1.250

الأمين في الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي- الفصل الدراسي الأول

تحتوي الدوسية على :

الفصل الاول
تطبيقات هندسيه.
تطبيقات فيزيائية.
المعدلات المرتبطة بالزمن.

الفصل الثاني
النقط الحرجة.
التزايد و التناقص.
القيم القصوى.
التقعر.
تطبيقات القيم القصوى.

مكتبة الوسام
ALWESAM
Tawjihi center & service store
النسخة الأصلية

2020-21

الوحدة الثالثة:

تطبيقات التفاضل

إعداد المعلم :

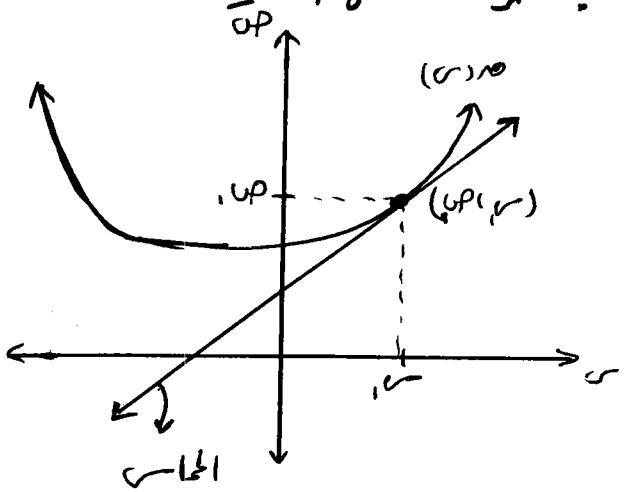
جلال النعيمي

0778029992

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store

أولاً : تطبيقات هندسية :

بالنظر للشكل التالي :



إذا كان الاقتران ص = ق(س) مستمر عند (س١، ص١)، فعندئذ يكون لمنحنى ق مماس عند تلك النقطة، وميله يساوي ق'(س١)، وتكون معادلة المماس هي

ص - ص١ = ق'(س١)(س - س١)

حيث النقطة (س١، ص١) تسمى نقطة المماس.

* ملاحظة : تذكر أن

① ميل المستقيم × ميل العمودي عليه = -١

② المستقيم العمودي على منحنى اقتران عند نقطة هو نفسه العمودي على مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة

مثال (١) :

إذا كان ق(س) = س٢ + ٢ ، جد معادلة كل من المماس ، والمستقيم العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١، ٤)

الحل :

ميل المماس هو ق'(س١)

∴ ق'(س) = ٢س

⇐ ق'(١) = ٢ × ١ = ٢

⇐ معادلة المماس هي عند (١، ٤)

ص - ص١ = ق'(١)(س - س١)

⇐ ص - ٤ = ٢(س - ١)

ص - ٤ = ٢س - ٢

ص = ٢س + ٢

* ملاحظة :

يكون مماس منحنى الاقتران ق(س) عمودياً على مماس منحنى الاقتران هـ(س) عند نقطة تقاطعهما (س١، ص١) إذا كانت ق'(س١)، هـ'(س١) موجودتين وكانت ق'(س١) × هـ'(س١) = -١

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٢) :

اذا كان ق(س) = س^{٢} ، و
هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ١ ، فجد النقطة التي يكون عندها مماساً منحنيي الإقترانين ق وهـ متعامدين .

الحل :

أولاً نجد مشتقة كل من الاقترانين
ق′(س) = ٢س و
هـ′(س) = ٢س − ٢
ولايجاد نقطة المماس فإن
ق′(س) × هـ′(س) = −١
(٢س)(٢س − ٢) = −١
٤س^{٢} − ٤س + ١ = صفر
⇐ (٢س − ١)^{٢} = صفر
∴ ٢س − ١ = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$
∴ ص = ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$
∴ النقطة هي ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$)

*** ملاحظة :**

اذا تلاقى إقترانين في نقطة واحدة وهي (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) فإن
ق(س$_{١}$) = هـ(س$_{١}$) = ص$_{١}$.

*** مثال (٣) :**

بين أن لمنحنى الاقتران
ق(س) = س^{٢} − ٦س + ١٢ مماساً أفقياً عند النقطة (٣ ، ٣)

ملاحظة قبل الحل :

المماس الأفقي هو المماس الذي يوازي محور السينات ويكون ميله يساوي صفر

الحل :

ق′(س) = ٢س − ٦
ق′(٣) = ٢×٣ − ٦ = صفر
إذن مماس المنحنى ق(س) أفقي عند النقطة (٣ ، ٣) لأن ق′(٣) = صفر

*** مثال (٤) :**

اذا كان منحنى الإقتران ق(س) = س^{٢} + ٣س + ١ عند س = س$_{١}$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد إحداثيي نقطة التماس

ملاحظة قبل الحل :

ميل المماس = ظا هـ ، حيث هـ الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل :

ق′(س$_{١}$) = ظا ٤٥ ⇐
٢س$_{١}$ + ٣ = ١ ⇐ س$_{١}$ = −١
نقطة التماس هي (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$))
= (−١ ، −١)

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٥) :

جد الإحداثي السيني للنقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الإقتران

ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٢} + ٤ موازياً للمستقيم

الذي معادلته ل : ص + ٤س + ١ = ٠

ملاحظة قبل الحل:

اذا كان ق وهـ إقترانان خطيان متوازيان وبحيث ميل ق يساوي م$_{١}$ وميل هـ يساوي م$_{٢}$ ، فإن م$_{١}$ = م$_{٢}$

الحل:

نفرض أن ميل المماس = م$_{١}$ وميل المستقيم م$_{٢}$

∴ قَ(س) = ٤س^{٣} − ٨س

∴ م$_{١}$ = قَ(س$_{١}$) = ٤س$_{١}^{٣}$ − ٨س$_{١}$

وبما أن مماس المنحنى ق عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) يوازي المستقيم ل وحيث أن

ل : ص + ٤س + ١ = ٠

⇐ ص = −٤س − ١ ⇐ م$_{٢}$ = −٤

∴ م$_{١}$ = م$_{٢}$

٤س$_{١}^{٣}$ − ٨س$_{١}$ + ٤ = صفر

٤(س$_{١}$ − ١)(س$_{١}^{٢}$ + س$_{١}$ − ١) = ٠

∴ س$_{١}$ = ١ أو

س$_{١}$ = $\frac{-١+\sqrt{٥}}{٢}$ أو

س$_{١}$ = $\frac{-١-\sqrt{٥}}{٢}$

مثال (٦) :

بين أن لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} + ١ مماسين مرسومين من النقطة (٠ ، ٠) ثم جد معادلة كل منهما.

الحل:

ملاحظة قبل الحل :

لا يمر الإقتران ق(س) = س^{٢} + ١ من النقطة (٠ ، ٠) ولا حتى من محور السينات بسبب أنه لا توجد أصفار للاقتران

س^{٢} + ١ = ٠ ⇐ المميز = ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

٠ − ٤ × ١ × ١ = −٤ < ٠

⇐ نفرض أن النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة تماس تقع على منحنى الاقتران ق

∴ ص$_{١}$ = س$_{١}^{٢}$ + ١

ميل المماس عند (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = ميل منحنى الإقتران عند نفس النقطة قَ(س$_{١}$)

قَ(س$_{١}$) = ٢س$_{١}$

∴ معادلة المماس هي ص = ٢س$_{١}$(س − ٠)

ص = ٢س$_{١}$س

و ق(س$_{١}$) = ص$_{١}$ ⇐ س$_{١}^{٢}$ + ١ = ٢س$_{١}^{٢}$

⇐ س$_{١}^{٢}$ = ١ ⇐ س$_{١}$ = ±١

∴ نقطة التماس الأولى هي (−١ ، ٢)

ونقطة التماس الثانية هي (١ ، ٢)

معادلة التماس الأولى ص = −٢س

معادلة التماس الثانية ص = ٢س

مكتبة الوسام
ALWASAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٧) :

جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة : $ص^٢ + س^٢ + ٦ص - ٢س + ٢ = ٠$ عند النقطة (٢، -١) مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الحل :

لإيجاد قياس الزاوية هـ

فإن $ص'|_{(٢،-١)} = ظا هـ$

$\Leftarrow ٢ص ص' + ٢س + ٦ص' - ٢ = ٠$

$ص'(٢ص + ٦) = -٢س + ٢$

$ص' = \frac{-٢س + ٢}{٢ص + ٦} = \frac{-س + ١}{ص + ٣}$

$ص' = \frac{-٣ + ١}{-١ + ٣} = -١$

$\therefore ظا هـ = -١ \Leftarrow هـ = -١٣٥°$

مثال (٨) :

إذا كان الإقتران $ق(س) = جـ س^٢ + جـ س + ٢$ وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢، ق(٢)) هو ١٣٥° ، فجد قيمة الثابت جـ

الحل :

$ق'(٢) = ظا ١٣٥ \Leftarrow ق'(س) = ٢جـ س + جـ$

$٢جـ(٢) + جـ = -١$

$٤جـ + جـ = -١ \Leftarrow ٥جـ = -١$

$\Leftarrow جـ = \frac{-١}{٥}$

مثال (٩) :

جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة $(ص - ٤)^٢ = س + ٢$ التي يكون عندها المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته $٦ص - ٣س - ٥ = ٠$

الحل :

لإيجاد قيم النقاط الواقعة بين المماس والمستقيم فإن $م_{العلاقة} = م_{المستقيم}$

$\Leftarrow ٢(ص - ٤) \times ص' = ١$

$ص' = \frac{١}{٢(ص - ٤)}$ للمماس

$٦ص' - ٣ = ٠ \Leftarrow ص' = \frac{١}{٢}$ للمستقيم

$\therefore \frac{١}{٢(ص - ٤)} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ص - ٤ = ١$

$ص = ٥$

$\therefore$ عند ص = ٥ فإن قيم س هي

$(٥ - ٤)^٢ = س + ٢$

$س = ١ - ٢ = -١$

$\therefore$ يوجد النقطة هي (-١، ٥)

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (١٠) :

جد معادلة المماس لمنحنى الإقتران
$ق(س) = \sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى
الإقتران $هـ(س) = س^{٣} - \frac{٣}{٢}س + \frac{١}{٢}$

الحل :

معادلة المماس هي $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$
لإيجاد قيم س ، فإن $م_{ق} = م_{هـ}$

$م_{ق} = ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$م_{هـ} = هـ'(س) = ٣س^{٢} - \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢\sqrt{س}} = ٣س^{٢} - \frac{٣}{٢}$ وبتربيع الطرفين

$\left(\frac{١}{٢\sqrt{س}}\right)^{٢} = (٣س^{٢} - ٣)^{٢}$

$\frac{١}{٤س} = ٩س^{٤} - ١٨س^{٢} + ٩$

$\Leftarrow ٩س^{٤} - ١٨س^{٢} + ٩س - ١ = ٠$

بعد تحليل المعادلة السابقة للعوامل الأولية

$\Leftarrow (س - ١)(٩س^{٣} + ٩س^{٢} - ٩س + ١) = ٠$

$\therefore س = ١$ و $س = \frac{١}{٣}$

$\therefore ق(١) = هـ(١)$ ، $س = ١$ مقبولة

$ق(\frac{١}{٣}) \neq هـ(\frac{١}{٣})$ ، $س = \frac{١}{٣}$ مرفوضة

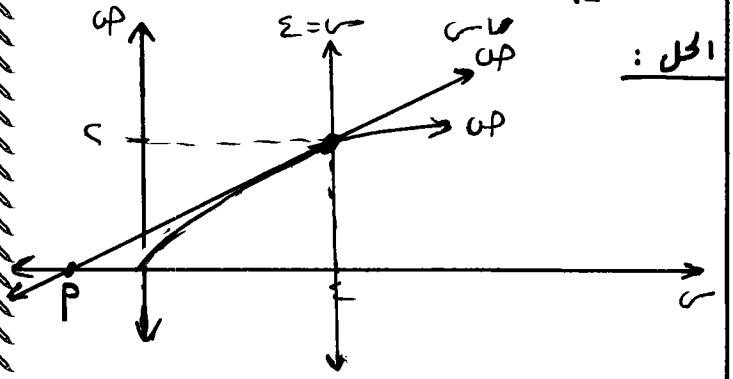
$س_{١} = ١ \Leftarrow ص_{١} = ق(١) = ١$

$\Leftarrow$ معادلة المماس $ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

مثال (١١) :

جد مساحة المثلث القائم الزاوية ، المكون من المماس المرسوم لمنحنى الإقتران $ص = \sqrt{س}$ عند النقطة $(٤ ، ٢)$ ومحور السينات والمستقيم $س = ٤$.

الحل :



مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}$ القاعدة × الإرتفاع

ولإيجاد مساحة المثلث ، يجب إيجاد نقاط رؤوس المثلث . وهي $(٤ ، ٢)$ ، $(٤ ، ٠)$ ، $(P ، ٠)$
لإيجاد قيمة P ، فإن النقطة $(P ، ٠)$ هي نقطة تلاقي المماس مع محور السينات $(ص = ٠)$
نجد معادلة المماس عند النقطة $(٤ ، ٢)$

$م = ق'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow م = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$

$ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

$\Leftarrow ص = \frac{١}{٤}س + ١$

$\Leftarrow$ لإيجاد P $\Leftarrow \frac{١}{٤}س + ١ = ٠$

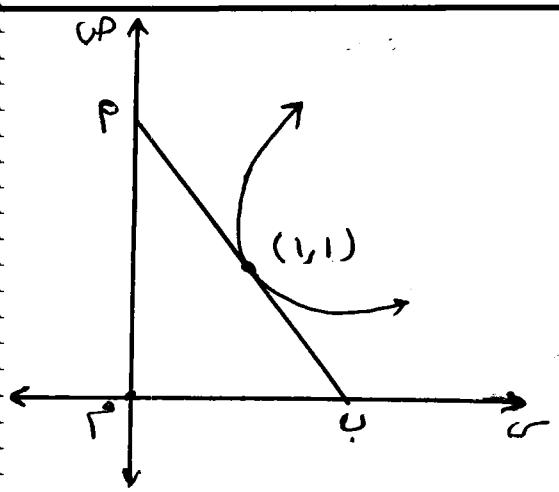
$\Leftarrow س = -٤ \Leftarrow P(-٤ ، ٠)$

$\therefore$ مساحة المثلث بيانات هي

المساحة $= \frac{١}{٢}(٤ + ٤)(٢)$

$= ٨$ وحدة مربعة

مكتبة الوسام
AlWesam
العلم : جلال النعيمي
Jalal



السؤال الأول :

معتمداً الشكل الذي يمثل المثلث م م ب الذي ضلعه م ب محمول على منحنى الاقتران $هـ(س) = \frac{ب}{1+س^2}$ ، $س \neq 1$ عند النقطة (١،١)

أوجد قيمة الثابت ب التي تجعل مساحته تساوي $\frac{9}{4}$ وحدة مربعة

الحل:

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ ق (م ب) $\times$ (ب − ٠) $= \frac{9}{4}$

لإيجاد قيم م و ب ، يجب إيجاد معادلة المماس : ص − ١ = م (س − ١)

$\therefore$ م $= هـ'(1) \Leftarrow هـ'(س) = \frac{-ب}{(1+س^2)^2} \Leftarrow هـ'(1) = \frac{-ب}{4} = \frac{-ب}{4}$

المعادلة ص − ١ $= \frac{-ب}{4}(س - 1) \Leftarrow ص = \frac{-ب}{4}س + \frac{ب}{4} + 1$

عند النقطة (ب ، ٠) $\Leftarrow ص = 0 \Leftarrow \frac{-ب}{4}س + \frac{ب}{4} + 1 = 0$

$\Leftarrow \frac{-ب}{4}س = \frac{-ب-4}{4} \Leftarrow س = \frac{ب+4}{ب} \Leftarrow$ ن $= (\frac{ب+4}{ب}, 0)$

عند النقطة (م ، ٠) $\Leftarrow ص = 0 \Leftarrow م = \frac{ب}{4} + 1 \Leftarrow$ م $= (0, \frac{ب+4}{4})$

$\therefore$ نقاط المثلث هي (٠،٠) $(0, \frac{ب+4}{4})(\frac{ب+4}{ب}, 0)$

المساحة $= \frac{1}{2} \times \frac{ب+4}{4} \times \frac{ب+4}{ب} = \frac{9}{4} \Leftarrow \frac{(ب+4)^2}{2ب} = 9$

$\Leftarrow ب^2 + 8ب + 16 = 18ب \Leftarrow ب^2 - 10ب + 16 = 0 \Leftarrow (ب-8)(ب-2) = 0$

عند ب $= 8 \Leftarrow هـ(س) = \frac{8}{1+س^2} \Leftarrow هـ(1) = \frac{8}{2} = 4$ مرفوضة

عند ب $= 2 \Leftarrow هـ(س) = \frac{2}{1+س^2} \Leftarrow هـ(1) = \frac{2}{2} = 1$ مقبولة

$\therefore$ **ب = ٢**

مكتبة المعلم ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل
(مسائل وتدريبات سابقة)

السؤال الثاني :

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(س+ص)^2 - 4س = ص + 42$ عند نقطة التقاطع منحنى العلاقة مع المستقيم $ص = 9 - 2س$

الحل :

لإيجاد معادلة العمودي $ص - ص_1 = م_{ع}(س - س_1)$ يجب ايجاد ميل العمودي و نقطة تلاقي المستقيم مع منحنى العلاقة $(س_1 ، ص_1)$

أولاً : $6ص = 9 - 2س \Leftarrow ص = \frac{3 - س}{2}$ نعوض قيمة ص في منحنى العلاقة

$\Leftarrow \left[س + 2\left(\frac{3-س}{2}\right)\right]^2 - 4س + 2\left(\frac{3-س}{2}\right) = 42$

$\Leftarrow (3)^2 - 4س + 9 - 2س = 43 \Leftarrow -6س = 42 - 36 \Leftarrow س_1 = -1$

$\therefore ص_1 = \frac{3-(-1)}{2} = 2 \Leftarrow$ نقطة التلاقي هي $(-1 ، 2)$

لإيجاد ميل المنحنى عند $(-1 ، 2)$ نشتق العلاقة .

