ \times$$

$$\Leftarrow \text{جـ} = ٢\text{ب} - ٣\text{ب}^{٣}$$

$$\text{جـ} = ٢ \times \frac{٢}{٣} - ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٤}{٩}$$

مثال(١٩): رسم المستقيم ص = جـ فقطع منحنى $\text{ق(س)} = ٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢}$ في النقطتين (أ،جـ) ، (ب،جـ) حيث أ ، ب ، جـ اعداد حقيقية موجبة مكونا المنطقتين $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ كما في الشكل الآتي ، جد قيمة (جـ) التي تجعل مساحتي المنطقتين $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ متساويتين ؟؟؟



الحل:

$$\text{م}_{١} = \text{م}_{٢}$$

$$\int_{٠}^{\text{أ}} (\text{جـ} - \text{ق})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{جـ})\,\text{دس}$$

$$\int_{٠}^{\text{أ}} \text{جـ}\,\text{دس} - \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق}\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}\,\text{دس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس}$$

$$\int_{٠}^{\text{أ}} \text{جـ}\,\text{دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \int_{٠}^{\text{أ}} \text{ق}\,\text{دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}\,\text{دس}$$

$$\int_{٠}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$$

$$\int_{٠}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \int_{٠}^{\text{ب}} (٦\text{س} - ٣\text{س}^{٢})\,\text{دس}$$

$$\text{ب جـ} = \left[(٣\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣})\right]_{٠}^{\text{ب}}$$

$$(\text{ب جـ} = ٣\text{ب}^{٢} - \text{ب}^{٣}) \div \text{ب}$$

$$\text{جـ} = ٣\text{ب} - \text{ب}^{٢}$$

$$\text{لكن} \Leftarrow \text{ق(ب)} = \text{جـ} = ٦\text{ب} - ٣\text{ب}^{٢}$$

$$٦\text{ب} - ٣\text{ب}^{٢} = ٣\text{ب} - \text{ب}^{٢} \Leftarrow ٣\text{ب} - ٢\text{ب}^{٢} = ٠$$

$$\text{ب}(٣ - ٢\text{ب}) = ٠ \Leftarrow \text{ب} = \frac{٣}{٢} \checkmark \text{ ، } \text{ب} = ٠ \times$$

$$\text{جـ} = ٣\left(\frac{٣}{٢}\right) - \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤}$$

مثال(٢٠): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتـــــــــــران $\text{ق(س)} = ٤\text{س} - \text{س}^{٢}$ والمستقيم ص = ٣ ؟؟؟

الحل:

حدود التكامل

$$٤\text{س} - \text{س}^{٢} = ٣$$

$$٤\text{س} - \text{س}^{٢} - ٣ = ٠$$

$$\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣ = ٠$$

$$(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١ \text{ ، } ٣$$

$$\text{م} = \left|\int_{١}^{٣} (\text{ق} - \text{ص})\,\text{دس}\right|$$

$$\text{م} = \left|\int_{١}^{٣} (٤\text{س} - \text{س}^{٢} - ٣)\,\text{دس}\right|$$

$$\text{م} = \left|\left[\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - ٣\text{س}\right)\right]_{١}^{٣}\right|$$

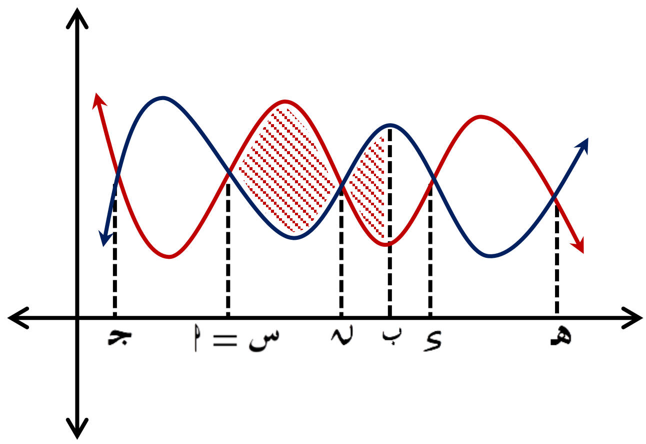
$$\text{م} = \left|(١٨ - ٩ - ٩) - \left(٢ - \frac{١}{٣} - ٣\right)\right|$$

$$\text{م} = \left|٠ + \frac{٤}{٣}\right| = \frac{٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

الحالة الثالثة: المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين مع فترة

اقتران & اقتران & فترة

$\text{ق}(\text{س})$ & $\text{هـ}(\text{س})$ & $[\text{أ}،\text{ب}]$ ⇐ $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{س} = \text{ب}$



حدود التكامل الاعمدة

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ن}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} + \int_{\text{ن}}^{\text{ب}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{دس}$$

نقاط التقاطع ⇐ ضمن الفترة ($\in$) اكثر من مساحة

⇐ لا تقع ضمن الفترة ($\notin$) مساحة واحدة

مثال(٢١): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتاس}$

في الفترة $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

نساوي الاقترانات:

$\text{جاس} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ظاس} = ١$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow$ ربع اول

$\Leftarrow \text{س} = \frac{٥\pi}{٤} \Leftarrow$ ربع ثالث تهمل

$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$

$[٠ \quad \text{هـ} > \text{ق} \quad \frac{\pi}{٤} \quad \text{ق} > \text{هـ} \quad \frac{\pi}{٢}]$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{هـ}\left(\frac{\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{ق} > \text{هـ}$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{١}{٢}$ ، $\text{هـ}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow \text{هـ} > \text{ق}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{دس}$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جاس} - \text{جتاس})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \left[(\text{جاس} + \text{جتاس})\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \left[(-\text{جتاس} - \text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$\text{م} = (\sqrt{٢} - ١) + (١ + \sqrt{٢}) = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

مثال(٢٢): جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جا٢س}$ في الفترة $[\text{٠}، \pi]$ ؟؟؟

الحل:

نقاط التقاطع $\Leftarrow \text{ق} = \text{هـ}$

$\text{جاس} = \text{جا٢س} \Leftarrow \text{جاس} - \text{جا٢س} = \text{٠}$

$\text{جاس} - \text{٢جاس جتاس} = \text{٠}$

$\text{جاس}(\text{١} - \text{٢جتاس}) = \text{٠}$

$\text{جاس} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{٠}$ ، $\text{س} = \pi$ ، $\cancel{\text{س} = \text{٢}\pi}$

$\text{١} - \text{٢جتاس} = \text{٠} \Leftarrow \text{جتاس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{\text{٣}}$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٦}}\right) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ، $\text{هـ}\left(\frac{\pi}{\text{٦}}\right) = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \Leftarrow \text{هـ} > \text{ق}$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{١}$ ، $\text{هـ}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{٠} \Leftarrow \text{ق} > \text{هـ}$

هـ>ق ق>هـ
٠ $\frac{\pi}{\text{٣}}$ π

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٣}}} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{\text{٣}}}^{\pi} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٣}}} (\text{جا٢س} - \text{جاس})\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{\text{٣}}}^{\pi} (\text{جاس} - \text{جا٢س})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\left(\frac{-\text{جتا٢س}}{\text{٢}} + \text{جتاس}\right)\right]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٣}}} + \left[\left(-\text{جتاس} + \frac{\text{جتا٢س}}{\text{٢}}\right)\right]_{\frac{\pi}{\text{٣}}}^{\pi}$$

$$\text{م} = \left(\left(\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\right) - \left(\frac{-\text{١}}{\text{٢}} + \text{١}\right)\right) + \left(\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\right) - \left(\frac{-\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\right)\right)$$

$\text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{٩}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٤}}$ وحدة مربعة

مثال(٢٣): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = \text{١} + \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{١} + \text{هـ}^{-\text{س}}$ في الفترة $[-\text{٢}، \text{٢}]$ ؟؟؟

الحل:

نقاط التقاطع $\Leftarrow \text{ق} = \text{ل}$

$\cancel{\text{١}+}\text{هـ}^{\text{س}} = \cancel{\text{١}+}\text{هـ}^{-\text{س}} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{-\text{س}}$

$\text{س} = -\text{س} \Leftarrow \text{٢س} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{٠}$

ل>ق ق>ل
−٢ ٠ ٢

$\text{ق}(\text{١}) = \text{١} + \text{هـ}$ ، $\text{ل}(\text{١}) = \text{١} + \frac{\text{١}}{\text{هـ}} \Leftarrow \text{ق} > \text{ل}$

$\text{ق}(-\text{١}) = \text{١} + \frac{\text{١}}{\text{هـ}}$ ، $\text{ل}(-\text{١}) = \text{١} + \text{هـ} \Leftarrow \text{ل} > \text{ق}$

$$\text{م} = \int_{-\text{٢}}^{\text{٠}} (\text{١} + \text{هـ}^{-\text{س}} - \text{١} - \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس} + \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{١} + \text{هـ}^{\text{س}} - \text{١} - \text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\left(-\text{هـ}^{-\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}\right)\right]_{-\text{٢}}^{\text{٠}} + \left[\left(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}\right)\right]_{\text{٠}}^{\text{٢}}$$

$\text{م} = -\text{٤} + \text{٢هـ}^{\text{٢}} + \text{٢هـ}^{-\text{٢}}$ وحدة مربعة

مثال(٢٤): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق}(\text{س}) = ١+\text{جاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ١+\text{جتاس}$ في الفترة $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$ ؟؟؟ (كتاب)

الحل:

نقاط التقاطع $\Leftarrow$ ق = هـ

$$(\cancel{١}+\text{جاس} = \cancel{١}+\text{جتاس}) \div \text{جتاس}$$

$$\text{ظاس} = ١ \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٤} \notin \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{٥\pi}{٤} \in \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$$

$$\underset{\frac{\pi}{٢}}{[} \quad \text{ق} > \text{هـ} \quad \underset{\frac{٥\pi}{٤}}{|} \quad \text{هـ} > \text{ق} \quad \underset{\frac{٣\pi}{٢}}{]}$$

$$\text{ق}(\pi) = ١+\text{جا}\pi = ١ ، \text{هـ}(\pi) = ١+\text{جتا}\pi = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ق} > \text{هـ}$$

$$\text{ق}\left(\frac{٤\pi}{٣}\right) = ١+\text{جا}\left(\frac{٤\pi}{٣}\right) = \frac{٢-\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{هـ}\left(\frac{٤\pi}{٣}\right) = ١+\text{جتا}\left(\frac{٤\pi}{٣}\right) = \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow \text{هـ} > \text{ق}$$

$$\text{م} = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (\text{ق}-\text{هـ})\,\text{دس} + \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (\text{هـ}-\text{ق})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (\text{جاس}-\text{جتاس})\,\text{دس}$$

$$+ \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (\text{جتاس}-\text{جاس})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \left[(-\text{جتاس}-\text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$$

$$+ \left[(\text{جاس}+\text{جتاس})\right]_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$$

$$\text{م} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) + \left(-١-\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)\right)$$

$$\text{م} = \sqrt{٢} - ١ + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢} - ١ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = ١+\text{جاس}$$

$$\text{دورة الاقتران} \Leftarrow \frac{٢\pi}{|١|} = ٢\pi$$

$$\text{ربع الدورة} \Leftarrow \frac{٢\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢}$$

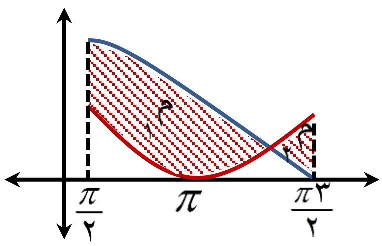
س	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$
ق(س)	٢	١	٠

$$\Leftarrow \text{هـ}(\text{س}) = ١+\text{جتاس}$$

$$\text{دورة الاقتران} \Leftarrow \frac{٢\pi}{|١|} = ٢\pi$$

$$\text{ربع الدورة} \Leftarrow \frac{٢\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢}$$

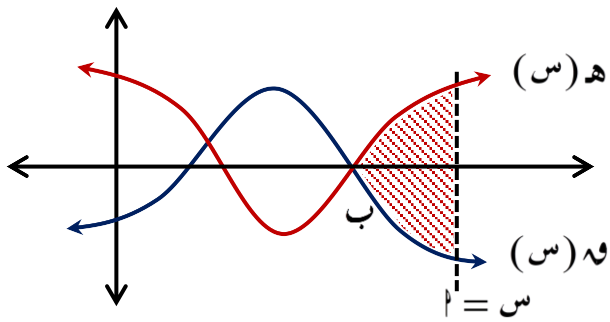
س	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$
ق(س)	١	٠	١



الحالة الرابعة: المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين ومستقيم

اقتران & اقتران & مستقيم

$ق(س)$ & $هـ(س)$ & $(س = أ)$



نجد نقط التقاطع بين الاقترانين ثم نختار النقطة الاقرب للمستقيم $(س = أ)$

$$م = \int_{ب}^{أ} (هـ - ق)\, ءس$$

مثال(٢٥): جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = ٨ - س^{٢}$ مع المستقيم $س = ٥$ ؟؟؟

الحل:

نقاط التقاطع $ق = هـ \Leftarrow$

$س^{٢} = ٨ - س^{٢} \Leftarrow ٢س^{٢} = ٨$

$س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = ٢$ ، $س = -٢$

$$م = \left| \int_{٢}^{٥} (س^{٢} - ٨ + س^{٢})\, ءس \right|$$

$$م = \left| \left[\left(\frac{٢}{٣} س^{٣} - ٨س \right) \right]_{٢}^{٥} \right|$$

$$م = \left| \frac{٢٥٠}{٣} - ٤٠ - \left(\frac{١٦}{٣} - ١٦ \right) \right|$$

$$م = \left| \frac{٢٥٠}{٣} - ٤٠ - \left(\frac{١٦}{٣} - ١٦ \right) \right|$$

$$م = \left| \frac{٢٥٠}{٣} - ٤٠ - \frac{١٦}{٣} + ١٦ \right|$$

$$م = \left| \frac{٢٣٤}{٣} - ٢٤ \right| = \left| \frac{١٦٢}{٣} \right| = ٥٤ \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(٢٦): جد المساحة المحصورة بين منحنيي

الاقترانين $ق(س) = س^{٣}$ ،

$هـ(س) = ٩س$ مع المستقيم $س = ٤$ ؟؟؟

الحل:

