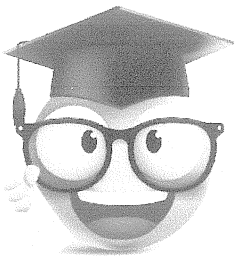
# الرياضيات

## ( النهايات والاتصال )

المستوى : الاول


اعداد الاستاذ : انس الجدعان

٠٧٨٠٣٣٠٩٠١

تطلب من مكتبة نور الشمس

٠٧٩٥٠٤٠٣٢٧

noorhams676@gmail.com  079504032 7  مـكتبة نـور الشمس

# النهايات والاتصال

**الفصل الاول : النهايات**

-مفهوم النهايات

-نظريات النهايات

-نهاية خارج قسمة اقترانين

**الفصل الثاني : الاتصال**

-الاتصال عند نقطة

-نظريات على الاتصال

امتحان على وحدة النهايات

كن قويا فالأشياء
سوف تتحسن

ويبقى الأمل ينير لنا
الطريق ولو كان ضؤوه
كضوء شمعة

حارب من
اجل نفسك

قاوم وستأتي المسره
تحلي بسكرها كل مرة
قاوم و قاوم ثم قاوم
إنما العمر مرة

التفاؤل هو الايمان الذي
يؤدي إلى الانجاز لا شيء
يمكن ان يتم بدون الأمل
والثقة

## مفهوم النهاية

النهاية تحيي سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير س من عدد محدد.

مثال ل تحيي نهاية الاقتران ق عندما تقترب س من العدد أ، وبالرموز

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$$

نها ⇐ (اختصار النهاية)

ق(س) ⇐ الاقتران

س ← أ ⇐ هو أن س تقترب من (العدد أ) وتُقرأ س تؤول للعدد أ.

$$\lim_{س \to أ} و(س)$$

س ← أ

نها و(س) عندما س ← أ⁻

نها و(س) عندما س ← أ⁺

## ملاحظات.

1) إذا كانت النهاية موجودة فإن النهاية عندما س تؤول للعدد أ من اليمين تساوي النهاية عندما تؤول للعدد أ من اليسار

$$\lim_{س \to أ^+} و(س) = \lim_{س \to أ^-} و(س)$$

+ ← يمين ، − يسار

2) إذا كانت النهاية غير موجودة فإن:

$$\lim_{س \to أ^+} و(س) \neq \lim_{س \to أ^-} و(س)$$

أنس جدعان
0780330901

مثال (١) اعتماداً على الجدول التالي جد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ .

| س | ٢ | ٢,٥ | ٢,١ | ٢,٠١ | ٢,٠٠١ | ٢ | ١,٩٩ | ١,٩ | ١,٥ | ١,١ | ١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ٤ | ٣,٥ | ٣,١ | ٣,٠١ | ٣,٠٠١ | | ٢,٩٩ | ٢,٩ | ٢,٥ | ٢,١ | ٢ |

نلاحظ أنه كلما اقتربت س من العدد (٢) من الجهة اليمين فإن ق(س) تقترب من العدد (____)

$\therefore$ $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) =

وأيضاً كلما اقتربت س من العدد (٢) من الجهة اليسار.

فإن ق(س) تقترب من العدد (____)

$\therefore$ $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) =

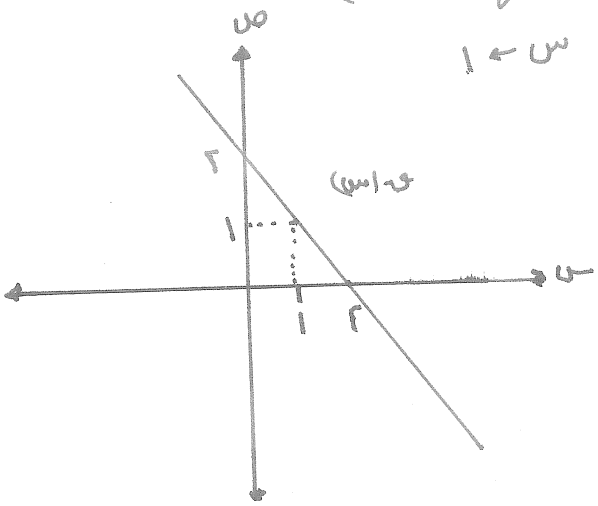
وبما أنه $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

تكون $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة وتساوي (____)

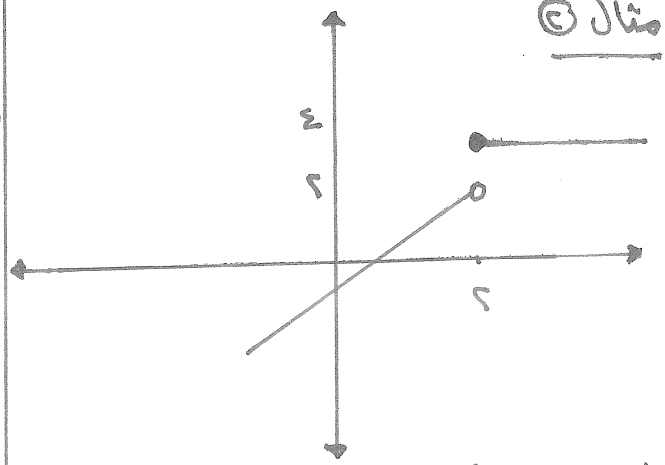
## إيجاد النهاية من خلال ل ، ك ، ج

**مثال ①** بالاعتماد على الشكل المجاور جد

نهـا ق(س)
س ← ١

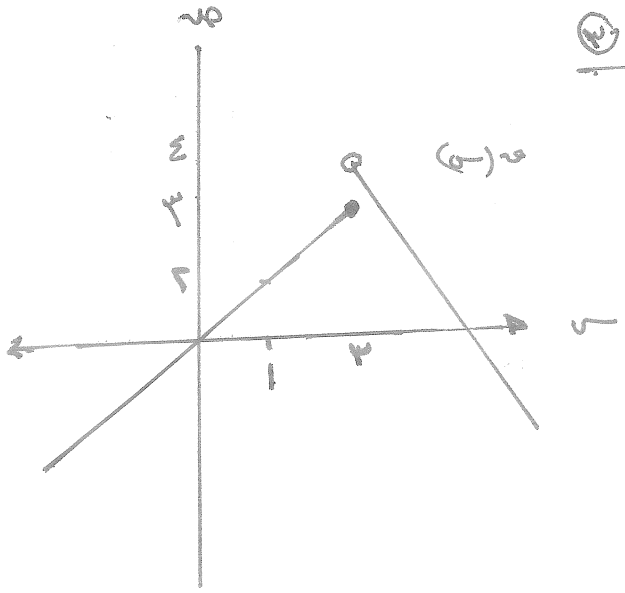



**مثال ②**




نهـا ق(س)
س ← ٢

**مثال ③**




جد

١) نهـا ق(س)
س ← ١+

٢) ق(٣)

٣) نهـا ق(س)
س ← ٣+

٤) نهـا ق(س)
س ← ٣-

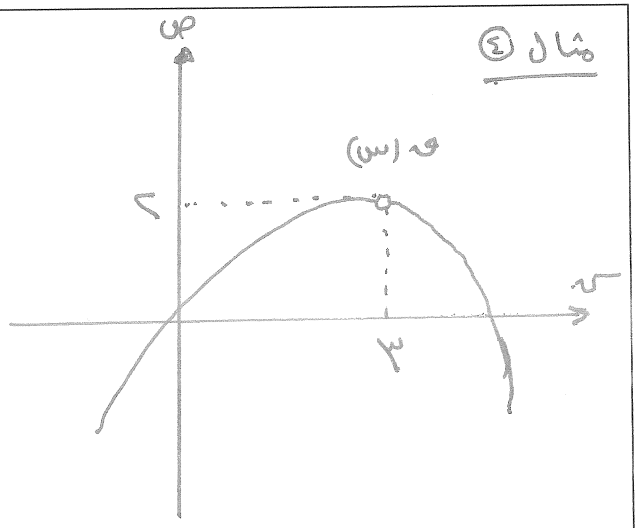
٥) نهـا ق(س)
س ← ٣

**تذكر**

① ق(أ) ← تكون عند الدائرة المغلقة.

