1.500

الأمين في الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي- الفصل الدراسي الأول

تحتوي الدوسية على :

الفصل الأول
معدل التغير.
المشتقة الاولى.
الاتصال و الاشتقاق.
الفصل الثاني
قواعد الاشتقاق(1).
قواعد الاشتقاق (2).
المشتقات العليا.
مشتقات الاقترانات المثلثية.
قاعدة السلسلة.
الاشتقاق الضمني.

2020-21

الوحدة الثانية:

التفاضل

إعداد المعلم :

جلال النعيمي

0778029992

مكتبة الوسام
ALWESAM
tawjihi center & service store

أولاً : معدل التغير

*** تعريف (١) :**

إذا تغيرت قيمة متغير مثل س من $س_١$ الى $س_٢$ ، فإن مقدار التغير في س هو $س_٢ - س_١$ ويرمز للتغير بالرمز Δ س (دلتا س)

$$\Delta س = س_٢ - س_١$$

*** تعريف (٢) :**

اذا كان ص = ق(س) إقتراناً معرفاً على الفترة [أ ، ب] وتغيرت س من $س_١$ الى $س_٢$ فإن ص ستتغير تبعاً لذلك من قيمة $ص_١$ الى قيمة $ص_٢$ ، حيث $ص_١ = ق(س_١)$ ، $ص_٢ = ق(س_٢)$ ويرمز لمقدار التغير في قيمة الإقتران ق بالرمز Δ ص

$$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = ق(س_٢) - ق(س_١)$$

$$= \Delta ق(س)$$

*** تعريف (٣) :**

إذا كان ص = ق(س) ، $س_٢ \neq س_١$

فإن مقدار $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ يسمى معدل التغير في ص عندما تتغير س من $س_١$ الى $س_٢$ حيث

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

وحيث $س_٢ = س_١ + \Delta س$

*** مثال (١)**

اذا كان $ق(س) = س^٢ - س$ ، فجد معدل التغير في الإقتران ق عندما تتغير س من -١ الى ٢

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(٢) - ق(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{٦ - ٠}{٣}$$

$$= ٢$$

مثال (٢):

اذا كان ق(س) = |٢س − ٦| ، نجد معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٤]

الحل:

٢س − ٦ = ٠ ⇐ س = ٣

نقطة التغير س = ٣

$$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٦ \text{ ، } \text{س} \geq ٣ \\ ٦ - ٢\text{س} \text{ ، } \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٤ - ١}$$

ق(٤) = ٢ × ٤ − ٦ = ٢

ق(١) = ٦ − ٢ × ١ = ٤

$$\Leftarrow \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٢ - ٤}{٣} = \frac{-٢}{٣}$$

مثال (٣):

اذا كان ق(س) = ٥ − س^٢ ، جد معدل التغير في الاقتران ق اذا تغيرت س من ٢ الى ٢,١ .

الحل:-

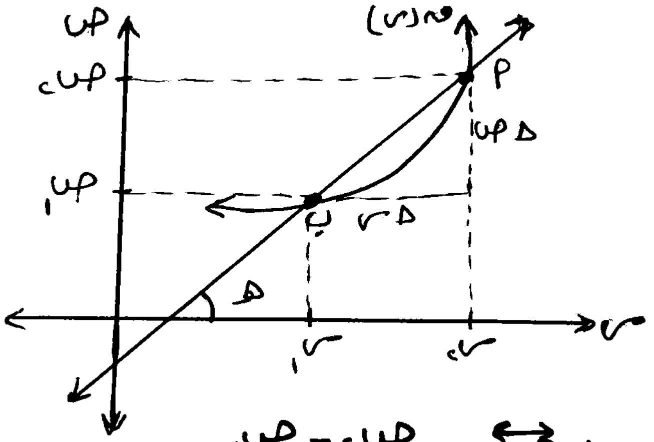
$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢,١) - \text{ق}(٢)}{٢,١ - ٢}$$

$$= \frac{٠,٥٩ - ١}{٠,١} = \frac{-٠,٤١}{٠,١}$$

$$= -٤,١$$

* التفسير الهندسي لمعدل التغير

يمثل الشكل منحنى الاقتران ق(س) . النقطتان أ(س٢ ، ص٢) ، ب(س١ ، ص١) واقعتان عليه . يسمى المستقيم الواصل بين أ و ب قاطعاً لمنحنى ق(س)



$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{ظا هـ}$$

حيث هـ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ أي أن

$$\boxed{\text{ميل القاطع = معدل التغير = ظا هـ}}$$

مثال (٤) :

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(٢ ، ق(٢))$ و $(٥ ، ق(٥))$ الواقعتين على منحنى الاقتران $ق(س)$ حيث $ق(س) = س^٢ - ٣س$

الحل :

$ق(٢) = (٢)^٢ - ٣(٢) = -٢$

$ق(٥) = (٥)^٢ - ٣(٥) = ١٠$

$\therefore$ ميل القاطع $= \dfrac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$

$= \dfrac{١٠ - (-٢)}{٣} = ٤$

إذا طلب قيمة زاوية الميل هـ

$ظا هـ = ٤ \Leftarrow هـ = ظا^{-١} ٤$

$هـ = ٧٦^\circ$

*** تعريف : التفسير الفيزيائي لمعدل التغير هو**

السرعة المتوسطة $(\bar{ع})$ لجسم يتحرك على خط مستقيم في الفترة الزمنية $[ن_١ ، ن_٢]$ هي معدل التغير في اقتران المسافة $ف(ن)$

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$$

$$= \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن} ،$$

$\Delta ن > ٠$

مثال (٥)

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^٢ - ن$ ، حيث $ن$ الزمن بالثواني و $ف(ن)$ المسافة بالأمتار ، أجب عن ما يلي :

١) هل سرعة الجسم ثابتة ام متغيرة ؟

٢) احسب السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[٢ ، ٥]$

الحل :

١) المسافة المقطوعة بين $ن = ١$ و $ن = ٢$ هي $\Delta ف = ف(٢) - ف(١) = ٢م$

والمسافة المقطوعة بين $ن = ٢$ و $ن = ٣$ هي $\Delta ف = ف(٣) - ف(٢) = ٤م$

$\therefore$ السرعة متغيرة ، لأن المسافة المقطوعة في الفترة $[١ ، ٢]$ تختلف عنها في الفترة الزمنية $[٢ ، ٣]$

٢) $\bar{ع} = \dfrac{\Delta ف}{\Delta ن} = \dfrac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$

$= \dfrac{٢٠ - ٢}{٣} = ٦$ م/ث

مثال (٦) :

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٦] يساوي ١٢ وكان هـ(س) = ٢س − ٣ق(س) ، نجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) في الفترة [١ ، ٦]

الحل :

إذا كان $\frac{\text{ق}(٦) - \text{ق}(١)}{٦ - ١} = ١٢$

∴ ق(٦) − ق(١) = ٦٠

⇐ $\frac{\Delta \text{هـ}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(٦) - \text{هـ}(١)}{٦ - ١}$

$= \frac{[٢ \times ٦ - ٣\text{ق}(٦)] - [٢ \times ١ - ٣\text{ق}(١)]}{٥}$

$= \frac{١٢ - ٣\text{ق}(٦) - ٢ + ٣\text{ق}(١)}{٥}$

$= \frac{١٠ - ٣\left(\text{ق}(٦) - \text{ق}(١)\right)}{٥}$

$= \frac{١٠ - ٣ \times ٦٠}{٥} = ٢٤-$

مثال (٧) :

تحرك جسيم على خط مستقيم من النقطة أ(س ، ص) إلى النقطة ب(٢ ، ٥) . إذا كانت Δس = ٠,١ و Δص = ٠,٦ نجد إحداثيي النقطة أ .

الحل :

Δص = ٥ − ص = ٠,٦ ⇐ ص = ٤,٤

Δس = ٢ − س = ٠,١ ⇐ س = ١,٩

⇐ ∴ أ(س ، ص) = (١,٩ ، ٤,٤)

مثال (٨) :

إذا كان ق(س) = $(\text{س}^٢ + \text{س})^{-١}$ وكان مقدار التغير في قيمة ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى س٢ يساوي $\left(-\frac{١}{٣}\right)$ ، نجد قيمة س٢ حيث س٢ > ٠ .

الحل : Δق = ق(س٢) − ق(س١)

⇐ $-\frac{١}{٣} = \frac{١}{\text{س}_٢^٢ + \text{س}_٢} - \frac{١}{١ + ١}$

⇐ $\frac{١}{\text{س}_٢^٢ + \text{س}_٢} = \frac{١}{٦}$

⇐ $\text{س}_٢^٢ + \text{س}_٢ = ٦$ ⇐ $\text{س}_٢^٢ + \text{س}_٢ - ٦ = ٠$

$(\text{س}_٢ + ٣)(\text{س}_٢ - ٢) = $ صفر

$\text{س}_٢ = -٣$ ، $\text{س}_٢ = ٢$

ولكن $\text{س}_٢ > ٠$

∴ $\text{س}_٢ = ٢$

مثال (٩) :

قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث يكون بعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية معطى بالعلاقة

ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن^{٢} ، جد :

أ) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥]

ب) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة Δن اذا تغيرت ن من الصفر الى Δن .

الحل :

أ) $\bar{ع} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{[٣٠٠ - ١٢٥] - [١٢٠ - ٢٠]}{٣}$

$= \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = ٢٥$

ب) $\bar{ع} = \frac{ف(٠ + Δن) - ف(٠)}{Δن}$

$= \frac{٦٠Δن - ٥Δن^{٢}}{Δن}$

$= \frac{(٦٠ - ٥Δن)\cancel{Δن}}{\cancel{Δن}}$

$= ٦٠ - ٥Δن$

مثال (١٠) :

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} |٣ - ٢س| ، & ٠ \le س < ٢ \\ [س + ١] ، & ٢ \le س < ٦ \end{cases}$$

نجد معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ الى ٤ .

الحل :

$$ق(س) = \begin{cases} ٣ - ٢س ، & ٠ \le س < ١,٥ \\ ٢س - ٣ ، & ١,٥ \le س < ٢ \\ ٣ ، & ٢ \le س < ٣ \\ ٤ ، & ٣ \le س < ٤ \\ ٥ ، & ٤ \le س < ٥ \\ ٦ ، & ٥ \le س < ٦ \end{cases}$$

$\frac{Δق}{Δس} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٤ - ١}$

$= \frac{٥ - (٣ - ٢ × ١)}{٣}$

$= \frac{٥ - ١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

السؤال الأول :

إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) و (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق(س) يصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فجد ق(١)

الحل :

ميل القاطع = ظا هـ ⇐ ظا $\frac{3\pi}{4}$ = $\frac{\text{٤} - \text{ق(١)}}{\text{٢} - \text{١}}$ ⇐ −١ = ٤ − ق(١)

⇐ ق(١) = ٥

السؤال الثاني :

إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) على الفترة [٢ ، ٥] يساوي (٧) ، وكان متوسط تغيره على الفترة [٥ ، ٩] يساوي (١٤) ، فجد متوسط التغير في الاقتران ق(س) على الفترة [٢ ، ٩] .

الحل :

بالنسبة للفترة [٢ ، ٥] ⇐ $\frac{\text{ق(٥)} - \text{ق(٢)}}{\text{٥} - \text{٢}}$ = ٧ ⇐ ق(٥) − ق(٢) = ٢١ —— ①

بالنسبة للفترة [٥ ، ٩] ⇐ $\frac{\text{ق(٩)} - \text{ق(٥)}}{\text{٩} - \text{٥}}$ = ١٤ ⇐ ق(٩) − ق(٥) = ٥٦ —— ②

∴ نحل المعادلتين ① و ②

ق(~~٥~~) − ق(٢) = ٢١

\+ ق(٩) − ~~ق(٥)~~ = ٥٦

ق(٩) − ق(٢) = ٧٧

⇐ متوسط التغير ق(س) على الفترة [٢ ، ٩] = $\frac{\text{ق(٩)} - \text{ق(٢)}}{\text{٩} - \text{٢}}$

= $\frac{\text{٧٧}}{\text{٧}}$ = ١١

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الثالث :

إذا كان ق(س) = ٤س² − أ ، أ ∈ ح ، فإن معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من (−٣) الى (٢) يساوي

أ) ٤ ب) −٢٠ ج) −٤ د) −٨

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \frac{\Delta ق}{\Delta س} = \frac{ق(٢) - ق(-٣)}{٢ - (-٣)} = \frac{٤(٢)^٢ - أ - \left(٤(-٣)^٢ - أ\right)}{٥}$$

$$= \frac{١٦ - \cancel{أ} - ٣٦ + \cancel{أ}}{٥} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤ \quad \text{ج}$$

السؤال الرابع :

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن² + ٧ن حيث ف المسافة بالأمتار ون الزمن بالثواني ، فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [١ ، م] تساوي ١١ م/ث ، فما قيمة الثابت م ؟

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) ٣ ج) $\frac{٥}{٢}$ د) ٢

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(م) - ف(١)}{م - ١} = ١١$$

$$\Leftarrow \frac{\left[م^٢ + ٧م\right] - \left[١^٢ + ٧(١)\right]}{م - ١} = ١١ \Leftarrow \frac{م^٢ + ٧م - ٨}{م - ١} = ١١$$

$$\Leftarrow م^٢ + ٧م - ٨ = ١١م - ١١ \Leftarrow م^٢ - ٤م + ٣ = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow (م - ٣)(م - ١) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow م = ٣ \quad ، \quad م = ١ \times$$

$$\Leftarrow \boxed{م = ٣} \quad \text{ب}$$

ثانياً: المشتقة الأولى:

*** تعريف (١):**

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً معرفاً على الفترة المفتوحة تحتوي $س_1$ ، وكانت

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(س_1+\text{هـ})-\text{ق}(س_1)}{\text{هـ}}$$ موجودة ،

فإن هذه النهاية تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق عند س = $س_1$

ويرمز لها بالرمز $\text{ق}'(س_1)$ أو $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{س=س_1}$ ، ويكون $\text{ق}'(س_1)$ هو ميل المماس لمنحنى ق(س) عند $س_1$

*** ملاحظة:**

اذا كانت النهاية موجودة فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند $س_1$.

أما اذا كانت النهاية غير موجودة فإن $\text{ق}'(س_1)$ غير موجودة أي أن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند $س_1$

مثال (١):

اذا كان $\text{ق}(س) = س^2 + 3$ ، فجد $\text{ق}'(1)$

الحل:

$$\text{ق}'(1) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(1+\text{هـ})^2 + 3 - [(1)^2 + 3]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{1 + 2\text{هـ} + \text{هـ}^2 + 3 - 4}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{2\text{هـ} + \text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\cancel{\text{هـ}}(2+\text{هـ})}{\cancel{\text{هـ}}} = 2$$

مثال (٢):

إذا كان $\text{ق}'(2) = 9$ ، فجد

$$\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(2+4\text{هـ}) - \text{ق}(2)}{6\text{هـ}}$$

الحل:

نفرض أن $4\text{هـ} = م \Leftarrow \text{هـ} = \frac{م}{4}$

أيضاً $\text{هـ} \to 0$. إذن $م \to 0$.

$$\Leftarrow \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(2+4\text{هـ}) - \text{ق}(2)}{6\text{هـ}}$$

$$= \lim_{م \to 0} \frac{\text{ق}(2+م) - \text{ق}(2)}{6 \times \frac{م}{4}}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{م \to 0} \frac{\text{ق}(2+م) - \text{ق}(2)}{م}$$

$$= \frac{2}{3}\, \text{ق}'(2) = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

التفاضل

* **تعميم (١) :**

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \text{س}_1} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1}}$$

مثال (٣) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}+1}$ ، فجد $\text{ق}'(3)$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(3)}{\text{س} - 3}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{س}+1} - \sqrt{3+1}}{\text{س} - 3}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\sqrt{\text{س}+1} - 2}{\text{س} - 3} \times \frac{\sqrt{\text{س}+1} + 2}{\sqrt{\text{س}+1} + 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}+1 - 4}{(\text{س}-3)(\sqrt{\text{س}+1} + 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{\cancel{(\text{س}-3)}}{\cancel{(\text{س}-3)}(\sqrt{\text{س}+1} + 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 3} \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1} + 2} = \frac{1}{2+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

* **تعريف (٢) :**

ليكن الاقتران ق معرفاً عند $\text{س} = \text{أ}$

١) إذا كانت $\text{ق}'_{+}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$ موجودة ، فإن $\text{ق}'_{+}(\text{أ})$ تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليمين عند $\text{س} = \text{أ}$

٢) إذا كانت $\text{ق}'_{-}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$ موجودة ، فإن $\text{ق}'_{-}(\text{أ})$ تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليسار عند $\text{س} = \text{أ}$

٣) إذا كانت $\text{ق}'_{-}(\text{أ}) = \text{ق}'_{+}(\text{أ}) = \text{ل}$ فإن $\text{ق}'(\text{أ})$ موجودة وتساوي ل وبخلاف ذلك فإن $\text{ق}'(\text{أ})$ غير موجودة أو $\text{ق}(\text{س})$ غير قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$

* **تعميم (٢) :**

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}}$$

* **تعميم (٣):**

$$\boxed{ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}}$$

* **تعميم (٤):**

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [أ، ب]، فإن ق'(أ)، ق'(ب) غير موجودتين، لأن ق(س) غير معرف على يسار العدد أ، و غير معرف على يمين العدد ب

مثال (٤):

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \geq ٣ \\ ٦س - ٩ & ، س < ٣ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٣.