$3(س+ص)^2(1+2ص') - 4 + 6ص' = 0$ ، نعوض $(-1 ، 2)$

$\Leftarrow 3(-1+2\times2)^2(1+2ص') - 4 + 6ص' = 0 \Leftarrow 27 + 54ص' - 4 + 6ص' = 0$

$\Leftarrow 60ص' = -23 \Leftarrow م = ص' = \frac{-23}{60}$

$\Leftarrow$ ميل العمودي هي $-$ معكوس ميل المماس $\Leftarrow م_{ع} = \frac{60}{23}$

$\therefore$ معادلة العمودي $\boxed{ص - 2 = \frac{60}{23}(س + 1)}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الثالث:

جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^٣ + س + ١}{س + ١}$ ، $س \neq -١$ ، عمودياً على المستقيم $ص = -٤س + ٥$

الحل:

معادلة المستقيم $\Leftarrow ص = -\frac{٤}{٢}س + \frac{٥}{٢}$ ∴ ميل العمودي $= \frac{-٤}{-٢}$

∴ يجب أن يكون ميل المماس لمنحنى الاقتران $= \frac{٣}{٤}$ ∴ $ق'(س) = \frac{٣}{٤}$

$$ق'(س) = \frac{(س+١)(٣س^٢+٢س+١) - (١)(س^٣+س+١)}{(س+١)^٢} = \frac{٢س^٣+س^٢+٢س+١-س^٣-س-١}{(س+١)^٢}$$

$$= \frac{س^٣ + ٢س}{(س+١)^٢} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow ٤س^٣ + ٨س = ٣س^٣ + ٦س + ٣$$

$$\Leftarrow س^٣ + ٢س - ٣ = صفر \Leftarrow (س+٣)(س-١) = ٠ \Leftarrow س = \{-٣ ، ١\}$$

∴ النقط $(-٣ ، ق(-٣))$ ، $(١ ، ق(١))$

$= (-٣ ، -\frac{٧}{٢})$ ، $(١ ، \frac{٣}{٤})$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الرابع:

جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة $\frac{٣}{٤}$ س = ٢ص^{٢} − ٦ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور ص .

الحل: معادلة المماس هي ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

لإيجاد م (ميل المماس) ⟸ م = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للعلاقة

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ⟸ $\frac{٣}{٤}$ = ٤ص ص$'$ − ٦ص$'$ ⟸ ص$'$ = $\frac{٣}{٤(٤\text{ص} - ٦)}$ = م

نقط تقاطع العلاقة مع محور الصادات عندما تكون س = ٠

⟸ ٢ص^{٢} − ٦ص = ٠ ⟸ ص(٢ص − ٦) = ٠ ⟸ ص = ٠ أو ص = ٣

∴ النقاط هي (٠،٠) و (٠،٣)

عند النقطة (٠،٠) ⟸ م = $\frac{٣}{٤(٠ - ٦)}$ = $\frac{-١}{٨}$

⟸ المعادلة المماس هي ص − ٠ = $\frac{-١}{٨}$ (س − ٠) ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٨}\text{س}}$

عند النقطة (٠،٣) ⟸ م = $\frac{٣}{٤(٣ - ٦)}$ = $\frac{١}{٨}$

المعادلة المماس هي ص − ٣ = $\frac{١}{٨}$ (س − ٠) ⟸ $\boxed{\text{ص} = \frac{١}{٨}\text{س} + ٣}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الخامس:

جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة: $٢ص^٢ + ٢س^٢ - ٤س + ١٢ص + ٤ = ٠$ عند النقطة (٢، -١) مع الإتجاه الموجب لمحور السينات، ثم جد معادلة هذا المماس.

الحل:

$ظاهـ = \frac{دص}{دس}\Big|_{(٢،-١)} = ص'\Big|_{(٢،-١)}$ ⇐ نشتق العلاقة بالنسبة الى س.

$٤ص ص' + ٤س - ٤ + ١٢ص' + ٠ = ٠ \Leftarrow (٤ص + ١٢)\, ص' = -(٤س - ٤)$

$\Leftarrow ص' = \frac{-\cancel{٤}(س-١)}{\cancel{٤}(ص+٣)} = \frac{-(س-١)}{ص+٣}$

$\Leftarrow ظاهـ = ص'\Big|_{(٢،-١)} = \frac{-(٣-١)}{-١+٣} = -١ \Leftarrow هـ = ١٣٥^\circ$ أو $\frac{٣\pi}{٤}$

السؤال السادس:

اذا كان المستقيم $س + ٦ص + أ = ٠$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٣س}{س-٢}$، $س \neq ٢$، فجد قيمة (قيم) الثابت أ.

الحل:

ميل المستقيم = ميل المماس ⇐ $م_م = م_ق$، ولايجاد $م_م$ نعيد ترتيب معادلة المستقيم $٦ص = -س - أ \Leftarrow ص = \frac{-١}{٦}س - \frac{أ}{٦} \Leftarrow م_م = \frac{-١}{٦}$

$\therefore ق'(س) = \frac{-١}{٦} \Leftarrow \frac{(س-٢)(٣) - ٣س(١)}{(س-٢)^٢} = \frac{٣س - ٦ - ٣س}{(س-٢)^٢} = \frac{-٦}{(س-٢)^٢} = \frac{-١}{٦}$

$\Leftarrow (س-٢)^٢ = ٣٦ \Leftarrow س = ٢ \pm \sqrt{٣٦} = ٢ \pm ٦ \Leftarrow س = \{٨، -٤\}$

$\therefore$ نقطتي التماس $(٨، ق(٨)) = (٨، ٤)$ و $(-٤، ق(-٤)) = (-٤، ٢)$

$\therefore (٨، ٤)$ تحقق معادلة المستقيم $\Leftarrow ٨ + ٦ \times ٤ + أ = ٠ \Leftarrow أ = -٣٢$

$(-٤، ٢)$ تحقق معادلة المستقيم $\Leftarrow -٤ + ٦ \times ٢ + أ = ٠ \Leftarrow أ = -٨$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

ثانياً : تطبيقات فيزيائية :

* تعريف :

إذا تحرك جسيم على خط مستقيم وحدد موقعه في اللحظة ن بالعلاقة ل = ف(ن) فإن : السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة ن هي ع حيث ع(ن) = ف'(ن)
واذا كانت ف'(ن) قابلة للإشتقاق في ن فإن ف''(ن) = ع'(ن) تسمى تسارع الجسيم في اللحظة ن ويرمز له بالرمز ت(ن)

مثال (١) :
يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن³ - ٧ن² + ٣ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار ، احسب سرعة الجسيم وتسارعه عند ن = ٤ ثوان

الحل :
ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن² - ١٤ن
∴ ع(٤) = ٣(٤)² - ١٤×٤ = ٤٨ - ٥٦ = -٨ م/ث
ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ١٤
∴ ت(٤) = ٦×٤ - ١٤ = ١٠ م/ث²

ملاحظة :
اذا كانت السرعة ثابتة ، فذلك يعني أن التسارع = صفر

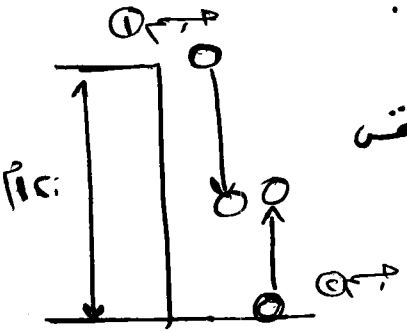
مثال (٢) :
قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض ، بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة محكوماً بالعلاقة ف(ن)
ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن² حيث ما يلي :
أ) السرعة الابتدائية للجسم .
ب) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم
جـ) اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسم ١٠ م/ث
د) الزمن اللازم حتى يعود الجسم إلى سطح الأرض

الحل :
ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن .
ت(ن) = -١٠
أ) السرعة الابتدائية ع(٠) = ٣٠ - ١٠(٠)
= ٣٠ م/ث
ب) أقصى ارتفاع عند ع(ن) = ٠ أي أن
٣٠ - ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٣ ث
⇐ ف(٣) = ٣٠×٣ - ٥×٩ = ٤٥ م
جـ) ع(ن) = ١٠ ⇐ ٣٠ - ١٠ن = ١٠
ن = ٢ ث.
د) عند عوده الجسم لسطح الأرض ف = ٠
٣٠ن - ٥ن² = ٠ ⇐ ن(٦ - ن) = ٠
ن = ٠ او ن = ٦ ث وبما أن ن ≠ ٠
لحظة الإطلاق ، اذن يعود الجسم الى سطح الارض بعد ٦ ثواني

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٣) :

أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الارض سقوطاً حراً ، حيث إن المسافة المقطوعة بالامتار بعد ن ثانية هي $ف_١(ن) = ٥ن^٢$ وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الارض للاعلى حيث ان المسافة التي يقطعها هي $ف_٢(ن) = ٦٠ن - ٥ن^٢$ ، جد اللحظة التي يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض .



الحل :

يكون الجسمان على نفس الارتفاع يعني

$ف_١ + ف_٢ = ١٢٠$

$\Leftarrow ف_١(ن) + ف_٢(ن) = ١٢٠$

$\cancel{٥ن^٢} + ٦٠ن - \cancel{٥ن^٢} = ١٢٠$

$٦٠ن = ١٢٠$

$ن = ٢$ ثانية

الجسمان يكونان على الارتفاع نفسه بعد ٢ ث من بدء الحركة .

مثال (٤) :

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته $ع = أ\sqrt{ف}$ ، $أ > ٠$ ، $ف > ٠$ ، ف هي المسافة بالأمتار ، اذا علمت أن تسارعه = ٨ م/ث² ، فجد قيمة أ

الحل :

$$ت(ن) = \frac{دع}{دن} = \frac{أ \frac{دف}{دن}}{٢\sqrt{ف}}$$

$$ت = \frac{أ \times ع}{٢\sqrt{ف}}$$

$$\Leftarrow ٨ = \frac{أ}{٢} \times \frac{ع}{\sqrt{ف}} = \frac{أ}{٢} \times \frac{أ\sqrt{ف}}{\sqrt{ف}}$$

$$\Leftarrow ٨ = \frac{أ^٢}{٢} \Leftarrow أ = \sqrt{١٦} = \pm ٤$$

$\therefore \boxed{أ = ٤}$ لأن الشرط $أ > ٠$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الوحدة : الثالثة
الفصل : الأول
الصفحة : ٤٨/١٣

تطبيقات التفاضل

الفصل الدراسي الأول

السؤال الاول :

يتحرك جسيم على خط مستقيم ومعه العلاقة ف(ن) = ٢جا(ن/٢) + √٣/٢ ن ، ن ∈ [٠ ، π/٢] حيث ف: المسافة بالامتار و ن: الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته √٣ م/ث

الحل :

ع(ن) = ف′(ن) = ٤جا ن/٢ × جتا ن/٢ × ١/٢ + √٣/٢ ولأن ٢جا ن/٢ جتا ن/٢ = جا ن

ع(ن) = جا ن + √٣/٢

ت(ن) = ع′(ن) = جتا ن

∴ ع(ن) = √٣ ⟸ جا ن + √٣/٢ = √٣ ⟸ جا ن = √٣/٢ ⟸ ن = π/٣

∴ ت(π/٣) = جتا π/٣ = ١/٢ م/ث²

السؤال الثاني :

من نقطة على عمق (٥٥) م عن سطح الأرض قذف جسيم رأسياً الى أعلى بحيث ان المسافة المقطوعة بالامتار بعد ن ثانية من قذف الجسيم تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن² ، جد سرعة الجسيم لحظة وصوله مستوى سطح الأرض .

الحل :

ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن² = ٥٥ ⟸ ن² − ٢ن + ١١ = ٠

⟸ (ن − ١)(ن − ١١) = ٠ ⟸ ن = ١ ث او ن = ١١ ث

ع(ن) = ف′(ن) = ٦٠ − ١٠ن ، إذن

عند ن = ١ ⟸ ع(١) = ٥٠ م/ث

عند ن = ١١ ⟸ ع(١١) = −٥٠ م/ث

*** ملاحظة**

ع(١١) = −٥٠ ، الاشارة السالبة تعني الاتجاه المعاكس.

السرعة الاولى يصلها الجسم عند صعوده والسرعة الثانية عند نزوله

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل

السؤال الثالث :

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن² حيث المسافة بالامتار و ن الزمن بالثواني ، ما اللحظة التي يكون فيها تسارع الجسيم يساوي مثلي سرعته ؟

أ) ٢,٥ ث ب) ٤ ث ج) ١ ث د) ١,٥ ث

الحل :

ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن²

ع(ن) = ٢٠ − ١٠ن

ت(ن) = −١٠

ت(ن) = ٢ع(ن) ⇐ −١٠ = ٢ × (٢٠ − ١٠ن)

⇐ −٥ = ٢٠ − ١٠ن ⇐ ن = ٢,٥ ث

أ

السؤال الرابع :

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن² + ٧ن حيث ف : المسافة بالامتار و ن : الزمن بالثواني ، فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، م] تساوي ١٠ م/ث ، فما قيمة الثابت م .

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) ٢ ج) $\frac{٥}{٢}$ د) ٣

الحل :

ملاحظة : السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [أ ، ب] هي $\frac{ع(أ) + ع(ب)}{٢}$

∴ ع(ن) = ف′(ن) = ٢ن + ٧

⇐ السرعة المتوسطة = $\frac{ع(١) + ع(م)}{٢}$ = ١٠

⇐ $\frac{٢×١ + ٧ + ٢م + ٧}{٢}$ = ١٠ ⇐ ١٦ + ٢م = ٢٠

م = ٢ ث

ب

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

ثالثاً : المعدلات المرتبطة بالزمن

* المعدلات المرتبطة بالزمن هي :

$\frac{ص}{ن}$ = معدل تغير ص بالنسبة للزمن ن

$\frac{س}{ن}$ = معدل تغير س بالنسبة للزمن ن

بحيث أن $\frac{ص}{س}$ هو معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س في حال ارتباط ص بالمتغير س .

مثال (١) :

تتحرك نقطة على منحنى العلاقة

$س^{٤} + ص^{٢} - ٥س + ٣ص - ٦ = ٠$

فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة الى الزمن ٢ سم/ث عند النقطة (١ ، ٢) ، فجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن عند النقطة نفسها .