② إذا كانت دائرة مفتوحة فقط.
تكون ق(أ) غير موجودة

## مثال ④



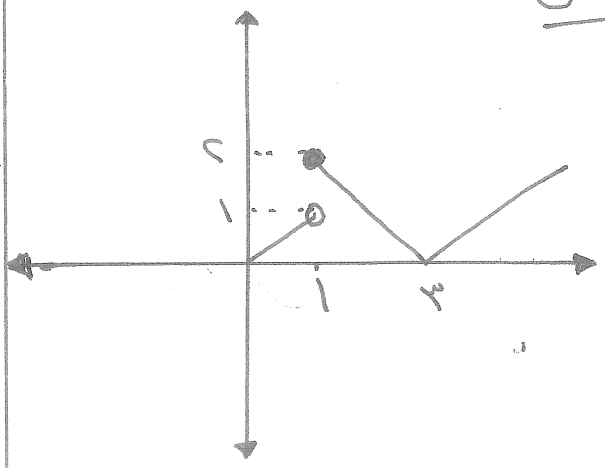

جد

[١] $\lim_{س \to ٣} ه(س)$

[٢] $\lim_{س \to ٢^+} ه(س)$

[٣] $\lim_{س \to ٢^-} ه(س)$

## مثال ⑤

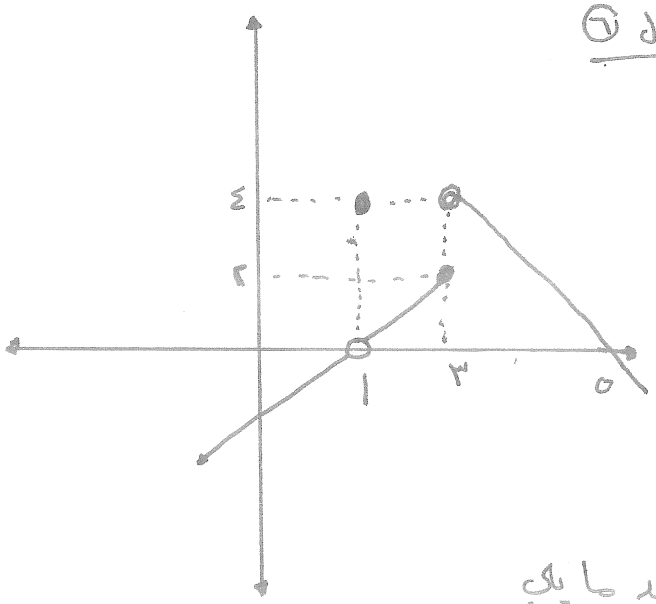



جد

[١] $\lim_{س \to ١} ه(س)$

[٢] ه (١)

## مثال ③




جد ما يلي

[١] ه (١)

[٢] قيمه ب ، حيث $\lim_{س \to ب} ه(س)$ غير موجودة

[٣] قيمه (أ) ، حيث $\lim_{س \to أ} ه(س) =$ صفر

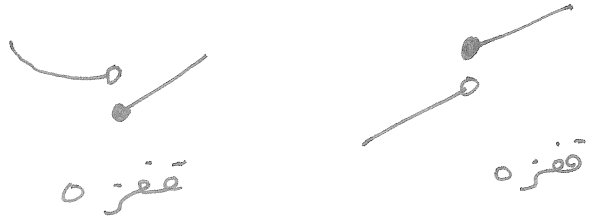
## ملاحظات

① النهاية تساوي صفر

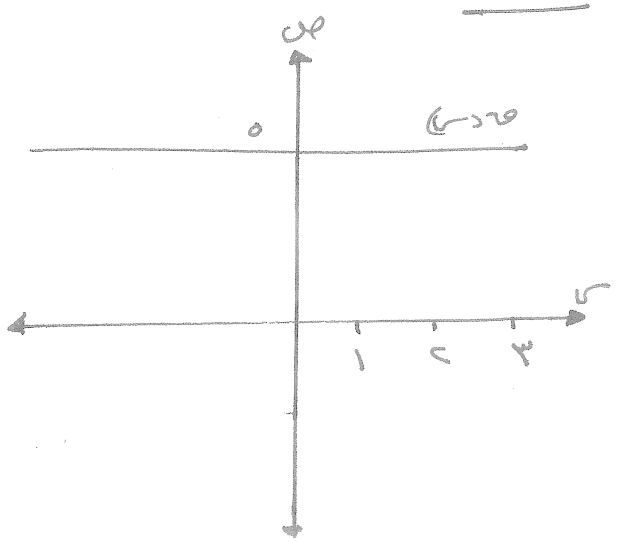
عندما نقطع محور السينات.

② النهاية غير موجودة

عند القفزات ، انقطاع



## مثال ⑦



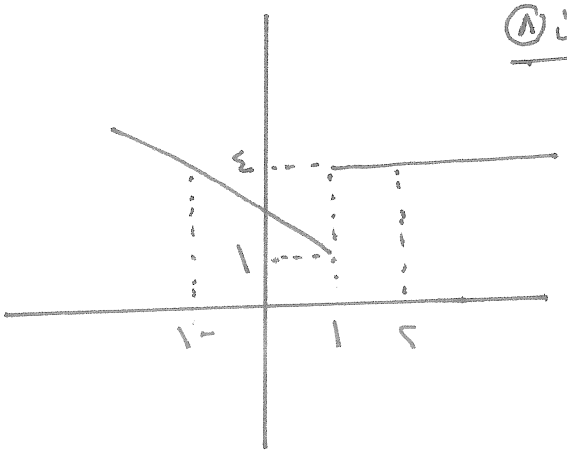

جد

[١] $\lim_{س \to 0} ق(س)$ إن وجدت

[٢] $\lim_{س \to 1^+} ق(س)$

[٣] $\lim_{س \to 2^-} ق(س)$

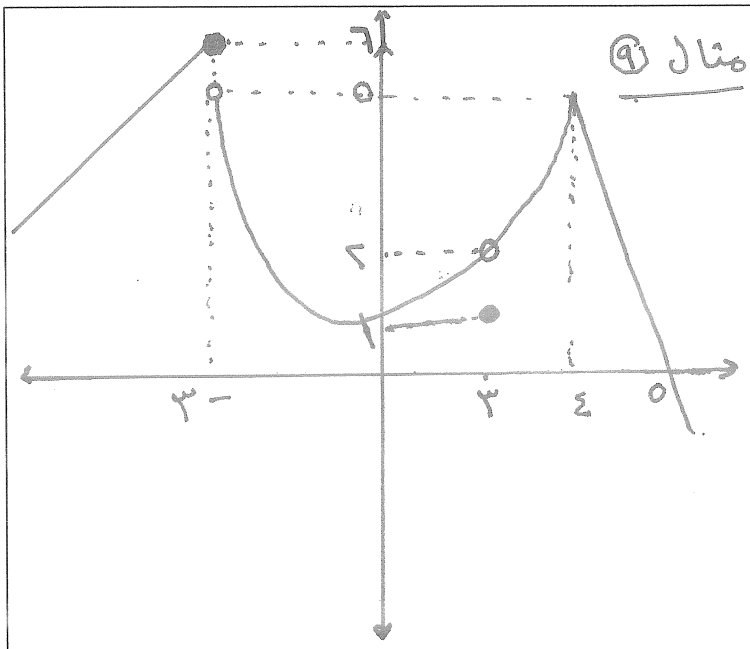
## مثال ⑧




إذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س)$ غير موجودة

فما قيمة الثابت (أ)

## مثال ⑨




جد

[١] $\lim_{س \to 4^+} ق(س)$

[٢] $\lim_{س \to -2^-} ق(س)$

[٣] ق(-٣)

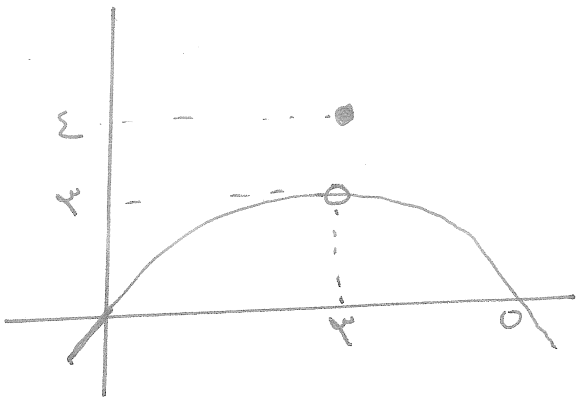
[٤] ق(٣)

[٥] قيمة أ، حيث $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$

[٦] قيمة ب، حيث $\lim_{س \to ب} ق(س)$ غير موجودة

مثال (١) ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يلي.