الحل:

$$ق'_{-}(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{٦س - ٩ - ٩}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{٦س - ١٨}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{٦(س - ٣)}{(س - ٣)} = ٦$$

$$ق'_{+}(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$$

$$\leftarrow \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{(س+٣)\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٣)}}$$

$$= ٦$$

بما أن $ق'_{-}(٣) = ق'_{+}(٣)$ ،

∴ الاقتران ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال (٥):

إذا كان ق(س) = ١ − س^٢ ، س ∈ [١، ٤]

فجد: ١) ق'(س) ٢) ق'(٣) ٣) ق'($\frac{٣}{٢}$)

الحل:

$$١)\ ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١ - (س+هـ)^٢ - [١ - س^٢]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{١} - \cancel{س^٢} - ٢سهـ - هـ^٢ - \cancel{١} + \cancel{س^٢}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{هـ}(-٢س - هـ)}{\cancel{هـ}} = -٢س$$

٢) ق'(٣) = −٢ × ٣ = −٦

٣) ق'($\frac{٣}{٢}$) = −٢ × $\frac{٣}{٢}$ = −٣

مثال (٦) :

أثبت أن معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها يساوي محيط الدائرة .

البرهان :

بما أن معدل التغير هو مشتقة الإقتران فإن م(س) $= \pi$ س^2 ، والمطلوب

لإثبات أن م$'$(س) $= 2\pi$ س

م$'$(س) $=$ نها$_{ع \to س}$ $\dfrac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$

$=$ نها$_{ع \to س}$ $\dfrac{\pi ع^2 - \pi س^2}{ع - س}$

$= \pi$ نها$_{ع \to س}$ $\dfrac{ع^2 - س^2}{ع - س}$

$= \pi$ نها$_{ع \to س}$ $\dfrac{(\cancel{ع - س})(ع + س)}{(\cancel{ع - س})}$

$= \pi \left[س + س \right] = 2\pi$ س

وهو المطلوب

مثال (٧) :

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق ، فأثبت أن :

نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س + 2هـ) - ق(س - 2هـ)}{هـ} = 4$ ق$'$(س)

البرهان :

نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س + 2هـ) - ق(س - 2هـ)}{هـ}$

بإضافة وطرح ق(س) للبسط

$\Leftarrow$ نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س + 2هـ) - ق(س) + ق(س) - ق(س - 2هـ)}{هـ}$

$=$ نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س + 2هـ) - ق(س)}{هـ}$ $+$ نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س) - ق(س - 2هـ)}{هـ}$

$= 2$ نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س + 2هـ) - ق(س)}{2هـ}$ $+ 2$ نها$_{هـ \to 0}$ $\dfrac{ق(س) - ق(س - 2هـ)}{2هـ}$

$= 2$ ق$'$(س) $+ 2$ ق$'$(س)

$= 4$ ق$'$(س)

وهو المطلوب

مثال (٨) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} > ٠$.

جد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(٢\text{ع} + \sqrt{\text{ع}}) - (٢\text{س} + \sqrt{\text{س}})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}} + ٢\text{ع} - ٢\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\text{ع} - ٢\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= ٢ + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}$$

$$= ٢ + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{١}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$= ٢ + \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}} = ٢ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

مثال (٩)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{١ - \text{س}}$ ، $\text{س} \neq ١$

جد $\text{قَ}(-٢)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$$\text{قَ}(-٢) = \lim_{\text{ع}\to-٢} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(-٢)}{\text{ع} - (-٢)}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to-٢} \frac{\frac{\text{ع}^٢}{١ - \text{ع}} - \frac{٤}{١ + ٢}}{\text{ع} + ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to-٢} \frac{\frac{\text{ع}^٢}{١ - \text{ع}} - \frac{٤}{٣}}{\text{ع} + ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to-٢} \frac{٣\text{ع}^٢ - ٤(١ - \text{ع})}{٣(١ - \text{ع})} \times \frac{١}{\text{ع} + ٢}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to-٢} \frac{٣\text{ع}^٢ + ٤\text{ع} - ٤}{٣(١ - \text{ع})(\text{ع} + ٢)}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to-٢} \frac{\cancel{(\text{ع} + ٢)}(٣\text{ع} - ٢)}{٣(١ - \text{ع})\cancel{(\text{ع} + ٢)}}$$

$$= \frac{٣ \times -٢ - ٢}{٣(١ + ٢)} = \frac{-٨}{٩}$$

مثال (١٠) :

إذا كان ق(س) = (س − أ) ل(س) حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، أ ثابت ، فبين باستخدام تعريف المشتقة أن ق'(أ) = ل(أ)

الحل :

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(أ)}}{\text{ع} - \text{أ}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} - \text{أ})\,\text{ل(ع)} - \boxed{\underbrace{(\text{أ} - \text{أ})}_{\text{صفر}}\,\text{ل(أ)}}}{\text{ع} - \text{أ}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ل(ع)}\,\cancel{(\text{ع} - \text{أ})}}{\cancel{\text{ع} - \text{أ}}} = \text{ل(أ)}$$

وهو المطلوب

مثال (١١) :

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق فأثبت أن

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{٣\text{ع ق(ع)} - ٣\text{س ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} = ٣\text{ق(س)} + ٣\text{س ق}'(\text{س})$$

البرهان :

نضيف ونطرح ٣ع ق(س) للبسط ⟵

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{٣\text{ع ق(ع)} - ٣\text{ع ق(س)} + ٣\text{ع ق(س)} - ٣\text{س ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{٣\text{ع ق(ع)} - ٣\text{ع ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{٣\text{ع ق(س)} - ٣\text{س ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{٣\text{ع}\left(\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}\right)}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{٣\text{ق(س)}\,\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= ٣\text{س}\;\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} + ٣\text{ق(س)}$$

$$= ٣\text{س} \times \text{ق}'(\text{س}) + ٣\text{ق(س)}$$

وهو المطلوب

مثال (١٢) :

إذا كان ق'(−٢) = ٣ ، فجد

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(-٢ + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(-٢)}{٣\text{هـ}}$$

الحل :

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(-٢ + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(-٢)}{٣\text{هـ}}$$

$$= \frac{٢}{٣}\;\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(-٢ + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(-٢)}{٢\text{هـ}}$$

$$= \frac{٢}{٣}\,\text{ق}'(-٢) = \frac{٢}{٣} \times ٣ = ٢$$

مثال (١٣) :

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها ، جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة لطول ضلعها عندما يكون طولها ٢٠ سم

الحل :

$\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

$\therefore \text{م}'(٢٠) = \underset{\text{ع}\to ٢٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(٢٠)}{\text{ع} - ٢٠}$

$= \underset{\text{ع}\to ٢٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}^{٢} - ٤٠٠}{\text{ع} - ٢٠} = \underset{\text{ع}\to ٢٠}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ع} - ٢٠)}(\text{ع} + ٢٠)}{\cancel{\text{ع} - ٢٠}}$

$= ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$

مثال (١٤) :

مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظاً على شكله ، جد معدل تغير حجم المكعب بالنسبة الى طول ضلعه عندما يكون طول ضلعه وحدتي طول .

الحل :

$\text{ح} = \text{س}^{٣} \Leftarrow \text{ح}'(٢) = \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ح}(\text{ع}) - \text{ح}(٢)}{\text{ع} - ٢}$

$= \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}^{٣} - ٨}{\text{ع} - ٢} = \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ع} - ٢)}(\text{ع}^{٢} + ٢\text{ع} + ٤)}{\cancel{(\text{ع} - ٢)}}$

$= ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$

مثال (١٥) :

أنبوب من المعدن إسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قاعدته بمقدار وحدتين سخن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظاً على شكله ، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة الى نصف قاعدته عندما يكون نق = ٦ سم .

الحل :

$\text{ع} = \text{نق} + ٢$

$\text{م}(\text{نق}) = ٢\pi\,\text{نق}\,\text{ع} = ٢\pi\,\text{نق}(\text{نق} + ٢)$

$\Leftarrow \text{م}(\text{نق}) = ٢\pi(\text{نق}^{٢} + ٢\,\text{نق})$; نق = س

$\Leftarrow \text{م}(\text{س}) = ٢\pi(\text{س}^{٢} + ٢\text{س})$

$\Leftarrow \text{م}'(٦) = \underset{\text{ع}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(٦)}{\text{ع} - ٦}$

$= \underset{\text{ع}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{٢\pi(\text{ع}^{٢} + ٢\text{ع}) - ٢\pi(٣٦ + ١٢)}{\text{ع} - ٦}$

$= \underset{\text{ع}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{٢\pi(\text{ع}^{٢} - ٣٦)}{\text{ع} - ٦} + \underset{\text{ع}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{٤\pi\cancel{(\text{ع} - ٦)}}{\cancel{(\text{ع} - ٦)}}$

$= \underset{\text{ع}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{٢\pi\cancel{(\text{ع} - ٦)}(\text{ع} + ٦)}{\cancel{\text{ع} - ٦}} + ٤\pi$

$= ٢٤\pi + ٤\pi = ٢٨\pi$

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الأول :

إذا كان ق(س) = س$\sqrt{س+١}$ ، فجد ق$'$(٢) باستخدام تعريف المشتقة .

الحل :

$$ق'(٢) = \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س-٢} = \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{س\sqrt{س+١} - ٢\sqrt{٢+١}}{س-٢}$$

$$= \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{س\sqrt{س+١} - ٦}{س-٢} \times \frac{س\sqrt{س+١} + ٦}{س\sqrt{س+١} + ٦}$$

$$= \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{س^٢(س+١) - ٣٦}{(س-٢)(س\sqrt{س+١}+٦)} = \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{س^٣ + س^٢ - ٣٦}{(س-٢)(س\sqrt{س+١}+٦)}$$

اذا كان (س − ٢) أحد العوامل الأولية لـ $س^٣ + س^٢ - ٣٦$

$\therefore$ $س^٣ + س^٢ - ٣٦ = (س-٢)(س^٢ + ٤س + ١٢)$

−٣٦	٠	١	١	$\boxed{٣}$
٣٦	١٢	٣		
٠	١٢	٤	١	

$$\underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س-٢)}(س^٢+٤س+١٢)}{\cancel{(س-٢)}(س\sqrt{س+١}+٦)}$$

$$= \frac{(٢)^٢ + ٤\times٢ + ١٢}{٢\times\sqrt{٢+١} + ٦} = \frac{٣٣}{١٢} = \frac{١١}{٤}$$

التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الثاني :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{4\text{س}}{2\text{س}-1}$ ، $\text{س} \neq \dfrac{1}{2}$ ، جد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\dfrac{4\text{ع}}{2\text{ع}-1}-\dfrac{4\text{س}}{2\text{س}-1}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{4\text{ع}(2\text{س}-1)-4\text{س}(2\text{ع}-1)}{(2\text{س}-1)(2\text{ع}-1)(\text{ع}-\text{س})}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{8\text{ع}\text{س}}-4\text{ع}-\cancel{8\text{ع}\text{س}}+4\text{س}}{(2\text{س}-1)(2\text{ع}-1)(\text{ع}-\text{س})} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-4\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{(2\text{س}-1)(2\text{ع}-1)\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}$$

$$= \frac{-4}{(2\text{س}-1)^2}$$

السؤال الثالث :

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}\,٢\text{س}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,٢(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ظا}\,٢\text{س}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\dfrac{\text{ظا}\,٢\text{س} + \text{ظا}\,٢\text{هـ}}{١ - \text{ظا}\,٢\text{س}\,\text{ظا}\,٢\text{هـ}} - \dfrac{\text{ظا}\,٢\text{س}}{١}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,٢\text{س} + \text{ظا}\,٢\text{هـ} - \text{ظا}\,٢\text{س} + \text{ظا}^{٢}\,٢\text{س}\,\text{ظا}\,٢\text{هـ}}{\text{هـ}(١ - \text{ظا}\,٢\text{س}\,\text{ظا}\,٢\text{هـ})} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,٢\text{هـ}\,(١ + \text{ظا}^{٢}\,٢\text{س})}{\text{هـ}(١ - \text{ظا}\,٢\text{س}\,\text{ظا}\,٢\text{هـ})}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ظا}\,٢\text{هـ}}{\text{هـ}} * \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{قا}^{٢}\,٢\text{س}}{١ - \text{ظا}\,٢\text{س}\,\text{ظا}\,٢\text{هـ}}$$

$$= ٢ \times \text{قا}^{٢}\,٢\text{س}$$

ثالثاً : الإتصال والاشتقاق

لإيجاد المشتقة او البحث عن قابلية الاشتقاق للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عند $\text{س} = \text{أ}$ يجب دراسة الاتصال عند $\text{س} = \text{أ}$

١) اذا كان $\text{ق}'_{-}(\text{أ}) = \text{ق}'_{+}(\text{أ})$

∴ $\text{ق}'(\text{أ})$ موجودة و ق متصل عند أ

٢) اذا كان $\text{ق}'_{-}(\text{أ}) \neq \text{ق}'_{+}(\text{أ})$

∴ $\text{ق}'(\text{أ})$ غير موجود و ق غير متصل عند أ

*** نظرية (١) :**

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للإشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$ ، فإنه يكون متصلاً عند $\text{س} = \text{أ}$.

*** نظرية (٢) :**

إذا كان ق إقتراناً غير متصل عند النقطة $(\text{أ} ، \text{ق}(\text{أ}))$ فإنه غير قابل للاشتقاق عندها.

*** ملاحظة :**

$\boxed{\text{المشتقة عند أطراف الفترة غير موجودة}}$

إذا كان ق معرفاً على الفترة [أ ، ب]

فإن $\text{ق}'(\text{أ})$ غير موجود

$\text{ق}'(\text{ب})$ غير موجود

لأن ق غير معرف من يسار أ و غير معرف من يمين ب

* برهان نظرية (١)

بما أن ق قابل للاشتقاق عند أ ⟸

اذن $\text{ق}'(\text{أ}) = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$

المطلوب إثبات أن $\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$

⟸ $\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = [\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})] \times \dfrac{\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - \text{أ}}$

بأخذ النهاية للطرفين :

$\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ}) = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{[\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})](\text{س} - \text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$

⟸ $\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق}(\text{س}) - \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق}(\text{أ}) = \text{صفر}$

⟸ $\lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق}(\text{أ}) = \text{ق}(\text{أ})$

وبما أن $\text{ق}(\text{أ})$ معرفة

⟸ ق متصل عند $\text{س} = \text{أ}$

مثال (١) :

إذا كان ق(س) = { س^٢ − ٤س ، س < −٢ ؛ ٨س + أ ، س ≥ −٢ }

قابلاً للاشتقاق عند س = −٢ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

بما أنه ق قابلاً للاشتقاق عند س = −٢

إذن نهـا (س ← −٢^+) ق(س) = نهـا (س ← −٢^−) ق(س)

⇐ نهـا (س ← −٢^+) س^٢ − ٤س = نهـا (س ← −٢^−) ٨س + أ

⇐ (−٢)^٢ − ٤(−٢) = ٨ × −٢ + أ

⇐ أ = ١٦

مثال (٢) :

اذا كان

ق(س) = { √س + ٣ ، س ≥ ٤ ؛ ٢س − ٧ ، س < ٤ }

فأجب عن كل ما يلي :

أ) ابحث في إتصال الاقتران ق عند س = ٤

ب) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤

الحل :

أ) نهـا (س ← ٤^+) ق(س) = √٤ + ٢ = ٥

نهـا (س ← ٤^−) ق(س) = ٢ × ٤ − ٧ = ٥

نهـا (س ← ٤^−) ق(س) = نهـا (س ← ٤^+) ق(س)

∴ ق موجود عند س = ٤

ق(٤) = √٤ + ٢ = ٥

∴ ق متصل عند س = ٤

ب) لايجاد ق'(٤) ، يجب ايجاد ق'−(٤) و ق'+(٤)

⇐ ق'−(٤) = نهـا (س ← ٤^−) (ق(س) − ق(٤)) / (س − ٤)

= نهـا (س ← ٤^−) (٢س − ٧ − ٥) / (س − ٤)

= نهـا (س ← ٤^−) ٢(س − ٤) / (س − ٤) = ٣

ق'+(٤) = نهـا (س ← ٤^+) (ق(س) − ق(٤)) / (س − ٤)

= نهـا (س ← ٤^+) (√س − ٢) / (س − ٤) × (√س + ٢) / (√س + ٢)

= نهـا (س ← ٤^+) $\cancel{(س-٤)}$ / ($\cancel{(س-٤)}$(√س + ٢))

= ١/٤ ⟵ ق'(٤) غير موجود

لأنه ق'−(٤) ≠ ق'+(٤)

مثال (٣) : إذا كان

ق(س) = $[\frac{1}{2}$ س $+ ٢]$ ، ابحث عن قابلية الإقتران ق للإشتقاق عند

أ) س = ١ ب) س = ٣

الحل :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢ & ، ٠ \leq \text{س} < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \leq \text{س} < ٦ \end{cases}$$

أ) عند س = ١

ق(١) = ٢ ⟸ ق متصل عند س = ١ لأنه ثابت

$$\therefore \text{ق}'(١) = \underset{\text{ع} \to ١}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$$

$$= \underset{\text{ع} \to ١}{\text{نها}} \frac{٢ - ٢}{\text{ع} - ١} = \text{صفر}$$

ب) عند س = ٣ : نقطة تشعب

$$\underset{\text{س} \to ٣^+}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٣$$

$$\underset{\text{س} \to ٣^-}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٢$$

و ق(٣) = ٣

$$\therefore \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \text{ق(س)} \text{ غير موجودة}$$

⟸ ق غير متصل عند س = ٣

و ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

مثال (٤) : إذا كان ق(س) = (س − ٢)[س] فابحث في قابلية الإشتقاق ق عند س = ٢ مستخدماً تعريف المشتقة .