نقاط التقاطع $ق = هـ \Leftarrow$

$س^{٣} = ٩س \Leftarrow س^{٣} - ٩س = ٠$

$س(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

$$م = \left| \int_{٣}^{٤} (س^{٣} - ٩س) \, ءس \right|$$

$$م = \left| \left[\left(\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٩}{٢} س^{٢} \right) \right]_{٣}^{٤} \right|$$

$$م = \left| (٦٤ - ٧٢) - \left(\frac{٨١}{٤} - \frac{٨١}{٢} \right) \right|$$

$$م = \left| -٨ + \frac{٨١}{٤} \right| = \frac{٤٩}{٤}$$ وحدة مربعة

ملخص الحالات التي لا تحتاج الى رسم:

اولا: اقتران & محور السينات & فترة

$ق(س)$ & محور السينات & $[أ،ب]$

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, ءس$$

ثانيا: اقتران & اقتران (من نفس النوع)

$ق(س)$ & $هـ(س)$

نجد نقط التقاطع فمثلا أ، ب، جـ

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \right| + \left| \int_{ب}^{جـ} ق(س) ءس \right|$$

ثالثا: اقتران & اقتران & فترة (من نفس النوع)

$ق(س)$ & $هـ(س)$ & $[أ،ب]$

نجد نقط التقاطع فمثلا (جـ) ضمن الفترة

$$م = \left| \int_{أ}^{جـ} (ق - هـ) ءس \right| + \left| \int_{جـ}^{ب} (ق - هـ) ءس \right|$$

رابعا: اقتران & اقتران & المستقيم(س = أ)

(من نفس النوع)

$ق(س)$ & $هـ(س)$ & $(س = أ)$

نجد نقط التقاطع فمثلا ب، جـ، ء لتكن (ء) الاقرب

$$م = \left| \int_{ء}^{أ} (ق - هـ) ءس \right|$$

الحالات التي يجب الرسم لحساب المساحة

الحالة الاولى: المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين مختلفين بالنوع

ق(س) & هـ(س)

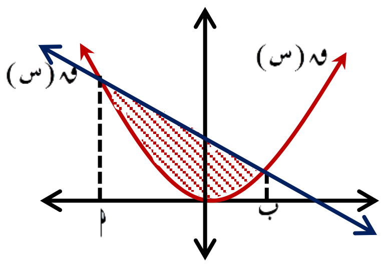
- اقتران كثير حدود مع اقتران دائري
- اقتران كثير حدود مع اقتران أسي
- اقتران كثير حدود مع اقتران للوغاريتم
- اقتران دائري مع اقتران أسي
- اقتران دائري مع اقتران للوغاريتم

الحالة الثانية: المساحة المحصورة بين منحنيات ثلاثة اقترانات أو اكثر

ق(س) & هـ(س) & ل(س) &...

☒ تحديد المنطقة المطلوبة (المساحة المطلوبة)

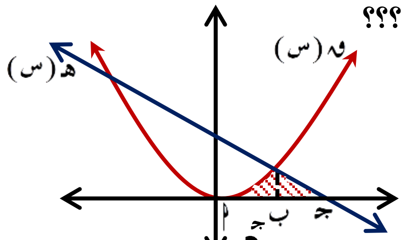
مثال(٢٧): حدد المساحة المحصورة بين ق(س) و هـ(س) ؛ ثم أكتب قاعدة المساحة ؟؟؟



الحل:

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{هـ} - \text{ق})\, \text{ءس}$$

مثال(٢٨): حدد المساحة المحصورة بين ق(س) و هـ(س) ومحور السينات؛ ثم أكتب قاعدة المساحة ؟؟؟

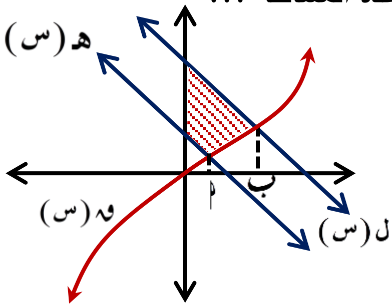


الحل:

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - ٠)\, \text{ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} (\text{هـ} - ٠)\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{هـ(س)}\, \text{ءس}$$

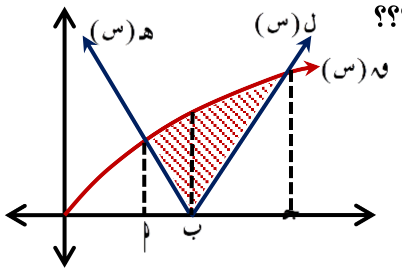
مثال(٢٩): حدد المساحة المحصورة بين ق(س) ، هـ(س) ، ل(س) ومحور الصادات؛ ثم أكتب قاعدة المساحة ؟؟؟



الحل:

$$\text{م} = \int_{٠}^{\text{أ}} (\text{ل} - \text{هـ})\, \text{ءس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ل} - \text{ق})\, \text{ءس}$$

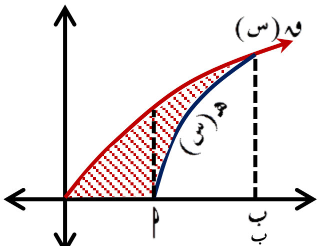
مثال(٣٠): حدد المساحة المحصورة بين ق(س) ، هـ(س) ، ل(س) ؛ ثم أكتب قاعدة المساحة ؟؟؟



الحل:

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} (\text{ق} - \text{ل})\, \text{ءس}$$

مثال(٣١): أكتب قاعدة المساحة المضللة في الشكل ؟؟؟



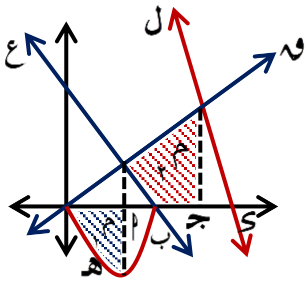
الحل:

$$م = \int_{٠}^{أ} (ق - ٠)\, ءس + \int_{أ}^{ب} (ق - هـ)\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{أ} ق(س)\, ءس + \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{ب} ق(س)\, ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$$

مثال(٣٢): أكتب مجموع المساحات المضللة بالشكل؟؟؟



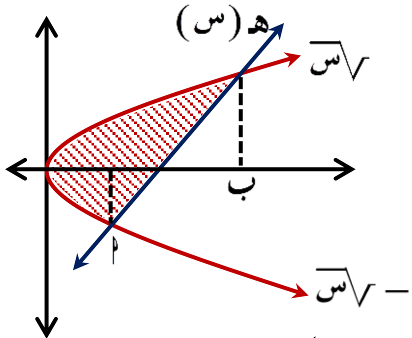
الحل:

$$م_{١} = \int_{٠}^{أ} (٠ - هـ)\, ءس$$

$$م_{٢} = \int_{أ}^{ب} (ق - ع)\, ءس + \int_{ب}^{جـ} (ق - ٠)\, ءس$$

$$م = م_{١} + م_{٢}$$

مثال(٣٣): أكتب قاعدة المساحة المضللة بالشكل ؟؟؟



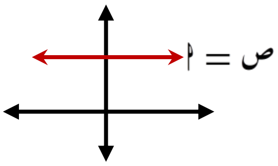
الحل:

$$م = \int_{٠}^{أ} \left(\sqrt{س} + \sqrt{س}\right) ءس$$

$$+ \int_{أ}^{ب} \left(\sqrt{س} - هـ\right) ءس$$

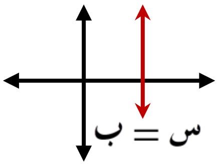
ص = أ

خط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند (أ)



س = ب

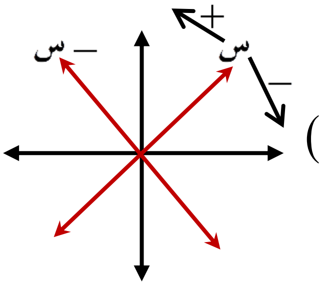
خط مستقيم يوازي محور الصادات ويقطع محور السينات عند (ب)



ق(س) = س

نجد المقطع السيني (س،٠)

نجد المقطع الصادي (٠،ص)

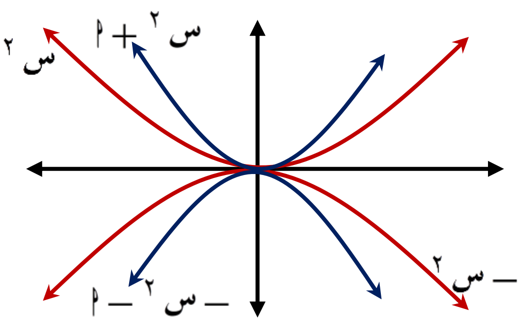


ق(س) = س^{٢}

نجد رأس القطع $\left(\frac{-ب}{٢أ}، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$ أو

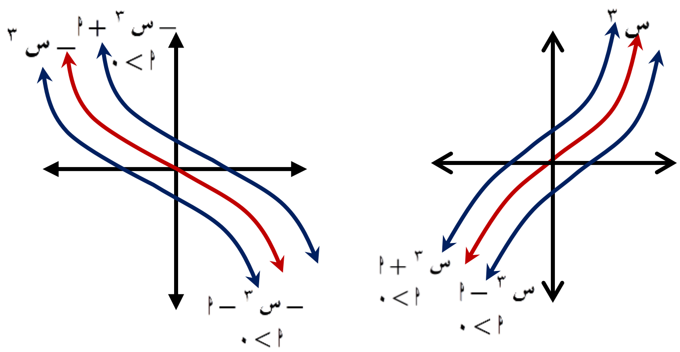
استخدام صفر المشتقة الاولى وصورته

نجد المقاطع السينية و الصادية



اذا كان الاقترانات من نفس النوع مع اختلاف قيمة المطلق (الثابت) لا يمكن ان يتقاطع الاقترانات

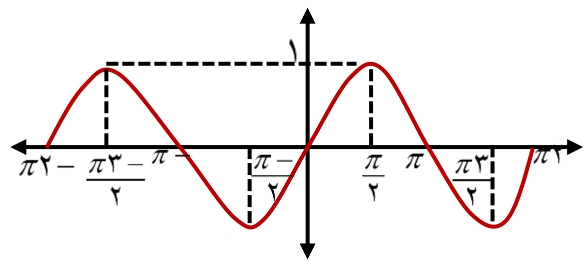
و(س) = س ^{٣}



و(س) = جاس

جاس = ٠ ⟸ س = ٢ π ، π ، ٠ ، ... ، − π ، −٢ π

−١ ≤ جاس ≤ ١

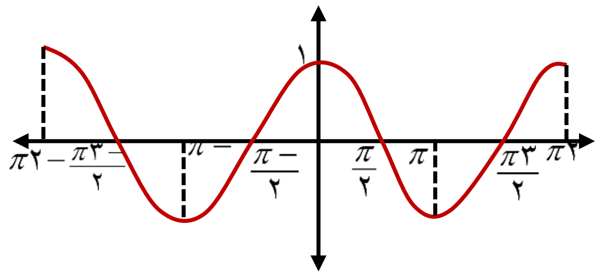


تعامل (π) على المستوى البياني (٣,١٤)

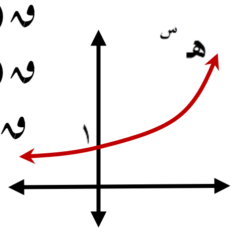
و(س) = جتاس

جتاس = ٠ ⟸ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{-٣\pi}{٢}$

−١ ≤ جتاس ≤ ١



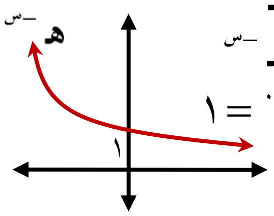
و(س) = هـ ^{س}



و(س) = هـ ^{س}

و(س) = هـ $^{-س}$

و(٠) = هـ ^{٠} = ١

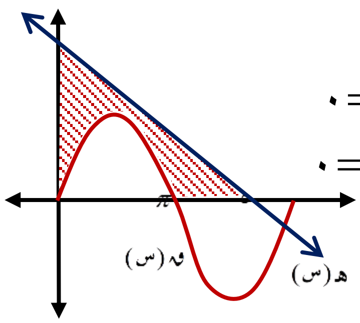


مثال(٣٤): جد مساحة المنطقة المحصورة بين و(س) = جاس ، هـ(س) = ٥ − س والمحورين الموجبين ؟؟؟

الحل:

المحورين ⟸ س = ٠

⟸ ص = ٠



هـ(س) = ٥ − س

س = ٠ ⟸ (٠،٥) ⟸ ص = ٥

و(س) = جاس

و(س) = ٠ ⟸ جاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، π ، ٢ π

م = $\int_{٠}^{\pi}$ (هـ − و) + $\int_{\pi}^{٥}$ (هـ − ٠) ءس

م = $\int_{٠}^{\pi}$ هـ(س) ءس − $\int_{٠}^{\pi}$ و(س) ءس + $\int_{\pi}^{٥}$ هـ(س) ءس

م = $\int_{٠}^{٥}$ هـ(س) ءس − $\int_{٠}^{\pi}$ و(س) ءس

م = $\int_{٠}^{٥}$ (٥ − س) ءس − $\int_{٠}^{\pi}$ جاس ءس

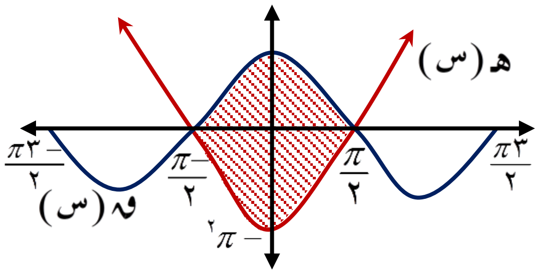
م = $\left[\left(٥س - \frac{س^{٢}}{٢}\right)\right]_{٠}^{٥}$ + $[\text{جتاس}]_{٠}^{\pi}$

م = $\left(٢٥ - \frac{٢٥}{٢}\right)$ − ٠ + (−١ − ١) = $\frac{٢٥}{٢}$ − ٢

م = $\frac{٢١}{٢}$ وحدة مربعة

مثال(٣٥): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = جتاس ، هـ(س) = ٤س² − π² ؟؟؟

الحل:



ق(س) = ٠ ⟸ جتاس = ٠

س = ٣π/٢ ، π/٢ ، −π/٢ ، −٣π/٢

هـ(س) = ٠ ⟸ ٤س² − π² = ٠

(٢س − π)(٢س + π) = ٠ ⟸ س = π/٢ ، −π/٢

هـ(س) = ٤س² − π²

−ب/٢أ = ٠/(٢×٤) = ٠

ق(−ب/٢أ) = ق(٠) = −π²

⟸ (٠، −π²)

ويمكن استخدام صفر المشتقة الاولى وصورته
هـَ(س) = ٨س
هـَ(س) = ٠ ⟸ س = ٠
هـ(٠) = −π²
⟸ (٠، −π²)

م = ∫ من −π/٢ إلى π/٢ (ق − هـ) دس

م = ∫ من −π/٢ إلى π/٢ (جتاس − ٤س² + π²) دس

م = [(جاس − ٤/٣ س³ + π² س)] من −π/٢ إلى π/٢

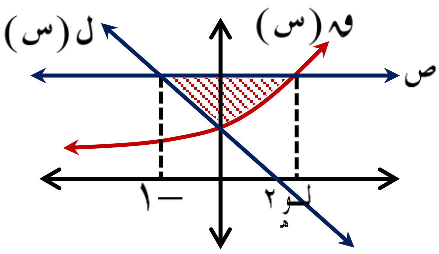
م = ١ − ٤π³/٢٤ + π³/٢ − (−١ + ٤π³/٢٤ − π³/٢)

م = ١ − π³/٦ + π³/٢ + ١ − π³/٦ + π³/٢

م = ٢ − π³/٣ + π³ وحدة مربعة

مثال(٣٦): جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = هـ^س ، ل(س) = ١ − س ، مع المستقيم ص = ٢ ؟؟؟

الحل:



ل(س) = ١ − س

س = ٠ ⟸ ص = ١ ⟸ (٠،١)

ص = ٠ ⟸ س = ١ ⟸ (١،٠)

ل(س) = ص

١ − س = ٢ ⟸ س = −١

ق(س) = ص

هـ^س = ٢ ⟸ س = لوهـ٢

م = ∫ من −١ إلى ٠ (ص − ل) دس + ∫ من ٠ إلى لوهـ٢ (ص − ق) دس

م = ∫ من −١ إلى ٠ (١ + س) دس + ∫ من ٠ إلى لوهـ٢ (٢ − هـ^س) دس

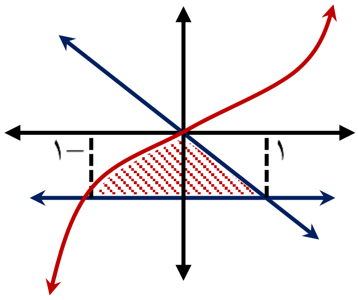
م = [(س + س²/٢)] من −١ إلى ٠ + [(٢س − هـ^س)] من ٠ إلى لوهـ٢

م = (٠ + ١/٢) + (٢لوهـ٢ − ٢)

م = ٥/٢ − ٢لوهـ٢ وحدة مربعة

مثال(٣٧): جد المساحة المحصورة بين $ق(س) = س^{٣}$ ، $هـ(س) = -س$ ، $ص = -١$ ؟؟؟

الحل:



$ق(س) = ص$

$\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{-١} \Leftarrow س = -١$

$ق(س) = هـ(س)$

$س^{٣} = -س \Leftarrow س(س^{٢}+١) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ص = هـ$

$-١ = -س \Leftarrow س = ١$

$$م = \int_{-١}^{٠} (ق - ص)\,دس + \int_{٠}^{١} (هـ - ص)\,دس$$

$$م = \int_{-١}^{٠} (س^{٣}+١)\,دس + \int_{٠}^{١} (-س+١)\,دس$$

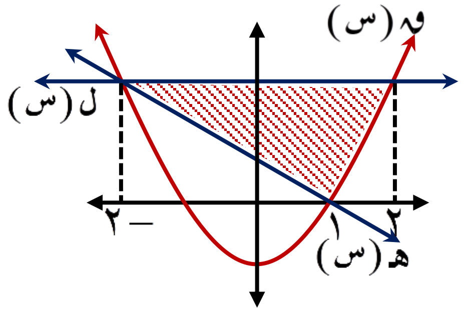
$$م = \left[\left(\frac{س^{٤}}{٤} + س\right)\right]_{-١}^{٠} + \left[\left(\frac{-س^{٢}}{٢} + س\right)\right]_{٠}^{١}$$

$$م = \left(-\frac{١}{٤} + ١\right) + \left(\frac{-١}{٢} + ١\right)$$

$م = \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٤}$ وحدة مربعة

مثال(٣٨): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الاتية: $ق(س) = س^{٢} - ١$ ، $هـ(س) = ١ - س$ ، $ل(س) = ٣$ ؟؟؟

الحل: (كتاب)



$ق(س) = س^{٢} - ١$

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times١} = ٠$

$ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ق(٠) = -١$

$\Leftarrow (٠،-١)$

$هـ(س) = ١ - س$

$س = ٠ \Leftarrow ص = ١ \Leftarrow (٠،١)$

$ص = ٠ \Leftarrow س = ١ \Leftarrow (١،٠)$

$ق(س) = ل(س)$

$س^{٢} - ١ = ٣ \Leftarrow س = ٢،-٢$

$ق(س) = هـ(س)$

$س^{٢} - ١ = ١ - س \Leftarrow س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$(س+٢)(س-١) = ٠ \Leftarrow س = -٢،١$

$$م = \int_{-٢}^{١} (٣-١+س)\,دس + \int_{١}^{٢} (٣-س^{٢}+١)\,دس$$

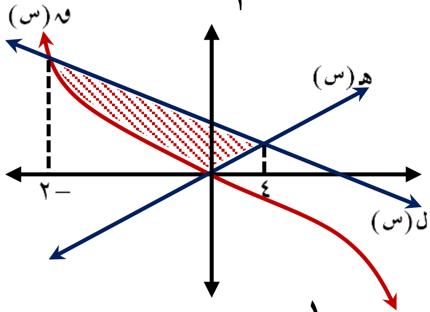
$$م = \left[\left(٢س + \frac{س^{٢}}{٢}\right)\right]_{-٢}^{١} + \left[\left(٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$م = \left(\frac{٩}{٢}\right) + \left(\frac{٥}{٣}\right) = \frac{٣٧}{٦}$ وحدة مربعة

مثال(٣٩): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الاتية: $\text{ق}(\text{س}) = -\text{س}^{٣}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = ٦ - \text{س}$ ؟؟؟

الحل:

(كتاب)



$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠ \Leftarrow (٠،٠)$

$\text{ص} = ١ \Leftarrow \text{س} = ٢ \Leftarrow (٢،١)$

$\text{ل}(\text{س}) = ٦ - \text{س}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٦ \Leftarrow (٠،٦)$

$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٦ \Leftarrow (٦،٠)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

$-\text{س}^{٣} = ٦ - \text{س} \Leftarrow \text{س}^{٣} - \text{س} + ٦ = ٠$

$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	ج	
١	٠	−١	٦	
	−٢	٤	−٦	×
١	−٢	٣	٠	

$(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٣)$

$\Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ} = ٤ - ١٢ = -٨$ لا تحلل

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$-\text{س}^{٣} = \frac{١}{٢}\text{س} \Leftarrow -\text{س}\left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}\right) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

$\frac{١}{٢}\text{س} = ٦ - \text{س} \Leftarrow \frac{٣}{٢}\text{س} = ٦ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٠} (\text{ل} - \text{ق})\, \text{ءس} + \int_{٠}^{٤} (\text{ل} - \text{هـ})\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٠} (٦ - \text{س} + \text{س}^{٣})\, \text{ءس} + \int_{٠}^{٤} \left(٦ - \text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}\right) \text{ءس}$$

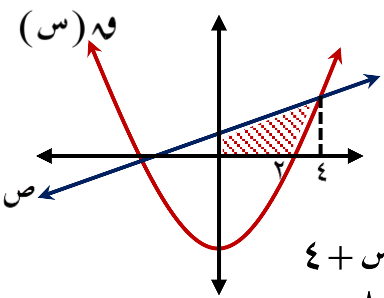
$$\text{م} = \left[\left(٦\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right)\right]_{-٢}^{٠} + \left[\left(٦\text{س} - \frac{٣}{٤}\text{س}^{٢}\right)\right]_{٠}^{٤}$$

$\text{م} = ١٠ + ١٢ = ٢٢$ وحدة مربعة

مثال(٤٠): جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤$ ، والمستقيم $\text{ص} = ٢\text{س} + ٤$ ،والمحورين الاحداثيين ؟؟؟

الحل:

(كتاب)



$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص}$

$\text{س}^{٢} - ٤ = ٢\text{س} + ٤$

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

$(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٢) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٤ ، -٢$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤$

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{٠}{٢(١)} = ٠$

$\text{ق}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) = \text{ق}(٠) = -٤$

$\text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢ ، \text{س} = -٢$

$\text{ص} = ٢\text{س} + ٤$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٤ \Leftarrow (٠،٤)$

$\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٢ \Leftarrow (-٢،٠)$

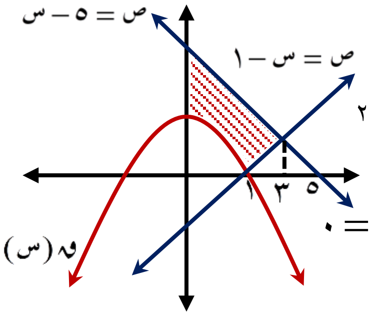
$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (\text{ص} - ٠)\, \text{ءس} + \int_{٢}^{٤} (\text{ص} - \text{ق})\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (٢\text{س} + ٤)\, \text{ءس} + \int_{٢}^{٤} (٢\text{س} - \text{س}^{٢} + ٨)\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[(\text{س}^{٢} + ٤\text{س})\right]_{٠}^{٢} + \left[\left(\text{س}^{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٨\text{س}\right)\right]_{٢}^{٤}$$

$\text{م} = ١٢ + \frac{٢٨}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة

مثال(٤١): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ١ - س^{٢}$ ، ومحور الصادات والمستقيم $س + ص = ٥$ ، والمستقيم $ص = س - ١$ ؟؟؟ (كتاب)



الحل:

$ق(س) = ١ - س^{٢}$

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢(-١)} = ٠$

$ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ق(٠) = ١$

$ق(س) = ٠ \Leftarrow ١ - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ١ ، -١$

$١ - س^{٢} = ٥ - س \Leftarrow س^{٢} - س + ٤ = ٠$

$\Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$

$(-١)^{٢} - ٤(١)(٤) = -١٥ \Leftarrow$ لا تحلل

∴ لا يتقاطعان

$ق(س) = س - ١$

$١ - س^{٢} = س - ١$

$س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = -٢ ، ١$

$٥ - س = س - ١ \Leftarrow س = ٣$

$س + ص = ٥ \Leftarrow ص = ٥ - س$

$س = ٠ \Leftarrow ص = ٥ \Leftarrow (٠، ٥)$

$ص = ٠ \Leftarrow س = ٥ \Leftarrow (٥، ٠)$

$ص = س - ١$

$س = ٠ \Leftarrow ص = -١ \Leftarrow (٠، -١)$

$ص = ٠ \Leftarrow س = ١ \Leftarrow (١، ٠)$

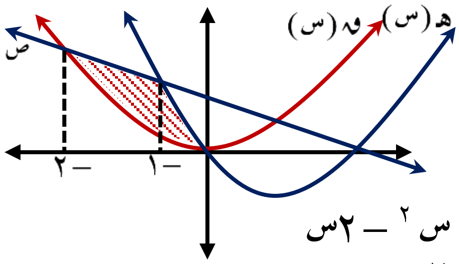
$$م = \int_{٠}^{١} (٤ - س + س^{٢})\,دس + \int_{١}^{٣} (٦ - ٢س)\,دس$$

$$م = \left[\left(٤س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣}\right)\right]_{٠}^{١} + \left[(٦س - س^{٢})\right]_{١}^{٣}$$

$م = \frac{٢٣}{٦} + ٤ = \frac{٤٧}{٦}$ وحدة مربعة

سؤال وزاري: جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الثاني والمحصورة بين منحنى الاقترانين $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٢س$ والمستقيم $ص = ٢ - س$ ؟؟؟

الحل:



$هـ(س) = س^{٢} - ٢س$

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٢}{٢(١)} = ١$

$ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ق(١) = -١$

$\Leftarrow (١، -١)$

$هـ(س) = ٠$

$س^{٢} - ٢س = ٠ \Leftarrow س(س - ٢) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠ ، س = ٢$

$ق(س) = ص$

$س^{٢} = ٢ - س \Leftarrow س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow س = -٢، س = ١$

$هـ(س) = ص$

$س^{٢} - ٢س = ٢ - س$

$\Leftarrow س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$\Leftarrow س = ٢، س = -١$

$ص = ٢ - س$

$س = ٠ \Leftarrow ص = ٢ \Leftarrow (٠، ٢)$

$ص = ٠ \Leftarrow س = ٢ \Leftarrow (٢، ٠)$

$$م = \int_{-٢}^{-١} (٢ - س - س^{٢})\,دس$$

$$+ \int_{-١}^{} (س^{٢} - ٢س - س^{٢})\,دس$$

$$م = \left[\left(٢س - \frac{١}{٢}س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right)\right]_{-٢}^{-١}$$

$$+ \int_{-١}^{٠} -٢س \, ءس = \left[\left(-س^{٢}\right)\right]_{-١}^{٠}$$

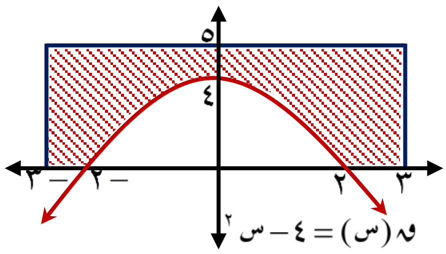
$$م = \left(-٢ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}\right) - \left(-٦ + \frac{٨}{٣}\right) + ١$$

$$م = \frac{-٥}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١٠}{٣} + ١ = \frac{-٥}{٢} + \frac{١١}{٣} + ١$$

$$م = \frac{٧}{٦} + ١ = \frac{١٣}{٦}$$ وحدة مربعة

$$م = \frac{٣٥}{٦} + ١ = \frac{٤١}{٦}$$

مثال(٤٢): جد المساحة المظللة في الشكل ؟؟؟



الحل:

م = مساحة المستطيل − مساحة المنطقة تحت الاقتران

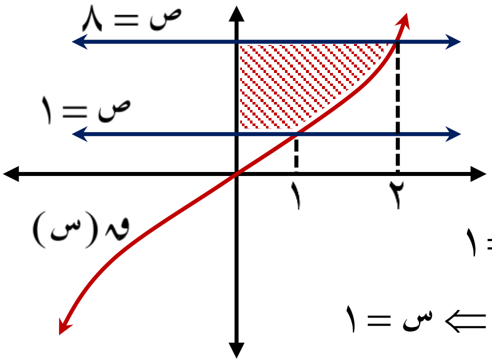
$$م = ٥ \times ٦ - \int_{-٢}^{٢} \left(٤ - س^{٢}\right) ءس$$

$$م = ٣٠ - \left[\left(٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\right]_{-٢}^{٢}$$

$$م = ٣٠ - \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right)$$

$$م = ٣٠ - \frac{٣٢}{٣} = \frac{٥٨}{٣}$$ وحدة مربعة

مثال(٤٣): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣}$ والمستقيمين $ص = ١$ ، $ص = ٨$ ومحور الصادات ؟؟؟



الحل:

$$ق(س) = ١$$

$$س^{٣} = ١ \Leftarrow س = ١$$

$$ق(س) = ٨$$

$$س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$$

$$م = \int_{٠}^{١} (٨ - ١) ءس + \int_{١}^{٢} (٨ - ق) ءس$$

$$م = ٧(١ - ٠) + \int_{١}^{٢} \left(٨ - س^{٣}\right) ءس$$

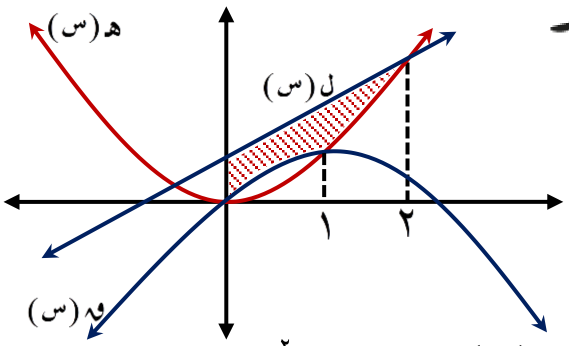
$$م = ٧(١ - ٠) + \left[\left(٨س - \frac{س^{٤}}{٤}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$$م = ٧ + \left(١٢ - ٨ + \frac{١}{٤}\right)$$

$$م = ٧ + ٤ + \frac{١}{٤} = \frac{٤٥}{٤}$$ وحدة مربعة

مثال(٤٤): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق(س)} = \text{٢س} - \text{س}^{\text{٢}}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{س}^{\text{٢}}$ ، $\text{ل(س)} = \text{س} + \text{٢}$ مع محور الصادات ؟؟؟

الحل:



$$\text{ق(س)} = \text{٢س} - \text{س}^{\text{٢}}$$

$$\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{٢}}{\text{٢}\times -\text{١}} = \text{١}$$

$$\text{ق}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}}\right) = \text{ق(١)} = \text{١}$$

$$(\text{١،١})$$

$$\text{ق(س)} = \text{٠}$$

$$\text{٢س} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{٠} \Leftarrow \text{س(٢} - \text{س)} = \text{٠}$$

$$\text{س} = \text{٠} \Leftarrow \text{ص} = \text{٠} \Leftarrow (\text{٠،٠})$$

$$\text{س} = \text{٢} \Leftarrow \text{ص} = \text{٠} \Leftarrow (\text{٢،٠})$$

$$\text{ق(س)} = \text{هـ(س)}$$

$$\text{٢س} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{٢س} - \text{٢س}^{\text{٢}} = \text{٠}$$

$$\text{٢س(١} - \text{س)} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{٠ ، ١}$$

$$\text{ل(س)} = \text{هـ(س)}$$

$$\text{س} + \text{٢} = \text{س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢} = \text{٠}$$

$$(\text{س} - \text{٢})(\text{س} + \text{١}) = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = \text{٢ ، } -\text{١}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{ل} - \text{ق})\,\text{دس} + \int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{ل} - \text{هـ})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{س} + \text{٢} - \text{٢س} + \text{س}^{\text{٢}})\,\text{دس}$$

$$+ \int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{س} + \text{٢} - \text{س}^{\text{٢}})\,\text{دس}$$

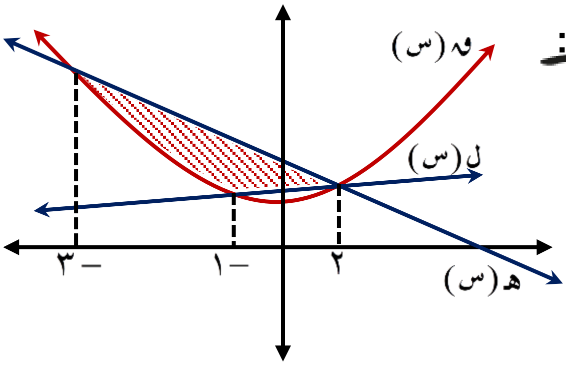
$$\text{م} = \left[\left(\text{٢س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}}\right)\right]_{\text{٠}}^{\text{١}}$$

$$+ \left[\left(\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{٢س} - \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}}\right)\right]_{\text{١}}^{\text{٢}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{١١}}{\text{٦}} + \frac{\text{٧}}{\text{٦}} = \frac{\text{١٨}}{\text{٦}} = \text{٣ وحدة مربعة}$$

مثال(٤٥): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{١}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{٧} - \text{س}$ ، $\text{ل(س)} = \text{س} + \text{٣}$ ؟؟؟

الحل:



$$\text{ق(س)} = \text{هـ(س)}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} + \text{١} = \text{٧} - \text{س} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦} = \text{٠}$$

$$(\text{س} + \text{٣})(\text{س} - \text{٢}) = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = -\text{٣، ٢}$$

$$\text{ق(س)} = \text{ل(س)}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} + \text{١} = \text{س} + \text{٣} \Leftarrow \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢} = \text{٠}$$

$(\text{س}-٢)(\text{س}+١)=٠ \Leftarrow \text{س}=٢،-١$

$\text{هـ}(\text{س})=\text{ل}(\text{س})$

$\text{هـ}(\text{س})=\text{ل}(\text{س})$

$٧-\text{س}=\text{س}+٣ \Leftarrow \text{س}=٢$

$$\text{م}=\int_{-٣}^{-١}(\text{هـ}-\text{ٯ})\,\text{دس}+\int_{-١}^{٢}(\text{هـ}-\text{ل})\,\text{دس}$$

$$\text{م}=\int_{-٣}^{-١}(٦-\text{س}-\text{س}^٢)\,\text{دس}+\int_{-١}^{٢}(٤-٢\text{س})\,\text{دس}$$

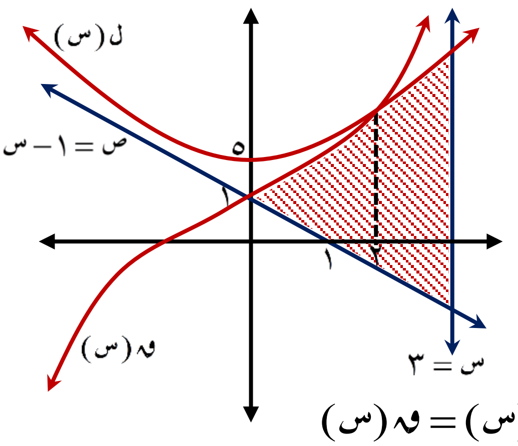
$$\text{م}=\left[\left(٦\text{س}-\frac{\text{س}^٢}{٢}-\frac{\text{س}^٣}{٣}\right)\right]_{-٣}^{-١}+\left[\left(٤\text{س}-\text{س}^٢\right)\right]_{-١}^{٢}$$

$$\text{م}=\left(\frac{-٣٧}{٦}+\frac{٢٧}{٢}\right)+(٤+٥)$$

$$\text{م}=\frac{٤٤}{٦}+٩=\frac{٤٩}{٣}\ \text{وحدة مربعة}$$

مثال(٤٦): جد المساحة المحصورة بين
$\text{ٯ}(\text{س})=\text{س}^٣+١$ ،
$\text{ل}(\text{س})=\text{س}^٢+٥$ ، $\text{س}+\text{ص}-١=٠$
والمستقيم $٣-\text{س}=٠$ ؟؟؟

الحل:



$\text{ل}(\text{س})=\text{ٯ}(\text{س})$

$\text{س}^٢+٥=\text{س}^٣+١ \Leftarrow \text{س}^٣-\text{س}^٢-٤=٠$

$\Leftarrow$ $\text{س}=٢$ من الاصفار المحتملة

	س³	س²	س	جـ
×	٠	−١	٠	−٤
٢		٢	٢	٤
	١	١	٢	٠

$(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+\text{س}+٢)=٠$

$\Delta=\text{ب}^٢-٤\text{أجـ}$

$\Delta=١-٤\times١\times٢=-٧$ لا تحلل

$\text{ل}(\text{س})=\text{ص}$

$\text{س}^٢+٥=١-\text{س} \Leftarrow \text{س}^٢+\text{س}+٤=٠$

$\Delta=\text{ب}^٢-٤\text{أجـ}$

$\Delta=١^٢-٤\times١\times٤=-١٥$ لا يوجد تقاطع

$$\text{م}=\int_{٠}^{٢}(\text{ٯ}-\text{ص})\,\text{دس}+\int_{٢}^{٣}(\text{ل}-\text{ص})\,\text{دس}$$

$$\text{م}=\int_{٠}^{٢}(\text{س}^٣+\text{س})\,\text{دس}+\int_{٢}^{٣}(\text{س}^٢+٤+\text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{م}=\left[\left(\frac{\text{س}^٤}{٤}+\frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\right]_{٠}^{٢}+\left[\left(\frac{\text{س}^٣}{٣}+٤\text{س}+\frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\right]_{٢}^{٣}$$

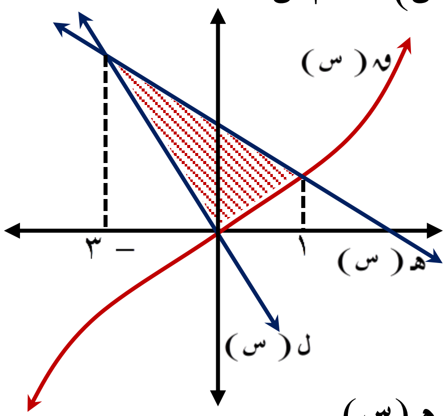
$$\text{م}=٦+\left(\left(٩+١٢+\frac{٩}{٢}\right)-\left(\frac{٨}{٣}+٨+٢\right)\right)$$

$$\text{م}=٦+\left(\frac{٥١}{٢}-\frac{٣٨}{٣}\right)$$

$$\text{م}=٦+\frac{٧٧}{٦}=\frac{١١٣}{٦}\ \text{وحدة مربعة}$$

مثال(٤٧): جد المساحة المحصورة بين $ق(س) = ٢س^{٣}$ ، $هـ(س) = ٣ - س$ ، $ل(س) = -٢س$ ؟؟؟

الحل:



$ق(س) = هـ(س)$

$٢س^{٣} = ٣ - س \Leftarrow ٢س^{٣} + س - ٣ = ٠$

$\Leftarrow$ $س = ١$ احدى الاصفار المحتملة

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	ج
×	٢	٠	١	-٣
١		٢	٢	٣
	٢	٢	٣	٠

$(س - ١)(٢س^{٢} + ٢س + ٣)$

$هـ(س) = ل(س)$

$٣ - س = -٢س \Leftarrow س = -٣$

$م = \int_{-٣}^{٠} (هـ - ل)\,دس + \int_{٠}^{١} (هـ - ق)\,دس$

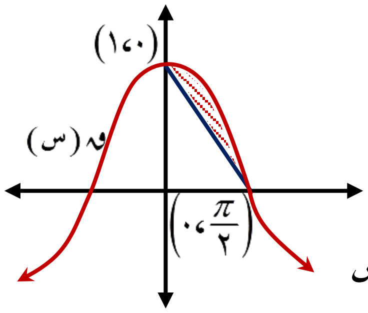
$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ + س)\,دس + \int_{٠}^{١} (٣ - س - ٢س^{٣})\,دس$

$م = \left[\left(٣س + \frac{س^{٢}}{٢}\right)\right]_{-٣}^{٠} + \left[\left(٣س - \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}س^{٤}\right)\right]_{٠}^{١}$

$م = \frac{٩}{٢} + ٢ = \frac{١٣}{٢}$ وحدة مربعة

مثال(٤٨): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) =$ جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(٠ ، ١)$،$(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$ ؟؟؟

الحل:



الاقترانات:

$ق(س) =$ جتاس

القطعة المستقيمة المواصلة بين النقطتين $(٠ ، ١)$،$(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

$م = \frac{ص_{١} - ص_{٢}}{س_{١} - س_{٢}} = \frac{١ - ٠}{٠ - \frac{\pi}{٢}} = \frac{-٢}{\pi}$

المعادلة $\Leftarrow ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٠ = \frac{-٢}{\pi}\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$

$ص = \frac{-٢}{\pi}س + ١$

$ق(س) = ص$

جتاس $= \frac{-٢}{\pi}س + ١ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$، $س = ٠$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (ق - ص)\,دس$

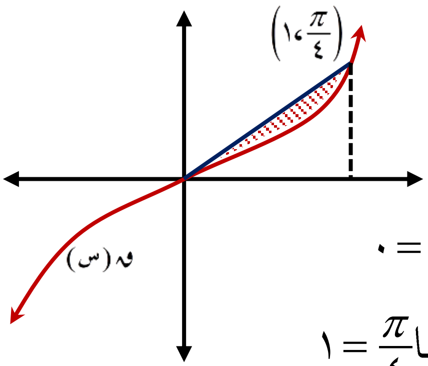
$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جتاس} + \frac{٢}{\pi}س - ١\right)\,دس$

