

***** حلول أسئلة الحصة الأولى *****

(١) نهاية ق(س)
الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهاية ق(س)} = 2 \\ \text{نهاية ق(س)} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow +2 \\ \text{س} \leftarrow -2 \end{array}$$

نهاية ق(س) = 2 موجودة

(٢) نهاية ق(س-٣)
الحل: (أولاً نستبدل)

نضع ص = ٣ - س

عندما س ← +٢ ، فإن ص ← -١

انتبه معامل
س سالب

نهاية ق(ص) = صفر

(٤) ما قيم م بحيث نهاية ق(س) = ٢
الحل:

** تقابل نقطة وفترة ، نختبرها **

** النقطة س = ٠

نهاية ق(س) غير موجودة (out)

** الفترة ما بين ١ ، ٢ (نختبر الطرفين)

نهاية ق(س) غير موجودة (out)

نهاية ق(س) = ٢ موجودة (in)

$$P \ni [1, 2)$$

(٥) ما قيم م بحيث نهاية ق(س) = ٢

الحل:

** (نختبر نفس النقط ولكن من اليمين فقط) **

نهاية ق(س) = ٢ (in)

نهاية ق(س) = ٢ (in)

نهاية ق(س) = ٢ (in)

$$P \ni \{0\} \cup [1, 2]$$

(٦) ما قيم م بحيث نهاية ق(س) = ٢

الحل:

** (نختبر نفس النقط ولكن من اليسار فقط) **

نهاية ق(س) غير موجودة (out)

نهاية ق(س) = صفر (out)

نهاية ق(س) = ٢ (in)

$$P \ni [1, 2)$$

(٣) ما قيم ج بحيث
نهاية ق(س) غير موجودة
الحل: (نختبر كل نقطة)

** الأضراس عند س = صفر

نهاية ق(س) غير موجودة (out)

** القفزات والانقطاعات:

** عند س = ١

نهاية ق(س) غير موجودة (out)

** عند س = ٢

نهاية ق(س) = ٢ موجودة (in)

$$J \ni \{1, 0\}$$

**** السؤال الثاني ****

$$(1) \text{ نها} = \frac{(س^2 - 2) - 4}{س^2 - 8}$$

الحل:

$$= \frac{(س^2 - 2 - 4)(س^2 - 2 + 4)}{(س^2 - 8)(س^2 - 2 + 4)}$$

$$= \frac{(س^2 - 6)(س^2 - 2 + 4)}{(س^2 - 8)(س^2 - 2 + 4)}$$

$$= \frac{(س^2 - 6)(س^2 - 2 + 4)}{(س^2 - 8)(س^2 - 2 + 4)}$$

$$= \frac{3}{4} = \frac{(4) \times (4)}{12}$$

$$(2) \text{ نها} = \frac{(س^2 - 1)^2}{(س^2 - 1)(س^2 + 1)}$$

الحل:

$$= \frac{(س^2 - 1)^2}{(س^2 - 1)(س^2 + 1)}$$

$$= \frac{(س^2 - 1)(س^2 - 1)}{(س^2 - 1)(س^2 + 1)}$$

$$= \frac{(س^2 - 1)(س^2 - 1)}{(س^2 - 1)(س^2 + 1)}$$

$$256 = (2)^8 =$$

$$(3) \text{ نها} = \frac{س^2 + 5 - (س^2 + 5)}{س^2 - 2}$$

الحل:

$$= \frac{س^2 + 5 - (س^2 + 5)}{س^2 - 2} \times \frac{س^2 + 5 + (س^2 + 5)}{س^2 + 5 + (س^2 + 5)}$$

$$= \frac{س^2 + 5 - (س^2 + 5)}{(س^2 - 2)} \times \frac{1}{(س^2 + 5) + (س^2 + 5)}$$

$$= \frac{س^2 + 5 - (س^2 + 5)}{(س^2 - 2)} \times \frac{1}{(س^2 + 5) + (س^2 + 5)}$$

$$= \frac{س^2 + 5 - (س^2 + 5)}{(س^2 - 2)} \times \frac{1}{(س^2 + 5) + (س^2 + 5)}$$

$$(4) \text{ نها} = \frac{س^3 + 3س^2 + 3س + 7 - 5}{س^3 - 1}$$

الحل: **فصل متجاورين**

بحيث نعوض (س ← 1) في الحد الأول (س³) فقط لنجد أن ناتج التعويض يساوي (3) ، عندها (نطرح 3 ونضيف 3) للحد الأول

$$= \frac{س^3 + 3س^2 + 3س + 7 - 5}{س^3 - 1}$$

**** تجميع حدود ثم توزيع النهاية *****

$$= \frac{س^3 - 3س^2 + 3س + 7 - 5}{س^3 - 1} + \frac{3س^2 - 3س^2}{س^3 - 1}$$

(إخراج عامل مشترك) (ضرب بالمرافق التكعيبي)

$$= \frac{س^3 - 3س^2 + 3س + 7 - 5}{س^3 - 1} + \frac{3(س^2 - 3س^2)}{س^3 - 1}$$

$$= \frac{س^3 - 3س^2 + 3س + 7 - 5}{س^3 - 1} \times \frac{س^3 + 7س^2 + 2س + 2}{س^3 + 7س^2 + 2س + 2}$$

$$= \frac{س^3 - 3س^2 + 3س + 7 - 5}{(س^3 - 1)(س^3 + 7س^2 + 2س + 2)}$$

$$= \frac{37}{12} = \frac{1}{12} + 3 =$$

$$(5) \text{ نها } \frac{س^2 + س - 12}{س^3 - 2س + 5}$$

الحل:

(مقامات مختلفة، توحيد مقامات فوراً)

$$\leftarrow \text{نها } \frac{س^2 + س - 12}{(س + 2) - 5}$$

$$= \text{نها } \frac{س^2 + س - 12}{س + 2 - 5} = \frac{س^2 + س - 12}{س - 3}$$

$$= \text{نها } \frac{س^2 + س - 12}{س - 3} \times \frac{1}{1} = \frac{س^2 + س - 12}{س - 3}$$

$$= 7 \times 5 \times 5 = 175$$

$$(7) \text{ نها } \left(\frac{1}{س - 2} - \frac{4}{س^2 - 4} \right)$$

الحل: (مقامات مضاعفة

لتوحيد المقام نضرب بالمرافق التربيعي)

$$\leftarrow \text{نها } \left(\frac{1}{س - 2} \times \frac{س + 2}{س + 2} - \frac{4}{س^2 - 4} \right)$$

$$= \text{نها } \left(\frac{س + 2}{س^2 - 4} - \frac{4}{س^2 - 4} \right) = \frac{س + 2 - 4}{س^2 - 4}$$

$$= \text{نها } \frac{س - 2}{(س + 2)(س - 2)} = \frac{1}{س + 2}$$

$$(8) \text{ نها } \left(\frac{1}{س - 2} - \frac{12}{س^3 - 8} \right)$$

الحل: (مقامات مضاعفة

لتوحيد المقام نضرب بالمرافق التكعيبي)

$$= \text{نها } \left(\frac{1}{س - 2} \times \frac{س^2 + 2س + 4}{س^2 + 2س + 4} - \frac{12}{س^3 - 8} \right)$$

*** انتبه عزيزي الطالب : أن الإشارة التي تسبق الكسر توزع على حدود البسط **

$$= \text{نها } \frac{س^2 + 2س + 4 - 12}{س^3 - 8} = \frac{س^2 + 2س - 8}{س^3 - 8}$$

$$= \text{نها } \frac{س^2 + 2س - 8}{س^3 - 8}$$

$$= \text{نها } \frac{(س - 2)(س + 4)}{(س - 2)(س^2 + 2س + 4)}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \text{ نها } \left(\frac{س^3}{س^2 - 4} - \frac{س^2 + 4}{س - 2} \right)$$

الحل: (مقامات متشابهة)

$$\leftarrow \text{نها } \frac{س^3 - س^2 - 4س + 8}{س^2 - 4}$$

*** (فصل البسط عن المقام وتوزيع النهاية) ***

$$= \text{نها } \frac{س^3 - س^2 - 4س + 8}{س^2 - 4} \leftarrow \text{قسمة طويلة}$$

$$\text{نها } \frac{س^3 - س^2 - 4س + 8}{س^2 - 4} \leftarrow \text{فرق مربعين}$$

$$\frac{س^3 + س^2 + 2س + 4}{س^2 - 4}$$

$$\frac{س^3 - س^2 - 4س + 8}{س^2 - 4} = \frac{س^3 + س^2 + 2س + 4 - 2س^2 - 6س - 4}{س^2 - 4}$$

$$\frac{س - 2س - 4}{س^2 - 4} = \frac{-س - 4}{س^2 - 4}$$

$$\frac{-س - 4}{س^2 - 4} = \frac{-س - 4}{(س - 2)(س + 2)}$$

$$= \text{نها } \frac{س^2 + س + 2}{س^2 - 4}$$

$$= \text{نها } \frac{(س + 2)(س - 2)}{س^2 - 4}$$

$$= \frac{8}{4} = 2$$

$$(10) \text{ نها} = \frac{1 + \text{س} - (\text{س}^2) - (\text{س}^3)}{125 - \text{س}^3}$$

الحل:

**** نحدد الصيغة الأسية الأبسط (س) ****

$$\text{نها} = \frac{\text{س}^2(\text{س} - 1) - \text{س}^3}{125 - \text{س}^3}$$

استبدال

نضع ص = س
عندما س = 1
ص = 1 = س

$$\text{نها} = \frac{\text{ص}^2 - \text{ص}}{125 - \text{ص}^3}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{ص}(\text{ص} - 1)}{(\text{ص} + \text{ص}^2 + \text{ص}^3)(\text{ص} - 1)}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{5}{75} = \frac{5}{25+25+25} =$$

$$(11) \text{ نها} = \frac{1 + \text{ه} - \text{ه}^2 - \text{ه}^3}{\text{ه}^3 - \text{ه}}$$

الحل:

**** نحدد الصيغة الأسية الأبسط (ه) ****

استبدال

نضع ص = ه
عندما س = 1
ص = 1 = ه

$$\text{نها} = \frac{\text{ه}^2 - \text{ه} - \text{ه}^3}{\text{ه}^3 - \text{ه}}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{ص}^2 - \text{ص} - \text{ص}^3}{\text{ص}^3 - \text{ص}}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{ص}(\text{ص} - 1)}{(\text{ص} + \text{ص}^2 + \text{ص}^3)(\text{ص} - 1)}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{ص}}{\text{ص} + \text{ص}^2 + \text{ص}^3}$$

$$\frac{1}{\text{ه}^3} = \frac{\text{ه}}{\text{ه}^3} = \frac{\text{ه}}{\text{ه} + \text{ه}^2 + \text{ه}^3} =$$

$$(9) \text{ نها} = \frac{1 - (\text{س}^2) - (\text{س}^3)}{1 - \text{س}}$$

الحل:

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}}$$

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}}$$

**** نضرب بالمرافق التكعيبي للبسط ****

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}} \times \frac{1 + \sqrt{1 - \text{س}^2} + \sqrt{1 - \text{س}^2}^2}{1 + \sqrt{1 - \text{س}^2} + \sqrt{1 - \text{س}^2}^2}$$

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}} \times \frac{1}{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}$$

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}} \times \frac{2 - \text{س}^2}{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}$$

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}{1 - \text{س}} \times \frac{(1 - \text{س})^2}{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}$$

$$\text{نها} = \frac{1}{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3} \times \frac{2}{1 - \text{س}^2 - \text{س}^3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1 - 2 - 2} =$$

*** السؤال الثالث ***

$$(1) \text{ نها} = \frac{س^2 - ٢س + ٦}{س - ٢} = ٥$$

الحل:

** بما أن النهاية موجودة

$$\text{بما أن نها المقام} = ٠ \leftarrow \text{نها البسط} = ٠$$

$$\text{نها} (س^2 - ٢س + ٦) = ٠$$

$$\text{نها} (٤ - ٦س + ٦س^2) = ٠ \dots (1)$$

ولكن نها $\frac{س^2 - ٢س + ٦}{س - ٢}$ (تحلل عبارة تربيعية)

$$\text{نها} = \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{س - ٢}$$

$$\text{نها} ٢ - ٣س = ٠ \leftarrow ٣ = ٣س \leftarrow ١ = ٣$$

نعوض ب $١ = ٣$ في معادلة (1)

$$\text{نها} ٤ - ٦س + ٦س^2 = ٠ \leftarrow ٢ = ٦س \leftarrow \frac{١}{٣} = ٦س$$

$$(2) \text{ نها} = \frac{س + ٢ - ٦}{س - ٢} = ٥$$

الحل: ** بما أن النهاية موجودة

$$\text{نها المقام} = ٠ \leftarrow \text{نها البسط} = ٠$$

$$\text{نها} (س + ٢ - ٦) = ٠$$

$$\text{نها} ٢ - ٦ + س = ٠ \dots (1)$$

** حل مميز: في الخطي نخرج معامل س عامل مشترك ، وما يبقى هو الصفر (س-٢) على الثقة

$$\text{نها} = \frac{س(س + \frac{٦}{س} - \frac{٢}{س})}{س - ٢} = ٥$$

أي أن (س + $\frac{٦}{س}$ - $\frac{٢}{س}$) هي نفسها (س - ٢)

$$\text{نها} = \frac{س(س - ٢)}{س - ٢} = ٥ \leftarrow ٥ = س$$

$$\text{نها} ١٠ - ٦ + ٢س = ٠ \leftarrow ٨ = ٢س$$

$$(3) \text{ نها} = \frac{س\sqrt{س + ٣ - ٦} + ٣}{س - ٢} = ٣$$

الحل: ** بما أن النهاية موجودة

$$\text{نها المقام} = ٠ \leftarrow \text{نها البسط} = ٠$$

$$\text{نها} (س\sqrt{س + ٣ - ٦} + ٣) = ٠$$

$$\text{نها} ٣ = ٣ + ٢ \leftarrow ٩ = ٣ + ٢ \leftarrow ٧ = ٣$$

$$\text{نها} = \frac{س\sqrt{س + ٣ - ٧} + ٣}{س - ٢} \times \frac{س\sqrt{س + ٣ - ٧} + ٣}{س\sqrt{س + ٣ - ٧} + ٣}$$

$$\text{نها} = \frac{١}{س\sqrt{س + ٣ - ٧} + ٣} \times \frac{س + ٣ - ٧ + ٩}{س - ٢}$$

$$\text{نها} = \frac{١}{س\sqrt{س + ٣ - ٧} + ٣} \times \frac{٢ - س}{س - ٢}$$

$$\text{نها} = \frac{١}{س\sqrt{س + ٣ - ٧} + ٣} = ١ \leftarrow \frac{١}{٦} = ٣$$

** السؤال الرابع **

$$\text{إذا علمت أن نها } \frac{ق(س) - ٢}{س - ٢} = ٥$$

أجب عما يلي :

$$(١) \text{ نها } \frac{٥ق(س) + (س)٦}{س - ٢}$$

الحل :

** بما أن النهاية موجودة

$$\leftarrow \text{نها المقام} = 0 \leftarrow \text{نها البسط} = 0$$

$$\leftarrow \text{نها } \frac{٥ق(س) + (س)٦}{س - ٢} = ٢$$

$$\leftarrow \text{نها } \frac{٥ق(س) + (س)٦}{س - ٢} \text{ نوزع النهاية ونعوض}$$

$$= \text{نها } \frac{٥ق(س) + (س)٦}{س - ٢} + \text{نها } \frac{٦}{س - ٢}$$

$$= ٣٢ = ١٢ + ٢٠ = ٢ \times ٦ + ٤ \times ٥ =$$

$$(٢) \text{ نها } \frac{٢س٢ - س - ٦}{٣ق(س) - ٦}$$

الحل :

$$= \text{نها } \frac{(٣س٢ - س - ٦)(٢ - س)}{٣(ق(س) - ٢)}$$

$$= \text{نها } \frac{(٣س٢ - س - ٦)}{٣} \times \text{نها } \frac{(٢ - س)}{ق(س) - ٢}$$

$$= \frac{٧}{١٥} = \frac{٧}{٣} \times \frac{١}{٥} =$$

$$(٣) \text{ نها } \frac{ق(س)٣ - ٨}{س٢ - ٤}$$

الحل :

$$= \text{نها } \frac{ق(س)(٢ - (س)) (ق(س)٢ + (س)٢ + (س)٤)}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \text{نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢}{س - ٢} \times \text{نها } \frac{ق(س)٢ + (س)٢ + (س)٤}{س + ٢}$$

$$= ١٥ = ٣ \times ٥ = \frac{١٢}{٤} \times ٥ = \frac{٤ + ٤ + ٤}{٢ + ٢} \times ٥ =$$

$$(٤) \text{ نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢}{س - ٢}$$

الحل :

$$** \text{ بما أن نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢}{س - ٢} = ٢$$

$$\leftarrow \text{نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢}{س - ٢} = ٤$$

*** فصل متجاورين ***

$$\leftarrow \text{نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢ - ٤ + ٤ - ٤ + ٤}{س - ٢}$$

$$= \text{نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢ - ٤}{س - ٢} + \text{نها } \frac{٤ - (س)٢}{س - ٢}$$

$$= \text{نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢ - ٤}{س - ٢} + \text{نها } \frac{٢(٢ - (س)٢)}{س - ٢}$$

$$= \text{نها } \frac{ق(س)٢ - (س)٢ - ٤}{س - ٢} - \text{نها } \frac{٢(٢ - (س)٢)}{س - ٢}$$

$$= ٥ = (٢ + ٢) - (٢ + ٢) \times ٥ =$$

$$= ١٦ = ٤ - ٢٠ = ٤ - ٤ \times ٥ =$$

*****حلول أسئلة الحصة الثانية*****

$$(1) \text{ نها} \frac{1 - \text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^4}$$

الحل:

$$= \frac{1 - 2 \text{جاس} \text{جتاس} - \text{جتاس}^2}{\text{س}^4}$$

$$= \frac{\text{جا}^2 \text{س} - 2 \text{جاس} \text{جتاس}}{\text{س}^4}$$

$$= \frac{\text{جاس}(\text{جاس} - 2 \text{جتاس})}{\text{س}^4}$$

$$= \frac{\text{نها} \text{جاس}}{\text{س}^4} \times \frac{\text{نها}(\text{جاس} - 2 \text{جتاس})}{\text{س}}$$

$$= \frac{1}{4} \times (2 - 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ نها} \frac{\text{جا}(\text{س}^3 - 8)}{2 \text{ظا}(\text{س} - 2)}$$

الحل:

** نقسم على الصفر (س-2) ولكن الأفضل أن نقسم على الزاوية (س³ - 8) لأنها (صفر) أيضاً **

$$\text{نها} \frac{\text{جا}(\text{س}^3 - 8)}{\text{س}^2 \text{ظا}(\text{س} - 2)}$$

استبدال:
نضع ص = س³ - 8
عندما س = 2
ص = 0

$$\text{نها} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}^2 \text{ظا}(\text{س} - 2)}$$

$$= \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \times 1 = \frac{1}{12} \times \frac{\text{ظاع}}{\text{ع}} = \frac{1}{12} \times \frac{\text{نها}}{\text{ع}}$$

$$(3) \text{ نها} \frac{1 - \text{جتاس}^2}{\text{س}^5}$$

حل السؤال بـ 3 طرق

الطريقة الأولى للحل: (الضرب بالمرافق)

$$= \frac{1 - \text{جتاس}^2}{\text{س}^5} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}$$

$$= \frac{1 - \text{جتاس}^2}{\text{س}^5} \times \frac{1}{(1 + \text{جتاس})}$$

$$= \frac{1}{1 + 1} \times \frac{1 - \text{جتاس}^2}{\text{س}^5}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2 \text{جتاس} + \text{جتاس}^2}{\text{س}^5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{س}^5}$$

الطريقة الثانية للحل: (نصنع فرق جتتين)

$$\text{نها} \frac{\text{جتاس} - 0}{\text{س}^5} = \frac{2 - \text{جتاس}^2}{\text{س}^5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2 - \text{جتاس}^2}{\text{س}^5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

الطريقة الثالثة للحل: (متطابقة)

** من المعلوم أن 1 - جتاس² = 2 جاس² **

$$\text{نها} \frac{2 \text{جاس}^2}{\text{س}^5} = \frac{2 \text{جاس}^2}{\text{س}^5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

استبدال:
نضع ص = س - 2
عندما س = 2
ص = 0

$$(٤) \text{ نهـا } \frac{١ - \text{جـتـاهـس}}{\text{س}^٣} \text{ ظـاـس}^٢$$

الحـل: (الضرب بمرافق البسط)

$$= \text{نهـا } \frac{١ - \text{جـتـاهـس}}{\text{س}^٣} \times \frac{١ + \text{جـتـاهـس}}{١ + \text{جـتـاهـس}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{١ - \text{جـتـا}^٢ \text{هـس}}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{١ + \text{جـتـا}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـا}^٢ \text{هـس}}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{١ + ١}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـاهـس} \times \text{جـاهـس}}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٢} \times \frac{٥}{٢} = \frac{٢٥}{١٢}$$

$$(٦) \text{ نهـا } \frac{\text{جـاس} - \text{ظـاس}}{\text{س}^٣} \text{ (تبدیل ظاس فوراً)}$$

الحـل:

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـاس} - \text{جـاس}}{\text{س}^٣} \text{ (توحيد مقامات فوراً)}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـتـاس جـاس} - \text{جـاس}}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{\text{جـتـاس}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـاس}(\text{جـتـاس} - ١)}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{\text{جـتـاس}} \text{ (ضرب بالمرافق)}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـاس}(\text{جـتـاس} - ١)}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{\text{جـتـاس} + ١} \times \frac{١}{\text{جـتـاس} + ١} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـاس}(\text{جـتـا}^٢ \text{س} - ١)}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{\text{جـتـاس} + ١} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـاس}(-\text{جـا}^٢ \text{س})}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{\text{جـتـاس} + ١} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$= - \text{نهـا } \frac{\text{جـا}^٢ \text{س}}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{٢} = - \frac{١}{٢}$$

$$= - \text{نهـا } \frac{\text{جـاس} \times \text{جـاس} \times \text{جـاس}}{\text{س}^٣} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{٢} = - \frac{١}{٢}$$

$$= - \frac{١}{٢} = - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} = - \frac{١}{٢}$$

(نخرج عامل مشترك غريب (٢) من البسط)

$$(٥) \text{ نهـا } \frac{١ - \text{جـاس}^٢}{\text{س}^٢} \text{ س}^٢$$

الحـل:

$$= \text{نهـا } \frac{(١ - \text{جـاس}^٢)}{\text{س}^٢} \text{ (نصنع فرق جيبين)}$$

$$= \text{نهـا } \frac{(١ - \text{جـاس}^٢)}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا } \frac{(١ - \text{جـاس}^٢)}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١ - \text{جـاس}^٢}{\text{س}^٣}$$

$$= \text{نهـا } \frac{(١ - \text{جـاس}^٢)}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١ - \text{جـاس}^٢}{\text{س}^٣}$$

نستبدل: نضع ص = س - $\frac{\pi}{٦}$ ، عندما س = $\frac{\pi}{٦}$ ، ص = ٠

$$= \text{نهـا } \frac{\text{جـا}^٢ \text{ص}}{\text{ص}^٣} \times \frac{١}{\text{جـتـا}^٢} = \frac{\text{جـا}^٢}{\text{ص}^٢} \times \frac{١}{\text{جـتـا}^٢}$$

$$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} \times ٢ = ٣٠ \text{ جـتـا} \times \frac{١}{٢} \times ٤ =$$

الزاوية البديلة
= التعويض - الأصل
= $\pi - \pi$
ربع ثاني \Leftarrow جا +

$$(9) \text{ نها } \frac{\text{جا}^3}{\pi - \text{س}} - \frac{\text{جا}^3}{\pi - \text{س}}$$

الحل:

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3 (\pi - \pi)}{\pi - \text{س}}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3}{\text{ص}} - \frac{\text{جا}^3}{\text{ص}} = 0$$

نستبدل : نضع
ص = $\pi - \pi$
عندما $\pi = \text{س}$ ،
فإن ص = 0

$$(7) \text{ نها } \frac{\text{جا}^2}{\text{س}} - \frac{\text{جا}^2}{\text{س}}$$

الحل:

$$\Leftarrow \text{نها } \frac{\text{جا}^2}{\text{س}} - \frac{\text{جا}^2}{\text{س}}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^2 (\text{جا} - 1)}{\text{س}} \text{ (ضرب بالمرافق)}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^2 (\text{جا} - 1)}{\text{س}} \times \frac{\text{جا} + 1}{\text{جا} + 1}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^2 (\text{جا}^2 - 1)}{\text{س} (\text{جا} + 1)}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^2 \times \text{جا} \times \text{جا}}{\text{س} (\text{جا} + 1)}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3 \times \text{جا} \times \text{جا}}{\text{س} \times \text{س} \times \text{س}} = \frac{1}{\text{س}} \times 1 \times 2 = \frac{1}{\text{س}}$$

$$(10) \text{ نها } \frac{\text{جا}^3}{\pi - \text{س}} - \frac{\text{جا}^3}{\pi - \text{س}}$$

الحل: (نوزع أولاً)

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3}{\pi - \text{س}} - \frac{\text{جا}^3}{\pi - \text{س}}$$

الزاوية البديلة
= التعويض - الأصل
= $\pi^2 - \pi^2$
ربع رابع \Leftarrow ظا -

الزاوية البديلة
= التعويض - الأصل
= $\pi^3 - \pi^3$
ربع ثاني \Leftarrow جا +

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3 (\pi^3 - \pi^3)}{\pi - \text{س}}$$

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3 (\pi - \pi)}{\pi - \text{س}} + \text{نها } \frac{\text{ظا}^2 (\pi - \pi)}{\pi - \text{س}}$$

نستبدل : نضع ص = $\pi - \pi$
عندما $\pi = \text{س}$ ، فإن ص = 0

$$= \text{نها } \frac{\text{جا}^3}{\text{ص}} + \text{نها } \frac{\text{ظا}^2}{\text{ص}}$$

$$= 3 = 2 + 0 = 3$$

$$(8) \text{ نها } \frac{\text{جتاس}^3}{\pi - \text{س}}$$

الحل:
الزاوية البديلة = التعويض - الأصل
= $\frac{\pi}{\text{س}} - \frac{\pi}{\text{س}}$ ، متممة \Leftarrow تقلب

$$\Leftarrow \text{نها } \frac{\text{جتاس}^3 (\pi - \frac{\pi}{\text{س}})}{\pi - \text{س}}$$

نستبدل : نضع ص = $\frac{\pi}{\text{س}} - \frac{\pi}{\text{س}}$ ، عندما $\frac{\pi}{\text{س}} = \frac{\pi}{\text{س}}$ ، ص = 0

$$= \text{نها } \frac{\text{جتاس}^3}{\text{ص}} = 3$$

**** السؤال الثاني (إيجاد الثوابت) ****

$$13) \text{نها} = \frac{1 - \text{جا}(\pi - \rho)}{s^3} = \text{ب}$$

$$\rho \in [\pi, 0], \text{ فما قيمة الثابت ب؟؟}$$

الحل:

**** بما أن النهاية موجودة ****

$$\leftarrow \text{نها المقام} = \text{صفر} \leftarrow \text{نها البسط} = \text{صفر}$$

$$\leftarrow \text{نها} (1 - \text{جا}(\pi - \rho)) = \text{صفر}$$

$$\leftarrow \text{جا}(\pi - \rho) = 1 \leftarrow \text{جا} \rho = 1$$

$$\leftarrow \rho = \frac{\pi}{2} \text{ ضمن الفترة } [\pi, 0]$$

متمة أصلية
← نقرب

$$\leftarrow \text{نها} = \frac{1 - \text{جا}(\frac{\pi}{2})}{s^3} = \text{ب}$$

$$\leftarrow \text{نها} = \frac{1 - \text{جتاس}}{s^3} = \text{ب} \text{ (ضرب بمرافق البسط)}$$

$$\leftarrow \text{نها} = \frac{1 - \text{جتاس}}{s^3} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = \text{ب}$$

$$\leftarrow \text{نها} = \frac{1 - \text{جتاس}}{s^3} \times \frac{1}{1 + \text{جتاس}} = \text{ب}$$

$$\leftarrow \text{نها} = \frac{1}{s^3} \times \frac{1}{1 + \text{جتاس}} = \text{ب}$$

$$\leftarrow \text{نها} = \frac{1}{s^3} \times \frac{1}{1 + \text{جتاس}} = \text{ب}$$

$$\leftarrow \text{ب} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$11) \text{نها} (\pi - s) = \frac{\pi}{s}$$

الحل: (تبديل ظتاس فوراً)

$$\text{نها} = \frac{(\pi - s)}{s} \text{ ظتاس}$$

$$\text{نها} = \frac{(\pi - s)}{s} \text{ ظا} - \frac{(\pi - s)}{s}$$

نستبدل: نضع $v = \pi - s$ ، عندما $s = \pi$ ، $v = 0$

$$\text{نها} = \frac{v}{\pi - v} = 1$$

$$12) \text{نها} = \frac{\text{جتاس}}{\frac{\pi}{2} - \text{جتاس}}$$

الحل:

**** نفضل البسط عن المقام بقسمة كل منهما على**

(س - $\frac{\pi}{2}$) ونوزع النهاية **

$$\text{نها} = \frac{\text{جتاس}}{\frac{\pi}{2} - \text{جتاس}} \leftarrow \text{زاوية بديلة} = \frac{\pi}{2} - s \text{ متمة} \leftarrow \text{نقلب}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{جتاس}^3}{\frac{\pi}{2} - \text{جتاس}} \leftarrow \text{زاوية بديلة} = \frac{\pi}{2} - s^3 \text{ متمة} \leftarrow \text{نقلب}$$

$$\text{نها} = \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - s)}{\frac{\pi}{2} - s} \leftarrow \text{نستبدل: نضع}$$

$$\text{نها} = \frac{1 - \text{جا}(\frac{\pi}{2} - s)}{\frac{\pi}{2} - s} \leftarrow \text{ص} = \frac{\pi}{2} - s \text{ عندما } s = \frac{\pi}{2}, \text{ ص} = 0$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\text{نها} - \text{ص}}{\text{ص} - \text{نها}}$$

$$(14) \text{ نها } \frac{س^2 + س + ٢}{س} \text{ جا } \pi \text{ س} = ب$$

فما قيمة الثوابت ٢ ، $س$ ، $ب$ ؟؟
الحل:

** بما أن النهاية موجودة

$$\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{س^2 + س + ٢}{س} = ٠ \iff \lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها البسط}{س} = ٠$$

$$\lim_{س \rightarrow ٢} (س^2 + س + ٢) = ٠$$

$$\lim_{س \rightarrow ٢} ٢ = ٠ + ٢ \iff \boxed{٢ = ٠}$$

$$\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{س^2 + س - ٦}{س} = ب \text{ (تحلل عبارة تربيعية)}$$

$$ب = \lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها (س - ٢)(س + ٣)}{س} \text{ جا } \pi \text{ س}$$

الزاوية البديلة = $\pi - \pi$ ، ربع رابع \iff جا-

$$ب = \lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها (س - ٢)(س + ٣)}{س} \text{ جا } \pi (س - ٢)$$

$$ب = \lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها (س - ٢)}{س} \times \lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها (س + ٣)}{س} \text{ جا } \pi (س - ٢)$$

نستبدل:

نضع $ص = س - ٢$

عندما $س = ٢$ ، $ص = ٠$

$$ب = ٠ \times \frac{نها - ص}{س} \text{ جا } \pi \text{ ص}$$

$$\boxed{\frac{٠}{\pi} = ب}$$

$$(15) \text{ إذا علمت أن نها } \frac{س(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$$

