



الأستاذ  
عبدالقادر الحسنت  
٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

# قاعدة لوبيتال / تو جيهي علمي



## 2020

(بيرنولي)

ورقة عمل رقم (١)

*Harmit*



لوبيتال ( ١٦٦١ - ١٧٠٤ ) صاحب القانون والمسمى باسمه لم يكن في الأساس رياضياً بل كان ضابطاً في الجيش الفرنسي ووصل إلى رتبة عالية. ثم اعتزل الحياة العسكرية بعد أن كون ثروة لا بأس بها. ولكن لوبيتال كان عاشقاً للرياضيات فاستأجر مدرساً خصوصياً ليعلمه الرياضيات.

وكان هذا المعلم هو السويسري يوهان بيرنولي (١٦٦٧ - ١٧٤٨)

وعقد لوبيتال مع برنولي اتفاقاً (غير شريف) . حيث اتفقا أن يشتري لوبيتال (الغني) جميع أعمال واكتشافات برنولي (الفقير) مقابل ٥٠٠ فرنك، وكان من ضمنها قانون لوبيتال !

وبعد وفاة لوبيتال تقدم برنولي وطالب بأحقية هذا القانون باسمه ولكن تم رفض طلبه لعدم قدرته على إثبات ذلك، ثم تبين فيما بعد وجود مراسلات بين لوبيتال و برنولي وظهر فيها بوضوح أن هذا القانون هو من اكتشاف برنولي.

**المهم : القانون باختصار :** في النهايات الكسرية ، إذا كان ناتج التعويض (  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  ) فيمكن إيجاد النهاية باستخدام

من خلال قاعدة لوبيتال (أو برنولي) عن طريق اشتقاق كل من البسط والمقام (كل على حده) ثم التعويض وهي مفيدة جداً في الأسئلة الموضوعية إذ المطلوب هو الجواب فقط دون خطوات حل وتصلح للنهايات المثلثية أيضاً ، ولكن عند وجود قيمة مطلقة أو أكبر عدد صحيح ، نتخلص منهما أولاً ثم نجد النهايات الناتجة وإذا استمر الوضع (  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  ) بعد الاشتقاق والتعويض ، نطبق النظرية مرة ثانية وثالثة حتى نتخلص من الوضع (  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  )

**تحذير :** لا نستخدم هذه الطريقة إلا عندما يكون ناتج التعويض  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  ، ولم تكن الطريقة معتمدة سابقاً في التصحيح

$$\text{مثال (١) نهايات} \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠}{\text{س}^٢ - ٥\text{س}} \leftarrow \text{الجواب} = \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}} = \frac{\text{س}^٢ - ١ - ١٠}{\text{س}^٢ - ٥ - ١٠} = \frac{٩}{٥}$$

$$\text{مثال (٢) نهايات} \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{٣٦ - (٢ - \text{س}^٤)^٢}{\text{س}^٢ - ٥ + ٢\text{س}^٢} \leftarrow \text{الجواب} = \frac{٤٨ - ٤٨}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٤٨ - ٤٨}{(٩\text{س}^٢) / ٢} = \frac{٤ \times (٢ - \text{س}^٤)^٢ - ٢}{\text{س} / (٥ + ٢\text{س}^٢)}$$

$$\text{مثال (٣) نهايات} \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س}^٣}{\text{س}^٢ - ٤\text{س}^٤} \leftarrow \text{الجواب} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{س}^٢ - ١٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤\text{س}^٤}$$

$$\text{نطبق القاعدة مرة أخرى :} \frac{١٢ - ١٢\text{س}}{٦ - ٦\text{س}^٢} = \frac{١٢ - ١٢\text{س}}{٦ - ٦\text{س}^٢} = ٢$$

$$\text{مثال (٤) نهايات} \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{جتاس}}{\pi - \text{س}^٢} \leftarrow \text{الجواب} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{جتاس}}{\pi - \text{س}^٢} = \frac{\pi \frac{١}{٢}}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{مثال (٥) نهايات} \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{١ - \text{جتاس}^٢}{\text{جتاس} - \text{جتاس}} \leftarrow \text{الجواب} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{١ - ٢\text{جتاس}^٢}{٢ - ٢\text{جتاس}} = \frac{١ - ٢\text{جتاس}^٢}{٢ - ٢\text{جتاس}}$$