$م = \left[\left(\text{جاس} + \frac{١}{\pi}س^{٢} - س\right)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$م = ١ + \frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٢} = \frac{٤ - \pi}{٤}$ وحدة مربعة

مثال(٤٩): جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ و القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(٠،٠)$، $\left(\frac{\pi}{٤}،١\right)$ ؟؟؟

الحل:



$\text{ق}(٠) = \text{ظا}٠ = ٠$

$\text{ق}\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \text{ظا}\frac{\pi}{٤} = ١$

اذا النقطتان تقعان على منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$

$$\text{م} = \frac{١ - ٠}{\frac{\pi}{٤} - ٠} = \frac{٤}{\pi}$$

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$$

$$\text{ص} - ٠ = \frac{٤}{\pi}(\text{س} - ٠) \Leftarrow \text{ص} = \frac{٤}{\pi}\text{س}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{ص} - \text{ق})\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \left(\frac{٤}{\pi}\text{س} - \text{ظاس}\right) \text{ءس}$$

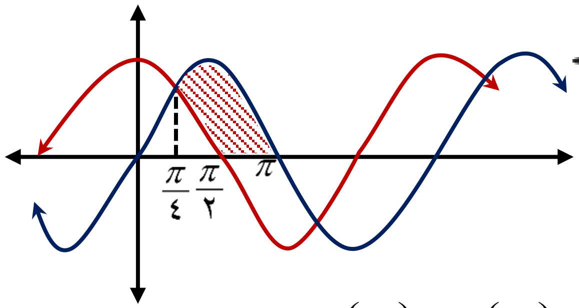
$$\text{م} = \left[\left(\frac{٢}{\pi}\text{س}^٢ - \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}|\right)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$\text{م} = \left(\frac{\pi}{٨} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٢}}\right|\right) - \left(٠ - \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{جتا}٠)\right)$$

$$\text{م} = \left(\frac{\pi}{٨} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(٥٠): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جتاس}$ ، ومحور السينات في الفترة $\left[\frac{\pi}{٤}، \pi\right]$ ؟؟؟

الحل:



$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$$

$$(\text{جاس} = \text{جتاس}) \div \text{جتاس} \Leftarrow \text{ظاس} = ١$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٤} \in \left[\frac{\pi}{٤}، \pi\right]$$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{جاس} = ٠$$

$$\Leftarrow \text{س} = \pi \in \left[\frac{\pi}{٤}، \pi\right]$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{جتاس} = ٠$$

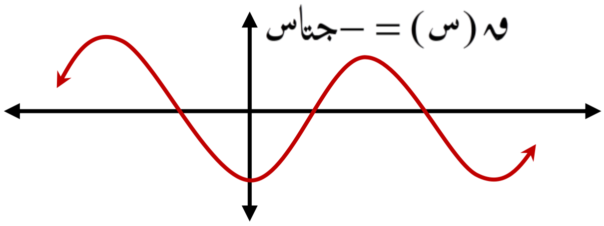
$$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \in \left[\frac{\pi}{٤}، \pi\right]$$

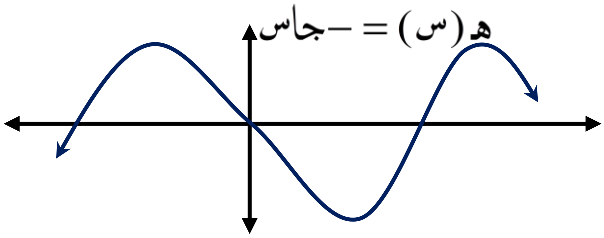
$$\text{م} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{ق} - \text{هـ})\, \text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} (\text{ق} - \text{ص})\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جاس} - \text{جتاس})\, \text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} (\text{جاس})\, \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[(-\text{جتاس} - \text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} + \left[(-\text{جتاس})\right]_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi}$$

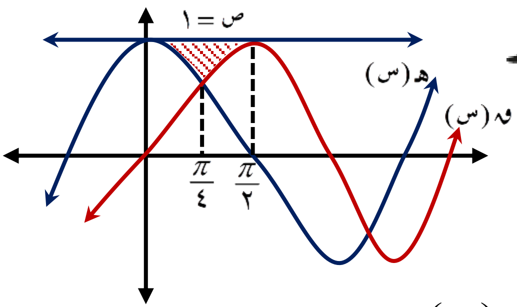
$$\text{م} = -١ + \sqrt{٢} + ١ = \sqrt{٢} \text{ وحدة مربعة}$$





مثال(٥١): جد المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الاتية : ق(س) = جاس ، ه(س) = جتاس ، ص = ١ في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ؟؟؟

الحل:



$$\text{ه}(س) = ص$$

$$\text{جتاس} = ١ \Leftarrow س = ٠ \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$$

$$\text{ق}(س) = \text{ه}(س)$$

$$(\text{جاس} = \text{جتاس}) \div \text{جتاس} \Leftarrow \text{ظاس} = ١$$

$$\Leftarrow س = \frac{\pi}{٤} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$$

$$\text{ق}(س) = ص$$

$$\text{جاس} = ١ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$$

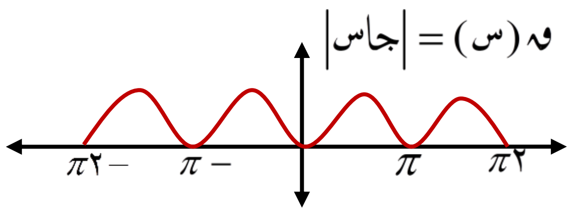
$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (ص - \text{ه})\, دس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (ص - \text{ق})\, دس$$

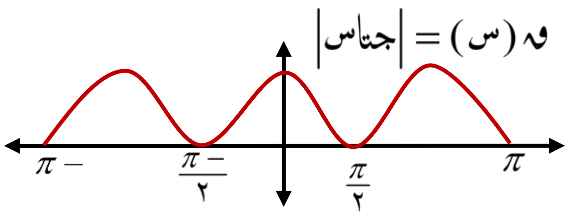
$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (١ - \text{جتاس})\, دس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (١ - \text{جاس})\, دس$$

$$م = \left[(س - \text{جاس})\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \left[(س + \text{جتاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$م = \left(\frac{\pi}{٤} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) + \left(\left(\frac{\pi}{٢}\right) - \left(\frac{\pi}{٤} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\right)$$

$$م = \frac{\pi}{٢} - \sqrt{٢} \text{ وحدة مربعة}$$



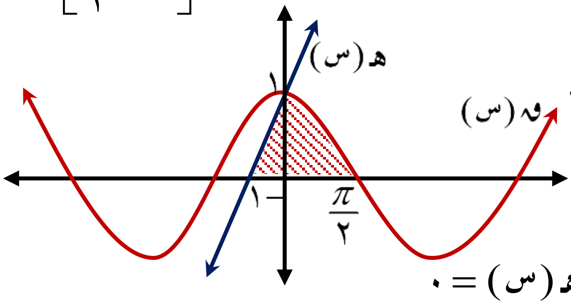


مثال(٥٢): جد المساحة المحصورة بين

$ق(س) = جتاس$ ، $هـ(س) = س + ١$ ،

ومحور السينات في الفترة $\left[-١ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ ؟؟؟

الحل:



$هـ(س) = ٠$

$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

$ق(س) = ٠$

$جتاس = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$

$ق(س) = هـ(س)$

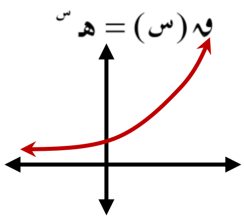
$جتاس = س + ١$ (من الرسم) مختلفان بالنوع

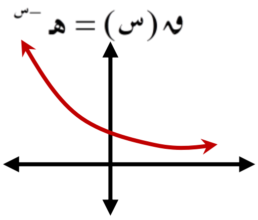
$$م = \int_{-١}^{٠} (هـ - ٠)\, ءس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (ق - ٠)\, ءس$$

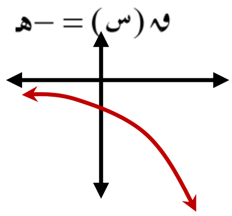
$$م = \int_{-١}^{٠} (س + ١)\, ءس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتاس)\, ءس$$

$$م = \left[\left(\frac{س^{٢}}{٢} + س\right)\right]_{-١}^{٠} + \left[(جاس)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$م = \left(٠ - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right) + (١ - ٠) = \frac{٣}{٢}$$ وحدة مربعة





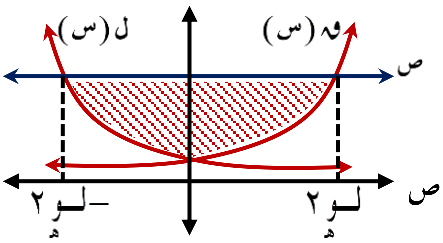


مثال(٥٣): جد المساحة المحصورة بين

$ق(س) = هـ^{س}$ ، $ل(س) = هـ^{-س}$ ،

$ص = ٢$ ؟؟؟

الحل:



$ل(س) = ص$

$هـ^{-س} = ٢ \Leftarrow س = -لو_{هـ}٢$

$ق(س) = ل(س)$

$هـ^{س} = هـ^{-س} \Leftarrow س = -س \Leftarrow س = ٠$

$ق(س) = ص$

$هـ^{س} = ٢ \Leftarrow س = لو_{هـ}٢$

$$م = \int_{-لو_{هـ}٢}^{٠} (ص - ل)\, ءس + \int_{٠}^{لو_{هـ}٢} (ص - ق)\, ءس$$

$$م = \int_{-لو_{هـ}٢}^{٠} (٢ - هـ^{-س})\, ءس + \int_{٠}^{لو_{هـ}٢} (٢ - هـ^{س})\, ءس$$

$$م = \left[(٢س + هـ^{-س})\right]_{-لو_{هـ}٢}^{٠} + \left[(٢س - هـ^{س})\right]_{٠}^{لو_{هـ}٢}$$

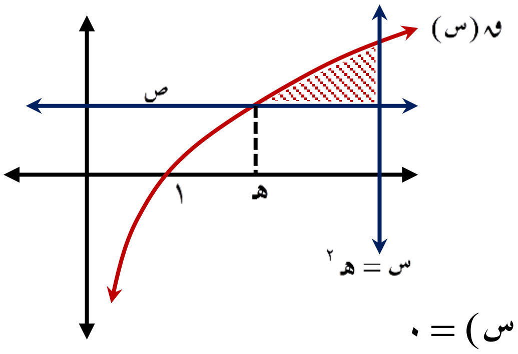
$$م = \left(١ - \left(-٢لو_{هـ}٢ + ٢\right)\right) + \left(\left(٢لو_{هـ}٢ - ٢\right) - (٠ - ١)\right)$$

$$م = ١ + ٢لو_{هـ}٢ - ٢ + ٢لو_{هـ}٢ - ٢ + ١$$

$$م = ٤لو_{هـ}٢ - ٢$$ وحدة مربعة

مثال(٥٤): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{ص} = ١$ ، والمستقيم $\text{س} - \text{هـ}^{٢} = ٠$ ؟؟؟

الحل:



$\text{ق}(\text{س}) = ٠$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = \text{س} \Leftarrow \text{س} = ١$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = ١ \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}$

$$\text{م} = \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} (\text{ق} - \text{ص})\,\text{ءس} = \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ١\right)\text{ءس}$$

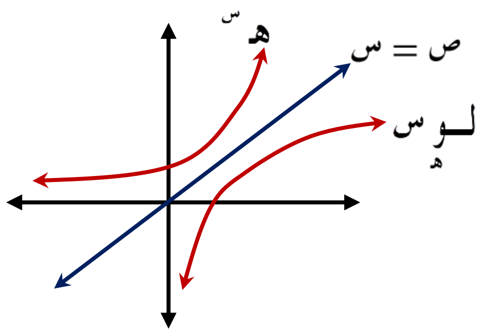
$$\text{م} = \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)\text{ءس} + \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} (١)\,\text{ءس}$$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \text{س}$

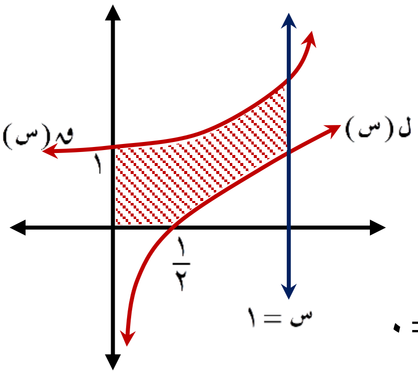
$$\text{م} = \left[\left(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)\right]_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} - \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} (١)\,\text{ءس} + \left(\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}\right)$$

$\text{م} = ٢\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}$ وحدة مربعة



مثال(٥٥): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س})$ والمستقيم $\text{س} = ١$ مع المحورين الاحداثيين ؟؟؟

الحل:



$\text{ل}(\text{س}) = ٠$

$\text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (\text{ق} - ٠)\,\text{ءس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (\text{ق} - \text{ل})\,\text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)\text{ءس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \left(\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س})\right)\text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س})\,\text{ءس}$$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢\text{س}$ ، $\text{ءهـ} = \text{ءس}$

$\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$ ، $\text{هـ} = \text{س}$

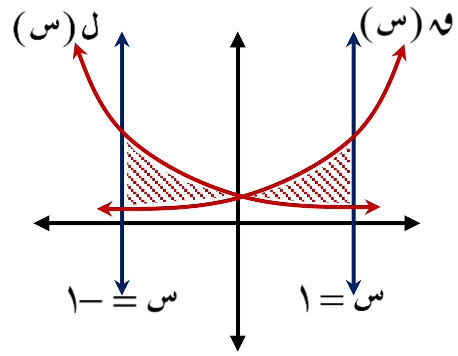
$$\text{م} = \left[\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢\text{س}\right)\right]_{\frac{١}{٢}}^{١} - \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \text{ءس}$$

$$\text{م} = (\text{هـ} - ١) + \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢ - ٠\right) - \left(١ - \frac{١}{٢}\right)$$

$\text{م} = \text{هـ} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢ - \frac{٣}{٢}$ وحدة مربعة

