الرياضيات

المنهاج الجديد

النهايات والاتصال

الفرع العلمي

والصناعي

إعداد

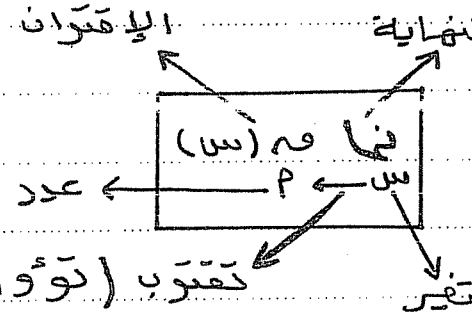
حمد الله الطوباسي

الفصل الأول: النهايات

الدرس الأول :

أولاً: مفهوم النهاية

النهاية: سلوك الإقتران عندما يقترب متغيره من قيمة معينة حتى لو لم يكن الإقتران معرفاً عند هذه القيمة ، ويرمز لها بالرمز (نها)



نها ه(س) = ؟
س ← أ

تقرأ : نهاية ه(س) عندما
س تقترب (تؤول) من أ

لاحظ س ← أ تعني
* س تقترب من أ
* س ≠ أ

هذا يعني وجود حالتين لإقتراب المتغير (س) من القيمة (أ)

حالة (١)

س > أ بقليل س ← أ⁺

س تقترب من (أ) من جهة اليمين

حالة (٢)

س < أ بقليل س ← أ⁻

س تقترب من (أ) من جهة اليسار

توضيح

أ) س ← ٢⁺

س ≈ ٢٫٠٠١ ، ٢٫٠١ ، ٢٫١

ب) س ← ٤⁻

س ≈ ٣٫٩٩٩ ، ٣٫٩٩ ، ٣٫٩

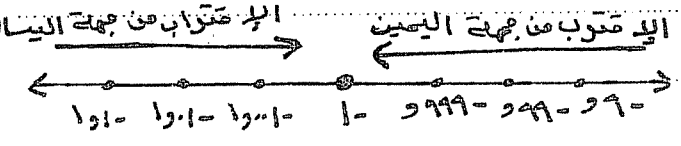
ج) س ← -١

* س ← -١⁺

س ≈ -٠٫٩٩٩ ، -٠٫٩٩ ، -٠٫٩

* س ← -١⁻

س ≈ -١٫٠٠١ ، -١٫٠١ ، -١٫١



قاعدة

لإيجاد النهاية عند نقطة نتبع مايلي:

① نجد نها ه(س)
س ← أ

② نجد ه(أ)

③ نعمل مقارنة

* $\lim_{س \to ب^+} م(س) = \lim_{س \to ب^-} م(س) = جـ$

$\lim_{س \to ب} م(س)$ موجودة $= جـ$

* $\lim_{س \to ب^+} م(س) \neq \lim_{س \to ب^-} م(س)$

$\lim_{س \to ب} م(س)$ غير موجودة

الجزء الأول :
١- إيجاد النهاية من خلال الجدول و الرسم

مثال (١) إذا كان $م(س) = ٣س + ١$

جد $\lim_{س \to ٢} م(س)$ مستخدماً

① الجدول ② الرسم

الحل

① $\lim_{س \to ٢} م(س)$ مستخدماً الجدول

$س \to ٢^+$							$س \to ٢^-$
س	١و٢	١و٠١	١و٠٠١	٢	١و٩٩٩	١و٩٩	١و٩
$م(س)$	٤و٢	٤و٠٣	٤و٠٠٣		٤و٩٩٨	٤و٩٩٨	٤و٩٨

$\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ٥$ ← ٥ → $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

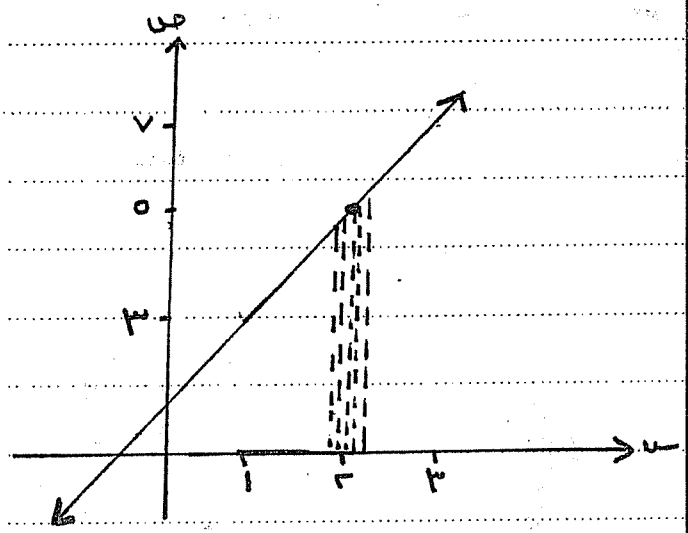
$\lim_{س \to ٢} (س) = ٥$

② $\lim_{س \to ٢} م(س)$ مستخدماً الرسم

يجب رسم الإقتران مع مراعاة مجاله

س	١	٢	٣
ص	٤	٥	٧

جدول لرسم الإقتران



$\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = ٥$

مثال (٢) كتاب

إذا كان $م(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ ، ادرس سلوك الإقتران $م(س)$ عندما تقترب قيم س من العدد ١

الحل مجال $م(س) = ح - \{$أصفار المقام$\}$

$ح - \{١\}$

$م(س) = \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}$

$م(س) = س + ١$

ندرس السلوك عن طريق الجدول

$س \to ١^+$							$س \to ١^-$
س	١و١	١و٠١	١و٠٠١	١	٠و٩٩٩	٠و٩٩	٠و٩
$م(س)$	٢و١	٢و٠١	٢و٠٠١		١و٩٩٩	١و٩٩	١و٩

$\lim_{س \to ١^+} م(س) = ٢$ ← ٢ → $\lim_{س \to ١^-} م(س) = ٢$

$\lim_{س \to ١} م(س) = ٢$

خذ (س) السلوك عن طريق الرسم

$م(س) = \frac{س^2 - 1}{س - 1} = س + 1$

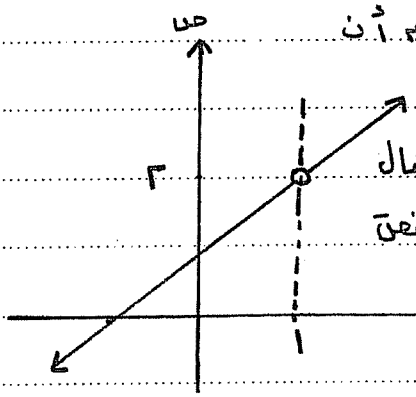
المجال $]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$

لاحظ في الرسم أن

م(1) غير معرفه

لأن (1) خارج المجال

لهذا السبب وفق وجوده



$\lim_{س \to 1^+} م(س) = ٢$

$\lim_{س \to 1^-} م(س) = ٢$

$\lim_{س \to 1} م(س) = ٢$

مثال (٣) $م(س) = \begin{cases} ٣ & ، س = ١ \\ س^2 + ١ & ، س \neq ١ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٠} م(س)$ مستعيناً

① الجدول ② الرسم

الحل $\lim_{س \to ٠} م(س)$ مستعيناً الجدول

$س \to ٠^+$ $س \to ٠^-$ $س \to ٠$

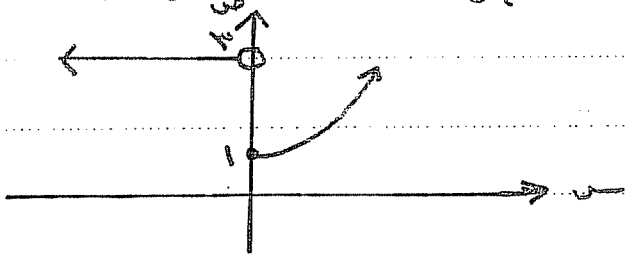
س	١	٠.١	٠.٠١	٠.٠٠١	٠	-٠.٠٠١	-٠.٠١	-٠.١	-١
م(س)	١.١	١.٠١	١.٠٠١	١.٠٠٠١		٣	٣	٣	٣

$س \to ١ \neq ٣$

$\lim_{س \to ٠^+} م(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٠^-} م(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٠} م(س)$ غ.م

② $\lim_{س \to ٠} م(س)$ مستعيناً الرسم



$\lim_{س \to ٣^+} م(س) = ١$ ، $\lim_{س \to ٣^-} م(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٣} م(س)$ غ.م

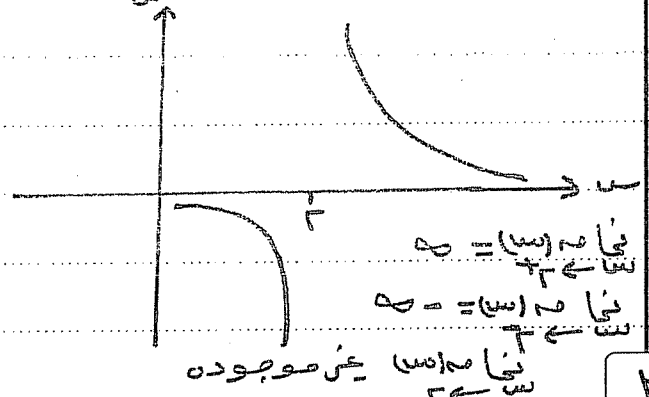
الجزء الثاني :
ايجاد نهاية اقتران من رسمه جاهزه

ملاحظات هامه

① عند إيجاد نهاية اقتران تقترب قيم المتغير (س) من العدد (أ) يجب أن يكون الاقتران معرفاً على يمين العدد (أ) وعلى يسار العدد (أ)، وليس من الضروري أن يكون الاقتران معرفاً عند العدد (أ) نفسه

② النهاية غير موجوده عند أطراف المجال أو عند بداية و نهاية الفتره

③ النهايه غير موجوده إذا اقتربت قيمة من ∞ أو $-\infty$ عندما تقترب س من عدد حقيقي معين



$\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \infty$

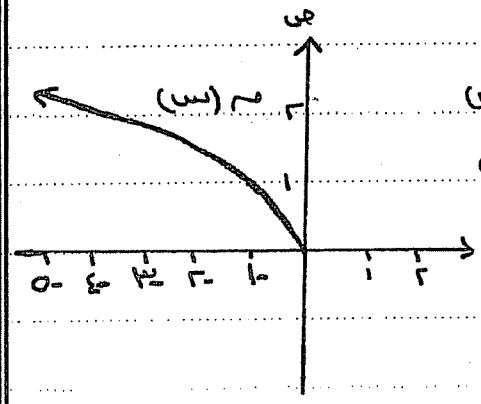
$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = -\infty$

$\lim_{س \to ٢} م(س)$ غير موجوده

٤ النهايات غير الموجودة عند القفزات

مثال (١) كتاب

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $م(س) = \frac{|س|}{س}$ جد كلاً مما يلي



① $\lim_{س \to +} م(س)$

② $\lim_{س \to -} م(س)$

③ $\lim_{س \to .} م(س)$

④ $\lim_{س \to -١} م(س)$

⑤ $\lim_{س \to ١} م(س)$

الحل

① $\lim_{س \to +} م(س)$ غير موجودة

② $\lim_{س \to .} م(س) = .$

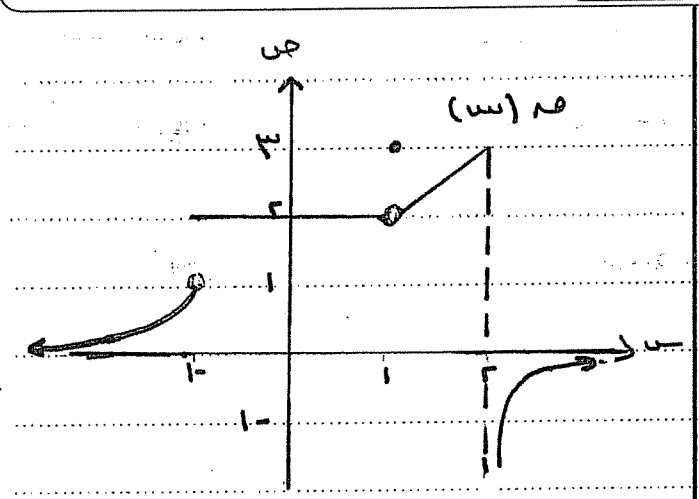
③ $\lim_{س \to -١} م(س)$ غير موجودة

④ $\lim_{س \to ١} م(س) = ١$

⑤ $\lim_{س \to ١} م(س)$ غير موجودة

مثال (٢) كتاب

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $م(س)$ جد كلاً مما يلي



الحل

① $\lim_{س \to +} م(س) = ٣$

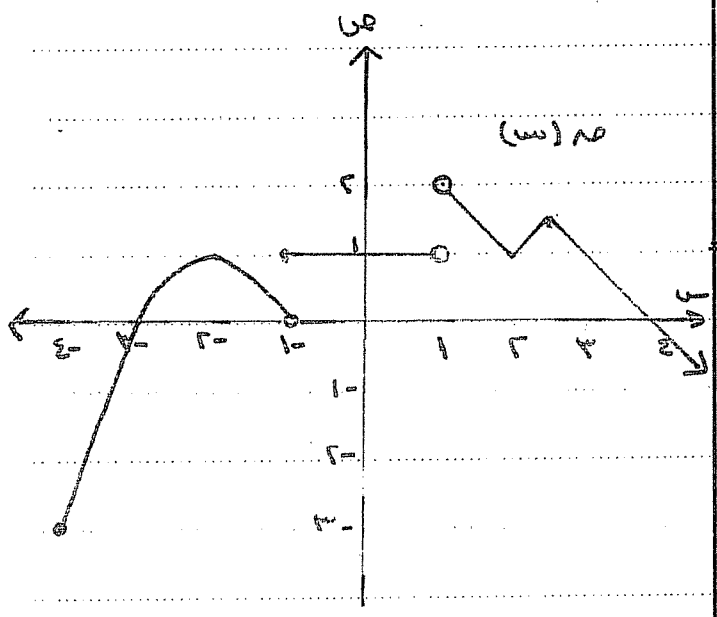
② $\lim_{س \to -١} م(س)$ غير موجودة

③ $\lim_{س \to .} م(س) = ٢$

④ $\lim_{س \to ٢} م(س) = ٣$

مثال (٣) كتاب

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $م(س)$ جد كلاً مما يأتي



① مجموعة قيم (P) حيث $\lim_{س \to P} م(س) = ١$

② مجموعة قيم $د$ حيث $\lim_{س \to د} م(س) = ١$

③ مجموعة قيم $ك$ حيث $\lim_{س \to ك} م(س)$ غير موجودة

مثال (٤) كتاب

معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $م(س)$ المعرف على ح جد كلاً مما يلي

① $\lim_{س \to ١} م(س)$

② $\lim_{س \to -١} م(س)$

③ $\lim_{س \to .} م(س)$

④ $\lim_{س \to ٣} م(س)$

④ مجموعة قيم ل حيث $\lim_{س \to ل} م(س) =$ صفراً

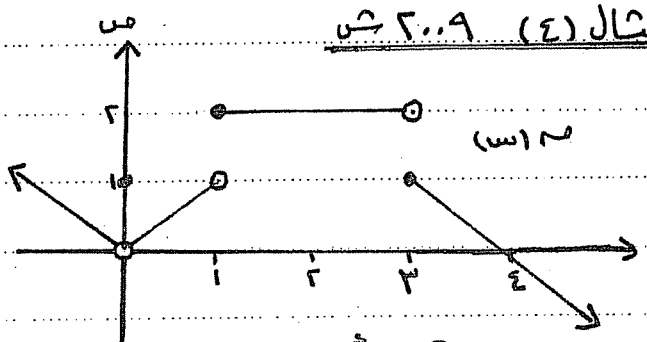
الحل ① $(-١، ١) \cup \{-٢، ٢، ٣\}$

② $[-١، ١) \cup \{-٢، ٢، ٣\}$

③ $\{-١، ١، -٤\}$

④ $\{-٣، ٤\}$

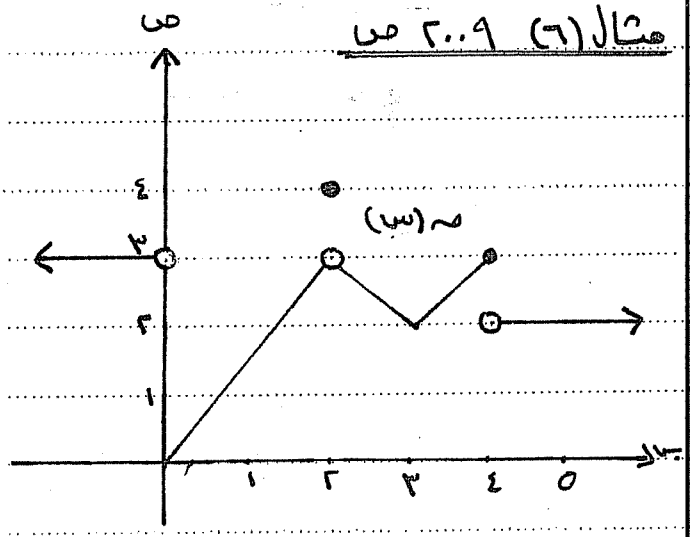
مثال (٤) ٢٠٠٩ ش



إذا كان الشكل أعلاه يمثل منحنى الدالة م المعرف على ح ، فإن مجموعة قيم (أ) حيث $\lim_{س \to أ} م(س)$ غير موجود هي

الحل $أ = \{١، ٣\}$

مثال (٦) ٢٠٠٩ ص

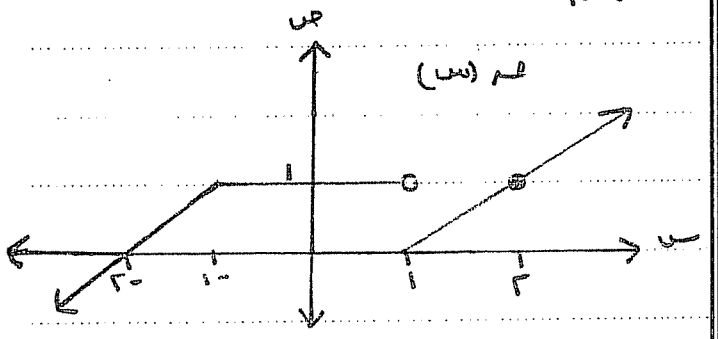


إذا كان الشكل في الأعلى يمثل منحنى الدالة م (س) المعرف على ح ، فإن مجموعة قيم (أ) حيث $\lim_{س \to أ} م(س) = ٣$ هي