فما قيمة نها $\frac{س(س - ٢)}{س - ٢}$ جا π س ؟

الحل:

نفضل البسط عن المقام بقسمة كل منهما على الزاوية

وبالتالي نقسم على $(س - ٢)$

$$\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها \frac{س(س - ٢)}{س - ٢}}{س - ٢} = ٥$$

$$\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها \frac{س}{س - ٢}}{س - ٢} = ٥$$

$$\lim_{س \rightarrow ٢} \frac{نها \frac{ص}{ص}}{ص} = ٥$$

$$\frac{٥}{٤} = \frac{١}{٤} = \frac{نها (س - ٢)(س + ٢)}{س(س - ٢)}$$

$$(16) \text{ نها } \frac{س^2 - ٢س + ١}{س - ١} \text{ جا } \sqrt{س - ١}$$

الحل:

$$\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها \sqrt{س - ١}}{س - ١} = ٠$$

$$\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها |س - ١|}{س - ١} = ١ \text{ نعيد تعريف } |س - ١|$$

$$\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها - ١}{س - ١} = ١$$

نستبدل:

نضع $ص = س - ١$

عندما $س = ١$

فإن $ص = ٠$

$$\lim_{س \rightarrow ١} \frac{نها \frac{ص}{ص}}{ص} = ١$$

$$١ = ١$$

**** السؤال الثالث ****

$$(1) \text{ نها} \frac{|س - ٥| - ٣}{س - ٢}$$

الحل:

**** نعوض داخل القيمة المطلقة فقط**

$$\leftarrow \frac{|٥ - ٢| - ٣}{س - ٢} \leftarrow \text{سالب}$$

$$= \frac{٣ - (٥ + س - ٢)}{س - ٢} \text{ نها}$$

$$= \frac{١ - س}{س - ٢} \text{ نها} = ١ -$$

$$(2) \text{ نها} \frac{|س - ٥| - ٢}{س - ٧}$$

الحل:

**** نعوض داخل القيمة المطلقة فقط**

$$\leftarrow \frac{|٥ - ٧| - ٢}{س - ٧} \leftarrow \text{موجب}$$

$$= \frac{٢ - (٥ - س)}{س - ٧} \text{ نها} = \frac{٢ - ٥ + س}{س - ٧} = \frac{س - ٣}{س - ٧} = ١$$

$$(3) \text{ نها} \frac{|س - ٢| - ٢}{س - ١}$$

الحل:

**** نعوض داخل القيمة المطلقة فقط**

$$\leftarrow \frac{|٢ - ١| - ٢}{س - ١} \leftarrow \text{سالب}$$

$$= \frac{٢ - ٢ + س - ٢}{س - ١} \text{ نها}$$

$$= \frac{س - ٢}{س - ١} \text{ نها}$$

$$= \frac{س - (١ - س)}{س - ١} = \frac{١ - س}{س - ١} = \frac{١ - س}{١ - س} = ١$$

$$(4) \text{ نها} \frac{|س + ٣| - |س - ١|}{س - ٢}$$

الحل:

**** نعوض في كل منهما**

$$\leftarrow \frac{|س + ٣| - |س + ٢|}{س - ٢} \leftarrow \text{موجب}$$

$$\leftarrow \frac{|س - ١| - |٦ - ١|}{س - ٢} \leftarrow \text{سالب}$$

$$= \frac{(س + ٣) - (س + ٢)}{س - ٢} \text{ نها}$$

$$= \frac{س + ٣ - ١ - س}{س - ٢} \text{ نها} = \frac{٢ - س}{س - ٢}$$

$$= \frac{٢ - (س - ٢)}{س - ٢} = ٢ -$$

$$(5) \text{ نها} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}}{س - ٢}$$

الحل:

$$= \frac{\sqrt{(س - ٢)^٢}}{س - ٢} \text{ نها} = \frac{|س - ٢|}{س - ٢}$$

**** نعوض داخل القيمة المطلقة فقط**

$$\leftarrow \frac{|٢ - ٢|}{س - ٢} = ٠ = \text{صفر} \leftarrow \text{نعيد التعريف الكامل}$$

$$س - ٢ = ٠ \Rightarrow س = ٢$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{١}{٤} &= \frac{س - ٢}{(س + ٢)(س - ٢)} \text{ نها} \\ \frac{١}{٤} &= \frac{س - ٢}{(س + ٢)(س - ٢)} \text{ نها} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{نشعب النهاية} \\ \text{لأن } س \neq ٢ \\ \text{نقطة تحول} \end{array}$$

$$\therefore \text{نها} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}}{س - ٢}$$

غير موجودة

$$(7) \text{ نها } [2س + 3] [س + 1]$$

الحل:

** نعوض داخل الصحيح فقط

$$[7] = [3 + 4] \text{ صحيح} \leftarrow \text{نشعب النهاية ثم نشعب الناتج}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{نها } [7]_{+2} &= \text{نها } [س + 1]_{+2} \\ 35 &= 5 \times 7 = \\ \text{نها } [7]_{-2} &= \text{نها } [س + 1]_{-2} \\ 30 &= 5 \times 6 = \end{aligned} \right\}$$

∴ نها ق (س) غير موجودة

$$(8) \text{ نها } [س^2 - 7]$$

الحل:

** نعوض داخل الصحيح

$$[3] = [4 - 7] \text{ صحيح} \leftarrow \text{نشعب النهاية ثم نشعب الناتج}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{نها } [3]_{+2} &= [3]_{+2} = 2 \\ \text{نها } [3]_{-2} &= [3]_{-2} = 3 \end{aligned} \right\}$$

∴ نها ق (س) غير موجودة

***** لاحظ عزيزي الطالب:**

أن معامل س سالب ، وبالتالي بعد تشعب النهاية نقلب تشعب التعويض ***

$$(6) \text{ نها } [س + ج - 2] = 1 - س$$

فما قيمة الثابت ج ؟؟؟

الحل:

** بما أن النهاية موجودة

$$\leftarrow \text{نها المقام} = 0 \leftarrow \text{نها البسط} = 0$$

$$\leftarrow \text{نها } [س + ج - 2] = 0$$

$$\leftarrow |ج + 1| = 2 \text{ (معادلة قيمة مطلقة لها حلين)}$$

$$\text{الحل الأول } 1 = ج + 1 \Rightarrow 2 = ج \Rightarrow 1$$

$$\text{الحل الثاني } 1 = ج + 1 \Rightarrow 2 = ج \Rightarrow 3$$

*** نختبر أيهما يعطي الناتج (-1) ***

*** عندما ج = 1 ***

$$\leftarrow \text{نها } [س + 1 - 2] = 1 - س$$

نعوض داخل القيمة المطلقة فقط

$$\leftarrow |1 + 1| = 2 \text{ موجب}$$

$$\text{نها } [س + 1 - 2] = 1 - س = \frac{1 - س}{1 - س} = 1 \text{ مرفوضة}$$

*** عندما ج = 3 ***

$$\leftarrow \text{نها } [س - 3 - 2] = 1 - س$$

نعوض داخل القيمة المطلقة فقط

$$\leftarrow |3 - 1| = 2 \text{ سالب}$$

$$\text{نها } [س - 3 - 2] = 1 - س = \frac{2 - س - 3}{1 - س} = 1 \text{ مقبولة}$$

∴ ج = 3

$$(9) \text{ نهايا } \frac{[س - 5]}{س} \leftarrow \begin{matrix} +2 \\ -3 \end{matrix}$$

الحل:

** انتبه : المشعب لا يشعب ***

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{[3]}{8} = \frac{[س - 5]}{س} \leftarrow \begin{matrix} +2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$(10) \text{ نهايا } \frac{[س - 5]}{س} \leftarrow \begin{matrix} +2 \\ -3 \end{matrix} (1 + 2س)$$

الحل:

** نعوض داخل الصحيح فقط

$$\leftarrow \frac{2}{3} = [1 + \frac{2}{3}] = [1,66] \text{ كسر } \leftarrow \text{نحسب فقط قيمته}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } 1 \times (1 + 2س) = 5$$

$$(12) \text{ نهايا } \frac{[س - 3]}{س - 3}$$

الحل:

** نبدأ بحيث نعوض داخل الصحيح أولاً :

$$\leftarrow \frac{18}{5} = [3 + \frac{3}{5}] = [3,6] \text{ كسر } \leftarrow \text{نحسب فقط قيمته}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } \frac{س - 3}{س - 3}$$

والآن : نعوض داخل القيمة المطلقة

$$\leftarrow |س| \leftarrow |3| \leftarrow \text{موجب}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } \frac{س - 3}{س - 3} = 1$$

$$(13) \text{ نهايا } \frac{[س - 3]}{|س - 3|}$$

الحل:

** نبدأ بحيث نعوض داخل الصحيح أولاً :

$$\leftarrow \frac{18}{5} = [3 + \frac{3}{5}] = [3,6] \text{ كسر } \leftarrow \text{نحسب فقط قيمته}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } \frac{س - 3}{|س - 3|}$$

والآن : نعوض داخل القيمة المطلقة

$$\leftarrow |2 - 3| = \text{صفر} \leftarrow \text{نعيد التعريف الكامل}$$

$$\leftarrow \begin{matrix} 3-س \\ 3+س \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\leftarrow \begin{matrix} 3-س \\ 3-س \end{matrix} \text{ نهايا } \leftarrow \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} 3-س \\ 3-س \end{matrix} \text{ نهايا } \leftarrow \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

∴ نهايا ق(س) غير موجودة

$$(11) \text{ نهايا } \frac{[س - 1]}{س - 1}$$

الحل:

** نعوض داخل الصحيح فقط

$$\leftarrow \frac{1}{5} = [1 + \frac{1}{5}] = [1,2] \text{ كسر}$$

∴ نحسب فقط قيمته وتساوي (1)

$$\leftarrow \text{نهايا } \frac{س - 1}{س - 1} = 1$$

*** ملاحظة ***

المقدار الصحيح نضع القيمة بدلاً منه

**** تابع حل سؤال (٢) ****

(٢) س = ١

ق(١) = ١- (القيمة)

$$\left. \begin{aligned} \text{نهاق(س)} &= ١- \\ \text{نهاق(س)} &= ١- \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{س} &\leftarrow +١ \\ \text{س} &\leftarrow -١ \end{aligned}$$

ق(١) = نهاق(س)

∴ ق(س) متصل عند س = ١

***** الأُطراف: *****

عند الأُطراف النهاية من جهة واحدة فقط

(١) س = ١-

ق(١-) = ١- × ٢- = ٢ (القيمة)

نهاق(س) = ١- × ٢- = ٢ (من جهة اليمين فقط)

ق(١-) = نهاق(س)

∴ ق(س) متصل عند س = ١- من جهة اليمين

(٢) س = ٣

ق(٣) = ١- (القيمة)

نهاق(س) = ١- (من جهة اليسار فقط)

ق(٣) = نهاق(س)

∴ ق(س) متصل عند س = ٣ من جهة اليسار

***** النتيجة *****

ق(س) متصل في الفترة [٣، ١-]

**** ملاحظة: **** على الرغم من أن النهاية عند الأُطراف غير موجودة دائماً إلا أنها عند الاتصال فقط تعامل بطريقة خالصة (من جهة التعريف فقط) ***

سؤال (٣):

الحل:

ق(٣) = [٣ + ١] = [٣ + ٣] = ٦

نهاق(س) = نهاق(س) = ٩ - ٢

نهاق(س) = ٩ - ٢

نهاق(س) = ٦ = (٣ + س)(٣ - س) / (٣ - س)

نهاق(س) = نهاق(س) = [١ + س] + س

٦ = ٣ + ٣ = (-[٤] + ٣) =

**** بسبب الإتصال فإن:**

ق(٣) = نهاق(س)

وبما أنه لم يحدد نوعية الثابت p $6 = [p + 1] \leftarrow$

$7 > p + 1 \geq 6 \leftarrow$

$6 > p \geq 5 \leftarrow$

$6, 5 \ni p \therefore$

**** ملاحظة: **** عندما $5 = p$

الاقتران متصل لأنها تؤثر بالصورة فقط

وليس بالنهاية

سؤال (٤) :
الحل:

$$ق(٠) = ٢ \times [٢ + ٠] = ٢٢$$

$$\begin{aligned} \text{نهاق (س)} &= \text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] ٢ + \text{س} \\ ٢٢ = ٢ \times [٢] &= \end{aligned}$$

$$١- = \frac{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] \text{جا (س-)}}{\text{س}} = \frac{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] \text{جا (س-)}}{\text{س}}$$

** وبما أن ق(س) متصل عند س = ٠

$$\therefore ق(٠) = \text{نهاق (س)} = \text{نهاق (س)}$$

$$١- = ٢٢ \leftarrow \frac{١-}{٢} = ٢$$

سؤال (٥) :
الحل:

$$ق(١) = ٥ - ب = ٥$$

$$\begin{aligned} \text{نهاق (س)} &= \text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] ٣ + ٢س - ١س \\ \text{نها (س-)} &= ٣ + ٢س - ١س \end{aligned}$$

$$\text{نها المقام} = ٠ = \text{نها البسط} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right]$$

$$\text{نها (س-)} = ٣ + ٢س - ١س = ٣ + ٢س - ١س$$

$$\text{نعوضها في النهاية} \quad \boxed{٤ = ٢}$$

$$\therefore \text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] ٣ + ٤س - ٢س = ٥$$

$$٢- = \frac{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] (٣-س)(١-س)}{\text{س}}$$

$$\text{نهاق (س)} = ٥ - ب$$

** وبما أن ق(س) متصل عند س = ١

$$\therefore ق(١) = \text{نهاق (س)} = \text{نهاق (س)}$$

$$٢- = ٥ - ب \leftarrow \boxed{٣ = ب}$$

سؤال (٦) :
الحل:

$$\begin{aligned} ق(\pi) &= \frac{ب^٢}{١٢٨} \\ \text{نهاق (س)} &= \frac{ب^٢}{١٢٨} \end{aligned}$$

الزاوية البديلة =
التعويض - الأصل

$$\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} =$$

متمة ← تقلب

$$\frac{\text{ظتا} \frac{\pi}{٢}}{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] \text{ب} - \text{ب} \pi}$$

$$\frac{\text{ظتا} \left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} \right)}{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] \text{ب} (\pi - \text{س})} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نستبدل :} \\ \text{نضع: ص} = \pi - \text{س} \\ \text{عندما س} = \pi \\ \text{فإن ص} = ٠ \end{array} \right\} \frac{\text{ظتا} \frac{١}{٢} (\pi - \text{س})}{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] \text{ب} (\pi - \text{س})} =$$

$$\frac{\text{ظتا} \frac{١}{٢} \text{ص}}{\text{نها} \left[\begin{array}{c} \text{س} \leftarrow + \\ \text{س} \leftarrow + \end{array} \right] \text{ب} (-\text{ص})} = \frac{١-}{ب} = \frac{١-}{ب}$$

** وبما أن ق(س) متصل عند س = π

$$\therefore ق(\pi) = \text{نهاق (س)} = \text{نهاق (س)}$$

$$\frac{١-}{ب} = \frac{ب^٢}{١٢٨} \leftarrow$$

$$٦٤- = ب^٢ \leftarrow ١٢٨- = ب^٢ \leftarrow$$

$$\boxed{٤- = ب} \leftarrow$$

سؤال (٧) :
الحل:

$$ق(٣) = ٢$$

$$\frac{|١٠ - س| - ٧}{س - ٣} = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

بما أن $س \neq ٣$ تعبر عن النهاية من اليمين واليسار

$$\frac{|١٠ - س| - ٧}{س - ٣} = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

نعوض داخل القيمة المطلقة فقط

$$\frac{|١٠ - ٣| - ٧}{س - ٣} = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

$$\frac{(١٠ - س) - ٧}{س - ٣} = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

$$\frac{١٠ - س + ٧}{س - ٣} = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

$$١ = \frac{س - ٣}{س - ٣} = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

** وبما أن ق(س) متصل عند $س = ٣$

$$\therefore ق(٣) = \frac{نها}{س} \leftarrow$$

$$\boxed{١ = ٢} \leftarrow$$

سؤال (٨) :
الحل:

** نتج (ق.هـ) (س) **

ق	س ^٢	س ^٣
هـ	س + ١	[س + ٢]

$$\left. \begin{array}{l} س^٢ |س + ١| ، س < ١ \\ س^٣ [س + ٢] ، س > ١ \end{array} \right\} = (ق.هـ) (س)$$

توضيح :
ق(١) = ١ × ١ = ١
٢ = |٢| × ١ = ٢

** (ق.هـ) (١) = ٢ القيمة

$$\left. \begin{array}{l} \frac{نها}{س} = \frac{س^٢ |س + ١|}{س} = (ق.هـ) (س) \\ \frac{نها}{س} = \frac{س^٣ [س + ٢]}{س} = (ق.هـ) (س) \end{array} \right\}$$

$$\therefore (ق.هـ) (١) = \frac{نها}{س} = ٢$$

$$\therefore (ق.هـ) (س) \text{ متصل عند } س = ١$$

سؤال (٩) :

الحل: ** نتج (ق.هـ) (س) **

ق	س ^٢	س ^٣
هـ	[س + ٢]	س + ١

$$\left. \begin{array}{l} س^٢ [س + ٢] ، س < ١ \\ س^٣ |س + ١| ، س > ١ \end{array} \right\} = (ق.هـ) (س)$$

توضيح :
ق(١) = ١ × ١ = ١
٢ = |٢| × ١ = ٢

** (ق.هـ) (١) = ٢ القيمة

$$\frac{نها}{س} = \frac{س^٢ [س + ٢]}{س} = (ق.هـ) (س)$$

$$\frac{نها}{س} = \frac{س^٣ |س + ١|}{س} = (ق.هـ) (س)$$

∴ نها (ق.هـ) (س) غير موجودة

$$\therefore (ق.هـ) (س) \text{ غير متصل عند } س = ١$$

***** حلول أسئلة الحصة الرابعة *****

***** السؤال الأول *****

الحل:

$$1 \text{ س} = 1 \text{ س} = 2 \text{ هـ} = 3 \Delta$$

$$\text{ولكن : هـ} = 2 \text{ س} - 1 \text{ س} = 1 \text{ س} - 1 \text{ س}$$

$$\leftarrow 2 \text{ س} = 1 \text{ س} + 1 \text{ هـ}$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(2)}{\text{س} - \text{س}} = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(2)}{1 - 2}$$

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{5 - 8}{3} = \frac{[5] - [8]}{3} = \frac{\text{ق}(5) - \text{ق}(8)}{2 - 5}$$

(٤) الحل:

$$11 = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(1) - \text{هـ}(1-)}{1 - 1}$$

$$\leftarrow 22 = \text{هـ}(1) - \text{هـ}(1-)$$

**** لاحظ أن المطلوب مقدار التغير في الاقتران**

ق(س) وليس معدل التغير يعني Δ ص فقط **

$$\leftarrow \Delta \text{ص} = \text{ق}(1) - \text{ق}(1-)$$

$$= \text{هـ}(1) - \text{هـ}(1-) = 22$$

$$= \text{هـ}(1) - \text{هـ}(1-) = 22$$

(٢) الحل:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(4-)}{1 - 4}$$

$$\therefore \text{ق}(1) - \text{ق}(4-) = 15$$

$$\text{ولكن ق}(1) = 2 \leftarrow 2 - \text{ق}(4-) = 15$$

$$\therefore \text{ق}(4-) = 13$$

(٥) الحل:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(3)}{1 - 3}$$

$$\leftarrow \text{ق}(3) - \text{ق}(1) = 14$$

$$\text{** بما أن ق}(س) = \frac{1}{\text{هـ}(س)}$$

$$\leftarrow \text{هـ}(س) = \frac{1}{\text{ق}(س)}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(3) - \text{هـ}(1)}{1 - 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{\text{ق}(3)} - \frac{1}{\text{ق}(1)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(3)}{\text{ق}(1) \times \text{ق}(3)}$$

$$= \frac{14}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{14}{5}$$

(٣) الحل:

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(ب) - \text{ق}(0)}{ب - 0}$$

$$\leftarrow \frac{1}{3} = \frac{1 - \sqrt{1+b}}{ب} \leftarrow \frac{1}{3} = \frac{1 + \sqrt{1+b} - 1}{ب} = \frac{\sqrt{1+b}}{ب}$$

$$\leftarrow \sqrt{1+b} = 1 + \frac{ب}{3} \quad (\text{الآن نربع الطرفين})$$

$$\leftarrow 9 + 6 + ب = 9 + 2ب + 1$$

$$\leftarrow 9 + 6 + ب = 9 + 2ب + 1$$

$$\leftarrow 0 = 3ب - 2ب = ب$$

$$\leftarrow 0 = ب \quad \text{تهمل لأن الفترة } [0, 3]$$

$$\leftarrow 3 = ب \quad (\text{تقبل})$$

***** السؤال الثاني *****

**** في مسائل تعريف المشتقة تذكر ما يلي:**

$$ق'(س) = \lim_{س \leftarrow ع} \frac{ق(س) - ق(ع)}{س - ع}$$

أما إذا طلب المشتقة عند نقطة مثل ق'(ج) نقوم

$$مباشرة باستخدام ق'(ج) = \lim_{ع \leftarrow ج} \frac{ق(ع) - ق(ج)}{ع - ج}$$

الحل:

$$(١) ق'(٢) = \lim_{ع \leftarrow ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow ٢} \frac{٢ - ع}{١ - ع - ٣ - ع}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow ٢} \frac{٢ - ع}{١ + ٣ - ع}$$

(توحيد مقامات)

$$= \lim_{ع \leftarrow ٢} \frac{١}{٢ - ع} \times \frac{٦ - ع٢ + ع}{٣ - ع}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow ٢} \frac{١}{٢ - ع} \times \frac{٦ - ع٣}{٣ - ع}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow ٢} \frac{١}{٢ - ع} \times \frac{(٢ - ع)٣}{٣ - ع}$$

الحل:

$$(٢) ق'(٣) = \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{٤,٥ - \left(\frac{٣}{١ + ع\sqrt{٢}} + ع \right)}{ع - ٣}$$

نفصل المتجاورين بطرح (٣) واضافتها وتوزيع النهاية

$$= \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{٤,٥ - \frac{٣}{١ + ع\sqrt{٢}} + ٣}{ع - ٣} + \frac{٣ - ع}{٣ - ع} =$$

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{٢ - \frac{٣}{١ + ع\sqrt{٢}}}{ع - ٣}$$

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{١}{٣ - ع} \times \frac{١ + ع\sqrt{٣} - ٦}{١ + ع\sqrt{٢}}$$

**** الآن نضرب المرافق التربيعي للبسط ****

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{١}{١ + ع\sqrt{٣} + ٦} \times \left(\frac{١}{٣ - ع} \times \frac{١ + ع\sqrt{٣} - ٦}{١ + ع\sqrt{٢}} \right)$$

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{١}{(٦ + ٦)} \left(\frac{١}{٣ - ع} \times \frac{(١ + ع)^٩ - ٣٦}{١ + ع\sqrt{٢}} \right)$$

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{١}{(١٢)} \left(\frac{١}{٣ - ع} \times \frac{٩ - ع٩ - ٣٦}{١ + ع\sqrt{٢}} \right)$$

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{١}{(١٢)} \left(\frac{١}{٣ - ع} \times \frac{ع٩ - ٢٧}{١ + ع\sqrt{٢}} \right)$$

$$= ١ + \lim_{ع \leftarrow ٣} \frac{١}{(١٢)} \left(\frac{١}{٣ - ع} \times \frac{(١ - ع)٩}{١ + ع\sqrt{٢}} \right)$$

$$= ١ + \frac{٩}{١٢} \times \frac{١}{٣} - ١ = \frac{٣}{١٢} - ١ = \frac{١}{١٢} - ١ = -\frac{١١}{١٢}$$

الحل:

$$٣) ق'(س) = \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} \text{ نها}$$

$$\text{نها} = \frac{\sqrt{ع٢} - \sqrt{س٢}}{ع - س} \text{ ضرب بالمرافق}$$

$$\text{نها} = \frac{\sqrt{ع٢} - \sqrt{س٢}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع٢} + \sqrt{س٢}}{\sqrt{ع٢} + \sqrt{س٢}}$$

$$\text{نها} = \frac{ع٢ - س٢}{(ع - س)(\sqrt{ع٢} + \sqrt{س٢})}$$

$$\text{نها} = \frac{ع٢ - س٢}{ع - س} \times \frac{١}{\sqrt{ع٢} + \sqrt{س٢}}$$

$$٢) \text{نها} = \frac{ق(س) - ق(ع)}{س - ع} \times \frac{١}{\sqrt{س٢} + \sqrt{ع٢}}$$

نستبدل : نضع ص = ع - س
عندما ع = س فإن ص = ٠

$$\text{نها} = \frac{ص}{ص} \times \frac{١}{\sqrt{س٢} + \sqrt{ع٢}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{س٢} + \sqrt{ع٢}}$$

$$٤) \text{نها} = \frac{ع جاس - س جاع}{ع - س}$$

لتفتيت الضرب وفصل الحدين نعوض ع ← س في (ع) من الحد الأول لنحصل على س جاس ثم نطرح (س جاس) ونضيفها

$$\text{نها} = \frac{ع جاس - س جاس + س جاس - س جاع}{ع - س}$$

*** نجمع ونوزع النهاية ***

$$\text{نها} = \frac{ع جاس - س جاس}{ع - س} + \frac{س جاس - س جاع}{ع - س}$$

$$\text{نها} = \frac{ع جاس - س جاع}{ع - س} + \frac{س(جاس - جاع)}{ع - س}$$

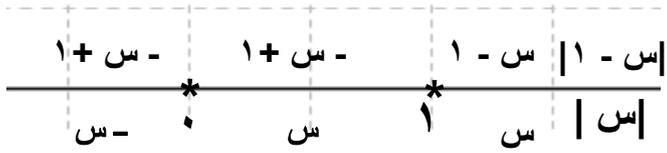
$$= \text{جاس} + س \times (- \text{مشتقة جاس})$$

$$= \text{جاس} + س \times (- \text{جتاس}) = \text{جاس} - س جتاس$$

الحل:

$$٥) ق(س) = |س - ١| + |س|$$

*** يجب إعادة تعريفهما على نفس خط الأعداد **



$$ق(س) = \begin{cases} ١ - س٢ & ١ \leq س < ٠ \\ ١ & ٠ \leq س \leq ١ \\ -٢ + س٢ & س > ١ \end{cases}$$

** تذكر أن المشتقة عند نقطة التحول

تشعب إلى يمين ويسار **

$$ق'(٠)^+ = \frac{ق(ع) - ق(٠)}{ع - ٠} \text{ نها}$$

$$= \frac{١ - ١}{ع} = \frac{\text{صفر}}{\text{قيمة صفر}}$$

$$ق'(٠)^- = \frac{ق(ع) - ق(٠)}{ع - ٠} \text{ نها}$$

$$= \frac{١ - ١ + ع٢ - ع٢}{ع} = \frac{٠}{ع} = ٠$$

$$ق'(٠)^+ \neq ق'(٠)^-$$

ق'(٠) غير موجودة

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

** ملاحظة **

** طالما المشتقة باستخدام التعريف ، يمكن

أن نبحت في اتصال ق(س) وبغض النظر عن

النتيجة نبحت عن ق'(س) باستخدام التعريف

يمين ويسار **

***** السؤال الثالث *****

الحل:

$$(1) \text{ ق (س) = (س}^3 \text{ + 1)}^3$$

(P) **نها** $\frac{\text{ق (س) - (1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$ هي نفسها ق'(1)

$$\therefore \text{ق'(س) = (س}^3 \text{ + 1)}^3 \times \text{س}^3$$

$$\therefore \text{ق'(1) = (1}^3 \text{ + 1)}^3 \times 3 = 36$$

(ب) **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$ هي نفسها ق'(1)

$$\therefore \text{ق'(س) = (س}^3 \text{ + 1)}^3 \times \text{س}^3$$

$$\therefore \text{ق'(1) = (1}^3 \text{ + 1)}^3 \times 3 = 36$$

(ج) **نها** $\frac{\text{ق (1) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

هذه - ق'(1) = $\frac{1}{3} \times 36 = 12$

(2) ق'(3) = 5 ، ق'(3-) = 2

(P) **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

هي نفسها ق'(3) = 5

(ب) **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

نها $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

= - ق'(3) = -5

(ج) **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

نها $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

وهي تساوي ق'(3-) = 2

(د) **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

** هنا يجب فصل المتجاورين بطرح واطافة ق(3) **

= **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق} + \text{ق (3) - (3) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

** نجمع ونوزع النهاية **

= **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق} + \text{ق (3) - (3) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

نستبدل :
نضع ل = 2-
 $\frac{\text{ل}}{2-} = \text{س} \therefore$

نستبدل :
نضع و = 5
 $\frac{\text{و}}{5} = \text{س} \therefore$

= **نها** $\frac{\text{ق (س) - (س}^3 \text{ + 1) ق} + \text{ق (3) - (3) ق}}{\text{س}^3 - 1}$

$$= \frac{5}{3} \times \text{ق'(3)} + \frac{2-}{3} \times \text{ق'(3-)}$$

$$= \frac{5}{3} \times \text{ق'(3)} + \frac{2-}{3} \times \text{ق'(3-)}$$

$$= \frac{5}{3} \times \text{ق'(3)} \times 1 = \text{ق'(3)} \times \frac{5}{3} = 5$$

نستبدل :
- ه = و
 $\therefore - ه = - و$

$$٥) \text{ نها ق (س - ه) - ق (س + ه٣) = جا هس} \\ \leftarrow \text{ه}^٢$$

**** هنا يجب فصل المتجاورين بطرح و اضافة ق (س) ****

$$= \text{نها ق (س - ه) - ق (س) + ق (س) - ق (س + ه٣)} \\ \leftarrow \text{ه}^٢$$

**** نجمع ونوزع النهاية ****

$$= \text{نها ق (س - ه) - ق (س) + نها ق (س) - ق (س + ه٣)} \\ \leftarrow \text{ه}^٢ \quad \leftarrow \text{ه}^٢$$

نستبدل :

$$\text{نضع ل} = \text{ه}^٣$$

$$\therefore \text{ه} = \frac{\text{ل}}{٣}$$

نستبدل :

$$\text{نضع و} = \text{ه}$$

$$\therefore \text{ه} = \text{و}$$

$$= \text{نها ق (س + و) - ق (س) + نها ق (س) - ق (س + ل)} \\ \leftarrow \text{و}^٢ \quad \leftarrow \text{ل} \quad \leftarrow \text{ل} \times \frac{٢}{٣}$$

$$\leftarrow \frac{١}{٢} \times \text{ق (س)} + \frac{٣}{٢} \times \text{ق (س)} = \text{جا هس}$$

$$\times ٢ - \text{ق (س)} = \text{جا هس}$$

$$\text{ق (س)} = \frac{١}{٢} \text{ جا هس}$$

$$\therefore \text{ق (س)} = \frac{١}{٢} \times \text{جا هس}$$

$$\therefore \text{ق (س)} = \frac{٥}{٢} \text{ جا هس}$$

الحل:

$$٣) \text{ ق (س) = س}^٢ + \text{س}^٣$$

$$\text{نها ق (س) - ق (١)} = \frac{٧}{١ - \text{س}}$$

$$\text{هي نفسها ق (١) = ٧}$$

$$\therefore \text{ق (س)} = ٢ + \text{س}^٣$$

$$\therefore \text{ق (١)} = ٧ = ٣ + ٢ = ٢$$

$$٢ = ٢ \leftarrow \text{ه} = ٢$$

$$٤) \text{ ق (س) = س}^٢ + \text{س}^٣$$

$$\text{نها ق (٢ + ه) - ق (٢)} = \frac{٢}{\text{ه}}$$

$$\text{هذه هي ق (٢) = ٢}$$

$$\therefore \text{ق (س)} = ٢ + \text{س}^٣$$

$$\therefore \text{ق (س)} = ٢$$

$$\leftarrow \text{ق (٢)} = ٢ = ٢ = ٢ \leftarrow \text{ه} = ٢$$

$$٦) \text{ نها ق (٥ + ه) - ق (٥)} = \frac{١}{٣}$$

الحل:

$$\text{هي نفسها } \frac{١}{٣} \text{ ق (٥)} = \frac{١}{٣} \leftarrow \text{ق (٥)} = ١$$

$$\text{** لكن المطلوب : نها ق (٥) - ق (٥ + و) = جا هس}$$

نستبدل :

$$\text{نضع و} = \text{ه}^٢$$

$$\therefore \text{ه} = \frac{\text{و}}{٢}$$

$$= \text{نها ق (٥) - ق (٥ + و)} \\ \leftarrow \text{و} \quad \leftarrow \frac{\text{و}}{٢}$$

$$= \text{ق (٥)} - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣} \times ٢ = \frac{٢}{٣}$$