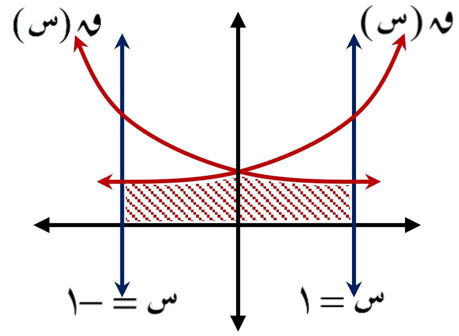
مثال(٥٦): ضلل المنطقة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{س}}$ مع المستقيمين $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = -١$ ؟؟؟

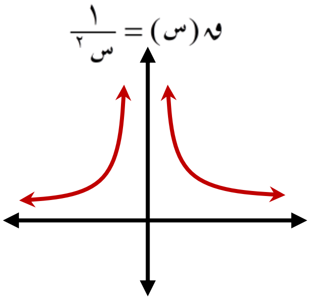
الحل:

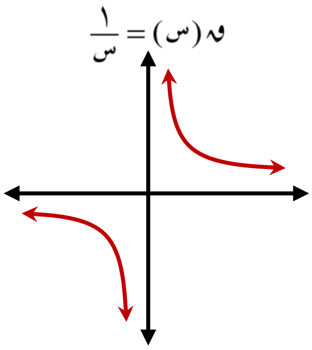


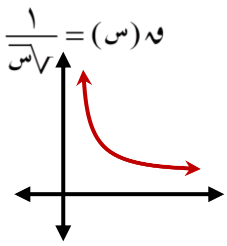
مثال(٥٧): ظلل المنطقة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}^{-\text{س}}$ ومحور السينات في الفترة $[-١، ١]$ ؟؟؟

الحل:



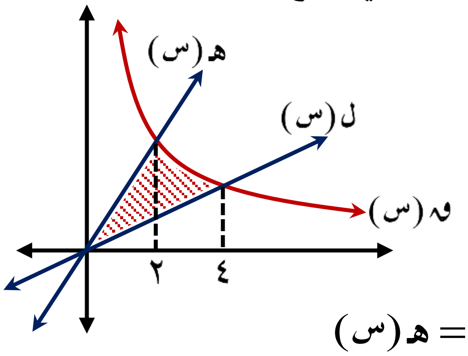






مثال(٥٨): جد المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \frac{١}{٤}\text{س}$ والواقعة في الربع الاول ؟؟؟

الحل:



$$\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$$

$$\frac{١}{٤}\text{س} = \text{س} \Leftarrow \text{س} = ٠$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{س} = \frac{٤}{\text{س}} \Leftarrow \text{س}^٢ = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢ \checkmark ، \text{س} = -٢ \times$$

$$\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$$

$$\frac{١}{٤}\text{س} = \frac{٤}{\text{س}} \Leftarrow \text{س}^٢ = ١٦ \Leftarrow \text{س} = ٤ ، \text{س} = -٤$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (\text{هـ} - \text{ل})\, \text{ء س} + \int_{٢}^{٤} (\text{ق} - \text{ل})\, \text{ء س}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} \left(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}\right) \text{ء س} + \int_{٢}^{٤} \left(\frac{٤}{\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{س}\right) \text{ء س}$$

$$\text{م} = \left[\left(\frac{٣}{٨}\text{س}^٢\right)\right]_{٠}^{٢} + \left[\left(٤ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{١}{٨}\text{س}^٢\right)\right]_{٢}^{٤}$$

$$\text{م} = \frac{١٢}{٨} + \left(\left(٨ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - ٢\right) - \left(٤ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \frac{١}{٢}\right)\right)$$

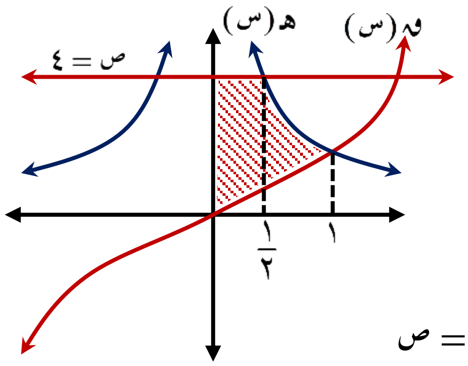
$$\text{م} = \frac{٣}{٢} + ٤ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \frac{٣}{٢} = ٤ \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(٥٩): جد المساحة المحصورة بين منحنيات

$\text{و}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، $\text{ه}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ، $\text{ص} = ٤$

مع محور الصادات في الربع الاول ؟؟؟

الحل:



$\text{ه}(\text{س}) = \text{ص}$

$\frac{١}{\text{س}^{٢}} = ٤ \Leftarrow ٤\text{س}^{٢} = ١ \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢} ، \text{س} = \frac{-١}{٢}$

$\text{و}(\text{س}) = \text{ه}(\text{س})$

$\text{س}^{٣} = \frac{١}{\text{س}^{٢}} \Leftarrow \text{س} = ١ \Leftarrow (١،١)$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (\text{ص} - \text{و})\,\text{د}\text{س} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (\text{ه} - \text{و})\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} (٤ - \text{س}^{٣})\,\text{د}\text{س} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - \text{س}^{٣}\right)\text{د}\text{س}$$

$$\text{م} = \left[\left(٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right)\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + \left[\left(\frac{-١}{\text{س}} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right)\right]_{\frac{١}{٢}}^{١}$$

$$\text{م} = \left(٢ - \frac{١}{٦٤}\right) + \left(-١ - \frac{١}{٤}\right) - \left(-٢ - \frac{١}{٦٤}\right)$$

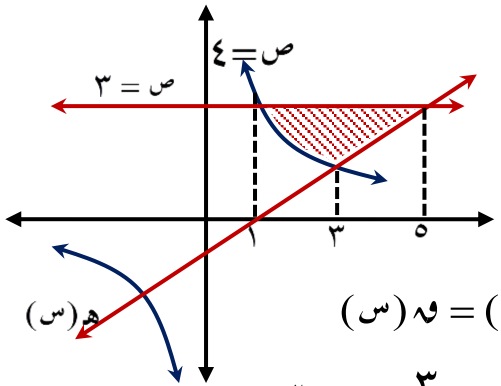
$\text{م} = ٣ - \frac{١}{٤} = \frac{١١}{٤}$ وحدة مربعة

مثال(٦٠): جد المساحة المحصورة بين منحنيات

الاقترانات $\text{و}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}}$ ،

$\text{ه}(\text{س}) = \text{س} - ٢$ ،والمستقيم $\text{ص} = ٣$ ؟؟؟

الحل:



$\text{ه}(\text{س}) = \text{و}(\text{س})$

$\text{س} - ٢ = \frac{٣}{\text{س}} \Leftarrow \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٣ \checkmark ، \text{س} = -٢ \times$

$\text{و}(\text{س}) = \text{ص}$

$\frac{٣}{\text{س}} = ٣ \Leftarrow \text{س} = ١$

$\text{ه}(\text{س}) = \text{ص}$

$\text{س} - ٢ = ٣ \Leftarrow \text{س} = ٥$

$$\text{م} = \int_{١}^{٣} (\text{ص} - \text{و})\,\text{د}\text{س} + \int_{٣}^{٥} (\text{ص} - \text{ه})\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{م} = \int_{١}^{٣} \left(٣ - \frac{٣}{\text{س}}\right)\text{د}\text{س} + \int_{٣}^{٥} (٥ - \text{س})\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{م} = \left[\left(٣\text{س} - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س}\right)\right]_{١}^{٣} + \left[\left(٥\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right)\right]_{٣}^{٥}$$

$$\text{م} = \left(٩ - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}\,٣\right) - \left(٣ - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}\,١\right)$$

$$+ \left(٢٥ - \frac{٢٥}{٢}\right) - \left(١٥ - \frac{٩}{٢}\right)$$

$$\text{م} = ٦ - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}\,٣ + ١٠ - \frac{١٦}{٢}$$

$\text{م} = ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}\,٣ + ٨$ وحدة مربعة

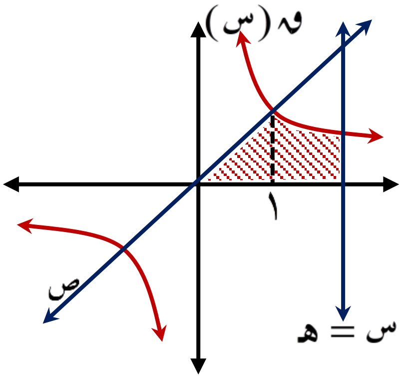
مثال(٦١): جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول المحصورة بين منحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٢}{س}$ ، ومحور السينات والمستقيم

$٢س - ص = ٠$ و المستقيم $هـ - س = ٠$

(هـ: العدد النيبيري) ؟؟؟ (كتاب)

الحل:



$ق(س) = ص$

$\frac{٢}{س} = ٢س \Leftarrow س = ١ ✓ ، س = -١ ✗$

$$م = \int_{٠}^{١} (ص - ٠)\, دس + \int_{١}^{هـ} (ق - ٠)\, دس$$

$$م = \int_{٠}^{١} (٢س)\, دس + \int_{١}^{هـ} \left(\frac{٢}{س}\right) دس$$

$$م = \left[(س^{٢})\right]_{٠}^{١} + \left[\left(٢ لـو_{هـ} |س|\right)\right]_{١}^{هـ}$$

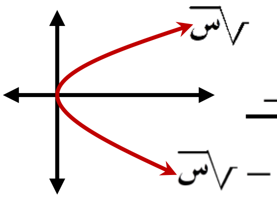
$م = (١ - ٠) + ٢(١ - ٠) = ٣$ وحدة مربعة

ويمكن رسم الجذر التربيعي حسب دراسة الاشارة

$ق(س) = \sqrt{س}$

$ق(س) = -\sqrt{س}$

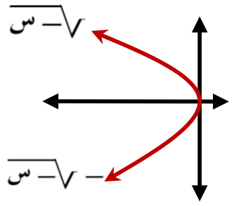
-- ++ (٠)



$ق(س) = \sqrt{-س}$

$ق(س) = -\sqrt{-س}$

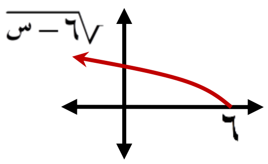
++ -- (٠)



مثلا:

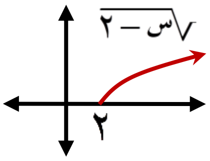
☒ $ق(س) = \sqrt{٦ - س}$

++ -- (٦)



☒ $ق(س) = \sqrt{س - ٢}$

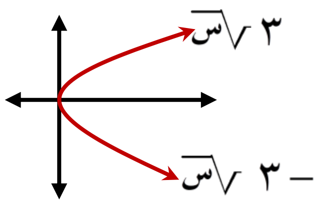
-- ++ (٢)



☒ $ص^{٢} = ٩س$

$ص = \begin{cases} ٣\sqrt{س} \\ -٣\sqrt{س} \end{cases}$

-- ++ (٠)



لرسم $ق(س) = \frac{\pm جـ}{أس + ب} \pm د$

١) نحدد الارباع من خلال اشارة (جـ) و (أ)

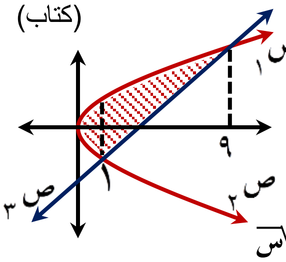
أ) متشابهان في الربع الاول والثالث

ب) مختلفان في الربع الثاني والرابع

٢) نقطة التماثل :

(صفر المقام ، د)

مثال(٦٢): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص^٢ = ٤س$ ، والمستقيم $س - ص = ٣$ ؟؟؟ (كتاب)



الحل:

$ص^٢ = ٤س$: $ص_١ = ٢\sqrt{س}$ ، $ص_٢ = -٢\sqrt{س}$

$س - ص = ٣ \Leftarrow ص_٣ = س - ٣$

$ص_١ = ص_٢$

$٢\sqrt{س} = -٢\sqrt{س} \Leftarrow ٤\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ص_١ = ص_٣$

$٢\sqrt{س} = س - ٣ \Leftarrow س - ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$

$(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ١) = ٠$

$\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow س = ٩$ ، $\sqrt{س} = -١$ ✗

ويمكن حلها بالتربيع

$ص_٢ = ص_٣$

$-٢\sqrt{س} = س - ٣ \Leftarrow س + ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$

$(\sqrt{س} + ٣)(\sqrt{س} - ١) = ٠$

$\Leftarrow \sqrt{س} = -٣$ ✗ ، $\sqrt{س} = ١ \Leftarrow س = ١$

$ص_١ = ٠ \Leftarrow ٢\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ص_٢ = ٠ \Leftarrow -٢\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$$م = \int_{٠}^{١} (ص_١ - ص_٢)\, ءس + \int_{١}^{٩} (ص_١ - ص_٣)\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{١} (٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{س})\, ءس$$

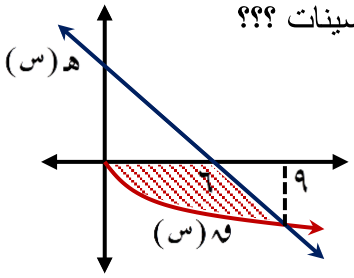
$$+ \int_{١}^{٩} (٢\sqrt{س} - س + ٣)\, ءس$$

$$م = \left[\left(\frac{٨}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^٢}{٢} + ٣س\right)\right]_{١}^{٩}$$

$$م = \frac{٨}{٣} + ٣٦ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧ - \left(\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣\right)$$

$م = \frac{٤}{٣} - \frac{٨٠}{٢} + ٦٠ = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة

مثال(٦٣): جد المساحة المحصورة بين $ق(س) = -\sqrt{س}$ ، $هـ(س) = ٦ - س$ ، مع محور السينات ؟؟؟



الحل:

$هـ(س) = ٠$

$٦ - س = ٠ \Leftarrow س = ٦$

$ق(س) = هـ(س)$

$-\sqrt{س} = ٦ - س \Leftarrow س - \sqrt{س} - ٦ = ٠$

$(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٢) = ٠$

$\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow س = ٩$ ، $\sqrt{س} = -٢$ ✗