الحل $(-\infty، ٠) \cup \{٣\}$

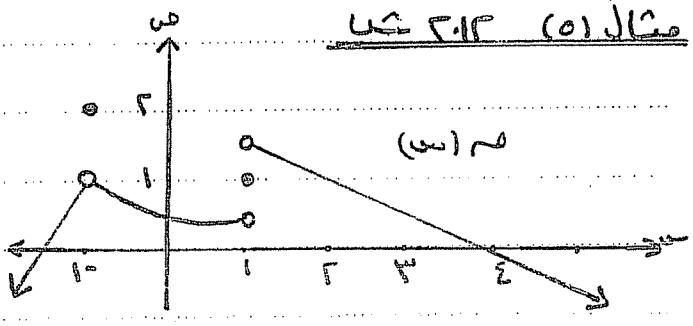
مثال (٧) ٢٠١٣ ص

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى م المعرف على ح ، فإن قيم س التي يجعل $\lim_{س \to س_١} م(س) = ١$ هي



الحل $[-١، ١) \cup \{٣\}$

مثال (٥) ٢٠١٣ ش

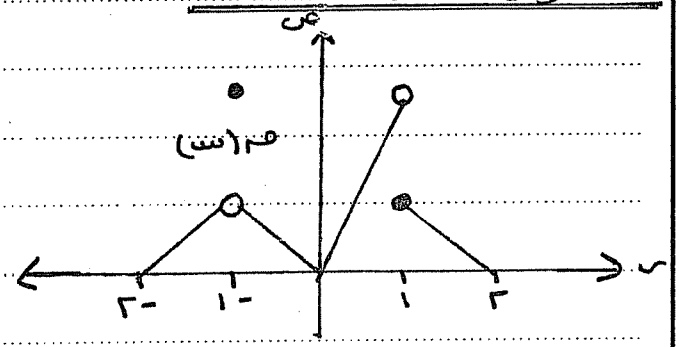


إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة م (س) المعرف على ح ، فإن مجموعة قيم (أ) حيث $\lim_{س \to أ} م(س) = ١$ هي

الحل $أ = \{-١، ٣\}$

ورقة عمل (١)

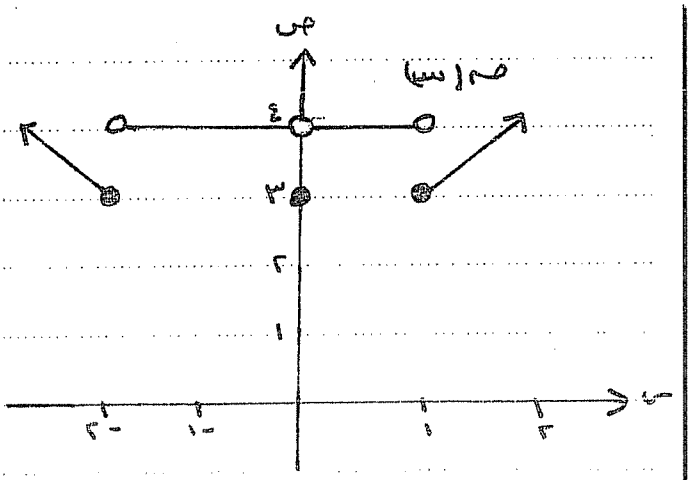
السؤال الأول : ٢٠١١ م



يمثل الشكل أعلاه منحنى الاقتران م(س) المعرف على $[-٣, ٢]$ حيث مجموعة قيم (P)، بحيث $\lim_{س \to P} م(س)$ = صفر

$P \in \{-٢, ١\}$

السؤال الثاني ٢٠١٠ ش

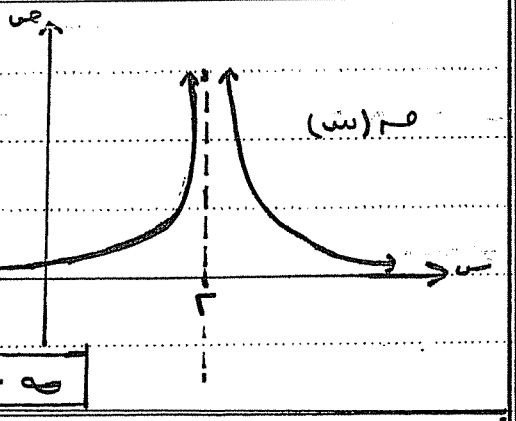


يمثل الشكل أعلاه منحنى م(س) المعرف على $\mathbb{R}$، فإن مجموعة قيم (P) حيث $\lim_{س \to P} م(س)$ هي $\mathbb{R} - \{٣\}$

$P = ٣$

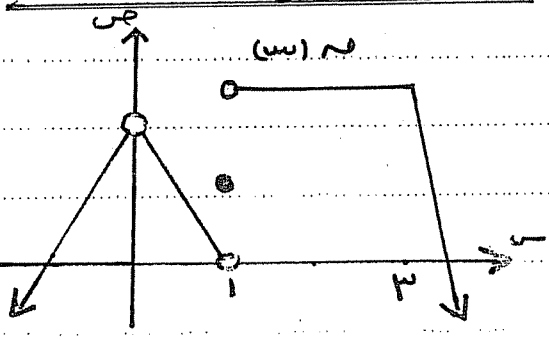
السؤال الثالث

معتمداً الشكل المجاور جد $\lim_{س \to ٣}$ م(س)



$\lim_{س \to ٢}$ م(س) غير موجودة

السؤال الرابع : ٢٠١١ ش



يمثل الشكل أعلاه منحنى م(س) المعرف على $\mathbb{R}$ فإن مجموعة قيم ل حيث $\lim_{س \to ل}$ م(س) غير موجودة هي $\{١\}$

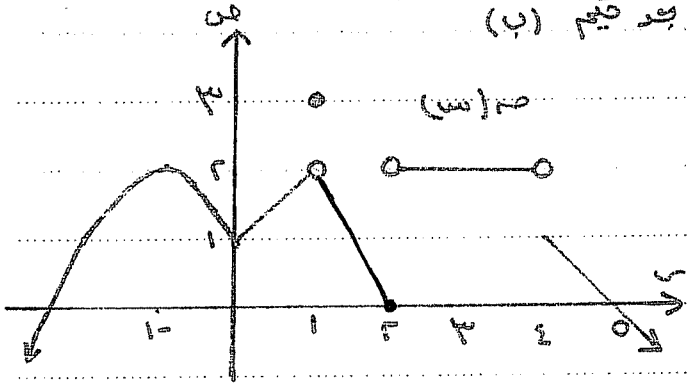
ل = ١

السؤال الخامس : ٢٠١٦ ش

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران م(س) : س ∈ ح، أجب عن كل مما يأتي

١) إذا كانت $\lim_{س \to P}$ م(س) = ٣ ، جد قيم (P)

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ب}$ م(س) غير موجودة ، جد قيم (ب)



الدرس الثاني :

ثانياً : نظريات النهايات

تعلمت سابقاً إيجاد نهاية اقتران عند عدد من خلال الجدول أو التمثيل البياني ، والآن ستتعلم حساب نهاية اقتران عند عدد باستخدام نظريات وقواعد خاصة بالنهايات

نظرية (١)

نهاية اقتران كثير الحدود عند عدد تحسب بالتعويض المباشر

النهاية = الصورة

ق(س) كثير حدود فإن

$\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

مثال (١)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٥}$ ٣

الحل $\lim_{س \to ٥}$ ٣ = ٣

② $\lim_{س \to ٣}$ -٤

الحل $\lim_{س \to ٣}$ -٤ = -٤

③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ جا س

الحل $\lim_{س \to ٠}$ جا س = جا ٠ = ٠

④ $\lim_{س \to ٣}$ ع ، س ، ع عدد ثابت

الحل $\lim_{س \to ٣}$ ع = ع

⑤ $\lim_{س \to ٢}$ (٦ س - ٣)

الحل ٦ × ٢ - ٣ = ٩

⑥ $\lim_{س \to -٢}$ (٣ س^{٣} - ٨ س)

الحل ٣ × -٢ + ٨ = ٦

⑦ $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٣} + ٣ س^{٢} + س + ٤)^{٣}

الحل (-٨ + ٨ - ٢ + ٤)^{٣} = (٣)^{٣} = ٨

⑧ $\lim_{س \to ٢}$ (س - ١) (س^{٢} + ٣ س - ١)

الحل ١ × ١١ = ١١

مثال (٢)

إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ (س^{٣} + ب س + ٦) = ١٨

جد قيمة الثابت (ب)

الحل ٨ + ٣ ب + ٦ = ١٨

٣ ب = ٤

ب = ٣

الحل $\lim_{س \to ٠}$ جا س / س = ١

⑨ $\lim_{س \to ٣}$ ع ، س ، ع عدد ثابت

الحل $\lim_{س \to ٣}$ ع = ع

⑩ $\lim_{س \to ٢}$ (٦ س - ٣)

الحل ١٢ - ٣ = ٩

⑪ $\lim_{س \to -٢}$ (٣ س^{٣} - ٨ س)

الحل -٢ + ٨ = ٦

⑫ $\lim_{س \to -٢}$ (س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤)^{٣}

الحل (-٨ + ٨ - ٢ + ٤)^{٣} = (٣)^{٣} = ٨

⑬ $\lim_{س \to ٢}$ (س - ١) (س^{٢} + ٣ س - ١)

الحل ١ × ١١ = ١١

نظرية (٢)

إذا كان م(س) اقتران نسبي وأراد نهاية الاقتران عند عدد مثل (أ) ليس من أصفار المقام، فإن النهاية تساوي التعويض المباشر

$$\lim_{س \to أ} م(س) = م(أ) \text{ ، حيث}$$
أ ليس من أصفار المقام

مثال (٣)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to -١} \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٥س}$

الحل $\frac{٤}{٤} = ١$

② $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٤} + ١}$

الحل $\frac{٦}{٢} = ٣$

③ $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س - ١}{س^{٢} + ١} + س + ٣ \right)$

الحل $\frac{١}{٥} + ٥ = \frac{٢٦}{٥}$

④ $\lim_{س \to -٣} (٣س + ٤)^{-٢}$

الحل $\lim_{س \to -٣} \frac{١}{(٣س + ٤)^{٢}}$

$= \frac{١}{(-٩ + ٤)^{٢}} = \frac{١}{(-٥)^{٢}}$

$= \frac{١}{٢٥}$

مثال (٤)

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{ب - ٢س^{٢}}{٥ + ٣س} = \frac{١}{٤}$

جد قيمة الثابت ب

الحل $\frac{ب - ٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

$\frac{ب - ٢}{٢} = ١ \Leftarrow ب - ٢ = ٢$

$ب = ٤$

نظرية (٣)

النهاية تتوزع على جميع العمليات الحسابية

إذا كانت $\lim_{س \to أ} م(س) = ب$

$\lim_{س \to أ} هـ(س) = ج$ ، فإن

① $\lim_{س \to أ} [م(س) \times هـ(س)] = \lim_{س \to أ} م(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ب \times ج$

② $\lim_{س \to أ} [م(س) \pm هـ(س)]$

$= \lim_{س \to أ} م(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س) = ب \pm ج$

③ $\lim_{س \to أ} [م(س) \times هـ(س)]$

$= \lim_{س \to أ} م(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ب \times ج$

④ $\lim_{س \to أ} \frac{م(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} م(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ب}{ج}$

شرط $ج \neq ٠$ ، نهايات المقام $\neq$ صفر

⑤ $\lim_{س \to أ} [م(س)]^{ن} = [\lim_{س \to أ} م(س)]^{ن} = (ب)^{ن}$

⑥ $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{م(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} م(س)} = \sqrt[ن]{ب}$

تستخدم هذه النظرية لحساب نهايات المقترانات المجهولة ، عندما تحتوي النهاية على رموز اقترانات مجهولة مثل م(س) ، هـ(س) - - -

ومن هذا النوع يحتوي السؤال على معطيات و مطلوب

خطوات الحل :

١) تجهيز المعطى (عن طريق نظرية (٣))

$\lim_{س \to ٤} (م(س)) = ؟$

٢) ايجاد المطلوب (عن طريق نظرية (٣))

ملاحظة

لا يجوز استخدام نظرية (٣) إذا كانت اسس النهايات تعتمد على الأصل غير موجودة

مثال (٤)

إذا كانت $\lim_{س \to ٤} م(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = -٢$ ، جد ما يلي :

① $\lim_{س \to ٤} (٢ م(س) - ٥ هـ(س))$

② $\lim_{س \to ٤} \left(\frac{هـ(س) + ٥}{٦ م(س)}\right)$

③ $\lim_{س \to ٤} (هـ^٣(س) \times م(س) - ٨)$

④ $\lim_{س \to ٤} \sqrt{(م(س) \times هـ(س))^٢ + ١٢ - س^٣}$

الحل

① $\lim_{س \to ٤} (٢ م(س) - ٥ هـ(س))$

$= \lim_{س \to ٤} ٢ م(س) - \lim_{س \to ٤} ٥ هـ(س)$

$= ٢ \times ٣ - ٥ \times -٢ = ٦ + ١٠ = ١٦$

② $\lim_{س \to ٤} \frac{هـ(س) + ٥}{٦ م(س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٤} (هـ(س) + ٥)}{\lim_{س \to ٤} ٦ م(س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٤} هـ(س) + \lim_{س \to ٤} ٥}{٦ \times \lim_{س \to ٤} م(س)} = \frac{-٢ + ٥}{٦ \times ٣} = \frac{٣}{١٨}$

③ $\lim_{س \to ٤} (هـ^٣(س) \times م(س) - ٨)$

$= \lim_{س \to ٤} هـ^٣(س) \times \lim_{س \to ٤} م(س) - \lim_{س \to ٤} ٨$

$= (\lim_{س \to ٤} هـ(س))^٣ \times ٣ - ٨$

$= (-٢)^٣ \times ٣ - ٨$

$= -٢٤ - ٨ = -٣٢$

④ $\lim_{س \to ٤} \sqrt{(م(س) \times هـ(س))^٢ + ١٢ - س^٣}$

$= \sqrt{(\lim_{س \to ٤} م(س) \times \lim_{س \to ٤} هـ(س))^٢ + \lim_{س \to ٤} ١٢ - س^٣}$

$= \sqrt{(٣ \times -٢)^٢ - ٤} = \sqrt{٣٢} = ٢$

مثال (٥)

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} (٣ م(س) - ٥ س) = ١٧$

جد $\lim_{س \to ٣} م(س)$

الحل

$\lim_{س \to ٣} (٣ م(س) - ٥ س) = ١٧$

$٣ \lim_{س \to ٣} م(س) - ٥ \lim_{س \to ٣} س = ١٧$

$٣ \lim_{س \to ٣} م(س) - ١٥ = ١٧$

$٣ \lim_{س \to ٣} م(س) = ٣٢$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٩$

المطلوب $\lim_{س \to ٣} م^٢(س) = (\lim_{س \to ٣} م(س))^٢$

$= (٩)^٢ = ٨١$

مثال (٦) كتاب

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} ع(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٣} ل(س) + ١ = ٧$ ، جد كلاً مما يأتي

① $\lim_{س \to ٣} (ع^{٣}(س) - ل^{٢}(س))$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{ل(س)}{ع(س) + ٣س - ١}$

الحل

* $\lim_{س \to ٣} ع(س) = ١٠$

$٣ \lim_{س \to ٣} ع(س) = ١٠ \leftarrow$ $\boxed{\lim_{س \to ٣} ع(س) = ٥}$

* $\lim_{س \to ٣} ل(س) + ١ = ٧$

$\lim_{س \to ٣} ل(س) + \lim_{س \to ٣} ١ = ٧$

$\lim_{س \to ٣} ل(س) + ١ = ٧$

$٣ \lim_{س \to ٣} ل(س) = ٦$ $\boxed{\lim_{س \to ٣} ل(س) = ٣}$

الطلوب

① $\lim_{س \to ٣} (ع^{٣}(س) - ل^{٢}(س))$

$= (\lim_{س \to ٣} ع(س))^{٣} - (\lim_{س \to ٣} ل(س))^{٢}$

$= ٥^{٣} - ٣^{٢} = ١٢٥ - ٩ = ١١٦$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{ل(س)}{ع(س) + ٣س - ١}$

$= \frac{\lim_{س \to ٣} ل(س)}{\lim_{س \to ٣} ع(س) + \lim_{س \to ٣} ٣س - \lim_{س \to ٣} ١}$

$= \frac{\lim_{س \to ٣} ل(س)}{\lim_{س \to ٣} ع(س) + ٣ \lim_{س \to ٣} س - ١}$

$= \frac{٣}{٥ + ٣ - ١} = \frac{٣}{٧}$

مثال (٧) ٢٠١١ شس

إذا كان $م(س)$ كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ٢} \frac{م(س)}{س} = ٣$ ، جد $\lim_{س \to ٢} \frac{م^{٢}(س)}{س}$

الحل

$\lim_{س \to ٢} \frac{م(س)}{س} = ٣ \leftarrow \frac{\lim_{س \to ٢} م(س)}{\lim_{س \to ٢} س} = ٣$

$\frac{\lim_{س \to ٢} م(س)}{٢} = ٣ \leftarrow$ $\boxed{\lim_{س \to ٢} م(س) = ٦}$

الطلوب

$\lim_{س \to ٢} \frac{م^{٢}(س)}{س} = \frac{(\lim_{س \to ٢} م(س))^{٢}}{\lim_{س \to ٢} س}$

$= \frac{٣٦}{٢} = ١٨$

مثال (٨) كتاب

إذا كان $م(س)$ كثير حدود يمر بالنقط $(-٣، ٤)$، وكانت $\lim_{س \to -٣} (س - ل(س)) = -١٠$

جد $\lim_{س \to -٣} (م^{٢}(س) - ٣ل(س))$

الحل

* $\lim_{س \to -٣} م(س) = م(-٣)$ (كثير حدود)

النهاية = الصورة = ٤

* $\lim_{س \to -٣} س - ل(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -٣} س - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$-٣ - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$- \lim_{س \to -٣} ل(س) = -٧$

$\boxed{\lim_{س \to -٣} ل(س) = ٧}$

الطلوب $\lim_{س \to -٣} (م^{٢}(س) - ٣ل(س))$

$= (\lim_{س \to -٣} م(س))^{٢} - ٣ \lim_{س \to -٣} ل(س)$

$= ١٦ - ٣ \times ٧ = ٣$

مثال (٩) كتاب

إذا كان $ع(س)$ كثير حدود باقي قسمته على $(س-٢)$ يساوي (٥)

جد $\lim_{س \to ٢} \frac{ع(٣س) + ٤س^{٢}}{س-٢}$

الحل حسب نظرية الباقي

$س-٢=٠ \leftarrow س=٢$

$ع(٢) = ٥$

المطلوب : $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ع(س) + ٤س^{٢}}{س-٢}$

$= ٣ \lim_{س \to ٢} \frac{ع(س)}{س-٢} + ٤ \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢}}{س-٢}$

لاحظ $\lim_{س \to ٢} \frac{ع(س)}{س-٢} = ع'(٢)$ كثير حدود

$= ٣ \times ٥ + ١٦ = ١٥ + ١٦ = \boxed{٣١}$

ملاحظة

لإيجاد نهاية تركيب اقترانين

$\lim_{س \to ٢} م(هـ(س))$

نفرض $ص = هـ(س)$

مثال (١٠)