الأستاذ  
عبدالقادر الحسنت  
٠٧٨٥٣١٨٨٧٧



مثال (٦) نها  $\frac{12 - \sqrt{2} \text{ جتا س}}{\text{س}}$  =  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$   $\leftarrow$  نها  $\frac{12 - \sqrt{2} \text{ جتا س}}{\text{س}}$

نها  $\frac{12 - \sqrt{2} \text{ جتا س}}{\text{س}}$  =  $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$  =  $\frac{\text{جتا س}}{\sqrt{2}}$  =  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

نها  $\frac{12 - \sqrt{2} \text{ جتا س}}{\text{س}}$  =  $\frac{\text{جاس} - \text{جتا س}}{\sqrt{2}}$  =  $\frac{1 - \text{جتا س}}{\sqrt{2}}$

$\leftarrow$  إذا النهاية غير موجودة

الأستاذ عبدالقادر الحسنت  
رياضيات

مثال (٧) نها  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{س}^2 - 2 \text{ س}}{1 - 3 \text{ س}}$  إعادة تعريف الأكبر عدد صحيح : نستبدل س بالقيمة (٩, ٠) لأنها من اليسار

$1 = [1, 1] = [0, 9 - 2]$

نها  $\frac{\text{س}^2 - 2 \text{ س}}{1 - 3 \text{ س}}$   $\leftarrow$  الجواب =  $\frac{\text{س}^2}{3}$  =  $\frac{2}{3}$

مثال (٨) إذا كانت نها  $\frac{\text{م س}^3 + \text{ب س}^2 - 3}{1 - \text{س}}$  = ٥ فجد قيمة كلا من م ، ب

التعويض في المقام يساوي صفرًا  $\leftarrow$  التعويض في البسط يساوي صفرًا أيضاً  $\leftarrow$  م + ب - ٣ = ٥  $\leftarrow$  م + ب = ٨

لوبيتال :  $5 = \frac{\text{م}^2 + \text{ب}^2}{1}$   $\leftarrow$  م = ٣ ، ب = ١ ، م = ١ ، ب = ٤

مثال (٩) إذا كان نها (٣) = ٨ ، نها (٣) = ٦ فجد نها  $\frac{\text{ص} - (\text{س})}{\text{س}^2 - 6}$

الحل :  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \leftarrow$  لوبيتال :  $\frac{\text{نها} (3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

مثال (١٠) إذا كان نها (٦) = ١٠ ، نها (٦) = ١٢ ، فجد نها  $\frac{\text{نها} (\text{س} + \text{س}^2) - 10}{\text{س} - 2}$

الحل :  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \leftarrow$  لوبيتال :  $\frac{\text{نها} (\text{س} + \text{س}^2) - (1 + \text{س}^2) - \text{صفر}}{1 - \text{صفر}} = \frac{\text{نها} (6) - 5 \times 12 = 60}{1}$  ( بدون طرح وإضافة أو استبدال )

مثال (١١) إذا كان نها (س) متصلًا عند س = ٤ وكانت نها  $\frac{\text{س}^2 - \text{نها} (\text{س})}{\text{س}^3 - 12}$  = ١٠ ، فجد نها (٤)

الحل :  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \leftarrow$  لوبيتال :  $\frac{\text{نها} (4) - 8}{3} = \frac{22 - 8}{3} = 10$   $\leftarrow$  نها (٤) = ٨ = ١٠ × ٣ - ٢٢

... وهكذا نكون قد قضينا على ما كان يُسمى في يوم من الأيام (رياضيات توجيهي علمي) فعضم الله أجركم ، ولا عزاء بسبب الظروف الراهنة