$ق(س) = ٠ \Leftarrow -\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$$م = \int_{٠}^{٦} (٠ - ق)\, ءس + \int_{٦}^{٩} (هـ - ق)\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{٦} (\sqrt{س})\, ءس + \int_{٦}^{٩} (٦ - س + \sqrt{س})\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{٦} (\sqrt{س})\, ءس + \int_{٦}^{٩} (\sqrt{س})\, ءس$$

$$+ \int_{٦}^{٩} (٦ - س)\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{٩} (\sqrt{س})\, ءس + \int_{٦}^{٩} (٦ - س)\, ءس$$

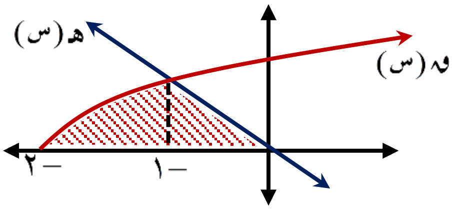
$$م = \left[\left(\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{٩} + \left[\left(٦س - \frac{س^٢}{٢}\right)\right]_{٦}^{٩}$$

$$م = (١٨) + \left(\left(٥٤ - \frac{٨١}{٢}\right) - \left(٣٦ - \frac{٣٦}{٢}\right)\right)$$

$م = ٣٦ - \frac{٤٥}{٢} = \frac{٢٧}{٢}$ وحدة مربعة

مثال(٦٤): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}+٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = -\text{س}$ مع محور السينات ؟؟؟

الحل:



$\text{هـ}(\text{س}) = ٠ \Leftarrow -\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

$\text{ق}(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \sqrt{\text{س}+٢} = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٢$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\sqrt{\text{س}+٢} = -\text{س} \Leftarrow \text{س}^٢ - \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س}-٢)(\text{س}+١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢ ، \text{س} = -١$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{-١} (\text{ق} - ٠)\, \text{دس} + \int_{-١}^{٠} (\text{هـ} - ٠)\, \text{دس}$$

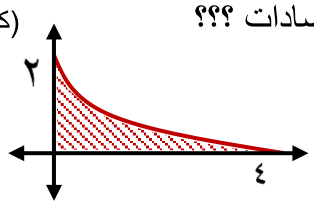
$$\text{م} = \int_{-٢}^{-١} \left(\sqrt{\text{س}+٢}\right) \text{دس} + \int_{-١}^{٠} (-\text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{٢}{٣}(\text{س}+٢)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{-٢}^{-١} + \left[\left(\frac{-\text{س}^٢}{٢}\right)\right]_{-١}^{٠}$$

$$\text{م} = \left(\frac{٢}{٣} - ٠\right) + \left(٠ + \frac{١}{٢}\right) = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(٦٥): جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \sqrt{\text{س}}$ وكل من محوري السينات و الصادات ؟؟؟ (كتاب)

الحل:



$\text{ق}(\text{س}) = ٠$

$٢ - \sqrt{\text{س}} = ٠ \Leftarrow \sqrt{\text{س}} = ٢ \Leftarrow \text{س} = ٤$

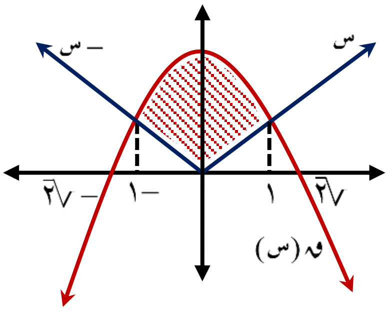
$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} \left(\left(٢ - \sqrt{\text{س}}\right) - ٠\right) \text{دس}$$

$$\text{م} = (٢\text{س})]_{٠}^{٤} - \left[\left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{٤}$$

$$\text{م} = ٢(٤ - ٠) - \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{٤^٣} - \sqrt{٠^٣}\right) = \frac{٨}{٣}$$

مثال(٦٦): جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \text{س}^٢$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = |\text{س}|$ ؟؟؟

الحل:



$\text{ق}(\text{س}) = ٠$

$٢ - \text{س}^٢ = ٠$

$\text{س} = \pm\sqrt{٢}$

$\text{هـ}(\text{س}) = ٠$

$|\text{س}| = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٠$

− − + +
٠

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} ، & \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$\text{هـ}(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

- $٢ - \text{س}^٢ = \text{س} \Leftarrow \text{س}^٢ + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س}+٢)(\text{س}-١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = -٢ \times ، \text{س} = ١$

- $٢ - \text{س}^٢ = -\text{س} \Leftarrow \text{س}^٢ - \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س}-٢)(\text{س}+١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢ \times ، \text{س} = -١$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} (\text{ق} + \text{س})\, \text{دس} + \int_{٠}^{١} (\text{ق} - \text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{-١}^{١} (\text{ق})\, \text{دس} + \int_{-١}^{٠} (\text{س})\, \text{دس} - \int_{٠}^{١} (\text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{-١}^{١} (٢ - \text{س}^٢)\, \text{دس} + \int_{-١}^{٠} (\text{س})\, \text{دس} - \int_{٠}^{١} (\text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\left(٢\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right)\right]_{-١}^{١} + \left[\left(\frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\right]_{-١}^{٠} - \left[\left(\frac{\text{س}^٢}{٢}\right)\right]_{٠}^{١}$$

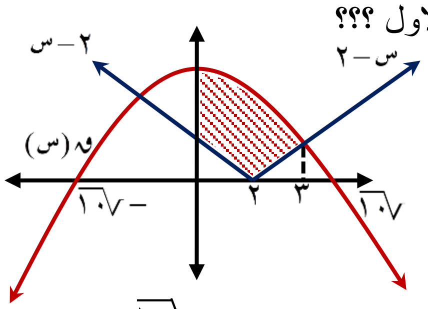
$$\text{م} = \left(٢ - \frac{١}{٣}\right) - \left(-٢ + \frac{١}{٣}\right) + \left(\frac{-١}{٢} - \frac{١}{٢}\right)$$

$$\text{م} = \frac{٥}{٣} - \left(\frac{-٥}{٣}\right) + (-١)$$

$$\text{م} = \frac{١٠}{٣} - ١ = \frac{٧}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(٦٧): جد المساحة المحصورة بين
ق(س) = ١٠ − س^{٢} ،
هـ(س) = |س − ٢| ومحور الصادات في الربع الاول ؟؟؟

الحل:



ق(س) = ٠

١٠ − س^{٢} = ٠ ⟸ س = ∓√١٠

نعيد تعريف |س − ٢| ⟸ س = ٢

$$\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س − ٢ ، س} \geq \text{٢} \\ \text{٢ − س ، س} < \text{٢} \end{cases}$$

هـ(س) = ٠ ⟸ ٢ − س = ٠ ⟸ س = ٢

ق(س) = س − ٢

١٠ − س^{٢} = س − ٢ ⟸ س^{٢} + س − ١٢ = ٠

(س + ٤)(س − ٣) = ٠ ⟸ س = −٤ ✗، س = ٣ ✓

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{ق} - (-\text{هـ}))\,\text{دس} + \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{١٠ − س}^{\text{٢}}) - (\text{٢ − س})\,\text{دس}$$

$$+ \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} (\text{١٠ − س}^{\text{٢}}) - (\text{س − ٢})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٨ − س}^{\text{٢}} + \text{س})\,\text{دس}$$

$$+ \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} (\text{١٢ − س}^{\text{٢}} - \text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \left[\left(\text{٨س} - \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right)\right]_{\text{٠}}^{\text{٢}}$$

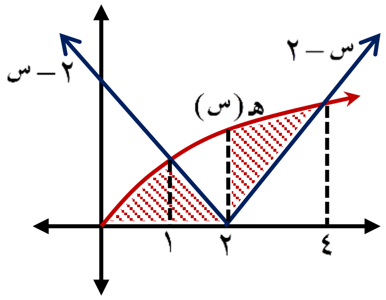
$$+ \left[\left(\text{١٢س} - \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right)\right]_{\text{٢}}^{\text{٣}}$$

$$\text{م} = \left(\text{١٨} - \frac{\text{٨}}{\text{٣}}\right) + \left(\text{٢٧} - \frac{\text{٩}}{\text{٢}}\right) - \left(\text{٢٢} - \frac{\text{٨}}{\text{٣}}\right)$$

$$\text{م} = \text{٢٣} - \frac{\text{٩}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣٧}}{\text{٢}} \text{ وحدة مربعة}$$

سؤال وزاري: جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق(س) = |س − ٢|
، هـ(س) = √س ؟؟؟

الحل:



ق(س) = |س − ٢| = ٠

- - - - - - +++++
٢

س − ٢ = ٠ ⟸ س = ٢

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س − ٢ ، س} > \text{٢} \\ \text{٢ − س ، س} < \text{٢} \end{cases}$$

هـ(س) = √س ⟸ √س = ٠ ⟸ س = ٠

هـ(س) = س − ٢

⟸ س − ٢ = √س ⟸ س − √س − ٢ = ٠

(√س − ٢)(√س + ١) = ٠

√س = ٢ ⟸ س = ٤ ، √س = −١ ✗

هـ(س) = ٢ − س

⟸ ٢ − س = √س ⟸ س + √س − ٢ = ٠

(√س − ١)(√س + ٢) = ٠

√س = ١ ⟸ س = ١ ، √س = −٢ ✗

$$م = \int_{٠}^{١} (هـ - ٠)\, ءس + \int_{١}^{٢} (-ق - ٠)\, ءس$$

$$+ \int_{٢}^{٤} (هـ - ق)\, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{١} \left(\sqrt{س}\right) ءس + \int_{١}^{٢} (٢ - س)\, ءس$$

$$+ \int_{٢}^{٤} \left(\sqrt{س} - س + ٢\right) ءس$$

$$م = \left[\left(\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{١} + \left[\left(٢س - \frac{١}{٢} س^{٢}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$$+ \left[\left(\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢س\right)\right]_{٢}^{٤}$$

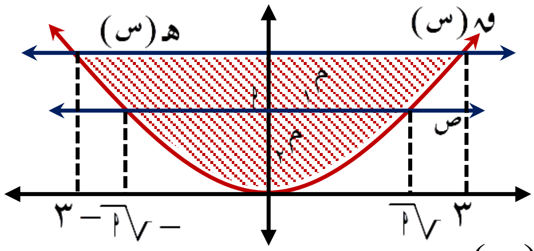
$$م = \frac{٢}{٣} + \left(٢ - \left(٢ - \frac{١}{٢}\right)\right) + \frac{١٦}{٣} - \left(\frac{٢\sqrt{٨}}{٣} + ٢\right)$$

$$م = \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} + \frac{١٦}{٣} - \frac{٢\sqrt{٨}}{٣} - ٢$$

$$م = \frac{٩}{٢} - \frac{٢\sqrt{٨}}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال(٦٨): رسم المستقيم $ص = أ$ في المنطقة المحصورة بين $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = ٩$ فقسم المنطقة الى مساحتين متساويتين ؛ جد $(أ)$ ؟؟؟

الحل:



$$ق(س) = ص$$

$$س^{٢} = أ \Leftarrow س = \mp\sqrt{أ}$$

$$ق(س) = هـ(س)$$

$$س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = \mp ٣$$

$$م_{١} = م_{٢}$$

$$م_{٢} = \frac{١}{٢} \int_{-٣}^{٣} (هـ - ق)\, ءس$$

$$م_{٢} = \frac{١}{٢} \int_{-٣}^{٣} (٩ - س^{٢})\, ءس$$

$$م_{٢} = \frac{١}{٢} \left[\left(٩س - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\right]_{-٣}^{٣}$$

$$م_{٢} = \frac{١}{٢}\left((٢٧ - ٩) - (-٢٧ + ٩)\right)$$

$$م_{٢} = \frac{١}{٢}(١٨ + ١٨) = ١٨ \text{ وحدة مربعة}$$

$$م_{٢} = \int_{-\sqrt{أ}}^{\sqrt{أ}} (ص - ق)\, ءس = ١٨$$

$$م_{٢} = ٢ \times \int_{-\sqrt{أ}}^{٠} (أ - س^{٢})\, ءس = ١٨$$

$$م_{٢} = \left[\left(أس - \frac{س^{٣}}{٣}\right)\right]_{-\sqrt{أ}}^{٠} = ٩$$

$$م_{٢} = أ\sqrt{أ} - \frac{أ\sqrt{أ}}{٣} = ٩$$

$$م_{٢} = ٣أ\sqrt{أ} - أ\sqrt{أ} = ٢٧$$

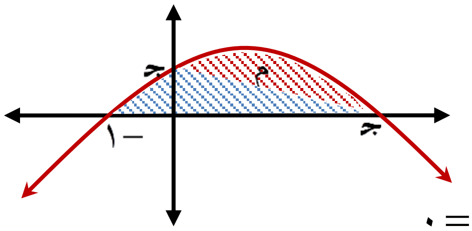
$$م_{٢} = ٢أ\sqrt{أ} = ٢٧ \Leftarrow أ = \sqrt[٣]{\left(\frac{٢٧}{٢}\right)^{٢}}$$

مثال(٦٩): معتمداً على الشكل المجاور جد مساحة المنطقة (م) اذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = (\text{جـ} - \text{س})(\text{س} + ١)$ ،

$\text{م}\Delta = ١٠$ وحدات مربعة ؟؟؟

الحل:



$\text{ق}(\text{س}) = ٠$

$(\text{جـ} - \text{س})(\text{س} + ١) = ٠$

$\text{س} = \text{جـ}$ ، $\text{س} = -١$

$\text{ص} = (\text{جـ} - ٠)(٠ + ١) \Leftarrow \text{ص} = \text{جـ}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times$ طول القاعدة

$١٠ = \frac{١}{٢} \times (\text{جـ} + ١) \times \text{جـ}$

$٢٠ = \text{جـ}^٢ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ}^٢ + \text{جـ} - ٢٠ = ٠$

$(\text{جـ} + ٥)(\text{جـ} - ٤) = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = ٤ \checkmark ، \text{جـ} = -٥ \times$

المساحة الكاملة $= \int_{٠}^{٤} (\text{ق} - ٠)\, \text{دس}$

المساحة الكاملة $= \int_{٠}^{٤} (٤ - \text{س})(\text{س} + ١)\, \text{دس}$

المساحة الكاملة $= \int_{٠}^{٤} (٤\text{س} + ٤ - \text{س}^٢ - \text{س})\, \text{دس}$