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} م(س) = ٨$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = ٦$ ، جد $\lim_{س \to ٣} \frac{م(٢س-٣) - ٣م(٢س-١١)}{س-٣}$

الحل

$\lim_{س \to ٣} \frac{م(س)^{٢} - ٣م(٢س-١)}{س-٣}$

$٦^{٢} - ٣ \times \lim_{س \to ٣} \frac{م(٢س-١)}{س-٣}$

نفرض $ص = (٢س-١)$

$س \to ٣$ ، $ص \to ٤-١$ $ص \to ٣$

$= ٣٦ - ٣ \times \lim_{ص \to ٣} \frac{م(ص)}{ص-٣}$

$= ٣٦ - ٣ \times ٨$

$= ٣٦ - ٢٤ = \boxed{١٢}$

مثال (١١) ٢٠٠٧ ش

إذا كان $\lim_{س \to ٣} م(س) = ٤$ ، $م(٣) = ٦$

جد قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{م^{٢}(٢س+١) - ٢س+٣}{س-١}$

أ) ١٧ ب) ١٣ ج) ١٠ د) ٣٧

الحل $\lim_{س \to ١} \frac{(م(٢س+١))^{٢} - س+٢}{س-١}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(م(٢س+١))^{٢} + ١}{س-١}$

$م(٣س+١)$ $ص = ٢س+١$

$س \to ١$ ، $ص \to ٣$

$= (\lim_{ص \to ٣} \frac{م(ص)}{ص-٣})^{٢} + ١ = (٤)^{٢} + ١$

$= ١٦ + ١ = \boxed{١٧}$

نهاية الجذور الفردية

نهاية الجذور الفردية تحل بالتعويض المباشر

مثال (١٢) جد كل من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{٩س-٤}}{س-٤}$

الحل $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt[٣]{٩س-٤}}{س-٤} = \frac{\sqrt[٣]{٣٢}}{٢} = \frac{٢}{٢}$

② $\lim_{س \to -٢} \frac{(\sqrt[٣]{س+٦} + ٤س)}{س+٢}$

الحل $\lim_{س \to -٢} \frac{(\sqrt[٣]{س+٦} + ٤س)}{س+٢} = ٠ + ١٦ = \boxed{١٦}$

③ $\lim_{س \to -٧} \frac{(س\sqrt[٣]{س-١} + ٢)}{س+٧}$

الحل $\lim_{س \to -٧} \frac{(س\sqrt[٣]{س-١} + ٢)}{س+٧} = -٧ \times -٢ + ٢$

$= ١٤ + ٢ = \boxed{١٦}$

نهاية الجذور التربيعية

يتم التعويض المباشر ونتبع إشارة ناتج تعويض ما داخل الجذر

1. إشارة ناتج التعويض موجبة تكون النهاية موجودة وتساوي جواب الجذر
2. إشارة ناتج التعويض سالبة تكون النهاية غير موجودة
3. ناتج التعويض = صفراً هنا نبحث في مجال الجذر، ونجد النهاية من اليمين واليسار حيث أن النهاية من الجهة التي تكون فيها الإشارة موجبة تساوي صفراً والنهاية من الجهة التي تكون الإشارة فيها سالبة غير موجودة وتكون النهاية موجودة بشكل عام إذا تساوت الإشارة من الجهتين موجبة

مثال (١٣) جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to -٣} \sqrt{س+٣}$ (كتاب)

الحل $\lim_{س \to -٣} \sqrt{س+٣} = \sqrt{٠} = ٠$

② $\lim_{س \to ٣} (س+١) \sqrt{س^٢+٣١}$ (كتاب)

الحل $\lim_{س \to ٣} (س+١) \sqrt{س^٢+٣١} = ٤ \times \sqrt{٣٢} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

③ $\lim_{س \to ٨} \frac{٥-س}{\sqrt{س+١}}$

الحل $\frac{٥-س}{\sqrt{س+١}} = \frac{-٣}{٣} = -١$

④ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س-٧}$ (كتاب)

الحل $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س-٧} = \sqrt{-٢}$ غير موجودة

⑤ $\lim_{س \to ٤} \sqrt{٣س-س^٢}$

الحل $\lim_{س \to ٤} \sqrt{٣س-س^٢} = \sqrt{-٤}$

النهاية غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س-٤}$

الحل $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س-٤} = \sqrt{٠}$ (مشكلة)

نبحث في مجال الجذر

$س-٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} \sqrt{س-٤} = ٠$

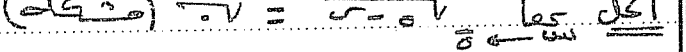
$\lim_{س \to ٤^-} \sqrt{س-٤}$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٤} \sqrt{س-٤}$ غير موجودة

⑦ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{٥-س}$ (كتاب)

الحل $\lim_{س \to ٥} \sqrt{٥-س} = \sqrt{٠}$ (مشكلة)

نبحث في المجال

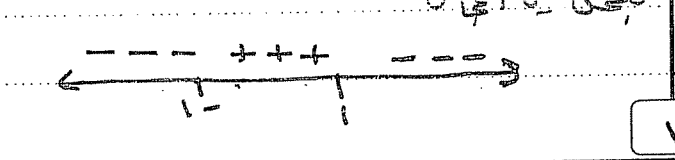


$\lim_{س \to ٥} \sqrt{٥-س} =$ صفراً

⑧ $\lim_{س \to ١} \sqrt{١-س^٢}$ (كتاب)

الحل $\lim_{س \to ١} \sqrt{١-س^٢} = \sqrt{٠}$ (مشكلة)

نبحث في المجال



نهـا $\frac{1}{س-2}$ غير موجوده
$س \to 2^+$

نهـا $\frac{1}{س-2}$ = صفراً
$س \to 2$

نهـا $\frac{1}{س-2}$ غير موجوده
$س \to 2^-$

⑨ نهـا $\frac{س^2+4س+4}{(س+2)(س-3)}$ (كتاب)
$س \to -2$

الحل نهـا $\frac{(س+2)^2}{(س+2)(س-3)}$ = $\frac{0}{-5}$ = صفر (مشكله)
$س \to -2$

نبحث في الجال $\overset{+}{\longleftarrow}\overset{+}{\longleftarrow}\overset{+}{\longleftarrow}\overset{-}{\longleftarrow}$
3

نهـا $\frac{س+2}{س-3}$ = $\frac{0}{-5}$ = صفر
$س \to -2$

⑩ نهـا $\frac{س\sqrt{س-1}+4}{س+1}$
$س \to 1$

مشكله

الحل نهـا $\frac{س\sqrt{س-1}+4}{س+1}$ = $\frac{1\times\sqrt{0}+4}{2}$
$س \to 1$

نبحث في الجال $\overset{+}{\longleftarrow}\overset{+}{\longleftarrow}\overset{-}{\longleftarrow}\overset{-}{\longleftarrow}$
1 2

نهـا $\frac{س\sqrt{س-1}+4}{س+1}$ = $\frac{4}{2}$ = 2
$س \to 1^+$

نهـا $\frac{س\sqrt{س-1}+4}{س+1}$ غير موجوده
$س \to 1^-$

نهـا $\frac{س\sqrt{س-1}+4}{س+1}$ غير موجوده
$س \to 1$

مثال (١٤) (كتاب)

جد قيم الثابت (ج) التي تجعل
نهـا $\sqrt{6-س}$ غير موجوده
$س \to ج$

الحل قيم (ج) هي القيم التي
اشارة داخل الجذر تكون (سالب) وصفر

نبحث في الجال $\overset{+}{\longleftarrow}\overset{-}{\longleftarrow}\overset{-}{\longleftarrow}\overset{+}{\longleftarrow}$
6

ج ∈ $[6, \infty)$

نهاية الدقترانات المتشعبه

يجب تحديد نوع النقطة

1. نقطه عاديه داخل الجال، نجد النهايه عن طريق التعويض المباشر في القاعده المقابله لها
2. طرف فتره (بدايه أو نهايه) النهايه دشكل عام غير موجوده تكون النهايه موجوده من جهه واحده وهي جهة الجال البداية من جهة اليمين و النهايه من جهة اليسار
3. نقطه تشعب نجد النهاية من الجهتين ثم نعمل فحص

مثال (١٥)

إذا كان ص(س) = $\begin{cases} 3س-1 & ، س \leq 2 \\ س^2 & ، 2 < س < 3 \end{cases}$

جد ما يلي

① نهـا ص(س) $س \to 0$

② نهـا ص(س) $س \to 2$

③ نهـا ص(س) $س \to 1$

④ نهـا ص(س) $س \to 3$

⑤ نهـا ص(س) $س \to 3$

الحل

① س = ٠ نقطه عاديه

نهـا ص(س) = نهـا (3س - 1) = -1
$س \to 0$ $س \to 0$

② س = 2 نقطه عاديه

نهـا ص(س) = نهـا $س^2$ = 4
$س \to 2$ $س \to 2$

③ س = ١ نقطة تشعب

$\lim_{س \to ١^+} ص(س) = \lim_{س \to ١^+} س^٢ = ١$

$\lim_{س \to ١^-} ص(س) = \lim_{س \to ١^-} ٢س - ١ = ١$

$\lim_{س \to ١} ص(س) = ١$

④ س = -٢ بداية فتره

تعرف من جهة اليمين فقط

$\lim_{س \to -٢^+} ص(س)$ غير موجوده

⑤ $\lim_{س \to ٣} ص(س)$ س = ٣ نهاية فتره تعرف من اليسار

$\lim_{س \to ٣} س^٢ = ٩$

$\lim_{س \to ٣^-} ص(س) = \lim_{س \to ٣^-} س^٢ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} ص(س) = ٣$

مثال (١٦)

إذا كان ص(س) = $\begin{cases} ٤ - ٣س & ، س < ٢ \\ ٣ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} ص(س)$

الحل لا يوجد $\lim_{س \to ٢} ٣ - س$

$\lim_{س \to ٢^+} ٣ - س = ١$ (مثلاً) غير موجوده

$\lim_{س \to ٢^-} ٤ - ٣س = صفر$

$\lim_{س \to ٢} ص(س)$ غير موجوده

مثال (١٧)

إذا كان ص(س) = $\begin{cases} س^٢ - ١ & ، س < ٢ \\ ٥ & ، س = ٢ \\ \sqrt{س + ٧} & ، س > ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} ص(س)$

الحل

س = ٢ نقطة تشعب

$\lim_{س \to ٢} ص(س) = \lim_{س \to ٢^+} \sqrt{س + ٧} = ٣$

مثال (١٨) (كتاب)

إذا كان ل(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ، س \in ص \\ س^٢ + ٤ & ، س \notin ص \end{cases}$

حيث ص هي

مجموعة الأعداد الصحيحة

جد $\lim_{س \to ٢} ل(س)$

الحل س → ٢ يعني س ≠ ٢

يتم التعويض في قاعدة مجال الأعداد غير الصحيحة

$\lim_{س \to ٢} ل(س) = \lim_{س \to ٢} س^٢ + ٤ = ٨$

مثال (١٩)

إذا كان ص(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ٥ & ، س \neq ٢ \\ ١٢ & ، س = ٢ \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to ٢} ص(س)$ هي

أ) ١٢ ب) ١٣ جـ) ٢١ د) غير موجوده

الحل $\lim_{س \to ٢} ص(س) = \lim_{س \to ٢} ٣س^٢ + ٥ = ١٣$

هل تعلم ؟

عند الذكر أن $\lim_{س \to ٢} ص(س)$ موجوده

حيث (٢) نقطة تشعب

هذا يعني أن

$\lim_{س \to ٢^+} ص(س) = \lim_{س \to ٢^-} ص(س)$

تستخدم لإيجاد المجاهيل

مثال (٢٠)

$$م(س) = \begin{cases} ٥ س^{٢} - ب & ، س < ٢ \\ ب س + ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

جد قيمة الثابت (ب) علماً أن $\lim_{س \to ٢} م(س)$ موجوده

الحل $\lim_{س \to ٢} م(س)$ موجوده (٣) نقطة تتصل

$$\lim_{س \to ٢^{+}} م(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} م(س)$$

$$\lim_{س \to ٢} ب س + ٢ = \lim_{س \to ٢} ٥ س^{٢} - ب$$

$$٢ ب + ٢ = ٢٠ - ب$$

$$٣ ب = ١٨ \leftarrow \boxed{ب = ٦}$$

مثال (٢١)

إذا كان $م(س) = \begin{cases} ٣ س + ب & ، س < ٢ \\ س^{٢} - ب & ، س \geq ٢ \end{cases}$

جد قيمة ب ، ب

علماً أن $\lim_{س \to ٢} م(س) = ٥$

الحل $\lim_{س \to ٢} م(س) = ٥$

* $\lim_{س \to ٢^{+}} م(س) = ٥ \leftarrow \lim_{س \to ٢^{+}} ٣ س + ب = ٥$

$$٦ + ب = ٥ \quad \boxed{ب = -١}$$

* $\lim_{س \to ٢^{-}} م(س) = ٥ \leftarrow \lim_{س \to ٢^{-}} س^{٣} - ب = ٥$

$$٨ - ب = ٥ \quad \boxed{ب = ٣}$$

نهاية اقتران القيمة المطلقة

عند ايجاد نهاية اقتران القيمة المطلقة عند عدد مثل (أ)

نعوض داخل الإقتران ونتبع مايلي

① إذا كان ناتج التعويض (+) نهمل المطلقة ونبقي الإقتران كما هو

② ناتج التعويض (-) نفك الإشارة ونهمل المطلقة

③ ناتج التعويض (صفر) نفيد تعريف الإقتران وتصبح نقطة تشعب

مثال (٢٢)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ١} (|س^{٢} - ٤| + ٣ س - ١)$

الحل نهمل المطلقة (-)

$\lim_{س \to ١} (٤ - س^{٢} + ٢ س - ١)$

$= \lim_{س \to ١} (٣ - س^{٢} + ٢ س) = \boxed{٣}$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{|س - ٥| + ٣ س - ١٩}{س^{٢} - ٩}$

الحل نهمل المطلقة (+) ، (-)

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٥ + ٣ س - ١٩}{٢ س + ٦}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٤ س - ١٤}{٢ س + ٦} = \frac{١٤ - ٨}{٦} = \boxed{١}$

③ $\lim_{س \to -٢} (|س^{٢} + ٤ س + ١٢|)$

الحل نهمل المطلقة (صفر) اعادة تعريف

$س^{٢} + ٤ س + ١٢$ ← (+ عند -٢ ، - عند -٣ ، + عند -٤)

$\lim_{س \to -٢^{+}} س^{٢} + ٤ س + ٢ = ٤$

$\lim_{س \to -٢^{-}} س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٤$

$\lim_{س \to -٢} (س^{٢} + ٤ س + ١٢) = ٤$

مثال (٢٣)

إذا كانت $\lim_{س \to م} |٣س - ١٧| = ٥$

جد قيم الثابت (م)

الحل $\lim_{س \to م} |٣س - ١٧| = ٥$

$|٣م - ١٧| = ٥$

* $٣م - ١٧ = ٥$	* $٣م - ١٧ = -٥$
$٣م = ١٢$	$٣م = ١٢$
$م = ٤$	$م = ٢$

$م = \{٤ ، ٢\}$

نهاية اقتران أكبر عدد صحيح

عند ايجاد نهاية أكبر عدد صحيح عند نقطة مثل (م) ، نمر من داخل أكبر عدد صحيح ونتبع مايلي

① الناتج أكبر

النهاية = [الكبر]

② الناتج عدد صحيح ، نعيد تعريف الاقتران ونتبع نقطة تشعب

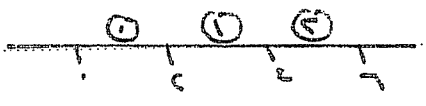
مثال (٢٤)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٤} [٥ و - س]$ (كتاب)

الحل فهي ← ٢ إعادة تعريف

$[٥ و - س]$



$\lim_{س \to ٤^+} [٥ و - س] = ٢$

$\lim_{س \to ٤^-} [٥ و - س] = ١$

$\lim_{س \to ٤}$ غير موجودة

② $\lim_{س \to ١} [س + ١]$ (كتاب)

الحل فهي ١ و١

$\lim_{س \to ١^+} [س + ١] = [١ و ١] = ١$

$\lim_{س \to ١^-} [س + ١] = [١ و ١] = ١$

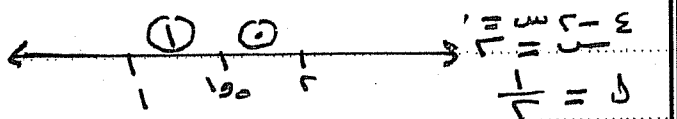
③ $\lim_{س \to ٥ و ١} [٤ - ٢س]$ (كتاب)

الحل فهي ① اعادة تعريف

$[٤ - ٢س]$

$٤ - ٢س = ١$

$ل = \frac{١}{٢}$



$\lim_{س \to ٥ و ١^+} [٤ - ٢س] =$ صفراً

$\lim_{س \to ٥ و ١^-} [٤ - ٢س] = ١$

$\lim_{س \to ٥ و ١}$ غير موجودة

④ $\lim_{س \to ٢٠٠٦} ([٣س + ١] - [٣س - ١])$

الحل فهي ① ، ⑤-

اعادة تعريف ، يمكن استخدام كل عدد من أكبر عدد صحيح

$\lim_{س \to ٠}$ [ص] + ١ - ([ص] - ١)

$= \lim_{س \to ٠}$ [ص] + ١ - [ص] + ١

$= \lim_{س \to ٠}$ ٢ = ٢

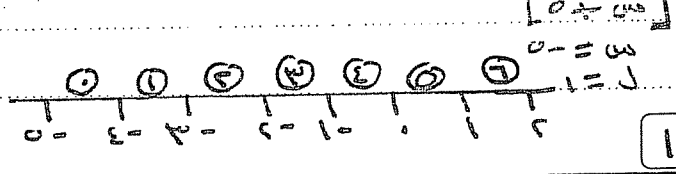
⑤ $\lim_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س])$ (كتاب)

الحل لاحظ عند استخدام خاصية التوزيع لا يتم الاستفادة منها هنا نقوم باعادة التعريف

$[س \to ٥]$

$س = ٥ -$

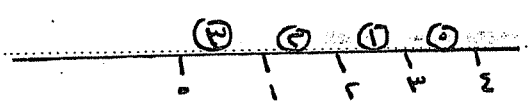
$ل = ١$



$[٤ - س]$

$س = ٤$

ل = ١



$\lim_{س \to ١^+} [س + ٥] + [٤ - س] = \lim_{س \to ٢^+} (٦ + ٣) =$ ٨

$\lim_{س \to ١^-} [س + ٥] + [٤ - س] = \lim_{س \to ١^-} (٥ + ٣) =$ ٨

$\lim_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س]) =$ ٨

قواعد

قاعدة (١) : إذا كان $ق \supset س$

فإن $[ق^+] = ق$ ، $[ق^-] = ق - ١$

* $[٥^+] = ٥$ ، $[٥^-] = ٤$

قاعدة (٢) : إذا كان $ق \not\supset س$

فإن $[ق^+] = [ق^-] = [ق]$

* $[٧ و ٢^+] = [٧ و ٢^-] = [٧ و ٢] = ٣$

نستخدم قاعدة (١) ، قاعدة (٢)