الحل :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٢ & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - ٤ & ، ٢ \leq \text{س} < ٣ \end{cases}$$

نبحث الاتصال عند س = ٢

ق(٢) = ٤ − ٤ = صفر

$$\underset{\text{س} \to ٢^+}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٤ - ٤ = \text{صفر}$$

$$\underset{\text{س} \to ٢^-}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٢ - ٢ = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \text{ق(س)} = \text{ق}(٢) = \text{صفر}$$

∴ ق متصل عند س = ٢

الآن نبحث قابلية الإشتقاق عند س = ٢

$$\text{ق}'_+(٢) = \underset{\text{ع} \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع} \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{٢\text{ع} - ٤ - ٠}{\text{ع} - ٢} = \underset{\text{ع} \to ٢^+}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(\text{ع} - ٢)}}{\cancel{(\text{ع} - ٢)}} = ٢$$

$$\text{ق}'_-(٢) = \underset{\text{ع} \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع} \to ٢^-}{\text{نها}} \frac{\text{ع} - ٢}{\text{ع} - ٢} = ١$$

$$\Leftarrow \text{ق}'_+(٢) \neq \text{ق}'_-(٢)$$

ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

مثال (٥):

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{6}{س} - 4 &، 1 \le س \le 2 \\ 3س + 1 &، 2 < س \le 5 \end{cases}$$

جد ق′(س) على مجاله مستخدماً تعريف المشتقة.

الحل:

أولاً: المجال هو [١، ٥]

ق′(١) و ق′(٥) غير موجودتان لأن ١ و ٥ أطراف المجال

ثانياً: الفترة (١، ٢)

ق متصل على الفترة لأنه معرف على الفترة

$$\therefore ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\left(\frac{6}{ع} - \cancel{4}\right) - \left(\frac{6}{س} - \cancel{4}\right)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{6}{ع} - \frac{6}{س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{6س - 6ع}{ع س} \times \frac{1}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{6\cancel{(س - ع)}^{-1}}{ع س} \times \frac{1}{\cancel{ع - س}}$$

$$= \frac{-6}{س \times س} = \frac{-6}{س^2}$$

ثالثاً: الفترة (٢، ٥)

ق متصل على الفترة لأنه معرف على الفترة

$$\Leftarrow ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{3ع + 1 - (3س + 1)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{3\cancel{(ع - س)}}{\cancel{(ع - س)}}$$

$$\Leftarrow ق'(س) = 3$$

رابعاً: نبحث الاتصال عند س = ٢

$$ق(2) = \frac{6}{2} - 4 = -1$$

$$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = -1$$

$$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 3 \times 2 + 1 = 7$$

$\Leftarrow \lim_{س \to 2} ق(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند س = ٢

و ق′(٢) غير موجود

$$\Leftarrow ق'(س) = \begin{cases} \frac{-6}{س^2} &، 1 < س < 2 \\ 3 &، 2 < س < 5 \\ \text{غير موجود} &، س = \{1، 2، 5\} \end{cases}$$

السؤال الأول:

ليكن ق(س) = س|جاس| ، س $\in [\,٠ ، ٢\pi)$ ، ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س $= \pi$

الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} س\,جاس ، & ٠ \leq س < \pi \\ -س\,جاس ، & \pi \leq س < ٢\pi \end{cases}$$

نبحث الاتصال عند س $= \pi$

$\Leftarrow$ ق(π) = صفر

$\lim\limits_{س \to \pi^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to \pi}$ س جاس = صفر

$\lim\limits_{س \to \pi^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to \pi}$ −س جاس = صفر

$\therefore$ ق متصل عند س $= \pi$

الآن نبحث قابلية الإشتقاق:

① $ق'_-(\pi) = \lim\limits_{س \to \pi^-} \dfrac{ق(س) - ق(\pi)}{س - \pi}$

$= \lim\limits_{س \to \pi^-} \dfrac{س\,جاس - ٠}{س - \pi}$

اذا ص = π − س $\Leftarrow$ س $\to \pi$ $\therefore$ ص $\to ٠$

$\Leftarrow \lim\limits_{ص \to ٠} \dfrac{(\pi - ص)\,جاص}{-ص} = \dfrac{\pi - ٠}{-١} = -\pi$

② $ق'_+(\pi) = \lim\limits_{س \to \pi^+} \dfrac{ق(س) - ق(\pi)}{س - \pi}$ $\leftarrow$

$\Leftarrow \lim\limits_{س \to \pi^+} \dfrac{-س\,جاس - ٠}{س - \pi} = \lim\limits_{س \to \pi^+} \dfrac{-س\,جا(\pi - س)}{س - \pi}$

$= -\pi \times -١ = \pi$

$\therefore ق'_+(\pi) \neq ق'_-(\pi)$

ق'(π) غير موجوده

$\Leftarrow$ ق غير قابل للاشتقاق عند س $= \pi$.

السؤال الثاني :

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -١-٢\text{س} & ،\ \text{س} < -١ \\ \text{س}^٢ & ،\ -١ \le \text{س} \le ١ \\ \text{س} & ،\ \text{س} > ١ \end{cases}$$
، ابحث قابلية اشتقاق ق على مجاله واكتب قاعدة ق'(س) مستخدماً تعريف المشتقة .

الحل :

أ) الفترة (-∞ ، -١)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(-١-٢\text{ع}) - (-١-٢\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-٢(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = -٢$$

ب) الفترة (-١ ، ١)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^٢ - \text{س}^٢}{\text{ع}-\text{س}} = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} = ٢\text{س}$$

جـ) الفترة (١ ، ∞)

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}-\text{س}}{\text{ع}-\text{س}} = ١$$

د) نبحث الاتصال عند س = -١ ثم قابلية الاشتقاق عند نفس النقطة :-

$$\text{ق}(-١) = ١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to-١^-} \text{ق}(\text{س}) = -١+٢ = ١$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to-١^+} \text{ق}(\text{س}) = -١+٢ = ١$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{\text{س}\to-١} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(-١) = ١$$

ق متصلة عند س = -١

يتبع

يتبع السؤال الثاني :-

نبحث الاشتقاق عند س = -1

$$ق'_-(-1) = \underset{ع \to -1^-}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(-1)}{ع+1} = \underset{ع \to -1^-}{\text{نها}} \frac{(-2ع-1) - (1)}{ع+1} = \underset{ع \to -1^-}{\text{نها}} \frac{-2ع-2}{ع+1}$$

$$= \underset{ع \to -1^-}{\text{نها}} \frac{-2\cancel{(ع+1)}}{\cancel{ع+1}} = -2$$

$$ق'_+(-1) = \underset{ع \to -1^+}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(-1)}{ع+1} = \underset{ع \to -1^+}{\text{نها}} \frac{ع^2-1}{ع+1} = \underset{ع \to -1^+}{\text{نها}} \frac{(ع-1)\cancel{(ع+1)}}{\cancel{(ع+1)}} = -2$$

⇐ ق(س) قابل للاشتقاق لأن $\underset{ع \to -1^+}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{ع \to -1^-}{\text{نها}}$ ق(س) ⇐ $ق'(-1) = -2$

هـ) نبحث الاتصال عند س = 1 ، ثم قابلية الاشتقاق عند نفس القيمة .

ق(1) = 1

$\underset{س \to 1^+}{\text{نها}}$ ق(س) = 1

$\underset{س \to 1^-}{\text{نها}}$ ق(س) = 1

⇐ $\underset{س \to 1}{\text{نها}}$ ق(س) = ق(1) = 1

∴ ق متصل عند س = 1

نبحث عن قابلية الاشتقاق عند س = 1

$$ق'_+(1) = \underset{ع \to 1^+}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(1)}{ع-1}$$

$$= \underset{ع \to 1^+}{\text{نها}} \frac{ع-1}{ع-1} = 1$$

$$ق'_-(1) = \underset{ع \to 1^-}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(1)}{ع-1}$$

$$= \underset{ع \to 1^-}{\text{نها}} \frac{ع^2-1}{ع-1} = 1+1 = 2$$

⇐ $ق'_+(1) \neq ق'_-(1)$

⇐ ق'(1) غير موجود

$$ق'(س) = \begin{cases} -2 & ، \quad س < -1 \\ 2س & ، \quad -1 \leq س < 1 \\ 1 & ، \quad س > 1 \\ \text{غير موجود} & ، \quad س = 1 \end{cases}$$

أولاً : قواعد الاشتقاق (1)

في هذا الدرس سنتعلم قواعد تمكننا من إيجاد المشتقة بطرق مختصرة.

*** قاعدة (1) :**

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ ، حيث جـ عدد ثابت
فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{صفراً}$ ، لكل $\text{س} \in \text{ح}$

البرهان :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{هـ}} = \text{صفر}$$

*** قاعدة (2) :**

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإن
$\text{قَ}(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$

البرهان :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\left(\text{ع}^{\text{ن}-1} + \text{ع}^{\text{ن}-2}\,\text{س} + \dots + \text{س}^{\text{ن}-1}\right)}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}$$

$$= \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1} + \text{س}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{س}^{\text{ن}-1} \quad \text{ن عدد مرات}$$

$$= \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

*** قاعدة (3) :**

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، جـ عدد ثابت ، وكان $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{ق}(\text{س})$ ، فإن الاقتران هـ(س) قابل للاشتقاق عند س ، وأن

$$\text{هَ}(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{قَ}(\text{س})$$

*** قاعدة (4) : {الجمع والطرح}**

إذا كان كل من الاقترانين ل ، م قابلاً للاشتقاق عند س وكان

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})$ و
$\text{هـ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) - \text{م}(\text{س})$

فإن كلاً من الاقترانين ق و هـ قابل للاشتقاق عند س ويكون :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{لَ}(\text{س}) + \text{مَ}(\text{س})$$
$$\text{هَ}(\text{س}) = \text{لَ}(\text{س}) - \text{مَ}(\text{س})$$

البرهان :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{[\text{ل}(\text{ع}) + \text{م}(\text{ع})] - [\text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})]}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{لَ}(\text{س}) + \text{مَ}(\text{س})$$

*** قاعدة عامة :**

إذا كان ق اقترانًا كثير الحدود ، فإن ق قابل للإشتقاق لكل س ∈ ح

ل(س) = ق$_1$(س) + ق$_2$(س) + ... + ق$_ن$(س)

فإن

ل′(س) = ق′$_1$(س) + ق′$_2$(س) + ... + ق′$_ن$(س)

مثال (١) :

اذا كان ق(س) = $\sqrt{3}$ فجد ق′(س) ، ق′(١) ، ق′(٤)

الحل :

ق′(س) = صفر لأن ق(س) اقتران ثابت

∴ ق′(١) = صفر و ق′(٤) = صفر

مثال (٢)

جد ق′(س) ثم جد ق′(-١) :

أ) ق(س) = س^{5}

ب) ق(س) = س

الحل :

أ) ق′(س) = ٥س^{4}

∴ ق′(-١) = ٥ × (-١)^{4} = ٥

ب) ق′(س) = ١

∴ ق′(-١) = ١

مثال (٣) :

جد ق′(س) لكل مما يلي :

أ) ق(س) = -س^{6}

ب) ق(س) = $\frac{\text{س}^2}{\pi}$

الحل :

أ) ق′(س) = (-١)(٦س^{5}) = -٦س^{5}

ب) ق′(س) = $\frac{1}{\pi}$ (٢س) = $\frac{2}{\pi}$ س

مثال (٤) :

اذا كان ق(س) = س^{4} |س| فجد ق′(-٢) .

الحل :

|س| = { س ، س ≥ ٠ ؛ -س ، س < ٠

العدد (-٢) موجود في مجال س < ٠

∴ ق(س) = س^{4} × -س = -س^{5}

∴ ق′(س) = -٥س^{4}

ق′(-٢) = -٥ × (-٢)^{4}

= -٥ × ١٦

= -٨٠

مثال (٥) :

جد $\text{ق}'(\text{س})$ لكل مما يلي :

أ) $\text{ق}(\text{س}) = 7\text{س}^2 + \sqrt{3}\,\text{س}^4$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^5 - \pi\,\text{س}^6$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^4 - 6\text{س}^2 + 4$

الحل :

أ) $\text{ق}'(\text{س}) = 14\text{س} + 4\sqrt{3}\,\text{س}^3$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = (4)(5\text{س}^4) - (\pi)(6\text{س}^5)$

$= 20\text{س}^4 - 6\pi\,\text{س}^5$

جـ) $\text{ق}'(\text{س}) = 4\text{س}^3 - 6(2\text{س}) + \text{صفر}$

$= 4\text{س}^3 - 12\text{س}$

مثال (٦) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^3 - [2\text{س}+1]$

جد $\text{ق}'(0.6)$.

الحل :

الاقتران $[2\text{س}+1]$ هو اقتران رمز عدد صحيح حول $\text{س} = 0.6 \in [\frac{1}{2} ، 1)$

$\therefore [2\times 0.6 + 1] = [2.2] = 2$

$\therefore$ تصبح $\text{ق}(\text{س}) = 4\text{س}^3 - 2$

$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 12\text{س}^2$

$\text{ق}'(0.6) = 12 \times (0.6)^2$

$= 4.32$

مثال (٧) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - 2| + 2\text{س}^2$

جد $\text{ق}'(1)$

الحل :

$$|\text{س}-2| = \begin{cases} \text{س}-2 \quad ، \quad \text{س} \geq 2 \\ -\text{س}+2 \quad ، \quad \text{س} < 2 \end{cases}$$

وبما أن $\text{س} = 1$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = -\text{س} + 2 + 2\text{س}^2$

$= 3\text{س}^2 - \text{س} + 2$

$\text{ق}'(\text{س}) = 6\text{س} - 1$

$\therefore \text{ق}'(1) = 6\times 1 - 1 = 5$

مثال (٨) :

جد $\text{ق}'(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ ، إذا

$\text{ق}(\text{س}) = [\frac{1}{2}\text{س} + 5] - 4\text{س}^2$ عند $\text{س} = 2.4$

الحل :

$[\frac{1}{2}\text{س} + 5] = [\frac{1}{2}\times 2.4 + 5] = [6.2]$

$= 6$ بحيث $2 \leq \text{س} < 4$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = 6 - 4\text{س}^2$

$\text{ق}'(\text{س}) = -8\text{س}$

$\text{ق}'(2.4) = -8 \times 2.4 = -19.2$

مثال (٩) :

اذا كان ل و هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان لَ(-٢) = ٤ و هـَ(-٢) = -٣ وكان

ق(س) = $\frac{1}{2}$ ل(س) + هـ(س) + س³

فجد قَ(-٢) .

الحل :

ق(س) = $\frac{1}{2}$ ل(س) + هـ(س) + س³

∴ قَ(س) = $\frac{1}{2}$ لَ(س) + هـَ(س) + ٣س²

∴ قَ(-٢) = $\frac{1}{2}$ × ٤ + (-٣) + ٣(-٢)²

= ٢ - ٣ + ١٢ = ١١

مثال (١٠) : اذا كان

ق(س) = { أس² + ب س ، س ≤ ١
        { ٤ - ب س² + أس ، س > ١

وكانت قَ(١) موجودة ، فجد قيمة كل من الثابتين أ و ب .

الحل :

اذا كانت قَ(١) موجودة ، اذن الاقتران ق(س) متصل عند س = ١

∴ نها ق(س) (س ← ١⁺) = نها ق(س) (س ← ١⁻)

∴ ٤ - ب(١)² + أ(١) = أ(١)² + ب(١)

٤ - ب + $\cancel{أ}$ = $\cancel{أ}$ + ب

⇐ ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢ ←

ولإيجاد قيمة أ ، فإن قَ(١) موجودة

يعني قَ₊(١) = قَ₋(١)

قَ(س) = { ٢أس + ب ، س ≤ ١
         { -٢ب س + أ ، س > ١

⇐ -٢ب + أ = ٢أ + ب

-٢ × ٢ + أ = ٢أ + ٢

∴ $\boxed{أ = ٦}$

مثال (١١) :

جد قَ(٣) اذا كان .