المساحة الكاملة $= \int_{٠}^{٤} (٣\text{س} + ٤ - \text{س}^٢)\, \text{دس}$

المساحة الكاملة $= \left[\left(\frac{٣\text{س}^٢}{٢} + ٤\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right)\right]_{٠}^{٤}$

المساحة الكاملة $= ٢٤ + ١٦ - \frac{٦٤}{٣}$

المساحة الكاملة $= \frac{٥٦}{٣}$ وحدة مربعة

$\text{م} = \frac{٥٦}{٣} - \left(\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٤\right)$

$\text{م} = \frac{٥٦}{٣} - ٨ = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

مثال(٧٠): جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل ؟؟؟

الحل: (كتاب)

$\text{ص}^٢ = \text{س} \Leftarrow \text{ص}_١ = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}_٢ = -\sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}_٣ = \text{س} - ٢$

$\text{ص}_٣ = \text{ص}_١$

$\text{س} - ٢ = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٢ = ٠$

$\left(\sqrt{\text{س}} - ٢\right)\left(\sqrt{\text{س}} + ١\right) = ٠$

$\sqrt{\text{س}} = ٢ \Leftarrow \text{س} = ٤$ ، $\sqrt{\text{س}} = -١ \times$

$\text{ص}_٣ = \text{ص}_١$

$\text{س} - ٢ = -\sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{س} + \sqrt{\text{س}} - ٢ = ٠$

$\left(\sqrt{\text{س}} + ٢\right)\left(\sqrt{\text{س}} - ١\right) = ٠$

$\sqrt{\text{س}} = ١ \Leftarrow \text{س} = ١$ ، $\sqrt{\text{س}} = -٢ \times$

$\text{م} = \int_{٠}^{١} \left(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}\right) \text{دس}$

$+ \int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}} - (\text{س} - ٢)\, \text{دس}$

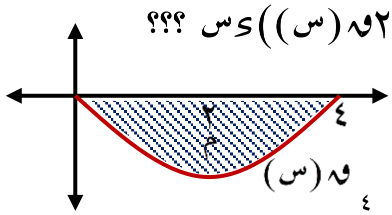
$\text{م} = \left[\left(\frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س}\right)\right]_{١}^{٤}$

$\text{م} = \frac{٤}{٣} + \left(\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨\right) - \left(\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢\right)$

$\text{م} = \frac{٢٠}{٣} - \frac{١}{٦} - ٢ = \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

مثال(٧١): اذا كانت م = ٦ وحدات مربعة؛ جد

$$\int_{٠}^{٤} \left(٥ - ٢ق(س)\right) ءس \quad ؟؟؟$$



الحل:

$$= \int_{٠}^{٤} ٥ءس - ٢\int_{٠}^{٤} ق(س)ءس$$

$$= ٥(٤-٠) - ٢(-م) = ٢٠ - ٢(-٦)$$

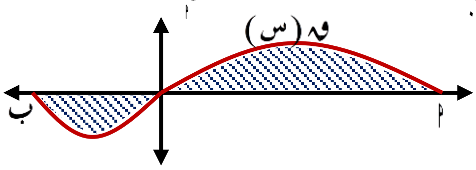
$$= ٢٠ + ١٢ = ٣٢$$

- اذا كانت المنطقة فوق محور السينات
  المساحة = التكامل
- اذا كانت المنطقة اسفل محور السينات
  المساحة = − التكامل

التكامل = − المساحة

مثال(٧٢): معتمدا على الشكل اذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى (ق) ومحور السينات (١٤) وحدة مربعة وكان $\int_{٠}^{ب} ق(س)ءس = ٦$؛ جد $\int_{أ}^{٠} ق(س)ءس$ ؟؟؟

الحل:



$$المساحة = \int_{ب}^{٠} (٠ - ق)ءس + \int_{٠}^{أ} (ق - ٠)ءس$$

$$١٤ = \int_{٠}^{ب} ق(س)ءس + \int_{٠}^{أ} ق(س)ءس$$

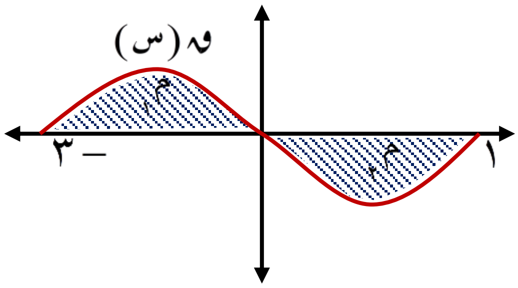
$$١٤ = ٦ + \int_{٠}^{أ} ق(س)ءس$$

$$\int_{٠}^{أ} ق(س)ءس = ٨$$

$$\int_{أ}^{٠} ق(س)ءس = -\int_{٠}^{أ} ق(س)ءس = -٨$$

مثال(٧٣): معتمدا على الشكل اذا كانت $م_{١} = ١٠$ وحدات مربعة ، $م_{٢} = ٤$ وحدات مربعة؛ جد

$$\int_{٠}^{٢} س ق\left(١ - س^{٢}\right) ءس \quad ؟؟؟$$



الحل:

نفرض ان $ص = ١ - س^{٢}$

$$ءس = \frac{ءص}{-٢س}$$

$$س = ٠ \Leftarrow ص = ١ - ٠ = ١$$

$$س = ٢ \Leftarrow ص = ١ - ٤ = -٣$$

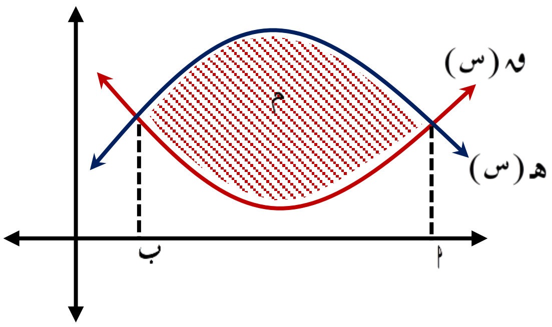
$$= \int_{١}^{-٣} س ق(ص) \times \frac{ءص}{-٢س} = \frac{١}{٢}\int_{-٣}^{١} ق(ص)ءص$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\int_{-٣}^{٠} ق(ص)ءص + \int_{٠}^{١} ق(ص)ءص\right)$$

$$= \frac{١}{٢}(١٠ + -٤) = ٣$$

مثال(٧٤): معتمدا على الشكل المجاور اذا كانت م $=$ ٦ وحدات مربعة وكان

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = ١٠$؛ جد $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس$ ؟؟؟



الحل:

$$٦ = \int_{ب}^{أ} (هـ - ق)\,ءس$$

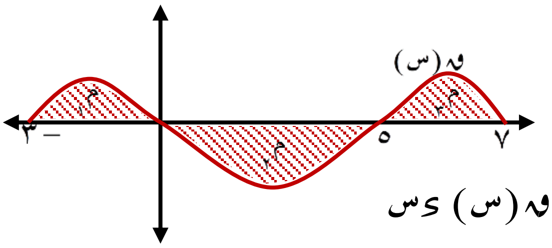
$$٦ = \int_{ب}^{أ} هـ(س)\,ءس - \int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس$$

$$٦ = \int_{ب}^{أ} هـ(س)\,ءس - (-١٠)$$

$$\int_{ب}^{أ} هـ(س)\,ءس = -٤$$

$$\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} هـ(س)\,ءس = ٤$$

مثال(٧٥): معتمدا على الشكل المجاور اذا كانت قيم المساحات $م_١ = ٤$ ، $م_٢ = ٨$ ، $م_٣ = ٢$ وحدة مربعة؛ جد ؟؟؟



١. $\int_{-٣}^{٧} ق(س)\,ءس$

الحل:

$$\int_{-٣}^{٧} ق(س)\,ءس = \int_{-٣}^{٠} ق(س)\,ءس$$

$$+ \int_{٠}^{٥} ق(س)\,ءس + \int_{٥}^{٧} ق(س)\,ءس$$

$$\int_{-٣}^{٧} ق(س)\,ءس = ٤ + -٨ + ٢ = -٢$$

٢. $\int_{-٣}^{٧} |ق(س)|\,ءس$

الحل:

$$= م_١ + م_٢ + م_٣ = ٤ + ٨ + ٢ = ١٤$$

٣. $\left|\int_{٧}^{-٣} ق(س)\,ءس\right|$

الحل:

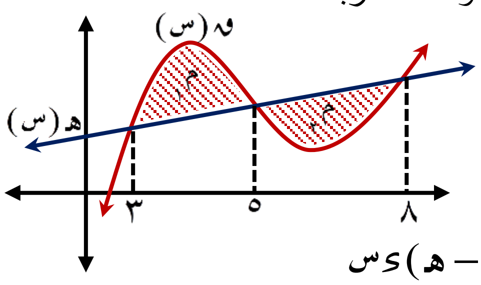
$$\left|\int_{٧}^{-٣} ق(س)\,ءس\right| = |-٢| = ٢$$

❖ **مطلق داخل التكامل** ⟸ مجموع المساحات

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق}(\text{س})|\,\text{دس}$$

❖ **التكامل داخل المطلق** ⟸ المطلق على الناتج فقط

مثال(٧٦): معتمدا على الشكل المجاور اذا كانت $\text{م}_{١} = ٣$ وحدات مربعة ، $\text{م}_{٢} = ٧$ وحدات مربعة ؟؟؟



١. $\int_{٣}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}$

الحل:

$$\int_{٣}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} = \int_{٣}^{٥} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}$$

$$\int_{٣}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} = \text{م}_{١} + (-\text{م}_{٢})$$

$$\int_{٣}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} = ٣ + (-٧) = -٤$$

٢. $\int_{٣}^{٨} |\text{ق} - \text{هـ}|\,\text{دس}$

الحل:

$$= \int_{٣}^{٥} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٨} (\text{هـ} - \text{ق})\,\text{دس}$$

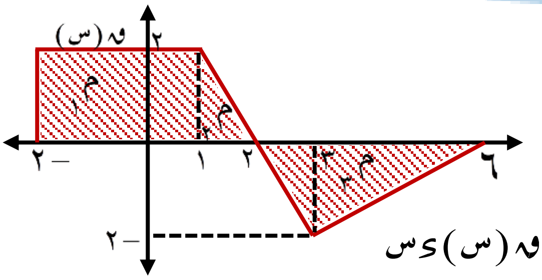
$$= \text{م}_{١} + \text{م}_{٢} = ٣ + ٧ = ١٠$$

٣. $\left|\int_{٣}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}\right|$

الحل:

$$\left|\int_{٣}^{٨} (\text{ق} - \text{هـ})\,\text{دس}\right| = |-٤| = ٤$$

مثال(٧٧): معتمدا على شكل ق(س)؛ جد ما يأتي؟؟؟



١. $\int_{-٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

الحل:

$\text{م}_{١} =$ الطول × العرض

$\text{م}_{١} = ٣ \times ٢ = ٦$ وحدات مربعة

$\text{م}_{٢} = \frac{١}{٢} \times$ طول القاعدة × الارتفاع

$\text{م}_{٢} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٢ = ١$ وحدة مربعة

$\text{م}_{٣} = \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٤$ وحدات مربعة

$$\int_{-٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-٢}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$\int_{-٢}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦ + ١ - ٤ = ٣$$

٢. $\int_{-٢}^{٦} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس}$

الحل:

$$\int_{-٢}^{٦} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣$$

$$\int_{-٢}^{٦} |\text{ق}(\text{س})| \, \text{ءس} = ٦ + ١ + ٤ = ١١$$

٣. $\left| \int_{-٢}^{٦} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \right|$

الحل:

$$\left| \int_{-٢}^{٦} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \right| = |٣| = ٣$$

٤. اقل قيمة للتكامل $\int_{٠}^{٦} (٣ - \text{ق}(\text{س})) \, \text{ءس}$

الحل:

في الفترة [٠،٦] أكبر قيمة (٢) وأقل قيمة (−٢)

$$-٢ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٢$$
$$-٢ \le -\text{ق}(\text{س}) \le ٢$$
$$١ \le ٣ - \text{ق}(\text{س}) \le ٥$$
$$\int_{٠}^{٦} (١) \, \text{ءس} \le \int_{٠}^{٦} (٣ - \text{ق}(\text{س})) \, \text{ءس} \le \int_{٠}^{٦} (٥) \, \text{ءس}$$
$$٦ \le \int_{٠}^{٦} (٣ - \text{ق}(\text{س})) \, \text{ءس} \le ٣٠$$

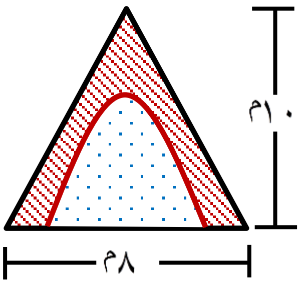
حل أخر

اقل قيمة للتكامل في الفترة [٠،٦] هي (−٢)

$$\int_{٠}^{٦} (٥) \, \text{ءس} = ٥(٦ - ٠) = ٣٠$$

مثال(٧٨): الشكل المجاور يمثل الواجهة الامامية لاحد المباني، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٣ - \frac{١}{٣}\text{س}^٢$ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة اذا علمت ان سعر الدهان للوحدة المربعة $\left(\frac{٥}{٢}\right)$ دينار ؟؟؟

الحل:



التكلفة = سعر المتر الواحد × عدد الامتار المربعة

التكلفة = سعر المتر الواحد × المساحة

المساحة = مساحة المثلث − المساحة اسفل منحنى

$$\text{المساحة} = \left(\frac{١}{٢} \times ٨ \times ١٠\right) - \left(\left(\int_{٠}^{٣} (\text{ق} - ٠) \, \text{ءس}\right) \times ٢\right)$$

$$\text{المساحة} = ٤٠ - ٢ \int_{٠}^{٣} \left(٣ - \frac{١}{٣}\text{س}^٢\right) \text{ءس}$$

$$\text{المساحة} = ٤٠ - ٢ \times \left[\left(٣\text{س} - \frac{١}{٩}\text{س}^٣\right)\right]_{٠}^{٣}$$

$$\text{المساحة} = ٤٠ - ٢ \times ٦ = ٢٨ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{التكلفة} = \frac{٥}{٢} \times ٢٨ = ٧٠ \text{ دينار}$$