الحل :

نفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على منحنى العلاقة

المعطيات :-

$\frac{س}{ن} = ٢$ سم/ث عند النقطة (١ ، ٢)

المطلوب :-

$\frac{ص}{ن}$ عند النقطة (١ ، ٢)

←

للحصول على علاقة بين $\frac{س}{ن}$ و $\frac{ص}{ن}$

نشتق طرفي المعادلة ضمنياً بالنسبة للزمن

$\Leftarrow ٤س^{٣} \frac{س}{ن} + ٢ص \frac{ص}{ن} - ٥ \frac{س}{ن} + ٣ \frac{ص}{ن} = ٠$

$٣ \frac{ص}{ن} = ٠$

$\Leftarrow (٢ص + ٣) \frac{ص}{ن} + (٤س^{٣} - ٥) \frac{س}{ن} = ٠$

$\Leftarrow \frac{ص}{ن} = \frac{-(٤س^{٣} - ٥)}{٢ص + ٣} \frac{س}{ن}$

وبتعويض $\frac{س}{ن} = ٣$ و (١ ، ٢)

$\Leftarrow \frac{ص}{ن} = ٣ \times \frac{-(٤ \times ١ - ٥)}{٢ \times ٢ + ٣}$

$= ٣ \times \frac{٣}{٧} = \frac{٩}{٧}$ سم/ث

---

* ملاحظة هامة

القوانين المستخدمة في هذا الدرس مذكورة في الملحق في نهاية كل نوعية

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٢) :

قرص معدني دائري الشكل يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله ، تزداد مساحة سطحه بمعدل ٦ سم²/ث ، جد معدل تغير طول نق القرص ، عندما يكون نق = ٣ سم

الحل:

نق : طول نصف القطر للقرص عند ن

م : مساحة سطح القرص عند ن

المعطيات : $\frac{دم}{دن} = ٦$ سم²/ث

المطلوب : $\frac{دنق}{دن}$ عند نق = ٣ سم

م = π نق² ، بإشتقاق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة للزمن

$\frac{دم}{دن} = \pi$ ٢ نق $\frac{دنق}{دن}$ ، إذن

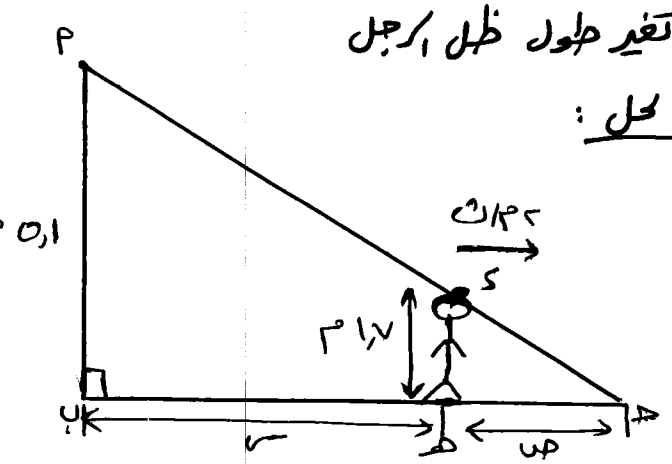
$٦ = \pi \times ٢ (٣) \frac{دنق}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دنق}{دن} = \frac{٦}{٦\pi} = \frac{١}{\pi}$ سم/ث

مثال (٣)

رجل طوله ١٫٧ م ، يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعداً عن عمود كهرباء في قمته مصباح ، يرتفع ٥٫١ م عن سطح الأرض ، جد معدل تغير طول ظل الرجل

الحل :



نفرض أن س هو بعد الرجل عن العمود.

وطول ظل الرجل هو ص.

$\therefore \frac{دس}{دن} = ٢$ م/ث

المطلوب : $\frac{دص}{دن}$

من خلال تشابه المثلثين أ ب جـ و د هـ جـ

فإن $\frac{أب}{دهـ} = \frac{س+ص}{ص} \Leftarrow \frac{س+ص}{ص} = \frac{٥٫١}{١٫٧}$

$\Leftarrow ٣ص = س + ص \Leftarrow ٢ص = س$.

$\Leftarrow ٢ \frac{دص}{دن} = \frac{دس}{دن} \Leftarrow \frac{دص}{دن} = \frac{١}{٢} \frac{دس}{دن}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دن} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$ م/ث

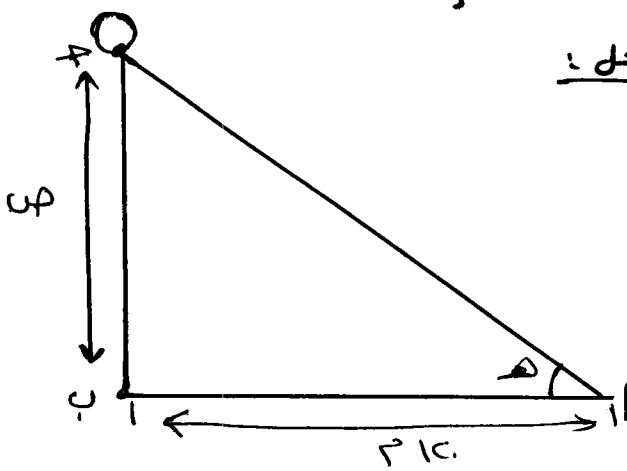
وهو المطلوب

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٤) :

يرتفع بالون رأسياً الى أعلى ، بمعدل ثابت قدره ٤٠ م/د ، رصده مشاهد يقف على الأرض ، ويبعد ١٢٠ م عن موقع البالون على الأرض ، جد معدل تغير زاوية إرتفاع نظر المشاهد للبالون ، عندما يكون البالون على إرتفاع ١٢٠ م عن سطح الأرض

الحل :



المعطيات :-

$\frac{دص}{دن} = ٤٠$ م/د

المطلوب :-

$\frac{دهـ}{دن}$ عند ص = ١٢٠

العلاقة التي تربط الزاوية هـ مع ص هي ظاهـ = $\frac{ص}{١٢٠}$ ، نشتق العلاقة ضمنياً .

$\Leftarrow$ قا^{2}هـ × $\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{١}{١٢٠}$ × $\frac{دص}{دن}$

$\Leftarrow$ $\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{١}{١٢٠}$ × $\frac{١}{قا^2 هـ}$ × $\frac{دص}{دن}$

عند ص = ١٢٠ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{\pi}{٤}$ وبالتالي

$\frac{دهـ}{دن}$ = $\frac{١}{١٢٠}$ × $\frac{١}{قا^2 \frac{\pi}{٤}}$ × ٤٠ = $\frac{١}{٦}$ راديان/ث

وهو المطلوب

مثال (٥) :-

دائرتان متحدتان في المركز ، طولا نصفي قطريهما ٥ سم و ٢٠ سم ، إبتدأت الدائرة الصغيرة تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها ٢ سم/د ، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١ سم/د جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما .

الحل :

نفرض أن الزمن هو ن دقيقة

$\therefore$ نق$_{ص}$ الدائرة الصغيرة = ٥ + ٢ن

نق$_{ك}$ الدائرة الكبيرة = ٢٠ − ن

$\Leftarrow$ م(ن) المساحة المحصورة بينهما

م(ن) = π(٢٠ − ن)^2 − π(٥ + ٢ن)^2

المطلوب : $\frac{دم}{دن}$ عندما م = ٠ أي عندما يكون نق$_{ص}$ = نق$_{ك}$ $\Leftarrow$ ٢٠ − ن = ٥ + ٢ن

$\Leftarrow$ ن = ٥ دقائق .

$\therefore$ $\frac{دم}{دن}$ = −٢π(٢٠ − ن) − ٤π(٥ + ٢ن)

$\left.\frac{دم}{دن}\right|_{ن=٥}$ = −٢π(١٥) − ٤π(٥ + ١٠)

= −٩٠π سم^2/د

وهو المطلوب

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* لحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

١) ارسم شكلاً تقريبياً موضحاً عليه البيانات المعطاة ، إن أمكنه

٢) حدد الثوابت والمتغيرات والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة

٣) إبحث عن علاقة رياضية مستعيناً بالرسم تربط متغيرات المسألة

٤) عوّض عن الثوابت في العلاقة التي حصلت عليها قبل إجراء عملية الاشتقاق لأنها في حالات معينة

٥) إشتق طرفي العلاقة التي حصلت عليها بالنسبة إلى الزمن ، للحصول على علاقة أخرى تربط بينه المعدلات

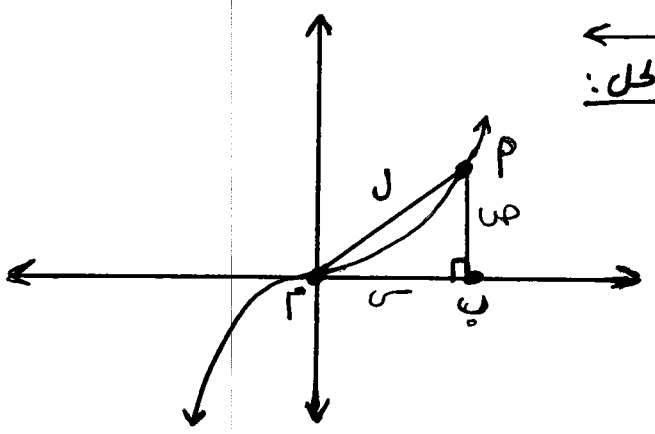
٦) عوّض بالقيم المعلومة لإيجاد المطلوب

مثال (٦) :
بدأت نقطتان P ، ب الحركة معاً من نقطة الأصل (م) بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٣ سم/ث وتتحرك النقطة P في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} ، بحيث $\overline{PB}$ تبقى دائماً عمودية على المحور السيني الموجب ، جد :

أ) معدل التغير في مساحة المثلث P ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

ب) معدل التغير في طول وتر المثلث P ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة ←

الحل : ←



أ) م = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ س س^{٢}

م = $\frac{١}{٢}$ س^{٣}

$\therefore \frac{دم}{دن} = \frac{٣}{٢}$ س^{٢} $\frac{دس}{دن}$ ولأن س = السرعة الزمنية = ٢ × ١ = ٢

$\Leftarrow \frac{دم}{دن} = \frac{٣}{٢} \times ٢^{٢} \times ٢ = ٣٢$ سم^{٢}/ث

ب) ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} + (س^{٢})^{٢}

= س^{٢} + س^{٦}

$\Leftarrow$ ل = $\sqrt{س^{٢} + س^{٦}}$

$\frac{دل}{دن} = \frac{(٢س + ٦س^{٥}) \frac{دس}{دن}}{٢\sqrt{س^{٢} + س^{٦}}}$

$\Leftarrow \frac{دل}{دن} = \frac{(٢ \times ٢ + ٦(٢)^{٥}) \times ٢}{٢\sqrt{٢^{٢} + ٢^{٦}}}$

$= \frac{٢ \times (٤ + ١٩٢)}{٢\sqrt{٤ + ٦٤}}$

$= \frac{١٩٦}{٢\sqrt{٦٨}}$ سم/ث

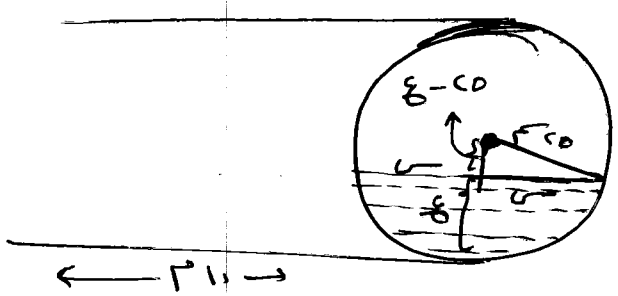
مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الأول :

يجري الماء في أنبوب أفقي إسطواني الشكل طوله ١٠ م ، وطول نصف قطره يساوي ٥٠ سم ، فإذا كان عمق الماء في الأنبوب يتناقص بمعدل ٢ سم/د ، فجد معدل التغير في مساحة سطح الماء العلوي في الأنبوب عندما يكون عمق الماء ١٨ سم

الحل :



نفرض أن عرض الماء = س

وعمق الماء = ع

$\Rightarrow م = \frac{1}{2} \times ١٠ \times س = ٥ س$

حيث $س \in [٠ ، ٥٠]$ سم

$\therefore \frac{ح م}{ح ن} = ٥ \frac{ح س}{ح ن}$ ——— ①

لإيجاد $\frac{ح س}{ح ن}$ $\Leftarrow (٥٠)^٢ = س^٢ + (٥٠ - ع)^٢$

$\therefore \frac{ح س}{ح ن} = ٢ س \times \frac{ح س}{ح ن} + ٢ \times (٥٠ - ع) \times \frac{ح ع}{ح ن}$ = صفر

$\therefore ٢ س \frac{ح س}{ح ن} - ٢ (٥٠ - ع) \frac{ح ع}{ح ن} = ٠$

عندما ع = ١٨ $\Leftarrow (٥٠)^٢ = س^٢ + (٥٠ - ١٨)^٢ \Leftarrow س = ٤٠$ سم

$\Rightarrow ٢ \times ٤٠ \times ٢ \frac{ح س}{ح ن} + ٢ (٥٠ - ١٨) \times ٣ = ٠$

$\Leftarrow \frac{ح س}{ح ن} = \frac{-٤٨}{٤٠} = \frac{-٧}{٨}$

$\therefore \frac{ح م}{ح ن} = ٥ \times ٢ \times \frac{-٧}{٨} = -١٧٥$ سم^٢/د

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي الأول

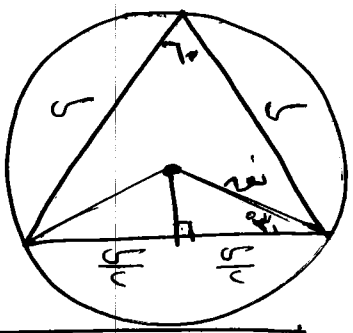
تطبيقات التفاضل
(مسائل وزاريه سابقه)

الوحدة : الثالثة
الفصل : الأول
الصفحة : ٢٠ / ٤٨

السؤال الثاني :

رسم مثلث متساوي الأضلاع داخل دائره بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائره، بدأ كل من الدائره والمثلث بالتمدد محافظين على شكلهما ووضعهما، بحيث يتمدد نصف قطر الدائره بمعدل ٣ سم/د، جد معدل تغير مساحه المنطقه المحصوره بين الدائره والمثلث عندما يكون نصف قطر الدائره ٩ سم.

الحل



مساحه المنطقه المحصوره = مساحه الدائره - مساحه المثلث.

$\therefore$ م = π نق^2 - $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2

$\Leftarrow$ م = π نق^2 - $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ($\sqrt{3}$ نق)^2

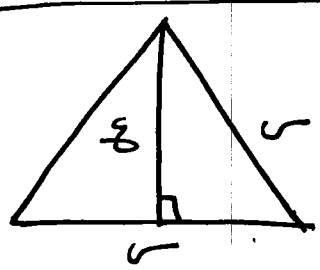
= π نق^2 - $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ نق^2

$\therefore$ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢π نق $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ - $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ × ٢نق $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\Leftarrow$ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ عندما نق = ٩ و $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ = ٣ سم/د

$\therefore$ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢π(٩)(٣) - $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ × (٩) × (٣)

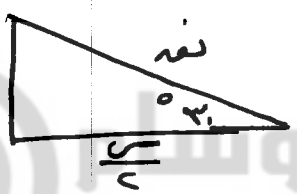
$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٥٤π - $\frac{81\sqrt{3}}{2}$



مساحه المثلث = $\frac{1}{2}$ × س × ع

ع = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ س

مساحه المثلث = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2



جتا ٣٠ = $\frac{\text{س}}{\text{٢نق}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

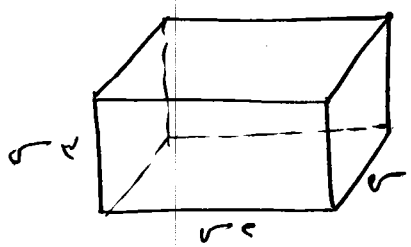
$\therefore$ س = $\sqrt{3}$ نق

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل
(مسائل متغيرة سابقة)

السؤال الثالث :

صندوق معدني على شكل متوازي مستطيلات طوله ضعفي عرضه وارتفاعه ٣ أمثال عرضه ، يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله بحيث يزداد حجمه بمعدل ٧٢ سم٣/د حيد معدل التغير في مساحة سطحه الكلي عندما يكون طوله ٣٦ سم



الحل :- $\frac{dح}{dن} = ٧٢$ سم٣/د

$ح = ٢(س)(٣س) + ٢(٢س)(س) + ٢(س)^٢$

$= ٢٢ س^٢$

$\therefore \frac{dح}{dن} = ٤٤ س \frac{dس}{dن}$ ، ولكن $ح = (س)(٢س)(٣س) = ٦س^٣$

$\Leftarrow \frac{dح}{dن} = ٤٤ س \times \frac{٤}{س}$

$= \frac{١٧٦}{س}$

$\therefore \frac{dح}{dن}$ عندما $ح = ٣٦ \Leftarrow س = ١٨$ لأن طول القاعدة هو س

$\Leftarrow \frac{dح}{dن} = \frac{١٧٦}{١٨} = \frac{٨٨}{٩}$ سم٣/د

$\therefore \frac{dح}{dن} = ٦(٣)س^٢ \times \frac{dس}{dن}$

$\therefore \frac{dس}{dن} = \frac{٧٢}{١٨س^٢} = \frac{٤}{س^٢}$

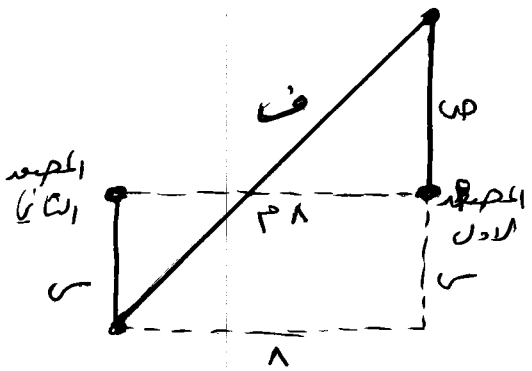
مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الرابع :

مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي ، المسافة الافقية بينهما ٨ م ، بدأ المصعد الأول في الارتفاع للأعلى بسرعة ٣ م/ث وبعد ثانية بدأ المصعد الثاني في الانخفاض للاسفل بسرعة ٢ م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء الحركة للمصعد الثاني .



الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢$

المطلوب: $\left.\frac{\text{دف}}{\text{دن}}\right|_{\text{ن} = ٢}$

$\text{ف}^٢ = (\text{س} + \text{ص})^٢ + ٨^٢$

$\Leftarrow \text{ف} = \sqrt{(\text{س} + \text{ص})^٢ + ٦٤}$

$\therefore \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{٢}(\text{س} + \text{ص})\left(\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}}\right)}{\cancel{٢}\sqrt{(\text{س} + \text{ص})^٢ + ٦٤}}$ ولكن $\text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times ٣ = ٩$ قدم

$\text{س} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times ٢ = ٤$ قدم

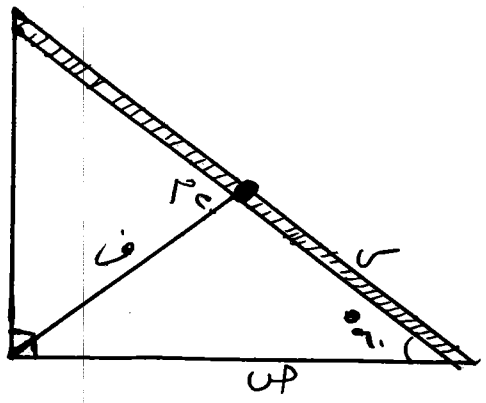
$\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{(٩ + ٤)(٢ + ٣)}{\sqrt{(١٣)^٢ + ٦٤}} = \frac{٦٥}{\sqrt{٢٣٣}}$ م/ث

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الخامس :

يرتكز سلم طوله ٢٠ م بطرفه العلوي على حائط عمودي ، وبطرفه السفلي على أرض مستوية يميل عنها بزاوية ٦٠° ، بدأ رجل إطفاء صعود السلم بمعدل ٣ م/د ، جد معدل تغير المسافة بين الرجل ونقطة التقاء الحائط مع الأرض في اللحظة التي يكون فيها الرجل في منتصف السلم .



ص = ٢٠ × جتا٦٠ = ١٠

الحل :

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣$ م/د

$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٢\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{جتا}٦٠$

$\therefore \text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + ١٠٠ - ٢\,\text{س}(١٠)\,\text{جتا}٦٠$

$= \text{س}^٢ - ١٠\,\text{س} + ١٠٠$

$\Leftarrow ٢\,\text{ف}\,\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢\,\text{س}\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}} - ١٠\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{٢}(\text{س} - ٥)\,\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{\cancel{٢}\,\text{ف}}$ ← بما أن رجل الاطفاء بمنتصف المسافة اذن س = ١٠

$\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{(١٠ - ٥)\,(٣)}{\sqrt{(١٠)^٢ - ١٠(١٠) + ١٠٠}} = ١,٥$ م/ث

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* أولاً : النقط الحرجة

إذا كانت $س_1$ ضمن مجال الإقتران ق ، فإن القيمة $س_1$ تسمى قيمة حرجة للإقتران ق اذا تحقق أن $ق'(س_1) = 0$ أو $ق'(س_1)$ غير موجوده ، وفي هذه الحالة تسمى النقطة $(س_1 ، ق(س_1))$ نقطة حرجة للاقتران ق

مثال (١) :-

جد النقط الحرجة للاقتران $ق(س) = 3س^2 - س^3$ ، $س \in [-2 ، 3]$

الحل :

$ق'(س) = 6س - 3س^2$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 6س - 3س^2 = 0$

$3س(2 - س) = 0$

∴ عند $س = 0$ و $س = 2$ نقط حرجة

وتكون أيضاً عند $ق'(س)$ غير موجوده عند $س = -2$ و $س = 3$ لانها أطراف فترة

∴ النقاط الحرجة هي

$(0 ، ق(0)) \longrightarrow (0 ، 0)$

$(2 ، ق(2)) \longrightarrow (2 ، 4)$

$(-2 ، ق(-2)) \longrightarrow (-2 ، 20)$

$(3 ، ق(3)) \longrightarrow (3 ، 0)$

* مع ملاحظة أن جميع قيم س التي تمثل النقط الحرجة هي من ضمن الفترة $[-2 ، 3]$

مثال (٢) :

جد النقط الحرجة للاقتران .

$ق(س) = جاس - \frac{1}{3} جا^3 س$ ، $س \in [0 ، \pi]$

الحل :

$ق'(س) = جتاس - جا^2 س \, جتاس$

$= جتاس(1 - جا^2 س) = جتا^3 س$

عند $ق'(س) = 0$

$جتا^3 س = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$ وهي من ضمن الفترة $[0 ، \pi]$

وتكون $ق'(س)$ غير موجوده عند $س = 0$ و $س = \pi$ ، أطراف الفترة

$\Leftarrow$ تكون النقط الحرجة لـ $ق(س)$ هي

$(0 ، ق(0)) \longrightarrow (0 ، 0)$

$(\frac{\pi}{2} ، ق(\frac{\pi}{2})) \longrightarrow (\frac{\pi}{2} ، \frac{2}{3})$

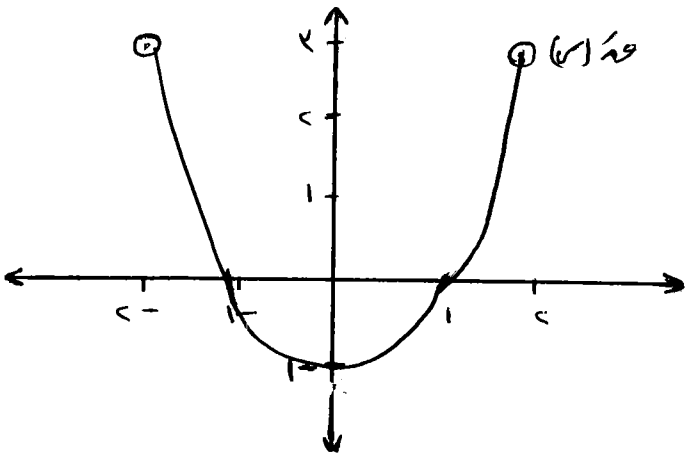
$(\pi ، ق(\pi)) \longrightarrow (\pi ، 0)$

* جميع قيم س التي تمثل النقط الحرجة هي من ضمن الفترة $[0 ، \pi]$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٣) :

يمثل الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $هـ$ حيث $هـ(س)$ معرف على الفترة $[-٢، ٢]$
اعتمد على الشكل في تعيين النقط الحرجة للاقتران $هـ$.



الحل :

نتيم $س$ للنقاط الحرجة عندما $هـ'(س) = ٠$
و $هـ'(س)$ غير موجودة

∴ عند $س = ١$ و $س = -١$ ⇐ $هـ'(س) = ٠$

وعند أطراف الفترة $س = -٢$ و $س = ٢$

∴ النقط الحرجة عند
$(-٢، هـ(-٢))$ ، $(-١، هـ(-١))$
$(١، هـ(١))$ ، $(٢، هـ(٢))$

مثال (٤)

جد قيم $أ$ و $ب$ التي تجعل للاقتران
$هـ(س) = س^٣ + أس^٢ + ب س$ نقطتين حرجتين عند $س = -١$ ، $س = ٣$

الحل :

$هـ'(س) = ٣س^٢ + ٢أس + ب$

∴ $هـ'(-١) = ٠$ ، $هـ'(٣) = ٠$

$هـ'(-١) = ٣(-١)^٢ + ٢أ(-١) + ب = ٠$

$\Leftarrow -٢أ + ب = -٣$ ——— ①

$هـ'(٣) = ٣(٣)^٢ + ٢أ(٣) + ب = ٠$

$\Leftarrow ٦أ + ب = -٢٧$ ——— ②

نحل المعادلتين

$-٢أ + ب = -٣$
$٦أ + ب = -٢٧$ (−)

$-٨أ = ٢٤$

$\boxed{أ = -٣}$ ∴

$\Leftarrow -٢(-٣) + ب = -٣$

$\boxed{ب = -٩}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* ثانياً : التزايد والتناقص

* تعريف :

اذا كانت $ق(س)$ اقتراناً معرفاً على الفترة $[أ، ب]$ وكانت $س_1، س_2 \in [أ، ب]$ عندئذ يكون الاقتران $ق$:

١) متزايداً على الفترة $[أ، ب]$ اذا كانت $ق(س_1) < ق(س_2)$ لكل $س_1 < س_2$

٢) متناقصاً على الفترة $[أ، ب]$ إذا كانت $ق(س_1) > ق(س_2)$ لكل $س_1 < س_2$

٣) ثابتاً على الفترة $[أ، ب]$ إذا كانت $ق(س_1) = ق(س_2)$ لكل $س_1 < س_2$

* نظرية

إذا كان $ق(س)$ اقتراناً متصلاً على الفترة $[أ، ب]$ وقابلاً للاشتقاق على الفترة $(أ، ب)$ وكان :

١) $ق'(س) > ٠$ ، لجميع قيم $س \in (أ، ب)$ فإن $ق(س)$ يكون متزايداً على الفترة $[أ، ب]$

٢) $ق'(س) < ٠$ ، لجميع قيم $س \in (أ، ب)$ فإن $ق(س)$ يكون متناقصاً على الفترة $[أ، ب]$

٣) $ق'(س) = ٠$ ، لجميع قيم $س \in (أ، ب)$ فإن $ق(س)$ يكون ثابتاً على الفترة $[أ، ب]$

مثال (١) :

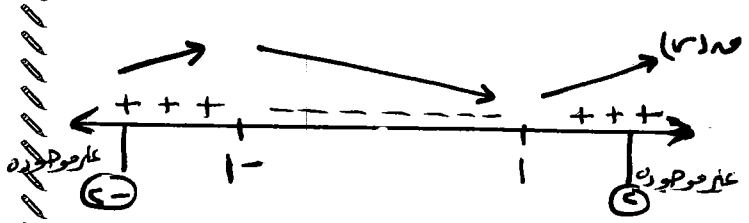
جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = س^3 - ٣س$ ، $س \in [-٢، ٢]$

الحل :

$ق(س)$ متصل على الفترة $[-٢، ٢]$ وقابل للاشتقاق على الفترة $(-٢، ٢)$ لأنه كثير حدود

$\therefore ق'(س) = ٣س^2 - ٣ = ٠$

$\Rightarrow س = -١$ أو $س = ١$



$\therefore$ فترات التزايد $ق(س) > ٠$

$[-٢، -١]$ و $[١، ٢]$

وفترات التناقص $ق(س) < ٠$

$[-١، ١]$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٢) :

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

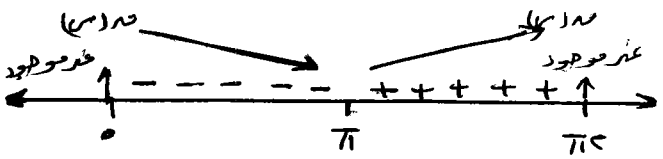
ق(س) = جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل :

ق إقتران متصل على الفترة [٠ ، ٢π] و قابل للإشتقاق على الفترة (٠ ، ٢π)

ق'(س) = −جا س = ٠

⟸ س = ٠ و س = π



∴ ق'(س) < ٠ لكل س ∈ (٠ ، π) وعليه ق(س) متناقص على الفترة [٠ ، π]

و ق'(س) > ٠ لكل س ∈ (π ، ٢π) وعليه ق(س) متزايد على الفترة [π ، ٢π]

مثال (٣) :

إذا كان

ق(س) = { س² + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠
[س + ٤] ، ٠ < س < ١
|٣س + ١| ، س ≥ ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق على مجاله .

الحل :

اعادة تعريف الاقتران ق(س)

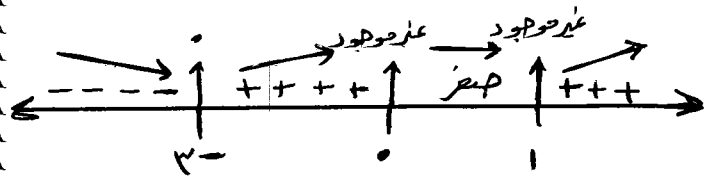
ق(س) = { س² + ٦س + ٤ ، س ≤ ٠
٤ ، ٠ < س < ١
٣س + ١ ، س ≥ ١

∴ ق'(س) = { ٢س + ٦ ، س < ٠
٠ ، ٠ < س < ١
٣ ، س > ١

تكون ق'(س) غير موجود عند س = ٠ و س = ١

ق'(س) = ٠ عند ٢س + ٦ = ٠

∴ س = −٣ وهي من ضمن الفترة س < ٠



∴ ق'(س) < ٠ لكل س ∈ (−∞ ، −٣) وعليه ق(س) اقتراناً متناقصاً على الفترة (−∞ ، −٣]

ق'(س) > ٠ لكل س ∈ (−٣ ، ٠) و (١ ، ∞) وعليه ق(س) اقتراناً متزايداً على الفترتين [−٣ ، ٠] و [١ ، ∞)

ق'(س) = ٠ ، لكل س ∈ (٠ ، ١) وعليه يكون ق(س) اقتراناً ثابتاً على الفترة [٠ ، ١]

مكتبة الإسلام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* ثالثاً : القيم القصوى :

* أنواع القيم القصوى :
① قيمة صغرى محلية
② قيمة صغرى مطلقة
③ قيمة عظمى محلية
④ قيمة عظمى مطلقة .

* ملاحظة (١) :
اذا كانت (س ، ق(س)) قيمة قصوى فإنه س قيمة حرجة .