ق(س) = س² + |٣س - ٦|

الحل :

أولاً يجب ايجاد نقط التشعب لـ |٣س - ٦|

٣س - ٦ = ٠ ⇐ س = ٢

∴ ق(س) = { س² + ٣س - ٦ ، س ≥ ٢
          { س² - ٣س + ٦ ، س < ٢

∴ قَ(س) = { ٢س + ٣ ، س > ٢
           { ٢س - ٣ ، س < ٢

∴ قَ(٣) = ٢ × ٣ + ٣

= ٩

السؤال الأول :

إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≤ جـ
                       لَ(جـ)(س − جـ) ، س > جـ

وكان ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ ، وكان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س = جـ ، فأثبت أن الاقتران ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ)

الحل :

لإثبات أن ق(س) قابل للاشتقاق عند س = جـ ، يجب أن يكون

قَ₊(س) = قَ₋(س) عند س = جـ

∴ قَ₊(جـ) = نهـا (س←جـ⁺) [ق(س) − ق(جـ)] / (س − جـ) = نهـا (س←جـ⁺) ([لَ(جـ)(س − جـ)] − [لَ(جـ)(~~جـ − جـ~~)]) / (س − جـ)   (صفر)

= نهـا (س←جـ⁺) لَ(جـ)(~~س − جـ~~) / (~~س − جـ~~) = لَ(جـ)

أيضاً قَ₋(جـ) = نهـا (س←جـ⁻) [ق(س) − ق(جـ)] / (س − جـ) = نهـا (س←جـ⁻) [ل(س) − ل(جـ)] / (س − جـ)

⇐ قَ₋(جـ) = نهـا (س←جـ⁻) لَ(س) = لَ(جـ)

∴ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = جـ لأن قَ₋(جـ) = قَ₊(جـ)

إذن قَ(جـ) = لَ(جـ)

السؤال الثاني :

اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أ س}^{2} + \text{٤ب س} - 8 & ، \text{س} > 1 \\ \text{أ س}^{3} - \text{ب س} + 2 & ، \text{س} \leq 1 \end{cases}$

وكانت $\text{ق}'(1)$ موجودة ، جد قيمة كل من الثابتين أ و ب

الحل : مادام $\text{ق}'(1)$ موجودة عند س = ١ ، اذن ق(س) متصلة عند س = ١

$\therefore \text{ق}_{+}(1) = \text{ق}_{-}(1) \Leftarrow \text{أ}(1)^{2} + \text{٤ب}(1) - 8 = \text{أ}(1)^{3} - \text{ب}(1) + 2$

$\Leftarrow \cancel{\text{أ}} + \text{٤ب} - 8 = \cancel{\text{أ}} - \text{ب} + 2$

$\Leftarrow \text{٥ب} = 10 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 2}$

أيضاً $\text{ق}'_{+}(1) = \text{ق}'_{-}(1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{٢أ س} + \text{٤ب} & ، \text{س} > 1 \\ \text{٣أ س}^{2} - \text{ب} & ، \text{س} \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \text{٢أ س} + 8 & ، \text{س} > 1 \\ \text{٣أ س}^{2} - 2 & ، \text{س} \leq 1 \end{cases}$

$\therefore \text{ق}'_{+}(1) = \text{ق}'_{-}(1) \Leftarrow \text{٢أ}(1) + 8 = \text{٣أ}(1)^{2} - 2$

$\Leftarrow \text{٢أ} + 8 = \text{٣أ} - 2$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = 10}$

السؤال الثالث :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{أ} + \text{س}^{\frac{1}{2}})^2 & ، \text{س} \geq 9 \\ \frac{\text{س}^2}{27} + \text{ب} & ، \text{س} < 9 \end{cases}$

وكانت $\text{ق}'(9)$ موجودة ، فجد قيمة كلاً من الثابتين أ ، ب

الحل :

اذا كانت $\text{ق}'(9)$ موجودة ، إذن $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = 9$

$\therefore \lim_{\text{س} \to 9^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to 9^-} \text{ق}(\text{س}) \Leftarrow (\text{أ} + (9)^{\frac{1}{2}})^2 = \frac{(9)^2}{27} + \text{ب}$

$\Leftarrow (\text{أ} + 3)^2 = \frac{81}{27} + \text{ب} \Leftarrow \text{أ}^2 + 6\text{أ} + 9 = 3 + \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \text{أ}^2 + 6\text{أ} + 6$ — (1)

أيضاً

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}^2 + 2\text{أ}\,\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س} & ، \text{س} \geq 9 \\ \frac{\text{س}^2}{27} + \text{ب} & ، \text{س} < 9 \end{cases}$

$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}} + 1 & ، \text{س} > 9 \\ \frac{2\text{س}}{27} & ، \text{س} < 9 \end{cases}$

$\Leftarrow \text{ق}'_{+}(9) = \text{ق}'_{-}(9) \Leftarrow \text{أ}(9)^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{2 \times 9}{27}$

$\Leftarrow \frac{\text{أ}}{3} + 1 = \frac{2}{3} \Leftarrow \frac{\text{أ}}{3} = \frac{-1}{3} \Leftarrow \text{أ} = -1$

$\therefore \text{ب} = \text{أ}^2 + 6\text{أ} + 6 = (-1)^2 + 6 \times -1 + 6 = 1$

ثانياً : قواعد الاشتقاق (٢)

*** قاعدة (١) :**

قاعدة الضرب :

إذا كان الاقترانان ل ، هـ قابلين للاشتقاق عند س ، وكان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ ، فإن الإقتران ق يكون قابلاً للاشتقاق عند س وإن :

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) + \text{ل}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})}$$

*** نتيجة (١)**

اذا كان الاقتران ل قابلاً للاشتقاق عند س ، م عدد ثابت وكان :

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{م}}{\text{ل}(\text{س})}$ ، $\text{ل}(\text{س}) \neq 0$

فإن الاقتران ق يكون قابلاً للإشتقاق عند س وانه :

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{م}\,\text{ل}'(\text{س})}{[\text{ل}(\text{س})]^2}}$$

*** قاعدة (٢) :**

قاعدة القسمة :

إذا كان الإقترانان ل و هـ قابلين للإشتقاق عند س ، وكان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ل}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) \neq 0$ ، فإن الإقتران ق يكون قابلاً للإشتقاق عند س وإن .

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}(\text{س})\,\text{ل}'(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})}{[\text{هـ}(\text{س})]^2}}$$

*** نتيجة (٢) :**

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{س} \neq 0$ ، ن عدد سالب صحيح ، فإن

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}}$$

<u>البرهان</u> : إفرض ان $\text{ن} = -\text{م}$ ، $\text{س} \neq 0$ ،

حيث م عدد موجب صحيح $\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}}$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}^{\text{م}}}$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{\text{م}} \times 0 - 1\,\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\text{م}})^2}$$

$$= \frac{-\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\text{م}})^2} = -\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1-2\text{م}}$$

$= -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-1}$ ، إذن

$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-1} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$

لأن $\text{ن} = -\text{م}$

* برهان نتيجة (1)

أثبت أن $\text{ه}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ}\,\text{ل}'(\text{س})}{[\text{ل}(\text{س})]^2}$

اذا كان ه(س) قابلاً للاشتقاق عند س و $\text{ه}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{ل}(\text{س})}$ ، $\text{ل}(\text{س}) \neq 0$.

البرهان:

اذا $\text{ه}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{ل}(\text{س})}$ ، إذن

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س}) \times 0 - \text{ل}'(\text{س})(\text{أ})}{[\text{ل}(\text{س})]^2}$$

$$\therefore \text{ه}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ}\,\text{ل}'(\text{س})}{[\text{ل}(\text{س})]^2}$$

مثال (1)

اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 6\text{س})(4\text{س}^2 - 2)$

نجد ه'(س) .

الحل :

$$\text{ه}'(\text{س}) = (\text{س}^2 + 6\text{س}) \times \frac{d}{d\text{س}}(4\text{س}^2 - 3)$$
$$+ \frac{d}{d\text{س}}(\text{س}^2 + 6\text{س}) \times (4\text{س}^2 - 3)$$

$$= (\text{س}^2 + 6\text{س})(8\text{س}) + (2\text{س} + 6)(4\text{س}^2 - 3)$$

$$= 8\text{س}^3 + 48\text{س}^2 + 8\text{س}^3 - 6\text{س} + 24\text{س}^2 - 18$$

$$= 16\text{س}^3 + 72\text{س}^2 - 6\text{س} - 18$$

مثال (2) :

اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 + \text{س}}{\text{س}^2 + 5}$ نجد ه'(س)

الحل :

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2 + 5)(\text{س}^3 + \text{س})' - (\text{س}^3 + \text{س})(\text{س}^2 + 5)'}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(\text{س}^2 + 5)(3\text{س}^2 + 1) - (\text{س}^3 + \text{س})(2\text{س})}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{(3\text{س}^4 + \text{س}^2 + 15\text{س}^2 + 5) - (2\text{س}^4 + 2\text{س}^2)}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

$$\Leftarrow \text{ه}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^4 + 14\text{س}^2 + 5}{(\text{س}^2 + 5)^2}$$

مثال (3) :

جد مشتقة $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\pi}{\text{س}^2}$

الحل :

$$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{-\pi(2\text{س})}{(\text{س}^2)^2}$$

$$= \frac{-2\pi\,\cancel{\text{س}}}{\text{س}^{4}}$$

$$\therefore \text{ل}'(\text{س}) = \frac{-2\pi}{\text{س}^3}$$

* مشتقة الاقترانات المتشعبة :

إذا كان ق(س) = { ل(س) ، س ≥ أ
هـ(س) ، س < أ

حيث لَ(س) موجودة لكل س > أ و
هـَ(س) موجودة لكل س < أ

① جد لَ(س) و هـَ(س) فيكون

قَ(س) = { لَ(س) ، س > أ
هـَ(س) ، س < أ

② ابحث في إتصال ق(س) عند س = أ
وهناك حالتان :

أ) ق اقتران غير متصل عند س = أ
∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ

ب) ق إقتران متصل عند س = أ ،
∴ يجب بحث قابلية الاشتقاق
عند س = أ

مثال (٤) :

إذا كان ق(س) = { ٨س^{3} + ٤س ، س ≥ ١
٨س^{2} + ١٢س − ٨ ، س < ١

نجد قَ(س)

الحل:

عند س > ١ ، ق(س) متصل لأنه كثير الحدود
عند س < ١ ، ق(س) متصل لأنه كثير الحدود

∴ قَ(س) = { ٢٤س^{2} + ٤ ، س > ١
١٦س + ١٢ ، س < ١

⟸ نبحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

قَ$_{+}$(١) = ٢٤(١)^{2} + ٤ = ٢٨

قَ$_{-}$(١) = ١٦(١) + ١٢ = ٢٨

∴ قَ(١) = ٢٨

⟸ نكتب قَ(س) كالآتي

قَ(س) = { ٢٤س^{2} + ٤ ، س > ١
٢٨ ، س = ١
١٦س + ١٢ ، س < ١

مثال (٥) :

إذا كان $ق(س) = س^٢ |س - ٢|$ فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح

الحل :

$$|س-٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ -س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$$

$$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٢س^٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢س^٢ - س^٣ & ، س < ٢ \end{cases}$$

عند س > ٢ ، ق متصل لأنه كثير الحدود

عند س < ٢ ، ق متصل لأنه كثير الحدود

$$أي\ أن\ ق'(س) = \begin{cases} ٤س^٢ - ٦س & ، س > ٢ \\ ٦س^٢ - ٤س^٢ & ، س < ٢ \end{cases}$$

الآن نبحث في قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = ٢ .

$$ق'_+(٢) = ٤(٢)^٢ - ٦(٢) = ٨$$

$$ق'_-(٢) = ٦(٢)^٢ - ٤(٢)^٢ = -٨$$

لأن $ق'_+(٢) \neq ق'_-(٢) \Leftarrow$

ق'(٢) غير موجود

$$ق'(س) = \begin{cases} ٤س^٢ - ٦س & ، س > ٢ \\ غير\ موجود & ، س = ٢ \\ ٦س^٢ - ٤س^٢ & ، س < ٢ \end{cases}$$

مثال (٦) :

إذا كان ل و هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل(−٢) = ٣ ، ل'(−٢) = −١ ، هـ(−٢) = ٤ ، هـ'(−٢) = −٦ فجد ق'(−٢) عندما كان

$$ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س) + ١}$$

الحل :

$$ق'(س) = \frac{هـ'(س) \times [ل(س)+١] - هـ(س) [ل(س)+١]'}{[ل(س)+١]^٢}$$

$$= \frac{هـ'(س) \times ل(س) + هـ'(س) - هـ(س) ل'(س)}{[ل(س)+١]^٢}$$

$$\therefore ق'(-٢) = \frac{هـ'(-٢)\, ل(-٢) + هـ'(-٢) - هـ(-٢)\, ل'(-٢)}{[ل(-٢)+١]^٢}$$

$$= \frac{(-٦ \times ٣) + (-٦) - ٤ \times (-١)}{[٣+١]^٢}$$

$$= \frac{-١٨ - ٦ + ٤}{١٦} = \frac{-٢٠}{١٦}$$

$$= \frac{-٥}{٤}$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي : الأول

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

الوحدة : الثانية
الفصل : الثاني
الصفحة : ٣٥/٦٥

السؤال الأول :

إذا كان ق(س) = |٩ - ٣س| ، فإن قيمة قَ(٣) تساوي :

أ) ٣ ب) -٣ ج) صفر د) غير موجودة

الحل :

بما أن ق(س) = $\begin{cases} ٩ - ٣س ، & س \le ٣ \\ -٩ + ٣س ، & س > ٣ \end{cases}$

ولإيجاد قيمة قَ(٣) ، يجب أن نتأكد من أن ق(س) متصلة عند س = ٣

∴ $\lim\limits_{س \to ٣^+}$ ق(س) = -٩ + ٣ × ٣ = صفر

$\lim\limits_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٩ - ٣ × ٣ = صفر

⟸ إذن ق(س) متصلة عند س = ٣

الآن يجب نتأكد من قابلية ق(س) للاشتقاق :

قَ(س) = $\begin{cases} -٣ ، & س < ٣ \\ ٣ ، & س > ٣ \end{cases}$

∴ $قَ_{+}(٣) \neq قَ_{-}(٣)$

∴ قَ(٣) غير موجودة (د)

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي : الأول

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

الوحدة : الثانية
الفصل : الثاني

السؤال الثاني :

إذا كان $ق(س)$ و $هـ(س)$ اقترانين قابلين للإشتقاق ، وكان $ق(س) = \frac{هـ(س)}{س^2+1}$ ، $ق(1) = \frac{1}{2}$ و $ق'(1) = 0$ ، فإن قيمة $هـ'(1)$ تساوي

أ) -1 ب) صفر ج) 2 د) 1

الحل :

لإيجاد $هـ'(س)$ $\Leftarrow$ $هـ(س) = ق(س) \times (س^2+1)$

$\therefore هـ'(س) = ق'(س) \times (س^2+1) + ق(س) \times (2س)$

$\therefore هـ'(1) = ق'(1) \times ((1)^2+1) + ق(1) \times (2\times1)$

$= 0 + \frac{1}{2} \times 2 = 1$ د

السؤال الثالث :

إذا كان ق و هـ اقترانين قابلين للإشتقاق وكان $ق(س) = هـ(س) - \frac{1}{هـ(س)}$ ، $هـ(س) \neq 0$ ، $هـ(2) = \frac{1}{2}$ ، $هـ'(2) = -1$ ، فإن $ق'(2)$ تساوي :

أ) 3 ب) -3 ج) 5 د) -5

الحل :

$ق(س) = هـ(س) - \frac{1}{هـ(س)} \Leftarrow ق'(س) = هـ'(س) - \frac{-هـ'(س)}{[هـ(س)]^2}$

$ق'(س) = هـ'(س) + \frac{هـ'(س)}{[هـ(س)]^2}$

$\Leftarrow ق'(2) = هـ'(2) + \frac{هـ'(2)}{[هـ(2)]^2} = -1 + \frac{-1}{(\frac{1}{2})^2}$

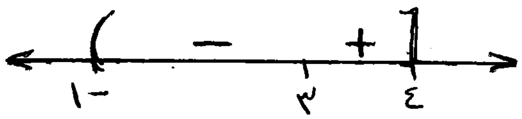
$= -1 - 4 = -5$

د

السؤال الرابع :

جد ق'(س) إذا كان ق(س) = |(س - ٣)(س + ١)| ، س ∈ [-١ ، ٤]

الحل :



(س - ٣)(س + ١) = س² - ٢س - ٣

∴ ق(س) = { س² - ٢س - ٣ ، -١ ≤ س ≤ ٣
　　　　　 -س² + ٢س + ٣ ، ٣ < س ≤ ٤ }

∴ ق'(س) = { ٢س - ٢ ، -١ < س < ٣
　　　　　 -٢س + ٢ ، ٣ < س < ٤ }

- ق'(س) غير معرف عند س = -١ و س = ٤ ، لأنها أطراف المجال
- ق(س) متصل على الفترتين (-١ ، ٣) و (٣ ، ٤) لأنها كثيرة حدود.
- ق(س) متصل عند س = ٣ لأن نها ق(س) (س ← ٣⁻) = نها ق(س) (س ← ٣⁺)

نها ق(س) (س ← ٣⁻) = (٣)² - ٢(٣) - ٣ = صفر

نها ق(س) (س ← ٣⁺) = -(٣)² + ٢×٣ + ٣ = صفر

الآن نبحث عن قابلية الاشتقاق لـ ق(س) عند س = ٣

ق'₊(٣) = -٢×٣ + ٢ = -٤ و ق'₋(٣) = ٢×٣ - ٢ = ٤

∴ ق'(٣) غير موجود لأن ق'₊(٣) ≠ ق'₋(٣)

∴ ق'(س) = { ٢س - ٢ ، -١ < س < ٣
　　　　　 -٢س + ٢ ، ٣ < س < ٤
　　　　　 غير موجود ، عند س = -١ ، ٣ ، ٤ }

السؤال الخامس :

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\left(\text{س} + [\text{س} + \frac{1}{2}]\right)^{4}}{4 - \text{س}^{2}}$ و $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{3} + 8$ فجد

$\frac{د}{د\text{س}}\left[\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})\right]$ عند $\text{س} = 1$

الحل :

أولاً يجب ايجاد $[\text{س} + \frac{1}{2}]$ عند $\text{س} = 1 \Leftarrow [1 + \frac{1}{2}] = [1.5] = 1$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+1)^{4}}{4 - \text{س}^{2}}$ و $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{3} + 8$

لايجاد $\frac{د}{د\text{س}}\left[\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})\right]$ يجب ايجاد $\text{ق}'(\text{س})$ و $\text{هـ}'(\text{س})$

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{(4-\text{س}^{2})\left(4(\text{س}+1)^{3}\right) - (-2\text{س})(\text{س}+1)^{4}}{(4-\text{س}^{2})^{2}}$$

$$= \frac{4(4-\text{س}^{2})(\text{س}+1)^{3} + 2\text{س}(\text{س}+1)^{4}}{(4-\text{س}^{2})^{2}}$$ ، نأخذ $(\text{س}+1)^{3}$ عامل مشترك

$$= \frac{(\text{س}+1)^{3}\left[16 - 4\text{س}^{2} + 2\text{س}^{2} + 2\text{س}\right]}{(4-\text{س}^{2})^{2}}$$

$$= \frac{(\text{س}+1)^{3}(-2\text{س}^{2} + 2\text{س} + 16)}{(4-\text{س}^{2})^{2}}$$

أيضاً $\text{هـ}'(\text{س}) = 3\text{س}^{2}$

$\frac{د}{د\text{س}}\left[\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})\right] = \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) + \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ عند $\text{س} = 1$