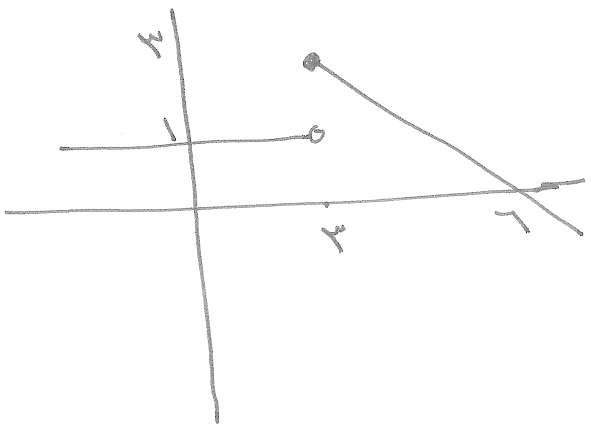
(١) من خلال الشكل، إذا $\lim_{س \to ٣^+} د(س) =$




أ) ٤ ب) ٣

جـ) ٥ د) غير موجودة

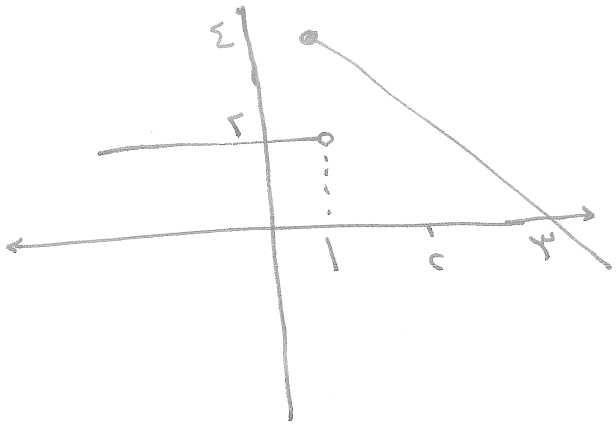
(٢) من خلال الشكل، جد $(أ)$ حيث $\lim_{س \to أ} د(س) = هـ$




أ) هـ ب) ١

جـ) ٦ د) ٣

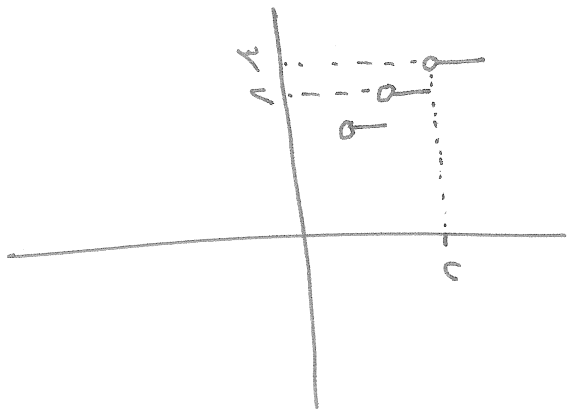
(٣) اعتمادا على الشكل، جد $ب$ حيث $\lim_{س \to ب} د(س)$ غير موجودة




أ) ١ ب) ٢

جـ) ٣ د) ٤

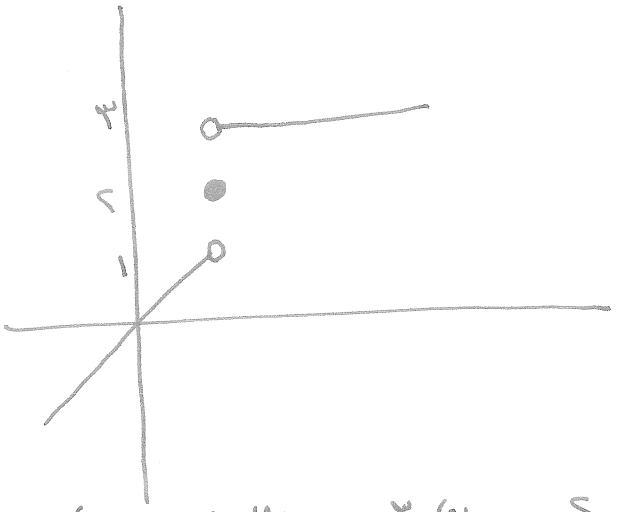
(٤) من خلال الشكل، إذا $\lim_{س \to ٣} د(س)$




أ) ٢ ب) ٣

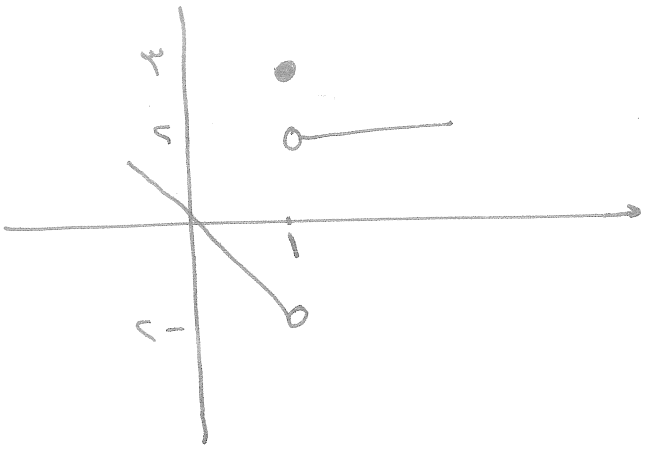
جـ) هـ د) غير موجودة

٥) اعتماداً على الشكل، نهاية $_{س \to ٣^+}$ ق(س).




أ) ٢ ب) ٢ ج) ١ د) غير موجودة

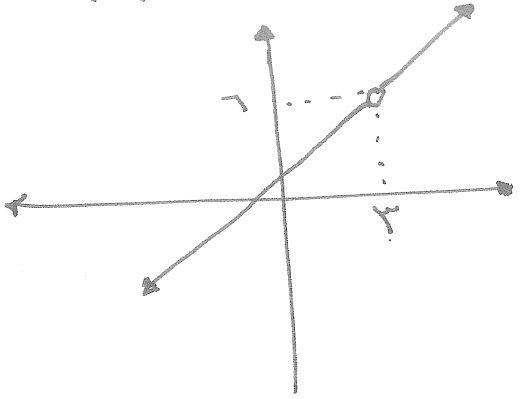
٨) معتمداً على الشكل المجاور فإن نهاية ق(س) تساوي $_{س \to ١}$




أ) ٢ ب) -٢

ج) ٣ د) غير موجودة

٤) اعتماداً على الشكل المجاور أجب عن كل مما يلي.




٦) ق(٣) تساوي.

أ) ٦ ب) ٣

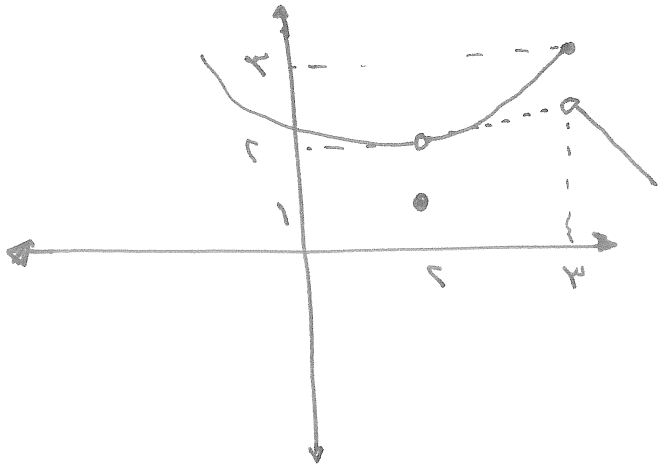
ج) صفر د) غير معرفة

٧) نهاية $_{س \to ٣^+}$ ق(س) تساوي.