* ملاحظة (٢) :
جميع القيم القصوى للاقتران داخل فترة المجال تعتبر محلية واذا كانت القيم القصوى أطراف فترة المجال فلا تعتبر محلية

* ملاحظة (٣)
أكبر قيمة من القيم العظمى تعتبر مطلقة
أصغر قيمة من القيم الصغرى تعتبر مطلقة

* ملاحظة (٤) :
القيمة المطلقة قد تكون داخل الفترة أو على أطراف فترة المجال

* تعريف :
اذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ،ب] وكان س١ ∈ [أ،ب] ، فإن :
١) ق(س١) قيمة عظمى محلية للاقتران ق ، إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي س١ وكان ق(س١) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ ف
٢) ق(س١) قيمة صغرى محلية للاقتران ق ، إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي س١ وكان ق(س١) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ ف
٣) ق(س١) قيمة عظمى مطلقة للاقتران ق ، اذا كان ق(س١) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ [أ،ب]
٤) ق(س١) قيمة صغرى مطلقة للاقتران ق ، إذا كان ق(س١) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ [أ،ب]

* نظرية (١) :
إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة [أ،ب] وكانت ق(ج) قيمة قصوى للاقتران ق حيث ج ∈ [أ،ب] ، فإن ق'(ج) غير موجودة أو ق'(ج) = ٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* نظرية (٤) :

نظرية (إختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى)

اذا كانت ق(س) اقترانا متصلاً على الفترة [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (أ، ب) وكانت النقطة (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق ، حيث جـ ∈ (أ، ب) عندئذٍ :

① اذا كانت ق'(س) ≥ ٠ لكل س < جـ وكانت ق'(س) ≤ ٠ لكل س > جـ فإن ق(جـ) تكون قيمة عظمى محلية للاقتران ق

② اذا كانت ق'(س) ≤ ٠ لكل س < جـ وكانت ق'(س) ≥ ٠ لكل س > جـ فإن ق(جـ) تكون قيمة صغرى محلية للاقتران ق

* مثال (١) :

جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س)

ق(س) = س٤ - ٢س٣ + ١ ، س ∈ [-٢، ٤]

الحل :

ق(س) متصل على الفترة [-٢، ٤]

لأنه كثير الحدود وقابل للاشتقاق على الفترة (-٢، ٤) حيث

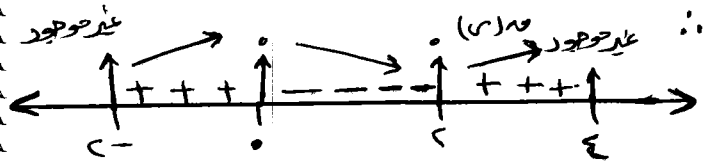
ق'(س) = ٤س٣ - ٦س٢ = ٠

∴ ٢س٢ - ٦س = ٠ ⇐ ٢س(س - ٣) = ٠

س = ٠ و س = ٣

وتكون ق'(س) غير موجودة عند أطراف الاقتران س = -٢ و س = ٤

∴



∴ قيمة عظمى محلية عند س = ٠ وهي (٠ ، ١)

قيمة صغرى محلية عند س = ٣ وهي (٣ ، -٢٦)

قيمة عظمى مطلقة عند س = ٤ وهي (٤ ، ١٧) - طرف فترة ولا تعتبر قيمة عظمى محلية

قيمة صغرى مطلقة عند س = -٢ وهي (-٢ ، -١٩) - طرف فترة ولا تعتبر قيمة صغرى محلية

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٢) :

جد القيم القصوى المحلية والمطلقة ان وجدت للاقتران ق(س) = جتا س − $\frac{1}{3}$ جتا^3 س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل :

ق(س) متصل على الفترة [٠ ، ٢π] وقابل للاشتقاق لكل س ∈ (٠ ، ٢π) .

ق′(س) = − جا س + جتا^2 س جا س .

= − جا س (١ − جتا^2 س)

= − جا^3 س .

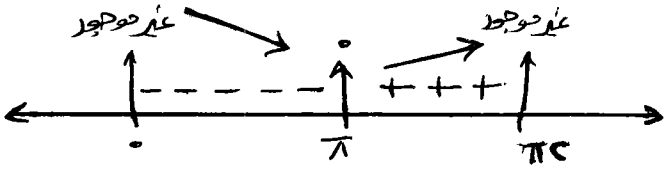
∴ لايجاد النقاط الحرجة فإن ق′(س) = ٠

⟸ − جا^3 س = ٠ ⟸ س = π

∴ ق′(س) غير موجودة عند س = ٠ ، ٢π .

اذن النقط الحرجة للاقتران هي

(٠ ، $\frac{2}{3}$) ، (π ، $\frac{-2}{3}$) ، (٢π ، $\frac{2}{3}$)



∴ للاقتران ق قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = π هي ق(π) = $-\frac{2}{3}$.

وقيمة عظمى مطلقة عند س = ٠ و ٢π هي $\frac{2}{3}$

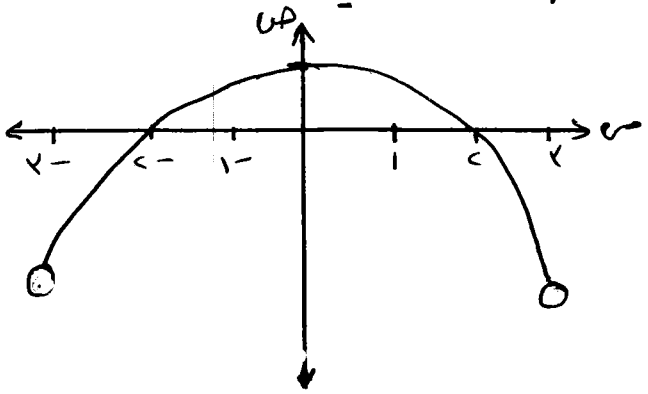
مثال (٣) :

معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران كثير الحدود ق معرف على الفترة [−٣ ، ٣] جد ما يلي :

١) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق

٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق

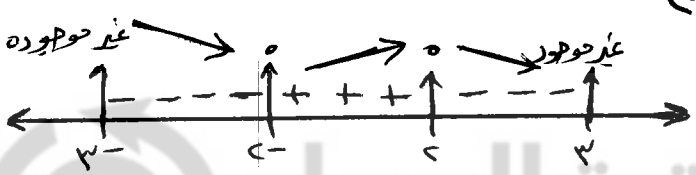
٣) قيم س التي يكون للإقتران عندها قيم قصوى محلية



الحل :

١) النقط الحرجة عند ق′(س) = ٠ او غير موجودة اي عند س = −٣ ، س = −٢ ، س = ٢ و س = ٣ . اذن قيم س الحرجة للاقتران هي {−٣ ، −٢ ، ٢ ، ٣}

٢)



ق متناقص في الفترتين [−٣ ، −٢] و [٢ ، ٣]

ق متزايد في الفترة [−٢ ، ٢]

٣) قيمة صغرى محلية عند س = −٢

قيمة عظمى محلية عند س = ٢

مكتبة المعلم
AL-MUSAM
المعلم: جلال النعيمي
Jalal

* رابعاً : التقعر :

* تعريف (١) :

ليكن ه إقتراناً معرفاً على الفترة [أ، ب] وقابلاً للإشتقاق على الفترة (أ، ب) فيكون منحنى ه :

① مقعراً للأسفل على الفترة [أ، ب] إذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى الاقتران ه في الفترة [أ، ب]

② مقعراً للأعلى على الفترة [أ، ب] اذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى الإقتران ه في الفترة [أ، ب]

* نظرية (١) :

إختبار التقعر

إذا كان ه إقتراناً متصلاً على الفترة [أ، ب] وكان كل من هَ(س)، وهَ(س) معرفتين على الفترة (أ، ب) فإن :

١) لكي يكون منحنى الاقتران ه مقعراً للأسفل على الفترة [أ، ب] ، اذا كان وهَ(س) > ٠ لكل س ∈ (أ، ب)

٢) لكي يكون منحنى الإقتران ه مقعراً للأعلى على الفترة [أ، ب] ، إذا كان وهَ(س) < ٠ لكل س ∈ (أ، ب)

* تعريف (٢) :

إذا كان ه إقتراناً متصلاً على فترة مفتوحة تحوي س١ ، وكان منحنى ه يغير إتجاه تقعره عند س١ فإن النقطة (س١ ، ه(س١)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ه

* تعريف (٣) :

إختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية :

على فرض أن هَ(س) وهَ(س) معرفتان عند س١ ∈ (أ، ب) عندئذٍ :

١) اذا كان هَ(س١) = ٠ وهَ(س) > ٠ فإن الإقتران ه فيه صغرى محلية عند س١ هي ه(س١)

٢) اذا كان هَ(س١) = ٠ وهَ(س) < ٠ فإن الاقتران ه فيه عظمى محلية عند س١ هي ه(س١)

٣) اذا كان هَ(س١) = ٠ وهَ(س١) = ٠ ، فإن الإختبار يفشل ، فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام إختبار المشتقة الأولى

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (١) :

إذا كان $هـ(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + ٤س^{٢} + ١$ ، جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران هـ .

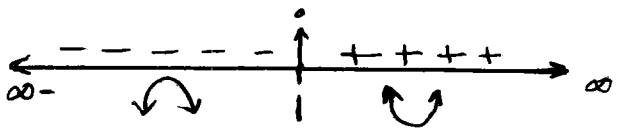
الحل :

$هـ(س) = ٣س^{٤} - ٦س^{٢} + ٣$

$هـ'(س) = ٦س - ٦س$

$هـ'(س) = ٠ \Leftarrow ٦س - ٦س = ٠$

$س = ١$ ، -١



∴ منحنى الاقتران مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, ١]$ لأن $هـ''(س) < ٠$ لكل $س \in (-\infty, ١)$ ومقعر للأعلى على الفترة $[١, \infty)$ لأن $هـ''(س) > ٠$ لكل $س \in (١, \infty)$

مثال (٢) :

جد فترات التقعر للأسفل والأعلى لمنحنى الاقتران $هـ(س) = س^{\frac{١}{٥}}$ ، $س \in [-٢, ٢]$

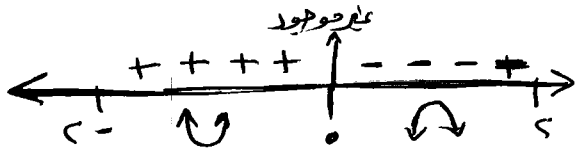
الحل :

$هـ(س) = س^{\frac{١}{٥}}$

$هـ'(س) = \frac{١}{٥} س^{-\frac{٤}{٥}}$

$هـ''(س) = -\frac{٤}{٢٥} س^{-\frac{٩}{٥}} = \frac{-٤}{٢٥ \sqrt[٥]{س^{٩}}}$

∴ $هـ''(س) = ٠ \Leftarrow$ حول $س = ٠$



∴ المنحنى هـ مقعر للأعلى على الفترة $[-٢, ٠]$ ومقعر للأسفل في الفترة $[٠, ٢]$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٣) :

جد قيم س التي تجعل لمنحنى الاقتران ق حيث نقط انعطاف، حيث
ق(س) = ٢جاس + ½ جا٢س ، حيث
س ∈ [٠ ، ٢π]

الحل :

ق(س) متصل على الفترة [٠ ، ٢π] و
قابل للاشتقاق على الفترة (٠ ، ٢π)

ق'(س) = ٢جتاس + جتا٢س .

ق''(س) = - ٢جاس - ٢جا٢س = ٠

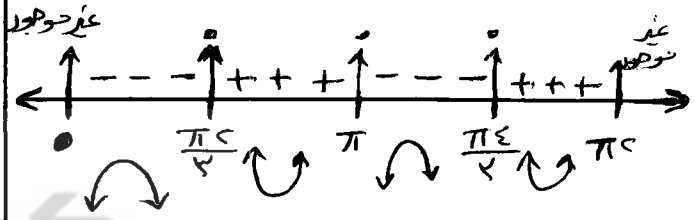
- ٢جاس - ٤جاس جتاس = ٠

- ٢جاس (١ + ٢جتاس) = ٠

∴ - ٢جاس = ٠ ⇐ س = ٠ أو π
أو ٢π - تُرفض القيم ٠ و ٢π
لأنها أطراف المجال

أو ١ + ٢جتاس = ٠ ⇐ جتاس = $-\frac{١}{٢}$

س = $\frac{٢π}{٣}$ أو $\frac{٤π}{٣}$



∴ نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق
س = $\frac{٢π}{٣}$ ، π ، $\frac{٤π}{٣}$

مثال (٤) :

إذا كان ق(س) = س^{٤} - ٢س^{٣} + ٢
فجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق
باستخدام اختبار المشتقة الثانية .

الحل :

ق'(س) = ٢س^{٣} - ٦س = ٠

⇐ ٢س (س - ٢) = ٠

⇐ س = ٠ و س = ٢

∴ الاقتران ق عند نقطتان حرجتان
(٠ ، ٢) و (٢ ، -٢)

⇐ حسب اختبار المشتقة الثانية نجد أن
ق''(س) = ٦س - ٦

ق''(٠) = - ٦ < ٠ إذن للاقتران قيمة
عظمى محلية عند س = ٠ هي ق(٠) = ٢

ق''(٢) = ٦ > ٠ إذن للاقتران قيمة
صغرى محلية عند س = ٢ هي ق(٢) = -٢

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* خامساً : تطبيقات القيم القصوى .

مثال (١) :

قطعة أرض مستطيلة الشكل ، محيطها ٨٠٠ م ، جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض أن س ، ص بعدا قطعة الأرض ومساحتها م

المعطيات :

محيط قطعة الأرض = ٨٠٠ م

المطلوب :-

إيجاد قيمتي س ، ص لتكون م أكبر ما يمكن .

أولاً ⇐ م = س ص ، يجب جعل العلاقة بدلالة متغير واحد س أو ص

∴ ٢ س + ٢ ص = ٨٠٠ ⇐ ص = ٤٠٠ - س

⇐ م = س (٤٠٠ - س)

٠ < س < ٤٠٠

∴ م′ (س) = ٤٠٠ - ٢ س

م′ (س) = ٠ ⇐ ٤٠٠ - ٢ س = ٠

س = ٢٠٠

←

ولإختبار أنه للإقتران قيمة عظمى عند س = ٢٠٠ نجد م″ (٢٠٠)

⇐ م″ (٢٠٠) = - ٢ < ٠

∴ للإقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٢٠٠

أي تكون أكبر مساحة لقطعة الأرض ممكنة هي عند س = ٢٠٠

∴ ص = ٤٠٠ - ٢٠٠ = ٢٠٠

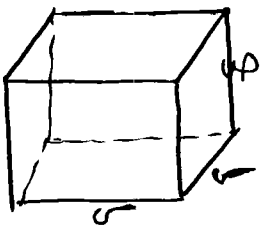
⇐ س = ٢٠٠ و ص = ٢٠٠

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (١) :

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠ سم جد أبعاد متوازي المستطيلات الذي يجعل حجمه أكبر ما يمكن.

الحل



نفرض أن س طول قاعدته و أن ص الارتفاع و ح هو الحجم

المعطيات :-

$٨س + ٤ص = ٦٠$

المطلوب :

ايجاد أبعاد متوازي المستطيلات س و ص ليكون حجمه ح أكبر ما يمكن.

$ح = س \times س \times ص = س^٢ ص$ — ①

ولكن $٨س + ٤ص = ٦٠$

$\therefore ص = ١٥ - ٢س$ — ②

نعوض معادلة ② في ①

$\Leftarrow ح = س^٢ (١٥ - ٢س)$

$= ١٥س^٢ - ٢س^٣ ، ٠ < س < ٧٥$

لأنه أكبر ممكن لـ س عندما $ص = ٠$

$١٥ - ٢س = ٠ \Leftarrow س = ٧٥$

$\therefore$ المجال هو $٠ < س < ٧٥$

$\Leftarrow ح (س) = ١٥س^٢ - ٢س^٣$

$ح' (س) = ٣٠س - ٦س^٢ = ٠$

$\Leftarrow س = ٠$ أو $س = ٥٠$

$س = ٠$ نرفضها

$\Leftarrow س = ٥٠$

$\therefore ح'' (س) = ٣٠ - ١٢س$

$ح'' (٥٠) = -٣٠ < ٠$

$\therefore$ للاقتران ممكن عظمى محلية عند $س = ٥٠$

$\Leftarrow ص = ١٥ - ٢س = ٥٠$

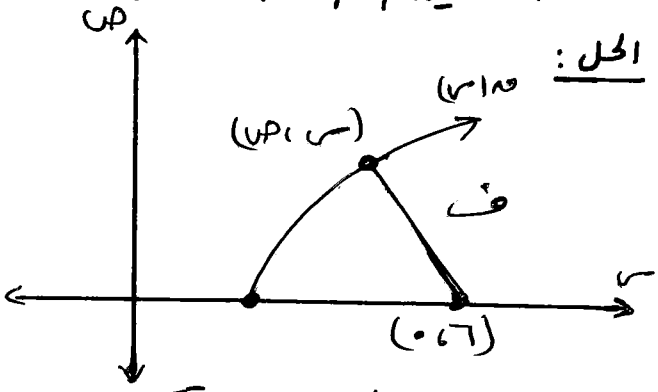
أي أن ح يكون أكبر ما يمكن عند $س = ٥٠$ و $ص = ٥٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٣) :

جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٠، ٦)

الحل :



نفرض أن النقطة (س، ص) تقع على منحنى ق وأن ف البعد بين النقطة (س، ص) و (٠، ٦)

المعطيات :

ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ والنقطة (٠، ٦)

المطلوب :

إيجاد إحداثيي النقطة (س، ص) لتكون المسافة ف أقل ما يمكن .