$\Leftarrow \frac{د}{د\text{س}}\left[\text{ق} \times \text{هـ}\right] = \text{ق}(1) \times \text{هـ}'(1) + \text{ق}'(1) \times \text{هـ}(1)$

$$= \frac{16}{\cancel{3}} \times \cancel{3} - \frac{16 \times 8}{\cancel{9}} \times \cancel{9} = -112$$

التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال السادس :

إذا كان ل ، م ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س ، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أن :

$$\frac{d}{dس}\left[ل(س) \times م(س) \times هـ(س)\right] = ل(س) \times م(س) \times هـَ(س) + ل(س) \times هـ(س) \times مَ(س) + م(س) \times هـ(س) \times لَ(س)$$

ثم اعتمد على النتيجة السابقة لإثبات أن

$$\frac{d}{dس}\left[ل(س)\right]^{3} = 3\left(ل(س)\right)^{2} \times لَ(س)$$

الحل :

نفرض أن $ق(س) = ل(س) \times م(س)$

إذن $قَ(س) = لَ(س) \times م(س) + ل(س) \times مَ(س)$

$$\Leftarrow \frac{d}{dس}\left[ق(س) \times هـ(س)\right] = قَ(س) \times هـ(س) + ق(س) \times هـَ(س)$$

$$= \left(لَ(س) \times م(س) + ل(س) \times مَ(س)\right) \times هـ(س) + \left(ل(س) \times م(س)\right) \times هـَ(س)$$

$$= هـ(س) \times م(س) \times لَ(س) + هـ(س) \times ل(س) \times مَ(س) + ل(س) \times م(س) \times هـَ(س)$$

وهو المطلوب الأول .

$$\Leftarrow \frac{d}{dس}\left[ل(س)\right]^{2} = \frac{d}{dس}\left[ل(س) \times ل(س) \times ل(س)\right]$$

$$= \left[ل(س) \times ل(س) \times لَ(س) + ل(س) \times ل(س) \times لَ(س) + ل(س) \times ل(س) \times لَ(س)\right]$$

$$= لَ(س)\left[ل^{2}(س) + ل^{2}(س) + ل^{2}(س)\right] = 3ل^{2}(س) \times لَ(س)$$

وهو المطلوب الثاني

ثالثاً : المشتقات العليا :

اذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن مشتقته بالنسبة إلى س تسمى المشتقة الأولى

$$ص' = \frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس}\left(ق(س)\right) = ق'(س)$$

- إذا كان ق'(س) اقتران في س فممكن أن يكون قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى س ومشتقه ق''(س) تسمى المشتقة الثانية للاقتران ويرمز لها

$$ص'' = \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{د}{دس}\left(ق'(س)\right) = ق''(س)$$

ونفس الشيء اذا كانت هناك المشتقة الثالثة ص''' او ق'''(س)

هذه المشتقات تسمى بـ المشتقات العليا.

وترمز بالاشارات ('''') أو عدد صحيح بين قوسين $(ق^{(٤)}(س))$

مثال (١) :

إذا كان $ق(س) = ٤س^{٥} - ٢س^{٣} + ٦س^{٢} + ١$
فجد ق'''(س) .

الحل ق'''(س) ممكن كتابتها $ق^{(٣)}(س)$
لإيجاد ق'''(س) يجب ايجاد ق'(س) ثم ق''(س)

$$ق'(س) = ٢٠س^{٤} - ٦س^{٢} + ١٢س$$

$$ق''(س) = ٨٠س^{٣} - ١٢س + ١٢$$

$$\therefore ق'''(س) = ٢٤٠س^{٢} - ١٢$$

مثال (٢)

اذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، وكان $ق'''(س) = ٢٤س^{ن-٣}$ ، فجد قيمة ن

الحل:

$$ق'(س) = ن\,س^{ن-١}$$

$$ق''(س) = ن(ن-١)\,س^{ن-٢}$$

$$ق'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)\,س^{ن-٣}$$
$$= ٢٤س^{ن-٣}$$

$$\Leftarrow ن(ن-١)(ن-٢) = ٢٤$$

البحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها = ٢٤

الاعداد هي ٢×٣×٤

أي أن ن = ٤

مثال (٢) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 \text{ ، } \text{س} \geq 0 \\ 0 \text{ ، } \text{س} < 0 \end{cases}$

فأجب عن ما يلي :

١) بين أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ٠

٢) اكتب قاعدة قَ(س) لجميع قيم س ∈ ح

٣) بين أن قً(٠) غير موجودة.

الحل :

١) في الفترة س > ٠ ، ق(س) متصل لأنه على صورة كثير الحدود

في الفترة س < ٠ ، ق(س) متصل لأنه اقتران ثابت

$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} \text{ ، } \text{س} > 0 \\ 0 \text{ ، } \text{س} < 0 \end{cases}$

لمعرفة أن ق متصل عند س = ٠ ،

قَ₊(٠) = ٢(٠) = صفر

قَ₋(٠) = ٠

بما أن قَ₊(٠) = قَ₋(٠)

فإن ق متصل عند س = ٠

إذن قَ(٠) = ٠ وهو قابل للاشتقاق

٢) $\Leftarrow \text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} \text{ ، } \text{س} > 0 \\ 0 \text{ ، } \text{س} \leq 0 \end{cases}$

٣) في الفترة س > ٠ ، فإن قَ(س) متصل لأنه كثير حدود

في الفترة س < ٠ ، فإن قَ(س) متصل لأنه ثابت

$\Leftarrow \text{قً}(\text{س}) = \begin{cases} 2 \text{ ، } \text{س} > 0 \\ 0 \text{ ، } \text{س} < 0 \end{cases}$

للتحقق من أن قَ متصل عند س = ٠

قً₊(٠) = ٢ و قً₋(٠) = ٠

وبما أن قً₊(٠) ≠ قً₋(٠)

إذن قً(س) غير متصل عند س = ٠

فإن قً(س) غير موجود

وهو المطلوب

مثال (٤) :

إذا كان $ق(س) = (س^٢ + ٤س)(س^٣ + ١)$

جد قيمة $ق'(-١)$ و $ق''(-١)$

الحل :

$ق'(س) = (٢س + ٤)(س^٣ + ١) + (س^٢ + ٤س)(٣س^٢)$

$= ٢س^٤ + ٢س + ٤س^٣ + ٤ + ٣س^٤ + ١٢س^٣$

$\Leftarrow ق'(س) = ٥س^٤ + ١٦س^٣ + ٢س + ٤$

$ق''(س) = ٢٠س^٣ + ٤٨س^٢ + ٢$

$\therefore ق'(-١) = ٥(-١)^٤ + ١٦(-١)^٣ + ٢ \times -١ + ٤$

$= ٥ - ١٦ - ٢ + ٤ = -٩$

$و ق''(-١) = ٢٠(-١)^٣ + ٤٨(-١)^٢ + ٢$

$= -٢٠ + ٤٨ + ٢ = ٣٠$

$\therefore ق'(-١) \times ق''(-١) = -٩ \times ٣٠$

$= -٢٧٠$

مثال (٥) :

إذا كان $ق(س) = س^ن$ ، ن عدد صحيح موجب وكانت $ق'''(س) = أ س$ ، فجد قيمة الثابت أ

الحل :

$ق(س) = س^ن$

$ق'(س) = ن س^{ن-١}$

$ق''(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$ق'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$

$= أ س$

إذن $أ = ن(ن-١)(ن-٢)$

لإيجاد أ ، يجب معرفة قيمة ن ،

إذا كان $س^{ن-٣} = س^١$

$\Leftarrow ن - ٣ = ١ \Leftarrow ن = ٤$

$\therefore أ = ٤(٤-١)(٤-٢)$

$= ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$

مثال (٦) :

إذا كان ق(س) = ٨س − ٤(م−٢)س²
جد قيم الثابت م التي تجعل ق''(س) < ٠

الحل:

ق'(س) = ٨ − ٤(م−٢)(٢س)

= ٨ − ٨(م−٢)س

ق''(س) = ٠ − ٨(م−٢) < ٠

−٨(م−٢) < ٠

م−٢ > ٠

م > ٢

⇐ $\boxed{م \in (٢ ، \infty)}$

ملاحظة : لقد تم قلب إشارة الأصغر الى الأكبر بسبب قسمة المعادلة على رقم سالب

مثال (٧)

جد قاعدة الاقتران كثير الحدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه ق(١) = ٣
و ق'(١) = −٢ ، ق''(١) = ٤

الحل:

ق كثير حدود من الدرجة الثانية ، إذن

⇐ ق(س) = أس² + ب س + جـ

ق'(س) = ٢أس + ب و

ق''(س) = ٢أ

∴ ق''(١) = ٢(أ) = ٤

⇐ $\boxed{أ = ٢}$

ق'(١) = ٢×٢×١ + ب = −٢

⇐ ٤ + ب = −٢ ⇐ $\boxed{ب = −٦}$

ق(١) = ٢(١)² + (−٦)×١ + جـ = ٣

٢ − ٦ + جـ = ٣

$\boxed{جـ = ٧}$

⇐ ق(س) = ٢س² − ٦س + ٧

وهو المطلوب

السؤال الأول :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{4}\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ وكان $\text{ق}^{(4)}(\text{س}) = (\text{أ}+1)\text{س}^{3}$ ،
نجد قيمة أ .

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{4}\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{1}{4}\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{س}^{\text{ن}-2}$

$$\text{ق}'''(\text{س}) = \frac{1}{4}\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\,\text{س}^{\text{ن}-3}$$

$$\therefore \text{ق}^{(4)} = \frac{1}{4}\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)\,\text{س}^{\text{ن}-4} = (\text{أ}+1)\text{س}^{3}$$

لإيجاد قيمة أ ، يجب إيجاد قيمة ن وبحيث أن الأسس لـ س متساوية

$$\therefore \text{ن}-4 = 3 \Leftarrow \text{ن} = 7$$

$$\Leftarrow \frac{1}{4}(7)(7-1)(7-2)(7-3) = \text{أ}+1$$

$$\frac{1}{\cancel{4}} \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4} = \text{أ}+1 \Leftarrow \text{أ}+1 = 210$$

$$\text{أ} = 209$$

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الثاني :

إذا كان $ق(س) = س + جا ٢س$ ، فإن قيمة $ق''(\frac{\pi}{١٢})$ تساوي

أ) ٢ ب) −٢ جـ) $-٢\sqrt{٢}$ د) $٢\sqrt{٣}$

الحل :

$(جا س)' = جتا س$

$(جتا س)' = -جا س$

$ق'(س) = ١ + ٢ جتا ٢س$.

$ق''(س) = -٤ جا ٢س$

$\Leftarrow ق''(\frac{\pi}{١٢}) = -٤ جا(\frac{\pi}{٦}) = -٤ \times \frac{١}{٢} = -٢$ (ب)

السؤال الثالث :

إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $ق(١) = ٢$ ، $ق'(١) = ٥$ ، $هـ(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = -١$ ، فإن قيمة $(\frac{هـ}{ق})'(١)$ تساوي

أ) −٦ ب) −٢ جـ) $\frac{٧}{٢}$ د) ٢

الحل :

$(\frac{هـ}{ق})' = \frac{ق \times هـ' - ق' \times هـ}{(ق)^٢}$

$\therefore (\frac{هـ}{ق})' = \frac{ق(١) \times هـ'(١) - ق'(١) \times هـ(١)}{[ق(١)]^٢}$

$= \frac{٢ \times -١ - ٥ \times ٢}{(٢)^٢} = \frac{-١٢}{٤} = -٣$

(ب)

السؤال الرابع :

إذا كان $\text{ص} = (١+\text{أ}^٢)\,\text{س}^٤ - \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ، وكان

$\left.\frac{\text{د}^٣\text{ص}}{\text{د}\text{س}^٣}\right|_{\text{س}=١} = ٢٤٦$ ، جد قيمة الثابت أ .

الحل :

$$\text{ص}' = ٤(١+\text{أ}^٢)\,\text{س}^٣ + \frac{١}{\text{س}^٢}$$

$$\text{ص}'' = ٤\times٣(١+\text{أ}^٢)\,\text{س}^٢ - ٢\,\frac{١}{\text{س}^٣} = ١٢(١+\text{أ}^٢)\,\text{س}^٢ - \frac{٢}{\text{س}^٣}$$

$$\text{ص}''' = \frac{\text{د}^٣\text{ص}}{\text{د}\text{س}^٣} = ٢٤(١+\text{أ}^٢)\,\text{س} + \frac{٦}{\text{س}^٤}$$

$$١،\quad \left.\frac{\text{د}^٣\text{ص}}{\text{د}\text{س}^٣}\right|_{\text{س}=١} = ٢٤(١+\text{أ}^٢)\times١ + \frac{٦}{(١)^٤} = ٢٤٦$$

$$٢٤(١+\text{أ}^٢) + ٦ = ٢٤٦$$

$$٢٤(١+\text{أ}^٢) = ٢٤٠$$

$$١+\text{أ}^٢ = ١٠$$

$$\text{أ}^٢ = ٩$$

$$\Leftarrow \text{أ} = \pm\sqrt{٩}$$

$\text{أ} = \pm ٣$ وهو المطلوب

رابعاً : مشتقات الاقترانات المثلثية.

*** قاعدة (١)**

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}\,\text{س}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$

فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$

البرهان :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جا}(\text{ع}) - \text{جا}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

ولكن $\text{جا}\,\text{ع} - \text{جا}\,\text{س} = 2\,\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\,\text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$

$$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\right)}{\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}$$

نفرض $\text{ص} = \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$ يكون $\frac{\text{ع}+\text{س}}{2} = \text{س}+\text{ص}$

وعند $\text{ع} \to \text{س} \Leftarrow \text{ص} \to 0$

$$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ص} \to 0} \left(\text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) \times \frac{\text{جا}\,\text{ص}}{\text{ص}}\right)$$

$$= \lim_{\text{ص} \to 0} \text{جتا}(\text{س}+\text{ص}) \times \lim_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا}\,\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$= \text{جتا}(\text{س}+0) \times 1 = \text{جتا}\,\text{س}.$$

وهو المطلوب

*** قاعدة (٢)**

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{س}$ ، $\text{س} \in \text{ح}$

فإن $\text{قَ}(\text{س}) = -\text{جا}\,\text{س}$.

البرهان :

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جتا}\,\text{ع} - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$ ولكن

$\text{جتا}\,\text{ع} - \text{جتا}\,\text{س} = -2\,\text{جا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\right)$

$$\Leftarrow \text{قَ}(\text{س}) = -\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\right)}{\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}$$

$$= -\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \left(\text{جا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{2}\right) \times \frac{\text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}\right)}{\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}\right)$$

نفرض أن $\text{ص} = \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$ ويكون

$\frac{\text{ع}+\text{س}}{2} = \text{س}+\text{ص}$ وعند

$\text{ع} \to \text{س}$ فإن $\text{ص} \to 0$.

$$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = -\lim_{\text{ص} \to 0} \left(\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) \times \frac{\text{جا}\,\text{ص}}{\text{ص}}\right)$$

$$= -\lim_{\text{ص} \to 0} \text{جا}(\text{س}+\text{ص}) \times \lim_{\text{ص} \to 0} \left(\frac{\text{جا}\,\text{ص}}{\text{ص}}\right)$$

$$= -\text{جا}\,\text{س} \times 1 = -\text{جا}\,\text{س}$$

وهو المطلوب

مثال (١) :

اذا كان ق(س) = ظاس ، فأثبت أن قَ(س) = قا²س

البرهان :

$$\text{ق(س)} = \text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$\therefore \text{قَ(س)} = \frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جاس} \times -\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

ولكن $\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س} = ١$

$$\Leftarrow \text{قَ(س)} = \frac{١}{\text{جتا}^2\text{س}} = \text{قا}^2\text{س}$$

وهو المطلوب

مثال (٢) :

إذا كان ق(س) = قتاس + ظتاس ، فأثبت أن $\text{قَ(س)} = \frac{١}{\text{جتاس} - ١}$

البرهان :

$$\text{قَ(س)} = -\text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^2\text{س}$$

$$= \frac{-١}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} - \frac{١}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{-(\text{جتاس} + ١)}{١ - \text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{-\cancel{(\text{جتاس} + ١)}}{(١ + \text{جتاس})(١ - \text{جتاس})} = \frac{-١}{١ - \text{جتاس}}$$

$$\therefore \text{قَ(س)} = \frac{١}{\text{جتاس} - ١}$$ وهو المطلوب

ملاحظة : مشتقات الاقترانات المثلثية

ق(س)	قَ(س)
قاس	قاس ظاس
قتاس	− قتاس ظتاس
ظتاس	− قتا²س

*** مثال (٢)**

اذا كان ص = أ جاس + ب جتاس ،
حيث أ و ب ∈ ح ، فأثبت أن صً + ص = ٠

الحل :

$$\text{صَ} = \text{أ جتاس} - \text{ب جاس}$$

$$\text{صً} = -\text{أ جاس} - \text{ب جتاس}$$

$$\therefore \text{صً} + \text{ص} = -\text{أ}\cancel{\text{جاس}} - \text{ب}\cancel{\text{جتاس}} + \text{أ}\cancel{\text{جاس}} + \text{ب}\cancel{\text{جتاس}}$$

$$\Leftarrow \text{صً} + \text{ص} = \text{صفر}$$

وهو المطلوب

مثال (٤) :

جد $ق'(س)$ للاقتران $ق(س) = \frac{ظاس + س}{جاس}$ عندما $س = \frac{\pi}{٣}$

الحل :

$ق'(س) = \frac{جاس\,(قا^٢س + ١) - (ظاس + س)\,جتاس}{جا^٢س}$

$∴ ق'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{جا\frac{\pi}{٣}\,(قا^٢\frac{\pi}{٣} + ١) - (ظا\frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٣})\,جتا\frac{\pi}{٣}}{جا^٢(\frac{\pi}{٣})}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}(٤ + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣})(\frac{١}{٢})}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢}$