***** حلول أسئلة الحصة الخامسة *****

***** السؤال الأول *****

(١) ق(س) = س√س + ٥ ، جد ق'(٢)
الحل: (ضرب مباشر)

$$ق'(س) = (س) = (س) + \left(\frac{س^2}{س + \sqrt{س}} \right) (١)$$

$$ق'(٢) = (٢) = (٢) + \left(\frac{٢^2}{٥ + \sqrt{٢}} \right) (١)$$

$$ق'(٢) = (٢) = (٢) + \left(\frac{٢}{٣} \right) (٢) = (٢) + \frac{٤}{٣} = ٣ + \frac{٤}{٣} = \frac{١٣}{٣}$$

(٤) ق(س) = جا^٣س ، جد ق'(π/١٢)
الحل: (أولاً نرتب المقدار)

$$ق(س) = (س) = (جا٣س)$$

$$ق'(س) = (س) = ٣(جا٣س) × ١$$

$$ق'(س) = (س) = ٣(٢ جا٣س × جتا٣س) = ٦ جا٣س جتا٣س$$

$$ق'(π/١٢) = (π/١٢) = ٦ جا٣(π/١٢) جتا٣(π/١٢) = ٦ × ١ × ٣ = ١٨$$

(٥) ق(س) = س جتا^٣س ، جد ق'(π/١٢)
الحل: (ضرب) (نرتب)

$$ق(س) = (س) = س(جتا٣س)$$

$$ق'(س) = (س) = (س) + (جتا٣س) × (-٣ جا٣س × ١)$$

$$ق'(س) = (س) = (س) + (جتا٣س) × (-٣ جا٣س)$$

$$ق'(س) = (س) = -٣ جا٣س + جتا٣س$$

$$ق'(π/١٢) = (π/١٢) = -٣ جا٣(π/١٢) + جتا٣(π/١٢) = -٣ × ١ + ٣ = ٠$$

$$ق'(π/١٢) = (π/١٢) = ٣(جتا٣(π/١٢) - جا٣(π/١٢))$$

$$ق'(π/١٢) = (π/١٢) = ٣(جتا٣(π/١٢) - جا٣(π/١٢)) = ٣(٣ - ١) = ٦$$

$$ق'(π/١٢) = (π/١٢) = ٣(جتا٣(π/١٢) - جا٣(π/١٢)) = ٣(٣ - ١) = ٦$$

$$ق'(π/١٢) = (π/١٢) = ٣(جتا٣(π/١٢) - جا٣(π/١٢)) = ٣(٣ - ١) = ٦$$

(٢) ق(س) = س(س + ٧)^{١/٣} ، جد ق'(١)
الحل: (ضرب مباشر)

$$ق'(س) = (س) = (س) + \left(\frac{١}{٣} (س + ٧)^{-٢/٣} \right) (١)$$

$$ق'(١) = (١) = (١) + \left(\frac{١}{٣} (٧ + ١)^{-٢/٣} \right) (١)$$

$$ق'(١) = (١) = (١) + \left(\frac{١}{٣} (٨)^{-٢/٣} \right) (١) = (١) + \left(\frac{١}{٣} \right) = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{٤}{٣} = ١ + \frac{١}{٣} = ١ + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٢} = \frac{٤}{٣}$$

(٣) ق(س) = س. جاس ، جد ق'(π)
الحل: (ضرب)

$$ق'(س) = (س) = (س) + (جاس)$$

$$ق'(π) = (π) = (π) + (جاس)$$

$$ق'(π) = (π) = (π) + (جاس) = (π) + (١) = π + ١$$

$$ق'(π) = (π) = (π) + (١) = π + ١$$

$$(9) \text{ ق (س) = } [3س + 1] \text{ ، جد ق } \left(\frac{1}{3}\right) \text{ :الحل:}$$

** نعوض $\left(\frac{1}{3}\right)$ داخل الصحيح فقط

$$2 = [2, 5] \leftarrow [1 + \frac{1}{3} \times 3] \leftarrow$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } 2$$

$$\therefore \text{ ق (س) = صفر} \leftarrow \text{ ق } \left(\frac{1}{3}\right) = \text{ صفر}$$

$$(6) \text{ ق (س) = } |3 - 2س| \text{ ، جد ق } \left(\frac{2}{3}\right) \text{ :الحل:}$$

** نعوض $\left(\frac{2}{3}\right)$ داخل القيمة المطلقة فقط

$$2 = [2, 5] \leftarrow |3 - 2 \times \frac{2}{3}| \leftarrow \text{ موجب}$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } 3 - 2س$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } 2 \leftarrow \text{ ق } \left(\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$(10) \text{ ق (س) = } \frac{[س \frac{1}{3}]}{س - 3} \text{ ، جد ق } \left(\frac{4}{3}\right) \text{ :الحل:}$$

** نعوض $\left(\frac{4}{3}\right)$ داخل الصحيح فقط

$$1 = [1, \frac{1}{3}] = [\frac{4}{3}] \leftarrow [4 \times \frac{1}{3}] \leftarrow$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } \frac{1}{3 - س}$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } \frac{1 \times 1 - 1}{(3 - س)^2} \leftarrow \text{ ق } \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$(7) \text{ ق (س) = } |س - 3| \text{ ، جد ق } \left(\frac{2}{3}\right) \text{ :الحل:}$$

$$\text{ ق }^2 (س) = (|س - 3|)^2 = (س - 3)^2$$

انتبه عزيزي الطالب أن القيمة المطلقة تزول بالتربيع

$$\text{ ق }^2 (س) = (س - 3)^2 = 1 - س$$

$$\therefore \text{ ق }^2 (س) = (1)^2 = 1 - س \times (1 - 3)^2 = 4 - س$$

$$(8) \text{ ق (س) = } \left| \frac{1 - س}{8 - س} \right| \text{ ، جد ق } \left(\frac{5}{8}\right) \text{ :الحل:}$$

** نعوض $\left(\frac{5}{8}\right)$ في كل ما داخل القيمة المطلقة

$$\left| \frac{1 - 5}{8 - 5} \right| \leftarrow \text{ سالب}$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } \frac{1 - س}{8 - س} = \frac{1 - 5}{8 - 5}$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } \frac{(1)(1 + س - (-1)) - (-1)(8 - 5)}{(8 - 5)^2} = \text{ ق (س) = } \frac{(1)(1 + 5 - (-1)) - (-1)(8 - 5)}{(8 - 5)^2}$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } \frac{(1)(1 + 5 - (-1)) - (-1)(8 - 5)}{(8 - 5)^2} = \frac{(1)(1 + 5 - (-1)) - (-1)(8 - 5)}{(8 - 5)^2}$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } \frac{7}{9} = \frac{(1)(4 - (-1)) - (-1)(3 - (-))}{(3 - (-))^2}$$

$$(11) \text{ ق (س) = } [س \frac{س}{5} - 2] \text{ ، جد ق } \left(\frac{3}{5}\right) \text{ :الحل:}$$

** نعوض $\left(\frac{3}{5}\right)$ داخل الصحيح فقط

$$1 = [1, \frac{3}{5}] = [\frac{7}{5}] \leftarrow [2 - \frac{3}{5}] \leftarrow$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } 1 \times س = س$$

$$\therefore \text{ ق (س) = } 1 \leftarrow \text{ ق } \left(\frac{3}{5}\right) = 1$$

$$(١٤) \text{ ص} = \text{ن}^٣ - \text{ن}^٢, \text{ ن} = \text{ظ}^٢ \text{ س}$$

$$\text{جد} \frac{\text{نص}}{\text{دس}} \text{ عندما س} = \frac{\pi}{٨}$$

الحل:

$$\frac{\text{نص}}{\text{دس}} = \frac{\text{نص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$= (\text{ن}^٣ - \text{ن}^٢) \times (\text{قا}^٢ \text{ س}^٢ \times ٢)$$

$$\text{** بما أن س} = \frac{\pi}{٨} \iff \text{ن} = \text{ظ}^٢ \frac{\pi^٢}{٨}$$

$$= \frac{\pi}{٤} \text{ ظاه}^٤ = ١$$

$$\frac{\text{نص}}{\text{دس}} = \frac{\pi}{٨} \text{ س} = \frac{\pi}{٨} \times (\text{قا}^٢ \text{ س}^٢ \times ٢) \times (٢ - ١ \times ٣)$$

$$\frac{\text{نص}}{\text{دس}} = ١ \times \frac{١}{(\text{جناه}^٤)^٢} \times ٢$$

$$= ٢ \times \frac{١}{(\sqrt[٢]{٢})^٤} = ٢ \times ٢ = ٤$$

$$(١٥) \text{ ص} = \text{ع}^٢ + \text{س}^٢, \text{ ع} = \text{جاس}, \text{ جد} \frac{\text{نص}}{\text{دس}}$$

الحل:

**** نستبدل (ع) فوراً قبل الاشتقاق ****

$$\text{.} \text{ ص} = \text{جاس}^٢ + \text{س}^٢ \text{ (ص بدلالة س)}$$

$$\frac{\text{نص}}{\text{دس}} = \text{جاس}^٢ \times \text{جتاس} + \text{س}^٢$$

$$= \text{جاس}^٢ + \text{جتاس} + \text{س}^٢$$

$$= \text{جاس}^٢ + \text{س}^٢ = \text{جاس}^٢ + \text{س}^٢$$

$$(١٢) \text{ ق}(\text{س}) = \frac{|١ - \text{س}^٢|}{[١ + \text{س}]}, \text{ جد ق}(\frac{١}{٢})$$

الحل:

$$\text{نبدأ مع الصحيح} \iff [١ + \frac{١}{٢}] \iff [١,٥] = ١$$

**** الآن نعوض (١/٢) داخل القيمة المطلقة** $\iff |١ - \frac{١}{٤}|$ سالب

$$\text{.} \text{ ق}(\text{س}) = \frac{١ - \text{س}^٢}{١ + \text{س}}$$

$$\text{.} \text{ ق}(\frac{١}{٢}) = \frac{١ - \frac{١}{٤}}{١ + \frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{١٦}$$

$$(١٣) \text{ ص} = \sqrt[٢]{٤ + \text{ع}^٢}, \text{ ع} = \frac{٥}{٣ + \text{س}}$$

$$\text{جد} \frac{\text{نص}}{\text{دس}} \text{ عندما س} = ٢$$

الحل:

$$\frac{\text{نص}}{\text{دس}} = \frac{\text{نص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= \frac{١ \times ٥}{(٣ + \text{س})^٢} \times \frac{\text{ع}^٢}{٣ + \sqrt[٢]{٤ + \text{ع}^٢}}$$

$$\text{** بما أن س} = ٢ \iff \text{ع} = \frac{٥}{٣ + ٢} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$\frac{\text{نص}}{\text{دس}} = \frac{١}{١٠} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{(٥)^٢} \times \frac{١}{\sqrt[٢]{٤ + ٥}} = \frac{١}{١٠}$$

س = ٢

١٨) ق(س) = $\left(\frac{1+s}{2s}\right)^3$ ، جد أصفار المشتقة الأولى

الحل:

$$= \text{ق}'(س) =$$

$$\left(\frac{(1+s)(1-s)^2}{2s^3}\right) \times \left(\frac{1+s}{2s}\right)^3$$

$$0 = \left(\frac{2s^2 - 2s - 2s^2}{2s^4}\right) \times \left(\frac{1+s}{2s}\right)^3 = \text{ق}'(س)$$

** نأخذ كل قوس لوحده **

$$\frac{1+s}{2s} = 0 \iff 1+s = 0 \iff \text{صفر} \iff 1-s = 0$$

$$\frac{2s^2 - 2s - 2s^2}{2s^4} = \text{صفر} \iff 2s^2 - 2s - 2s^2 = 0 \iff \text{صفر}$$

$$0 = (2+s) \iff$$

$$0 = 2-s \iff$$

$$2-s = 0 \iff$$

∴ أصفار المشتقة { 1-، 2- }

** لكن لماذا أهملنا أصفار المقام ???

الجواب : لأنها لا تجعل المشتقة (صفر)

بل تجعل المشتقة غير موجودة

$$١٦) \text{ص} = 3n^2 + 5n, \text{دس} = 6n$$

$$\text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{ عندما } n = 1$$

الحل:

$$\left(\frac{1}{n}\right) \times (5 + 3n^2) = \frac{\text{دس}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{\text{دس}}{\text{دص}} \iff 6n = \frac{\text{دس}}{\text{دص}}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \left(\frac{1}{6}\right) \times (5+3) = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \quad n = 1$$

$$١٧) \text{ص} = 2n^2 - 6n + 1, \text{دس} = 4n$$

$$\text{ما قيمة س بحيث } 2 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

الحل:

$$\left(\frac{1}{4}\right) \times (2n^2 - 6n + 1) = \frac{\text{دس}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{دس}}{\text{دص}} \iff 4 = \frac{\text{دس}}{\text{دص}}$$

$$2 = \frac{2n^2 - 6n}{4} \iff 8 = 2n^2 - 6n$$

$$7 = n \iff 14 = 2n$$

$$\text{ولكن س} = 4n = 28$$

(٢١) ق(س) = (س + ١)³ ، ه(س) = √[٣]{٤ - س³} ، جد (ق ه) / (١)'
الحل:

(ق ه) / (١)' أو $\frac{د}{دس} = \frac{ق(ه(س))}{س}$
 $١ = س$

هي نفس المطلوب

(ق ه) / (١)' = ق(١)' / ه(١)' × (١)'

$١ = \sqrt[٣]{٤ - س³} = ه(١)'$
 $ق(١)' = ٢(س + ١)³ × س³$
 $١ = ه(س)' / (٤ - س³) = \frac{١}{٣(٤ - س³)}$
 $\frac{١}{٣(٤ - س³)} = \frac{١}{٣(٤ - س³)}$
 $١٢ =$

(٢٢) ق(س) = ٥س ، ه(س) = √[١]{٨ - س} ، وكان ه(ق) / (٢)' = ١ ، فما قيمة ه(٢) / (ق)' ، وما قيمة ٢
الحل:

(١) ه(٢) / (ق)' = ه(٢)' / ق(٢)' × (٢)'

لدينا :
 $١ = ه(ق) / (٢)'$
 $٥ = ق(س)'$

$١ = ق(٢)' × ه(٢)'$
 $٥ = ٥ × ١ =$

(٢) بما أن ه(٢) / (ق)' = ١ =

لاحظ أن : ق(٢) = ٥
 $\frac{١}{س - \sqrt[٢]{٢}} × ٨ = ه(س)'$
 $\frac{٤}{س - \sqrt[٢]{٢}} = ه(س)'$

∴ ه(٥) / (٢)' = ١ =

$١ = \frac{٤}{٥ - \sqrt[٢]{٢}}$

٤ = ٥ - √[٢]{٢} (نربع الطرفين)

١٦ = ٥ - ١ = ٥ - ١ = ١٥

٣ = ٢ ←

(١٩) √[١]{س} = ١ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١
الطريقة الأولى للحل:

** نربع الطرفين (يفضل ذلك في المعادلات)

$١ = س$ ← $١ = س$
 $\frac{١}{س} = ص$

$١ = \frac{١}{س} = \frac{دص}{دس} = \frac{١ - دص}{س}$ ←

الطريقة الثانية للحل: (نشتق ضمناً)

$صفر = \frac{دص(س) + (دص)١}{س٢}$ ←

$صفر = ص + \frac{دص}{س}$ ←

$\frac{دص}{س} = \frac{دص}{س}$ ←

$١ = \frac{١}{س} = \frac{دص}{دس}$ ←
 $١ = ص$

س = ١ ،
 نجد ص = ؟؟
 $١ = س × \sqrt[١]{ص}$
 ∴ ص = ١

(٢٠) س جاص = ج(س ص) ، جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: (نشتق ضمناً)

(س) ج(ص) = ج(ص) + (ج(ص) / دس) = (١) ج(ص) + (ج(ص) / دس) × (١ + ص)

س ج(ص) / دس + ج(ص) = س ج(ص) / دس + ص ج(ص) / دس

س ج(ص) / دس - س ج(ص) / دس = ص ج(ص) / دس - ج(ص)

$\frac{دص}{دس} (س ج(ص) - س ج(ص)) = ص ج(ص) / دس - ج(ص)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص ج(ص) - ج(ص)}{س ج(ص) - س ج(ص)}$

$$٥ = (٣)' ه ، ٩ - ٢ = (س) ق$$

و كان (ق ٥ ه) = (٣)' ، جد ه (٣)
الحل:

$$١٥ = (٣)' ه \times ((٣)' ه) ق = (٣)' ه (٣)' ق$$

لاحظ أن :
ق' = (س) ٢

$$١٥ = ٥ \times ((٣)' ه) ق'$$

$$٣ = ((٣)' ه) ق'$$

$$\frac{٣}{٢} = (٣)' ه \leftarrow ٣ = (٣)' ه ٢$$

$$٢٣ (ق) = (س) ٤ - ٩ ، ل (س) = \sqrt{١ + ٩}$$

جد نها $\frac{ق(ل(٣) + ه) - ق(ل(٣))}{ه}$

الحل:

نها $\frac{ق(ل(٣) + ه) - ق(ل(٣))}{ه}$ وهذه

هي مشتقة (ق ٥ ل) (س) أي أنها (ق ٥ ل) (٣)'
س = ٣

$$(ق ٥ ل) (٣)' = ق' (ل(٣)) \times (٣)'$$

(٢٦) إذا علمت أن ق (س) = $\frac{١}{٤} س ن$ ،

وكانت ق (٤) (س) = (١ + پ) س ٣

فما قيمة الثابت پ ؟؟؟

الحل:

$$ق(س) = \frac{١}{٤} س ن \leftarrow ق'(س) = \frac{١}{٤} ن س ن - ١$$

$$ق''(س) = \frac{١}{٤} ن (١ - ن) س ن - ٢$$

$$ق'''(س) = \frac{١}{٤} ن (١ - ن) (٢ - ن) س ن - ٣$$

$$ق^{(٤)}(س) = \frac{١}{٤} ن (١ - ن) (٢ - ن) (٣ - ن) س ن - ٤ = (١ + پ) س ٣$$

$$٧ = ن \leftarrow ٣ = ٤ - ن$$

$$١ + پ = \frac{١}{٤} ن (١ - ن) (٢ - ن) (٣ - ن)$$

$$٢١٠ = ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times \frac{١}{٤} = ١ + پ \leftarrow$$

$$٢٠٩ = پ \leftarrow ٢١٠ = ١ + پ \leftarrow$$

لاحظ أن : ل(٣) = $\sqrt{٤}$
ق' (س) = ٨
ل' (س) = $\frac{١}{١ + \sqrt{٢} س}$

$$ق'(٢) \times ل(٣) =$$

$$\frac{١}{٤ \sqrt{٢}} \times ١٦ =$$

$$٤ = \frac{١}{٤} \times ١٦ =$$

$$٢٤ (ق) = (س) ٣ ، ه (س) = ١ + ٢$$

الحل:
دس $\frac{٣}{٤} (ق ٥ ه) (س)$

$$= (٣)' ه (٣)' (س) \times ((٣)' ه) ق' \times ((٣)' ه) س$$

$$\frac{لص}{دس} = \frac{٣ (ق(٥)) \times ((٥)' ق) \times ((٥)' ه) \times ((٥)' ه) س}{٢} =$$

لاحظ أن :
ه (٢) = ٥
ه' (س) = ٢ س
ق' (س) = ٣ س

$$= ٣ (ق(٥)) \times ((٥)' ق) \times ((٥)' ه) \times ((٥)' ه) س$$

$$= ٣ \times (١٢٥) \times ٣ \times ٥ \times ٤ =$$

$$= ١٤٠٦٢٥٠٠ = ٢٥ \times (١٢٥) ٣٦ =$$

*****حلول أسئلة الحصة السادسة*****

١) حل السؤال الأول :

$$\frac{س}{١-س^٢} = (س) ق$$

$$\frac{١-}{٢(١-س^٢)} = \frac{(٢)(س)-(١)(١-س^٢)}{٢(١-س^٢)} = (س) ق$$

$$\frac{١-}{٤(١-س^٢)} = \frac{٢ \times (١-س^٢) \times ١}{٤(١-س^٢)} = (س) ق$$

$$١ = \frac{١}{١} = \frac{١}{١ \times ٢} = (١) ق$$

$$١- = \frac{١-}{١} = \frac{١-}{٢(١-١ \times ٢)} = (١) ق$$

$$٤ = \frac{٤}{١} = \frac{٤}{٣(١-١ \times ٢)} = (١) ق$$

$$(١) ق \cdot (١) ق + (١) ق \times (١) ق = (١) ق \times (١) ق + (١) ق \times (١) ق = ١ + ٤ = ٥$$

$$ب) \frac{ق}{ق} (١) ق = \frac{ق(١) ق - (١) ق \times (١) ق}{ق(١) ق} = \frac{٣ - (١ \times ١) - (٤ \times ١)}{٣} = \frac{٣ - ١ - ٤}{٣} = \frac{-٢}{٣}$$

$$٣ = \frac{٣}{١} = \frac{(١-١) - (٤ \times ١)}{١} = \frac{-٢}{١} = -٢$$

$$ج) (١) ق \times (١) ق = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ = ١$$

$$٤ = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ٤ = ٤$$

$$د) (١) ق \times (١) ق = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ = ١$$

$$٤ = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ٤ = ٤$$

$$\frac{٤-}{٩} = ٤ \times \frac{١-}{٢(١-١ \times ٢)} = \frac{٤-}{٩}$$

$$هـ) (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ = ١$$

** يجب البدء مع المشتقة الأولى **

$$(١) ق \times (١) ق = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ = ١$$

$$(١) ق \times (١) ق = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ = ١$$

$$(١) ق \times (١) ق + (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ + ١ \times ١ = ٢$$

$$(١- \times (١) ق \times ١-) + ٤ \times (١) ق = ١- \times (١) ق \times ١- + ٤ \times ١ = ١- \times ١- + ٤ = ١ + ٤ = ٥$$

$$٥ = ١- \times ١- + ٤ = ١ + ٤ = ٥$$

٢) الحل :

$$ق(س) = ق(س) ، هـ(س) = ١ + \sqrt{٤س}$$

$$هـ(١) ق = (١) ق \times (١) ق = (١) ق \times (١) ق = ١ \times ١ = ١$$

$$هـ(٢) ق = (٢) ق \times (٢) ق = (٢) ق \times (٢) ق = ٤ \times ٤ = ١٦$$

$$\frac{١}{٣} = ١ \times \frac{١}{٣} = ١ \times \frac{٤ \times ١}{٩ \sqrt{٢}} = \frac{٤}{٩ \sqrt{٢}}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$$

$$١ = ١$$

$$ق(٤) = (٤) ق = ٤$$

$$٢ = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$ق(٢) = ٢ قاس \times قاس ظاس = ٢ قاس \times ٢ قاس = ٤ قاس$$

$$هـ(س) = \frac{٤ \times ١}{١ + \sqrt{٤س}}$$

٣) الحل :

$$١٠ = (٣) هـ \times (٣) ق = (٣) هـ \times (٣) ق = ٣ \times ٣ = ٩$$

$$٤ = (٣) هـ \times (٣) ق = ٤ \times ٣ = ١٢$$

$$١٠ = (٣) هـ \times ٤ = ١٢$$

$$٥ = (٣) هـ \times ٢ = ١٢$$

٤) الحل :

$$ص = ق(س^٢ + ٢س) ، ق(٣) = ٣$$

$$\frac{دص}{دس} = ق(س^٢ + ٢س) \times (٢ + س) = (٢ + س) \times (س^٢ + ٢س)$$

$$\frac{دص}{دس} = ق(٢ + ٢) \times (٢ + ١) = (٢ + ٢) \times (٢ + ١) = ٤ \times ٣ = ١٢$$

$$٤ \times (٣) ق = ١٢$$

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠$$

$$(3) \text{ ص} = (ق(س))^3 - \sqrt{ق(س)^2}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ق(س)^3 - \sqrt{ق(س)^2}}{دس}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ق(س)^3 - \sqrt{ق(س)^2}}{دس}$$

$$1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times 3 =$$

$$(4) \text{ إذا كان } ق(س) = (1 + 3س) \text{ ، جد } ق(9)$$

$$ق(س) = (1 + 3س)^2$$

$$\frac{1}{3س} = (1 + 3س)^2$$

$$\frac{1}{12} = (1 + 3(2))^2$$

$$\frac{1}{12} = ق(9)$$

نستبدل بنضع

$$9 = 1 + 3س$$

$$8 = 3س$$

$$2 = س$$

نجد ق(1) من الأصل

$$ق(1) = (1) = 1$$

$$ق(1) = 3 \times (1) = 3$$

$$ق(1) = \frac{1}{3}$$

$$ق(س) = (س) \cdot (س) = 1 \leftarrow ق(س) = (س) = 1$$

$$\frac{ق(س)}{ق(س)} = \frac{1 \cdot (س)}{(س)}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{1 \cdot (س)}{(س)} = ق(س)$$

*** حل آخر (نشتق ضرب) ***

$$ق(س) = (س) \cdot (س) = 1 \cdot (س) + (س) \cdot (س) = 2س$$

$$ق(س) = 3 + 5 = 8$$

$$\frac{5}{9} = ق(س) \leftarrow \frac{5}{3} = ق(س)$$

** حل السؤال الثاني **

$$(1) \frac{دص}{دس} = \frac{ق(س)^3 - \sqrt{ق(س)^2}}{دس}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ق(س)^3 - \sqrt{ق(س)^2}}{دس}$$

$$300 = (4 \times 1) \times (3 + 2)^3 =$$

$$(5) \text{ } ق(س) = (س)^2 = 6س + 4 \text{ ، جد } ق(8)$$

$$2 \text{ } ق(س) = (س)^2 \times ق(س) = 6س + 4$$

*** نعوض س=2 لنحصل على ق(8) **

$$2 \text{ } ق(8) = (8)^2 \times ق(8) = 6 \times 2 + 4 = 16$$

$$\frac{16}{8} = ق(8)$$

$$2 = ق(8)$$

$$4 = 8 - 4$$

$$\frac{16}{8} = ق(8)$$

*** ولأن ق(8) = 4 ، 4 = 8 - 4 (هناك حلين)

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4 \times 4} = ق(8)$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{(4-4) \times 4} = ق(8)$$

$$(2) \text{ } ق(ص) = (ص) + 1 \text{ ، } ق(5) = 4 \text{ (نشتق ضمناً)}$$

$$1 = \frac{دص}{دس} = \frac{ق(ص)^2 - \sqrt{ق(ص)}}{دص}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{ق(5) \times 2 \times 2} = \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{ق(5) \times 2 \times 2} = \frac{دص}{دس}$$

٦) الحل:

$$\frac{\text{جا}^3 + \text{هـ}^3}{\text{هـ}^3} - \text{جا}^3$$

هذا شكل من أشكال تعريف المشتقة (نهاية خاصة)

** تعتبر $(\text{هـ}^3 + \text{جا}^3)$ بمثابة $\boxed{\text{ع}^3}$ **

$$\frac{\text{جا}^3 - \text{ع}^3}{\text{ع}^3 - (\text{س} - \text{ع})^3}$$

$$\frac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{مشتقة (جا}^3 \text{)}$$

$$= \frac{1}{\text{س}} (\text{جتا}^3 \times 3) = \text{جتا}^3 \text{س}$$

٧) الحل: (حالة خاصة)

*** سؤال استثنائي ***

$$\frac{\text{ق}(\text{س}^3 + 1) - \text{ق}(9)}{\text{س} - 2}$$

** بما أن الشكل ليس ق(ع) أو ق(س) المباشرة

∴ نشق البسط ونشتق المقام كل في مكانه **

$$\frac{\text{ق}'(\text{س}^3 + 1) \times 3\text{س}^2 - \text{ق}'(9)}{\text{س} - 2}$$

$$= \frac{\text{ق}'(9) \times 3 \times (2)^2}{\text{س} - 2}$$

$$= 24 = 4 \times 3 \times 2 =$$

حل السؤال الثالث:

$$(1) \text{ص} = \text{ظاس} + \frac{1}{\text{س}} (\text{ظاس})^3$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قأس} \times 1 + \frac{1}{\text{س}} \times 3 (\text{ظاس})^2 \times \text{قأس}$$

$$= \text{قأس} + \text{ظأس قأس}$$

$$= \text{قأس} (1 + \text{ظأس})$$

$$= \text{قأس} \times \text{قأس} = \text{قأس}^2$$

$$(2) \text{ص} = (\text{ظاس})^2$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 (\text{ظاس})^1 \times \text{قأس} = 2 \text{ظاس} (\text{قأس})^2$$

$$\frac{\text{د}^2 \text{ص}}{\text{دس}^2} = 2 (\text{ظاس})^1 (\text{قأس})^2 + (\text{ظاس})^2 (\text{قأس})^1 = 2 (\text{ظاس}^2 \text{قأس})^2$$

$$\frac{\text{د}^2 \text{ص}}{\text{دس}^2} = 4 \text{ظأس قأس} + 2 \text{قأس}^2$$

$$= 2 \text{قأس} (2 \text{ظأس} + \text{قأس})$$

$$= 2 (\text{قأس} + 1) (\text{ظأس} + 2 \text{قأس})$$

*** انتبه: نعوض ظأس = ص من المصدر **

$$= 2 (\text{ص} + 1) (\text{ص} + 2 \text{ص} + 1)$$

$$= 2 (\text{ص} + 1) (\text{ص}^2 + 1)$$

$$(3) \text{ص} = \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} \quad (\text{يستحسن الضرب التبادلي})$$

$$\text{س ص} = \text{ظاس} \quad (\text{نشتق})$$

$$\text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص} \times 1 + \text{قأس}$$

$$\text{س ص}' + \text{ص} = (\text{قأس})^2 \quad (\text{نشتق مرة أخرى})$$

$$(\text{س ص}'' + \text{ص}' + 1 \times \text{ص}')^2 = (\text{قأس})^2 (\text{قأس})^2$$

$$\text{س ص}'' + 2 \text{ص}' + 1 = 2 \text{قأس}^2 \text{ظاس} = 0$$

*** ولكن ظاس = س ص من المصدر ***

$$\therefore \text{س ص}'' + 2 \text{ص}' + 1 = 2 \text{س ص} \text{قأس} = 0$$

$$(٤) \text{ ص}^٢ = ١ + ٣ \text{ جاس}$$

الحل:

$$\begin{aligned} ٢ \text{ ص}^٢ &= ٣ \text{ جتاس} \quad (\text{ثم نشق}) \\ ٢ \text{ ص}^٢ &= \text{ص}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ص}^٢ \\ ٢ \text{ ص}^٢ &= \text{ص}^٢ + ٢ \text{ ص}^٢ \\ ٢ \text{ ص}^٢ &= \text{ص}^٢ + ٢ (\text{ص}^٢) + ٣ \text{ جاس} = ٠ \\ *** \text{ ولكن } ٣ \text{ جاس} &= \text{ص}^٢ - ١ \text{ من المصدر} *** \\ ٢ \text{ ص}^٢ &= ١ - \text{ص}^٢ + ٢ (\text{ص}^٢) + ٣ \text{ جاس} \\ ٢ \text{ ص}^٢ &= \text{ص}^٢ + ٢ (\text{ص}^٢) + ٣ \text{ جاس} \end{aligned}$$

$$(٧) \text{ جاص} = ٢ \text{ جاس}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{جتاص} &= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \text{ جتاس} \times ١ \\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} &= \frac{٢ \text{ جتاص}}{\text{جتاص}} \quad (\text{نربع الطرفين}) \\ \frac{٤ \text{ جتاص}}{\text{جتاص}} &= ٢ (\text{ص}^٢) \\ \frac{٤ - ٤ \text{ جتاص}}{\text{جتاص}} &= \frac{٤ (١ - \text{جتاص})}{\text{جتاص}} = ٢ (\text{ص}^٢) \end{aligned}$$