ف = $\sqrt{(س - ٦)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

= $\sqrt{(س - ٦)^٢ + ص^٢}$

= $\sqrt{س^٢ - ١٢س + ٣٦ + ص^٢}$

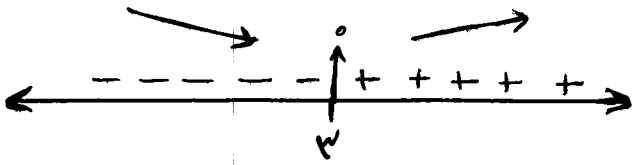
ولكن ص = $\sqrt{س^٢ - ٤}$

$\Leftarrow$ ف(س) = $\sqrt{٢س^٢ - ١٢س + ٣٢}$

ف'(س) = $\frac{٤س - ١٢}{٢\sqrt{٢س^٢ - ١٢س + ٣٢}}$

ف'(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٤س - ١٢ = ٠

$\Leftarrow$ س = ٣



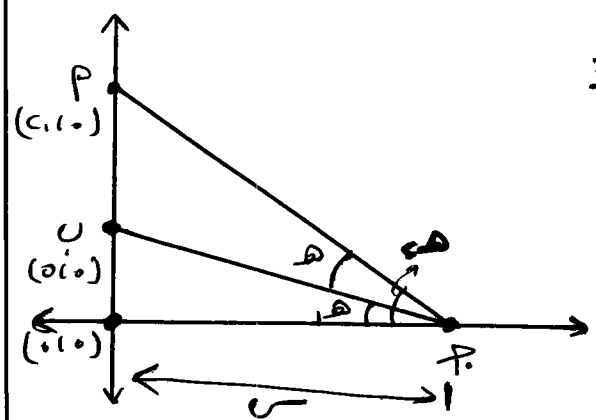
∴ للاقتران ف قيمة صغرى محلية عند س = ٣ $\Leftarrow$ ص = $\sqrt{٢^٢ - ٤}$ = $\sqrt{٥}$

أي أن المسافة ف تكون أقل ما يمكن عندما تكون النقطة (س، ص) هي ($٣، \sqrt{٥}$)

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٤) :
أ (٠، ٠) و ب (٥، ٠) نقطتان ثابتتان ، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب ، حيث بعد النقطة جـ عن نقطة الأصل لكي يكون قياس الزاوية أ جـ ب أكبر ما يمكن .

الحل :



نفرض أن زاوية أ جـ ب قياسها هـ
و هـ = هـ٢ - هـ١ كما هو موضح بالشكل
و جـ م = س .

المعطيات : أ (٠، ٠) ب (٥، ٠)
و جـ نقطة تتحرك على محور السينات

المطلوب : إيجاد أكبر قياس ممكن للزاوية أ جـ ب = (هـ)

$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1) = \frac{\text{ظا هـ}_2 - \text{ظا هـ}_1}{1 + \text{ظا هـ}_2 \, \text{ظا هـ}_1}$$

$$\text{ظا هـ}_1 = \frac{٥}{س} \text{ و ظا هـ}_2 = \frac{٠}{س} \text{ وعليه}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\frac{٥}{س} - \frac{٠}{س}}{1 + \frac{٥}{س} \times \frac{٠}{س}} = \frac{\frac{١٥}{س}}{\frac{س^٢ + ١٠٠}{س^٢}}$$

$$\Leftarrow \text{ظا هـ} = \frac{١٥ س}{س^٢ + ١٠٠} \text{ وباشتقاقه بالطرفين نجد أن}$$

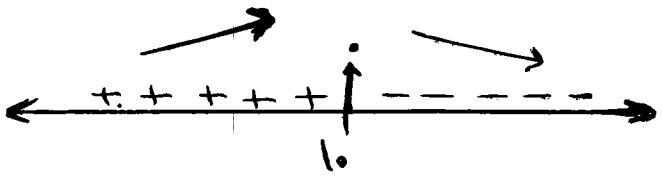
$$\text{قا}^٢ \text{هـ} \cdot \text{هـ}' = \frac{(س^٢ + ١٠٠)(١٥) - ١٥ س \times ٢ س}{(س^٢ + ١٠٠)^٢}$$

$$= \frac{١٥ س^٢ + ١٥٠٠ - ٣٠ س^٢}{(س^٢ + ١٠٠)^٢}$$

$$= \frac{١٥٠٠ - ١٥ س^٢}{(س^٢ + ١٠٠)^٢} \Leftarrow \text{هـ}' = ٠$$

عندما ١٥٠٠ - ١٥ س^٢ = ٠

$$\Leftarrow س = ١٠ \text{ ومن اختبار إشارة هـ}'$$



أي أن أكبر قياس للزاوية هـ عندما تكون س = ١٠

أي أن النقطة جـ هي (١٠، ٠)

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

مثال (٥)

مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج س جهازاً سنوياً يبيع كل جهاز بسعر (٥٠٠ - ١٠٠ س) دينار ، فإذا كانت تكلفة إنتاج هذه الأجهزة (٥٠ س + ٥٠٠) دينار فكم جهازاً ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنوياً .

الحل :-

الربح = الايراد - التكلفة

الايراد = سعر القطعة × عدد القطع المباعة

المعطيات :

س جهاز سنوياً ينتج .

سعر الجهاز الواحد = ٥٠٠ - ١٠٠ س

تكلفة الانتاج = ٥٠ س + ٥٠٠

المطلوب : أكبر ربح ممكن تحقيقه سنوياً

ر (س) = د (س) - ت (س)

د (س) = (٥٠٠ - ١٠٠ س) س

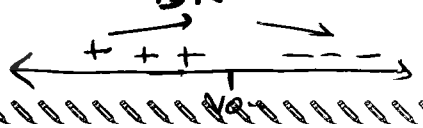
ت (س) = ٥٠ س + ٥٠٠

⇐ ر (س) = (٥٠٠ - ١٠٠ س) س - (٥٠ س + ٥٠٠)

= - ١٠٠ س^{٢} + ٤٥٠ س - ٥٠٠

⇐ ر′ (س) = - ٢٠٠ س + ٤٥٠ = ٠

س = $\frac{٤٥٠}{٢٠٠}$ = ٢٫٢٥ جهاز



مثال (٦) :

مجموع عددين موجبين عدد آخر يساوي ٤٠ ، جد العددين بحيث تكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الحل :

نفرض أن العددين س ، ص

∴ س + ص = ٤٠ ـــ ①

ل = س × ص ـــ ②

المطلوب : أكبر حاصل ضرب العددين ممكن

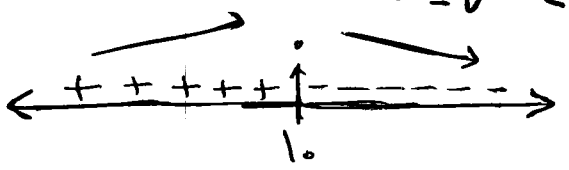
ل = س × ص ولكن ص = ٤٠ - س

⇐ ل (س) = س (٤٠ - س)

ل (س) = ٤٠ س - س^{٢}

ل′ (س) = ٤٠ - ٢ س = ٠

⇐ س = ٢٠



∴ ص = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠

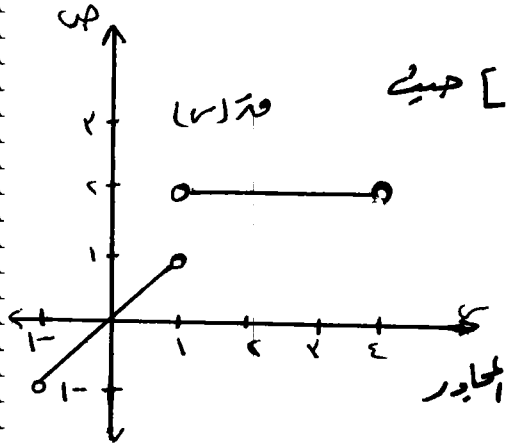
∴ العددين هما س = ٢٠ ، ص = ٢٠

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

السؤال الأول :

إذا كان بيان الاقتران $هـ(س)$ متصل على الفترة $[-١ ، ٤]$ حيث

$$هـ(س) = \begin{cases} ج س^{٢} + د س + هـ & ، -١ \leq س < ١ \\ ب س + ب & ، ١ \leq س \leq ٤ \end{cases}$$



وفيما يلي منحنى المشتقة الأولى للاقتران $هـ(س)$ كما في الشكل المجاور

حدد كلا مما يلي :

١) النقط الحرجة للاقتران $هـ(س)$

٢) فترات التزايد والتناقص للاقتران $هـ(س)$

٣) قيم $س$ التي يكون عندها للاقتران $هـ(س)$ قيم قصوى محلية .

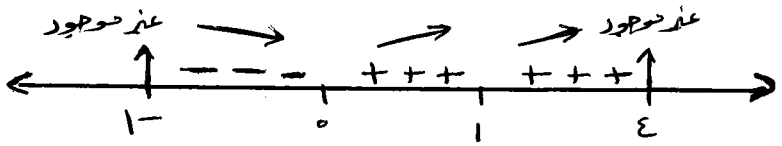
٤) قيم كل من الثوابت $أ ، ب ، ج ، د ، هـ$ علماً بأن $هـ'(-١) = ٢$ ، $هـ(٤) = ٨$

الحل :

١) النقط الحرجة $\Leftarrow هـ'(س) = ٠ \Leftarrow$ ومنه إما $س = ٠$

أو $هـ'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = -١ ، ١ ، ٤$

٢)



$\therefore$ فترات التناقص هي $[-١ ، ٠]$ وفترات التزايد $[٠ ، ٤]$

٣) عند $س = ٠$ يوجد قيمة صغرى محلية

٤) $هـ'(س) = \begin{cases} ٢ أ س + د & ، -١ < س < ١ \\ أ & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$

ومنه الرسم $هـ'(س) = \begin{cases} س & ، -١ < س < ١ \\ ٢ & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$

يتبع

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

يتبع السؤال الاول :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{جـ}\,\text{س} + \text{د} & ، -١ < \text{س} < ١ \\ \text{أ} & ، ١ < \text{س} < ٤ \end{cases} = \begin{cases} \text{س} & ، -١ < \text{س} < ١ \\ ٢ & ، ١ < \text{س} < ٤ \end{cases}$$

بالمقارنة $\Leftarrow$ $\boxed{\text{أ} = ٢}$

$٢\text{جـ} = ١ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = \frac{١}{٢}}$

$\boxed{\text{د} = ٠}$

$\text{ق}(-١) = ٢ \Leftarrow \text{جـ}\,\text{س}^٢ + \text{د}\,\text{س} + \text{هـ} = ٢$ عند $\text{جـ} = \frac{١}{٢}$ و $\text{د} = ٠$

$\Leftarrow \frac{١}{٢}(-١)^٢ + ٠(-١) + \text{هـ} = ٢ \Leftarrow \boxed{\text{هـ} = \frac{٣}{٢}}$

$\text{ق}(٤) = ٨ \Leftarrow \text{أ}\,\text{س} + \text{ب} = ٨$ عند $\text{س} = ٤$ و $\text{أ} = ٢$

$\Leftarrow ٢(٤) + \text{ب} = ٨ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٠}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الثاني :

إذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{س^3 - 27س}$ ، $س \in [-10 ، 10]$ ، فجد كلا مما يلي

١) مجالات التزايد و التناقص للاقتران ق(س)

٢) القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق(س)، ان وجدت

الحل :

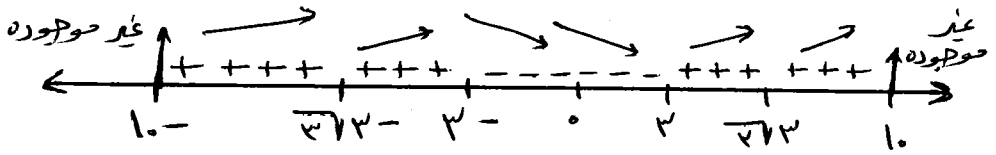
$ق(س) = (س^3 - 27س)^{\frac{1}{3}}$

$ق'(س) = \frac{1}{3}(س^3 - 27س)^{\frac{-2}{3}}(3س^2 - 27) = \frac{3س^2 - 27}{3\sqrt[3]{(س^3 - 27س)^2}}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 27 = 0 \Leftarrow س = \pm 3$

$ق'(س)$ غير موجوده عند أصفار المقام $\Leftarrow س^3 - 27س = 0$

$\Leftarrow س(س^2 - 27) = 0 \Leftarrow س = 0$ و $س = \pm\sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3}$



١) الاقتران ق(س) يتناقص في الفترة $[-3 ، 3]$

الاقتران ق(س) يتزايد في الفترة $[-10 ، -3]$ و $[3 ، 10)$

٢) للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند $س = -3$ وقيمتها $ق(-3)$

$ق(-3) = \sqrt[3]{(-3)^3 - 27(-3)} = 3\sqrt[3]{2}$

للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند $س = 3$ وقيمتها $ق(3)$

$ق(3) = \sqrt[3]{(3)^3 - 27 \times 3} = -3\sqrt[3]{2}$

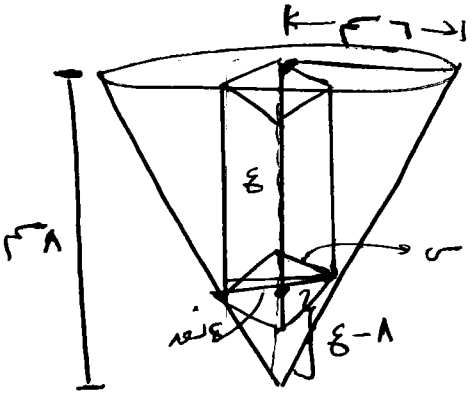
مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

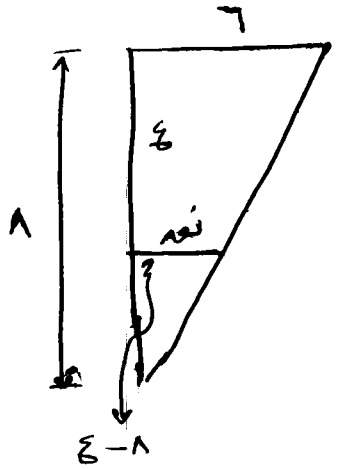
تطبيقات عملية على التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الثالث :

جد حجم أكبر موشور (منشور) رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم.





الحل:

نفرض أن طول ضلع الموشور س وارتفاعه ع.

حجم المشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = س^2 ع$ ، نفرض أن طول قطر القاعدة للمشور = ٢ نق $\Leftarrow (٢ نق)^2 = س^2 + س^2$

$\Leftarrow \boxed{نق = \frac{1}{\sqrt{2}} س}$

ونستخدم تشابه المثلثات $\Leftarrow \frac{نق}{٨ - ع} = \frac{٦}{٨}$

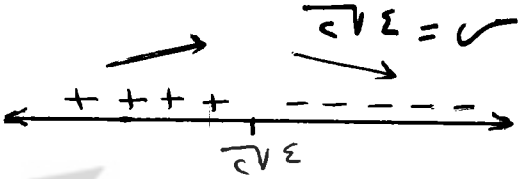
$\Leftarrow ٦(٨ - ع) = ٨ نق \Leftarrow \boxed{ع = ٨ - \frac{٤}{٣} نق}$

$\Leftarrow ح = س^2 \left(٨ - \frac{٤}{٣}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} س\right)\right)$

$ح(س) = ٨ س^2 - \frac{٤}{٣\sqrt{2}} س^3$

$\Leftarrow ح'(س) = ١٦ س - \frac{٤}{\sqrt{2}} س^2 = ٠$

$\Leftarrow ٤ س \left(٤ - \frac{1}{\sqrt{2}} س\right) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ و $س = ٤\sqrt{2}$



نهمل س = ٠ ونأخذ قيمة $س = ٤\sqrt{2}$

أكبر حجم للمشور عند $س = ٤\sqrt{2}$

$\therefore ع = ٨ - \frac{٤}{٣}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times ٤\sqrt{2}\right) = \frac{٨}{٣}$ سم و $نق = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ٤\sqrt{2} = ٤$ سم

$\Leftarrow ح(٤\sqrt{2}) = ٨(٤\sqrt{2})^2 - \frac{٤}{٣\sqrt{2}}(٤\sqrt{2})^3 = \frac{٢٥٦}{٣}$ سم^3

مكتبة الإسلام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

السؤال الرابع :

إذا كان $ق(س) = س^{\frac{1}{2}}(س-٤)^{\frac{1}{2}}$ ، $س \in [-١، ٥]$ فجد لكل مما يلي

١) الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران $ق(س)$ متزايداً.

٢) الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران $ق(س)$ متناقصاً.

٣) القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$.