لإيجاد الثوابت

قاعدة (٣) :

يمكن إيجاد نهايات اقتران أكبر عدد صحيح دون إعادة التعريف ، شرط عدم وجود اقترانات أخرى برفقته

① مقابل س ⊕ : تعويض مباشر مع المحافظة على الجهة

② مقابل س ⊖ : تعويض مباشر مع عكس الجهة

مثال (٢٥)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ١} [س - ١]$

الحل $\lim_{س \to ٣^+} [س - ١] = [٢^+] = ٢$

$\lim_{س \to ٣^-} [س - ١] = [٢^-] = ١$

$\lim_{س \to ٣}$ غير موجودة

② $\lim_{س \to -٢} [٢ س + ٧]$

الحل $\lim_{س \to -٢^+} [٢ س + ٧] = [٣^+] = ٣$

$\lim_{س \to -٢^-} [٢ س + ٧] = [٣^-] = ٢$

$\lim_{س \to -٢}$ غير موجودة

③ $\lim_{س \to ٢} [٥ - س]$

الحل $\lim_{س \to ٢^+} [٥ - س] = [٣^-] = ٢$

$\lim_{س \to ٢^-} [٥ - س] = [٣^+] = ٣$

$\lim_{س \to ٢}$ غير موجودة

④ $\lim_{س \to ٣} [٦ - ٣ س]$

الحل $\lim_{س \to ٣^+} [٦ - ٣ س] = [١٥^-] = ١٤$

$\lim_{س \to ٣^-} [٦ - ٣ س] = [١٥^+] = ١٥$

$\lim_{س \to ٣}$ غير موجودة

أفكار متنوعة

مثال (٢٦) جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٣} س^٣ + ٧ |س - ٣|^٣$

الحل $\lim_{س \to ٣} س^٣ + |س - ١٣|$

$|س - ١٣|$ نحن إعادة تعريف

	$س - ٣$		$٣ - س$
	+		+
		٣	

$\lim_{س \to ٢^+} س^٣ + |س-٢|^٢ = \lim_{س \to ٢^+} س^٣ + س - ٢ = ٨$

$\lim_{س \to ٢^-} س^٣ + |س-٢|^٢ = \lim_{س \to ٢^-} س^٣ + ٣ - س = ٨$

$\lim_{س \to ٢} (س^٣ + |س-٢|^٢) = ٨$

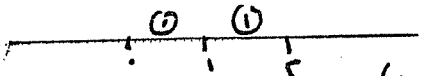
---

③ $\lim_{س \to ١} (س [س] + |س|)$ (كتاب)

الحل فرعي $[س]$ اعادة تعريف

$|س| \leftarrow س$

$[س]$



$\lim_{س \to ١^+} (س \times ١ + س) = \lim_{س \to ١^+} ٢س = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} (س \times ٠ + س) = \lim_{س \to ١^-} س = ١$

$\lim_{س \to ١} (س [س] + |س|)$ غير موجودة

---

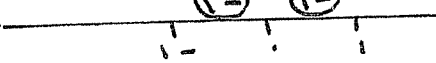
④ $\lim_{س \to ٠} (|س| + ٣)^{[س-١]}$

الحل فرعي $|س|$ اعادة تعريف

$[س-١]$ اعادة تعريف

$|س|$

$[س-١]$



$[س-١] = -١$

$\lim_{س \to ٠^+} (|س| + ٣)^{[س-١]} = \lim_{س \to ٠^+} (س + ٣)^{-١} = \frac{١}{٣}$

$\lim_{س \to ٠^-} (|س| + ٣)^{[س-١]} = \lim_{س \to ٠^-} (-س + ٣)^{-٢} = \frac{١}{٩}$

$\lim_{س \to ٠} (|س| + ٣)^{[س-١]}$ غير موجودة

---

⑤ $م(س) = \begin{cases} |س-١| & ، ١ \leq س < ٢ \\ [س-٣] & ، ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} م(س)$

الحل يمكن الحل دون اعادة تعريف

$\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} [س-٣] = -١$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = \lim_{س \to ٢^-} |س-٢| = صفر^+$

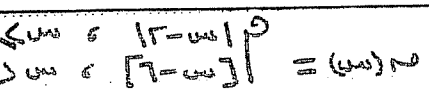
$\lim_{س \to ٢} م(س)$ غير موجودة

---

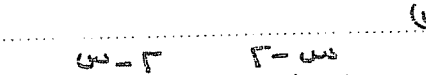
⑥ (كتاب) $م(س) = \begin{cases} |س| & ، س \neq ٠ \\ ١ - س & ، س = ٠ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٠} م(س)$

الحل $|س|$



$١ - س$



$\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} |س| = \lim_{س \to ٠^+} س = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} ١ - س = صفر$

$\lim_{س \to ٠} م(س) = صفر$

---

⑦ $م(س) = \begin{cases} س+٢ & ، |س| \leq ٢ \\ س^٢ & ، |س| > ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} م(س)$

الحل $|س| \leq ٢ \leftarrow -٢ \leq س \leq ٢$

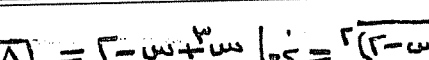
$|س| > ٢ \leftarrow س > ٢$

$م(س) = \begin{cases} س+٢ & ، -٢ \leq س < ٢ \\ س^٢ & ، س > ٢ \\ س^٢ & ، س < -٢ \end{cases}$

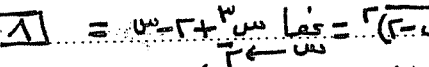
---

⑧ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{|س-٢|}$

الحل $|س-٢|$



$[س-٦]$



$[س-٦] = -٦$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٣ - ٨}{|س-٢|} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س-٢} = ١٢$

$\lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٣ - ٨}{|س-٢|} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٢-س} = -١٢$

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{|س-٢|}$ غير موجودة

---

⑨ (كتاب) $م(س) = \begin{cases} |س-١| & ، ٢ < س < ٦ \\ [س-٦] & ، ٦ \leq س < ٨ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٦} م(س)$

الحل $|س-١|$

$[س-٦]$

$[س-٦] = -٦$

$\lim_{س \to ٦^+} م(س) = \lim_{س \to ٦^+} [س-٦] = ٠$

$\lim_{س \to ٦^-} م(س) = \lim_{س \to ٦^-} |س-١| = ٥$

$\lim_{س \to ٦} م(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) = \lim_{س \to -٢^+} س + ٢ = ٠$ حقيقي

$\lim_{س \to -٢} م(س) = \lim_{س \to -٢} س^٢ = ٤$

$\lim_{س \to -٢} م(س)$ غير موجودة

⑧ $م(س) = \begin{cases} \frac{س^٣}{س+١} & ، |س| < ٢ \\ س^٢ & ، [س] = ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} م(س)$

الحل $|س| < ٢ \leftarrow -٢ < س < ٢$

$[س] = ٢ \leftarrow ٢ \leq س < ٣$

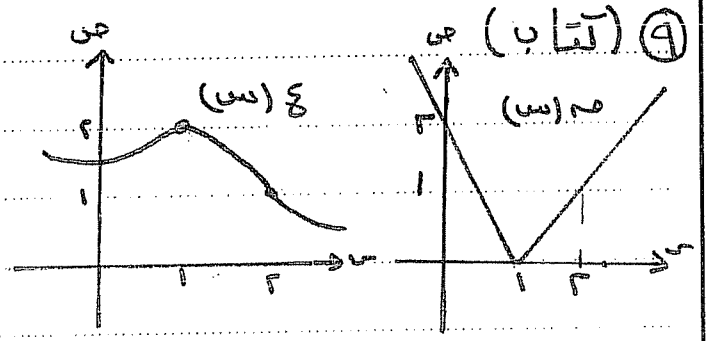
$م(س) = \begin{cases} \frac{س^٣}{س+١} & ، -٢ < س < ٢ \\ س^٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} س^٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٣}{س+١} = \frac{٨}{٣} = ١$

$\lim_{س \to ٢} م(س)$ غير موجودة

⑨ (كتاب)



معتمداً الشكل أعلاه ، جد ما يلي

① $\lim_{س \to ١} (م(س) + هـ(س))$

② $\lim_{س \to ٢} (م(س) \times هـ(س))$

③ $\lim_{س \to ١} (٣ م(س-١) + هـ(س))$

الحل

① $\lim_{س \to ١} (م(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to ١} م(س) + \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٠ + ٢ = ٢$

② $\lim_{س \to ٢} (م(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to ٢} م(س) \times \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ١ \times ١ = ١$

③ $\lim_{س \to ١} (٢ م(س-١) + هـ(س))$

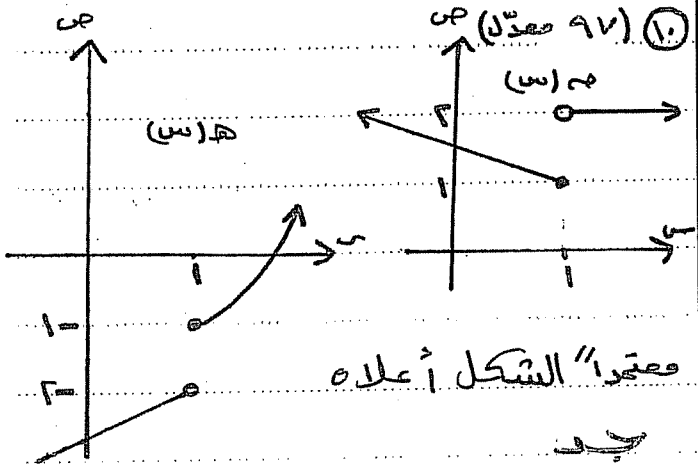
$= ٢ \lim_{س \to ١} م(س-١) + \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$ص = س - ١$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ٠$

$= ٢ \lim_{ص \to ٠} م(ص) + ٢$

$= ٢ \times ٢ + ٢ = ٦$

⑩ (٩٧ صدّ)



معتمداً الشكل أعلاه

جد $\lim_{س \to ١} (م(س) \times هـ(س))$

الحل $\lim_{س \to ١} م(س)$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to ١^+} (م(س) \times هـ(س)) = ٢ \times ١ = ٢$

$\lim_{س \to ١^-} (م(س) \times هـ(س)) = ١ \times ٢- = ٢-$

$\lim_{س \to ١} م(س) \times هـ(س) = ٢-$

إيجاد ثوابت

مثال (٢٧)

جد قيمة (قيم) (م) في كل من الآتي

① إذا كان $\lim_{س \to م} [س + [س]] = ٦$

جد قيم الثابت م

الحل $[س + [س]] = [س] + [[س]]$

$= [س] + [س] = ٢ [س]$

$\lim_{س \to م}$ [س + [س]] = $\lim_{س \to م}$ ٢ [س] = ٦

٢ [م] = ٦ ← [م] = ٣

٣ ≤ م < ٤ ← ٣ < م ≤ ٤

م ∉ ص حيث تمثل النهاية غير موجودة

م ∈ (٣ ، ٤)

$\lim_{س \to ٣}$ س^{٢} + ٤م = $\lim_{س \to ٣}$ [٦ - س]

٩ + ٤م = [٣]

٩ + ٤م = ٣ ← ٤م = -٦

م = $\frac{-٣}{٢}$

⑦ (كتاب)

إذا كان ص(س) = [٢ - س] ،

أجب عن كل مما يأتي

١) جد قيم الثابت (م) التي تجعل

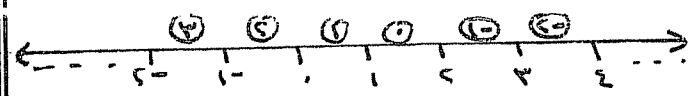
$\lim_{س \to م}$ ص(س) غير موجودة

٢) جد قيم الثابت (ب) التي تجعل

$\lim_{س \to ب}$ ص(س) = -١

٣) جد قيم (ب) التي تجعل $\lim_{س \to ب^{+}}$ ص(س) = ٢

الحل



١) النهاية غير موجودة عند نقاط التشعب

م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، م

٢) $\lim_{س \to ب}$ ص(س) = -١ ، ب ∈ (٢ ، ٣)

٣) $\lim_{س \to ب^{+}}$ ص(س) = ٢ ، ب ∈ [-١ ، ٠)

④ إذا كان ص(س) = { [س+٢] ، س < م ، ٩ - [س] ، س ≥ م } وكانت $\lim_{س \to م}$ ص(س) موجودة

جد قيمة الثابت (م) حيث م ∈ ص

الحل $\lim_{س \to م}$ ص(س) موجودة

$\lim_{س \to م^{+}}$ ص(س) = $\lim_{س \to م^{-}}$ ص(س)

$\lim_{س \to م^{+}}$ [س+٢] = $\lim_{س \to م^{-}}$ (٩ - [س])

[م] + ٢ = ٩ - [م]

م + ٢ = ٩ - (م - ١)

٢م = ٨ ← م = ٤

⑤ إذا كان ص(س) = { [س+٢] ، س < م ، ٨ - [س] ، س ≥ م } وكانت $\lim_{س \to م}$ ص(س) موجودة

جد قيم الثابت (م) حيث م ∉ ص

الحل $\lim_{س \to م}$ ص(س) موجودة

$\lim_{س \to م^{+}}$ ص(س) = $\lim_{س \to م^{-}}$ ص(س)

$\lim_{س \to م^{+}}$ [س+٢] = $\lim_{س \to م^{-}}$ (٨ - [س])

[م] + ٢ = ٨ - [م] م ∉ ص

٢ [م] = ٦ ← [م] = ٣

٣ ≤ م < ٤ ← ٣ < م ≤ ٤ م ∉ ص

م ∈ (٣ ، ٤)

③ (كتاب)

إذا كان ص(س) = { س^{٢} + ٤م ، س < ٣ ، [٦ - س] ، س ≥ ٣ }

جد قيمة الثابت (م)

علماً أن $\lim_{س \to ٣}$ ص(س) موجودة

الحل $\lim_{س \to ٣}$ ص(س) موجودة

$\lim_{س \to ٣^{+}}$ ص(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ص(س)

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

الرياضيات
المنهاج الجديد

النهايات والاتصال
الفرع العلمي و الصناعي

ورقة عمل (٢)

السؤال الأول :

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to 1} |س - 1|$ مقدار

② $\lim_{س \to 2} س^2 + |س - 2|$ ٤

③ $\lim_{س \to 3} ٢٠٠٢ ص$

إذا كان $م(س) = \begin{cases} |س - 1| & ، س \geq 2 \\ [س - 1] & ، س < 3 \end{cases}$

جد $\lim_{س \to 3} م(س)$ غير موجودة

④ $\lim_{س \to 1} [س] + [-س]$ -١

⑤ $\lim_{س \to ٥} ٢٠٠٨ ص$

$\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س^2 + ٣}$ تساوي

أ) $\frac{٣}{٢٧}$ ب) مقدار ج) غير موجودة د) $\frac{1}{٤}$

⑥ $\lim_{س \to 2} \frac{1}{1 - [|س|]}$ تساوي

١

السؤال الثاني :

① إذا كانت $\lim_{س \to 3} م(س) = ٤$ ،

$\lim_{س \to 1} م(س) = ٥$

جد $\lim_{س \to 1} (م^2(س) + ٦ م(س))$

٤٢

② $\lim_{س \to 1} ٢٠٠٣ ص$

$\lim_{س \to 1} م(س) = ٣$ ، وكانت

$\lim_{س \to 1} (م^2(س) + ٢ م(س) - \frac{٣}{س}) = ٢١$

فإن $\lim_{س \to 1} م^2(س)$ هي

أ) ٥ ب) ٧ ج) ٤٩ د) ٢٥

السؤال الثالث :

① ١٩٩٨

إذا كان $م(س) = \begin{cases} س^2 + ٩ & ، س \geq 2 \\ \frac{٨}{س} - ٩^2 + ٦ & ، س < 2 \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to 2} م(س)$ موجودة

جد مجموعة قيم (٩) ٩ = ١، ٢٩

④ (الكتاب)

إذا كان $م(س) = [٢ س]$

أجب عن كل مما يلي

١) جد قيم (ج) التي تجعل

$\lim_{س \to ج} م(س) = -١$ (-٠،٥٠)

٢) جد قيم (٩) التي تجعل

$\lim_{س \to ٩} م(س)$ غير موجودة

٩ = ٠،٥ ± ٥، ١ ± ٥، ١ ± ...