علينا التخلص من جاس ← بما أن ٢ جاس = جاص
فإن ٤ جاس = جاص

$$\therefore (\text{ص}^٢) = \frac{٤ - \text{جتاص}}{\text{جتاص}} \quad (\text{توزيع البسط ع المقام})$$

$$(\text{ص}^٢) = \frac{٤}{\text{جتاص}} - \frac{\text{جتاص}}{\text{جتاص}}$$

$$\begin{aligned} ٤ \text{ قاص} - \text{ظاص} &= \\ ٤ \text{ قاص} - (\text{قاص} - ١) &= \\ ٣ \text{ قاص} + ١ &= \end{aligned}$$

$$(٨) \text{ س جاص} = ١$$

الحل:

$$\begin{aligned} \text{س جتاص} &= ١ \text{ جاص} + \text{ص}^٢ = ١ \\ \text{س جتاص} &= \text{ص}^٢ = - \text{جاص} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{ص}^٢}{\text{س جتاص}} = \frac{- \text{جاص}}{\text{س جتاص}} \quad \text{ولكن س} = \frac{١}{\text{جاص}} \text{ من المصدر}$$

$$\frac{\text{ص}^٢}{\text{جتاص}} = \frac{- \text{جاص}}{\text{جتاص} \times \text{جتاص}}$$

$$\therefore \text{ص}^٢ = \frac{١ - \text{جتاص}}{\text{جتاص}} + \text{جتاص}$$

$$\text{ص}^٢ = - \text{قاص} + \text{جتاص}$$

$$\text{جتاص} - \text{قاص} =$$

$$(٥) \text{ س} + \text{ص} = \text{جتاص} \quad (\text{نشق})$$

الحل:

$$\begin{aligned} ١ + \text{ص}^٢ &= - \text{جاص} \quad (\text{نرتب}) \\ ١ + \text{ص}^٢ + \text{جاص} &= \text{ص}^٢ + \text{جاص} \\ ١ &= \text{ص}^٢ + \text{جاص} - \text{جاص} \\ ٠ &= \text{ص}^٢ + \text{جاص} - \text{ص}^٢ \\ \text{ص}^٢ + \text{جاص} &= \text{ص}^٢ \\ \text{ص}^٢ + \text{جاص} &= \text{ص}^٢ + \text{جاص} \end{aligned}$$

لتحديد قيمة (١+جاص)
ننظر إلى المشتقة الأولى
ص^٢+جاص = ١
١- = ص^٢
ص^٢+١ = ص^٢
١- = ص^٢
ص^٢+١ = ص^٢

$$\begin{aligned} \text{ص}^٢ - (\text{ص}^٢) &= \text{جتاص} \\ \text{ص}^٢ + ١ &= \\ \text{ص}^٢ - (\text{ص}^٢) &= \frac{١-}{\text{ص}^٢} \\ \text{ص}^٢ &= \text{جتاص} \end{aligned}$$

$$(٦) \text{ س} = \text{ظاص}$$

الحل:

يمكن من هنا التلاعب بالشكل
لوضعها بدلالة ظاص

$$١ = \text{قاص} \cdot \text{ص}^٢$$

$$١ = (\text{ظاص} + ١) \cdot \text{ص}^٢ \quad \text{وبالتالي}$$

$$١ = (\text{س} + ١) \cdot \text{ص}^٢ \quad \text{تذكر أن : س} = \text{ظاص}$$

← س^٢ = ظاص

$$\frac{١}{\text{س} + ١} = \text{ص}^٢$$

$$\text{ص}^٢ = \frac{١ - \text{س}^٢}{(\text{س} + ١)^٢} = \frac{١ - \text{س}^٢}{(\text{س} + ١)^٢}$$

(١٠) إذا كان ص = جا٢ن ، س = جتا٢ن

الحل:

$$\left. \begin{aligned} \frac{دس}{دن} &= -جا٢ن \times ٢ \\ \frac{١-}{دس} &= \frac{دن}{٢جا٢ن} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$$

$$\frac{دص}{دس} = (جتا٢ن \times ٢) \times \left(\frac{١-}{٢جا٢ن}\right)$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{جتا٢ن -}{جا٢ن} = -جتا٢ن$$

ويمكن أن تكتب $\frac{س-}{ص}$ تذكر ذلك

$$\frac{د٢ص}{دس٢} = - (جتا٢ن \times ٢ \times \frac{دن}{دس})$$

*** تذكر عزيزي الطالب أن المشتقة دائماً

ب هذه الحالة ضمنية لهذا ضربنا ب $\frac{دن}{دس}$ ***

$$\frac{د٢ص}{دس٢} = \frac{١-}{دس} \times ٢ \times \frac{دن}{٢جا٢ن}$$

$$\frac{د٢ص}{دس٢} = \frac{١-}{جا٢ن} \times جتا٢ن$$

$$\frac{د٢ص}{دس٢} = جتا٢ن \times -جتا٢ن$$

$$\frac{د٢ص}{دس٢} = -جتا٢ن$$

*** ملاحظة : يمكن أيضاً أن تصبح

$$\frac{د٢ص}{دس٢} = - \frac{١}{جا٢ن} = \frac{١-}{ص}$$

(٩) إذا كان ص = $\frac{١ + ج٢اس}{١ - ج٢اس}$

الحل:

(يستحسن تحويل ج٢اس إلى ج٢اس)

$$ص = \frac{١ + \frac{ج٢اس}{جتاس}}{\frac{١ - ج٢اس}{جتاس}} = \frac{جتاس + ج٢اس}{جتاس - ج٢اس}$$

$$ص = \frac{جتاس + ج٢اس}{جتاس - ج٢اس} \quad (\text{نشتق})$$

$$= \frac{دص}{دس}$$

$$\frac{ص}{دس} = \frac{جتاس - ج٢اس}{جتاس - ج٢اس} - \frac{جتاس + ج٢اس}{جتاس - ج٢اس} - \frac{جتاس + ج٢اس}{جتاس - ج٢اس} - \frac{جتاس - ج٢اس}{جتاس - ج٢اس}$$

$$= \frac{جتاس - ج٢اس - ج٢اس - ج٢اس - ج٢اس - ج٢اس - ج٢اس - ج٢اس}{جتاس - ج٢اس} = \frac{جتاس - ٢ج٢اس - ج٢اس - ج٢اس}{جتاس - ج٢اس}$$

$$= \frac{(١ - ج٢اس) + (١ + ج٢اس)}{١ - ج٢اس}$$

$$= \frac{١ - ج٢اس + ١ + ج٢اس}{١ - ج٢اس} = \frac{٢}{١ - ج٢اس}$$

***** حلول أسئلة الحصة السابعة *****

الحل: (سؤال حركة عادية)

$$\begin{aligned} \text{ف} &= \text{ن}^2 - \text{ن}^3 \\ \text{ع} &= \text{ن}^2 - \text{ن}^3 \\ \text{ت} &= \text{ن}^2 - \text{ن}^3 \end{aligned}$$

(١) ع ??? عندما ت = ٦ ← ٦ = ٦ ← ٦ = ٦ - ١٢ = ٦
 ← ٦ = ٦ ← ٦ = ٦ ← ٦ = ٦ - ١٢ = ٦
 ع (١) = ١٢ - ٣ = ٩ م/ث

(ب) ع ??? عندما ت = ٠ ← ٠ = ٠ ← ٠ = ٠ - ١٢ = ٠
 ← ٠ = ٠ ← ٠ = ٠ ← ٠ = ٠ - ١٢ = ٠
 ع (٢) = ١٢ - ٢٤ = ١٢ م/ث

(٢) ف = $\frac{\text{ن}}{٢}$ - (جان) ، ن ∈ [٠, π]

ع = $\frac{١}{٢}$ - ٢ جان جتا ن = $\frac{١}{٢}$ - جان ن

ت = ٠ - جتا ن × ٢ = ٢ - جتا ن

** لكن المطلوب التسارع عندما تنعدم السرعة

أي : ت = ؟؟؟؟ عندما ع = صفر

$\frac{١}{٢}$ - جان ن = صفر ← جان ن = $\frac{١}{٢}$

ن = ٣٠° ← ن = ١٥° = $\frac{\pi}{١٢}$

ن = ١٥٠° ← ن = ٧٥° = $\frac{\pi}{١٢}$

∴ ت = $(\frac{\pi}{١٢})$ - ٢ جتا ن = ٣٠° جتا ن = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

ت = $(\frac{\pi}{١٢})$ - ٢ جتا ن = ١٥٠° جتا ن = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

الحل: (٣)

لتكون السرعة موجبة ← ع < ٠
 $\begin{aligned} \text{ف} &= \text{ن}^2 - \text{ن}^3 \\ \text{ع} &= \text{ن}^2 - \text{ن}^3 \\ \text{ت} &= \text{ن}^2 - \text{ن}^3 \end{aligned}$

نبحث في إشارة ع على خط الأعداد وعليه قيم ن

١٢ - ن³ = ٠ ← ن³ = (٤ - ن) ← ن = ٤

ع = ٤ ، ٠ = ٤ - ن
 ع - - - - ع
 + + + + ع

** انتبه عزيزي الطالب أنه لازم سالب **

(نعوض في ع) ← ع موجبة عندما ن ∈ (٤, ٠)

الحل: (٤)

** تذكر عزيزي الطالب :

عندما يقذف الجسم لأعلى تكون ف معبرة عن الارتفاع

** ونرتب التفكير كما يلي :

ف_١ : الارتفاع عن سطح البرج

ف_٢ : الارتفاع عن سطح الأرض



بحيث ف_٢ = ف_١ + ٨٠

ف_١ = ٣٠ - ن³ = ف_٢

ف_٢ = ٣٠ - ن³ = ف_١ + ٨٠

ع = ٣٠ - ١٠ = ٢٠

ت = ١٠ - ٠ = ١٠

(١) السرعة الابتدائية ← عندها ن = صفر

ع (٠) = ٣٠ - ٣٠ = ٠ م/ث

(ب) عند أقصى ارتفاع يتوقف الجسم ← سرعته = ٠

∴ ٣٠ - ٣٠ = ٠ ← ٣٠ = ٣٠ ← ن = ٣

ف_١ (٣) = ٩٠ - ٤٥ = ٤٥ متر أقصى ارتفاع عن سطح البرج

ف_٢ (٣) = ٩٠ - ٤٥ + ٨٠ = ١٢٥ متر أقصى ارتفاع عن سطح الأرض

(ج) عندما يصل الجسم مستوى سطح البرج ← ف_١ = ٠

٠ ← ٣٠ - ن³ = ٠ ← ن³ = ٣٠ ← ن = ٣

٠ ← ٣٠ - ن³ = ٠ ← ن³ = ٣٠ ← ن = ٣

← ن = ٣ (مرفوضة)

← ن = ٦ (مقبولة)

← ع (٦) = ٣٠ - ٦٠ = ٣٠

(د) عندما يصل الجسم مستوى سطح الأرض ← ف_٢ = ٠

٠ ← ٣٠ - ن³ = ٨٠ + ن²

٠ ← ن³ - ن² - ٥٠ = ٠ ← ن(ن - ٥) = ٠

← ن = ٥ (مرفوضة)

← ن = ٨ (مقبولة)

← ع (٨) = ٨٠ - ٣٠ = ٥٠

(هـ) الارتفاع عن سطح الأرض يمثل ف_٢ ← ف_٢ = ١٠٥

٠ ← ٣٠ - ن³ = ٢٥ + ن²

٠ ← ن³ - ن² - ٥٥ = ٠ ← ن(ن - ٥) = ٥٥

← ن = ٥ (مقبولة)

← ن = ١ ← ع (١) = ٣٠ - ١٠ = ٢٠ (صعود)

٩) الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ف} = \frac{\text{ن}^4}{4} - \frac{\text{ن}^5}{3} + \text{ن}^2 - \text{ن}^4 + 6 \\ \text{ع} = \text{ن}^3 - \text{ن}^5 + 8\text{ن} - 4 \\ \text{ت} = \text{ن}^3 - 10\text{ن} + 8 \end{array} \right.$$

ماذا تعني عبارة يغير الجسم من اتجاه حركته
← تعني أنه يتوقف أولاً ← ع = ٠

← ثم تتغير إشارة (ع) لأنها إذا لم تتغير فإنه
يتابع نفس الاتجاه ، نضع ع = صفر

$$\leftarrow \text{ع} = \text{ن}^3 - \text{ن}^5 + 8\text{ن} - 4 = 0$$

ن = ١ ** (بالتجريب ثم القسمة الطويلة)

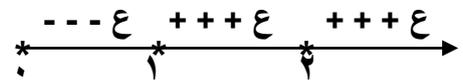
نقسم على (ن - ١)

$$\begin{array}{r} \text{ن}^4 - \text{ن}^5 + 8\text{ن} - 4 \\ \underline{\text{ن}^4 - \text{ن}^3} \phantom{+ 8\text{ن} - 4} \\ \phantom{\text{ن}^4} \text{ن}^3 - \text{ن}^2 + 8\text{ن} - 4 \\ \underline{\phantom{\text{ن}^4} \text{ن}^3 - \text{ن}^2} \phantom{+ 8\text{ن} - 4} \\ \phantom{\text{ن}^4} \phantom{\text{ن}^3} \phantom{- \text{ن}^2} 8\text{ن} - 4 \\ \underline{\phantom{\text{ن}^4} \phantom{\text{ن}^3} \phantom{- \text{ن}^2} 8\text{ن} - 8} \\ \phantom{\text{ن}^4} \phantom{\text{ن}^3} \phantom{- \text{ن}^2} \phantom{8\text{ن}} 4 \end{array}$$

$$\therefore \text{ع} = (1 - \text{ن}) (\text{ن}^2 - \text{ن} + 4)$$

$$= (1 - \text{ن}) (\text{ن} - 2) (\text{ن} + 2)$$

∴ ن = ١ ، ن = ٢ عندهما تتوقف حركة الجسم
ولكن يجب اختبار إشارة (ع) على خط الأعداد



∴ عندما ن = ١ توقف الجسم ثم غير اتجاه الحركة
عندما ن = ٢ توقف الجسم ثم تابع بنفس الاتجاه

*** نأخذ ن = ١ فقط ***

$$\therefore \text{ت} (1) = 8 + 10 - 3 = 15$$

١٠) الحل:

$$\text{ع} = \text{م} \sqrt{\text{ف}} \quad \text{نشتق ضمناً بالنسبة إلى ن}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{م} \times \frac{\text{دف}}{\text{دن}}}{2\sqrt{\text{ف}}}$$

$$\therefore \text{ت} = \frac{\text{ع} \times \text{م}}{2\sqrt{\text{ف}}}$$

$$\leftarrow \text{ت} = \frac{\text{م} \times \text{م}}{2\sqrt{\text{ف}}} \quad \text{ف} < 0$$

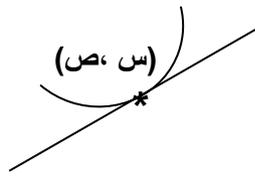
$$\leftarrow 8 = \frac{\text{م}^2}{2} \quad \leftarrow \text{م} = 4$$

$$\leftarrow \text{م} = 4 \quad \text{ع} = 0 \quad \text{(تأمل)}$$

$$\leftarrow \text{م} = 4 \quad \text{ع} = 0 \quad \text{لأن } \text{م} < 0$$

***** حلول أسئلة الحصة الثامنة *****

الحل: (١)



عند نقطة التماس
ميل المنحني = ميل المماس
 $٢س + ١ = م$

المماس يتوازي مع المستقيم ص = ٥س + ١
ميل المماس = ميل المستقيم (مشتقته)
 $٥ = م$

$٤ = ٢س \iff ٥ = ١ + ٢س$

$٢ = س$ (عندها نقطة التماس) ... نجد ص
 $ص = ق(٢) = ١٣ \iff (١٣, ٢)$ نقطة تماس
معادلة المماس هي: ص - ١٣ = ٥(س - ٢)
 $ص = ٥س + ٣$

الحل: (٣)

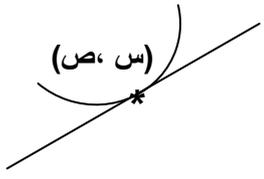


عند نقطة التماس
ميل المنحني = ميل المماس
 $٢س - ٥ = م$

المماس يميل بزاوية ٥٤° على محور السينات الموجب
∴ ميل المماس = ظا ٥٤° $\iff ١ = م$
 $٦ = ٢س \iff ١ = ٥ - ٢س$

$٣ = س$ (عندها نقطة التماس) ونجد ص
 $ص = ق(٣) = ٤ \iff (٣, ٤)$ نقطة تماس
معادلة المماس هي: ص - ٤ = ١(س - ٣)
 $ص = س - ٧$

الحل: (٤)



عند نقطة التماس
ميل المنحني = ميل المماس
 $٢س - ٣ = م$

العمودي يميل بزاوية ٥٤° على محور السينات الموجب
∴ ميل العمودي = ظا ٥٤°
 $١ = \frac{١-}{م} \iff ١- = م$

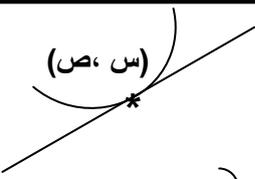
$٢ = ٢س \iff ١- = ٣ - ٢س$

$١ = س$ (عندها نقطة التماس)

نجد ص $\iff ص = ق(١) = ٣ \iff (١, ٣)$

معادلة المماس هي: ص - ٣ = ١(س - ١)
 $ص = س + ٤$
 $ص = ٤ - س$

الحل: (٢)



عند نقطة التماس
ميل المنحني = ميل المماس
 $م = \frac{دص}{دس} \iff م = \frac{٢}{ص}$

لايجاد ميل المنحني
نشقق معادلته ضمناً
 $٤ = \frac{دص}{دس} \iff \frac{٢}{دس} = \frac{٤}{دص}$

نرتب معادلة المستقيم $٢ص + س = ٥$

ولكن المماس يتعامد مع المستقيم ص = $\frac{٥-س}{٢}$

ميل المماس = ميل المستقيم $\iff ١- = \frac{١-}{\frac{١-}{٢}} = م$

$٢ = \frac{٢}{ص} \iff ٢ص = ٢ \iff ١ = ص$

نجد س من المعادلة الأصلية $\iff ١ = ٤س \iff س = \frac{١}{٤}$

نقطة التماس $(\frac{١}{٤}, ١)$

معادلة المماس هي: ص - ١ = ٢(س - $\frac{١}{٤}$)

$ص = ٢س + \frac{١}{٢}$

٥) الحل:

(س، ص)

عند نقطة التماس

ميل المنحني = ميل المماس

$$\text{س} - ٤ = \text{م}$$

يتقاطع المنحني مع محور السينات $\Leftarrow \text{ص} = ٠$

$$\text{س}^2 - ٤\text{س} - ٦ = ٠ \Leftarrow \text{س}^2 - ٢\text{س} - ٣ = ٠$$

$$\Leftarrow (\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) = ٠$$

$\therefore \text{س} = ٣, ١$ - (نقطتا تماس) ، لدينا حالتين

$$\text{الأول: س} = ٣ \Leftarrow \text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٨$$

معادلة المماس هي: $\text{ص} - ٠ = ٨(\text{س} - ٣)$

$$\therefore \text{ص} = ٨ - ٢٤$$

$$\text{الثاني: س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٨ -$$

معادلة المماس هي: $\text{ص} - ٠ = ٨(\text{س} + ١)$

$$\therefore \text{ص} = ٨ - ٨$$

٧) الحل:

(س، ص)

عند نقطة التماس

ميل المنحني = ميل المماس

$$\text{س}^2 - ٤ = \text{م}$$

هنا النقطة (٠، ٠) ليست نقطة تماس وتعتبر نقطة

خارجية (نستعين بالرسم)

$$\therefore \text{ميل هذا المماس} = \frac{\text{ص} - ٠}{٠ - \text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{م} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \quad (\text{نعوض م} = \text{س}^2 - ٤, \text{ ص} = \text{ق}(\text{س}))$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 - ٤ = \frac{\text{س}^2 - ٤\text{س} + ٤}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 - ٤\text{س} = \text{س}^2 - ٤\text{س} + ٤$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢, ٢ \quad (\text{مماسان})$$

المماس الأول: س = ٢ $\Leftarrow \text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٠$

معادلة المماس هي: $\text{ص} - ٠ = ٠(\text{س} - ٠)$

$$\therefore \text{ص} = ٠$$

المماس الثاني: س = ٢ $\Leftarrow \text{ص} = ١٦$

$$\Leftarrow \text{م} = ٨ -$$

معادلة المماس هي:

$$\text{ص} - ١٦ = ٨(\text{س} + ٢)$$

$$\therefore \text{ص} = ٨ -$$

٦) الحل:

لأي منحني يمكن ترتيب المعادلة أو جعلها ضمنية

$$\Leftarrow \text{ص} = \text{س}^2 - ٣$$

عند نقطة التماس

ميل المنحني = ميل المماس

$$\text{س} - ٣ = \text{م}$$

يتقاطع المنحني مع المستقيم $\text{س} + \text{ص} = ٣ \Leftarrow \text{ص} = ٣ - \text{س}$

** إما أن نضع معادلة الأول = معادلة الثاني

** أو أن نعوض قيمة (ص) من أحدهما في الآخر

$$\text{إما س}^2 - ٣ = \text{س}^2 - ٣ \Leftarrow \text{س} = ٣ \text{ أو } \text{س}^2 = (\text{س} - ٣) + ٣$$

$$\text{س}^2 - ٢\text{س} - ٣ = ٠ \text{ أو } \text{س}^2 - ٢\text{س} - ٣ = ٠$$

$$\text{س}(\text{س} - ٣) = ٠ \text{ أو } \text{س}(\text{س} - ٣) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{س} = ٣, ١ \quad (\text{لدينا مماسان})$$

المماس الأول: س = ٣ $\Leftarrow \text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٣ - ٣ = ٠$

معادلة المماس: $\text{ص} - ٠ = ٠(\text{س} - ٣)$

المماس الثاني: س = ١ $\Leftarrow \text{ص} = ٤ \Leftarrow \text{م} = ٤ - ١ = ٣$

معادلة المماس: $\text{ص} - ٤ = ٣(\text{س} + ١)$

$$\Leftarrow \text{ص} = ٥ - \text{س} - ١$$

٨) الحل:

عند نقطة التماس

ميل المنحني = ميل المماس

$$٢س = م \dots (١)$$

$$(١، ٤) \dots (٢) \dots \frac{٤-ص}{١-س} = م$$

وكذلك ميل المماس = ظاه ١٣٥°
(لأنه يميل بزاوية ٤٥° على محور السينات السالب)

$$\leftarrow م = ١ -$$

$$\therefore ٢س = ١ - \leftarrow م = ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \text{ (نعوض في ٢)}$$

$$١ - \frac{١}{٢} = \frac{٤-ص}{١-س} \leftarrow م = ٤ - ص \leftarrow \frac{٣}{٢} = ٤ - ص$$

$$\leftarrow م = \frac{١}{٢} \leftarrow \left(\frac{١}{٢}, \frac{١}{٢} \right) \text{ تحقق معادلة ق(س)}$$

$$\text{ق} \left(\frac{١}{٢} \right) = \frac{١}{٢} = م + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} \leftarrow م = \frac{٢١}{٤}$$

٩) الحل:

عند نقطة التماس

ميل المنحني = ميل المماس

$$٢س = م \dots (١)$$

$$(٠، ٠) \dots (٠، ٠) \dots \frac{٠-ص}{٠-س} = م$$

$$\leftarrow م = ٢س = ٢س \text{ (نعوض ص)}$$

$$\leftarrow م = ٢س = ٢س + م = ٢س \leftarrow م = ٢س$$

$$١ = م \therefore ١ = م$$

$$\therefore \text{المنحني ق(س)} = ١ + ٢س$$

$$\text{مرة أخرى } ٢س = \frac{ص}{س} \leftarrow م = \frac{١+٢س}{س}$$

$$\leftarrow م = ٢س = ١ + ٢س \leftarrow م = ١ = ٢س = ١ - ١$$

$$\therefore \text{النقطة الأخرى } (١-، ١) \text{ ق(١-)} = (٢، ١-)$$

١٠) الحل:

عند نقطة التماس

ميل المنحني = ميل المماس

$$٢س = م \dots (١)$$

$$(٢، ٦) \dots (٢، ٦) \dots \frac{٦-ص}{٢-س} = م$$

$$\text{معادلة المماس ص} - ٦ = ٤(٢ - س)$$

$$\leftarrow م = ٤س - ٢ \text{ مستقيم متزايد}$$

$$\text{معادلة العمودي ص} - ٦ = -\frac{١}{٤}(٢ - س)$$

$$\leftarrow م = ٦,٥ + \frac{١}{٤}س \text{ مستقيم متناقص}$$

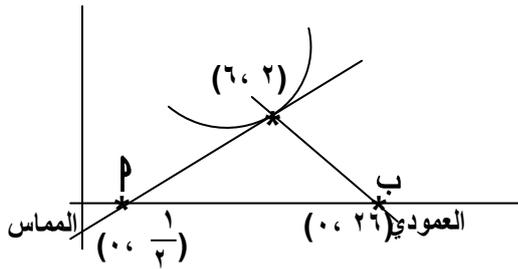
** نرسم مخطط للمساحة المطلوبة **

٠ = م تقاطع المماس مع محور السينات ص = ٠

$$٠ = ٤س - ٢ \leftarrow م = \frac{١}{٢}$$

ب) تقاطع العمودي مع محور السينات ص = ٠

$$٠ = ٦,٥ + \frac{١}{٤}س \leftarrow م = ٢٦$$



$$\text{المساحة} = \frac{١}{٢} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$٦ \times \left(\frac{١}{٢} - ٢٦ \right) \times \frac{١}{٢} =$$

$$\frac{١٥٣}{٢} =$$

الحل (١١):

عند نقطة التماس

ميل المنحنى = ميل المماس

$$3s^2 = m \dots (1)$$

(١، ٠) ليست نقطة تماس وإنما نقطة خارجية

$$m = \frac{1-s}{s} = 3s^2 \implies \frac{1-s}{s} = 3s^2$$

$$3s^3 = 2 + 3s^2 \implies 2 = 3s^2$$

$$3s^3 = 1 = s \implies 1 = 3s^2 \text{ (نقطة التماس)}$$

$$\therefore s = 1 = -1 = 4 \implies (4, 1)$$

$$\therefore m = 3$$

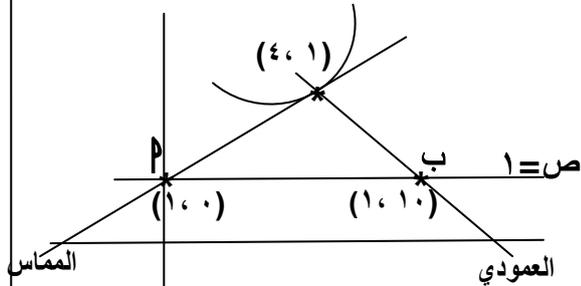
معادلة المماس هي: $v - 4 = 3(s - 1)$

$$\therefore v = 3s + 1$$

معادلة العمودي هي: $v - 4 = \frac{1}{3}(s - 1)$

$$\therefore v = \frac{1-s}{3} + \frac{13}{3}$$

** الضلع الثالث هو المستقيم $v = 1$



** نرسم مخطط للمساحة المطلوبة **

(P) تقاطع المماس مع المستقيم $v = 1$

$$3s^3 = 1 + s \implies 0 = s^3 - 1 = (s-1)(s^2+s+1)$$

(B) تقاطع العمودي مع المستقيم $v = 1$

$$\frac{1-s}{3} = 1 \implies 1-s = 3 \implies s = -2$$

$$\implies s = 10 = (1, 10)$$

$$\therefore \text{المساحة} = \frac{1}{2} \times (1-4) \times (0-10) = 15$$

$$15 = 3 \times 5 =$$

الحل (١٢):

$v = 2s - 1$ مماس لمنحنى ق(س) عند (٣، ٥)

$$5 = (3) \text{ ق}$$

$$\text{ق}'(3) = \text{ميل المماس} = \text{مشتقته} \implies \text{ق}'(3) = 2$$

** نرتب المستقيم $v = 2s - 1$ عند (٣، ٥)

$$\text{ميل العمودي} = \frac{1}{2} \implies \text{ق}'(3) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ق}'(3) = 1$$

$$\text{ق}'(3) = \text{ميل المماس} = \frac{1-s}{s} = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ق} \cdot \text{ق}'(3) + \text{ق}'(3) \cdot \text{ق} = \text{ق}'(3)$$

$$8 = 2 + 10 = 2 \times 1 + 2 \times 5 =$$

الحل (١٣):

$v = 5s + 3$ مماس لمنحنى ل(س) عند $s = 1$

$$8 = 3 + 5 = (1) \text{ ل}$$

$$\text{ل}'(1) = \text{ميل المماس} = \text{مشتقته} \implies \text{ل}'(1) = 5$$

ولكن ل(س) = $3(2s+1)$ (نرتب)

$$\implies \text{ل}'(س) = (3(2س+1))' \text{ (نشتق)}$$

$$\text{ل}'(س) = 3^2(2س+1)' = 2 \times 3(2س+1)'$$

** نضع $s = 1$ ، لنحصل على $\text{ق}'(3)$ **

$$\text{ل}'(3) = 3^2(2س+1)' = 2 \times 3(2س+1)'$$

$$\text{ل}'(س) = 3(2س+1)' = 2 \times 3(2س+1)'$$

$$8 = 3(2س+1)' = 2 \times 3(2س+1)'$$

$$8 = 3(2س+1)' = 2 \times 3(2س+1)'$$

$$\therefore \text{ق}'(3) = 2$$

$$\therefore \text{ق}'(3) = \frac{5}{2}$$

***** حلول أسئلة الحصة التاسعة *****

١) ق(س) = س^٤ - س^٣ + ٢

ق'(س) = ٤س^٣ - ٣س^٢

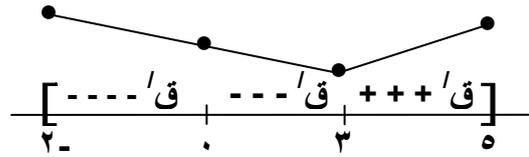
الدرجة } أطراف : ٢- ، ٥

جذور : ٤س^٢(س - ٣) = ٠

س = ٠ ، س = ٣

النقط الحرجة :

{ (١٢٧، ٥)، (٢٥-، ٣)، (٢، ٠)، (٥٠، ٢-) }



ب) ق متزايد في [٥، ٣]

ق متناقص في [٣، ٢-]