$= (\frac{٥\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi}{٦}) \times \frac{٤}{٣}$

$= \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣} - \frac{٤\sqrt{٣}}{٦} - \frac{٤\pi}{١٨}$

$= \frac{١٦\sqrt{٣}}{٦} - \frac{٢\pi}{٩}$

$= \frac{٨\sqrt{٣}}{٣} - \frac{٢\pi}{٩}$

مثال (٥) :

جد قيم س في الفترة $[-٢\pi ، ٢\pi]$ التي تحقق المعادلة $ق'(س) = ٠$ اذا كان $ق(س) = س + جتاس$

الحل :

$ق'(س) = ١ - جاس = ٠$

$∴ جاس = ١$

$⇐ س = \frac{\pi}{٢} ، \frac{-٣\pi}{٢}$

$\{\frac{-٣\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\}$

مثال (٦)

جد $ق'(س)$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ ، اذا كان $ق(س) = جا(-س) + جتا(-س)$

الحل :

لأن $جا-س = -جاس$ و $جتا-س = جتاس$

$∴ ق(س) = -جاس + جتاس$

$⇐ ق'(س) = -جتاس - جاس$

$∴ ق'(\frac{\pi}{٤}) = -جتا\frac{\pi}{٤} - جا\frac{\pi}{٤}$

$= \frac{-١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

$= -\sqrt{٢}$

مثال (٧):

جد $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ للاقتران ص = قتا س

الحل:

$\frac{د ص}{د س} = -$ قتا س ظتا س

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = ($ـ قتا س$)($ـ قتا^2 س$) +$ (ظتا س) (قتا س ظتا س)

= قتا^3 س + قتا س ظتا^2 س

مثال (٨):

اذا كان ص = أ جا س + ب جتا س
فأثبت أن $(ص')^2 + ص^2 = أ^2 + ب^2$

الحل:

ص$'$ = أ جتا س − ب جا س

∴ $(ص')^2 =$ (أ جتا س − ب جا س)^2

= أ^2 جتا^2 س − ٢أب جا س جتا س + ب^2 جا^2 س

ص^2 = (أ جا س + ب جتا س)^2

= أ^2 جا^2 س + ٢أب جا س جتا س + ب^2 جتا^2 س

⇐ $(ص')^2 + ص^2 =$

أ^2 جتا^2 س − ٢أب ~~جا س~~ جتا س + ب^2 جا^2 س + أ^2 جا^2 س + ٢أب ~~جا س~~ جتا س + ب^2 جتا^2 س

∴ $(ص')^2 + ص^2 =$

أ^2 جتا^2 س + أ^2 جا^2 س + ب^2 جتا^2 س + ب^2 جا^2 س

= أ^2 (جتا^2 س + جا^2 س) + ب^2 (جتا^2 س + جا^2 س)

وبما أن جتا^2 س + جا^2 س = ١

⇐ $(ص')^2 + ص^2 = أ^2 + ب^2$

وهو المطلوب

مثال (٩):

اذا كان

ق(س) = { ٢س جا س + ١ ، $-\frac{\pi}{4} \le$ س ≤ 0
{ ٥س − ٥ جا س ، $0 <$ س $\le \frac{\pi}{4}$

فإن ق$'$(٠) تساوي:

الحل:

أولاً يجب دراسة إتصال ق(س) عند س = ٠

نها$_{س \to 0^-}$ ق(س) = ٠ × جا(٠) + ١ = ١

نها$_{س \to 0^+}$ ق(س) = ٥ × ٠ − ٥ × جا٠ = صفر

وبما أن نها$_{س \to 0^-}$ ق(س) $\neq$ نها$_{س \to 0^+}$ ق(س)

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٠

∴ ق$'$(٠) غير موجود.

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الأول :

إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{1+\text{جتاس}}$ ، $\text{جتاس} \neq -1$ ، أثبت أن $\text{ص}'' = \frac{\text{جاس}}{(1+\text{جتاس})^2}$

الحل :

$$\text{ص}' = \frac{(1+\text{جتاس})(\text{جتاس}) - \text{جاس}(-\text{جاس})}{(1+\text{جتاس})^2}$$

$$= \frac{\text{جتاس} + \text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{(1+\text{جتاس})^2}$$ ولأن $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$

$$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{جتاس}+1}{(1+\text{جتاس})^2} = \frac{1}{1+\text{جتاس}}$$

$$\therefore \text{ص}'' = \frac{-(-\text{جاس})}{(1+\text{جتاس})^2} = \frac{\text{جاس}}{(1+\text{جتاس})^2}$$ وهو المطلوب

السؤال الثاني :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\pi}{\text{قاس}}$ ، فإن $\text{ق}'(\frac{\pi}{6})$ يساوي :

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\pi\left[\text{قاس} \times \text{طاس}\right]}{\left[\text{قاس}\right]^2} = \frac{-\pi\,\text{طاس}}{\text{قاس}} = \frac{-\pi\,\frac{\text{جاس}}{\cancel{\text{جتاس}}}}{\frac{1}{\cancel{\text{جتاس}}}}$$

$$= -\pi\,\text{جاس} \Leftarrow \text{ق}'(\frac{\pi}{6}) = -\pi\,\text{جا}\frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{2}$$

حل آخر $\Leftarrow$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\pi}{\text{قاس}} = \frac{\pi}{\frac{1}{\text{جتاس}}} = \pi\,\text{جتاس}$$

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\pi\,\text{جاس} \Leftarrow \text{ق}'(\frac{\pi}{6}) = \frac{-\pi}{2}$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

خامساً : قاعدة السلسلة :

*** قاعدة (١)**

اذا كان الإقترانان ق ، هـ قابلين للاشتقاق عند س ، وكان الإقتران ق قابلاً للإشتقاق عند هـ(س) ، فيكون الإقتران المركب (ق ∘ هـ)(س) قابلاً للإشتقاق عند س وأن :-

$$\boxed{(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})}$$

*** تعميم :**

$$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}}$$

مثال (١) :-

اذا كان ق(س) = س^2 و هـ(س) = ١ − ٦س ، فجد (ق ∘ هـ)'(س)

الحل :

ق'(س) = ٢س

هـ'(س) = −٦

∴ (ق ∘ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) × هـ'(س)

= ق'(١ − ٦س) × −٦

= ٢(١ − ٦س) × −٦

= ٧٢س − ١٢

مثال (٢) :

اذا كان ل(س) = ظا س^2 ، فجد ل'(س)

الحل :

نفرض أن ق(س) = ظا س و هـ(س) = س^2

∴ ل(س) = (ق ∘ هـ)(س)

⇐ (ق ∘ هـ)'(س) = ل'(س)

= ق'(هـ(س)) × هـ'(س)

ق'(س) = قا^2 س و هـ'(س) = ٢س

⇐ ل'(س) = $\text{قا}^2(\text{س}^2)$ × ٢س

= ٢س $\text{قا}^2 \text{س}^2$

*** نتيجة :**

إذا كان ل(س) إقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س ، وكان ص = $[\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح ، فإن :

$$\boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}\left(\text{ل}(\text{س})\right)^{\text{ن}-1} \times \text{ل}'(\text{س})}$$

مثال (٣):

إذا كان $\text{ص} = (\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فبين أن

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ن ص قتاس}$$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{\text{ن}-1} \times (-\text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^2\text{س})$$

$$= \text{ن}(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{\text{ن}-1} \times -\text{قتاس}\,(\text{ظتاس} + \text{قتاس})$$

$$= -\text{ن}\,(\text{قتاس} + \text{ظتاس})^{\text{ن}} \times \text{قتاس}$$

$$= -\text{ن ص قتاس}$$

وهو المطلوب

مثال (٤):

إذا كان $\text{ص} = \text{جتا}(\text{س}^2 + 1)$ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل:

نفرض أن $\text{ع}(\text{س}) = \text{س}^2 + 1$

$\therefore$ $\text{ص} = \text{جتاع}$.

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= -\text{جاع} \times 2\text{س}$$

$$= -2\text{س}\,\text{جا}(\text{س}^2 + 1)$$

*** تعميم:**

إذا كان ع اقترانًا قابلًا للإشتقاق عند س ، فيمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إثبات صحة القواعد التالية:

1) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{جاع}) = \text{جتاع} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

2) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{جتاع}) = -\text{جاع} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

3) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ظاع}) = \text{قا}^2\text{ع} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

4) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ظتاع}) = -\text{قتا}^2\text{ع} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

5) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{قاع}) = \text{قاع ظاع} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

6) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{قتاع}) = -\text{قتاع ظتاع} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

مثال (٥):

إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}^4\text{س}$ ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$$\text{ص} = (\text{ظاس})^4$$

نفرض أن $\text{ع} = \text{ظاس} \Leftarrow \text{ص} = \text{ع}^4$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 4\text{ع}^3$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= 4(\text{ظاس})^3(\text{قا}^2\text{س})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\,\text{ظا}^3\text{س}\,\text{قا}^2\text{س}$$

مثال (٦):

إذا كان ص = جتا^{٣}(س^{٢} − ١)^{٢}، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

نفرض أن ع(س) = (س^{٢} − ١)^{٢}

∴ ص = جتا^{٣}ع.

⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

ولكن $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = −٣ جتا^{٢}ع جاع و

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٢(س^{٢} − ١)(٢س) = ٤س(س^{٢} − ١)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (−٣جاع جتا^{٢}ع)(٤س(س^{٢} − ١))

= −٣ جا(س^{٢} − ١)^{٢} جتا^{٢}(س^{٢} − ١)^{٢} × [٤س(س^{٢} − ١)]

= −١٢س(س^{٢} − ١) جا(س^{٢} − ١)^{٢} جتا^{٢}(س^{٢} − ١)^{٢}

مثال (٧):

إذا كان ق(٢س) = ٦س^{٢} + ٩س

جد قَ(٢)

الحل:

قَ(٢س) × ٢ = ١٢س + ٩

⟸ قَ(٢س) = ٤س + ٣

لإيجاد قَ(٢) يجب أن تكون س = ١

∴ قَ(٢) = ٤(١) + ٣ $\Big|_{\text{س}=١}$

= ٧

مثال (٨):

إذا كان هـ(س) = ق(جا٢س) وكان قَ$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = ٨، جد هـَ$\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

الحل:

باستخدام الطرمية:

هـَ(س) = قَ(جا٢س) × (جا٢س)َ

= ٢جتا٢س قَ(جا٢س)

∴ هـَ$\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = ٢جتا$\left(٢\times\frac{\pi}{٦}\right)$ قَ$\left(\text{جا}\frac{٢\times\pi}{٦}\right)$

= ٢ جتا$\frac{\pi}{٣}$ × قَ$\left(\text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)$

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × قَ$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٨

مثال (٩):

إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٢}}$، فإن قَ(١) يساوي:

أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) صفر   جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) غير موجودة

الحل:

ق(س) = (س − ١)$^{\frac{٢}{٣}}$، إذن

قَ(س) = $\frac{٢}{٣}$(س − ١)$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س} - ١}}$

∴ قَ(١) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{١ - ١}}$ = $\frac{٢}{٠}$

غير موجودة

د

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

مثال (١٠) :

إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}\,\text{س} + \frac{1}{3}\text{ظا}^3\text{س}$ ، فبرهن أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^4\text{س}$.

الحل :

نفرض أن $\text{ع}(\text{س}) = \text{ظا}\,\text{س}$ ، إذن

$$\text{ص} = \text{ع} + \frac{1}{3}\text{ع}^3$$

$\Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$ و

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = 1 + \text{ع}^2$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$= (1 + \text{ع}^2)(\text{قا}^2\text{س})$$

$$= (1 + \text{ظا}^2\text{س})\,\text{قا}^2\text{س}$$

ولكن $1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س} \times \text{قا}^2\text{س} = \text{قا}^4\text{س}$$

وهو المطلوب

مثال (١١)

إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}^2 + 2\text{س})$ و $\text{ق}'(3) = 5$ ، فجد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=1}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{س}^2 + 2\text{س}) \times (2\text{س} + 2)$$

عند $\text{س}^2 + 2\text{س} = 3$ تكون قيمة س كما يلي

$$\text{س}^2 + 2\text{س} - 3 = 0$$

$$(\text{س} - 1)(\text{س} + 3) = 0$$

$\therefore$ عند $\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ق}'(3) = 5$

$$\therefore \left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=1} = \text{ق}'(3) \times (2\text{س} + 2)$$

$$= 5 \times 4 = 20$$

مثال (١٢) :

إذا كان $\text{ق}(4\text{س}) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^2 + 3)$ ، فجد $\text{ق}'(4)$

الحل :

$$4\text{س} = 4 \Leftarrow \text{س} = 1$$

$$\therefore \text{ق}'(4\text{س}) \times 4 = 2\text{س}$$

$\text{ق}'(4\text{س}) = \frac{\text{س}}{2}$ عند $\text{س} = 1$

$$\text{ق}'(4\text{س}) = \frac{1}{2}$$

التفاضل

(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الأول :

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان

$(\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2+\text{أ}}{\text{س}+1} + \dfrac{1}{2}$ ، س $\neq -1$ وكان $\text{ق}'(\text{س}) = \sqrt[3]{\text{س}^2+7}$

و $\text{هـ}'(1) = 4$ و $\text{هـ}(1) = 1$ ، جد قيمة أ .

الحل :

$$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = \frac{(\text{س}+1)(2\text{س}) - (1)(\text{س}^2+\text{أ})}{(\text{س}+1)^2} = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$$

وبما أن $\text{هـ}'(1) = 4$ و $\text{هـ}(1) = 1$ ، أي س $= 1$

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{هـ}(1)) = \text{ق}'(1) = \sqrt[3]{(1)^2+7} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\therefore \frac{(1+1)(2(1)) - (1+\text{أ})}{(1+1)^2} = 2 \times \text{هـ}'(1) = 2 \times 4$$

$$\Leftarrow \frac{6-1-\text{أ}}{4} = 8 \Leftarrow 5-\text{أ} = 32$$

$$\Leftarrow \text{أ} = -27$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الوحدة : الثانية

الفصل : الثاني

الصفحة : ٦٥/٥٧

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

الفصل الدراسي الأول

السؤال الثاني :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (٤ - \sqrt{\text{س}})^{٣}$ و $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س}\sqrt{\text{س}}$ ، تجد $(\text{ق}\circ\text{هـ}')'(٩)$

الحل:

$$(\text{ق}\circ\text{هـ}')'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}'(\text{س})) \times \text{هـ}''(\text{س})$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = ٣(٤ - \sqrt{\text{س}})^{٢} \times \left(-\tfrac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\right) = -\tfrac{٣}{٢}(٤ - \sqrt{\text{س}})^{٢}\left(\tfrac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س}\sqrt{\text{س}} = ٢\text{س} \times \text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$$

$$\therefore \text{هـ}'(\text{س}) = ٢ \times \tfrac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٣\sqrt{\text{س}}$$

$$\text{هـ}''(\text{س}) = ٣ \times \tfrac{١}{٢} \times \text{س}^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{هـ}'(٩) = ٣\sqrt{٩} = ٩$$

$$\text{هـ}''(٩) = \frac{٣}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ق}'(٩) = -\tfrac{٣}{٢} \times (٤ - \sqrt{٩})^{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٩}}\right) = -\frac{١}{٢}$$

$$(\text{ق}\circ\text{هـ}')'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}'(\text{س})) \times \text{هـ}''(\text{س})$$

$$(\text{ق}\circ\text{هـ}')'(٩) = \text{ق}'(\text{هـ}'(٩)) \times \text{هـ}''(٩)$$

$$= \text{ق}'(٩) \times \text{هـ}''(٩)$$

$$= -\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٤}$$

السؤال الثالث :

اذا كان $3\text{ص} = -\sqrt{(\text{ع}+1)^3} - \sqrt{(\text{ع}-1)^3}$ ، $\text{ع}(\text{س}) = 2\text{س}$ ، $\text{س} > \frac{1}{2}$

بين أن $\left|\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right| = \sqrt{4\text{س} + 2\sqrt{4\text{س}^2 - 1}}$.

الحل :

$$\text{ص} = -\frac{1}{3}\left[\sqrt{(\text{ع}+1)^3} + \sqrt{(\text{ع}+1)^3}\right] \quad ، \quad \text{ع} = 2\text{س}$$

$$\therefore \text{ص} = -\frac{1}{3}\left[\sqrt{(2\text{س}+1)^3} + \sqrt{(2\text{س}-1)^3}\right] = -\frac{1}{3}\left[(2\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + (2\text{س}-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = -\frac{1}{\cancel{3}}\left[\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}(\cancel{2}) + \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(2\text{س}-1)^{\frac{1}{2}}(\cancel{2})\right]$$

$$= -\left[\sqrt{2\text{س}+1} + \sqrt{2\text{س}-1}\right]$$

وكان المطلوب هو القيمة المطلقة لـ $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} \Leftarrow \left|\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^2}$

$$\Leftarrow \left|\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2\text{س}+1} + \sqrt{2\text{س}-1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{2\text{س}+1}\right)^2 + 2\sqrt{2\text{س}+1}\times\sqrt{2\text{س}-1} + \left(\sqrt{2\text{س}-1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\text{س} + \cancel{1} + 2\sqrt{(2\text{س}+1)(2\text{س}-1)} + 2\text{س} - \cancel{1}}$$

$$= \sqrt{4\text{س} + 2\sqrt{4\text{س}^2 - 1}}$$ وهو المطلوب

السؤال الرابع :

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان (ق∘هـ)'(٢) = ١٠

و(ق'∘هـ)(٢) = ٤ ، فإن قيمة ٢هـ'(٢) تساوي

أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) ٥ جـ) ٢ د) $\frac{٢}{٥}$

الحل:

(ق∘هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) × هـ'(س) = (ق'∘هـ)(س) × هـ'(س)

⇐ هـ'(س) = $\frac{(ق∘هـ)'(س)}{(ق'∘هـ)(س)}$ ⇐ هـ'(٢) = $\frac{(ق∘هـ)'(٢)}{(ق'∘هـ)(٢)}$ = $\frac{١٠}{٤}$ = $\frac{٥}{٢}$

∴ ٢هـ'(٢) = ٥ ⇐ ب

السؤال الخامس :

إذا كان ق(س) = ٢ظتاس ، هـ(س) = أس(س² − ٢)² وكان

(هـ∘ق)'($\frac{\pi}{٤}$) = −٥٠ ، جد قيمة الثابت أ .