③ إذا كان $م(س) = \begin{cases} [س + ٣] & ، س < ٩ \\ ٥ - [س] & ، س \geq ٩ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٩} م(س)$ موجودة

جد قيمة الثابت (٩) حيث ٩ ∈ ص

٩ = ٢

الدرس الثالث: نهاية اقترانات كسرية

عند ايجاد نهايات اقتران كسري نستخدم التعويض المباشر داخل الاقتران والحصول على احدى النتائج التالية

نتائج التعويض

عدد / عدد ≠ ٠	مقدار / عدد ≠ ٠	عدد ≠ ٠ / مقدار	مقدار / مقدار
النهاية = نتائج التعويض	النهاية = مقدار ≠ ٠	النهاية غير موجودة	مشكلة

الجزء الأول:

نتائج تعويض النهايات

عدد / عدد	مقدار / عدد	عدد / مقدار
← توزع النهاية هنا		← النهاية لا توزع

مثال (١)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to -١} \frac{٣س - ٤}{س^٢ + ٢س - ٣}$

الحل $\lim_{س \to -١} \frac{٣س - ٤}{س^٢ + ٢س - ٣} = \frac{-٧}{-٤} = \frac{٧}{٤}$

② $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥س + ١}{س + ١}$

الحل $\lim_{س \to ٦} \frac{س^٢ - ٥س + ١}{س + ١} = \frac{٧}{٧} = ١$

③ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{٥ - ٣س^٢} = \frac{٠}{٢} = ٠$

④ $\lim_{س \to ٣} \frac{٤ - س}{(س - ٣)^٢}$

الحل $\lim_{س \to ٣} \frac{٤ - س}{(س - ٣)^٢} = \frac{١}{٠}$ غير موجودة

الجزء الثاني:

نتائج تعويض النهايات

÷	٠	مقدار × عدد

يوجد طريقة اخرى لحل المشكلة حيث هنا لا يمكن توزيع النهاية

أولاً: التحليل

س: متى يستخدم التحليل

ج: نهاية لكثير حدود / كثير حدود $س \to ٢$

الطريقة:

حلل ← اختصر ← عوض

حيث نختصر $(س - ٢)$

مثال (٣)

بيّن كلاً من النهايات الآتية :

① $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٢ + ٦س + ٨}{س + ٤}$

الحل نابج التعويض = $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to -٤} \frac{(س+٢)(س+٤)}{(س+٤)} = \lim_{س \to -٤} (س+٢) = -٢$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ (كتاب)

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٢س + ٤) = ١٢$

③ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٣ - ٦٤}{س^٢ - ١٦}$

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س^٢+٤س+١٦)}{(س-٤)(س+٤)} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢+٤س+١٦}{س+٤} = \frac{٤٨}{٨} = ٦$

④ $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥}$ (كتاب)

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to -٥} \frac{(س+٥)(س-٢)}{س+٥} = \lim_{س \to -٥} (س - ٢) = -٧$

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{٢ - ٢س}{٣س^٢ - س - ٢}$

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-٢(س-١)}{(٣س+٢)(س-١)} = \lim_{س \to ١} \frac{-٢}{٣س+٢} = \frac{-٢}{٥}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٣ + ٣س^٢ + س}{س^٢ + ٥س}$

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٣ + ٣س^٢ + س}{س^٢ + ٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س(س^٢+٣س+١)}{س(س+٥)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢+٣س+١}{س+٥} = \frac{١}{٥}$

⑦ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ - ٦س + ٩}$

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س+٤)(س-٣)}{(س-٣)(س-٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س+٤}{س-٣} = \frac{٧}{٠}$ غير موجودة

⑧ $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨س^٣ - ١}{س - \frac{١}{٢}}$

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= ٨ \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{س^٣ - \frac{١}{٨}}{س - \frac{١}{٢}}$

$= ٨ \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{(س - \frac{١}{٢})(س^٢ + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٢}}$

$= ٨ \lim_{س \to \frac{١}{٢}} (س^٢ + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤})$

$= ٨ \times \frac{٣}{٤} = ٦$

⑨ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٣س^٢ + ١}{س - ١}$

الحل نابج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س^٢-١)(س^٢-١)}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)(س^٢-١)}{س-١}$

$= \lim_{س \to ١} (س+١)(س^٢-١) = ٢ \times ٠ = ٠$ مع

---

(١٠) $٥ \ldots ٠ < س$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١)^٢ - ٢٥}{٢س-٤}$

الحل ناتج التعويض $\div$ مشكلة

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١+٥)(٢س+١-٥)}{٢س-٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+٦)(٢س-٤)}{٢(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} ٢س+٦ = ١٠$

---

(١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١)^٣ - ١٢٥}{٢+س^٣(س-٢)-س}$

الحل ناتج التعويض $\div$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١-٥)((٢س+١)^٢+٥(٢س+١)+٢٥)}{٢-س+س^٣(س-٢)}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢(س-٢)((٢س+١)^٢+٥(٢س+١)+٢٥)}{(س-٢)(س^٢-١)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٢((٢س+١)^٢+٥(٢س+١)+٢٥)}{س^٣-١}$

$= \frac{١٥٠}{٧}$

---

(١٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢-٤)^{\wedge}}{س^٣-٤س+٤}$

الحل ناتج التعويض $\div$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)^{\wedge}(س+٢)}{(س-٢)^٢}$

$= \text{مهما}_{س \to ٢} (س-٢)(س+٢)^{\wedge} = ٠ \times (٤)^{\wedge} = ٠$ مع

---

(١٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)^٤ - ٢س^٢ + ٣٢}{س^٢-١٦}$

الحل ناتج التعويض $= \frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)^٤ - ٢(س^٢-١٦)}{س^٢-١٦}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)^٤ - ٢(س-٤)(س+٤)}{(س-٤)(س+٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)((س-٤)^٣ - ٢(س+٤))}{(س-٤)(س+٤)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)^٣ - ٢(س+٤)}{س+٤}$

$= \frac{٠-١٦}{٨} = -٢$

---

(١٤) (كتاب) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٦٤)^س - (٨)^س}{(٨)^س - ١}$

الحل ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٨)^س - (٨)^س}{(٨)^س - ١}$ ①

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٨)^س((٨)^س - ١)}{(٨)^س - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} (٨)^س = (٨)^٠ = ١$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٨)^س - (٨)^س}{(٨)^س - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(٨)^س - (٨)^س}{(٨)^س - ١}$

---

(١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{(٤)^س - ٣(٢)^س + ٢}{(٢)^س - ٢}$ (٢٠٠٢)

الحل ناتج التعويض $\div$ مشكلة

$= \lim_{س \to ١} \frac{(٢^س)^٢ - ٣(٢)^س + ٢}{(٢)^س - ٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(٢)^س - ٢)((٢)^س - ١)}{(٢)^س - ٢}$

$= \lim_{س \to ١} (٢)^س - ١ = ١$

التحليل بواسطة القسمة الترتيبية

س : متى تستخدم

ج : نهـا كثير حدود / كثير حدود عندما س → ؟

يعني تحليل البسط أو كلاهما

الطريقة :

يتم القسمة على س - ؟

ثم اختصار ← تعويض

وإدخال القوانين المطلقة

والقوانين أكبر عدد صحيح في التحليل

(١٦) نهـا (س٣ + ٣س٢ - ٤) / (س٢ - ١) عندما س → ١ (كتاب)

الحل ناتج التعويض ÷

تحليل البسط قسمة ترتيبية

	س٣	س٢	س	ثابت
١	١	٥	٣	٤-
		+	+	+
		١	١	٤
	١	١	٤	٠

= نهـا (س - ١)(س٢ + س + ٤) / (س - ١)(س + ١) عندما س → ١

= نهـا (س٢ + س + ٤) / (س + ١) عندما س → ١ = ٦ / ٢ = ٣

(١٧) نهـا (س٢ - ٦س + ٥) / (س٣ + ٢س - ٣) عندما س → ١

الحل ناتج التعويض ÷

نحلل المقام قسمة ترتيبية

	س٣	س٢	س	ثابت
١	١	٠	٣	٣-
		+	+	+
		١	٢	٥
	١	١	٣	٠

= نهـا (س - ٥)(س - ١) / (س - ١)(س٢ + س + ٣) عندما س → ١

= نهـا (س - ٥) / (س٢ + س + ٣) عندما س → ١ = ٤- / ٥

(١٨) نهـا (|س - ٣| - ١) / (س - ٣) عندما س → ٣

الحل نفحص |س - ٣| ⊖

نهـا (٣ - س - ١) / (س - ٣) عندما س → ٣٠ = نهـا (٢ - س) / (س - ٣) عندما س → ٣

ناتج التعويض ÷

نهـا ⊖(٣ - س) / (س - ٣) عندما س → ٣٠ = نهـا -١ عندما س → ٣ = ١-

(١٩) نهـا (|٣س + ١| - ٥) / (س٢ + ٨) عندما س → -٢ (٢٠١٤ شتوي)

الحل

نفحص |٣س + ١| ⊖

نهـا (٥ + ٣س + ١) / (س٢ + ٨) عندما س → -٢ = نهـا (٣س + ٦) / (س٢ + ٨) عندما س → -٢

ناتج التعويض ÷

= نهـا ٣(س + ٢) / (س + ٢)(س٢ - ٢س + ٤) عندما س → -٢

= نهـا ٣ / (س٢ - ٢س + ٤) عندما س → -٢ = ٣ / ١٢ = ١/٤

(٢٠) نهـا (|س٢ - ١٠س + ٢٥| - ٥) / (س - ٥) عندما س → ٥ (كتاب)

الحل ناتج التعويض داخل الجذر = صفر

+ + + + + + +

ناتج تعويض النهاية ٠ ÷ ٥

نهـا ⊖(س - ٥)٢ / (س - ٥) عندما س → ٥٠ = نهـا |س - ٥| / (س - ٥) عندما س → ٥

$|س-٥|$: $س-٥$ (+) عند ٥ ، $٥-س$

$\lim_{س\to٥^+} \frac{س-٥}{س-٥} = 1$ ①

$\lim_{س\to٥^-} \frac{٥-س}{س-٥} = -1$ ②

$\lim_{س\to٥} \frac{س^٢-١٠س+٢٥}{س-٥}$ غير موجودة

(٢١) $\lim_{س\to\frac{٥}{٢}} \frac{٢س-[٢س]}{٤س^٢-٢٥}$

الحل هنا $[٢س]$ ← اعادة تعريف

$[٢س]$: ⑤ ④ ٣ ٢ ١ ٠

$س = \frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٠

$\lim_{س\to\frac{٥}{٢}^+} \frac{٢س-٥}{(٢س-٥)(٢س+٥)} = \lim_{س\to\frac{٥}{٢}^+} \frac{١}{٢س+٥}$ ← نائج التعويض ÷

$= \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س\to\frac{٥}{٢}} \frac{٢س-[٢س]}{٤س^٢-٢٥}$ غير موجودة

(٢٢) $\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{س^٢-٤}}{\sqrt{س-٢}}$ (لقاب)

الحل نائج التعويض $\frac{٠}{٠}$ مشكلة جذر

$\sqrt{س^٢-٤}$: + + | - - - | + + +

$\sqrt{س-٢}$: - - - - - | + + +

$\lim_{س\to٢^+} \frac{\sqrt{س^٢-٤}}{\sqrt{س-٢}}$ الجذر غير معرف من اليمين

$= \lim_{س\to٢^+} \frac{س^٢-٤}{\sqrt{(س-٢)(س+٢)}} \cdot \frac{\sqrt{س-٢}}{\sqrt{س-٢}}$

$= \sqrt{٤} = ٢$

$\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{س^٢-٤}}{\sqrt{س-٢}}$ الجذر غير معرف من اليسار

غير موجودة

$\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt{س^٢-٤}}{س-٢}$ غير موجودة

(٢٣) $\lim_{س\to٢} \frac{س^٢-٤}{\sqrt{س-٢}}$

الحل نائج التعويض $\frac{٠}{٠}$

$س^٢-٤$: + + + | - - - | + + +

$\sqrt{س-٢}$: - - - - - - - | + + +

الجذر معرف من الجهتين

$\lim_{س\to٢} \frac{س^٢-٤}{\sqrt{س-٢}} = \lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{\sqrt{س-٢}}$

$= \lim_{س\to٢} \sqrt{س+٢} = \sqrt{٤} = ٢$

(٢٤) $\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt[٣]{س^٣-٨}}{س-٢}$

الحل جذر فردي معرف

نائج التعويض $\frac{٠}{٠}$

$\lim_{س\to٢} \frac{\sqrt[٣]{س^٣-٨}}{س-٢} = \lim_{س\to٢} \frac{\sqrt[٣]{(س-٢)(س+٢)}}{س-٢}$

$= \lim_{س\to٢} \sqrt[٣]{س+٢} = \sqrt[٣]{٤}$

ثانياً : توحيد المقام

س : متى يستخدم توحيد المقام

ج : ① وجود كسور داخل الاقتران النسبي

② اقتران نسبي ± اقتران نسبي

طريقة الحل

توحيد مقام ← تحليل بدور ← اختصار ← تعويض

مثال (٣)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣}$

الحل ناتج التعويض $\div$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} \times \frac{١}{س - ٣}$ (١-)

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٩}$

② $\lim_{س \to ٥} (\frac{٣}{س} - \frac{٢}{٥}) \times \frac{١}{س^٢ - ٢٥}$ (الكتاب)

الحل ناتج التعويض صفر $\times$ $\frac{١}{\text{صفر}}$ مشكلة

$= \lim_{س \to ٥} (\frac{١}{س} - \frac{١}{٥}) \times \frac{١}{س^٢ - ٢٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{٥س} \times \frac{١}{س^٢ - ٢٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-(س - ٥)}{٥س} \times \frac{١}{(س - ٥)(س + ٥)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-١}{٥س(س + ٥)} = \frac{-١}{٢٥٠}$

$= \frac{-١}{١٢٥}$

③ $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٤}}$

الحل ناتج التعويض $\div$ مشكلة

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٤}} \times \frac{٤س^٢}{٤ - س^٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٢(س - ٢)}{(٢ - س)(٢ + س)} \times ٤س^٢$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-١ \times ٤س^٢ \times ٢(س - ٢)}{(٢ + س)}$

$= \lim_{س \to ٢} -٨س^٢ = -٣٢ = -٨$

④ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{١}{(١ + س)^٢} - ١)$

الحل ناتج التعويض $\frac{١}{٠}$ $\times$ صفر مشكلة

$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{١}{(١ + س)^٢} - ١)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{١ - (١ + س)^٢}{(١ + س)^٢})$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{١ - س^٢ - ٢س - ١}{(١ + س)^٢})$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times \frac{س(-س - ٢)}{(١ + س)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-س - ٢}{(١ + س)^٢} = \frac{-٢}{١} = -٢$

⑤ $\lim_{س \to ٣} \frac{س}{س^٢ - ٩} + \frac{٣س}{٩ - س^٢}$

الحل ناتج التعويض $\frac{٣}{٠} + \frac{٣}{٠}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س}{س^٢ - ٩} + \frac{٣س}{٩ - س^٢} = \lim_{س \to ٣} \frac{س}{س^٢ - ٩} \times \frac{-س}{-س} + \frac{٣س}{٩ - س^٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-س^٢}{س^٢ - ٩س} + \frac{٣س^٢}{س^٢ - ٩س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣س^٢ - س^٢}{س^٢ - ٩س} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢(٣ - س)}{س(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{س + ٣} = \frac{-١}{٦}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{١}{(٣ + س)^٢} - \frac{١}{٩})$ (٢٠١٣ س)

الحل ناتج التعويض $\frac{١}{٠}$ $\times$ صفر مشكلة

$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{١}{(٣ + س)^٢} - \frac{١}{٩}) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} (\frac{٩ - (٣ + س)^٢}{٩(٣ + س)^٢})$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times \frac{(٣ - (٣ + س))(٣ + (٣ + س) + (٣ + س)^٢)}{٩(٣ + س)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times \frac{-س(٩ + ٣س + (٣ + س)^٢)}{٩(٣ + س)^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-(٩ + ٣س + (٣ + س)^٢)}{٩(٣ + س)^٢} = \frac{-١٢}{٥٤} = \frac{-٤}{١٦}$

⑦ $\lim_{س\to 3} \frac{س^2+27}{س^2-9} - \frac{س+3}{س-3}$ (م ٢٠١٥)

الحل ناتج التعويض $\frac{36}{0}$ ـ مشكله

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2+27}{(س-3)(س+3)} - \frac{س+3}{س-3} \times \frac{س+3}{س+3}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2+27}{س^2-9} - \frac{س^2+6س+9}{س^2-9}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2+27-س^2-6س-9}{س^2-9}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{18-6س}{س^2-9}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{6(3-س)}{(س-3)(س+3)}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{-6}{س+3} = \frac{-6}{6} = -1$

ثالثاً: الغرب بالمرافقه

المرافقه التربيعي

المقدار	المرافق	ناتج الضرب
$س \pm ع$	$س \mp ع$	$س^2 - ع^2$
$\sqrt{س} \pm ع$	$\sqrt{س} \mp ع$	$س - ع^2$

س: متى يستخدم المرافق التربيعي

ج: وجود جذر تربيعي داخل النهايه فناتج تعويض الجذر موجب والناتج الكلي يساوي صفر

الطريقه ضرب مرافق بجميع حدود الاقتار ثم تعويض

مثال (٤)

جد كلاً من النهايات الآتيه

① $\lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+6}-3}{س-3}$ (كتاب)

الحل ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+6}-3}{س-3} \times \frac{\sqrt{س+6}+3}{\sqrt{س+6}+3}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س+6-9}{(س-3)(\sqrt{س+6}+3)}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{1}{\sqrt{س+6}+3}$

$= \frac{1}{6}$

② $\lim_{س\to 2} \frac{س-2}{\sqrt{س^2+4س}-6}$ (كتاب)

الحل ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

$= \lim_{س\to 2} \frac{س-2}{\sqrt{س^2+4س}-6} \times \frac{\sqrt{س^2+4س}+6}{\sqrt{س^2+4س}+6}$

$= \lim_{س\to 2} \frac{س-2}{س^2+4س-36} \times \lim_{س\to 2} \sqrt{س^2+4س}+6$

$= \lim_{س\to 2} \frac{س-2}{(س-2)(س+6)} \times 12 = 12$

③ $\lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{2س+1}-7}{س-3}$

الحل ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{2س+1}-7}{س-3} \times \frac{\sqrt{2س+1}+7}{\sqrt{2س+1}+7}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{2(س-1)-36}{(س-3)(\sqrt{2س+1}+7)} \times \lim_{س\to 3} \frac{1}{\sqrt{2س+1}+7}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2+س-36}{س-3} \times \frac{1}{12}$

قسمه ترتيبيه

	$س^3$	$س^2$	$س$	ثابت
③	1	$+4$	$+3$	-36
		$+3$	$+12$	$+36$
	1	4	12	0

$= \frac{1}{12} \times \lim_{س\to 3} \frac{(س-3)(س^2+4س+12)}{س-3}$

$= \frac{1}{12} \times \lim_{س\to 3} س^2+4س+12 = \frac{1}{12} \times 33 = \frac{33}{12}$

④ $\lim_{س\to 3} \frac{س^2-3س}{س-\sqrt{س+1}-1}$ (كتاب ٢٠١٢ ش)

الحل نأخذ التعويض ÷

ترتيب النهاية $\lim_{س\to 3} \frac{س^2-3س}{(س-1)-\sqrt{س+1}}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2-3س}{(س-1)\sqrt{س+1}} \times \frac{(س-1)+\sqrt{س+1}}{(س-1)+\sqrt{س+1}}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2-3س}{(س-1)^2-(س+1)} \times \lim_{س\to 3} (س-1)+\sqrt{س+1}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س^2-3س}{س^2-2س+1-س-1} \times 4$

$= 4 \times \lim_{س\to 3} \frac{س(س-3)}{س(س-3)} = \boxed{4}$

⑤ $\lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{س^2+1}-\sqrt{1-2س^2}}{س^2}$ (كتاب ٢٠٠٧ ش)

الحل نأخذ التعويض ÷

$= \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{س^2+1}-\sqrt{1-2س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{س^2+1}+\sqrt{1-2س^2}}{\sqrt{س^2+1}+\sqrt{1-2س^2}}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{س^2+1-(1-2س^2)}{س^2} \times \lim_{س\to 0} \frac{1}{\sqrt{س^2+1}+\sqrt{1-2س^2}}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{3س^2}{س^2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

⑥ $\lim_{س\to 1} \frac{1}{س-1}\left(\frac{1}{\sqrt{س}}-1\right)$ (كتاب)

الحل نأخذ التعويض $\frac{1}{0}$ × مقدار

$= \lim_{س\to 1} \frac{1}{س-1} \times \frac{1-\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$

$= \lim_{س\to 1} \frac{1}{س-1} \times \frac{1-\sqrt{س}}{\sqrt{س}} \times \frac{1+\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}}$

$= \lim_{س\to 1} \frac{1}{س-1} \times \frac{1-س}{\sqrt{س}} \times \lim_{س\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{س}}$

$= \lim_{س\to 1} \frac{1}{س-1} \times \frac{-(س-1)}{\sqrt{س}} \times \frac{1}{2} = -1 \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

⑦ $\lim_{س\to 4} \frac{\sqrt{س^2-12}-|س|}{2س^2-5س-12}$ (كتاب ٢٠١٤ س)