أ) ٦ ب) ٣

ج) صفر د) غير موجودة

٩) من خلال الشكل المجاور فإن نهاية ق(س) تساوي $_{س \to ٣^+}$




أ) ٣ ب) ٢

ج) ١ د) صفر

إذا كانت

$ق(س) = جـ$ ، حيث جـ عدد ثابت.

فإن

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = جـ$$

مهما كانت قيمة أ

أي أن

**نهاية الثابت = الثابت نفسه**

**أمثلة ①**

جد كلا من النهايات التالية.

[1] $\lim_{س \to ٥} ٧ =$

[2] $\lim_{س \to ١} (-٤) =$

[3] $\lim_{س \to ٣} \frac{٥}{٣} =$

[4] $\lim_{س \to ٠} ١٫٢ =$

[5] $\lim_{س \to ٤} أ =$

* الله هل نجد النهاية عند التعويض المباشر

إذا كانت $ق(س)$ اقترانا كثير حدود.

فإن

$$\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$$

يعني نعوض (أ) مكان كل س.

مثال ② جد النهايات الآتية:

[1] $\lim_{س \to ١} ٣س^{٢} + س + ٢$

[2] $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} + ٥}$

[3] $\lim_{س \to ٠} (س^{٣} + ٣س^{٢} + س + ٢)$

[4] $\lim_{س \to ١} (٣س^{٣} + ٥س + ٧)$

٥) $\lim_{س \to -١} (س^{٦} - ٥س^{٢} + ٤س + ٩)$

٦) $\lim_{س \to -١} (س^{٢} + ٥س)^{٣}$

٧) $\lim_{س \to -١} (س^{٣} + ٢)^{٥}$

٨) $\lim_{س \to ١} (س^{٢} + ١)(-س^{٣} + ٥س - ٢)$

٩) $\lim_{س \to -٢} (٣ - س^{٢} - ٦س - ٧)$

إذا كانت

$\lim_{س \to أ} هـ(س) = ل$

$\lim_{س \to أ} م(س) = م$

فإن: صح جدًا.

١١) $\lim_{س \to أ} (هـ(س) \pm م(س)) = ل \pm م$

(أي أن النهاية توزع على الجمع والطرح)

١٢) $\lim_{س \to أ} (هـ(س) \times م(س)) = ل \times م$

(أو توزع على الضرب)

١٣) $\lim_{س \to أ} \left(\frac{هـ(س)}{م(س)}\right) = \frac{ل}{م}$

بشرط م لا تساوي صفر

١٤) $\lim_{س \to أ} (هـ(س))^{ن} = \left(\lim_{س \to أ} هـ(س)\right)^{ن}$

١٥) $\lim_{س \to أ} \sqrt{هـ(س)} = \sqrt{\lim_{س \to أ} هـ(س)}$

مثال ③ إذا علمت أن

$\lim_{س \to ١} و(س) = ٩$

و $\lim_{س \to ١} هـ(س) = -٣$

جد كلا مما يلي .

١) $\lim_{س \to ١} (و(س) + هـ(س))$

٢) $\lim_{س \to ١} (و(س) - هـ(س))$

٣) $\lim_{س \to ١} (و(س) \times هـ(س))$

٤) $\lim_{س \to ١} (و(س))^{٢}$

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{و(س)}{هـ(س)}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س)}{و(س)}$

٧) $\lim_{س \to ١} (هـ(س) - و(س))$

٨) $\lim_{س \to ١} \sqrt{و(س)}$

٩) $\lim_{س \to ١} (هـ(س))^{٣}$

ملاحظة

$\lim_{س \to أ} جـ \, و(س) = جـ \lim_{س \to أ} و(س)$

حيث جـ عدد ثابت

أي أن الثابت المضروب بالاقتران يصبح خارج النهاية

مثال ④ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢} و(س) = ٤$

جد ما يلي:

① $\lim_{س \to ٢} ٣ \, و(س)$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{و(س)}{٢}$

③ $\lim_{س \to ٢} (و(س) + س)$

④ $\lim_{س \to ٢} س^{٢} \, و(س)$

⑤ $\lim_{س \to ٢} (٢ \, و(س) + س - ١)$

⑥ $\lim_{س \to ٢} (٥ س - و(س))$

⑦ $\lim_{س \to ٢} (و(س)^{٢} + ٢ س - ٥)$

مثال ⑤ إذا كانت

$\lim_{س \to ٢} (س - ١) = ١$

$\lim_{س \to ٢} (س + ١) = ٣$

جد $\lim_{س \to ٢} (س^{٢} - ١)$

مثال ⑥ إذا كانت

$\lim_{س \to ٢} ٣ و(س) = ٢٧$

فجد $\lim_{س \to ٢} (و(س))^{٢}$

مثال ⑦ إذا كانت

$\lim_{س \to -١} (و(س) + س^{٣} - ٣) = ٥$

جد $\lim_{س \to -١} ٣ (و(س))^{٢}$

**مثال ⑧** إذا كانت

$\lim_{س \to -2} (٣ ق(س) + ٢ س + ١) = ٧$

جد $\lim_{س \to -2} (ق(س))^٢$

**مثال ⑨** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} ٥ س + ١ & س > ٢ \\ س^٢ & س \leq ٢ \end{cases}$$

جد

[١] $ق(٢)$

[٢] $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

[٣] $\lim_{س \to ٠} ق(س)$

[٤] $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

**مثال ⑩** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ س + ١ & ، س > ٠ \\ ٥ - س^٢ & س \leq ٠ \end{cases}$$

فجد قيمة كل مما يأتي :

[١] $\lim_{س \to ١} ق(س)$

[٢] $\lim_{س \to -٢} ق(س)$

[٣] $\lim_{س \to ٠} ق(س)$

**مثال (١١)** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} ١ - س & ، س \neq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$$

جد

١) نهـا ق(س) عندما س → ٢

٢) نهـا ق(س) عندما س → ٣

٣) ق(٢)

**مثال (١٢)** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \geq ١ \\ س^{٢} + ١ & ، س < ١ \end{cases}$$

جد

١) ق(١)

٢) نهـا ق(س) عندما س → ١

٣) نهـا ق(س) عندما س → ٠

**مثال (١٣)** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٦ & ، س \in ص \\ ٤س + ١ & ، س \notin ص \end{cases}$$

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة

جد نهـا ق(س) إن وجدت عندما س → ٣

٤) نهـا ق(س) عندما س → ٢

٥) ق(٤)

مثال (١٤) إذا كانت $و(٣) = ٥$

وكانت $\lim_{س \to ٣} (٤ س + (س) م - ٣ و(س))$ تساوي $(-٨)$

جد $\lim_{س \to ٣} (س + م(س))^{٤}$

(يجب الاجابة على جميع الاسئلة)

مثال (١٥) جد قيمة الثابت $م$ في ما يلي .

[١] $\lim_{س \to ٢} (٢ م س^{٢} + ٥ س + ١) = ٢٥$

[٢] $\lim_{س \to ٣} (٥ س^{٢} + ٥ س + ٦) = ٥٧$

[٣] $\lim_{س \to ١} (س^{٤} + ٣ س^{٥})^{٣}$

**مثال (١٦)**

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{أ س - ١}{س - ٣} = ٣$

جد قيمة الثابت (أ)

**مثال (١٧)** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س - أ & ، س < ٢ \\ ١٠ & ، س > ٢ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ،

فجد قيمة الثابت أ

**مثال (١٨)** إذا كانت

$$ق(س) = \begin{cases} أ س + ٤ & ، س > ٢ \\ ٥ س^{٢} + ١ & ، س \leq ٢ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة ،

فما قيمة الثابت أ

**مثال (١٩)** إذا كان

$$م(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، س > ٣ \\ ٢٠ & ، س = ٣ \\ أ س + ١ & ، س < ٣ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٣} م(س)$ موجودة

جد قيمة الثابت أ .