ج) عند س = ٣ قيمة صغرى محلية ومطلقة ق(٣) = ٢٥-

نحسب العظمى المطلقة } عند س = ٢- ق(٢-) = ٥٠

عند س = ٥ ق(٥) = ١٢٧

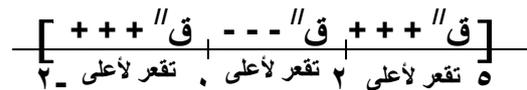
∴ تعتبر ق(٥) = ١٢٧ قيمة عظمى مطلقة

د) ق''(س) = ١٢س^٢ - ٢٤س

الدرجة } أطراف : ٢- ، ٥

جذور : ١٢س(س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢



** ق مقعر لأعلى في [٠، ٢-] ، [٥، ٢]

** ق مقعر لأسفل في [٢، ٥]

** نقطتا الانعطاف (٢، ٠) ، (١٤-، ٢)

٢) ق(س) = (٢-س)²(٣+س³)

ق'(س) = ٣ × ٢(٣+س³) × (٢-س) +

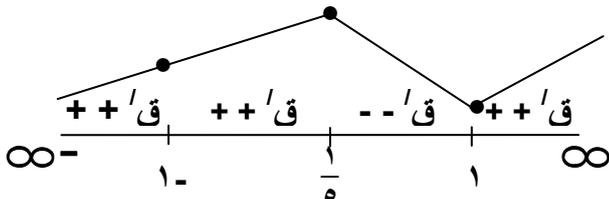
٢ × (٢-س) × ٣(٣+س³)²

= (٢-س)²(٣+س³)²(٩-٦س+٣س²)

= (٢-س)²(٣+س³)²(٣-س)

الدرجة } أطراف : ∞

جذور : س = ١ ، س = ١- ، س = ١/٥



ق متزايد في [١/٥، ∞-) ، [∞، ١]

ق متناقص في [١، ١/٥]

عند س = ١/٥ قيمة عظمى محلية

عند س = ١ قيمة صغرى محلية

الحل: (٥)

$$ق'(س) = ٢جتا٢س$$

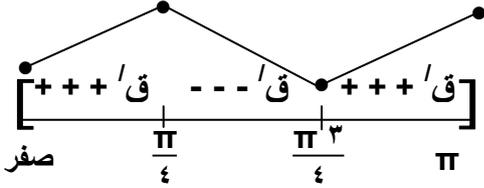
الدرجة } أطراف : ٠ ، π

جذور : ٢جتا٢س = ٠ جتا٢س = ٠

الزوايا : ٩٠° ، ٢٧٠°

$$\frac{\pi}{4} = ٤٥^\circ = س \leftarrow ٩٠^\circ = س٢$$

$$\frac{\pi}{4} = ١٣٥^\circ = س \leftarrow ٢٧٠^\circ = س٢$$



ق متزايد في $[0, \frac{\pi}{4}]$ ، $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

ق متناقص في $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$

عند $س = \frac{\pi}{4}$ قيمة عظمى محلية هي ق($\frac{\pi}{4}$) = جتا٩٠ = ١

عند $س = \frac{3\pi}{4}$ قيمة صغرى محلية هي ق($\frac{3\pi}{4}$) = جتا٢٧٠ = -١

** لا نهتم بالأطراف لأنها لن تكون قيم قصوى محلية **

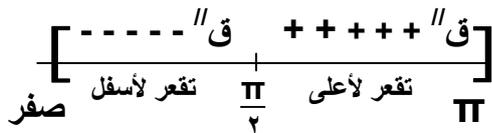
$$ق''(س) = -٤جتا٢س$$

أطراف : ٠ ، π

جذور : جتا٢س = ٠ جتا٢س = ٠

$$\frac{\pi}{4} = س \leftarrow \pi = س٢$$

$$\pi = س \leftarrow \pi^٢ = س٢$$



∴ نقطة الإنعطاف ($\frac{\pi}{4}$ ، ق($\frac{\pi}{4}$)) ، ق($\frac{\pi}{4}$) ، ($\frac{\pi}{2}$ ، ٠)

الحل: (٣)

$$ق(س) = (س - ٨)^٣$$

$$ق'(س) = ٣(س - ٨)^٢ = ٣(س - ٨)^٢ \times ٢(س - ٨)$$

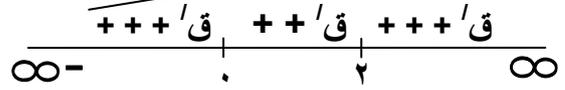
$$س = ٨$$

$$\sqrt[٣]{(س - ٨)^٣} = ٨$$

الدرجة } أطراف : ∞

جذور : البسط : س = ٨ ، س = ٨

المقام س = ٨ ، س = ٨



ق متزايد في \mathbb{R} ، لا يوجد قيم قصوى

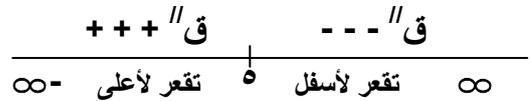
الحل: (٤)

$$ق'(س) = ٣(س - ٥)^٢ = (٣ - ٥) \times ٣(س - ٥)^٢$$

$$ق''(س) = ٦(س - ٥) = (٦ - ٥) \times ٦(س - ٥)$$

أطراف : ∞

جذور : (س - ٥) = ٥ ، س = ٥



** ق مقعر لأعلى في $(-\infty, ٥)$

** ق مقعر لأسفل في $[٥, \infty)$

** نقطة الانعطاف (٥ ، ق(٥)) ، ق(٥) ، (٥ ، ٠)

٦) الحل:

$$ق'(س) = -2جاس + 2جاس$$

$$-2 \times 2جاس + 2جاس =$$

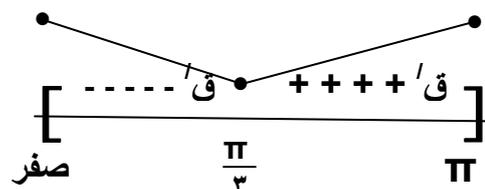
$$= 2جاس - 4جاس$$

$$= 2جاس(1 - 2جاس)$$

الدرجة } أطراف : $0, \pi$

جذور : جاس = $0 \iff س = 0, \pi$

$$\iff جاس = \frac{1}{2} \iff س = 60^\circ, 300^\circ \text{ تهمل}$$



ق متزايد في $[\pi, \frac{\pi}{3}]$

ق متناقص في $[\frac{\pi}{3}, 0]$

٨) الحل:

** يجب إعادة تعريف القيمة المطلقة أولاً **

$$2س - 4 = 0 \iff 2س = 4 \iff س = 2$$

$$\frac{- - - - -}{4 + س} * \frac{+ + +}{4 - س}$$

$$\left. \begin{array}{l} س(2س - 4) \iff س \leq 2 \\ س(-2س - 4) \iff س \geq 2 \end{array} \right\} = ق(س)$$

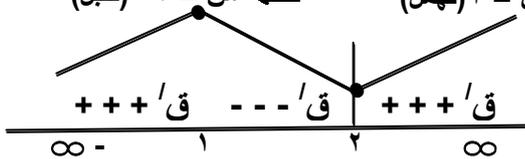
$$\left. \begin{array}{l} 2س^2 - 4س \iff س \leq 2 \\ 4س - 2س^2 \iff س \geq 2 \end{array} \right\} = ق(س)$$

*** ق(س) متصل عند س = 2 ***

$$\left. \begin{array}{l} 4س - 4 \iff س < 2 \\ 4 - 4س \iff س > 2 \end{array} \right\} = ق'(س)$$

** نأخذ كل قاعدة ضمن فترتها **

$$\begin{array}{l} ق'(س) = 4س - 4 \iff ق(س) = 4س - 4 \\ ق'(س) = 4 - 4س \iff ق(س) = 1 \text{ (تقبل)} \end{array}$$



ق متزايد في $(-\infty, 1]$ ، $[2, \infty)$

ق متناقص في $[1, 2]$

عند س = 1 قيمة عظمى محلية فقط هي ق(1) = 2

عند س = 2 قيمة صغرى محلية فقط هي ق(2) = 0

$$\left. \begin{array}{l} 4 \iff س < 2 \\ 4 - 4س \iff س > 2 \end{array} \right\} = ق''(س)$$

$$\begin{array}{l} ق''(س) = 4 \text{ موجب} \\ ق''(س) = -4 \text{ سالب} \end{array}$$



** ق مقعر لأعلى في $(\infty, 2]$

** ق مقعر لأسفل في $(-\infty, 2)$

٧) الحل:

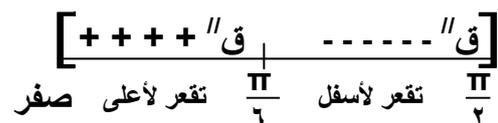
$$ق'(س) = س + 2جاس$$

$$ق''(س) = 1 - 2جاس$$

الدرجة } أطراف : $0, \frac{\pi}{2}$

جذور : $1 - 2جاس = 0 \iff جاس = \frac{1}{2}$

$$\iff س = 30^\circ, 120^\circ \text{ تهمل}$$



** ق مقعر لأعلى في $[\frac{\pi}{6}, 0]$

** ق مقعر لأسفل في $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

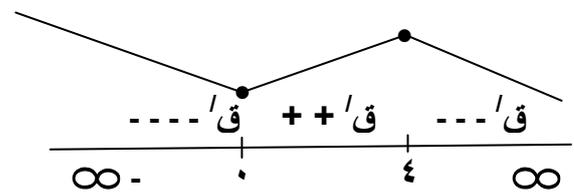
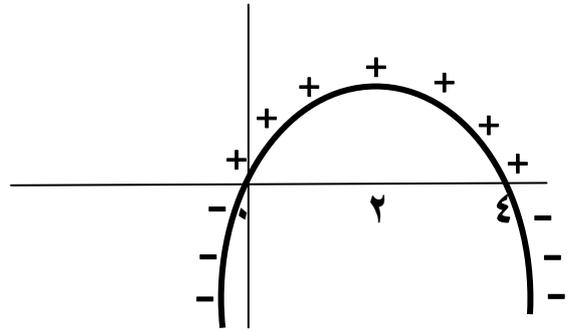
نقطة الانعطاف $(\frac{\pi}{6}, 1) = (ق(\frac{\pi}{6}), \frac{\pi}{6})$

٩) الحل:

** نبدأ بتحويل شكل ق' (س) إلى إشارات بحيث :

ما فوق المحور \Leftarrow ق' موجب

ما تحت المحور \Leftarrow ق' سالب



(P) الدرجة لـ ق' (س) عند س = ٠ ، س = ٤

(جذور ق' (س)) \Leftarrow (عندها ق' يقطع محور السينات)

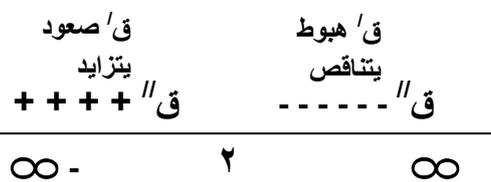
(ب) ق متزايد في [٠ ، ٤]

ق متناقص في (٠ ، ٤] ، (-infinity ، ٠)

(ج) عند س = ٠ قيمة صغرى محلية

عند س = ٤ قيمة عظمى محلية

** لمعرفة إشارة ق'' (نشتق شكل ق')



** ق مقعر لأعلى في (-infinity ، 2)

** ق مقعر لأسفل في [2 ، ∞)

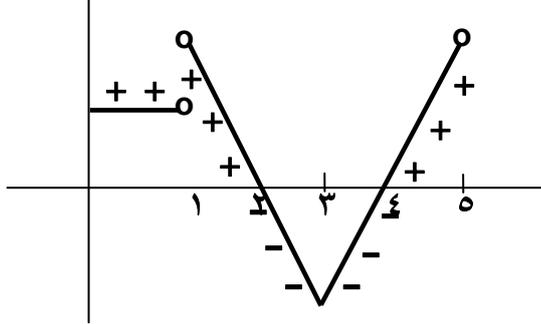
** نقطة الانعطاف (2 ، ق(2))

١٠) الحل:

** نبدأ بتحويل شكل ق' (س) إلى إشارات بحيث :

ما فوق المحور \Leftarrow ق' موجب

ما تحت المحور \Leftarrow ق' سالب



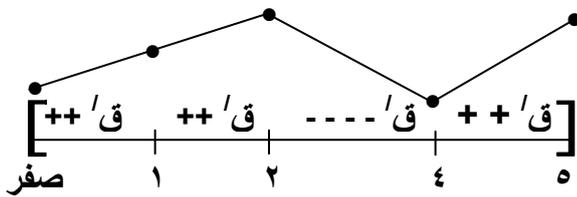
(P) الدرجة : المشتقة عندها صفر أو غير موجودة

\Leftarrow س = ٢ ، ٤ (المشتقة عندها صفر)

\Leftarrow س = ٠ ، ١ ، ٥ (المشتقة عندها غير موجودة)

\Leftarrow س الدرجة $\ni \{ ٥ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ٠ \}$

*** تذكر أن ق' (س) متصل في [٠ ، ٥]



(ب) ق متزايد في [٠ ، ٤] ، [٢ ، ٥]

ق متناقص في [٤ ، ٢]

(ج) عند س = ٢ قيمة عظمى محلية

عند س = ٤ قيمة صغرى محلية

ق'' (س) < ٠ تعني موجبة

وهذا لا يكون إلا عندما ق' (س) يكون متزايد

لأنه عندما ق' (س) متزايد \Leftarrow مشتقته ق'' +++

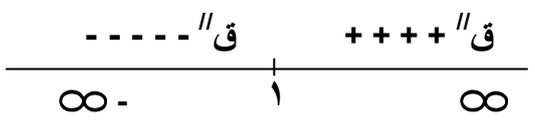
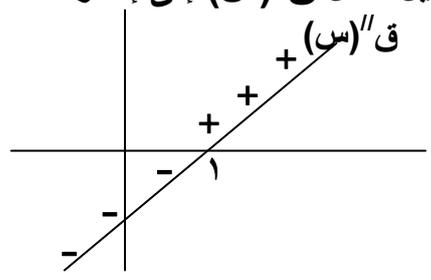
ولكن ق' (س) متزايد في (٣ ، ٥)

ق'' (س) < ٠ في (٣ ، ٥)

الفترة مفتوحة لأن المشتقة عند الأطراف غير موجودة

الحل: (١١)

** نبدأ بتحويل شكل ق''(س) إلى إشارات كالمعتاد



** ق مقعر لأعلى في [∞, ١]

** ق مقعر لأسفل في [١, ∞-)

** وبما أن ق'(٠) = صفر ، ق'(٢) = صفر

∴ لدينا نقط حرجة عند س = ٠ ، س = ٢

*** يلاحظ الظاهرة التالية:

عند س = ٠ ← ق'(٠) = ٠ ولكن ق''(٠) سالبة

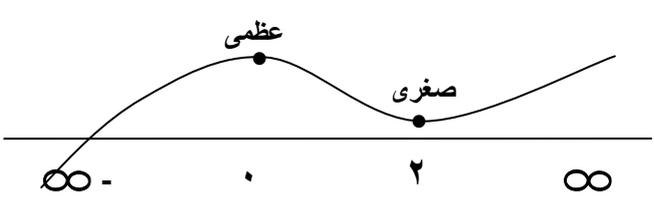
∴ لدينا قيمة عظمى عند س = ٠ هي ق(٠)

عند س = ٢ ← ق'(٢) = ٠ ولكن ق''(٢) موجبة

∴ لدينا قيمة صغرى عند س = ٢ هي ق(٢)

*** يمكن تخيل الشكل لـ ق(س) وفق الآتي حتى

يحقق الصفات السابقة ***



∴ ق(س) متزايد في [٠, ∞-) ، [∞, ٢]

الحل: (١٢)

$$ق(س) = \frac{س^٢ + س + ٤}{س^٢ - ٥س + ٤}$$

$$ق'(س) = \frac{(س^٢ - ٥س + ٤) - (س^٢ + س + ٤)(٢س - ٥)}{(س^٢ - ٥س + ٤)^٢}$$

عند س = ٢ قيمة عظمى تساوي (١-)

$$ق(٢) = ١ - \leftarrow ١ - = \frac{٢ + ٢}{٢ -}$$

$$ق'(٢) = ٠ \leftarrow ٠ = \frac{(١-)(٢ + ٢) - ٢٢ -}{(٢-)^٢} = \text{صفر}$$

$$\leftarrow ٢ = س + ٢ \dots (١)$$

$$\leftarrow \frac{ب}{٤} = \text{صفر} \leftarrow ب = \text{صفر} \dots (٢)$$

$$\therefore ٢ = ٢ \leftarrow ١ = ١$$

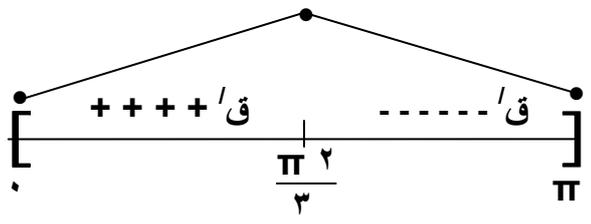
الحل: (١٣)

$$ق'(س) = ١ + ٢جتاس$$

الدرجة } أطراف : ٠ ، π

جذور: جتاس = - ١/٢ ← س في (ربع ثاني وثالث)

$$\leftarrow س = ١٢٠ = \frac{٢\pi}{٣} ، ٢٤٠ \text{ تهمل}$$



** عند س = π/٢ قيمة عظمى محلية

١٤) الحل:

** نضع ق(س) = $٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ٥$

ق'(س) = $٦س^٢ + ٦س + ٤$

ق''(س) = $١٢س + ٦$

** عند (٧، ٠) قيمة قصوى

ق(٧) = ٠ ← $٧ = د$ (١)

ق'(٧) = ٠ ← $ج = صفر$ (٢)

** عند س = ٢ إنعطاف

ق''(٢) = ٠ ← $٠ = ١٢(٢) + ٦$ (٣)

** زاوية ميل المماس عند س = ٢ تساوي ٥٤°

ق'(٢) = ميل المماس = $٤٥^\circ = ١$

١ = $١٢(٢) + ٦ + ج$ (٤)

*** بالطرح (٣) - (٤)

١ = $٠ + ٦ + ج$ (٤)

~~٠ = $١٢(٢) + ٦ + ج$ (٣)~~

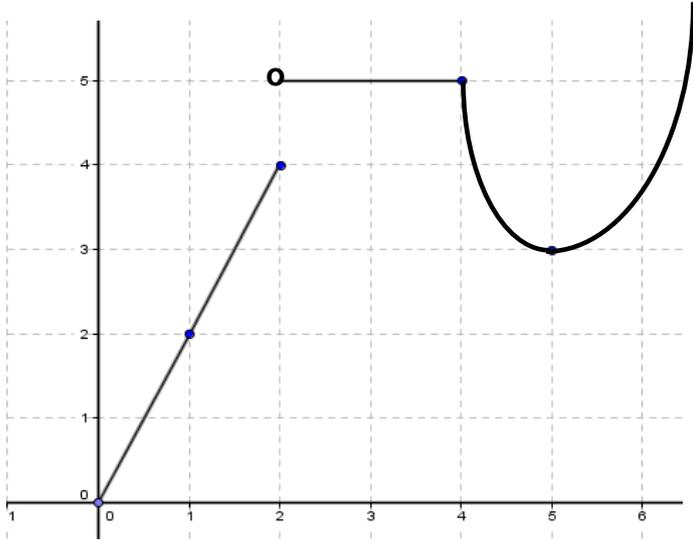
١ = $٦ + ج$ ← $ج = ١ - ٦ = -٥$ ← نعوض في (٤)

١ = $١٢(٢) + ٦ + ج$ ← $١ = ٣٠ + ٦ + ج$ ← $ج = ١ - ٣٦ = -٣٥$

١ = $١٢(٢) + ٦ + ج$ ← $١ = ٣٠ + ٦ + ج$ ← $ج = ١ - ٣٦ = -٣٥$

∴ ق(س) = $٢س^٣ + ٣س^٢ + ٤س - ٣٥$

١٥) الشكل يمثل منحنى الاقتران ق(س)



الحل:

نستبدل:

نضع ص = $٣ - س$

س ← $١ +$

ص ← $٢ +$

(١) نها ق(٣-س) ← س

نها ق(ص) = ٥ ← ص

نستبدل:

نضع ص = $٥ - س$

س ← $١ +$

ص ← $٢ -$

(٢) نها ق(٥-س) ← س

نها ق(ص) = ٤ ← ص

(٣) معدل تغير ق(س) في [٢، ٤]

$\Delta \frac{ص}{س} = \frac{ق(٤) - ق(٢)}{٤ - ٢} = \frac{١ - ٣}{٢} = -١$

(٤) ق'(٣)، ق'(٥)

ق'(٣) = ٠ (مستقيم ثابت)، ق'(٥) = ٠ (عندها مماس أفقي)

(٥) نها ق(س) = $\frac{٢ - س}{١ - س}$ ، بما أن ق(١) = ٢

هذه ق'(١) لأنها نها ق(س) - ق(١) ← س

ق'(١) = ميل المستقيم = $\frac{٢ - ٤}{١ - ٢} = ٢$

(٦) قيم س التي عندها نقط حرجة لـ ق(س)

المشتقة تساوي صفر س ∈ {٢، ٤} وعند س = ٥

المشتقة غير موجودة س = ٠ (طرف)

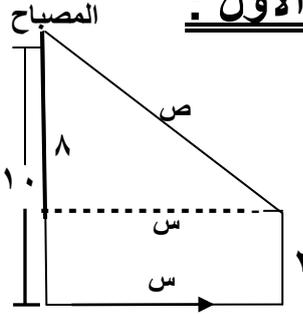
س = ٢ (انفصال) ، س = ٤ (رأس مدبب)

قيم س الحرجة س ∈ {٠، ٢، ٤، ٥} ∪ {٤، ٢}

ويجوز س ∈ {٠، ٢} ∪ [٤، ٢]

***** حلول أسئلة الحصة العاشرة *****

(١) حل السؤال الأول :



بعد إكمال المثلث

$$ص^2 = 2س + 64$$

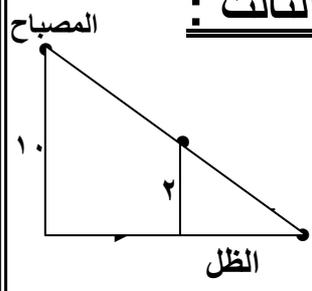
$$ص^2 = \frac{دس}{دن} \times 2س$$

$$10 \times 2 = \frac{دس}{دن} \times 2 \times 6$$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{18}{10} = 1,8 \text{ م/ث}$$

$3 = \frac{دس}{دن}$
 جد $\frac{دس}{دن} = ???$
 عندما $س = 6$
**** نجد ص ??? ****
 $ص^2 = 2 \times 6 + 64 = 76$
 $ص = \sqrt{76}$
 $ص = 10$

(٣) حل السؤال الثالث :



*** من تشابه المثلثات ***

$$\frac{10}{ص + س} = \frac{2}{ص}$$

$$10ص = 2(ص + س)$$

$$8ص = 2س$$

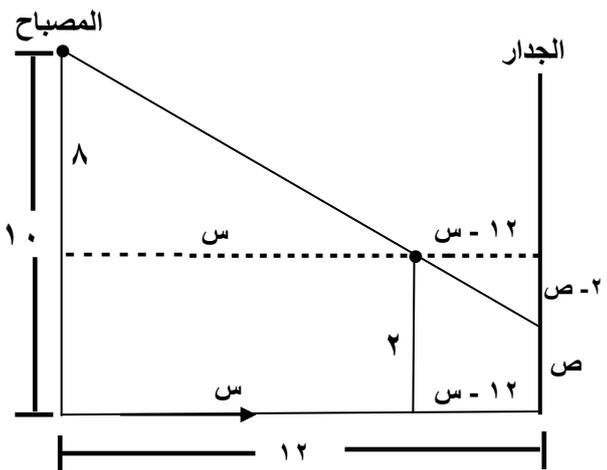
$$8 \frac{دس}{دن} = 2 \frac{دس}{دن}$$

$$8 \frac{دس}{دن} = 2 \times 2$$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ م/ث}$$

$3 = \frac{دس}{دن}$
 ويطلب $\frac{دس}{دن} = ???$

(٤) حل السؤال الرابع :



$3 = \frac{دس}{دن}$
 نجد $\frac{دس}{دن} = ???$
 عندما $س = 12$
 $ص = 10$

*** من تشابه المثلثات ***

$$\frac{8}{ص - 2} = \frac{12}{س - 12}$$

$$2س - 96 = 8(س - 12)$$

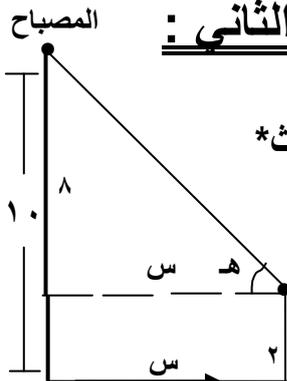
$$2س - 96 = 8س - 96 \Rightarrow 2س = 8س \Rightarrow س = 0$$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{8(12 - 10) - (10)(12 - 96)}{2س}$$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{8(2) - (10)(-84)}{2 \times 100} = \frac{16 + 840}{200} = \frac{856}{200} = 4,28$$

$$\frac{دس}{دن} = \frac{288}{100} = \frac{12 - 300}{100} = \frac{288}{100} = 2,88 \text{ م/ث}$$

(٢) حل السؤال الثاني :



ظاهر $= \frac{8}{س} * \text{بعد إكمال المثلث}$

$$\frac{دس}{دن} \times 8 = \frac{ده}{دن} \times 2$$

$3 = \frac{دس}{دن}$
 جد $\frac{ده}{دن} = \text{عندما } س = 6$
نرسم مثلث رقمي*
 جتاه $\frac{ده}{دس} = \frac{6}{10}$
 $ده = 0,6$

$$\frac{ده}{دن} = \frac{1}{36} \times 8 = \frac{8}{36}$$

$$\frac{ده}{دن} = \frac{1}{36} \times 2 = \frac{2}{36}$$

$$\frac{ده}{دن} = \frac{2}{36} \times 0,36 = 0,2$$

$$\frac{ده}{دن} = \frac{24}{100} = \frac{36}{100} \times \frac{2}{3} = \frac{24}{100}$$

= 0,24 راديان/ث

٥) حل السؤال الخامس :

س: مسافة سير القارب

ف: الحبل

$$\text{لدينا } \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2$$

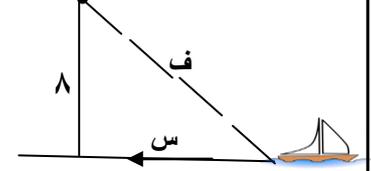
$$\text{يطلب } \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \text{ ?? عندما } \text{ف} = 10$$

ثم نجد س ???

$$64 + \text{س}^2 = 100$$

$$\text{س}^2 = 36 \iff \text{س} = 6$$

الرجل



$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + 64$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \text{س} = 2 \text{ دس}$$

$$10 \times 2 = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff 20 = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \text{دف} = 20$$

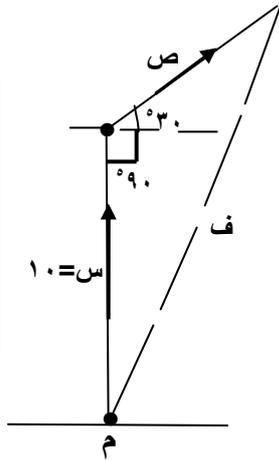
٧) حل السؤال السابع :

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 5, \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 5$$

$$\text{نجد } \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \text{ ???}$$

$$\text{عندما } \text{ن} = 2 \text{ (بعد الانحراف)}$$

$$\text{ص} = 2 \times 5 = 10$$



*** عندما يرتفع لأعلى لمدة دقيقتان ثم ينحرف ***

∴ الارتفاع الأساسي ثابت $\iff \text{س} = 2 \times 5 = 10$ كم

** حسب قانون جيب التمام **

$$\text{ف} = \sqrt{10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \cos 120}$$

$$\text{ف} = \sqrt{100 + 100 + 200}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

٦) حل السؤال السادس :

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 1, \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} \text{ ?? عندما } \text{ن} = 3$$

المسافة = السرعة × الزمن

$$\text{س} = 3 \times 1 = 3$$

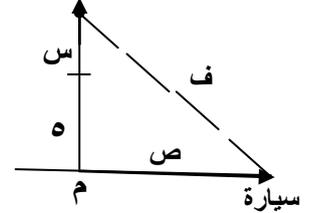
$$\text{ص} = 3 \times 2 = 6$$

نجد ف من الأصل :

$$\text{ف}^2 = 6^2 + 3^2 = 45$$

$$\text{ف} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

بالون



$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 + 5^2$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$10 \times 2 = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff 20 = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

٨) حل السؤال الثامن :

$$\text{ف}^2 = (\text{س} + 4)^2 + (\text{ص} - 8)^2$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

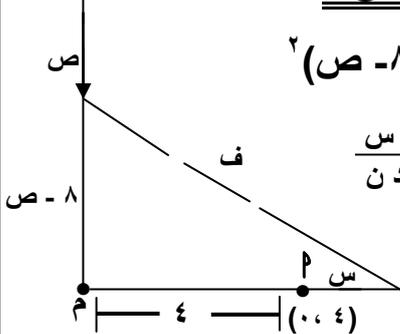
$$10 \times 2 = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff 20 = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \times (2 - 8) \times 2 +$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{10}{20} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} \iff \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$$

ب (٨٠، ٠)



$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 1 \text{ (طبعاً موجبة رغم الاقتراب)}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2 \text{ ?? عندما } \text{ن} = 2$$

المسافة = السرعة × الزمن

$$\text{س} = 2 \times 2 = 4$$

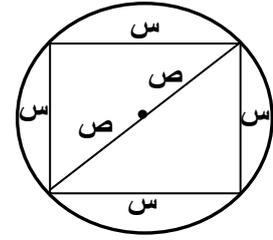
$$\text{ص} = 2 \times 1 = 2$$

نجد ف من الأصل :

$$\text{ف}^2 = (2 - 8)^2 + (4 + 4)^2$$

١٢ الحل:

$$\begin{aligned} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} &= ٤ \\ \text{نجد} \frac{\text{دم}}{\text{دن}} &= ??? \\ \text{عندما س} &= ١٠ \end{aligned}$$



المساحة = مساحة - مساحة
المحصورة الدائرة المربع

$$م = \pi \text{ص}^2 - \text{س}^2 \quad (\text{نشتق})$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\pi^2 \text{ص}^2}{\text{دن}} - \frac{\text{دس}^2}{\text{دن}}$$

*** يلاحظ أننا بحاجة إلى $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ أو $\frac{\text{دص}^2}{\text{دن}}$
وذلك من خلال مبرهنة فيثاغورس ***

$$\text{س}^2 - \text{س}^2 = (\text{ص}^2)$$

$$\text{س}^2 = \text{ص}^2 + \text{ص}^2 = ٢\text{ص}^2 \quad (\text{نشتق})$$

$$\frac{\text{دص}^2}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}^2}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}^2}{\text{دن}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}^2}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}^2}{\text{دن}}$$

$$\leftarrow \frac{\text{دص}^2}{\text{دن}} = ١٠ \times ٤ = ٤٠$$

$$\text{ولكن} \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \pi^2 \left(\frac{\text{دص}^2}{\text{دن}} \right) - \frac{\text{دس}^2}{\text{دن}}$$

$$= \pi^2 (٤٠) - ٤ \times ١٠ \times ٢ =$$

$$= ٨٠ - \pi ٤٠ =$$

١٣ الحل:

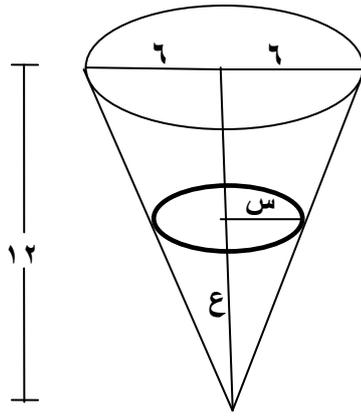
تنخفض بمعدل تعني

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{٢-}{\pi}$$

عندما ع = ٣

يطلب $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ ؟

ثم نجد $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ ؟



$$\text{حجم المخروط} = \frac{\pi}{3} \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$$

$$\text{ح} = \frac{\pi}{3} \times \text{س}^2 \times \text{ع}$$

*** يجب توحيد الرموز قبل الإشتقاق ***

** لدينا تشابه :

$$\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{٦}{١٢} \quad (\text{ضرب تبادلي})$$

$$\text{ع} = ١٢ \frac{\text{س}}{٦} \quad \leftarrow \text{س} = \frac{\text{ع}}{٢}$$

$$\text{إذاً،} \quad \text{ح} = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{\text{ع}}{٢} \right)^2 \times \text{ع}$$

$$\text{إذاً،} \quad \text{ح} = \frac{\pi}{12} \times \text{ع}^3 \quad (\text{نشتق})$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{12} \times ٣ \times \text{ع}^2 \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}} \quad (\text{نعوض})$$

$$= \frac{\pi}{4} \times ٩ \times \frac{٢-}{\pi} = \frac{٩-}{٢} \text{ م}^2 / \text{ساعة}$$

مساحة سطح الماء : م = $\pi \text{س}^2$

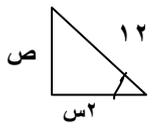
$$\text{م} = \pi \left(\frac{\text{ع}}{٢} \right)^2 \quad \leftarrow \text{م} = \frac{\pi \text{ع}^2}{٤} \quad (\text{نشتق})$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\pi \text{ع}^2}{٤} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{٢} \times ٣ \times \frac{٢-}{\pi} = ٣- \text{ م}^2 / \text{ساعة}$$

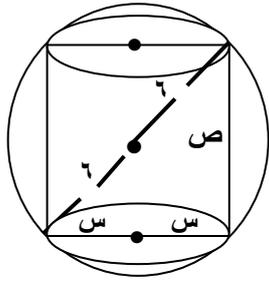
(٢) حل السؤال الثاني :

من مبرهنة فيثاغورس



١٢
ص
س٢

(٢س) + ٢ص = ٦
١٤٤ = ٢ص + ٢ص
١٤٤ = ٤ص
٣٦ = ١/٤ ص



الأساسية

ق: حجم الأسطوانة (قيمة عظمى)

$$ق = \pi \text{ نق}^2 ع \iff ق = \pi \text{ س}^2 \text{ ص}$$

$$ق = \pi (٣٦ - \frac{1}{٤} \text{ ص}^2) \text{ ص}$$

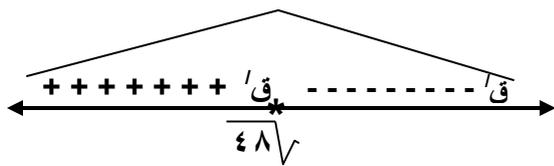
$$ق = \pi \text{ س}^2 \text{ ص} - \frac{\pi}{٤} \text{ ص}^3 \quad (\text{نشتق})$$

$$٠ = \frac{\pi}{٤} \text{ ص}^3 - \pi \text{ س}^2 \text{ ص}$$

$$\frac{\pi}{٤} \text{ ص}^3 = \pi \text{ س}^2 \text{ ص} \iff ٠ = \frac{\pi}{٤} \text{ ص}^3 - \pi \text{ س}^2 \text{ ص}$$

$$\iff \text{ص}^2 = ٤٨ \iff \text{ص} = \sqrt{٤٨}$$

إذاً ، ارتفاع الإسطوانة $\text{ص} = \sqrt{٤٨}$ عندها قيمة عظمى



$$\iff \text{س}^2 = ٣٦ - ٣٦ = ١٢ - ٣٦ = ٤٨ \times \frac{1}{٤} - ٣٦ = ٢٤$$

$$\text{إذاً ، س} = ٢٤$$

**حلول أسئلة الحصة الحادية عشر*

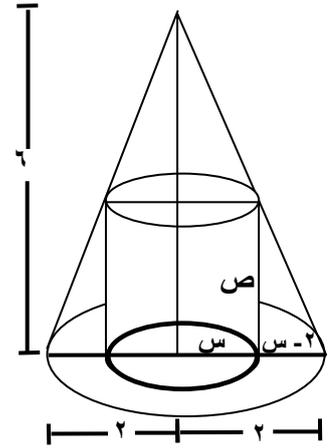
(١) حل السؤال الأول :

من تشابه المثلثات:

$$\frac{٦}{٢} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ٢}$$

$$\text{ص} = ١٢ - ٢\text{س}$$

إذاً ،

$$\text{ص} = ٣ - ٦\text{س}$$


الأساسية

ق: حجم الأسطوانة (قيمة عظمى)

$$ق = \pi \text{ نق}^2 ع$$

$$ق = \pi \text{ س}^2 \text{ ص}$$

$$ق = \pi \text{ س}^2 (٣ - ٦\text{س})$$

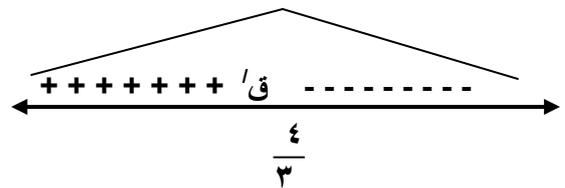
$$ق = \pi \text{ س}^3 - ٦\pi \text{ س}^2$$

$$٠ = \pi \text{ س}^3 - ٦\pi \text{ س}^2$$

$$\iff \text{س} = ٣ - ٦\text{س}$$

$$\iff \text{س} = ٣ - ٦\text{س}$$

س = ٠ ، تهمل ، س = ٤/٣ = نق الإسطوانة

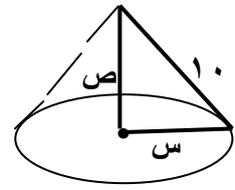


إذاً ، عند س = ٤/٣ قيمة عظمى

إذاً ، ص = ٦ - ٣ × ٤/٣ = ٢ سم (الارتفاع)

(٣) حل السؤال الثالث :

المساعدة :
نظرية فيثاغورس
 $100 = s^2 + s^2$
 $s^2 = 100 - 100 = 0$



الأساسية

ق : حجم مخروط (قيمة عظمى)

$$ق = \frac{\pi}{3} \times s^2 \times s \quad (\text{الأفضل التخلص من } s^2)$$

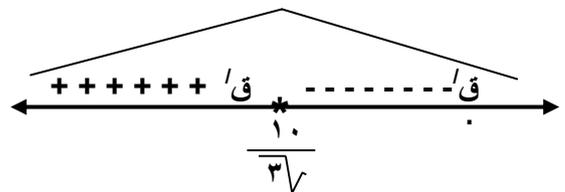
$$ق = \frac{\pi}{3} (100 - s^2) \times s$$

$$ق = \frac{\pi}{3} (100s - s^3) \quad (\text{نشتق})$$

$$ق' = \frac{\pi}{3} (100 - 3s^2) = 0$$

$$100 - 3s^2 = 0 \iff 3s^2 = 100$$

$$\text{إذاً، } s = \sqrt[3]{\frac{100}{3}}$$



إذاً، عند $s = \sqrt[3]{\frac{100}{3}}$ قيمة عظمى

$$\text{إذاً، } s^2 = 100 - 100 = 0 \implies \frac{200}{3} = \frac{100}{3} - 100 = 0$$

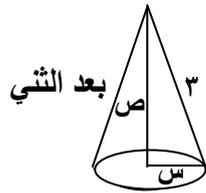
$$\iff s = \frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\text{إذاً، الحجم} = \frac{\pi}{3} \times \frac{200}{3} \times \frac{100}{\sqrt[3]{3}}$$

$$= \frac{\pi \times 20000}{3 \sqrt[3]{9}} \text{ سم}^3$$

(٤) حل السؤال الرابع :

المساعدة :
 $9 = s^2 + s^2$
 $s^2 = 9 - 9 = 0$
 $\therefore s = \sqrt[3]{9 - 9} = 0$



الأساسية

ق : حجم المخروط (قيمة عظمى)

$$ق = \frac{\pi}{3} \times \text{نق}^2 \times \text{ع} = \frac{\pi}{3} \times s^2 \times s$$

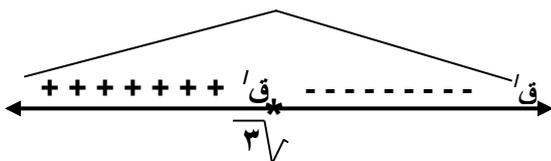
$$ق = \frac{\pi}{3} (9 - s^2) \times s$$

$$ق = \frac{\pi}{3} (9s - s^3) \quad (\text{نشتق})$$

$$ق' = \frac{\pi}{3} (9 - 3s^2) = 0$$

$$9 - 3s^2 = 0 \iff 3s^2 = 9$$

$$s^2 = 3 \iff s = \sqrt[3]{3}$$



إذاً، $s = \sqrt[3]{3}$ قيمة عظمى

$$\text{إذاً، } s^2 = 9 - 9 = 0 \iff 6 = 3 - 9 = 0 \implies \sqrt[3]{6} = s$$

$$\text{إذاً، حجم المخروط} = \frac{\pi}{3} \times 6 \times \sqrt[3]{6} = \frac{\pi}{3} \times 6 \sqrt[3]{6} \text{ سم}^3$$

** ولكن طول قوس القطاع = محيط قاعدة المخروط

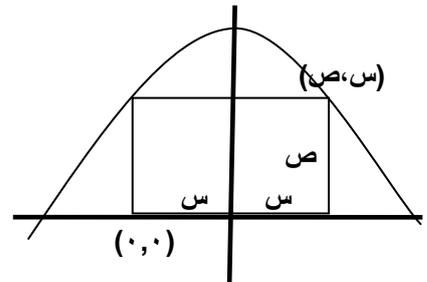
$$\text{نق} \times \text{ه} = \pi r^2$$

$$l = \pi r^2 \sqrt[3]{3 - 9}$$

$$\text{إذاً، } l = \pi r^2 \sqrt[3]{6} \text{ سم}$$

٥) حل السؤال الخامس :

(س،ص) على المنحنى =ص
ق(س) = ٩ - س^٢



لغايات الرسم الدقيق لـ ق(س) :

نرسم منحنى ص = ٩ - س^٢ بدقة تامة اعتماداً على أن

$$ق'(س) = ٢س - ١٨ = ٠$$

إذاً، س = ٠ (محور التماثل)

الأساسية

ق: مساحة المستطيل (قيمة عظمى)

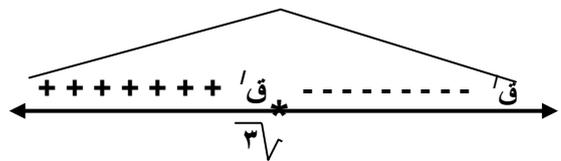
$$ق = الطول \times العرض = ٢س \times ص$$

$$ق = ٢س(٩ - س^٢)$$

$$ق = ١٨س - ٢س^٣ \quad (\text{نشتق})$$

$$ق' = ١٨ - ٦س^٢ = ٠ \iff ٦س^٢ = ١٨$$

$$س^٢ = ٣ \iff س = \sqrt[3]{٣}$$



إذاً، عند س = $\sqrt[3]{٣}$ قيمة عظمى

$$\text{إذاً، ص} = ٩ - ٣ = ٦ \quad (\text{العرض})$$

$$\text{إذاً، طول المستطيل} = ٢س = ٢\sqrt[3]{٣}$$

٦) حل السؤال السادس :

ب د ضلع مشترك بين المثلثين
في المثلث (ب ج د)
(ب د) = $س^٢ + س^٢ = ٢س^٢$
في المثلث (ب د)
(ب د) = $٢(٢) + ٢(١) - ٢(١ \times ٢) = ٢$ جتاه
إذاً، $٢س^٢ = ٥ - ٢$ جتاه
إذاً، $س^٢ = ٥ - ٢ = ٣$ جتاه

****الأساسية:**

ق : مساحة الشكل (ب ج د)

$$ق = \text{مساحة المثلث ب ج د} + \text{مساحة المثلث ب د ج}$$

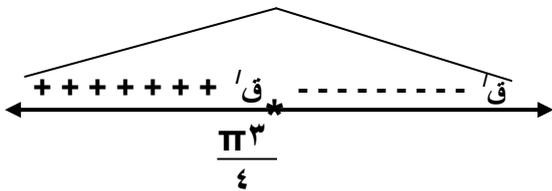
$$ق = \frac{١}{٢} (س \times س) + \frac{١}{٢} (٢ \times ١) \text{ جاه}$$

$$ق = \frac{س^٢}{٢} + \text{جاه} \quad (\text{نعوض ب س}^٢)$$

$$ق = ١,٢٥ - \text{جاه} + \text{جاه} \quad (\text{نشتق})$$

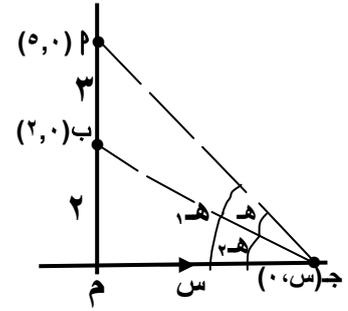
$$ق' = \text{جاه} + \text{جاه} = ٠ \iff \text{جاه} = -\text{جاه}$$

$$\therefore \text{ه} = ١,٣٥ \quad (\text{فقط، لأنها زاوية في مثلث}) = \frac{\pi^٣}{٤}$$



إذاً، عندما ه = $\frac{\pi^٣}{٤}$ تكون المساحة قيمة عظمى

٧) حل السؤال السابع :



الاقتران : هـ : زاوية تمثل الفرق بين زاويتين

$$هـ = هـ_١ - هـ_٢$$

$$\text{ظاه} = \text{ظاه}_١ - \text{ظاه}_٢ = (هـ_٢ - هـ_١) \text{ظاه} + ١$$

$$\text{ظاه} = \frac{\frac{٢}{س} - \frac{٥}{س}}{\frac{٢}{س} \times \frac{٥}{س} + ١}$$

$$\text{ظاه} = \frac{\frac{٣}{س}}{\frac{١٠}{س} + ١} \quad (\text{توحيد مقامات})$$

$$\text{ظاه} = \frac{٣}{س} \times \frac{س}{١٠ + س} = \frac{٣س}{١٠ + س}$$

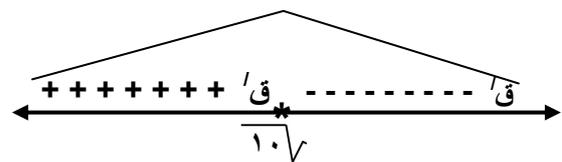
$$\text{إذاً ، ظاه} = \frac{٣س}{١٠ + س} \quad (\text{نشتق})$$

$$٠ = \frac{\text{ده} - \text{دس}}{\text{دس}} = \frac{(س٣)(١٠ + س) - (٣)(١٠ + س)}{(١٠ + س)٢}$$

$$\text{إذاً البسط فقط} \iff ٠ = ٣س٣ - ٣٠ + ٣س٢$$

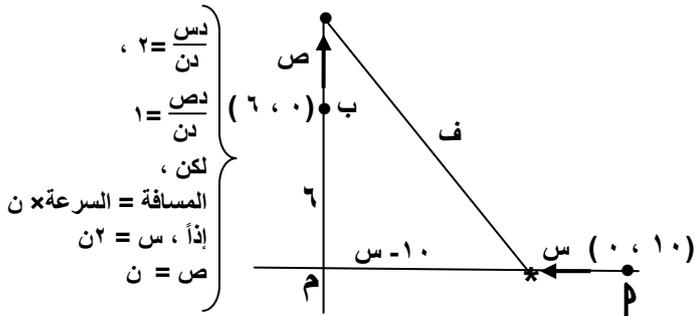
$$٣٠ = ٣س٣ \iff ٠ = ٣س٣ - ٣٠$$

$$١٠ = ٣س \iff ١٠\sqrt{٣} = س$$



إذاً ، عندما $س = ١٠\sqrt{٣}$ تكون هـ قيمة عظمى

٨) حل السؤال الثامن :



ق: البعد بين نقطتين

$$ق = ف = \sqrt{(ص + ٦)٢ + (س - ١٠)٢}$$

(لاحظ أن توحيد الرموز سوف يتم بدلالة ن)

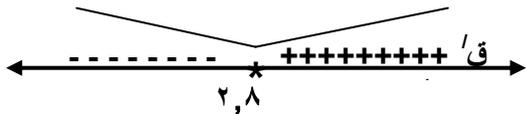
$$ق = ف = \sqrt{(ن + ٦)٢ + (ن٢ - ١٠)٢} \quad (\text{نشتق})$$

$$ق' = ف' = \frac{١ \times (ن + ٦)٢ + ٢ \times (ن٢ - ١٠)٢}{\sqrt{(ن + ٦)٢ + (ن٢ - ١٠)٢} \times ٢}$$

((ولكن ف' = صفر))

$$\text{إذاً البسط فقط} \iff ٠ = ٤٠ + ٨ن + ١٢ + ن٢$$

$$٠ = ٢٨ = ٢٨ \iff ن = \frac{٢٨}{١٠} = ٢,٨ \text{ من الثانية}$$



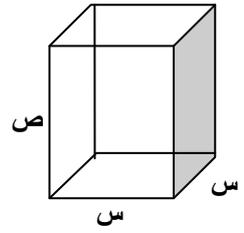
$$\text{إذاً ، عندما } س = ٢,٨ \times ٢ = ٥,٦$$

تكون قيمة عظمى

٩) حل السؤال التاسع :

المساعدة :
الحجم = س × س × ص = ٣٢

$$٣٢ = س^2 \times ص = \frac{٣٢}{ص} = س$$



الأساسية :

ق : كمية المادة المصنوع منها الصندوق (وتعني مساحة أوجه الصندوق الخمسة)

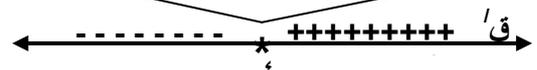
ق = مساحة القاعدة + مساحة (٤) جوانب

$$ق = س \times س + ٤ س \times ص$$

$$ق = س^2 + ٤ س \times ص = \frac{٣٢}{ص} + ٤ س$$

$$ق' = س^2 + \frac{١٢٨}{ص} = ٠ \iff س^2 = -\frac{١٢٨}{ص}$$

$$٣ س^2 = ١٢٨ \iff س^3 = ٦٤ \iff س = ٤$$

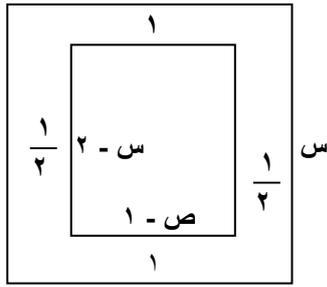


إذا ، عندما س = ٤ قيمة صغرى

$$إذا ، ص = \frac{٣٢}{٤} = ٨ سم$$

١١) حل السؤال الحادي عشر :

المساعدة :
المساحة الكلية = ٣٢
س × ص = ٣٢
ص = \frac{٣٢}{س}



**الأساسية :

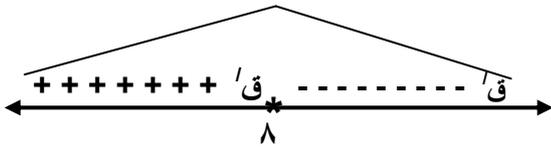
ق : المساحة المطبوعة $\iff ق = (س - ٢)(ص - ١)$

$$ق = (س - ٢)(ص - ١) = \frac{٣٢}{ص} (س - ٢)$$

$$ق = ٣٢ - \frac{٦٤}{ص} - س + ٢ \iff ٢ + \frac{٦٤}{ص} - س = ٣٢$$

$$ق' = ١ - س + \frac{٦٤}{ص} = ٠ \iff ١ = س - \frac{٦٤}{ص}$$

$$س^2 = ٦٤ \iff س = ٨ سم$$



إذا ، عندما س = ٨ قيمة عظمى

$$إذا ، ص = \frac{٣٢}{٨} = ٤ سم$$

١٢) الحل :

ق : مساحة المثلث

$$ق = \frac{١}{٢} \times (٨ \times ٨) \times جا ه$$

ق = ٣٢ جا ه (نشتق فوراً لأن الرموز موحدة)

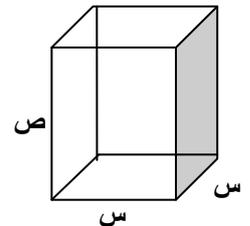
$$ق' = ٣٢ جا ه = ٠ \iff جا ه = صفر$$

$$\iff ه = ٩٠^\circ = \frac{\pi}{٢}$$

إذا ، عندها ق (مساحة المثلث) قيمة عظمى

١٠) حل السؤال العاشر :

مجموع الأحرف = ٦٠٠
مجموع الأضلاع (٢ اضلع) = ٦٠٠
س + س + س + س + س + س = ٦٠٠
٤ ص + ٤ س = ٦٠٠
٤ ص = ٦٠٠ - ٤ س
ص = ١٥٠ - ٢ س



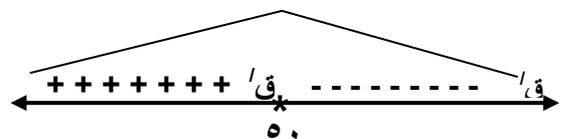
ق : حجم الصندوق = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$ق = س^2 \times ص \iff ق = س^2 (١٥٠ - ٢ س)$$

$$ق = ١٥٠ س^2 - ٢ س^3 \iff ق' = ٣٠٠ س - ٦ س^2 = ٠$$

$$٦ س^2 = ٣٠٠ س \iff س = ٥٠$$

$$٦ س (س - ٥٠) = ٠ \iff س = ٥٠ \text{ (مستحيل) } \iff س = ٥٠$$

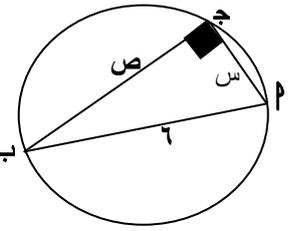


إذا ، عندما س = ٥٠ قيمة عظمى

$$إذا ، ص = ١٥٠ - ٢ \times ٥٠ = ٥٠ سم$$

(١٣) الحل:

من المعروف أن الزاوية المحيطية
المقابلة لقطر الدائرة دائماً قائمة



∴ م ب ج مثلث قائم

يحقق فيثاغورس

$$36 = 2ص + 2ص$$

$$36 = 2ص$$

$$ص = \sqrt{36} = 6$$

الأساسية

ق : مساحة المثلث

$$ق = \frac{1}{2} \times القاعدة \times الإرتفاع \quad (\text{لأنه قائم})$$

$$ق = \frac{1}{2} \times 36 \times 6$$

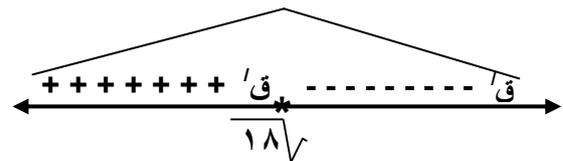
$$ق = \frac{1}{2} \times 36 \times 6$$

$$ق = \frac{1}{2} \times 36 \times 6 \quad (\text{نشتق})$$

$$0 = \frac{1}{2} \times \frac{72س - 4س^2}{36\sqrt{2} - 2س}$$

$$0 = 72س - 4س^2 \quad \leftarrow 0 = 4س(18 - س)$$

$$\leftarrow س = صفر \quad (\text{تھمل}) , س = 18\sqrt{2}$$



إذا ، عند س = $18\sqrt{2}$ قيمة عظمى

$$\text{إذا ، ص} = 18 - 36\sqrt{2} = 18 \quad (\text{الارتفاع})$$

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 18\sqrt{2} \times 18\sqrt{2}$$

$$= 18 \times \frac{1}{2} \times 9سم^2$$

(١٤) الحل:

ق : الربح (قيمة عظمى)

$$ق : الربح = \text{سعر البيع الكلي} - \text{سعر التكلفة الكلي}$$

$$ق = \text{سعر بيع الجهاز} \times \text{عددہم} - \text{السعر الكلي للتكلفة}$$

$$ق = (200 - 0.01س)س - (50 + 20)$$

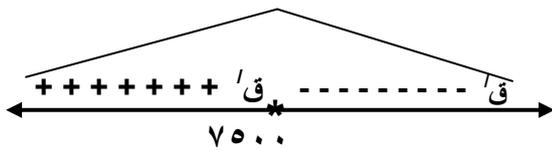
$$ق = 200س - 0.01س^2 - 70 \quad (\text{نشتق})$$

$$0 = 200 - 0.02س$$

$$0.02س = 200$$

$$س = \frac{200}{0.02} = 10000 \quad \leftarrow س = 100 \times 100 = 10000$$

إذا ، س = 10000 = 100 × 100 جهاز



إذا ، عندما س = 7500 قيمة عظمى

(الربح أكبر ما يمكن)

٣) حل السؤال الثالث :
*** ندمج التكاملين ***

$$\leftarrow \int_1^9 \frac{(م(س) - ه(س))}{\sqrt{س}} دس = ٨$$

$$\leftarrow \int_1^9 \frac{ج}{\sqrt{س}} دس = ٨$$

$$\leftarrow \int_1^9 \frac{ج \cdot س^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} دس = ٨$$

$$٨ = \sqrt{٩} \cdot ج٢ - \sqrt{١} \cdot ج٢$$

$$٢ = ج٦ - ج٢ \leftarrow ٨ = ج٤ \leftarrow ٨ = ج٢$$

$$\therefore م(س) - ه(س) = ٢ \leftarrow ه(س) - م(س) = ٢$$

$$\therefore \int_1^9 (ه(س) - م(س)) دس = ٢ - ١٠ = -٨$$

٤) حل السؤال الرابع :
نشقق الطرفين للتخلص من التكامل

$$\frac{د}{دس} \int_1^9 (ه(س) دس) = \frac{د}{دس} (م(س) + ج٢س - م(س))$$

$$ه(س) = م(س) + ج٢س - م(س)$$

$$ه(س) = ق(س) + ج٢س - ق(س)$$

$$ه(س) = ج٢س \quad (\text{نشقق مرة أخرى})$$

$$ه(س) = ج٢س$$

$$ه(س) = ج٢س$$

$$٢ = ١ \times ٢ = ٢$$

**** حلول أسئلة الحصة الثانية عشر ***

١) حل السؤال الأول :

نشقق الطرفين للتخلص من التكامل

$$\frac{د}{دس} \int_1^9 (ق(س) + ه(س)) دس = \frac{د}{دس} (ه٢س + ج٢س)$$

$$ق(س) + ه(س) = ه٢س + ج٢س$$

(ثم نشقق مرة أخرى)

$$ق'(س) = ه٢س + ه٢س = ٥ + ٥ = ١٠$$

$$\left. \begin{array}{l} ٥ = ق'(س) \\ ٥ = ه(س) \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٥ = ه٢س - ه٢س \\ ٥ = ه٢س - ه٢س \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} ٥ = ق'(س) \\ ٥ = ه(س) \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٥ = ه٢س - ه٢س \\ ٥ = ه٢س - ه٢س \end{array}$$

$$٥ = ق'(س) = ٥ - ٤ - ٤ = ٥$$

$$٥ = ق'(س) = ٥ \leftarrow ٥ = ق'(س)$$

٢) حل السؤال الثاني :

نشقق الطرفين للتخلص من التكامل

$$\frac{د}{دس} \int_1^9 (لوم(س) + ق(س)) دس = \frac{د}{دس} (س + ه٢س)$$

$$لوم(س) + ق(س) = س + ه٢س$$

$$ق(س) = س + ه٢س - لوم(س)$$

(ثم نشقق مرة أخرى)

$$ق'(س) = ١ + ٢ه(س) - لوم'(س) = ١ + ٢ه(س) - ١ = ٢ه(س)$$

$$ق'(س) = ٢ه(س) = ٢ه(س)$$

$$ق'(س) = ٢ه(س) = ٢ه(س)$$

$$\leftarrow ٢ه(س) = ٢ه(س) \quad (\text{لأن } ٢ \neq ٠)$$

$$\therefore ه(س) = ١ \leftarrow ١ = ه(س)$$

٥) حل السؤال الخامس :

$$ق(س) = \frac{پ}{س} + ٤ + ٢\sqrt{س} + \frac{١}{س} + \frac{٣}{س+١} دس$$

$$ق(س) = \frac{پ}{س} + ٤ + \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{س} + مقدار ثابت (نشتق)$$

$$ق'(س) = \frac{پ}{س} - \frac{١}{س^2} + ٢ + \frac{١}{س} \times ٢ + صفر$$

$$ق'(١) = \frac{پ}{١} - ١ + ٢ + ٢ + صفر = ٤ + پ$$

$$٢ = \frac{پ}{١} \quad (لأن \neq ٠)$$

$$\therefore ٢ = پ \quad (نضع لود للطرفين)$$

$$\leftarrow لود ه = لود ٢ = لود ٢ = لود ٢$$

٦) حل السؤال السادس :

$$ق''(س) = ق'(س) = \frac{١}{س^2} \left[ق'(س) = \frac{١}{س^2} \right]$$

$$ق'(١) - ق'(٤) = (١)$$

$$ولكن ق'(س) = س \times \frac{١}{\sqrt{س}} + (\sqrt{س}) (١)$$

$$\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{س} = \frac{٣}{\sqrt{س}}$$

$$\therefore ق'(٤) - ق'(١) = \left(\frac{٣}{\sqrt{٤}} - \frac{٣}{\sqrt{١}} \right)$$

$$= \frac{٣}{٢} - ٣ = \frac{٣}{٢} - ٢ \times \frac{٣}{٢} =$$

٧) حل السؤال السابع :

$$ق''(س) = ١٠ - ٢٩ = ٥ دس - ٢٩ ق(س) دس = ١٠ - ٤$$

$$ق''(س) = ١٤ = ١٤ \leftarrow ق'(س) دس = ٧$$

$$وكذلك ق'(١-٢) دس ... (نستبدل)$$

$$نضع ص = ١ - ٢ = ١ - ٢ = ١ \leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢ \leftarrow \frac{دص}{دس} = ١$$

$$عندما س = ٣ \leftarrow ص = ٥ ، عندما س = ١ \leftarrow ص = ١$$

$$ق'(ص) = \frac{دص}{٢} = ١٢ \leftarrow ق'(ص) دص = ٢٤$$

*** لكن المطلوب

$$ق'(٣) = ٢ + ٢ = ٤ دس$$

$$٢ = \left[\frac{٢}{٢} = ١ \right] : نجد أولاً : ق'(ص) دص = ٢$$

$$\leftarrow ق'(٣) = ٤ + ٤ دس$$

$$ق''(٣) = ٤ دس + ٤ دس = ٨$$

$$٨ + ٨ = ١٦ دس + ٨ دس = ٢٤$$

$$٥٩ = ٨ + ٥١ = ٨ + ١٧ \times ٣ = ٨ + (٢٤ + ٧) \times ٣ =$$

٨) حل السؤال الثامن :

$$٥ \leq ق(س) \leq ٢ \quad (٢ \times) \\ ١٠ \leq ٢ ق(س) \leq ٤ \quad \dots \dots \dots \text{نكامل}$$

$$١٠ - ١ \leq ٢ ق(س) دس \leq ٤ دس$$

$$٨ \geq ٢ ق(س) دس \geq ٢٠$$

$$\text{إذا : م = ٢٠ ، ن = ٨}$$

٨ حل السؤال الثامن :

$$\text{ب) } ٥ \geq \text{ق(س)} \geq ٢ \\ ١٥ \geq ٣\text{ق(س)} \geq ٦$$

** عندما نضع حدود التكامل في خاصية المقارنة
نأخذ الفترة كما هي ثم نتعامل مع الحدود **

$$\text{أ) } ١٥ \geq \text{دس} \geq ٣\text{ق(س)} \geq ٦ \geq \text{دس}$$

$$٣٠ \geq ٣\text{ق(س)} \geq ١٢$$

$$٣٠ \leq ٣\text{ق(س)} \leq ١٢$$

$$\text{إذا : م} = ١٢ \text{ ، ن} = ٣٠$$

$$\text{ج) } ٥ \geq \text{ق(س)} \geq ٢ \dots (٢-x) \\ ١٠ \leq ٢\text{ق(س)} \leq ٤$$

$$١ \leq ٢\text{ق(س)} \leq ١٥$$

$$\text{أ) } ١٥ \geq \text{دس} \geq ٣\text{ق(س)} \geq ١ \geq \text{دس}$$

$$٣ \leq ٣\text{ق(س)} \leq ٢$$

$$\text{إذا : م} = ٢ \text{ ، ن} = ٣٠$$

$$\text{د) } ٥ \geq \text{ق(س)} \geq ٢$$

$$\text{صفر} \geq \text{ق(س)} \geq ٢٥$$

*** انتبه عزيزي : عند تربيع الرقمين فإننا نأخذ

المربع الأكبر ، أما المربع الأصغر فهو صفر **

$$\text{أ) صفر} \geq \text{دس} \geq ٢\text{ق(س)} \geq ٢٥ \geq \text{دس}$$

$$٥٠ \geq ٢\text{ق(س)} \geq ٥٠$$

$$\text{إذا : م} = \text{صفر} \text{ ، ن} = ٥٠$$

٨ حل السؤال الثامن :

$$\text{هـ) } ٥ \geq \text{ق(س)} \geq ٢$$

*** انتبه عزيزي : نعامل القيمة المطلقة

في حالة السالب والموجب مثل التربيع ***

$$\text{صفر} \geq |\text{ق(س)}| \geq ٥$$

$$\text{أ) صفر} \geq \text{دس} \geq |\text{ق(س)}| \geq ٥ \geq \text{دس}$$

$$١٠ \geq |\text{ق(س)}| \geq ١٠$$

$$\text{إذا : م} = ٥ \text{ ، ن} = ١٠$$

٩ حل السؤال التاسع :