الحل نأخذ التعويض ÷ مقدار سالب

$= \lim_{س\to 4} \frac{\sqrt{س^2-12}-س}{2س^2-5س-12} \times \frac{\sqrt{س^2-12}+س}{\sqrt{س^2-12}+س}$

$= \lim_{س\to 4} \frac{س^2-12-س^2}{(2س+3)(س-4)(\sqrt{س^2-12}+س)}$

$= \lim_{س\to 4} \frac{-12}{(2س+3)(\sqrt{س^2-12}+س)} = \frac{-12}{11 \times 8} = \boxed{-\frac{3}{22}}$

⑧ $\lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+7}-4}{\sqrt{س+1}-2}$

الحل نأخذ التعويض ÷

$= \lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+7}-4}{\sqrt{س+1}-2} \times \frac{\sqrt{س+7}+4}{\sqrt{س+7}+4} \times \frac{\sqrt{س+1}+2}{\sqrt{س+1}+2}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س+7-16}{س+1-4} \times \lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+1}+2}{\sqrt{س+7}+4}$

$= \lim_{س\to 3} \frac{س-9}{(س-3)(\sqrt{س+7}+4)} \times \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

المرافق التكعيبي

المقدار	المرافق	ناتج الضرب
$\sqrt[3]{س}-م$	$(\sqrt[3]{س})^2+م\sqrt[3]{س}+م^2$	$س-م^3$
$\sqrt[3]{س}+م$	$(\sqrt[3]{س})^2-م\sqrt[3]{س}+م^2$	$س+م^3$

س : متى يستخدم العوامل التكميلي
ج : عند وجود جذر تكعيبي داخل النهاية وكان ناتج التعويض ÷

الطريقة

ضرب مرافق ← تجميع بنود ← اختصار ← تعويض

مثال (٥)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧}$ (البتاء)

الحل ناتج التعويض ÷

$= \lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{س+١} - ٢}{س - ٧} \times \frac{(\sqrt[٣]{س+١})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}{(\sqrt[٣]{س+١})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{س+١-٨}{س-٧} \times \frac{١}{(\sqrt[٣]{س+١})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س+١} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{س-٧}{س-٧} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{١٢}$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{\sqrt{س+٦} - ٢}$ (٢٠٠٣ هـ)

الحل ناتج التعويض ÷

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{\sqrt{س+٦} - ٢} \times \frac{(\sqrt{س+٦})^{٢} + ٢\sqrt{س+٦} + ٤}{(\sqrt{س+٦})^{٢} + ٢\sqrt{س+٦} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س+٦-٨} \times \lim_{س \to ٢} (\sqrt{س+٦})^{٢} + ٢\sqrt{س+٦} + ٤$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س-٢} \times ١٢$

قسمة تركيبية

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
١	١	٢	١	٢-
	١	٢	١	٠

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+١)}{س-٢} \times ١٢$

$= \lim_{س \to ٢} (س^{٢}+٢س+١) \times ١٢$

$= ٩ \times ١٢ = \boxed{١٠٨}$

③ $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt[٣]{١-س} - ٣}{٣ + س^{\frac{٢}{٣}}}$ (١٩٩٩)

الحل ناتج التعويض ÷

$= \lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt[٣]{١-س} - ٣}{٣ + س^{\frac{٢}{٣}}} \times \frac{\sqrt[٣]{(١-س)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{١-س} + ٩}{\sqrt[٣]{(١-س)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{١-س} + ٩} \times \frac{٣ - س^{\frac{٢}{٣}}}{٣ - س^{\frac{٢}{٣}}}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{١-س-٩}{٨+س} \times \lim_{س \to -٨} \frac{٩ - س^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt[٣]{(١-س)^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{١-س} + ٩}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{-(٨+س)}{٨+س} \times \frac{١٢}{٩+٩} = \frac{١٢}{١٨} = \boxed{-٢}$

رابعاً : الفرض والاستقراء

س : متى يستخدم

ج : ① $\sqrt[ن]{\ }$ ن ≥ ٤

نفرض ص = $\sqrt[ن]{\ }$

② $(م س + ب)^{ن}$ ، ن = ٢ ، ٣

$س^{ن}$ ، ن = ٣ ، ٤

نفرض ص = $\sqrt[ن]{\ }$

③ $\sqrt{\ }^{ن}$

نفرض ص = $\sqrt[ن]{\ }$

④ مضاعف أسئلة الحذر

نفرض ص = الجذر

⑤ $(\ )^{ن}$ ن ≥ ٤

نفرض ص = ما داخل القوس

طريقة الحل

* نفرض ص ← نجد ص ← ؟
* نجد س بدلالة ص ← نستبدل

مثال (٦)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt[٤]{س + ١٣} - ٢}$

الحل نأخذ التعويض ÷ فتشكل

$ص = \sqrt[٤]{س + ١٣}$ ، $س \to ٣$ ، $ص \to ٢$

$ص^٤ = س + ١٣ \leftarrow س = ص^٤ - ١٣$

بما $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٤ - ١٦}{ص - ٢}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص - ٢)(ص + ٢)(ص^٢ + ٤)}{ص - ٢}$

$= \lim_{ص \to ٢} (ص + ٢)(ص^٢ + ٤) = ٣٢$

② $\lim_{س \to ٨} \frac{س - ١٦}{\sqrt[٣]{س} - ٨}$

الحل نأخذ التعويض ÷

$ص = \sqrt[٣]{س}$ ، $س \to ٨$ ، $ص \to ٢$

$ص^٣ = س$

بما $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٤ - ١٦}{ص^٣ - ٨}$

بما $\lim_{ص \to ٢} \frac{(ص - ٢)(ص + ٢)(ص^٢ + ٤)}{(ص - ٢)(ص^٢ + ٢ص + ٤)}$

$= \frac{٤ \times ٨}{١٢} = \frac{٨}{٣}$

③ $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س + ١} + ٦ - ٣}{س - ٨}$

الحل نأخذ التعويض ÷

$ص = \sqrt{س + ١}$ ، $س \to ٨$ ، $ص \to ٣$

$ص^٢ = س + ١ \quad س = ص^٢ - ١$

بما $\lim_{ص \to ٣} \frac{\sqrt{ص + ٦} - ٣}{ص^٢ - ٩}$ ÷

بما $\lim_{ص \to ٣} \frac{\sqrt{ص + ٦} - ٣}{ص^٢ - ٩} \times \frac{\sqrt{ص + ٦} + ٣}{\sqrt{ص + ٦} + ٣}$

$= \lim_{ص \to ٣} \frac{ص + ٦ - ٩}{ص^٢ - ٩} \times \lim_{ص \to ٣} \frac{١}{\sqrt{ص + ٦} + ٣}$

$= \lim_{ص \to ٣} \frac{ص - ٣}{(ص - ٣)(ص + ٣)} \times \frac{١}{٦}$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣٦}$

④ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ٤\sqrt{س} + ٣}{س - ١}$

الحل نأخذ التعويض ÷

$ص = \sqrt{س}$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ١$

$س = ص^٢$

بما $\lim_{ص \to ١} \frac{ص^٢ - ٤ص + ٣}{ص^٢ - ١}$ ÷

بما $\lim_{ص \to ١} \frac{(ص - ٣)(ص - ١)}{(ص + ١)(ص - ١)} = \frac{-٢}{٢} = -١$

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ١)^٥ - ٣٢}{س - ١}$

الحل نأخذ التعويض ÷

$ص = س + ١$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ٢$

$س = ص - ١$

بما $\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٥ - ٣٢}{ص - ٢}$ ÷

	$ص^٥$	$ص^٤$	$ص^٣$	$ص^٢$	ص	ثابت
٢	١	٢	٤	٨	١٦	-٣٢
	١	٢	٤	٨	١٦	٠

$\lim_{ص \to ٢} \frac{(ص - ٢)(ص^٤ + ٢ص^٣ + ٤ص^٢ + ٨ص + ١٦)}{ص - ٢}$

$= ٨٠$

خامساً: الطرح والإضافة

س: متى يستخدم؟

ج: ① جمع أو طرح بذرين مختلفين في الدليل كلاهما في البسط أو المقام

الطريقة

طرح و إضافة نائج تعويض الحدين ثم فصل النهايات

② عامل ضرب ١ مقرانين

الطريقة

طرح و إضافة (نائج تعويض احد الإ مقرانين) × عاعدة الإ مقران الآخر ثم نفصل النهايات

مثال (٧)

جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt[3]{س+7} - \sqrt{س+3}}{س-1}$

الحل نائج التعويض $\frac{0}{0}$

$= \lim_{س\to 1} \frac{\sqrt[3]{س+7} - 2 + 2 - \sqrt{س+3}}{س-1}$

$= \lim_{س\to 1} \frac{\sqrt[3]{س+7} - 2}{س-1} + \lim_{س\to 1} \frac{2 - \sqrt{س+3}}{س-1}$

مرافقه تكعيبي — مرافقه تربيعي

$= \frac{1}{12} + \frac{-1}{4} = \frac{-1}{6}$

② $\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س} + \sqrt[3]{س} - 2}{س-1}$

الحل نائج التعويض $\frac{0}{0}$

$\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س} - 1 + 1 + \sqrt[3]{س} - 2}{س-1}$

$\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س-1} + \lim_{س\to 1} \frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س-1}$

مرافقه تحليل — فرضي — مرافقه تحليل — فرضي

$= \frac{5}{6}$

③ $\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س}(س+1)^2 - 4}{س-1}$

الحل $\frac{0}{0}$ $\pm$ $\sqrt{س}$ ، ± 4 ، $(س+1)^2$

$\lim_{س\to 1} \frac{(س+1)^2\sqrt{س} - 4\sqrt{س} + 4\sqrt{س} - 4}{س-1}$

$\lim_{س\to 1} \frac{(س+1)^2\sqrt{س} - 4\sqrt{س}}{س-1} + \lim_{س\to 1} \frac{4\sqrt{س} - 4}{س-1}$

$\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س}\,[(س+1)^2 - 4]}{س-1} + 4\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س} - 1}{س-1}$

$\lim_{س\to 1} \sqrt{س}\,(س+3) + 4\lim_{س\to 1} \frac{1}{\sqrt{س}+1}$

$= 4 + 2 = 6$

الجزء الثاني: إيجاد ثوابت

قاعده

١ إذا كانت نهاية الاقتران النسبي موجوده وناتج تعويض المقام = صفر فإن الأصل ∞ وبعدها أصبحت موجوده
(أي أن ناتج تعويض البسط = صفر)

٢ إذا كانت نهاية الاقتران النسبي غير موجوده وتعويض المقام = صفر
الأصل عدد

* تستخدم هذه القاعده لإيجاد الثوابت أو إيجاد نهايه لها علاقه بالاقتران النسبي

مثال (٨) لتكن $ن(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٢٧}{٣س^٢ + ٦س + ١٨} & ، س < ٤ \\ س + ٥ & ، س \geq ٤ \end{cases}$

جد (قيمة) ع التي تجعل $\lim_{س \to ع} ن(س)$ موجوده

الحل

$\lim_{س \to ع^+} ن(س) = \lim_{س \to ع^-} ن(س)$

$\frac{ع^٢ - ٢٧}{٣ع^٢ + ٦ع + ١٨} = ع + ٥$

$\frac{(ع - ٣)(ع^٢ + ٣ع + ٩)}{٣(ع^٢ + ٢ع + ٦)} = ع + ٥$

$\frac{ع - ٣}{٣} = ع + ٥$

$ع - ٣ = ٣ع + ١٥$

$-٢ع = ١٨$ ⟹ $ع = -١٣$

مثال (٩) لتكن $ن(س) = أ + ب(٣ - س)$

إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{|س - ١٣|} & ، س < ٢٧ \\ د س^٢ - ٤ & ، س \geq ٢٧ \end{cases}$

جد قيمة الثابت (د)

علماً أن $\lim_{س \to ٣} م(س)$ موجوده

الحل $\lim_{س \to ٣^+} م(س) = \lim_{س \to ٣^-} م(س)$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{|س - ١٣|} = \lim_{س \to ٣^-} د س^٢ - ٤$

$\lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣}{-(س - ١٣)} = \lim_{س \to ٣^-} د س^٢ - ٤$

$-١ = ٩د - ٤$ ⟹ $٩د = ٣$ ⟹ $د = \frac{١}{٣}$

مثال (١٠) لتكن $ن(س) = أ + ب(١٢ - ٢س)$

إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ + (ق + ١٣)س + ق + ٢}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٠ & ، س = ٣ \end{cases}$

جد قيمة الثابت (ق) التي تجعل $\lim_{س \to ٣} م(س)$ موجوده

الحل نهاية البسط = صفر

تعويض البسط = صفر

$٤ + ٣(ق + ١٣) + ق = ٠$

$٤ + ٣ق + ٣٩ + ق = ٠$

$٤ق = -٤٣$ ⟹ $ق = -١٠$

مثال (١١) $(٤ - ٢س)$

إذا كانت $\lim_{س \to م} \frac{٣س^٢ - (م - ٦)س - ٣م}{س^٢ - ٤} = -٢$

جد قيمة الثابت (م)

الحل النهاية موجوده وتعويض المقام = صفر

تعويض البسط = صفر

$١٢ - ٢(م - ٦) - ٣م = ٠$

$١٢ - ١٢ + ٢م - ٣م = ٠$

$٠ = ٠$ قبل الطرفين

وعليه $\lim_{س \to ٣} \frac{٣س^٢ - (٦-م)س - ٢م}{س^٢ - ٤} = -٣$

تحليل

	$س^٢$	$س$	ثابت
٣	٣	$-م-٦$	$-٢م$
٢		٦	٢م
	٣	م	٠

وعليه $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(٣س+م)}{(س-٢)(س+٢)} = -٣$

$\frac{٦+م}{٤} = -٣$

$٦+م = -١٢$ ← $م = -١٨$

مثال (١٣) تحويل

إذا كان $ص(س) = \frac{أ س^٢ + ب س + ٤}{س^٢ - ١}$ ،

$ص(٣) = ٤$ ، وكانت $\lim_{س \to ١} ص(س)$ موجودة

جد قيم $أ$ ، $ب$

الحل $\lim_{س \to ١} ص(س) = \lim_{س \to ١} \frac{أ س^٢ + ب س + ٤}{(س-١)(س+١)}$ موجودة

تعويض البسط = ٠

$أ - ب + ٤ = ٠$ ← $ب = أ + ٤$ ... (١)

$ص(٣) = ٤$ ← $٩أ + ٣ب + ٤ = ٤$

$٣أ + ب = ٠$ ... (٢)

(٢) - (١) $٢أ = -٤$

$أ = -٢$

$ب = ٢$

$أ + ب = ٤$ ← $ب = ١٢$

مثال (١٤) كتاب + (٢٠٠٨ ش)

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^٢ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$

جد قيمة كل من الثوابت $أ$ ، $ب$

الحل النهاية موجودة تعويض البسط = ٠

$أ + ٢ب + ٢ = ٠$ ← $أ = -٢ب - ٢$

وعليه $\lim_{س \to ١} \frac{(-٢ب-٢)س^٢ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$

$س - ١$ من عوامل البسط

	$س^٢$	$س$	ثابت
١	$-٢ب-٢$	$٢ب$	٢
	$٢ب+٢$	$-٢ب-٢$	-٢
	$-٢ب-٢$	-٢	٠

وعليه $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(-٢ب-٢)}{س - ١} = ١$

$س \neq ١$

$-٢ب - ٢ - ٢ = ١$

$-٢ب = ٥$ ← $ب = -\frac{٥}{٢}$

$أ = ٣$ ← $أ = ٥ - ٢$ ← $أ + ٣ب = -٢$

مثال (١٥)

إذا كانت $\lim_{س \to م} \frac{س^٤ - م^٤}{س - م} = \frac{١}{٢}$

جد قيمة $(م)$

الحل $\lim_{س \to م} \frac{س^٤ - م^٤}{(س^٢ + م^٢)(س^٢ - م^٢)} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to م} \frac{١}{س^٢ + م^٢} = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢م^٢} = \frac{١}{٢}$ ← $م^٢ = ٩$

$م = ٣$

مثال (١٦)

إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٤ - ٣س + م}{س - ٣} = ٢ب$

جد قيم $أ$ ، $ب$

الحل النهاية موجودة تعويض البسط = ٠

$٩ - ٣ + م = ٠$ ← $م = -٦$

وعليه $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س - ٦}{س - ٣} = ٢ب$

$\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٢)}{س - ٣} = ٢ب$

$٥ = ٢ب$ ← $ب = \frac{٥}{٢}$

مثال (١٦) $\sqrt{ب + (٢٠١٠ س)}$

إذا كان م كثيرة حدود، وكانت

$\lim_{س \to ٣} \frac{م(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ ،

$\lim_{س \to ٣} (م(س) - ٣س^{٢} + ٣ب) = ٧$

جد قيمة الثابت ب

الحل $\lim_{س \to ٣} \frac{م(س) + ٥}{س - ٣}$ = ٥ موجودة

تعويض المباشر = صفر

$\lim_{س \to ٣} م(س) + ٥ = ٠$ ← $\lim_{س \to ٣} م(س) = -٥$

$\lim_{س \to ٣} (م(س) - ٣س^{٢} + ٣ب) = ٧$

$\lim_{س \to ٣} م(س) - \lim_{س \to ٣} ٣س^{٢} + \lim_{س \to ٣} ٣ب = ٧$

$-٥ - ٢٧ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ١٨$ ← $ب = ٦$

مثال (١٧) $\sqrt{ب + (٢٠٠٩ س)}$

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{م(س) - ٦}{س - ١} = ٨$

وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{(س^{٢} + ٢س - ٣) + ب}{م(س) - ٦} = \frac{٣}{٢}$

جد قيمة الثابت (ب)

الحل $\lim_{س \to ١} \frac{م(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ موجودة

تعويض المباشر = ٠

$\lim_{س \to ١} م(س) - \lim_{س \to ١} ٦ = ٠$

$\lim_{س \to ١} م(س) = ٦$

$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{م(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{٠}{٠}$ ←

$\lim_{س \to ١} \frac{(س + ٣)(س - ١)}{م(س) - ٦} + \lim_{س \to ١} ب = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to ١} (س + ٣) \times \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{م(س) - ٦} + ب = \frac{٣}{٢}$

$٤ \times \frac{١}{٨} + ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٢} + ب = \frac{٣}{٢}$

$ب = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}$

$\boxed{ب = ١}$

مثال (١٨) إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{م س^{٢} + ٤ س + ٣}$ غير موجودة

جد قيمة الثابت (م)

الحل $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٣}{م س^{٢} + ٤ س + ٣}$ غير موجودة بشرط البسط ≠ ٠

ناتج تعويض اعقا = ٠ والبسط عدد ≠ ٠

$م ٣^{٢} + ٤ م + ٣ = ٠$

$(م + ٣)(م + ١) = ٠$

$\boxed{م = -٣}$ ، $\boxed{م = -١}$ تهمل

مثال (١٩)

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{م س^{٣} + ب س + ٣}$ غير موجودة