**مثال (٢٠)**

إذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} ٥س^{٣} & س < أ \\ ٤٠ & س \geq أ \end{cases}$

وكانت نهـ $هـ(س)$ موجودة
$س \to أ$

فما قيمة الثابت أ

**مثال (٢١)**

إذا كانت

$هـ(س) = \begin{cases} ٥س - أ & س < ١ \\ ب س^{٢} + ٧ & س \geq ١ \end{cases}$

وكانت نهـ $هـ(س) = ١٦$
$س \to ٣$

ونهـ $هـ(س)$ موجودة ، فما قيمة
$س \to ١$
كل من الثابتين أ ، ب ؟

سؤال ضع دائرة حول رمز الجواب الصحيحة فيما يلي.

١) إذا كانت $و(س) = \begin{cases} ل\, س + ١ & ، س > ٢ \\ س^{٣} - ١ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

وكانت نهاية $و(س)$ موجودة عند $س \to ٢$

فإن ل تساوي .

أ) ٦ ب) ٣

ج) ٢ د) ٧

٢) إذا كانت نهاية $و(س) = ٨$ عند $س \to ٣$

و نهاية $م(س) = -٢$ فإن

نهاية $(٢ و(س) + م(س))$ تساوي عند $س \to ٣$

أ) ١٤ ب) ١٨

ج) -١٢ د) ٢٤

٣) إذا كانت $م(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \neq ٣ \\ ٨ & ، س = ٣ \end{cases}$

فإن $و(٣)$ تساوي .

أ) ١٠ ب) ٤

ج) ٢ د) ٨

٤) إذا كانت نهاية $(و(س))^{٢} = ١٦$ عند $س \to ٣$

فإن نهاية $٢ و(س)$ تساوي .

أ) ١٦ ب) ٤

ج) ٨ د) ٣٢

٥) جد نهاية $م^{٢}$ حيث م عدد ثابت عند $س \to ٥$

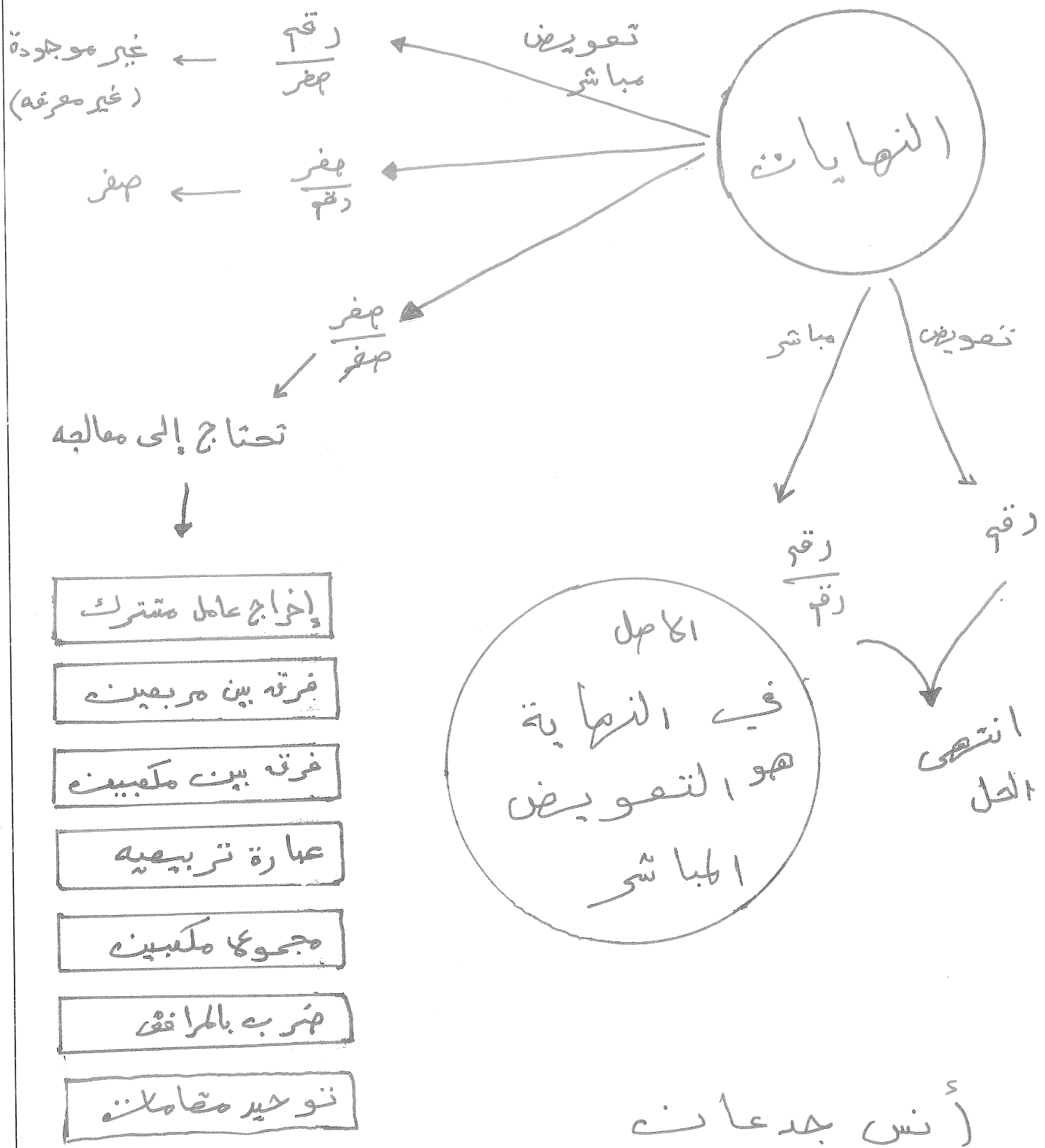
أ) ٢٥ ب) ٥

ج) $م^{٢}$ د) غير موجودة

٦) نهاية $(س^{٧} + ٣ س^{٢} + ٢ س - ١) =$ عند $س \to ١$

أ) ٥ ب) ٤

ج) ٦ د) ١٢


النهايات
تعويض مباشر
رقم / صفر
غير موجودة (غير معرفة)
صفر / رقم
صفر
صفر / صفر
تحتاج إلى معالجة
إخراج عامل مشترك
فرق بين مربعين
فرق بين مكعبين
عبارة تربيعية
مجموع مكعبين
ضرب بالمرافق
توحيد مقامات
تعويض مباشر
رقم / رقم
رقم
انتهى الحل
الحل في النهاية هو التعويض المباشر
أنس جدعان
0780330901

**مثال ①** جد كلا مما يلي , إن وجدت , إن لم توجد بيّن السبب .

١) $\lim_{س \to ١} \frac{٢س + ١}{س^٢ + ١}$

٢) $\lim_{س \to ١٠} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥}$

٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣س + ٦} + ١}{س - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س + ٣}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ١}{س + ٣}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{س + ٣}{س^٢ - ٤}$

**مثال ②** جد كلا مما يلي , إن وجدت , إن لم توجد بيّن السبب .

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{٢ - س}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{٢ - س}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س^٢ - ١٠س}{٢ - س}$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س}{س}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{١٠ - ٥س}$