جاس = هـ^ص (نشتق ضمناً)

$$\text{جاس} \times ١ = \text{هـ}^{\frac{\text{ص}}{\text{دس}}}$$

← جاس = ص^١ / هـ^ص (نشتق مرة أخرى)

$$\text{جاس} = (\text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}}) + (\text{هـ}^{\frac{\text{ص}}{\text{دس}}})$$

*** تذكر أن جاس = هـ^ص من المصدر ***

$$\text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}} + (\text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}})^٢ = \text{هـ}^{\frac{\text{ص}}{\text{دس}}}$$

(إخراج هـ^ص عامل مشترك)

$$\text{هـ}^{\frac{\text{ص}}{\text{دس}}} (\text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}} + \text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}}) = \text{هـ}^{\frac{\text{ص}}{\text{دس}}}$$

$$\text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}} + \text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}} = ١$$

$$\text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}} + \text{ص}^{\frac{١}{\text{دس}}} = ١$$

١٠ حل السؤال العاشر :

لوحص = p س ← تذكر أن $v = h^p$ (نشتق)

$$p = \frac{dv}{ds} \quad v' = p$$

$$\leftarrow v'' = p' \cdot v' = p \cdot p = v^2$$

ولكن لدينا معادلة $v'' + v' + v = 0$
(نعوض فيها)

$$\leftarrow v^2 + (v')^2 + v = 0$$

$$\leftarrow v^2 + (v')^2 + v = 0$$

$$\leftarrow v^2 + (v')^2 + v = 0 \quad \text{ولكن } v' \neq 0$$

$$\leftarrow v^2 + (v')^2 + v = 0 \quad \text{(تحليل عبارة تربيعية)}$$

$$\leftarrow v^2 + (v')^2 + v = 0 \quad \leftarrow v = -\frac{1}{2}, \quad v' = p$$

١١ حل السؤال الحادي عشر :

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{4}{\sqrt{4 - s^2}} \quad \text{دس (مربع كامل)}$$

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{4}{\sqrt{(2-s)^2}} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{4}{|2-s|}$$

نعيد تعريف $s-2$ | ضمن فترتها $[3, 5]$



$$\leftarrow p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{4}{2-s} = \frac{4}{2-s} \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$= \frac{4}{2-s} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{4}{2-s} \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$= \frac{4}{2-s} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{4}{2-s} \cdot \frac{dv}{ds}$$

١٢ حل السؤال الثاني عشر :

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{2s - \sqrt{9 - s^2}}{\sqrt{9 - s^2}} \quad \text{دس (مربع كامل)}$$

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{2s - \sqrt{9 - s^2}}{\sqrt{9 - s^2}}$$

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 - s^2}}$$

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 - s^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 - s^2}} \cdot \frac{dv}{ds}$$

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 - s^2}}$$

$$p = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{1}{\sqrt{9 - s^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 - s^2}} \cdot \frac{dv}{ds}$$

٤) حل السؤال الرابع :

**** (نوجد المقامات فوراً) ****

$$\leftarrow \text{دس } \sqrt[3]{\frac{5}{س} - \frac{1}{س} \times \frac{س}{س}}$$

$$\text{دس } \sqrt[3]{\frac{س-5}{س}} \text{ نوزع الجذر}$$

$$\text{دس } \sqrt[3]{\frac{س-5}{س}} = \text{دس } \sqrt[3]{\frac{س-5}{س}}$$

$$\text{دس } \sqrt[3]{\frac{س-5}{س}} = \text{دس } \sqrt[3]{\frac{س-5}{س}}$$

٧) حل السؤال السابع :

$$\leftarrow \text{دس } (جئأس - جأأس) \text{ دس}$$

$$= \text{دس } (جئأس - جأأس) (جئأس + جأأس) \text{ دس}$$

تذكر أن: جئأس - جأأس = جئأس^٢ - جأأس^٢

$$= \text{دس } (جئأس^٢ - جأأس^٢) \text{ دس}$$

$$= \frac{جأأس^٢}{٢} + \text{دس}$$

٨) حل السؤال الثامن :

$$\leftarrow \text{دس } \frac{ظأس + جئأس}{دس}$$

$$= \text{دس } \times \frac{\frac{١}{جئأس} + \frac{١}{جئأس}}{\frac{١}{جئأس} + \frac{١}{جئأس}}$$

$$\text{دس } \frac{١}{جئأس} = \text{دس } \frac{١}{جئأس + جئأس}$$

$$= \text{دس } (جئأس + جئأس) \text{ دس} = \frac{١}{٢} جئأس \text{ دس}$$

$$= \frac{١}{٢} جئأس + \text{دس} = \frac{١}{٤} جئأس + \text{دس}$$

٥) حل السؤال الخامس :

$$\leftarrow \text{دس } (جأأس^٣ + ظأس^٥) \text{ دس}$$

$$\leftarrow \text{دس } \left(\frac{١}{٢} (جئأس - ١) + (ظأس^٥ - ١) \right) \text{ دس}$$

$$= \frac{١}{٢} (س - \frac{جأأس}{٢}) + (ظأس^٥ - س) \text{ دس}$$

٦) حل السؤال السادس :

$$\leftarrow \text{دس } (جئأس - جئأس) \text{ دس}$$

$$\leftarrow \text{دس } ((جئأس - جئأس)^٢) \text{ دس}$$

$$\leftarrow \text{دس } (جأأس - ٢جئأس + جئأس) \text{ دس}$$

$$= (١ - جئأس)^٢ \text{ دس (ثم نربح)}$$

$$= (١ - ٢جئأس + جئأس^٢) \text{ دس}$$

$$= (١ - ٢جئأس + جئأس^٢) \text{ دس}$$

$$= س + \frac{٢جئأس^٢}{٢} + \frac{١}{٢} (س - \frac{جئأس}{٤}) \text{ دس}$$

$$= \frac{٣}{٢} س + جئأس - \frac{١}{٨} جئأس + \text{دس}$$

٩) حل السؤال التاسع :

$$\leftarrow \text{دس } \frac{س^٥ - ٢}{س^٣ - ٤}$$

$$= \text{دس } \frac{س - ٢}{(س - ٢)(س + ٢)} \text{ (نحلل المقام ثم نختصر)}$$

$$= \text{دس } \frac{١}{س + ٢}$$

(هنا البسط مشتقة كاملة للمقام فنكامل مباشرة)

$$= \frac{١}{س + ٢} = \frac{١}{س} - \frac{٢}{س + ٢}$$

١٠ حل السؤال العاشر :

$$\leftarrow \text{دس (ضرب، تعويض)} \frac{١٠ - ٥}{\sqrt[3]{(١ + س - ٢س)}} =$$

$$= \text{دس (١٠ - ٥) (س - ٢س + ١)}^{\frac{٢}{٣}}$$

نضع :

$$\begin{aligned} \text{ص} &= س - ٢س + ١ \\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} &= ١ - ٢س \\ \text{إذاً: } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} &= \frac{١ - ٢س}{١} \end{aligned}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{دص} (١ - ٢س) = \frac{٢}{٣} \text{دص} \cdot \frac{١ - ٢س}{١}$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{دص} \cdot \frac{١ - ٢س}{١} = \frac{٢}{٣} \text{دص} (١ - ٢س)$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{دص} (١ - ٢س) + \frac{٢}{٣} \text{دص} (١ - ٢س)$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{دص} (١ - ٢س) + \frac{٢}{٣} \text{دص} (١ - ٢س)$$

١٢ حل السؤال الثاني عشر :

(مركب غير خطي ← مرفوض ← إذا نبسطه)

$$= \sqrt[3]{س (٣ - س)} \text{دس (الجذر يوزع على الضرب)}$$

$$= \sqrt[3]{س (٣ - س)} \text{دس (أصبح ضرب ، أجزاء)}$$

ق = س ← دق = ١ دس

$$\frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} \text{دس} = \frac{٤}{٣} \text{دس}$$

$$= س \times \frac{٤}{٣} - \frac{٤}{٣} (٣ - س) \text{دس}$$

$$= س \frac{٤}{٣} - \frac{٤}{٣} (٣ - س) \text{دس}$$

$$= \frac{٣}{٤} \sqrt[3]{(٣ - س)} + \frac{٩}{٢٨} - \sqrt[3]{(٣ - س)} \text{دس} + \text{ج}$$

١٣ حل السؤال الثالث عشر :

$$\text{دس (٣ - ٥س)} \sqrt[3]{(٥ - ٢س)} = \text{دس (٣ - ٥س)} \sqrt[3]{(٥ - ٢س)}$$

نضع: ص = ٥ - ٢س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥ - ٢س}{٥}$$

إذاً: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥ - ٢س}{٥}$

$$= \frac{٣}{٢} \text{دص} \cdot \frac{٣}{٢} \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{دص} \cdot \frac{١}{٢} \text{دص}$$

**ولكن س^٢ = ص + ٥ (استبدال عكسي) **

$$= \frac{١}{٢} \text{دص} (٥ + ص) \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢} \text{دص} (٥ + ص) \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢} \left(\frac{٥}{٥} + \frac{٥}{٤} ص \right) \text{دص} + \text{ج}$$

$$= \frac{١}{١٠} (٥ - ٢س) + \frac{٥}{٨} (٥ - ٢س) \text{دس} + \text{ج}$$

١١ حل السؤال الحادي عشر :

$$\leftarrow \text{دس (ضرب، تعويض)} \sqrt[3]{س - ٤س} = \text{دس (ضرب، تعويض)}$$

نضع: ص = س - ٤س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{س - ٤س}{٤س}$$

إذاً: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{س - ٤س}{٤س}$

$$= \frac{١}{٤} \text{دص} \cdot \frac{١}{٤} \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{دص} \cdot \frac{١}{٤} \text{دص}$$

***ولكن س^٤ = ص + ٣ (استبدال عكسي) ***

$$= \frac{١}{٤} \text{دص} (٣ + ص) \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{دص} \left(\frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} ص \right) \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٤} \left(\frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} ص \right) \text{دص} + \text{ج}$$

$$= \frac{١}{١٠} (٣ - ٤س) + \frac{١}{٢} (٣ - ٤س) \text{دس} + \text{ج}$$

$$= \frac{١}{١٠} \sqrt[3]{(٣ - ٤س)} + \frac{١}{٢} \sqrt[3]{(٣ - ٤س)} \text{دس} + \text{ج}$$

حل السؤال السادس عشر: (١٦)

$$\leftarrow ٩س^٢ جتا^٣ (س^٢ + ٥) . دس (تعويض)$$

نضع: $ص = س^٢ + ٥$

$$\frac{دص}{دس} = س^٢$$

$$\text{إذاً: } \frac{دص}{س^٢} = دس$$

$$= ٩س^٢ جتا^٣ . \frac{دص}{س^٢}$$

$$= ٩س^٢ جتا^٣ . دص$$

$$= ٣ (ص - ٥) جتا^٣ . دص (ضرب ، أجزاء)$$

$$ق = (ص - ٥) \leftarrow دق = دص$$

$$ده = جتا^٣ . دص \leftarrow هه = جاص$$

*** نطبق قانون الأجزاء ***

$$= ٣ (ص - ٥) جتا^٣ - جاص . دص$$

$$= ٣ (ص - ٥) جتا^٣ + جاص^٣ + ج$$

$$= ٣س^٢ جا(س^٢ + ٥) + ٣جتا(س^٢ + ٥) + ج$$

حل السؤال السابع عشر: (١٧)

$$٩س (جاس + جتاس) . دس (نفك التربيع أولاً)$$

$$= [س (جاس + جتاس + ٢جاس جتاس) . دس]$$

$$= [س (١ + ٢جاس جتاس) . دس]$$

$$= [س (١ + جا٢س) . دس (ضرب ، أجزاء)]$$

$$ق = س \leftarrow دق = دس$$

$$ده = (١ + جا٢س) . دس \leftarrow هه = س - \frac{جتا٢س}{٢}$$

$$= س (س - \frac{جتا٢س}{٢}) - (س - \frac{جتا٢س}{٢}) . دس$$

$$= س^٢ - س \frac{جتا٢س}{٢} - س \frac{جتا٢س}{٢} + \frac{س^٢}{٢} + \frac{جتا٢س}{٢ \times ٢} + ج$$

$$= \frac{١}{٢} س^٢ - \frac{١}{٢} س جتا٢س + \frac{١}{٤} جا٢س + ج$$

حل السؤال الرابع عشر: (١٤)

$$٩(س + ٣) قتا^٢ (س^٢ + ٦س - ٤) . دس (تعويض)$$

$$= ٩(س + ٣) قتا^٢ . \frac{دص}{(س + ٣)^٢} \left. \begin{array}{l} \text{نضع:} \\ \text{ص} = س^٢ + ٦س - ٤ \\ \frac{دص}{دس} = س^٢ + ٦س \\ \text{إذاً: } \frac{دص}{(س + ٣)^٢} = دس \end{array} \right\}$$

$$= \frac{١}{٢} ٩ قتا^٢ . دص$$

$$= \frac{١}{٢} (- ظتا^٣) + ج$$

$$= \frac{١}{٢} ظتا^٣ (س^٢ + ٦س - ٤) + ج$$

حل السؤال الخامس عشر: (١٥)

$$\leftarrow ٩ قتا^٢ (س^٢ + ٦س - ٤) . دس$$

$$= ٩(س + ٣) جا^٢ . \frac{دص}{(س + ٣)^٢} \left. \begin{array}{l} \text{نضع:} \\ \text{ص} = س^٢ + ٦س - ٤ \\ \frac{دص}{دس} = س^٢ + ٦س \\ \text{إذاً: } \frac{دص}{(س + ٣)^٢} = دس \end{array} \right\}$$

$$= \frac{١}{٢} ٩ جا^٢ . دص$$

$$= \frac{١}{٢} ٩ (١ - جتا^٢) . دص$$

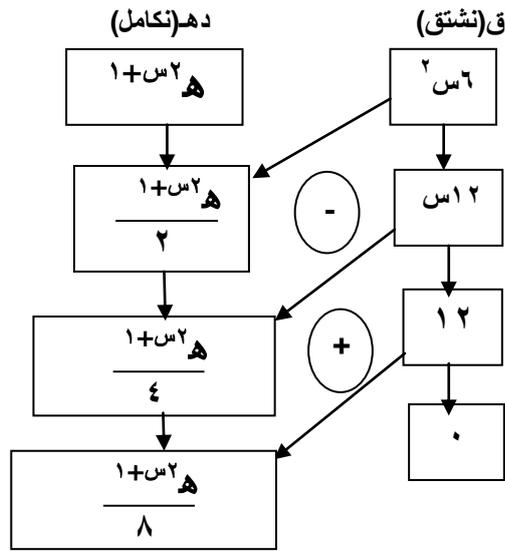
$$= \frac{١}{٤} (ص - \frac{جا^٢}{٢}) + ج$$

$$= \frac{١}{٤} (س^٢ + ٦س - ٤) - \frac{١}{٨} جا^٢ (س^٢ + ٦س - ٤) + ج$$

٢٠ حل السؤال العشرون :

← ٩ س^٢ هـ^٢ س^١+٢ دس (ضرب ، أجزاء مرتين)

*** يفضل حل السؤال باستخدام طريقة الجدول ***



$$٢ س٢ هـ - \frac{١+س٢}{٢} ١٢ س + \frac{١+س٢}{٤} ١٢ + \frac{١+س٢}{٨} ج$$

$$= ٣ س٢ هـ - ١+س٢ س٣ هـ + ٣ س٢ هـ + ١+س٢ ج$$

٢٢ الحل :

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \times \frac{١}{٢} س٢ هـ \right] دس$$

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس \quad \left. \begin{array}{l} \text{نضع : (القوة)} \\ \text{ص} = \frac{١}{٢} س \\ \text{دس} = \frac{١}{٢} س٢ \end{array} \right\}$$

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس$$

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس$$

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ \right] دس \quad (\text{أجزاء})$$

$$\text{ق} = \text{ص} \quad \leftarrow \quad \text{دق} = \text{دس}$$

$$\text{دهـ} = \text{هـ} \quad \leftarrow \quad \text{دهـ} = \text{هـ}$$

$$\left[\frac{١}{٢} (ص هـ - هـ ص) \right] دس = \left[\frac{١}{٢} (ص هـ - هـ ص) \right] دس$$

$$\frac{١}{٢} ص هـ - \frac{١}{٢} هـ ص + ج = \frac{١}{٢} ص هـ - \frac{١}{٢} هـ ص + ج$$

$$\frac{١}{٢} س٢ هـ - \frac{١}{٢} س٢ هـ + ج = \frac{١}{٢} س٢ هـ - \frac{١}{٢} س٢ هـ + ج$$

١٨ حل السؤال الثامن عشر :

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس \quad (\text{تعويض})$$

$$\text{نضع : ص} = \frac{١}{٢} س٣$$

$$\text{دس} = \frac{١}{٢} س٣$$

$$\text{إذاً : دس} = \frac{١}{٢} س٣$$

$$\frac{١}{٢} س٣ هـ \cdot \frac{١}{٢} س٣ = \frac{١}{٤} س٦ هـ$$

$$= ٢ هـ \cdot \frac{١}{٢} س٣ = \frac{١}{٢} س٣ هـ$$

$$= \frac{١}{٢} س٣ هـ + ج - \frac{١}{٢} س٣ هـ = \frac{١}{٢} س٣ هـ - \frac{١}{٢} س٣ هـ + ج$$

١٩ الحل :

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس \quad (\text{ضرب ، أجزاء})$$

$$\text{ق} = \text{س} \quad \leftarrow \quad \text{دق} = \frac{١}{٢} س٢$$

$$\text{دهـ} = \frac{١}{٢} س٢ دس \quad \leftarrow \quad \text{هـ} = \frac{١}{٢} س٢$$

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس$$

$$= ٣ س٢ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ + ج = ٣ س٢ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ + ج$$

$$= ٣ س٢ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ + ج = ٣ س٢ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ + ج$$

٢١ حل السؤال العشرون :

$$\left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس = \left[\frac{١}{٢} س٣ هـ - ٣ س٢ هـ + ٣ س٢ هـ \right] دس \quad (\text{تعويض})$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٢} س٣$$

$$\text{دس} = \frac{١}{٢} س٣$$

$$\text{دس} = \frac{١}{٢} س٣$$

$$\frac{١}{٣} س٣ هـ - \frac{١}{٣} س٣ هـ + ج = \frac{١}{٣} س٣ هـ - \frac{١}{٣} س٣ هـ + ج$$

$$= \frac{١}{٣} س٣ هـ - \frac{١}{٣} س٣ هـ + ج = \frac{١}{٣} س٣ هـ - \frac{١}{٣} س٣ هـ + ج$$

****حلول أسئلة الحصة الرابعة عشر***

(١) حل السؤال الأول :

$$\left\langle \frac{١ + ٢س + ٥}{١ + ٣س + ٥س} \right\rangle \text{ دس (كسر)}$$

***لاحظ عزيزي الطالب أن البسط مشتقة كاملة للمقام**

$$= \text{لوم} | ٢س + ٥س + ١ + ج$$

(٢) حل السؤال الثاني :

$$\left\langle \frac{١ + ٢س + ٣س + ٤س}{١ + ٣س + ٥س} \right\rangle \text{ دس (كسر)}$$

(هنا نخرج (٢) عاملاً مشتركاً من البسط حتى

يصبح مشتقة كاملة للمقام)

$$= \left\langle \frac{٢(٣ + ٢س)}{١ + ٣س + ٥س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= ٢ \left\langle \frac{٣ + ٢س}{١ + ٣س + ٥س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= ٢ \text{لوم} | ٢س + ٣س + ١ + ج$$

(٤) حل السؤال الرابع :

$$\left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس (حالة خاصة)}$$

(هنا لا يمكن جعل البسط مشتقة كاملة للمقام ، فنقوم

بالضرب بالمرافق)

$$= \left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \times \frac{١ - ٣س}{١ - ٣س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= \left\langle \frac{١ - ٦س + ٣س - ٩س}{١ - ٩س + ٣س - ٩س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= \left\langle \frac{١ - ٦س}{١ - ٩س} \right\rangle \text{ دس} - \left\langle \frac{٣س - ٩س}{١ - ٩س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= \left\langle \frac{١ - ٦س}{١ - ٩س} \right\rangle \text{ دس} - \left\langle \frac{٣س - ٩س}{١ - ٩س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= \left\langle \frac{١ - ٦س}{١ - ٩س} \right\rangle \text{ دس} - \left\langle \frac{٣س - ٩س}{١ - ٩س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= \frac{١ - ٦س}{١ - ٩س} - \frac{٣س - ٩س}{١ - ٩س} + ج$$

$$= \frac{١ - ٦س - ٣س + ٩س}{١ - ٩س} + ج$$

(٣) حل السؤال الثالث :

$$\left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس}$$

(هنا نخرج (٢) عاملاً مشتركاً من البسط حتى

يصبح مشتقة كاملة للمقام)

$$= ٢ \left\langle \frac{٣س + ١}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس} = ٢ \text{لوم} | ٣س + ١ + ج$$

***** حل آخر :** يمكن اعتبار هذا الشكل علاقات (ج٣س) في البسط بحيث نستبدل كما يلي :

$$\left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس} = \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \cdot \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \text{ دس}$$

$$= \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \text{ دس}$$

$$= ٢ \text{لوم} | ٣س + ١ + ج = ٢ \text{لوم} | ٣س + ١ + ج$$

(٥) حل السؤال الخامس :

$$\left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس (تبديل فوراً)}$$

$$= \left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس (هنا يحتاج البسط إلى (٣) حتى$$

يصبح مشتقة كاملة للمقام فنضرب التكامل بـ (٣)

$$= \left\langle \frac{٣ + ٩س}{٣ + ٩س} \right\rangle \text{ دس} = \left\langle \frac{٣ + ٩س}{٣ + ٩س} \right\rangle \text{ دس}$$

$$= \frac{٣ + ٩س}{٣ + ٩س} \text{ لوم} | ٣س + ١ + ج$$

***** حل آخر :** (علاقات)

$$= \left\langle \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \right\rangle \text{ دس} = \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \cdot \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \text{ دس}$$

$$= \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \text{ دس}$$

$$= \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \text{ لوم} | ٣س + ١ + ج$$

$$= \frac{١ + ٣س}{١ + ٣س} \text{ لوم} | ٣س + ١ + ج$$

$$\begin{aligned} \text{ضع ص} &= \text{ج}٣س \\ \frac{\text{دس}}{\text{دس}} &= \frac{\text{دس}}{\text{دس}} \\ \text{دس} &= \frac{\text{دس}}{\text{ج}٣س} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ضع ص} &= \text{ج}٣س \\ \frac{\text{دس}}{\text{دس}} &= \frac{\text{دس}}{\text{دس}} \\ \text{دس} &= \frac{\text{دس}}{\text{ج}٣س} \end{aligned}$$

٦) حل السؤال السادس :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣ + ٤س} \text{ (كسر)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣ + ٤س} \end{aligned} \right\rangle$$

****المقام تربيعي يحلل ... فوراً كسور جزئية****

$$\frac{٦}{(١ - س) + (٣ - س)} = \frac{٦}{(١ - س) + (٣ - س)}$$

$$٦ = (٣ - س) + (١ - س) + ٣$$

$$\therefore \begin{aligned} & ١ = س \quad \& \quad ٣ = س \\ & ٣ = ٣ \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \left(\frac{٣}{(١ - س)} + \frac{٣}{(٣ - س)} \right) \\ & \text{دس} \cdot \left(\frac{٣}{(١ - س)} + \frac{٣}{(٣ - س)} \right) \end{aligned} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} & ٣ = ٣ - ٣ + ٣ \\ & = \text{لوم} \left(\frac{٣}{١ - س} \right) + ٣ \end{aligned}$$

٧) حل السؤال السابع :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٤ + ٤س} \text{ (المقام مربع كامل)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٤ + ٤س} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{(٢ - س)^2} \text{ (فوراً يرفع أس سالب)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{(٢ - س)^2} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{(٢ - س)^2} = \frac{٦}{١ \times ١} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{(٢ - س)^2} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \frac{٦}{٢ - س} \\ & \frac{٦}{٢ - س} \end{aligned} \right\rangle$$

٨) حل السؤال الثامن :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٢س} \text{ (علاقات)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٢س} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٢س} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٢س} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٢س} \end{aligned}$$

$$\frac{٦}{٢س} \cdot \text{دس}$$

$$\frac{٦}{٢س} \cdot \text{دس} = \frac{٦}{٢س} \cdot \text{دس} + \frac{٦}{٢س} \cdot \text{دس}$$

٩) حل السؤال التاسع :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \text{ (نصنع علاقات)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} & \text{دس} = \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{١٠} \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{١٠} \end{aligned} \right\rangle$$

١٠) حل السؤال العاشر :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \text{ (نصنع علاقات)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

١١) حل السؤال الحادي عشر :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \text{ (علاقات)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

١٢) حل السؤال الثاني عشر :

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \text{ (نصنع علاقات)} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} = \frac{٦}{٣} \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{aligned} & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \\ & \text{دس} \cdot \frac{٦}{٣} \end{aligned} \right\rangle$$

١٧ حل السؤال السابع عشر :

$$\leftarrow [\text{ه}^2 \text{ جتا} (\text{ه}^{\text{س}}) \cdot \text{دس}] \text{ (نستبدل الزاوية)}$$

$$[\text{ص}^2 \text{ جتا} \text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{ه}^{\text{س}}}] =$$

$$[\text{ص}^2 \text{ جتا} \text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{ه}^{\text{س}}}] =$$

$$[\text{ص} \text{ جتا} \text{ص} \cdot \text{دص}] \dots \text{ (أجزاء)}$$

$$\text{ق} = \text{ص} \quad \leftarrow \quad \text{دق} = \text{دص}$$

$$\text{ده} = \text{جتا} \text{ص} \cdot \text{دص} \quad \leftarrow \quad \text{ه} = \text{جتا} \text{ص}$$

$$= \text{ص} \text{ جتا} \text{ص} - [\text{جتا} \text{ص} \cdot \text{دص}]$$

$$= \text{ص} \text{ جتا} \text{ص} + \text{جتا} \text{ص} + \text{ج}$$

$$= \text{ه}^{\text{س}} \text{ جا} (\text{ه}^{\text{س}}) + \text{جتا} (\text{ه}^{\text{س}}) + \text{ج}$$

١٨ حل السؤال الثامن عشر :

$$\leftarrow [١ - \text{جا}^{\text{ظاس}} \text{دس}] = [\text{جتا}^{\text{ظاس}} \text{دس}]$$

$$[\text{قا}^{\text{ظاس}} \text{ه}^{\text{ظاس}} \text{دس}] \text{ (نستبدل القوة فوراً)}$$

$$[\text{قا}^{\text{ظاس}} \text{ه}^{\text{ظاس}} \text{ص}] = [\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{\text{ظاس}}}]$$

$$[\text{ه}^{\text{ظاس}} \text{ص}] = \text{دص}$$

$$= \text{ه}^{\text{ظاس}} \text{ص} + \text{ج} = \text{ه}^{\text{ظاس}} + \text{ج}$$

١٩ حل السؤال التاسع عشر :

$$\leftarrow [\text{ه}^{\sqrt{\text{س}+١}} \text{دس}] \text{ (نستبدل القوة فوراً)}$$

$$[\text{ص}^2 \text{ ه}^{\text{ص}} \text{دص}] \text{ (أجزاء)}$$

$$\text{ق} = \text{ص}^2 \quad \leftarrow \quad \text{دق} = ٢ \cdot \text{دص}$$

$$\text{ده} = \text{ه}^{\text{ص}} \text{دص} \quad \leftarrow \quad \text{ه} = \text{ه}^{\text{ص}}$$

$$= \text{ص}^2 \text{ ه}^{\text{ص}} - [\text{ص}^2 \text{ ه}^{\text{ص}} \text{دص}]$$

$$= ٢ \text{ص}^2 \text{ ه}^{\text{ص}} - ٢ \text{ص}^2 \text{ ه}^{\text{ص}} + \text{ج}$$

$$= ٢ \sqrt{\text{س}+١} \text{ه}^{\text{ص}} - ٢ \sqrt{\text{س}+١} \text{ه}^{\text{ص}} + \text{ج}$$

٢٠ حل السؤال العشرون :

$$\leftarrow [\frac{\text{دس}}{\text{ص}^2}] = \frac{\text{دس}}{\text{ص}^2}$$

** انتباهاه : يمكن أن نبذل حدود التكامل

$$\text{عندما س} = ١٦ \quad \leftarrow \quad \text{ص} = ٤$$

$$\text{عندما س} = ٩ \quad \leftarrow \quad \text{ص} = ٣$$

$$\frac{\text{ص}^2}{(١ - \text{ص})(٢ - \text{ص})} = \frac{\text{ب}}{(١ - \text{ص})} + \frac{\text{م}}{(٢ - \text{ص})}$$

$$\text{ص}^2 = \text{ب}(٢ - \text{ص}) + \text{م}(١ - \text{ص})$$

$$\therefore \text{إما ص} = ١ \quad \& \quad \text{ص} = ٢$$

$$\text{ب} = ٢ \quad \text{م} = ٤$$

$$\leftarrow [\frac{\text{ب}}{(١ - \text{ص})} + \frac{\text{م}}{(٢ - \text{ص})}] \text{دس}$$

$$= [\frac{٢}{(١ - \text{ص})} + \frac{٤}{(٢ - \text{ص})}] \text{دس}$$

$$= \int_3^4 [\frac{٢}{١ - \text{ص}} - \frac{٢}{٢ - \text{ص}}] \text{دس}$$

$$= (٤ \text{ لو} ٢ - ٢ \text{ لو} ٢) - (٤ \text{ لو} ١ - ٢ \text{ لو} ١)$$

$$= (٤ \text{ لو} ٢ - ٢ \text{ لو} ٢) - (٤ \text{ لو} ٢ - ٢ \text{ لو} ٢)$$

$$= ٦ \text{ لو} ٢ - ٢ \text{ لو} ٢ = ٣ \text{ لو} ٢ = (٢ \text{ لو} ٢) = (٢ \text{ لو} ٢) = ٦ \text{ لو} ٢$$