جد قيمة الثوابت م ، ب

الحل غير موجودة بشرط $\frac{عدد}{٠}$

لكن التعويض $\frac{٠}{م + ب + ٣} = ٠$

لتصبح غير موجودة نقلب النهاية

$\lim_{س \to ١} \frac{م س^{٢} + ب س + ٣}{س - ١}$ = عدد نفرض = $\frac{٠}{٠}$

$م + ب + ٣ = ٠$

$ب = -م - ٣$

$\lim_{س \to ١} \frac{م س^{٢} + (-م - ٣) س + ٣}{س - ١} = ٠$

نحلل عن طريق القسمة التركيبية

$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(م س - ٣)}{س - ١} = ٠$

$م - ٣ = ٠$ ← $\boxed{م = ٣}$

$\boxed{ب = -٦}$

ورقة عمل (٣)

السؤال الأول :

جد كلاً من النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س+١)^{٢} - ٨١}{س - ٨}$ = ١٨

(٢) $\lim_{س \to ١} \frac{(٣٥)^{س} - ٤ \times (٥)^{س} - ٥}{(٥)^{س} - ٥}$ = ٦

(٣) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{س-٣}\right)$ = $\frac{-١}{٩}$

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٤}}{٢س - ٤}$ = $\frac{-١}{٣٢}$

(٥) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س+٢}{س-٣} - \frac{س^{٢}+١٢}{س^{٢}-٤}\right)$ = -١٠

(٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٩ - س^{٢}}}{\sqrt{٣ - س} - س}$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + ٣س}{\sqrt{٥س^{٢} + ٢س + ٣٣} - ٣}$ = ٨٠

(٨) $\lim_{س \to -٢} \frac{\left[\frac{٣س}{٣} + ٤\right] + س}{|س| - ٣}$ ، $-١ < س < -٢$ = -١

(٩) $\lim_{س \to -٣} \frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} + ٣س}$ = $\frac{١}{٣٦}$

(١٠) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٨\sqrt{س}}{٤ - س}$ = -٦

(١١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^{٤} + ٤س^{٣}}}{س}$ = غير موجودة

(١٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س+٣}^{٣} - \sqrt{س-١}}{س - ٥}$ = $\frac{١}{٦}$

(١٣) $\lim_{س \to -٢} \frac{١}{٣س^{٢} - س - ١٤}\left(\frac{١}{س+١} + \frac{١}{٢س+٥}\right)$ = $\frac{-٣}{١٣}$

(١٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{\sqrt{٣س+٦}^{٣} - ٢}$ = ١٠٨

(١٥) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٤س}{\sqrt{٣س+٤} - \sqrt{٢س+٨}}$ = ٣٢

(١٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{\sqrt{س+٢}}}{٣ - س}$ = $\frac{-١}{١٦}$

(١٧) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س+١}^{٣} - ٢}{\sqrt{٣+س} - ٣}$ = $\frac{١}{٢}$

(١٨) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} - ٣}{س - ٨}$ = $\frac{١}{٧٢}$

(١٩) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)\sqrt[٣]{٧س} - ٨}{س - ١}$ = ١٦

(٢٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س}\left(١ - \frac{١}{\sqrt{س+١}}\right)$

(٢١) $\lim_{س \to -٣} \frac{|س+٣| - ٥}{س^{٢} + ٨}$

(٢٢) $م(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + \frac{١}{س} + \left[\frac{س}{٣}\right] & ، \text{إذا } س \neq ٣ \\ \frac{|س-٣|}{س^{٢}-٩} & ، \text{إذا } س = ٣ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٣} م(س)$

(٢٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٣}|س|}{٣س^{٢} - ٥س - ١٢}$

(٢٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١} - ٢}{س^{٣} - ٩س}$

السؤال الثاني :

① إذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{م(س) - ١}{س - ٣} = ٢$

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ م(س) - ٩}{س - ٣}$ [٤]

---

② إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{أ(س) - ٤}{س} = ٨$

وكان أ(س) كثير حدود ،

جد $\lim_{س \to ٠} أ(س + ١٠)$

السؤال الثالث :

① إذا كان م(س) = $\begin{cases} \frac{س^٣ - ٢ س + ٣}{س - ١} & ، س < ١ \\ ب س + ٥ & ، س \geq ١ \end{cases}$

جد قيمة كل من ٢ ، ب التي تجعل $\lim_{س \to ١} م(س)$ موجوده

$٢ = ٤$ ، $ب = -٦$

---

② إذا كان هـ(س) كثير حدود وكانت

$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥ + ٢ب) = ٣$

جد قيمة (ب) [ب = ٤]

---

③ إذا كان م(س) = $\frac{س^٣}{س^٣ + ٢}$

وكانت $\lim_{س \to -١} م(س) = ١$ ، جد قيمة (٢)

---

④ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{٢ س^٣ - ب س - ٥}{س + ١} = -٧$

جد قيمة كل من الثابتين ٢ ، ب

متطابقات مثلثية

ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{1}{\text{جاس}}$

$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$

$1 + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س}$

$1 + \text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س}$

جا٢س = ٢ جاس جتاس

جتا٢س = $1 - 2\,\text{جا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{جتا}^2\text{س} - 1$

$= \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$

جا(أ + ب) = جاأجتاب + جتاأ جاب

جا(أ − ب) = جاأجتاب − جتاأ جاب

جتا(أ + ب) = جتاأجتاب − جاأ جاب

جتا(أ − ب) = جتاأجتاب + جاأ جاب

ظا(أ + ب) = $\frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{1 - \text{ظاأ ظاب}}$

ظا(أ − ب) = $\frac{\text{ظاأ} - \text{ظاب}}{1 + \text{ظاأ ظاب}}$

$\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا٢س})$

$\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 + \text{جتا٢س})$

ظا٢س = $\frac{\text{٢ظاس}}{1 - \text{ظا}^2\text{س}}$

جاس جاص = $\frac{1}{2}$(جتا(س − ص) − جتا(س + ص))

جاس جتاص = $\frac{1}{2}$(جا(س + ص) + جا(س − ص))

جتاس جتاص = $\frac{1}{2}$(جتا(س + ص) + جتا(س − ص))

جاس − جاص = ٢ جتا$\frac{1}{2}$(س + ص) جا$\frac{1}{2}$(س − ص)

جاس + جاص = ٢ جا$\frac{1}{2}$(س + ص) جتا$\frac{1}{2}$(س − ص)

جتاس − جتاص = − ٢ جا$\frac{1}{2}$(س + ص) جا$\frac{1}{2}$(س − ص)

جتاس + جتاص = ٢ جتا$\frac{1}{2}$(س + ص) جتا$\frac{1}{2}$(س − ص)

جتا($\frac{\pi}{2}$ − س) = جاس

جا($\frac{\pi}{2}$ − س) = جتاس

ظا($\frac{\pi}{2}$ − س) = ظتاس

ظتا($\frac{\pi}{2}$ − س) = ظاس

جا($\frac{\pi}{2}$ + س) = جتاس

جتا($\frac{\pi}{2}$ + س) = − جاس

جا(π − س) = جاس

جتا(π − س) = − جتاس

ظا(π − س) = − ظاس

جا(π + س) = − جاس

جتا(π + س) = − جتاس

ظا(π + س) = ظاس

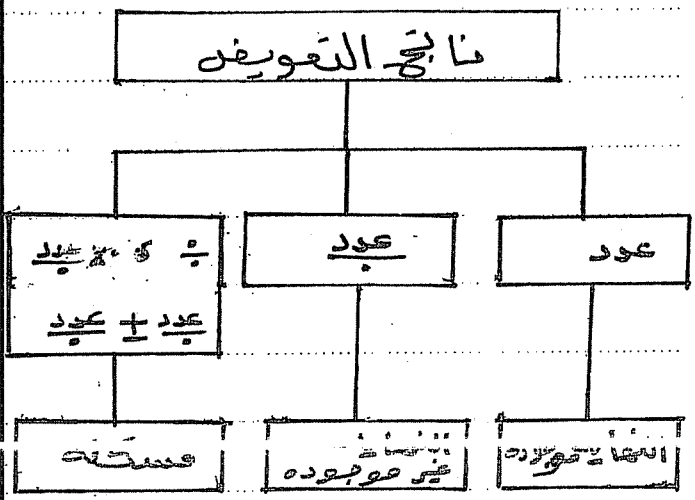
جا(− س) = − جاس

جتا(− س) = جتاس

ظا(− س) = − ظاس

الدرس الرابع :
نهايات اقترانات مثلثية

عند ايجاد نهايات اقتران مثلثي نستخدم التعويض المباشر في الاقتران ونحصل على احدى النتائج



الجزء الأول :
ناتج التعويض عدد ، عدد

مثال (١) جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to \pi}$ جتاس (كتاب)

الحل $\lim_{س \to \pi}$ جتاس = جتا π = -١

② $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ جاس (كتاب)

الحل $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ جاس = جا $\frac{\pi}{2}$ = ١

③ $\lim_{س \to \pi}$ (جاس + جتاس) (كتاب)

الحل $\lim_{س \to \pi}$ جاس + جتاس = جا π + جتا π

= ٠ + ١ = ١

④ $\lim_{س \to \pi}$ (ظا ٢س + قاس) (كتاب)

الحل $\lim_{س \to \pi}$ (ظا ٢س + قاس) = ظا ٢π + قا π

= ٠ + ١ = ١

⑤ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا\ ١س}{س}$

الحل نعلم أن $\lim_{س \to ٠} \frac{جا\ ١س}{١س} = ١$ ⊕

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جاس}{س} = \frac{جا\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{١}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٢}{\pi}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \sqrt{١ - جتاس}$

الحل $\sqrt{٠}$ مشكلة

$\lim_{س \to ٠} \sqrt{١ - جتاس}$ = صفر

⑦ $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{جاس}{س - \frac{\pi}{3}}$

الحل

$\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{جاس}{س - \frac{\pi}{3}} = \frac{جا\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{صفر}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{جاس}{س - \frac{\pi}{3}}$ غير موجودة

الجزء الثاني :
ناتج التعويض $\frac{صفر}{صفر}$ عدد

عدد ± عدد

يوجد نظريتان أساسيتان لنهايات
الدوال المثلثية وهي

$$\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = 1$$

نتائج خاصة بالنظريتين

القسم الأول من النتائج

① $\lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس} = 1$

② $\lim_{س \to 0} \frac{س}{ظاس} = 1$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} = 1$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{جا أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{أس}{جا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

⑦ $\lim_{س \to 0} \frac{أس}{ظا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

القسم الثاني من النتائج

① $\lim_{س \to 0} \frac{جا أس}{جا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

② $\lim_{س \to 0} \frac{ظا أس}{ظا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

③ $\lim_{س \to 0} \frac{جا أس}{ظا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

④ $\lim_{س \to 0} \frac{ظا أس}{جا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، ب ≠ ٠

أولاً :
تطبيقه مباشر على القسم الأول من النتائج

مثال (٣) جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٥س}$ (الكتاب)

الحل $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٥س} = \frac{٣}{٥}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{٣س}{جاس}$ (الكتاب)

الحل $\lim_{س \to 0} \frac{٣}{جاس} = ٣$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{٧س}{ظا٥س}$

الحل $\lim_{س \to 0} \frac{٧س}{ظا٥س} = \frac{٧}{٥}$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{جا٥س^٢}{٩س^٢}$

الحل $\lim_{س \to 0} \frac{جا٥س^٢}{(٣س)^٢} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{جا٥س}{٣س}\right)$

$= (\frac{٥}{٣})^٢ = \frac{٢٥}{٩}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{جا|س|}{س}$

الحل نعين إشارة |س| ⑤

س	-	٠	+
|س|	- س	٠	س

$\lim_{س \to 0^+} \frac{جا|س|}{س} = 1$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{جا|س|}{س} = -1$

$\lim_{س \to 0} \frac{جا|س|}{س}$ غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to 0} ٧س^٣ ظتا^٢س قتاس$ (الكتاب ٢٠٠٩ ص)

الحل $\lim_{س \to 0} ٧س^٣ \times \frac{١}{ظا^٢س} \times \frac{١}{جاس}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^٢}{ظا^٢ ٣س} \times \frac{٧ س}{جا ٥ س}$

$= (\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{ظا ٣س})^٢ \times \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٧ س}{جا ٥ س}$

$= (\frac{١}{٣})^٢ \times \frac{٧}{٥} = \frac{١}{٩} \times \frac{٧}{٥} = \frac{٧}{٤٥}$

⑦ $\text{نها}_{س \to ٠} ٣س (ظتا ٢س + متا ٣س)$ (كتاب ٢٠١١ ص)

الحل $\text{نها}_{س \to ٠} ٣س (\frac{١}{ظا ٢س} + \frac{١}{جا ٣س})$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣س}{ظا ٢س} + \frac{٣س}{جا ٣س}$

$= \frac{٣}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢}$

⑧ $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٦س}{ظا^٢ ٣س}$

الحل

$\text{نها}_{س \to ٠} (\frac{جا ٦س}{ظا ٣س})^٢$

$= (\frac{\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٦س}{س}}{\text{نها}_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{س}})^٢$

$= (\frac{٦}{٣})^٢ = ٩$

ثانياً :
استخدام القسم الثاني من النتائج

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{جا ٥س} = \frac{٢}{٥}$

في هذا النوع لا يتم وضع جوار النهاية $(\frac{٠}{٠})$ مباشرة" بل حل النهاية عن طريق القسمة أو الضرب $س، س^٢ ...$

مثال (٣)

جد كلاً" من النهايات الآتية

① $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{جا ٣س}$

الحل $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٥س}{س}}{\frac{جا ٣س}{س}}$

$= \frac{\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{س}}{\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س}} = \frac{٥}{٣}$

ملاحظة

① إذا ورد في البسط $(س^ن، جا^ن ظ)$ وكان في المقام حد واحد يمكن توزيع البسط على المقام

② إذا ورد في المقام عامل جمع أو طرح $(س، جا ظ)$ نقسم على $س، س^٢ ...$

مثال (٤) جد كلاً" من النهايات الآتية

① $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣س (س + جا ٨س - جا ٤س)}{س^٢ متا س}$ (٢٠٠٩ ش)

الحل $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣س (س + جا ٨س - جا ٤س)}{س^٢ جتا س}$

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س + جا ٨س - جا ٤س}{س} \times \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣}{جتا س}$

$(\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س}{س} + \text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٨س}{س} - \text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٤س}{س}) \times ٣$

$= ٣ \times (١ + ٨ - ٤) = ١٥$

② $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٣س + ظا ٣س}$ (٢٠٠٦ ص)

الحل

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٣س}{س}}{\frac{٣س + ظا ٣س}{س}}$

$= \frac{\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س}}{\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٣س}{س} + \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{س}}$

$= \frac{٣}{٣+٢} = \frac{٣}{٥}$

⑧ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س - \text{جا}٣س + \text{ظا}٥س}{٣س - \text{ظا}٢س}$ (كتاب)

الحل $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\frac{س}{س} - \frac{\text{جا}٣س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{\frac{٣س}{س} - \frac{\text{ظا}٢س}{س}}$

$= \frac{١ - ٣ + ٥}{٣ - ٢} = \frac{٣}{١} = ١$

⑨ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٢س^{٢} + س \text{ ظا}٣س}{\text{جا}^{٢}س}$ (كتاب ١٩٩٧+)

الحل

$= ٢ \text{نهـا}_{س \to ٠} \left(\frac{س}{\text{جا}س}\right)^{٢} + \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}س} \times \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{\text{جا}س}$

$= ٢ \times ١ \times ١ + ٢ = ٤$

⑩ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س + \text{ظا}٣س - \text{جا}س}{س}$ (كتاب)

الحل $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س}{س} + \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{س} - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$

$١ + ٣ - ١ = ٣$

⑦ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س \text{ جا}س - \text{ظا}٥س}{\text{جا}٤س - ٣س}$ (كتاب)

الحل

$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س \text{ جا}س}{س} - \frac{\text{ظا}٥س}{س}$

$\frac{\text{جا}٤س}{س} - ٣\frac{س}{س}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س} \cdot \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س}{س} - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٥س}{س}$

$= \frac{١ \times ١ - ٥}{٤ - ٣} = \frac{-٤}{١} = -٤$

④ $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{جا}^{٢}٣س}{س^{٣} - س^{٢}}$

الحل $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{\text{جا}^{٢}٣س}{س^{٢}(س - ١)}$

$= \text{نهـا}_{س \to ١} \left(\frac{\text{جا}٣س}{س}\right)^{٢} \times \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{١}{س - ١}$

$٩ \times -١ = -٩$

⑤ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س^{٤} + \text{جا}٢س}{٣س}$ (كتاب)

الحل $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س^{٣}}{٣س} + \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢س}{٣س}$

$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س}{٣} + \frac{٢}{٣}$

$= ٠ + \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

ثالثاً: $\text{نهـا}_{س \to م} \frac{\text{جا}(س)}{\text{هـ}(س)}$ ... ؟

الزاوية والمقدار متشابهان

لكن ليس على الصورة القياسية

في هذا النوع نفرض

ص = الزاوية لتحويل السؤال

إلى النتائج

مثال (٥) بدون كلا من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا } س - \text{جا } \pi}{س - \pi}$

الحل ÷ مشتقة

$ص = س - \pi$ ، $س \to \pi$ ، $ص \to 0$

$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } ص}{ص} = 1$

② $\lim_{س \to 3} \frac{\text{ظا}^2(س^2 - 9)}{\text{جا}^2(4 - س^2)}$

الحل ÷ مشتقة

$ص = س^2 - 9$

$ص \to 0$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 ص}{\text{جا}^2 - ص} = \lim_{ص \to 0} \left(\frac{\text{ظا } ص}{\text{جا} - ص} \right)^2 = \left(\frac{\lim_{ص \to 0} \frac{\text{ظا } ص}{ص}}{\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا} - ص}{ص}} \right)^2 = (-1)^2 = 1$

مثال (٦) بدون كلا من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to 8} \frac{\text{جا}(س^2 - 64)}{س - 8}$

الحل ÷ مشتقة

$\lim_{س \to 8} \frac{\text{جا}(س^2 - 64)}{س - 8} \times \frac{س + 8}{س + 8}$

$\lim_{س \to 8} \frac{\text{جا}(س^2 - 64)}{س^2 - 64} \times \lim_{س \to 8} (س + 8)$

$ص = س^2 - 64$ ، $ص \to 0$

$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } ص}{ص} \times 16 = 1 \times 16 = \boxed{16}$

③ $\lim_{س \to 3} \frac{\text{جا}(س^3 - 9)}{س^3 - س - 6}$

الحل ÷ مشتقة

$\lim_{س \to 3} \frac{\text{جا}(س^2 - 9)}{(س - 3)(س + 2)}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{\text{جا}(س^2 - 9)}{س - 3} \times \frac{س + 3}{س + 3} \times \frac{1}{س + 2}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{\text{جا}(س^2 - 6)}{س^2 - 9} \times \lim_{س \to 3} \frac{س + 3}{س + 2}$

$ص = س^2 - 9$ ، $ص \to 0$

$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } ص}{ص} \times \frac{6}{5} = 1 \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