٦ نهـا $\frac{س^{٢} + ٣ س}{س + ٣}$ ، $س \to -٣$

٧ نهـا $\frac{٣ س^{٢} - ٥ س^{٣}}{س^{٢}}$ ، $س \to ٠$

٨ نهـا $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

٩ نهـا $\frac{س - ٣}{٣ - س}$ ، $س \to ٣$

* تذكر $\frac{أ - ب}{ب - أ} = -١$

١٠ نهـا $\frac{س^{٢} - ٣٦}{٦ - س}$ ، $س \to ٦$

تذكر ← $أ^{٢} - ب^{٢} = (أ + ب)(أ - ب)$

١١ نهـا $\frac{٢ س - ١٤}{س^{٢} - ٤٩}$ ، $س \to ٧$

١٢ نهـا $\frac{٥ س^{٢} - ٥}{س - ١}$ ، $س \to ١$

١٣ نهـا $\frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

تذكر ← $أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})$

١٤) نهـا $\dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ، $س \to ٣$

١٥) نهـا $\dfrac{س^{٣} - ١٢٥}{س - ٥}$ ، $س \to ٥$

١٦) نهـا $\dfrac{س^{٣} - ١}{٣ - ٣س}$ ، $س \to ١$

١٧) نهـا $\dfrac{س^{٤} + ٢٧ س}{س + ٣}$ ، $س \to -٣$

تذكر: $أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أ ب + ب^{٢})$

١٨) نهـا $\dfrac{٧ س^{٢} + ٨}{٦٤ + س^{٣}}$ ، $س \to -٤$

مثال ④ جد كلا مما يلي بالتعويض المباشر:

١١) نهـا $\dfrac{س^{٢} - ٣ س - ٤}{١٢ - ٣ س}$ ، $س \to ٤$

١٢) نهـا $\dfrac{س^{٢} - ٦ س + ٩}{س^{٢} - ٩}$ ، $س \to ٣$

١٣) نهـا $\dfrac{س^{٢} + ٥ س + ٦}{س^{٢} - ٩}$ ، $س \to -٢$

١٤) نهـا $\dfrac{س ص^{٢} - ص}{س ص^{٢} - ٤ س}$ ، $س \to ٤$

[٣] نها $\frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{٩ - س^{٢}}$ $س \to ٣$

[٥] نها $\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س^{٢} - ٢٥}$ $س \to ٥$

مثال ④ جد قيمة كل من النهايات التالية.

[١] نها $\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}\right) \times \frac{١}{٢ - س}$ $س \to ٢$

[٢] نها $\left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{س}\right) \times \frac{١}{٤ - س}$ $س \to ٤$

[٤] نها $\frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٤ - س^{٢}}$ $س \to ٢$

[٥] نها $\frac{\left(\frac{١}{١ + س} - \frac{١}{٣}\right)}{س - ٢}$ $س \to ٢$

٦) $\lim_{س \to ٥} \frac{\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}\right)}{(س^{٢} - ٢٥)}$

٧) $\lim_{س \to ٧} \frac{\frac{١}{س - ٢} - \frac{١}{٥}}{١٤ - ٧س}$

٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{٢}{س + ٢} - ١}{س + ٢}$

أنشطو

٩) $\lim_{س \to ١٠} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{٢}{س + ٣}}{س - ١}$

١٠) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{٣س - ٠}{٩ - س^{٢}} - \frac{٩}{٩ - س^{٢}}\right)$

١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{٤}}$

* اهل الضرب بالمرافق هو فك الفرق بين مربعين

مثال ① جد كلا مما يلي

[1] $\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1}$

← يمكن الحل هنا بطريقتين.

الطريقه الاولى وجب الضرب بالمرافق.

اما الطريقه الثانيه وجب تحليل المقدار $(س - 1)$ فرقا بين مربعين

توضيح طريقه ①

$$\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1} \times \frac{\sqrt{س} + 1}{\sqrt{س} + 1}$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{(\sqrt{س})^2 - 1}{(س - 1)(\sqrt{س} + 1)}$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{(س - 1)(\sqrt{س} + 1)}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{1}{\sqrt{س} + 1} = \frac{1}{2}$$

طريقه ②

$$\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س - 1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(\sqrt{س} - 1)}{(\sqrt{س} - 1)(\sqrt{س} + 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \#$$

[2] $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س + 2} - 2}{س - 2}$

[3] $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{3س + 4} - 5}{س - 3}$

[4] $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{س + 1} - 2}{س - 3}$

[٥] نهـا $\frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$
$س \to ٥$

[٦] نهـا $\frac{\sqrt{س + ١} - ٣}{س - ٨}$
$س \to ٨$

[٧] نهـا $\frac{\sqrt{س^٤ + ٤} - ٢}{س^٤}$
$س \to ٠$

[٨] نهـا $\frac{\sqrt{٣س + ٤} - ٥}{س^٢ - ٤٩}$
$س \to ٧$

[٩] نهـا $\frac{\sqrt{٣س + ١} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$
$س \to ٥$

[١٠] نهـا $\frac{\sqrt{٣س + ٦} - ١}{٣ - س^٢}$
$س \to ١$

مثال ⑥ إذا كانت $ق(س) = س$

جد $\lim_{س \to -3} \frac{ق(س^2) - ق(9)}{س + 3}$

مثال ⑦ إذا كانت $ق(س) = س^3$

جد $\lim_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2}$

مثال ⑧ إذا كانت $ق(س) = \sqrt{س^2 + 5}$

جد $\lim_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(3)}{س - 2}$

مثال ⑨ إذا كانت $ق(س) = س^2$

جد $\lim_{س \to 3} \frac{ق(س) - ق(3)}{س - 3}$

**مثال (١٠)** إذا كان

$$و(س) = \frac{٢ س}{٣ + س}$$

جد $\lim_{س \to ٤} \frac{و(س) - و(٤)}{س - ٤}$

**مثال (١١)** إذا علمت أن $\lim_{س \to ٥} و(س) = -٧$

$\lim_{س \to ٥} م(س) = ٢$ ، فبين أنه (اثبت)

$$\lim_{س \to ٥} \frac{٢ و(س) - ٣ م(س)}{و(س) + س + ٧} = -٤$$

يكون $ه(س)$ متصلا عند $س = أ$ إذا كانت النهاية تساوي القيمة

$$\text{نها}_{س \to أ} ه(س) = ه(أ)$$

أي يجب تحقق ٣ شروط

١) $ه(أ)$ معرف

(أي أن $ه(أ)$ عدد حقيقي)

٢) $\text{نها}_{س \to أ} ه(س)$ موجودة

يعني: $\text{نها}^{+}_{س \to أ} ه(س) = \text{نها}^{-}_{س \to أ} ه(س)$

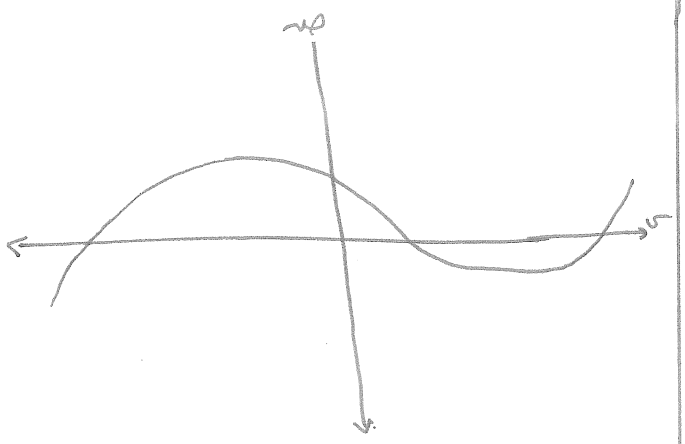
٣) $\text{نها}_{س \to أ} ه(س) = ه(أ)$

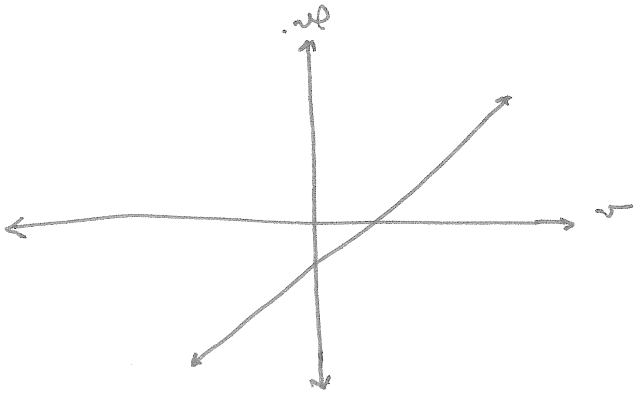
في حال لم يتحقق أي شرط من هذه الشروط يكون الاقتران غير متصل عند $س = أ$ .