الأستاذ عبدالقادر الحسنت  
رياضيات



$$(12) \text{ نهيا } \frac{\text{س}^2 - 3\text{س} + 16}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 80} \quad (13) \text{ نهيا } \frac{\text{س}^2 - \text{س} - 6}{\text{س}^2 + \text{س} - 12} \quad (14) \text{ نهيا } \frac{\text{س}^2 - 2\text{س} - 3}{\text{س}^2 - 4\text{س} - 5}$$

 $\frac{4}{7}$  $\frac{5}{7}$  $\frac{4}{5}$ 

$$(15) \text{ نهيا } \frac{\frac{5}{3}\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 10} \quad (16) \text{ نهيا } \frac{36 - (2\text{س} - 4)^2}{\text{س}^2 - 5\text{س} - 6} \quad (17) \text{ نهيا } \frac{27 + 3(5 - \text{س})}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$$

 $\frac{27}{4}$  $-\frac{176}{7}$  $\frac{5}{33}$ 

$$(18) \text{ نهيا } \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 20} \quad (19) \text{ نهيا } \frac{3 - \text{س}}{\text{س}^2 - 1} \quad (20) \text{ نهيا } \frac{2 - \sqrt{\text{س}}}{\text{س}^2 - 20}$$

 $-\frac{1}{30}$ 

٤

 $\frac{11}{8}$ 

$$(21) \text{ نهيا } \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{\text{س}}}{\text{س}^2 - 9} \quad (22) \text{ نهيا } \frac{\frac{2}{\text{س} + 4} - \frac{1}{\text{س} + 1}}{\text{س} - 2} \quad (23) \text{ نهيا } \frac{\frac{\text{س} - 4}{2} - \frac{3}{\text{س} + 2}}{\text{س}}$$

٢٤

 $-\frac{1}{18}$  $-\frac{1}{54}$ 

(24) إذا كانت نهيا  $\frac{\text{س}^2 - 2\text{س} + 2}{\text{س} - 1} = 1$  ، فجد قيمة كل من أ، ب. (الجواب: أ=٣ ، ب=  $\frac{5}{3}$ )

$$(25) \text{ نهيا } \frac{5(\text{س} + 2) - 5(\text{س} - 2)}{2(\text{س} + 2) - 2(\text{س} - 2)} \quad (26) \text{ نهيا } \frac{\sqrt{\text{س}^2 - 14\text{س} + 2} - \sqrt{\text{س}}}{\text{س} - 2} \quad (27) \text{ نهيا } \frac{1 + \sqrt{\text{س}} + (5 - \text{س})}{\text{س} - 3}$$

(2019 ص تكميلي) (الجواب:  $\frac{5}{4}$ )(2019 ص) (الجواب:  $\frac{19}{16}$ )

(2019 ش) (الجواب: 20)

$$(28) \text{ نهيا } \frac{2\text{س} - \text{جاس}}{\text{س} - 1} \quad (29) \text{ نهيا } \frac{\text{س} - 4\text{جتاس}}{\text{س} - \text{جاس}} \quad (30) \text{ نهيا } \frac{2\text{جاس} - \text{جاس}}{\text{س}}$$

(2017 ش) (الجواب: 8)

(2016 ص) (الجواب:  $\frac{1}{3}$ )

(2016 ش) (الجواب: غير موجودة)

$$(31) \text{ نهيا } \frac{\text{جتاس} + 3\text{جتاس} - 4}{\text{س}} \quad (32) \text{ نهيا } \frac{2\text{س} - \text{جاس}}{\text{س}} \quad (33) \text{ نهيا } \frac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}(\text{جتاس} - \text{جتاس})}$$

(2019 ش) (الجواب: 14)

(2019 ص) (الجواب: 4)

(2019 ص تكميلي) (الجواب:  $\frac{1}{3}$ )

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح ... ..



الأستاذ: عبدالقادر الحسنات