حلول أسئلة الحصة الخامسة عشر

(١) حل السؤال الأول :

$$\frac{ص}{دس} = \frac{ص^2}{دس} \quad (\text{يجب أولاً فصل المتغيرات})$$

$$\frac{ص}{دس} = \frac{ص^2}{دس} \quad (\text{نكامل الطرفين})$$

$$\frac{1}{ص} = \frac{ص^2}{دس} \cdot دس$$

$$لوم|ص| = \frac{ص^2}{2} = ج + س^2$$

$$|ص| = \frac{ص^2}{2} = ج + س^2 \quad \text{ثابت}$$

$$\text{إذا} \leftarrow ص = \frac{ص^2}{2}$$

(٢) حل السؤال الثاني :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{دس} \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{ص}{دس}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{دس} \quad \text{جصاص} \quad \frac{دص}{دس} = \frac{ص}{دس}$$

$$جصاص = ج + س^2$$

(٣) حل السؤال الثالث :

$$ص-هـ \quad جصاص = \frac{دص}{دس} \quad \text{جصاص}$$

$$ص-هـ \quad جصاص = دس = جصاص$$

$$\frac{دص}{ص-هـ} = \frac{جصاص}{جصاص} \quad (\text{نكامل الطرفين})$$

$$\frac{دص}{ص-هـ} = دس = جصاص$$

$$جصاص = ج + هـ$$

$$ص = لوم|قصاص + ج|$$

(٤) حل السؤال الرابع :

$$\frac{ص^2 - 16}{دس} = \frac{ص^2 - ص - 8}{دص}$$

$$(ص^2 - 16) دص = (ص^2 - ص - 8) دس$$

$$(ص^2 - 16) دص = (ص^2 - ص - 8) دس$$

$$\frac{ص^2 - 16}{ص - 4} = \frac{ص^2 - ص - 8}{دص}$$

$$\frac{ص^2 - 16}{ص - 4} = \frac{ص^2 - ص - 8}{دص}$$

$$\frac{ص^2 - 16}{ص - 4} = \frac{ص^2 - ص - 8}{دص}$$

(٥) حل السؤال الخامس :

$$\frac{دص}{ص} = \frac{دص}{دس} = \text{ميل المماس}$$

$$\sqrt{ص} = \sqrt{دص} = دس \quad (\text{نكامل الطرفين})$$

$$\frac{1}{ص} = \frac{1}{دص} = دس$$

$$\frac{ص}{2} + \frac{س}{2} = \frac{ص}{2}$$

** لإيجاد ج ***

النقطة (١، ٤) تحقق معادلته

$$\frac{ص}{2} + \frac{س}{2} = \frac{ص}{2}$$

$$\frac{ص}{2} + \frac{س}{2} = \frac{ص}{2}$$

$$\frac{14}{3} = ج$$

إذاً :

$$\frac{14}{3} + \frac{ص}{2} = \frac{ص}{2}$$

$$٧ + \frac{ص}{2} = \frac{ص}{2}$$

٦) حل السؤال السادس :

$$\frac{1-}{دس} = \frac{دص}{دس} = \text{ميل العمودي}$$

$$\frac{1-}{لوص} = \frac{دص}{دس} \leftarrow$$

$$\text{لوص} \cdot دص = 1- \cdot دس \quad (\text{أجزاء})$$

$$\text{ق} = \text{لوص} \leftarrow \text{دق} = \frac{1}{ص} \cdot دص$$

$$\text{ده} = دص \leftarrow \text{ه} = ص$$

$$\text{ص} = \text{لوص} - \left[\frac{1}{ص} \times \text{ص} \cdot دص = 1- \cdot دس \right]$$

$$\text{ص} = \text{لوص} - \text{ص} = - \text{ص} + \text{ج}$$

٧) حل السؤال السابع :

$$\text{ت} = \frac{دع}{دن} = ٦ \leftarrow \text{دع} = ٦ \cdot دن$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{** لإيجاد ج،} \\ \text{ع} = ٢ \text{ عندما ن} = ٠ \\ \text{(نعوضها)} \\ \text{٢} = ٠ + \text{ج} \\ \text{إذاً: ج} = ٢ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{دع} = ٦ \cdot دن \\ \text{ع} = ٦ + \text{ج} \\ \text{إذاً: } \frac{دع}{دن} = ٦ + \frac{\text{ج}}{دن} \end{array}$$

$$\text{دف} = (٦ + \frac{\text{ج}}{دن}) \cdot دن$$

$$\text{ف} = ٦ + \frac{\text{ج}}{٢} + ٢ + \text{ج}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{** لإيجاد ج،} \\ \text{ف} = ٢١ \text{ عندما ن} = ٢ \\ \text{٢١} = ٤ + ٨ + \text{ج} \\ \text{إذاً: ج} = ٥ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ف} = ٥ + ٢ + ٢ + ٣ \\ \text{إذاً:} \end{array}$$

$$\text{ف} (٥) = ٥ + ١٠ + ٧٥ = ٩٠ \text{ متر}$$

٨) حل السؤال الثامن :

$$\text{ت} = \frac{دع}{دن} = ٤ \leftarrow \text{دع} = ٤ \cdot دن$$

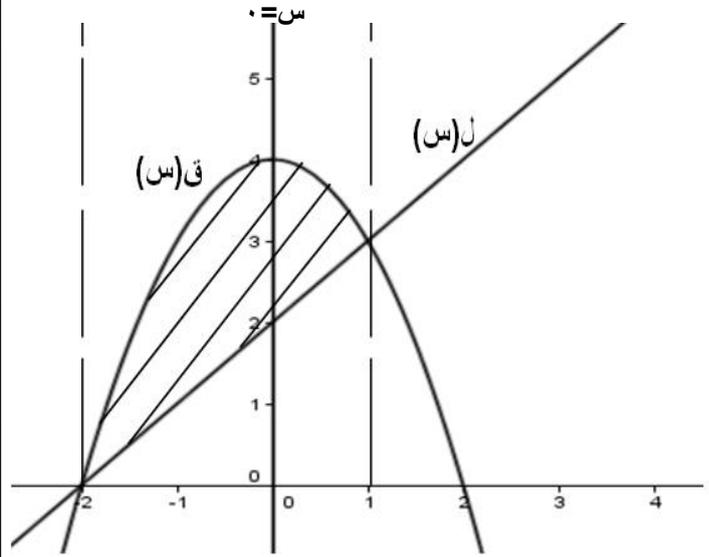
$$\text{دع} = ٤ \cdot دن \leftarrow \frac{١}{ع} \cdot دع = ٤ \cdot دن$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{** لإيجاد ج،} \\ \text{ع} = ٢ \text{ عندما ن} = ٢ \\ \text{(نعوضها)} \\ \text{لوص} = ٤ + \text{ج} \\ \text{لوص} = ٨ + \text{ج} \\ \text{إذاً: ج} = ٨ + ١ = ٩ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{لوص} = ٤ + \text{ج} \\ \text{لوص} = ٩ + \text{ج} \\ \therefore \text{ع} = ٩ + ٩ \\ \text{إذاً:} \end{array}$$

$$\text{ع} (٣) = ٩ + ١٢ - ٩ = ٣ \cdot \frac{١}{ه} = \frac{١}{٣} \text{ م/ث}$$

٩) حل السؤال التاسع :
أولاً نساوي الاقترانيين بعضهما البعض

$$\begin{aligned} ٠ &= ٢ - س + س^٢ \iff س + ٢ = س^٢ \\ ٠ &= (س - ١)(س + ٢) \iff \\ \iff س &= ١, ٢- \quad (\text{تسمى أعمدة}) \end{aligned}$$



إذاً : $م = \int_{-٢}^٢ (٢ - س + س^٢) - (س + ٢) دس$

$$م = \int_{-٢}^٢ (٢ - س - س^٢) دس$$

$$م = \int_{-٢}^٢ \left[٢س - \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \right] دس$$

$$= \left(٢ - \frac{٨}{٣} - ٤ \right) - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} - ٢ \right) =$$

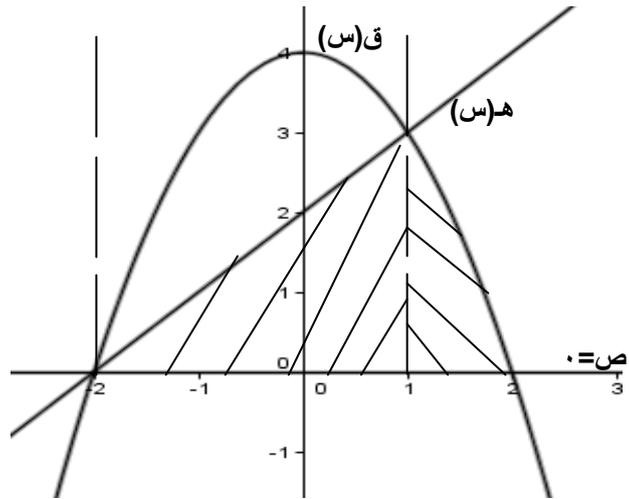
$$= \frac{٧}{٦} - \frac{١٠}{٣} = \frac{٢٧}{٦} - \frac{٢٠}{٦} = \frac{٧}{٦}$$

١٠) حل السؤال العاشر :
أولاً نساوي كل اقترانين معاً

$$\begin{aligned} (١) \quad ٠ &= ٢ - س + س^٢ \iff س + ٢ = س^٢ \\ \iff (س - ١)(س + ٢) &= ٠ \\ \iff س &= ١, ٢- \quad (\text{تسمى أعمدة}) \end{aligned}$$

$$(٢) \quad ٠ = ٢ - س + س^٢ \iff س = ٢, ٢- \quad (\text{أعمدة})$$

$$(٣) \quad ٠ = س + ٢ \iff س = ٢- \quad (\text{عمود})$$



إذاً : $م = \int_{-٢}^٢ (٢ - س + س^٢) - (س + ٢) دس$

$$= \int_{-٢}^٢ \left[٢س - \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٣}{٣} \right] دس$$

$$= \left(٢ - \frac{٨}{٣} - ٤ \right) - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} - ٢ \right) =$$

$$= \frac{٧}{٦} - \frac{١٠}{٣} = \frac{٢٧}{٦} - \frac{٢٠}{٦} = \frac{٧}{٦}$$

$$= \frac{٧}{٦} - \frac{١٠}{٣} = \frac{٢٧}{٦} - \frac{٢٠}{٦} = \frac{٧}{٦}$$

إذاً : $م = م + م = \frac{٩}{٢} + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦}$

١٢) حل السؤال الثاني عشر :

أولاً نساوي كل اقترانين معاً

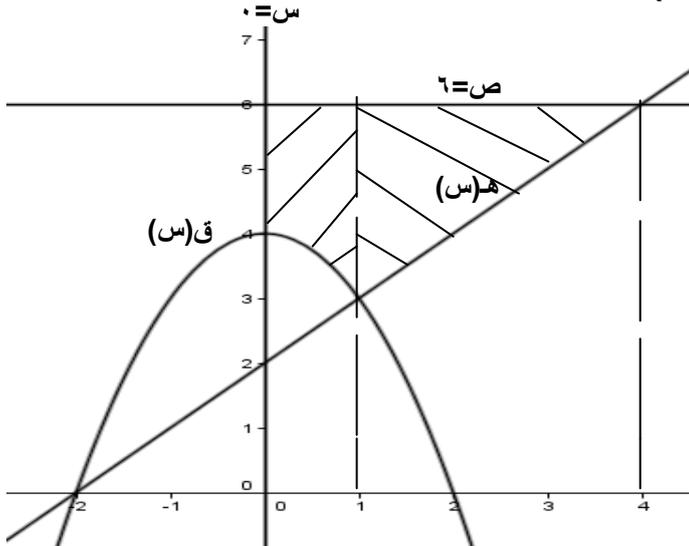
$$(١) \quad ٠ = ٢ - س + س^٢ \iff س + ٢ = س^٢ \iff س^٢ - س - ٢ = ٠$$

$$\iff (س + ٢)(س - ١) = ٠$$

$$\iff س = ١, ٢ \quad (\text{تسمى أعمدة})$$

$$(٢) \quad ٠ = ٤ - س + س^٢ \iff س + ٤ = س^٢ \iff س^٢ - س - ٤ = ٠ \quad (\text{مستحيل})$$

$$(٣) \quad ٠ = ٤ - س + س^٢ \iff س + ٤ = س^٢ \iff س^٢ - س - ٤ = ٠ \quad (\text{عمود } ٠ = س)$$



$$\text{إذاً : } م_١ = \int_{-١}^٢ (٤ - (س^٢ - س - ٢)) \cdot دس$$

$$= \int_{-١}^٢ (٦ - س^٢ + س) \cdot دس = \left[٦س - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} \right]_{-١}^٢$$

$$م_٢ = \int_{-١}^٢ (٤ - (س^٢ - س - ٤)) \cdot دس$$

$$= \int_{-١}^٢ (٨ - س^٢ + س) \cdot دس = \left[٨س - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} \right]_{-١}^٢$$

$$\text{إذاً : } م = م_١ + م_٢ = \frac{٧}{٣} + \frac{٩}{٢} = \frac{٤١}{٦}$$

١١) حل السؤال الحادي عشر :

أولاً نساوي كل اقترانين معاً

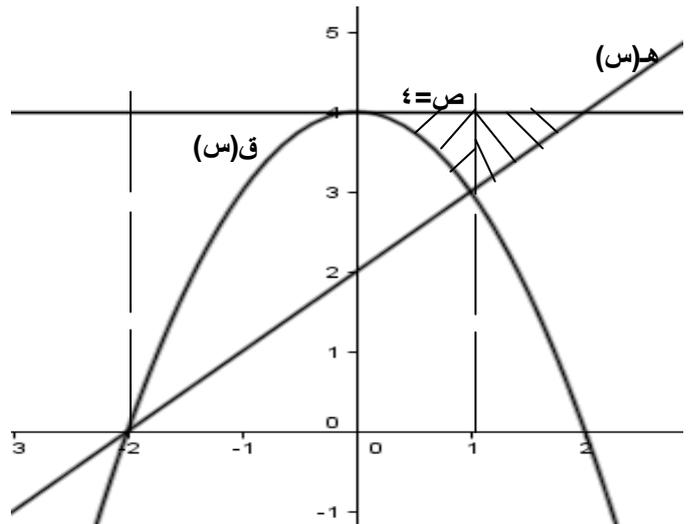
$$(١) \quad ٠ = ٢ - س + س^٢ \iff س + ٢ = س^٢ \iff س^٢ - س - ٢ = ٠$$

$$\iff (س + ٢)(س - ١) = ٠$$

$$\iff س = ١, ٢ \quad (\text{تسمى أعمدة})$$

$$(٢) \quad ٠ = ٤ - س + س^٢ \iff س + ٤ = س^٢ \iff س^٢ - س - ٤ = ٠ \quad (\text{عمود } ٠ = س)$$

$$(٣) \quad ٠ = ٤ - س + س^٢ \iff س + ٤ = س^٢ \iff س^٢ - س - ٤ = ٠ \quad (\text{عمود } ٢ = س)$$



$$\text{إذاً : } م_١ = \int_{-١}^٢ (٤ - (س^٢ - س - ٤)) \cdot دس$$

$$= \int_{-١}^٢ (٨ - س^٢ + س) \cdot دس = \left[٨س - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} \right]_{-١}^٢$$

$$م_٢ = \int_{-١}^٢ (٤ - (س^٢ - س - ٢)) \cdot دس$$

$$= \int_{-١}^٢ (٦ - س^٢ + س) \cdot دس = \left[٦س - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} \right]_{-١}^٢$$

$$\text{إذاً : } م = م_١ + م_٢ = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٦}$$

حل السؤال الرابع عشر : (١٤)

أولاً نساوي كل اقترانين معاً

$$ق(س) = (س + ١) = \frac{٤}{٣} = ص ، ص = ٢ = ص ، ص = ٢ = ص ، ص = ٠$$

$$(١) \quad \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣} \leftarrow ٢س^٢ + ٢س = ١٢$$

$$\leftarrow ٢س^٢ + ٢س - ٦ = ٠$$

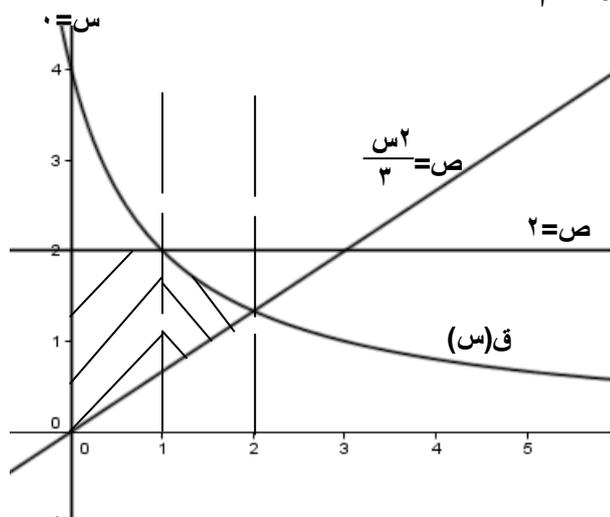
$$\leftarrow ٠ = (٢ - س)(٣ + س)$$

$$\leftarrow ٢ ، ٣ = س = (تسمى أعمدة)$$

$$(٢) \quad ٢ = \frac{٤}{١ + س} \leftarrow ٢ = ٢ + س^٢ = ٤$$

$$\leftarrow ١ = س = (عمود)$$

$$(٣) \quad \frac{٢س^٢}{٣} = ٢ \leftarrow ٢س^٢ = ٦ \leftarrow ٣ = س = (عمود)$$



$$إذاً : م = \int_1^2 \left(\frac{٢س^٢}{٣} - (٢) \right) دس$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{٢س^٢}{٣} - ٢ \right) دس = \frac{١}{٣} - ٢ = \frac{٥}{٣}$$

$$م = \int_1^2 \left(\frac{٤}{١ + س} - (٢ + س^٢) \right) دس$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{٤}{١ + س} - ١ - س^٢ \right) دس = \frac{٥}{٣} - ٢ - \frac{١}{٣} = ١ - ٢ = -١$$

$$إذاً : م = م + م = ٢م$$

$$= \frac{٥}{٣} + \left(-١ - \frac{١}{٣} \right) = ١ - ٢ = -١$$

حل السؤال الثالث عشر : (١٣)

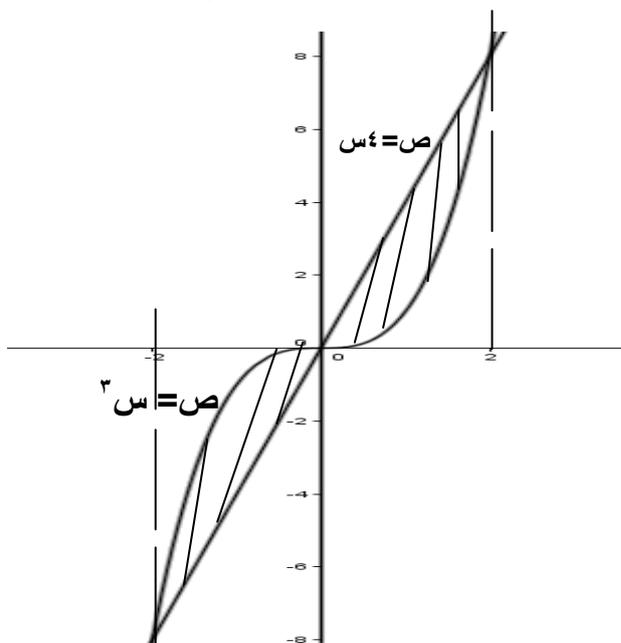
أولاً نساوي الاقترانين بعضهما البعض

$$ص - س^٣ = ٠ ، ص = \frac{٤}{س}$$

$$(١) \quad س^٣ = \frac{٤}{س} \leftarrow س^٣ - \frac{٤}{س} = ٠$$

$$\leftarrow س(س^٤ - ٤) = ٠$$

$$\leftarrow س = ٠ ، ٢ = س = (تسمى أعمدة)$$



$$إذاً : م = \int_2^{-2} (س^٣ - \frac{٤}{س}) دس$$

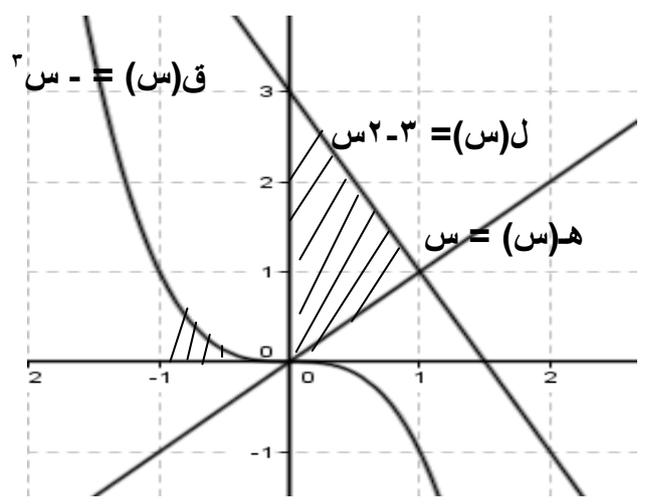
$$= \int_2^{-2} \left(س^٣ - \frac{٤}{س} \right) دس = \left[\frac{س^٤}{٤} - ٤ \ln|س| \right]_2^{-2}$$

$$م = \int_2^{-2} (س^٣ - \frac{٤}{س}) دس$$

$$= \left[\frac{س^٤}{٤} - ٤ \ln|س| \right]_2^{-2} = ٨ - ٤ \ln 2 - ٨ + ٤ \ln 2 = ٠$$

$$إذاً : م = م + م = ٢م = ٠$$

١٥) حل السؤال الخامس عشر :



**** المنطقة الأولى مساحة مباشرة بحيث:**

$$م١ = \int_{٠}^{١} (-س^٢) - (٠) دس$$

$$= \int_{٠}^{١} -س^٢ دس = \left[-\frac{س^٣}{٣} \right]_{٠}^{١} = -\frac{١}{٣} - (٠) = -\frac{١}{٣}$$

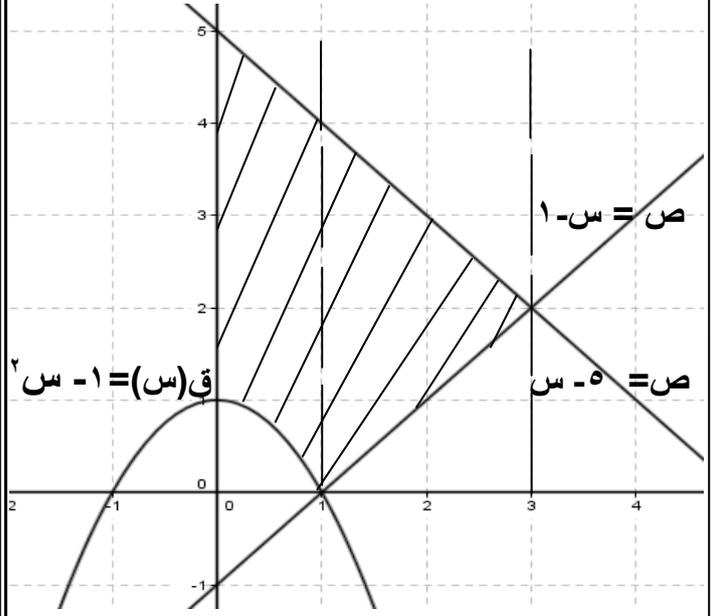
**** المنطقة الثانية مساحة مباشرة بحيث:**

$$م٢ = \int_{٠}^{٣} (س^٢ - ٣) - (س) دس = \int_{٠}^{٣} (س^٢ - ٣ - س) دس$$

$$= \left[\frac{س^٣}{٣} - ٣س - \frac{س^٢}{٢} \right]_{٠}^{٣} = \left(\frac{٢٧}{٣} - ٩ - \frac{٩}{٢} \right) - (٠ - ٠ - ٠) = ٩ - ٩ - \frac{٩}{٢} = -\frac{٩}{٢}$$

$$إذاً : م = م١ + م٢ = -\frac{١}{٣} - \frac{٩}{٢} = -\frac{١٠}{٦} - \frac{٢٧}{٦} = -\frac{٣٧}{٦}$$

١٦) حل السؤال السادس عشر :



**** بعد إقامة الأعمدة عند نقاط التقاطع كما في الشكل أعلاه ، نلاحظ أنه تم تجزئة المنطقة إلى جزئين**

*** المنطقة الأولى:**

$$م١ = \int_{٠}^{١} (-س^٢ + ١) - (س - ١) دس$$

$$= \int_{٠}^{١} (-س^٢ + ١ - س + ١) دس = \int_{٠}^{١} (-س^٢ - س + ٢) دس$$

$$= \left[-\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٢س \right]_{٠}^{١} = \left(-\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢ \right) - (٠ - ٠ + ٠) = \frac{-٢}{٦} - \frac{٣}{٦} + \frac{٢٤}{٦} = \frac{١٩}{٦}$$

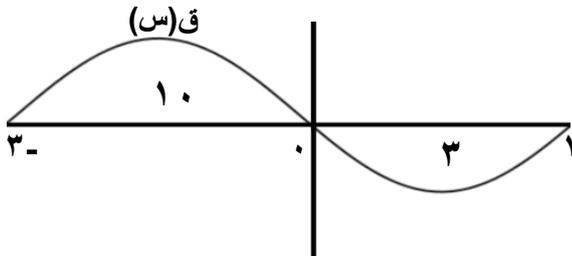
**** المنطقة الثانية:**

$$م٢ = \int_{١}^{٥} (-س^٢ + ١) - (٥ - س) دس$$

$$= \int_{١}^{٥} (-س^٢ + ١ - ٥ + س) دس = \int_{١}^{٥} (-س^٢ + س - ٤) دس = \left[-\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} - ٤س \right]_{١}^{٥} = \left(-\frac{١٢٥}{٣} + \frac{٢٥}{٢} - ٢٠ \right) - \left(-\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٤ \right) = -\frac{١٢٥}{٣} + \frac{٢٥}{٢} - ٢٠ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤ = -\frac{١٢٤}{٣} + \frac{٢٤}{٢} - ١٦ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤ = -\frac{١٢٤}{٣} + ١٢ - ١٦ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤ = -\frac{١٢٤}{٣} - ٤ + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤ = -\frac{١٢٣}{٣} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١٢٢}{٣} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{١٢١}{٣} - \frac{١}{٢} = -\frac{٢٤٢}{٦} - \frac{١}{٢} = -\frac{٢٤٣}{٦}$$

$$إذاً : م = م١ + م٢ = \frac{١٩}{٦} - \frac{٢٤٣}{٦} = -\frac{٢٢٤}{٦} = -٣٦$$

١٩) حل السؤال التاسع عشر :



$$10 = f(-1) = f(0) - f(0) = 10 - 0 = 10$$

$$-3 = f(1) = f(0) - f(0) = 0 - 3 = -3$$

لكن المطلوب هو : $f(-1)$ (دس - تعويض)

نضع : $1 - x = v \Rightarrow -2 - x = dv$

إذاً : $dv = \frac{dx}{-2}$ (مع تبديل الحدود من قيم x إلى v)

عندما $x = -2 \Rightarrow v = 0$ ، عندما $x = 0 \Rightarrow v = 1$

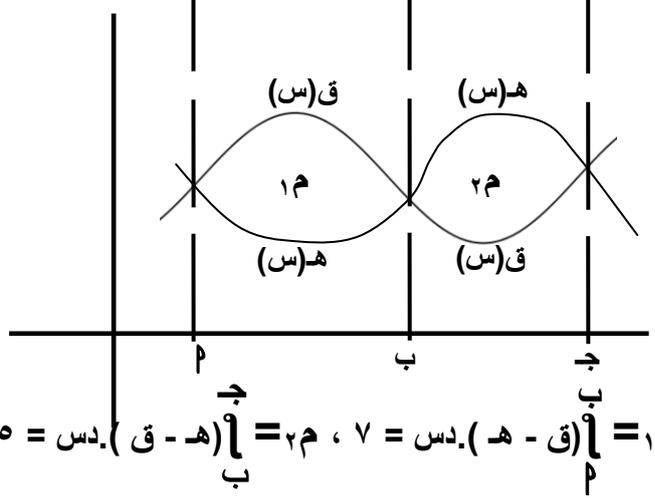
$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v}} \cdot \frac{dv}{-2} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v}} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v}} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v}} dv + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v}} dv \right)$$

$$= -\frac{1}{2} (1 + 3) = -2$$

١٧) حل السؤال السابع عشر :



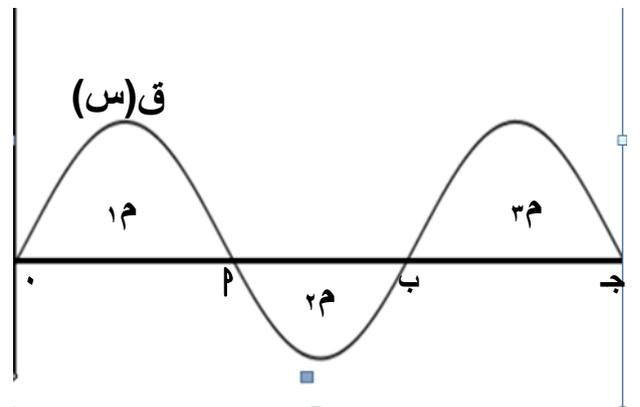
$$5 = f(1) = f(2) - f(2) = 5 - 0 = 5$$

** ولكن $f(2) = 0$

$$f(2) = f(3) - f(3) = 0 - 5 = -5$$

$$2 = (-5) + 7 = -2$$

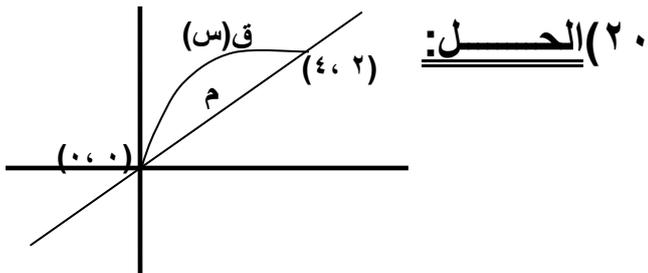
١٨) حل السؤال الثامن عشر :



$$f(2) = 0$$

$$f(3) = f(3) - f(3) = 0 - 8 = -8$$

$$8 = 8 + (-8) + 7 = 7$$



نجد معادلة الخط المستقيم بحيث : $v = 0 \Rightarrow x = 0$

ولكن $m = \frac{6-0}{2-0} = 3 \Rightarrow v = 2 \Rightarrow x = 4$

$$\therefore m = 3 = f(2) - f(0) = 6 - 0 = 6$$

$$\Rightarrow f(2) = f(0) + m \cdot 2 = 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

$$\Rightarrow f(4) = f(2) + m \cdot 2 = 6 + 3 \cdot 2 = 12$$

$$\Rightarrow f(4) = 12 - 4 = 8$$

$$\Rightarrow f(4) = 10$$