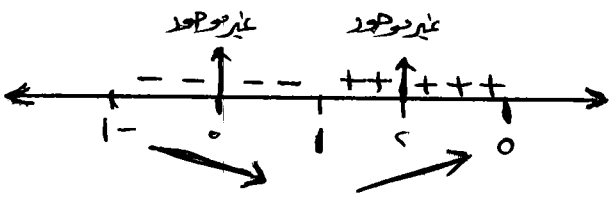
الحل :

$$ق'(س) = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}(س-٤)^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{٢}(س-٤)^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= \frac{(س-٤)^{\frac{١}{٢}}}{٢ س^{\frac{١}{٢}}} + \frac{\frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}}}{٢(س-٤)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{٢س + ٣(س-٤)}{٩ س^{\frac{١}{٢}}(س-٤)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$ق'(س) = \frac{٥س - ٦}{٩ س^{\frac{١}{٢}}(س-٤)^{\frac{١}{٢}}} \Leftarrow ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٥س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ١$$

$ق'(س)$ غير موجود $\Leftarrow ٩ س^{\frac{١}{٢}}(س-٤)^{\frac{١}{٢}} = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س = ٤$



∴ ١) $ق(س)$ متزايد في الفترة $[١، ٥]$

٢) $ق(س)$ متناقص في الفترة $[-١، ١]$

٣) عند $س = ١ \Leftarrow$ قيمة صغرى محلية

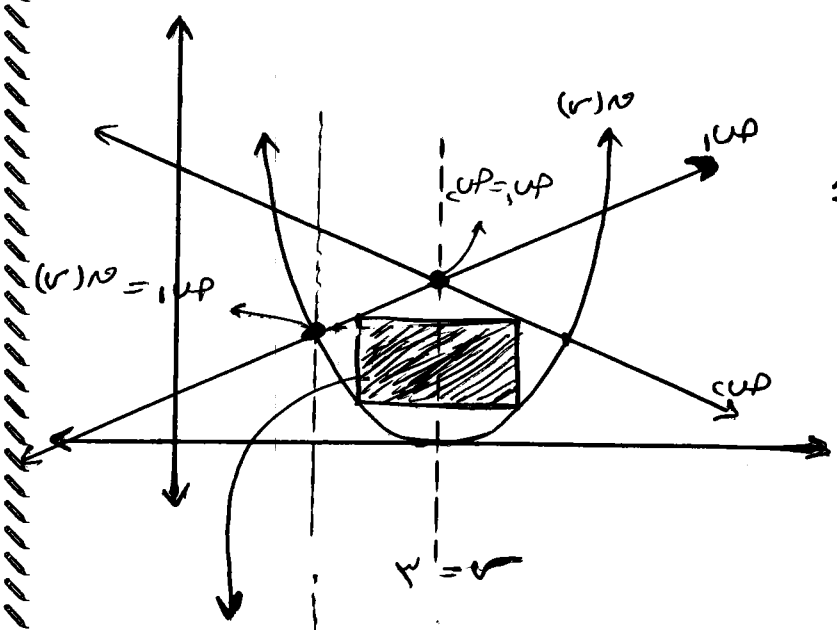
وقيمتها $ق(١) = (١)^{\frac{١}{٢}}(١-٤)^{\frac{١}{٢}} = -١$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الخامس :

يقع رأسان من رؤوس المستطيل المظلل في الشكل الآتي على منحنى الاقتران ق(س) = س² − ٦س + ٩ ورأساه الآخران على المستقيمين ص₁ = ٢ + س و ص₂ = ٨ − س ، جد بعدي المستطيل اللذين يجعلان مساحته أكبر ما يمكن .



الحل :

بعد تحليل ق(س) الى عوامله الاولية فإن ق(س) = (س − ٣)²

∴ محور التماثل عند س = ٣

وأيضاً نقطة تلاقي ص₁ مع ص₂

ص₁ = ص₂ ⟸ ٢ + س = ٨ − س

⟸ س = ٣ أيضاً .

لإيجاد مساحة المستطيل (م)

م = الطول × العرض = ٢س × ص

ولكن مجال س هي من نقطة تلاقي ص₁ و ق(س) الى س = ٣ ⟸ ص₁ = ق(س)

٢ + س = س² − ٦س + ٩ ⟸ س² − ٧س + ٧ = ٠

⟸ س = $\frac{٧ - \sqrt{٢١}}{٢}$ ⟸ المجال س $\left[\frac{٧ - \sqrt{٢١}}{٢} ، ٣\right]$ ⟸ الطول = ٢(٣ − س)

أيضاً ص = ص₁ − ق(س) = ٢ + س − (س² − ٦س + ٩)

العرض = −س² + ٧س − ٧

⟸ م(س) = ٢(٣ − س)(−س² + ٧س − ٧)

= (٦ − ٢س)(−س² + ٧س − ٧)

يتبع

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل

(مسائل مقارنة سابقة)

← يتبع السؤال الخامس :

$م(س) = (٦ - ٢س)(-س^٢ + ٧س - ٧)$

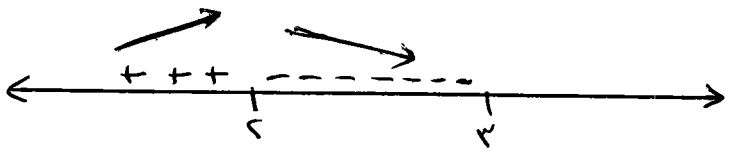
$\therefore م'(س) = (٦ - ٢س)(-٢س + ٧) + (-٢)(-س^٢ + ٧س - ٧)$

$= -١٢س + ٤٢ + ٤س^٢ - ١٤س + ٢س^٢ - ١٤س + ١٤$

$= ٦س^٢ - ٤٠س + ٥٦ = ٠ \Leftarrow ٣س^٢ - ٢٠س + ٢٨ = ٠$

$\Leftarrow (٣س - ١٤)(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = \frac{١٤}{٣}$ أو $س = ٢$

$س = \frac{١٤}{٣}$ تهمل لأنها خارج المجال $\Leftarrow \therefore س = ٢$



$\therefore$ تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عند $س = ٢$

$\therefore$ أبعاد المستطيل هي

الطول $= ٢(٣ - س) = ٢$ وحدة

العرض $= -(٢)^٢ + ٧(٢) - ٧ = -٤ + ١٤ - ٧$

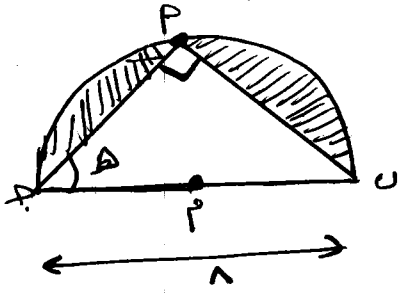
$= ٣$ وحدات.

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال السادس :

رسم المثلث أ ب جـ داخل نصف دائرة طول قطرها ٨ سم ، بحيث يقع الرأسان ب ، جـ على نهايتي القطر ، والرأس الآخر (أ) يتحرك على منحنى نصف الدائرة كما في الشكل المجاور ، فجد قياس الزاوية (هـ) التي تجعل مساحة المنطقة المظللة أصغر ما يمكن



الحل :

م = مساحة نصف الدائرة − مساحة المثلث أ ب جـ

⟸ م = $\frac{1}{2}$ نق^2 π − $\frac{1}{2}$ × $\overline{أجـ}$ × $\overline{بجـ}$ × جا هـ

م = $\frac{1}{2}$ × (٤)^2 π − $\frac{1}{2}$ × ٨ × أجـ × جا هـ

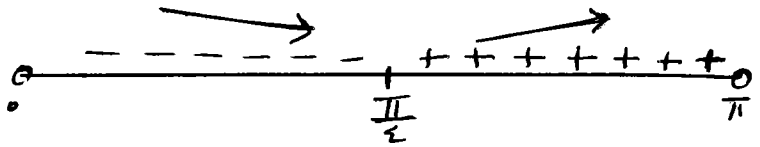
٠ < هـ < $\frac{\pi}{2}$ والزاوية أ = ٩٠°

∴ أجـ = ٨ جتا هـ

⟸ م = ٨π − ٣٢ جتا هـ جا هـ

م = ٨π − ١٦ جا ٢هـ

⟸ م′ = − ٣٢ جتا ٢هـ = ٠ ⟸ جتا ٢هـ = ٠ ⟸ ٢هـ = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ هـ = $\frac{\pi}{4}$



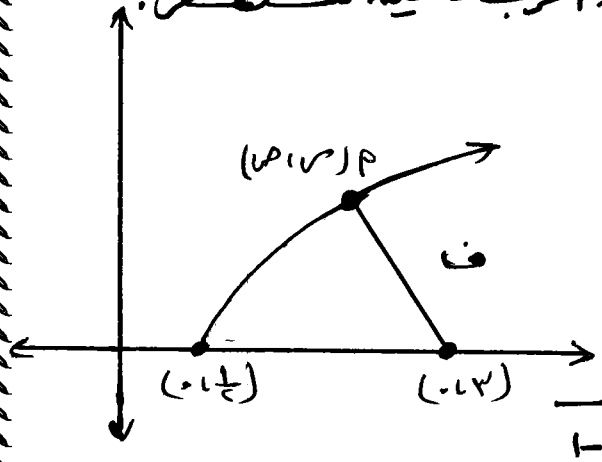
إذن أصغر مساحة ممكنة للمنطقة المظللة هي هـ = $\frac{\pi}{4}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال السابع :

طريق منحنى يمثل في المستوى الإحداثي بالاقتران $ق(س) = \sqrt{٢س - ١}$ والنقطة (٣، ٠) تمثل موقع مستشفى، جد إحداثيات النقطة أ(س، ص) الواقعة على الطريق التي يمكن أن يبنى فيها صيدلية وتكون أقرب ما يمكن للمستشفى.



الحل :

$ق(س) = \sqrt{٢س - ١}$

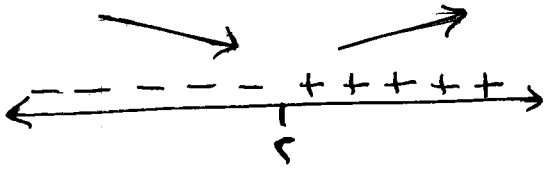
$ف = \sqrt{(س - ٣)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

$= \sqrt{(س - ٣)^٢ + ص^٢}$ ولكن

$ص = \sqrt{٢س - ١} \Leftarrow ف = \sqrt{(س - ٣)^٢ + ٢س - ١}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^٢ - ٤س + ٨}$

$\Leftarrow ف'(س) = \frac{٢س - ٤}{٢\sqrt{س^٢ - ٤س + ٨}} = ٠ \Leftarrow ٢س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٢$



∴ أقرب ما يمكن أن تكون النقطة أ إلى المستشفى

$س = ٢ \Leftarrow ص = \sqrt{٢ \times ٢ - ١} = \sqrt{٣}$

أ(٢، $\sqrt{٣}$)

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

تطبيقات عملية على التفاضل

(مسائل مذاريه سابقه)

السؤال الثامن:

إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٣٢س^{٢} ، س ∈ ح فجد لكل مما يلي :

① فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

② القيم القصوى للاقتران ق (إن وجدت) ، مبيناً نوعها.

③ الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران ق مقعراً للأسفل.

④ نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وجدت)

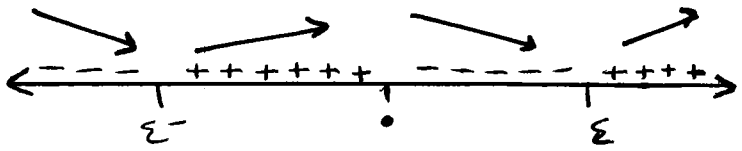
الحل

ق′(س) = ٤س^{٣} − ٦٤س = ٠ ⟸ ٤س(س^{٢} − ١٦) = ٠

∴ س = ٠ ، س = −٤ ، س = ٤ .

① فترات التزايد لـ ق(س) هي [−٤ ، ٠] و [٤ ، ∞)

فترات التناقص لـ ق(س) (−∞ ، −٤] و [٠ ، ٤]



② القيم القصوى لـ ق(س) ⟸ قيم صغرى محلية عند س = −٤ و س = ٤

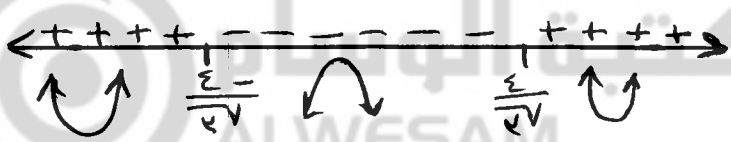
(−٤ ، −٢٥٦) و (٤ ، −٢٥٦)

وقيم عظمى محلية عند س = ٠ ⟸ (٠ ، ٠)

③ ق′(س) = ١٢س^{٢} − ٦٤ = ٠ ⟸ ٣س^{٢} − ١٦ = ٠ ⟸ س = ± $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$

∴ عند الفترة [$\frac{-٤}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$]

منحنى ق(س) مقعر للأسفل



④ نقط الانعطاف هي

($\frac{-٤}{\sqrt{٣}}$ ، ق($\frac{-٤}{\sqrt{٣}}$) = ($\frac{-٤}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-١٢٨٠}{٩}$)

($\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ، ق($\frac{٤}{\sqrt{٣}}$) = ($\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-١٢٨٠}{٩}$)

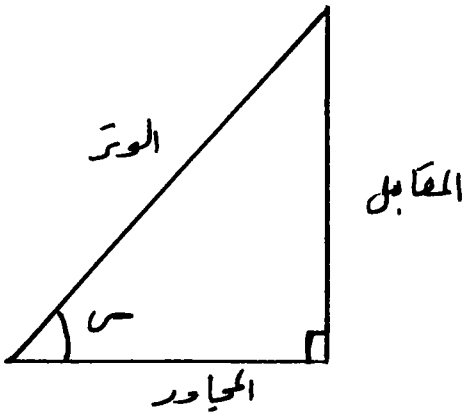
مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الوحدة : ملحق
الفصل :
الصفحة : ١ / ١٣

الفصل الدراسي ١ و ٢

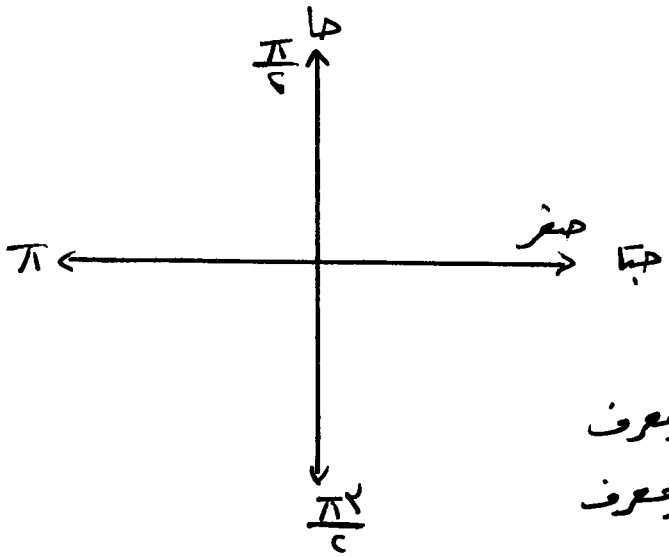
(الإقترانات المثلثية)



جا س = المقابل / الوتر

جتا س = المجاور / الوتر

ظا س = جا س / جتا س = المقابل / الوتر



جا(٠) = ٠ ، جتا(٠) = ١

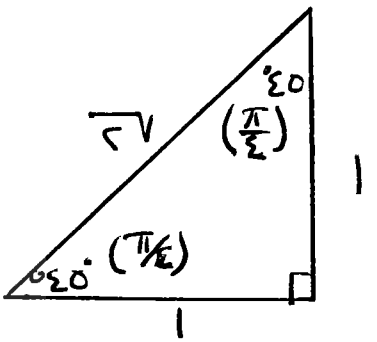
جا($\frac{\pi}{2}$) = ١ ، جتا($\frac{\pi}{2}$) = ٠

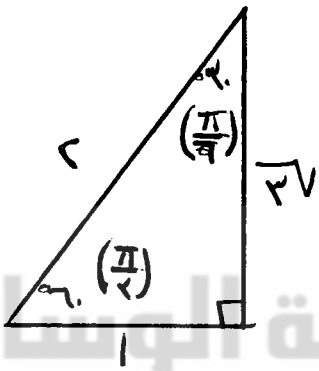
جا(π) = ٠ ، جتا(π) = −١

جا($\frac{3\pi}{2}$) = −١ ، جتا($\frac{3\pi}{2}$) = ٠

ظا(٠) = ٠ ، ظا($\frac{\pi}{2}$) = غير معرف

ظا(π) = ٠ ، ظا($\frac{3\pi}{2}$) = غير معرف





جا($\frac{\pi}{4}$) = جتا($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ظا($\frac{\pi}{4}$) = ١