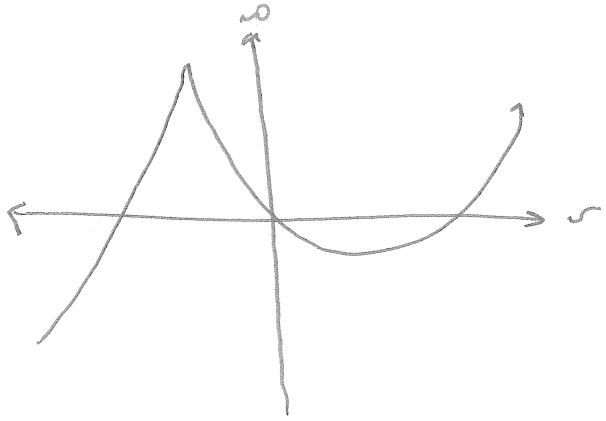
← منه خلال الرسم.

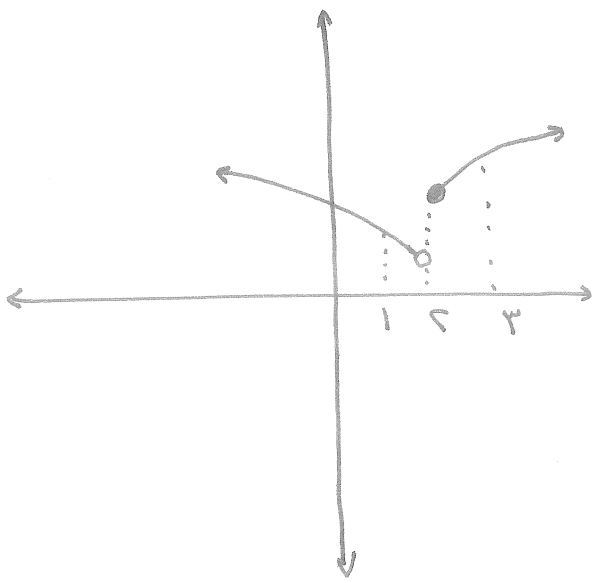
عند رسم منحنى بقلم يجب أنه لا ترفع القلم عن الرسمة بحيث لا يوجد فيه ثقب او قفزة أو انقطاع

فإن منحنى $ه(س)$ يكون متصلا



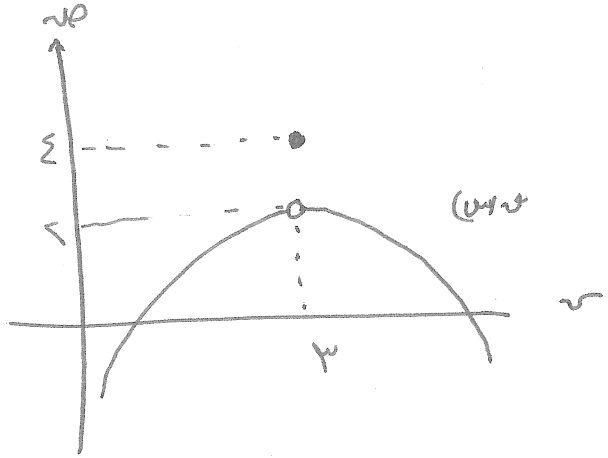






ق(س) متصل عند س = ١

ق(س) " " س = ٣

ق(س) غير متصل عند س = ٢




هل ق(س) متصل عند س = ٣ ؟

وضح إجابتك .

مثال ④ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & ، س > ٠ \\ \frac{س^{٢}}{٤} + ١ & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال عند س = ٠ .

مثال ⑤ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ١٠ & ، س > ٣ \\ س^{٢} + ١ & ، س \leq ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال عند س = ٣ .

**مثال ③** إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & س \neq 3 \\ 5س - 4 & س = 3 \end{cases}$$

ابحث في بد نهال عند $س = 3$

**مثال ④** إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 49}{س - 7} & س \neq 7 \\ 2س & س = 7 \end{cases}$$

ابحث في بد نهال عند $س = 7$.

**مثال ⑤** إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 25}{س - 5} & س \neq 5 \\ س + 5 & س = 5 \end{cases}$$

ابحث في بد نهال عندما $س = 5$

**مثال ⑥** إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - 16}{س - 4} & س \neq 4 \\ 2س & س = 4 \end{cases}$$

ابحث في بد نهال عند $س = 4$

مثال ⑦ إذا كانت

$$و(س) = \begin{cases} س^2 + 2 & ، \quad س < 1 \\ 3س & ، \quad 1 \leq س \leq 3 \\ س^3 - 18 & ، \quad 3 < س \end{cases}$$

ابحث قابلية الاتصال عند

[1] $س = 0$ ، [2] $س = 1$ ، [3] $س = 3$

مثال ⑧ إذا كانت

$$و(س) = \begin{cases} س + 5 & ، \quad س < -1 \\ 9 - س^2 & ، \quad -1 \leq س \leq 3 \\ س^2 - 6 & ، \quad 3 < س \end{cases}$$

ابحث قابلية الاتصال عندما

[1] $س = 3$ [2] $س = -1$

مثال ⑨ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + 3 & ، \ س \geq -1 \\ 5 - س & ، \ -1 < س \leq 1 \\ س^3 - 3 & ، \ س > 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق عندما

$س = 1$ $\quad$ $س = -1$

مثال ⑩ ابحث في الاشتقاق

$ق(س) = س^2 + 3س$ عند $س = 0$

ملاحظة: كثيرات الحدود تكون متصلة على جميع الأعداد الحقيقية

مثال ⑪ $ق(س) = |س|$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $س = 0$

مثال ⑫ $ق(س) = س^2 + 3س^4 + 1$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $س = 0$

مثال ⑬ $ق(س) = 2س^3 - 8س^2 + 6$

ابحث قابلية الاشتقاق عند $س = 1$

## إيجاد المجاهيل

توضيح

إذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} أ & س > ١ \\ ٧ & س \leq ١ \end{cases}$

وكانت $هـ(س)$ متصلة عند $س = ١$

جد قيمة $(أ)$

الجواب $أ = ٧$ لماذا؟

مثال ⑮ إذا كانت

$هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٣} + ٤ & ، س > -٢ \\ أس + ٦ & ، س \leq -٢ \end{cases}$

وكانت الاقترانة $هـ$ متصلة عندما $س = -٢$ فجد قيمة الثابت $أ$.

مثال ⑯ إذا كانت

$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٣٦}{س - ٦} & س \neq ٦ \\ ج & س = ٦ \end{cases}$

جد $ج$ ، إذا كانت $هـ(س)$ متصلة عند $س = ٦$

مثال ⑰ إذا كانت

$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ م س + ٦ & س = ٣ \end{cases}$

وكانت الاقترانة متصلة عندما $س = ٣$ فجد قيمة الثابت $م$.

**مثال (١٧)**

إذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} أس + ٧ & س \geq ٣ \\ س + ١ & س < ٣ \end{cases}$

وكانت $هـ$ متصلاً عندما $س = ٣$ ، جد قيمة الثابت أ.

**مثال (١٨)**

إذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١٠ & س \neq ٢ \\ أ^{٢} س & س = ٢ \end{cases}$

وكانت $هـ(س)$ متصلاً عند $س = ٢$

فجد قيمة الثابت أ .

**مثال (١٩)**

إذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} ٢س + ٦ & س \leq ٣ \\ ب^{٢} + ١٠ & س > ٣ \end{cases}$

جد قيمة ب إذا كانت

$هـ(س)$ متصلاً عند $س = ٣$ .

مثال ⑩ إذا كانت

$$هـ(س) = \begin{cases} س + أ & ، س < ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ ب س + ٦ & ، س > ٢ \end{cases}$$

وكانت هـ(س) متصل عندما س = ٢

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب.