الحل :

(هـ∘ق)'(س) = هـ'(ق(س)) × ق'(س)

ق'(س) = −٢ قتا²س

هـ'(س) = أس × ٣(س² − ٢)² × ٢س + أ(س² − ٢)²

= ٦أس²(س² − ٢)² + أ(س² − ٢)²

∴ هـ'(٢) = ٦أ(٤)(٤ − ٢)² + أ(٤ − ٢)²

= ٢٥أ

⇐ ٢٥أ × (−٤) = −٥٠ ⇐ أ = $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٢}$

إذن

ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ظتا $\frac{\pi}{٤}$

= ٢ × ١ = ٢

ق'($\frac{\pi}{٤}$) = −٢ قتا² $\frac{\pi}{٤}$

= −٢ × ($\sqrt{٢}$)²

= −٤

سادساً : الإشتقاق الضمني :

العلاقات الضمنية هي العلاقة بين المتغيرين س وص التي قد يصعب فيها فصل المتغير المستقل عن المتغير التابع

* لإيجاد $\frac{دص}{دس}$ لعلاقة ضمنية :

١) إشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ س
٢) جمع الحدود التي تحوي $\frac{دص}{دس}$ في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر
٣) أخرج $\frac{دص}{دس}$ عاملاً مشتركاً
٤) جد $\frac{دص}{دس}$ بإجراء عملية القسمة

مثال (١) :

إذا كان $س^3 + ص^3 = ٦ س ص$ ،
أ) جد $ص'$
ب) جد ميل المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند النقطة (٣ ، ٣)

الحل :

أ) نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى س

$$٣س^2 + ٣ص^2 ص' = ٦س \times ص' + ٦ص$$

$$٣ص^2 ص' - ٦س ص' = ٦ص - ٣س^2$$

$$ص' (٣ص^2 - ٦س) = ٦ص - ٣س^2$$

$$\therefore ص' = \frac{٦ص - ٣س^2}{٣ص^2 - ٦س}$$

$$\Leftarrow ص' = \frac{دص}{دس} = \frac{٢ص - س^2}{ص^2 - ٢س} \leftarrow$$

ب) عند النقطة (٣ ، ٣) :

س = ٣ وص = ٣

$\therefore$ الميل $= \frac{دص}{دس}$ عند النقطة (٣ ، ٣)

$$= \frac{٢(٣) - (٣)^2}{(٣)^2 - ٢\times٣} = -١$$

*** مثال (٢)**

إذا كان $٤ص^2 - جاص = س^2$ ، فجد $ص'$

الحل :

$$٢\times٤ ص ص' - (جتاص) ص' = ٢س$$

$$\Leftarrow ص' (٨ص - جتاص) = ٢س$$

$$\therefore ص' = \frac{٢س}{٨ص - جتاص}$$

*** نظرية :**

إذا كان $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - ١}$

*** نتيجة :**

إذا كان ق(س) إقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س وكان $ص = (ق(س))^ن$ ، حيث ن عدد نسبي. فإن

$$\frac{دص}{دس} = ن (ق(س))^{ن-١} \times ق'(س)$$

مثال (٣):

إذا كان $ص = \sqrt{هـ(س)}$ وكان $هـ(س)$ اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س، فأثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ'(س)}{2\sqrt{هـ(س)}}$

الحل:

$$ص = \sqrt{هـ(س)} = [هـ(س)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore ص' = \frac{دص}{دس} = \frac{1}{2}[هـ(س)]^{\frac{1}{2}-1} \times هـ'(س)$$

$$= \frac{1}{2}(هـ(س))^{-\frac{1}{2}} \times هـ'(س)$$

$$= \frac{هـ'(س)}{2 \times [هـ(س)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{هـ'(س)}{2\sqrt{هـ(س)}}$$

مثال (٤):

إذا كان $(س - ص)^5 = س^2$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (١، ٠)

الحل: نشتق كلا الطرفين

$$5(س-ص)^4\left(1 - \frac{دص}{دس}\right) = 2س$$

$$1 - \frac{دص}{دس} = \frac{2س}{5(س-ص)^4}$$

$$\frac{دص}{دس} = 1 - \frac{2س}{5(س-ص)^4}$$

$$\therefore \left.\frac{دص}{دس}\right|_{(1،0)} = 1 - \frac{2\times1}{5(1-0)^4} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

مثال (٥):

إذا كان $س = ظتا 2ص$ ، فأثبت أن

$$ص'' = -ص' جا 4ص$$

الحل: نشتق كلا الطرفين

$$1 = (-قتا^2 2ص) \times 2ص'$$

$$\Leftarrow ص' = \frac{-1}{2قتا^2 2ص} = \frac{-1}{2} جا^2 2ص$$

$$ص'' = \frac{-1}{2}[2 جا 2ص](جتا 2ص) 2ص'$$

علمًا بأن $2 جا 2ص \times جتا 2ص = جا 4ص$

$$\therefore ص'' = -ص' جا 4ص$$

وهو المطلوب

مثال (٦):

إذا كان $ص = ع^4$ ، $س = 6ع + 1$ ، جد $\left.\frac{د^2ص}{دس^2}\right|_{ع=1}$

الحل:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$ وكذلك

$$\frac{دص}{دع} = 4ع^3 \quad و \quad \frac{دس}{دع} = 6$$

$$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = 4ع^3 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}ع^3$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{2}{3}(3ع^2) \times \frac{دع}{دس}$$

$$= 2ع^2 \times \frac{1}{6} = \frac{ع^2}{3}$$

$$\therefore \left.\frac{د^2ص}{دس^2}\right|_{ع=1} = \frac{(1)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

مثال (٧) :

اذا كان $\text{س}\ \text{حا}(\text{س}+\text{ص}) = \text{ص}^2\ \text{حتا}\ \text{س}$

فجد صَ .

الحل :

نشتق كلا طرفي المعادلة

$\text{حتا}(\text{س}+\text{ص}) \times (1+\text{صَ}) =$

$-\text{ص}^2\ \text{حا}\ \text{س} + \text{حتا}\ \text{س} \times 2\text{ص}\ \text{صَ}$

$\Leftarrow \text{حتا}(\text{س}+\text{ص}) + \text{صَ}\ \text{حتا}(\text{س}+\text{ص}) =$
$2\text{ص}\ \text{صَ}\ \text{حتا}\ \text{س} - \text{ص}^2\ \text{حا}\ \text{س}$

$\Leftarrow \text{صَ}\ \text{حتا}(\text{س}+\text{ص}) - 2\text{ص}\ \text{صَ}\ \text{حتا}\ \text{س} =$
$-\text{ص}^2\ \text{حا}\ \text{س} - \text{حتا}(\text{س}+\text{ص})$

$$\Leftarrow \text{صَ} = \frac{-\text{ص}^2\ \text{حا}\ \text{س} - \text{حتا}(\text{س}+\text{ص})}{\text{حتا}(\text{س}+\text{ص}) - 2\text{ص}\ \text{حتا}\ \text{س}}$$

مثال (٨) :

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للعلاقة $\frac{4}{\text{س}} + \frac{2}{\text{ص}} = 3$

عند النقطة $(4 ، 1)$

الحل : نشتق كلا الطرفين

$$\frac{-4}{\text{س}^2} - \frac{2\text{صَ}}{\text{ص}^2} = 0 \ ، \ (4 ، 1)$$

$$\frac{-4}{(4)^2} - \frac{2\text{صَ}}{(1)^2} = 0 \Leftarrow 2\text{صَ} = \frac{-1}{4}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{8}$$

*** مثال (٩) :**

اذا كان $\text{ص} = \text{ن}^3 + 2\text{ن}$ و

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 4\text{ن}$ ، فجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند $\text{ن} = 1$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$$

$$= (3\text{ن}^2+2)\left(\frac{1}{4\text{ن}}\right) = \frac{3\text{ن}^2+2}{4\text{ن}}$$

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \left(\frac{3\text{ن}^2+2}{4\text{ن}}\right)' \times \frac{1}{4\text{ن}}$$

$$= \frac{4\text{ن} \times 6\text{ن} - (3\text{ن}^2+2) \times 4}{(4\text{ن})^2} \times \frac{1}{4\text{ن}}$$

$$= \frac{24\text{ن}^2 - 4(3\text{ن}^2+2)}{(4\text{ن})^3}$$

$$\therefore \left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right|_{\text{ن}=1} = \frac{24 - 4 \times 5}{(4)^3} = \frac{1}{16}$$

مثال (١٠) :

اذا كان $\text{س}^3 - 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^3 = 2$ جد

صَ عند $(1 ، -1)$

الحل : نشتق كلا الطرفين

$$3\text{س}^2 - (2\text{س}\ \text{صَ} + 2\text{ص}) + 3\text{ص}^2\ \text{صَ} = 0$$

نعوض $(1 ، -1)$ في العلاقة

$$3(1)^2 - (2 \times 1\ \text{صَ} + 2(-1)) + 3(-1)^2\ \text{صَ} = 0$$

$$3 - 2\text{صَ} + 2 + 3\text{صَ} = 0$$

$$\text{صَ} = -5$$

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الاول :

جد $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$ اذا كان $\text{ص}=(1+\text{ن})^2$ و $\text{س}=\frac{1-\text{ن}}{1+\text{ن}}$ عند $\text{س}=0$

الحل :

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}=\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}\times\frac{d\text{ن}}{d\text{س}} \Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}}=2(1+\text{ن})$$

$$\frac{d\text{س}}{d\text{ن}}=\frac{(1+\text{ن})(-1)-(1-\text{ن})(1)}{(1+\text{ن})^2}=\frac{-2}{(1+\text{ن})^2}$$

$$\Leftarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{س}}=2(1+\text{ن})\times\frac{(1+\text{ن})^2}{-2}=-(1+\text{ن})^3$$

ولكن $\text{س}=0 \Leftarrow \text{ن}=1$

$$\Leftarrow \left.\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right|_{\text{س}=0}=\left.\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right|_{\text{ن}=1}=-(1+1)^3=-8$$

السؤال الثاني :

إذا كان $\text{س ص}=(\text{س}+\text{ص})^4$ فأثبت أن $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}=\frac{\text{ص}(2\text{س}-\text{ص})}{\text{س}(\text{س}-2\text{ص})}$

الحل : نشتق كلا طرفي العلاقة بالنسبة الى س.

من المعادلة الاصلية: $(\text{س}+\text{ص})^2=\frac{\text{س ص}}{\text{س}+\text{ص}}$

$$\therefore \text{س ص}'+\text{ص}=4(\text{س}+\text{ص})^2(1+\text{ص}')$$

$$\Leftarrow \text{س ص}'+\text{ص}=4(\text{س}+\text{ص})^2+4\text{ص}'(\text{س}+\text{ص})^2$$

$$\Leftarrow \text{س ص}'-4\text{ص}'(\text{س}+\text{ص})^2=4(\text{س}+\text{ص})^2-\text{ص}$$

$$\text{ص}'\left(\text{س}-4(\text{س}+\text{ص})^2\right)=4(\text{س}+\text{ص})^2-\text{ص}$$

$$\Leftarrow \text{ص}'=\frac{4(\text{س}+\text{ص})^2-\text{ص}}{\text{س}-4(\text{س}+\text{ص})^2} \Leftarrow \text{ص}'=\frac{4\left(\frac{\text{س ص}}{\text{س}+\text{ص}}\right)-\text{ص}}{\text{س}-4\left(\frac{\text{س ص}}{\text{س}+\text{ص}}\right)}\times\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}'=\frac{4\text{س ص}-\text{ص}(\text{س}+\text{ص})}{\text{س}(\text{س}+\text{ص})-4\text{س ص}}=\frac{4\text{س ص}-\text{س ص}-\text{ص}^2}{\text{س}^2+\text{س ص}-4\text{س ص}}$$

$$\Leftarrow \text{ص}'=\frac{2\text{س ص}-\text{ص}^2}{\text{س}^2-3\text{س ص}} \Leftarrow \text{ص}'=\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}=\frac{\text{ص}(2\text{س}-\text{ص})}{\text{س}(\text{س}-2\text{ص})}$$

وهو المطلوب

السؤال الثالث :

إذا كان $\frac{دص}{دس} = ٣ن^٢$ و $\frac{دن}{دس} = \frac{١}{٢ن}$ فإن $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عند ن = ٢ يساوي

أ) ٢ ب) ٨ جـ) ١٢ د) ٤٨

الحل :

$$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \left[\frac{دص}{دس}\right]' \times \frac{دن}{دس} = \left[٣ن^٢\right]' \times ٢ن = ٦ن \times ٢ن = ١٢ن^٢$$

$$\therefore \left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{ن=٢} = ١٢(٢)^٢ = ٤٨ \quad (د)$$

السؤال الرابع :

إذا كان $ص^٢ + ٢س ص = ٥$ فإن $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (٢،١) تساوي :

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $-\frac{١}{٢}$

الحل : نشتق كلا الطرفين .

$٢ص ص' + ٢[س ص' + ص] = صفر$ نقسم على ٢ للتبسيط

$ص ص' + س ص' + ص = صفر \Leftarrow ص'(ص+س) = -ص$

$\Leftarrow ص' = \frac{-ص}{ص+س} \Leftarrow \left.ص'\right|_{(٢،١)} = \frac{-١}{١+٢} = \frac{-١}{٣}$

(أ)

التفاضل
(مسائل وزارية سابقة)

السؤال الخامس :

إذا كان ص $= \dfrac{1}{قا2س}$ ، فإن $\dfrac{د^2ص}{دس^2}$ عند س $= \dfrac{\pi}{2}$ يساوي

أ) 4 ب) صفر جـ) -4 د) -8

الحل :

ص $=$ قا$^{-1}$2س $\Leftarrow \dfrac{دص}{دس} = -1$ قا$^{-2}$2س $\times 2 \times$ قا2س ظا2س

$\Leftarrow \dfrac{دص}{دس} = -2$ قا$^{-1}$2س ظا2س $= \dfrac{-2ظا2س}{قا2س} = -2 \times \dfrac{جا2س}{\cancel{جتا2س}} \times \cancel{جتا2س}$

$\Leftarrow \dfrac{دص}{دس} = -2$جا2س $\Leftarrow \dfrac{د^2ص}{دس^2} = -2 \times 2 \times$ جتا2س $= -4$جتا2س

$\therefore \left.\dfrac{د^2ص}{دس^2}\right|_{س=\frac{\pi}{2}} = -4$جتا$\pi$ $= 4$ (أ)

السؤال السادس :

اذا كان س $=$ جاص ، فإن $\dfrac{دص}{دس}$ عند النقطة $\left(\dfrac{1}{2} ، \dfrac{\pi}{6}\right)$ تساوي

أ) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ب) $\dfrac{1}{2}$ جـ) 2 د) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

الحل : نشتق كلا الطرفين بالنسبة الى س

$1 =$ جتاص $\times$ ص$'$ $\Leftarrow$ ص$' = \dfrac{1}{جتاص}$

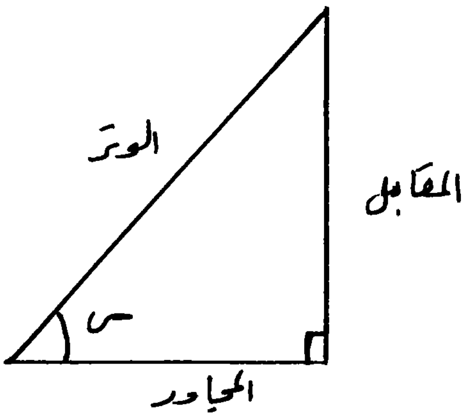
$\therefore \left.\dfrac{دص}{دس}\right|_{ص=\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{جتا\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (أ)

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١ و ٢

الوحدة : ملحق
الفصل : ______
الصفحة : ١ / ١٣

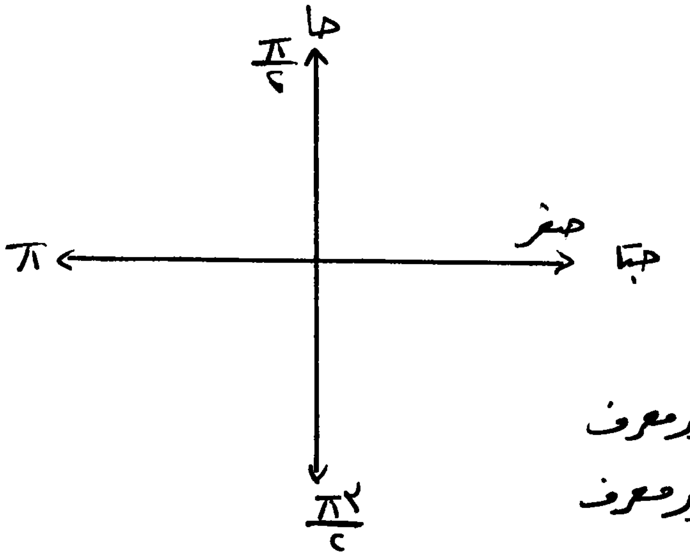
(الاقترانات المثلثية)



$$\text{جا س} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$



جا(٠) = ٠ ، جتا(٠) = ١

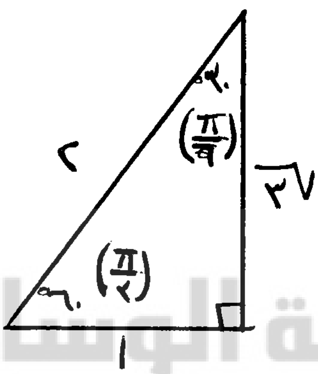
جا($\frac{\pi}{٢}$) = ١ ، جتا($\frac{\pi}{٢}$) = ٠