جا($\frac{\pi}{6}$) = جتا($\frac{\pi}{3}$) = $\frac{1}{2}$

جا($\frac{\pi}{3}$) = جتا($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا($\frac{\pi}{3}$) = $\sqrt{3}$ ، ظا($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

مكتبة الوسام
المعلم: جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١ ، ٢

الوحدة : ملحق

الفصل :

الصفحة : ٢ / ١٣

(قوانين المتطابقات المثلثية)

$\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ، $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$ ، $\text{قتاس} = \frac{١}{\text{جاس}}$

$\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$

$١ + \text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س}$

$١ + \text{ظتا}^٢\text{س} = \text{قتا}^٢\text{س}$

$\text{جا}٢\text{س} = ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$

$\text{جتا}٢\text{س} = ١ - ٢\,\text{جا}^٢\text{س}$

$= ٢\,\text{جتا}^٢\text{س} - ١$

$= \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}$

$\text{ظا}٢\text{س} = \frac{٢\,\text{ظاس}}{١ - \text{ظا}^٢\text{س}}$

$\text{جا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جاأ}\,\text{جتاب} + \text{جتاأ}\,\text{جاب}$

$\text{جا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جاأ}\,\text{جتاب} - \text{جتاأ}\,\text{جاب}$

$\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جتاأ}\,\text{جتاب} - \text{جاأ}\,\text{جاب}$

$\text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جتاأ}\,\text{جتاب} + \text{جاأ}\,\text{جاب}$

$\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{١ - \text{ظاأ}\,\text{ظاب}}$

$\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظاأ} - \text{ظاب}}{١ + \text{ظاأ}\,\text{ظاب}}$

$\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{جاس}$

$\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{ظتاس}$

$\text{ظتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) = \text{ظاس}$

$\text{جا}(\frac{\pi}{٢} + \text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} + \text{س}) = -\text{جاس}$

$\text{جا}(-\text{س}) = -\text{جاس}$

$\text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{ظا}(-\text{س}) = -\text{ظاس}$

$\text{جا}(\pi - \text{س}) = \text{جاس}$

$\text{جتا}(\pi - \text{س}) = -\text{جتاس}$

$\text{ظا}(\pi - \text{س}) = -\text{ظاس}$

$\text{جا}(\pi + \text{س}) = -\text{جاس}$

$\text{جتا}(\pi + \text{س}) = -\text{جتاس}$

$\text{ظا}(\pi + \text{س}) = \text{ظاس}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

(قوانين المتطابقات المثلثية)

$$\text{جا}\,\text{أ} \times \text{جا}\,\text{ب} = \frac{1}{2}\left[\text{جتا}(\text{أ}-\text{ب}) - \text{جتا}(\text{أ}+\text{ب})\right]$$

$$\text{جا}\,\text{أ} \times \text{جتا}\,\text{ب} = \frac{1}{2}\left[\text{جا}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{جا}(\text{أ}-\text{ب})\right]$$

$$\text{جتا}\,\text{أ} \times \text{جتا}\,\text{ب} = \frac{1}{2}\left[\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب}) + \text{جتا}(\text{أ}-\text{ب})\right]$$

$$\text{جا}\,\text{أ} - \text{جا}\,\text{ب} = 2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right) \times \text{جا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$$

$$\text{جا}\,\text{أ} + \text{جا}\,\text{ب} = 2\,\text{جا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$$

$$\text{جتا}\,\text{أ} - \text{جتا}\,\text{ب} = -2\,\text{جا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right) \times \text{جا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$$

$$\text{جتا}\,\text{أ} + \text{جتا}\,\text{ب} = 2\,\text{جتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الوحدة : ملحق
الفصل : _____
الصفحة : ٤ / ١٣

الفصل الدراسي ١ و ٢

(حل المعادلة التربيعية)

* في هذه الورقة حل بعض الامثلة على حل المعادلة التربيعية وايجاد الأصفار

مثال (١) : حلل ق(س) للعوامل الاولية .

ق(س) = س^{٢} − ٨س + ١٥

= س^{٢} − ٣س − ٥س + ١٥ = س(س − ٣) − ٥(س − ٣)

= (س − ٥)(س − ٣)

مثال (٢) : حل المعادلة التالية أو أوجد الأصفار

٣س^{٢} + س = ٤

٣س^{٢} + س − ٤ = ٠ ⟸ (س − $\frac{٣}{٣}$)(س + $\frac{٤}{٣}$)

٣ × −٤
−١٢
٣ −٤
−٣ + ٤ = ١

⟸ (س − ١)(٣س + ٤) = ٠

∴ س − ١ = ٠ أو ٣س + ٤ = ٠

س = ١ س = $\frac{-٤}{٣}$

مجموعة الحل هي {$\frac{-٤}{٣}$ ، ١}

مثال (٣) : حل المعادلة التالية :

−٥س^{٢} = −٣٠ ⟸ س^{٢} = $\frac{٣٠}{٥}$ = ٦

⟸ س = ±$\sqrt{٦}$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

* قانون حل المعادلة التربيعية عن طريق إكمال المربع

$$س^{٢} + ب س + (\frac{ب}{٢})^{٢} = ج + (\frac{ب}{٢})^{٢}$$

$$\Leftarrow \boxed{س^{٢} + ب س + (\frac{ب}{٢})^{٢} = (س + \frac{ب}{٢})^{٢}}$$

مثال (٤) : حل التالي عن طريق إكمال المربع

$$٢ س^{٢} - ٦ س + ١ = صفر \Leftarrow ٢ س^{٢} - ٦ س = -١$$

$$\Leftarrow ٢ (س^{٢} - ٣ س + (\frac{٣}{٢})^{٢} - (\frac{٣}{٢})^{٢}) = -١$$

$$\Leftarrow ٢ [(س - \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{٩}{٤}] = -١$$

$$\Leftarrow ٢ (س - \frac{٣}{٢})^{٢} - \frac{٩}{٢} = -١ \Leftarrow ٢ (س - \frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{٧}{٢}$$

$$\Leftarrow \sqrt{(س - \frac{٣}{٢})^{٢}} = \sqrt{\frac{٧}{٤}}$$

$$\Leftarrow س - \frac{٣}{٢} = \pm \frac{\sqrt{٧}}{٢}$$

$$\therefore س = \frac{٣}{٢} \pm \frac{\sqrt{٧}}{٢}$$

$$\{ \frac{٣}{٢} - \frac{\sqrt{٧}}{٢} ، \frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢} \}$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

(حل المعادلة التربيعية)

* الحل عن طريق المعادلة التربيعية إذا $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

المميز $= ب^{٢} - ٤ أ جـ$

إذا كان $ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠$ ⟸ عدد الحلول الحقيقية ٢

$ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٠$ ⟸ عدد الحلول الحقيقية ١

$ب^{٢} - ٤ أ جـ < ٠$ ⟸ لا حلول حقيقية

مثال (٥) : حل الآتي $٤ س^{٢} - ٨ س + ١ = ٠$

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ وبحساب المميز $ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$(-٨)^{٢} - ٤ \times ٤ \times ١ = ٦٤ - ١٦ = ٤٨$

عدد الحلول الحقيقية ٢

$$\Leftarrow س = \frac{-(-٨) \pm \sqrt{٤٨}}{٤ \times ٢} = \frac{٨ \pm ٤\sqrt{٣}}{٨}$$

$$\Leftarrow س = \frac{٨ + ٤\sqrt{٣}}{٨} = ١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \quad \text{أو} \quad س = \frac{٨ - ٤\sqrt{٣}}{٨} = ١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\left\{ ١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \right\}$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١+٢

الوحدة : ملحق

الفصل : _____

الصفحة : ٧ / ١٣

(أنواع الإقترانات)

١ الإقتران الثابت :

ق(س) = أ ، أ ثابت ⟸ المجال : ح

٢ الإقتران الخطي :

ق(س) = أس + ب ، أ و ب ثوابت ⟸ المجال : ح

٣ الإقتران التربيعي :

ق(س) = أس² + ب س + جـ ⟸ المجال : ح

٤ الاقتران التكعيبي :

ق(س) = أس³ + ب س² + جـ س + د ⟸ المجال : ح

٥ إقتران الجذر التربيعي :

ق(س) = √هـ(س) ، هـ(س) ≥ ٠ ⟸ المجال هـ(س) ≥ ٠

٦ الإقتران النسبي :

ق(س) = أ / هـ(س) ، هـ(س) ≠ ٠ ⟸ المجال ح − {هـ(س) = ٠}

٧ الإقتران الكسري :

ق(س) = هـ(س) / م(س) ، م(س) ≠ ٠ ⟸ المجال ح − {م(س) = ٠}

٨ الإقتران المتشعب :

ق(س) = { هـ(س) ، س < أ ⟸ ضمن المجال المعطاه
م(س) ، س ≥ أ

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

٩ اقتران القيمة المطلقة :

$$ق(س) = |هـ(س)| \Leftarrow ق(س) = \begin{cases} هـ(س) & \text{، الإشارة موجبة} \\ -هـ(س) & \text{، الإشارة سالبة} \end{cases}$$

أصفار $ق(س)$ تسمى نقط التعب أو نقط التحول

١٠ اقتران أكبر عدد صحيح :-

$ق(س) = [س] \Leftarrow ن \leq س < ن+١$ حيث $ن$ عدد صحيح

فإن $ق(س) = ن$

أو $[\text{الكسر}] = \text{عدد صحيح}(ن)$

$ن \leq \text{الكسر} < ن+١$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١+٢

الوحدة : ملحق

الفصل : _____

الصفحة : ٩ / ١٢

(قوانين رياضية مهمة)

١ المسافة بين نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ و $(س_٢ ، ص_٢)$

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

٢ إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ و $(س_٢ ، ص_٢)$

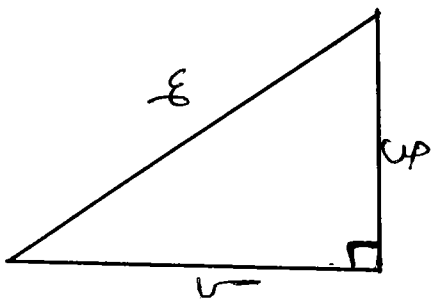
هو $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

٣ بعد النقطة $(س_١ ، ص_١)$ عن المستقيم $أس + ب ص + جـ = ٠$

$$البعد = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

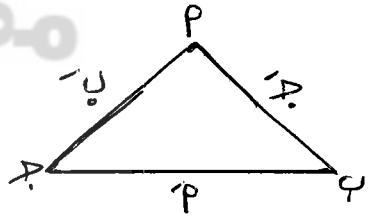
٤ نظرية فيثاغورس لمثلث قائم الزاوية :

$$ع^٢ = س^٢ + ص^٢$$



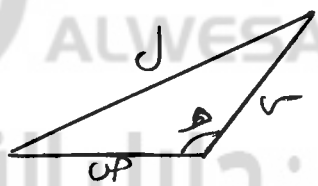
٥ قانون الجيب :

$$\frac{أَ}{جا(أ)} = \frac{بَ}{جا(ب)} = \frac{جـَ}{جا(جـ)}$$



٦ قانون جيب التمام :

$$ل^٢ = س^٢ + ص^٢ - ٢ س ص \text{ جتاهـ}$$



مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١+٢

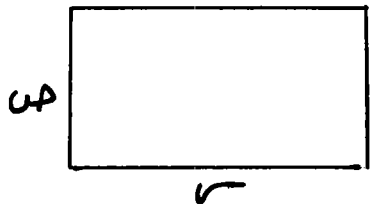
الوحدة : ملحق

الفصل : _____

الصفحة : ١٠ / ١٢

(قوانين رياضية مهمة)

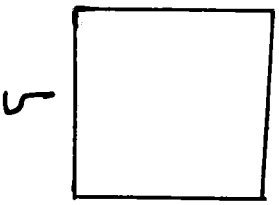
المستطيل



المساحة = س × ص

المحيط = ٢(س + ص)

المربع



المساحة = س²

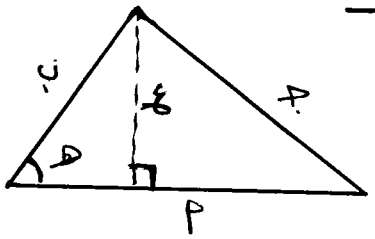
المحيط = ٤ س

الدائرة :

المساحة = π نق²

المحيط = ٢π نق

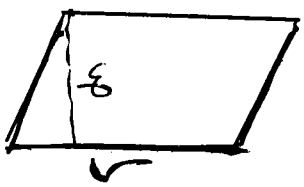
المثلث



المساحة = ½ أ ع أو

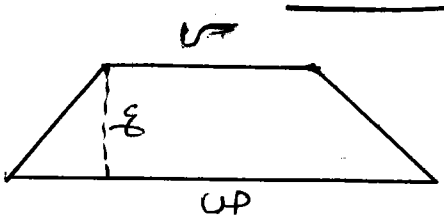
المساحة = ½ أ ب جا(هـ)

متوازي الاضلاع



المساحة = س × ع

شبه المنحرف



المساحة = ½ (س + ص) × ع

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

(قوانين رياضيه مهمه)

* المكعب :

س : طول ضلع المكعب

الحجم = $س^{٣}$

المساحه الكليه = $٦ س^{٢}$

المساحه الجانبيه = $٤ س^{٢}$

* متوازي المستطيلات :

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

= س × ص × ع

المساحه الجانبيه = $٢(س + ص) \times ع$

المساحه الكليه = $٢(س + ص) \times ع + ٢ س ص$

* المخروط الدائري القائم :

الحجم = $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ع

مساحه السطح = π نق ل + π نق^{٢}

* الاسطوانه :

الحجم = π نق^{٢} ع

المساحه الجانبيه = ٢π نق ع

المساحه الكليه = ٢π نق^{٢} + ٢π نق ع

* الكره :

الحجم = $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^{٣}

مساحه سطح الكره = ٤π نق^{٢}

* الهرم القائم :

المساحه الجانبيه = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعده × الارتفاع الجانبي .

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × مساحه القاعده × الارتفاع

* المنشور :

المساحه الجانبيه = محيط القاعده × الارتفاع

الحجم = مساحه القاعده × الارتفاع

* القطع الدائري

المساحه = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ

طول القوس = نق × هـ

حيث هـ : الزاويه المركزيه

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

(الإقتران الأسي واللوغاريثمات)

*صورة الإقتران الأسي هي $ق(س) = ب^{س}$ ، حيث ب عدد ثابت

المثال :٤

* اللوغاريثمات : هو الإقتران العكسي للاقتران الأسي .

اذا كان $ص = ب^{س} \Leftarrow س = \log_{ب} ص$ حيث $ص > ٠$

* قوانين اللوغاريثمات :

١) $\log_{ب}(س \times ص) = \log_{ب} س + \log_{ب} ص$	٤) $\log_{ب} ب = ١$
٢) $\log_{ب}\frac{س}{ص} = \log_{ب} س - \log_{ب} ص$	٥) $\log_{ب} ب^{ن} = ن$
٣) $\log_{ب} س^{ن} = ن \log_{ب} س$	٦) $\log_{ب} ١ = $ صفر

* قانون تغيير الأساس (ب) اللوغاريثمي الى الأساس (س)

$$\log_{ب} ب = \frac{\log_{س} ب}{\log_{س} ب}$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal

(الكسور الجزئية)

* اذا كان ل(س) = $\frac{و(س)}{هـ(س)}$ وحيث و(س) ، هـ(س) كثيرات الحدود

فإن تحليل ل(س) يكون بالاعتماد على درجة المقام هـ(س) :

١) هـ(س) = أس + ب ⟸ $\frac{أ}{أس+ب}$

٢) هـ(س) = $(أس+ب)^{ن}$ ⟸ $\frac{أ}{(أس+ب)} + \frac{ج}{(أس+ب)^{٢}} + \cdots + \frac{ن}{(أس+ب)^{ن}}$

٣) هـ(س) = $أس^{٢}+بس+ج$ ⟸ $\frac{ء س + هـ}{أس^{٢}+بس+ج}$

٤) هـ(س) = $(أس^{٢}+بس+ج)^{ن}$ ⟸

$$\frac{ك_{١}س+ل_{١}}{أس^{٢}+بس+ج} + \frac{ك_{٢}س+ل_{٢}}{(أس^{٢}+بس+ج)^{٢}} + \cdots + \frac{ك_{ن}س+ل_{ن}}{(أس^{٢}+بس+ج)^{ن}}$$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم : جلال النعيمي
Jalal