مثال ⑪ إذا كانت

$$و(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١٦} & س \neq ٤ \\ ك & س = ٤ \end{cases}$$

ما قيمة ك إذا كانت و(س) متصل عند س = ٤

مثال ⑫

$$و(س) = \begin{cases} أ س^٢ + ب & ، س < ٢ \\ ١٦ & ، س = ٢ \\ ٣أ س + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$$

فجد قيمة أ ، ب إذا كانت و(س) متصلا عندما س = ٢

**مثال (٣٤)** إذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢أ س + ب & ، س < ٢ \\ ٨ & س = ٢ \\ أ س^{٢} + ٣ب س & س > ٢ \end{cases}$$

وكانت هـ متصلة عندما س = ٢ ، فجد قيمة كل من أ ، ب .

**مثال (٣٥)** إذا كانت

$$ل(س) = \begin{cases} أ س - ب & س < ١ \\ ٤ & س = ١ \\ أ س^{٢} + ب + ٢ & س > ١ \end{cases}$$

وكان ، ل قابلاً للاشتقاق عندما س = ١ ، جد قيمة أ ، ب .

⇐ إذا كان ، لاقترانان ق ، هـ
متصلين عند ما س = أ ، فإن

1. ق + هـ متصل عند س = أ
2. ق − هـ متصل عند س = أ
3. ق × هـ متصل عند س = أ
4. $\frac{ق}{هـ}$ متصل عند س = أ .
   بشرط كانت هـ(أ) ≠ 0

مثال ① إذا كانت ق(س) = $س^3$ + 5 س

$$م(س) = \begin{cases} 5س & ، س \geq 0 \\ س^2 & ، س < 0 \end{cases}$$

وكانت ل(س) = (ق × م)(س)
ابحث في اتصال ل(س) عند س = 0 .

⇐ أولا نبحث في اتصال ق(س)
ثم نبحث في اتصال م(س) عند س = 0 .
ثم نستخدم نظريات في التكامل .

الحل

ملاحظة : عندما يكون احد الاقترانين او كلاهما غير متصل عند س = أ فنقوم بالعملية المطلوبة اولا ثم نبحث في اتصال

مثال ②

$$ق(س) = \begin{cases} س^3 + 5 & س \leq 1 \\ 6س + 4 & س > 1 \end{cases}$$

$$م(س) = \begin{cases} 9 & س > 1 \\ 5س^2 & س \leq 1 \end{cases}$$

وكانت (م + ق)(س) = ق(س) + م(س)
ابحث في اتصال (م + ق)(س) عندما س = 1

مثال ④ إذا كانت $ه(س) = س^2 + ٥$

$$م(س) = \begin{cases} س^2 + ٦ & س \geq -١ \\ ٣٥ - س & س < -١ \end{cases}$$

ابحث قابلية اتصال $ل(س) = ه(س) \times م(س)$ عندما $س = -١$

مثال ④ إذا كانت

$ه(س) = س^2 - ٩$

$$م(س) = \begin{cases} س & س > ٣ \\ ٠ & س = ٣ \\ -س & س < ٣ \end{cases}$$

وكانت $ل(س) = ه(س) \times م(س)$،

فبين أن $ل(س)$ متصل عندما $س = ٣$

* دالة قترانية النسبي هو اقترانه متصل لجميع س جميع ما عدا اصفار المقام

* الاقتران النسبي :
هو ما يمكن كتابته بصورة $\frac{أ}{ب}$

بسط / مقام

مثال ⑤ جد قيم (س) إن وجدت التي يكون عندها الاقتران نسبي متصل في كل مما يلي

[1] $و(س) = س^2 + 2س + 1$

[2] $و(س) = \frac{س^2 - 1}{س + 4}$

[3] $و(س) = \frac{3س + 1}{س - 3}$

[4] $و(س) = \sqrt{3} س + 4 س^2$

[5] $\frac{س + 3}{س}$

[6] $و(س) = \frac{5 س}{س^2 - 4}$

[7] $\frac{3 - س}{س^3 - 1}$

[8] $\frac{س - 3}{س^2 - 5س + 6}$

[9] $\frac{س + 1}{س^2} + \frac{16}{س^2 - 16}$

١٠) $م(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} + ٥س + ٦}$

١١) $و(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - ١} + \frac{٥}{س}$

١٢) $م(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \ س < ٢ \\ ٦ - س & ، \ س \geq ٢ \end{cases}$

١٣) $و(س) = \begin{cases} ٥س & ، \ س > ٥ \\ س^{٢} & ، \ س \leq ٥ \end{cases}$

١٤) $و(س) = \frac{١}{س} + \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٣س}$

١٥) $و(س) = \frac{س^{٢} - ٥س}{س^{٢} - ٣س + ٢}$

## السؤال الأول

(أ) جد كلا من النهايات الآتية:

(1) $\lim_{س \to 3} \frac{س^3 + 5س^2 + 6س}{(س^2 - 9)}$

(2) $\lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{4س + 9} - 5}{س^2 - 16}$

(3) $\lim_{س \to 2} \frac{2س^3 - 16}{ك س^2 + 4ك - 12}$

(ب) إذا كانت $\lim_{س \to 1} (ق(س) - 1) = 4$

فجد $\lim_{س \to 1} ق(س)$

(ج) جد $\lim_{س \to 1} (3 ق(س) + ق(س)^2 - 3)$

## السؤال الثاني:

(أ) جد قيمة أ إذا كانت $\lim_{س \to 2} (أ س^2 + 3س + 6) = 24$

(ب) $ق(س) = \begin{cases} أ س + 1 & س < 3 \\ ك^2 + 7 & س \geq 3 \end{cases}$

إذا كانت $\lim_{س \to 3} ق(س)$ موجودة

جد قيمة الثابت أ.

## السؤال الثالث:

(أ) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{ك^3 - 8}{ك - 2} & ك \neq 2 \\ 4 & ك = 2 \end{cases}$

فبين هل $\lim_{س \to 2} ق(س)$ عندما $ك = 2$

(ب) إذا كان

$ق(س) = \begin{cases} 2أ س^2 + ب & س > 1 \\ 7 & س = 1 \\ س^2 - 4ب - 6 & س < 1 \end{cases}$

وكانت $ق$ متصلة عند $س = 1$

فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب.

## السؤال الرابع:

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة.

(1) إذا كانت $ق(س) = \frac{15}{ك^2 + ك - 2}$

فإن قيم س التي تجعل $ق$ غير متصلة هي

أ) $\{2, -1\}$  ب) $\{-2, -1\}$

ج) $\{1, 2\}$  د) $\{-2, 1\}$

[2] إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٨$ فإن $\lim_{س \to ٣} ق(س)^{٢}$ تساوي .

أ) ٤ ب) ٦٤

ج) ٩ د) ١٦

[3] $\lim_{س \to ٠} (س^{٢} + ٣س + ٥)$ تساوي .

أ) ٣ ب) ٥

ج) ٨ د) صفر

[4] $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ - س}{٣ - س}$ تساوي .

أ) $-١$ ب) صفر

ج) غير موجودة د) ١

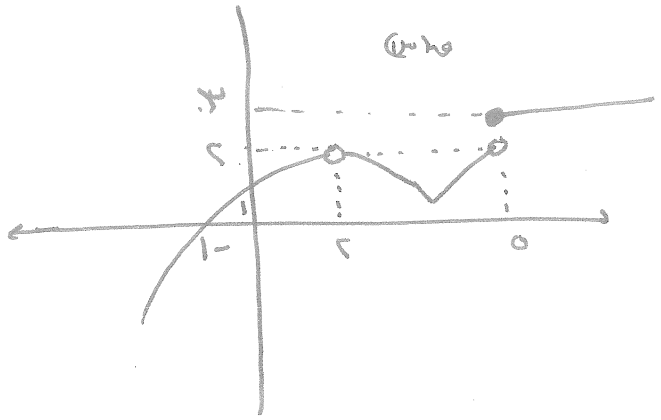
[5] $\lim_{س \to ١٠} \frac{س^{٢} + ١}{س}$ تساوي .

أ) صفر ب) ٢

ج) $\frac{٢}{٥}$ د) ٣

[6] اعتمد على الشكل المجاور .

تقاطع عدد الأعداد تنتمي :




أ) $\{٢ ، ٥\}$ ب) $\{-١ ، ٢ ، ٥\}$

ج) $\{٥\}$ د) $\{-١\}$