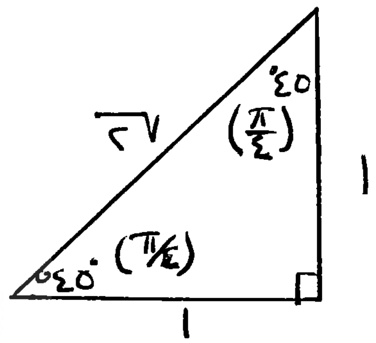
جا(π) = ٠ ، جتا(π) = −١

جا($\frac{٣\pi}{٢}$) = −١ ، جتا($\frac{٣\pi}{٢}$) = ٠

ظا(٠) = ٠ ، ظا($\frac{\pi}{٢}$) = غير معرف

ظا(π) = ٠ ، ظا($\frac{٣\pi}{٢}$) = غير معرف





جا($\frac{\pi}{٦}$) = جتا($\frac{\pi}{٣}$) = $\frac{١}{٢}$

جا($\frac{\pi}{٣}$) = جتا($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا($\frac{\pi}{٣}$) = $\sqrt{٣}$ ، ظا($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

جا($\frac{\pi}{٤}$) = جتا($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا($\frac{\pi}{٤}$) = ١

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢
الفصل الدراسي ٢٦ /

الوحدة : ملحق
الفصل :
الصفحة : ٣ / ١٣

خصائص المتطابقات المثلثية

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \quad ، \quad \text{ظتا س} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} \quad ، \quad \text{قا س} = \frac{1}{\text{جتا س}} \quad ، \quad \text{قتا س} = \frac{1}{\text{جا س}}$$

$$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$$

$$1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$$

$$1 + \text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س}$$

$$\text{جا}\,2\text{س} = 2\,\text{جا س جتا س}$$

$$\text{جتا}\,2\text{س} = 1 - 2\,\text{جا}^2\text{س}$$

$$= 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1$$

$$= \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$$

$$\text{ظا}\,2\text{س} = \frac{2\,\text{ظا س}}{1 - \text{ظا}^2\text{س}}$$

$$\text{جا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} + \text{جتا أ جا ب}$$

$$\text{جا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} - \text{جتا أ جا ب}$$

$$\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جا ب}$$

$$\text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جا ب}$$

$$\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{1 - \text{ظا أ ظا ب}}$$

$$\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{1 + \text{ظا أ ظا ب}}$$

$$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right) = \text{جا س}$$

$$\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right) = \text{جتا س}$$

$$\text{ظا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right) = \text{ظتا س}$$

$$\text{ظتا}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right) = \text{ظا س}$$

$$\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{س}\right) = \text{جتا س}$$

$$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} + \text{س}\right) = -\text{جا س}$$

$$\text{جا}(-\text{س}) = -\text{جا س}$$

$$\text{جتا}(-\text{س}) = \text{جتا س}$$

$$\text{ظا}(-\text{س}) = -\text{ظا س}$$

$$\text{جا}(\pi - \text{س}) = \text{جا س}$$

$$\text{جتا}(\pi - \text{س}) = -\text{جتا س}$$

$$\text{ظا}(\pi - \text{س}) = -\text{ظا س}$$

$$\text{جا}(\pi + \text{س}) = -\text{جا س}$$

$$\text{جتا}(\pi + \text{س}) = -\text{جتا س}$$

$$\text{ظا}(\pi + \text{س}) = \text{ظا س}$$

الأستاذ : جلال النعيمي

٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١ ، ٢ مكـ

الوحدة : ملخص

الفصل :

الصفحة : ٣ / ١٢

(قوانين المتطابقات المثلثية)

$$\text{جا}أ \times \text{جا}ب = \frac{1}{2}\left[\text{جتا}(أ-ب) - \text{جتا}(أ+ب)\right]$$

$$\text{جا}أ \times \text{جتا}ب = \frac{1}{2}\left[\text{جا}(أ+ب) + \text{جا}(أ-ب)\right]$$

$$\text{جتا}أ \times \text{جتا}ب = \frac{1}{2}\left[\text{جتا}(أ+ب) + \text{جتا}(أ-ب)\right]$$

$$\text{جا}أ - \text{جا}ب = 2\,\text{جتا}\left(\frac{أ+ب}{2}\right) \times \text{جا}\left(\frac{أ-ب}{2}\right)$$

$$\text{جا}أ + \text{جا}ب = 2\,\text{جا}\left(\frac{أ+ب}{2}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{أ-ب}{2}\right)$$

$$\text{جتا}أ - \text{جتا}ب = -2\,\text{جا}\left(\frac{أ+ب}{2}\right) \times \text{جا}\left(\frac{أ-ب}{2}\right)$$

$$\text{جتا}أ + \text{جتا}ب = 2\,\text{جتا}\left(\frac{أ+ب}{2}\right) \times \text{جتا}\left(\frac{أ-ب}{2}\right)$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

(حل المعادلة التربيعية)

* في هذه الورقة حل لبعض الأمثلة على حل المعادلة التربيعية وإيجاد الأصفار

مثال (١) : حلل ق(س) للعوامل الأولية .

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - 8\text{س} + 15$$

$$= \underbrace{\text{س}^2 - 3\text{س}} \underbrace{- 5\text{س} + 15} = \text{س}(\text{س}-3) - 5(\text{س}-3)$$

$$= (\text{س}-5)(\text{س}-3)$$

مثال (٢) : حل المعادلة التالية أو أوجد الأصفار

$$3\text{س}^2 + \text{س} = 4$$

$$2\text{س}^2 + \text{س} - 4 = 0 \Leftarrow \left(\text{س} - \frac{3}{2}\right)\left(\text{س} + \frac{4}{2}\right)$$

$$2 \times -4$$
$$-12$$
$$2 \quad -4$$
$$-2 + 4 = 1$$

$$\Leftarrow (\text{س} - 1)(2\text{س} + 4) = 0$$

$$\therefore \text{س} - 1 = 0 \qquad \text{أو} \qquad 2\text{س} + 4 = 0$$

$$\text{س} = 1 \qquad\qquad \text{س} = \frac{-4}{2}$$

$$\text{مجموعة الحل هي } \left\{ \frac{-4}{2} ، 1 \right\}$$

مثال (٣) : حل المعادلة التالية :

$$-5\text{س}^2 = -30 \Leftarrow \text{س}^2 = \frac{30}{5} = 6$$

$$\Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{6}$$

(حل المعادلة التربيعية)

* قانون حل المعادلة التربيعية عن طريق إكمال المربع

$$س^٢ + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ = جـ + \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢$$

$$\Leftarrow \boxed{س^٢ + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^٢}$$

مثال (٤) : حل التالي عن طريق إكمال المربع

$$٢س^٢ - ٦س + ١ = صفر \Leftarrow ٢س^٢ - ٦س = -١$$

$$\Leftarrow ٢\left(س^٢ - ٣س + \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢\right) = -١$$

$$\Leftarrow ٢\left[\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{٩}{٤}\right] = -١$$

$$\Leftarrow ٢\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{٩}{٢} = -١ \Leftarrow ٢\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٧}{٢}$$

$$\Leftarrow \sqrt{\left(س - \frac{٣}{٢}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٧}{٤}}$$

$$\Leftarrow س - \frac{٣}{٢} = \pm \frac{\sqrt{٧}}{٢}$$

$$\therefore س = \frac{٣}{٢} \pm \frac{\sqrt{٧}}{٢}$$

$$\left\{ \frac{٣}{٢} - \frac{\sqrt{٧}}{٢} ، \frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{٧}}{٢} \right\}$$

(حل المعادلة التربيعية)

* الحل عن طريق المعادلة التربيعية إذا أ س٢ + ب س + جـ = ٠

$$\boxed{\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{2\,\text{أ}}}$$

المميز = ب٢ − ٤ أ جـ

إذا كان ب٢ − ٤ أ جـ > ٠ ⟸ عدد الحلول الحقيقية ٢

ب٢ − ٤ أ جـ = ٠ ⟸ عدد الحلول الحقيقية ١

ب٢ − ٤ أ جـ < ٠ ⟸ لا حلول حقيقية

مثال (٥) : حل الآتي ٤ س٢ − ٨ س + ١ = ٠

$\therefore$ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{2\,\text{أ}}$ وحساب المميز ب٢ − ٤ أ جـ

$(-8)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 64 - 16 = 48$

عدد الحلول الحقيقية ٢

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{48}}{2 \times 4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{8} \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{8}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \,،\, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي : ١ + ٢

الوحدة : مفاهيم

الفصل : ________

(أنواع الإقترانات)

1. الإقتران الثابت :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}$ ، أ ثابت ⇐ المجال : ح

2. الإقتران الخطي :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$ ، أ و ب ثوابت ⇐ المجال : ح

3. الإقتران التربيعي :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{2} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$ ⇐ المجال : ح

4. الاقتران التكعيبي :

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{3} + \text{ب}\text{س}^{2} + \text{جـ}\text{س} + \text{د}$ ⇐ المجال : ح

5. إقتران الجذر التربيعي :

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) \geq 0$ ⇐ المجال $\text{هـ}(\text{س}) \geq 0$

6. الإقتران النسبي :

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) \neq 0$ ⇐ المجال $\text{ح} - \{\text{هـ}(\text{س}) = 0\}$

7. الإقتران الكسري :

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$ ، $\text{م}(\text{س}) \neq 0$ ⇐ المجال $\text{ح} - \{\text{م}(\text{س}) = 0\}$

8. الإقتران المتشعب :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{هـ}(\text{س}) \text{ ، } \text{س} < \text{أ} \\ \text{م}(\text{س}) \text{ ، } \text{س} \geq \text{أ} \end{cases}$$

⇐ حسب المجال المعطاه

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

(أنواع الإقترانات)

٩ إقتران القيمة المطلقة :

$$\text{ق(س)} = |\text{هـ(س)}| \Leftarrow \text{ق(س)} = \begin{cases} \text{هـ(س)} & \text{، الإشارة الموجبة} \\ -\text{هـ(س)} & \text{، الإشارة السالبة} \end{cases}$$

أصفار هـ(س) تسمى نقط التشعب او نقط التحول

١٠ إقتران أكبر عدد صحيح :-

$\text{ق(س)} = [\text{س}] \Leftarrow \text{ن} \leq \text{س} < \text{ن} + ١$ حيث ن عدد صحيح

فإن ق(س) = ن

أو $[\text{الحشوة}] = $ عدد صحيح (ن)

$\text{ن} \leq \text{الحشوة} < \text{ن} + ١$

(قوانين رياضية مهمة)

1) المسافة بين نقطتين $(س_1 ، ص_1)$ و $(س_2 ، ص_2)$

$$ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

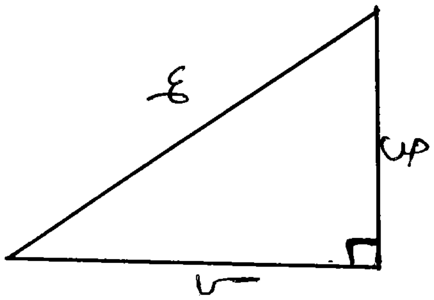
2) إحداثيات منتصف المسافة بين نقطتين $(س_1 ، ص_1)$ و $(س_2 ، ص_2)$

هو $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$

3) بعد النقطة $(س_1 ، ص_1)$ عن المستقيم $أ س + ب ص + جـ = 0$

$$البعد = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

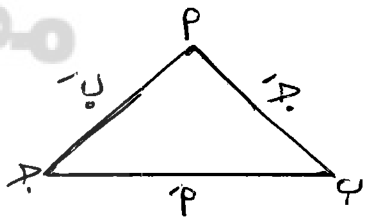
4) نظرية فيثاغورس لمثلث قائم الزاوية :



$$ع^2 = س^2 + ص^2$$

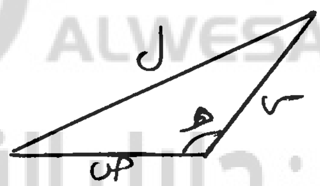
5) قانون الجيب :

$$\frac{أ}{جا(أ)} = \frac{ب}{جا(ب)} = \frac{جـ}{جا(جـ)}$$



6) قانون جيب التمام :

$$ل^2 = س^2 + ص^2 - 2 س ص جتا هـ$$



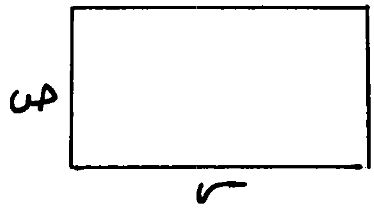
الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

الفصل الدراسي ١+٢

الوحدة : ملحق
الفصل :
الصفحة : ١٠ / ١٢

(قوانين رياضية مهمة)

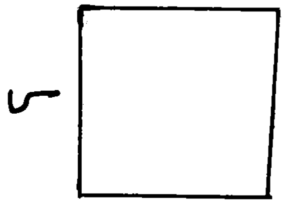
المستطيل



المساحة = س × ص

المحيط = ٢(س+ص)

المربع



المساحة = س²

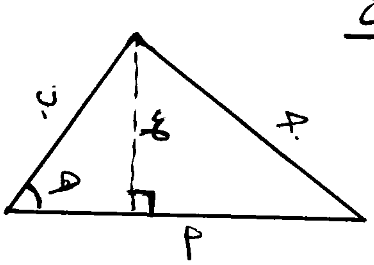
المحيط = ٤س

الدائرة :

المساحة = π نق²

المحيط = ٢π نق

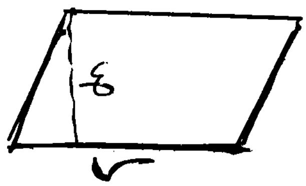
المثلث



المساحة = ½ أ ع . أو

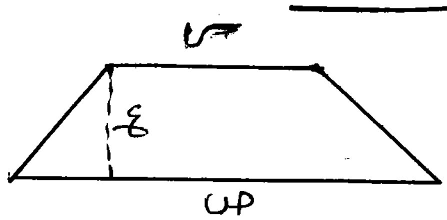
المساحة = ½ أ ب جا(هـ)

متوازي الأضلاع



المساحة = س × ع

شبه المنحرف



المساحة = ½ (س+ص) × ع

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢

(قوانين رياضية مهمة)

* المكعب :

س : طول ضلع المكعب

الحجم = س^٣

المساحة الكلية = ٦ س^٢

المساحة الجانبية = ٤ س^٢

* متوازي المستطيلات :

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع
= س × ص × ع

المساحة الجانبية = ٢(س + ص) × ع

المساحة الكلية = ٢(س + ص) × ع + ٢ س ص

* المخروط الدائري القائم :

الحجم = $\frac{\pi}{٣}$ نق^٢ ع

مساحة السطح = π نق ل + π نق^٢

* الاسطوانة :

الحجم = π نق^٢ ع

المساحة الجانبية = ٢π نق ع

المساحة الكلية = ٢π نق^٢ + ٢π نق ع

* الكرة :

الحجم = $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^٣

مساحة سطح الكرة = ٤π نق^٢

* الهرم القائم :

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي .

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

* المنشور :

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

* القطاع الدائري

المساحة = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × هـ

طول القوس = نق × هـ

حيث هـ : الزاوية المركزية

* صورة الاقتران الأسي $ق(س) = أ^س$ ، حيث أ عدد ثابت

المجال : ح

* اللوغاريتمات : هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي .

اذا كان $ص = أ^س \Leftarrow س = لو_أ ص$ حيث $ص > ٠$

* **قوانين اللوغاريتمات :**

١) $لو_أ س \times ص = لو_أ س + لو_أ ص$

٢) $لو_أ \frac{س}{ص} = لو_أ س - لو_أ ص$

٣) $لو_أ س^ن = ن\, لو_أ س$

٤) $لو_أ أ = ١$

٥) $لو_أ أ^ن = ن$

٦) $لو_أ ١ = صفر$

* قانون تغيير الاساس (أ) اللوغاريتمي الى الاساس (س)

$$لو_أ ب = \frac{لو_س ب}{لو_س أ}$$

الأستاذ : جلال النعيمي
٠٧٧٨٠٢٩٩٩٢
الفصل الدراسي ١+٢

الوحدة : ملحق
الفصل :
الصفحة : ١٢/١٢

(الكسور الجزئية)

* اذا كان $ل(س) = \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$ وحيث ق(س) و هـ(س) كثيرات الحدود

فإن تحليل ل(س) يكون بالاعتماد على درجة المقام هـ(س) :

١) $هـ(س) = أس + ب \Leftarrow \dfrac{أ}{أس + ب}$

٢) $هـ(س) = (أس + ب)^{ن} \Leftarrow \dfrac{أ_1}{(أس + ب)} + \dfrac{أ_2}{(أس + ب)^2} + \cdots + \dfrac{أ_ن}{(أس + ب)^{ن}}$

٣) $هـ(س) = أس^2 + ب س + جـ \Leftarrow \dfrac{د س + ع}{أس^2 + ب س + جـ}$

٤) $هـ(س) = (أس^2 + ب س + جـ)^{ن} \Leftarrow$

$$\dfrac{د_1 س + ع_1}{أس^2 + ب س + جـ} + \dfrac{د_2 س + ع_2}{(أس^2 + ب س + جـ)^2} + \cdots + \dfrac{د_ن س + ع_ن}{(أس^2 + ب س + جـ)^{ن}}$$