رابعاً : مطابقة المقدار بالزاوية

$\lim_{س \to ؟} \frac{\text{جا } ه(س)}{ه(س)} = \ldots$

الزاوية والمقدار مختلفين

في هذا النوع يجب جعل المقدار والزاوية متشابهان عن طريق

1) الضرب أو القسمة بجزء من الزاوية عند التحليل

2) القسمة أو الضرب بنفس الزاوية

وبعد ذلك نستخرج الغرض

④ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(\text{جا } 3س)}{س}$

الحل ÷ مشتقة

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(\text{جا } 3س)}{\text{جا } 3س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } 3س}{س}$

$ص = \text{جا } 3س$ ، $ص \to 0$

$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا } ص}{ص} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

④ $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^٤ - ١٦)}{ظا(س^٣ - ٨)}$

الحل ÷ مشكلة

$= \lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^٤ - ١٦)}{\frac{س^٤ - ١٦}{١٦ - س^٤}} \div \frac{ظا(س^٣ - ٨)}{\frac{س^٣ - ٨}{٨ - س^٣}}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^٤ - ١٦)}{س^٤ - ١٦} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{ظا(س^٣ - ٨)} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٣ - ٨}$

$ص = س^٤ - ١٦$ ، $ع = س^٣ - ٨$

$ص \to ٠$ ، $ع \to ٠$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص} \times \lim_{ع \to ٠} \frac{ع}{ظا ع} \times \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)(س^٢+٤)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}$

$١ \times \frac{٣٢}{١٢} = \frac{٨}{٣}$

⑤ $\lim_{س \to ٠^+} \frac{جا لا س}{\sqrt{جا س}}$

الحل

لا س	−	−	+	+
لا جا س	+	+	−	−

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{\frac{جا لا س}{\sqrt{س}}}{\frac{لا جا س}{\sqrt{س}}}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{جا لا س}{لا س} \times \lim_{س \to ٠^+} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{جا س}}$

$ص = لا س$ ، $ص \to ٠^+$

$\lim_{ص \to ٠^+} \frac{جا ص}{ص} \times \lim_{س \to ٠^+} \sqrt{\frac{س}{جا س}}$

$١ \times ١ = ١$

⑥ $\lim_{س \to ١} \frac{جا(س-١)}{\sqrt{س}-١}$

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to ١} \frac{جا(س-١)}{\frac{س-١}{\sqrt{س}+١}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{جا(س-١)}{س-١} \times \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}+١}{١}$

$ص = س - ١$ ، $ص \to ٠$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص} \times \lim_{س \to ١} \frac{(\sqrt{س}-١)(\sqrt{س}+١)}{\sqrt{س}-١}$

$١ \times ٢ = ٢$

خامساً:
استخدام المطابقات

مثال (٧) جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٢س}{س جاس}$ (٢٠٠٠)

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢جا^٢س)}{س جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - ١ + ٢جا^٢س}{س جاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢جا^٢س}{س جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢جاس}{س}$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = ١ \times ٢ = ٢$

② $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٢س}{٣س^٢}$ (كتاب + ٢٠٠١)

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢جا^٢س)}{٣س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢جا^٢س}{٣س^٢}$

$= \frac{٢}{٣} \lim_{س \to ٠} (\frac{جاس}{س})^٢$

$= \frac{٢}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$

④ $\lim_{س \to ٢} \frac{جا٦س - جا٢٦}{س^٣ - ٢^٣}$

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢ جا(\frac{٦س - ٢٦}{٣}) جتا(\frac{٦س + ٢٦}{٣})}{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا(\frac{٦س - ٢٦}{٣})}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{جتا(\frac{٦س + ٢٦}{٣})}{س^٢ + ٢س + ٤}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا٣(س - ٢)}{س - ٢} \times$ جتا٢٦

ص = س − ٢ ، ص ← ٠

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا٣ص}{ص} \times$ جتا٢٦ = ٣ جتا٢٦

⑤ $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتاس}{(٣٠٦ س)^٢}$

الحل ÷ مشكلة $س^٢$

$\lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا٢س جاس}{س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} -٢ \frac{جا٢س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س}$

$= -٤ \times ١ = -٤$

⑥ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢جاس - \sqrt{٣}}{٢ جتاس - ١}$

الحل ÷ مشكله

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢(جاس - \frac{\sqrt{٣}}{٢})}{٢(جتاس - \frac{١}{٢})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{جاس - جا\frac{\pi}{٣}}{جتاس - جتا\frac{\pi}{٣}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{-٢ جا(\frac{س - \frac{\pi}{٣}}{٢}) جتا(\frac{س + \frac{\pi}{٣}}{٢})}{-٢ جا(\frac{س + \frac{\pi}{٣}}{٢}) جا(\frac{س - \frac{\pi}{٣}}{٢})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{-جتا(\frac{س + \frac{\pi}{٣}}{٢})}{جا(\frac{س + \frac{\pi}{٣}}{٢})}$

$= \frac{-١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

⑦ $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٢} - جتا(\frac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$ (كتاب)

الحل ÷ مشكله ، لاحظ جتا$\frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا\frac{\pi}{٣} - جتا(\frac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{-٢ جا(\frac{\frac{\pi}{٣} + هـ}{٢}) جا\frac{هـ}{٢}}{هـ}$

$\lim_{هـ \to ٠} -٢ \frac{جا(\frac{\frac{\pi}{٣} + هـ}{٢})}{هـ} \times \lim_{هـ \to ٠} \frac{جا\frac{هـ}{٢}}{هـ}$

$= -٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{-\sqrt{٣}}{٤}$

⑧ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس - \sqrt{٣} جاس}{٦س - ٣\pi}$ (كتاب + ٢٠١٥ هـ)

الحل ÷ مشكله

قاعده $\frac{أ جتاس + ب جاس}{خطي}$ نخرج عامل مشترك $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

⑤ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{س - \frac{\pi}{٢}}$

الحل ÷ مشكله

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا\frac{\pi}{٢} - جاس}{س - \frac{\pi}{٢}}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢ جا(\frac{\frac{\pi}{٢} - س}{٢}) جتا(\frac{\frac{\pi}{٢} + س}{٢})}{س - \frac{\pi}{٢}}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} جا(\frac{\frac{\pi}{٢} - س}{٢}) \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} ٢ جتا(\frac{\frac{\pi}{٢} + س}{٢})$

ص = $\frac{\pi}{٢}$ − س

ص ← ٠

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا(\frac{١}{٢} ص)}{ص} \times$ صفر

$= \frac{١}{٢} \times$ صفر $=$ صفر

$\lim_{س \to \frac{\pi}{6}}$ ما $= \frac{٣(\frac{١}{٢} جتاس - \frac{\sqrt{٣}}{٢} جاس)}{٦(س - \frac{\pi}{6})}$

$\frac{١}{٣} \lim_{س \to \frac{\pi}{6}}$ ما $= \frac{جا\frac{\pi}{6} متاس - جتا\frac{\pi}{6} جاس}{س - \frac{\pi}{6}}$

$\frac{١}{٣} \lim_{س \to \frac{\pi}{6}}$ ما $= \frac{جا(\frac{\pi}{6} - س)}{س - \frac{\pi}{6}}$

ص $= \frac{\pi}{6} - س$ ، ص $\to$ ٠

$\frac{١}{٣} \lim_{ص \to ٠}$ ما $= \frac{جا ص}{ص} = ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

---

⑨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{١ - جا٢س}{جاس - متاس}$

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{جا^٢س + متا^٢س - ٢ جاس متاس}{جاس - متاس}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{جا^٢س - ٢ جاس متاس + متا^٢س}{جاس - متاس}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{(جاس - متاس)(جاس - متاس)}{جاس - متاس}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= جاس - متاس$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} =$ صفر

---

⑩ $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{جا٣س - متا٢س - ١}{جاس - متاس}$

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{٢ جاس متاس - (٢متا^٢س - ١) - ١}{جاس - متاس}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{٢ جاس متاس - ٢متا^٢س}{جاس - متاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{٢ متاس (جاس - متاس)}{جاس - متاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= \frac{جاس}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ ما $= ٢ متاس = \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

---

⑪ $\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{١ - جا٢س - متا^٢س}{٤ س^٣}$ (٢٠٠٣ ش)

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{١ - متا^٢س - جا٢س}{٤ س^٣}$

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{جاس^٢ - ٢ جاس متاس}{٤ س^٣}$

$= \lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{جاس (جاس - ٢ متاس)}{٤ س^٣}$

$= \lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{جاس}{٤ س^٣} \times \lim_{س \to ٠}$ ما $جاس - ٢ متاس$

$= \frac{١}{٤} \times (٠ - ٢) = \frac{١}{٢}$

---

⑫ $\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{\sqrt{١ - جتا٢س}}$ (كتاب + ٢٠١٦ ش)

الحل ÷ $\sqrt{١ - جتا٢س} > ٠$ دائماً

÷ مشكلة

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{\sqrt{١ - (١ - ٢ جا^٢س)}}$

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{\sqrt{٢ جا^٢س}}$

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{\sqrt{٢} |جاس|}$ ، $\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{\sqrt{٢} جاس}$

نعرف |جاس| ، جاس | + + + | - - - | جاس

ربع أول ، ربع رابع

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{\sqrt{٢} جاس}$

$= \lim_{س \to ٠}$ ما $\frac{٢س}{\sqrt{٢} جاس} - \lim_{س \to ٠}$ ما $\frac{جاس}{\sqrt{٢} جاس}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{-\sqrt{٢} جاس}$

$= \lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س}{-\sqrt{٢} جاس} - \frac{جاس}{-\sqrt{٢} جاس}$

$= \frac{-٢}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\lim_{س \to ٠}$ ما $= \frac{٢س - جاس}{١ - جتا٢س}$ غير موجودة

(١٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{٣ حاس - ١}{٤ متا^٢س - ٣}$ (٢٠٠١)

الحل ∴ مشكله

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{٣ حاس - ١}{٤(١ - حا^٢س) - ٣}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{٣ حاس - ١}{١ - ٤ حا^٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{٣ حاس - ١}{(١ - ٢ حاس)(١ + ٢ حاس)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{-١}{١ + ٢ حاس} = \frac{-١}{٣}$

(١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - متا٦س}{متا٨س - ١}$ (كتاب + ٢٠٠٢)

الحل ∴ مشكله

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢ حا^٢٣س)}{١ - ٢ حا^٤س - ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ حا^٢٣س}{-٢ حا^٤س} = \lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢٣س}{-حا^٤س}$

$= -\lim_{س \to ٠} \left(\frac{حا٣س}{حا٤س}\right)^٢$

$= -\left(\lim_{س \to ٠} \frac{حا٣س}{س} \div \lim_{س \to ٠} \frac{حا٤س}{س}\right)^٢ = -\left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = -\frac{٩}{١٦}$

(١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{س متا٢س - س متا٤س}{س^٣}$ (٢٠٠٧ م)

الحل ∴ مشكله

$\lim_{س \to ٠} \frac{س(متا٢س - متا٤س)}{س^٣}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا(٣س) جا(-س)}{س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٣ جا٣س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا-س}{س}$

$= -٦ \times -١ = ٦$

(١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - متا٨س - ٣ حا^٢س}{١٠ س^٢}$ (٢٠٠٨ ص)

الحل ∴ مشكله

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - ٢ حا^٢س - متا٨س}{١٠ س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا٢س - متا٨س}{١٠ س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا٥س جا-٣س}{١٠ س^٢}$

$= \frac{-١}{٥} \lim_{س \to ٠} \frac{حا٥س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا-٣س}{س}$

$= \frac{-١}{٥} \times ٥ \times -٣ =$ ٣

(١٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{متا^٢س}{١ - حا^٣س}$

الحل ∴ مشكله

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{١ - حا^٢س}{١ - حا^٣س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{(١ - حاس)(١ + حاس)}{(١ - حاس)(١ + حاس + حا^٢س)}$

$= \frac{٢}{٣}$

(١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{١ - ظاس}{جتا٢س}$

الحل ∴ مشكله

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{١ - \frac{حاس}{متاس}}{متا٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - حاس}{متاس} \times \frac{١}{متا٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - حاس}{متاس} \times \frac{١}{متاس - حاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - حاس}{متاس} \times \frac{١}{(متاس - حاس)(متاس + حاس)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{١}{متاس (جتاس + حاس)} = ١$

سادساً:
النهايات الشهيرة

س : متى يستخدم هذا القانون
ج : في حال وجود
١ ± جا ، ١ ± جتا ، ١ ± ظا
١ ± ظتا ، ١ ± قا ، ١ ± قتا
جا ± جتا

مثال (٨) جد كلاً من النهايات الآتية

① $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س جا س}}$ (كتاب ٢٠١٢ م)

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س جا س}} \times \frac{١ + \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}^٢ س}{\text{س جا س}(١ + \text{جتا س})} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + \text{جتا س}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢ س}{\text{س جا س}} \times \frac{١}{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \frac{١}{٢} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢ س - ٣ \text{جا س}}{\text{س}^٢}$ ص ٢٠٠٥ ش

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to 0} \frac{٢ \text{جا س جتا س} - ٣ \text{جا س}}{\text{س}^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س}(٢ \text{جتا س} - ٣)}{\text{س}^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \lim_{س \to 0} \frac{٢ \text{جتا س} - ٣}{\text{جتا س} + ١} \times \frac{\text{جتا س} + ١}{\text{جتا س} + ١}$

$= ٢ \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^٢ س - ١}{\text{س}^٢} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{\text{جتا س} + ١}$

$= ٢ \times \lim_{س \to 0} \frac{-\text{جا}^٢ س}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{٢}$

$= -\lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^٢ = -١$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{قا}^٢ س - ١}{\text{س}^٢}$ (كتاب + ٢٠١٠ م)

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{قا}^٢ س - ١}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{قا}^٢ س + ١}{\text{قا}^٢ س + ١}$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^٢ س - ١}{\text{س}^٢} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{\text{قا}^٢ س + ١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^٢ س}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = ٢$

④ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جتا س}}}{\text{جا س}}$ (٢٠٠٠)

الحل $\frac{٠}{٠}$ = ÷ ١ + جتا س ≠ ٠

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جتا س}}}{\text{جا س}} \times \frac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}^٢ س}}{\text{جا س}\sqrt{١ - \text{جتا س}}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{\text{جا}^٢ س}}{\text{جا س}} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١}{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا س}}{\text{جا س}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{|\text{جا س}|}{\text{جا س}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$|\text{جا س}| = \begin{cases} \text{جا س} & \text{ربع أول + ربع ثاني} \\ -\text{جا س} & \text{ربع ثالث} \end{cases}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{-\text{جا س}}{\text{جا س}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا س} - \text{جا س}}{\text{س}^٣}$ (كتاب + ٢٠١٠ ش)

الحل ÷ مشكلة

$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} - \text{جا س}}{\text{س}^٣}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س} - \text{جا س جتا س}}{\text{س}^٣ \text{جتا س}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}^2} \times 1$ ①

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{\text{س}^2} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا س}}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{\text{س}^2} \times \frac{1}{2}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

سابعاً:

وجود ن آ في الحقار أو الزاويه وطابقة الحقار بالزاويه

في هذا النوع نستخدم الصوره العامه للزاويه من بعها (زاويه امربع) وفي حال ن آ في الحقار من الممكن استخراج الغرض مباشرة"

ملاحظه

يجب جعل ن آ في الوال مساويه لقيمة الزاويه التي تقترب منها س

مثال (٩) جد كلاً من النهايات الآتيه

① $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{2}}$ (الكتاب)

الحل ÷ مشكله

$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{2}}$

$ص = \frac{\pi}{2} - س$ ، $ص \to 0$

$\text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{-ص} = -1$

② $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{2س - \pi}$ (الكتاب + ٢٠١٢ س)

الحل ناتج التعويض ÷ مشكله

$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{2(س - \frac{\pi}{2})}$ $ص = \frac{\pi}{2} - س$ ، $ص \to 0$

$\frac{1}{2} \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{-ص} = \frac{1}{2}$

③ $\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظتا س}}{\pi - 2س}$ (الكتاب)

الحل ÷ مشكله

$\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{2} - س)}{2(\frac{\pi}{2} - س)}$ ، $ص = \frac{\pi}{2} - س$ ، $ص \to 0$

$= \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{ظا ص}}{2ص} = \frac{1}{2}$

④ $\text{نها}_{س \to \pi 3} \frac{\text{جا س}}{\frac{س}{3} - \pi}$ (الكتاب)

الحل ÷ مشكله

$\text{نها}_{س \to \pi 3} \frac{\text{جا}(\pi 3 - س)}{\frac{1}{3}(\pi 3 - س)}$ ، $ص = \pi 3 - س$ ، $ص \to 0$

$= -3 \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{ص} = -1 \times -3 = -3$

⑤ $\text{نها}_{س \to 3} \frac{س - 3}{\text{ظا}(\pi 2 - \pi س)}$ (الكتاب + ٢٠١٤ س)

الحل ÷ مشكله

$\text{نها}_{س \to 3} \frac{س - 3}{-\text{ظا}(\pi 2 - \pi س)}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{\tan(\pi(٣-س))}$ $\quad ص = ٣ - س$ $\quad ص \to ٠$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{ص}{\tan \pi ص} = \frac{١}{\pi}$

---

⑥ $\lim_{س \to ١} \frac{\sin \frac{\pi}{٢} س}{س - ١}$ (كتاب ٢٠١٣ ش)

الحل : مشكلة

$\lim_{س \to ١} \frac{\sin(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} س)}{س - ١}$

$\lim_{س \to ١} \frac{\sin \frac{\pi}{٢}(١ - س)}{س - ١}$ $\quad ص = ١ - س$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{\sin \frac{\pi}{٢} ص}{-ص} = \frac{-\pi}{٢}$

---

⑦ $\lim_{س \to ١} \frac{\tan \pi س}{س^٢ - ١}$

الحل : مشكلة

$\lim_{س \to ١} \frac{-\tan(\pi - \pi س)}{س - ١} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{س + ١}$

$\frac{-١}{٢} \times \lim_{س \to ١} \frac{\tan \pi(١ - س)}{س - ١}$

$ص = ١ - س$ ، $ص \to ٠$

$= \frac{-١}{٢} \lim_{ص \to ٠} \frac{\tan \pi ص}{-ص} = \frac{\pi}{٢}$

---

⑧ $\lim_{س \to ١} \frac{س \sin \frac{\pi}{س}}{س - ١}$ (كتاب ٢٠٠٧ ش)

الحل : مشكلة

$\lim_{س \to ١} \frac{س \sin(\pi - \frac{\pi}{س})}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sin \pi(١ - \frac{١}{س})}{\frac{س - ١}{س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sin \pi(١ - \frac{١}{س})}{١ - \frac{١}{س}}$

$ص = ١ - \frac{١}{س}$ ، $ص \to ٠$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{\sin \pi ص}{ص} = \pi$

---

⑨ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \sin س}{(\pi - ٢س)^٢}$ (كتاب ٢٠٠٤ ش)

الحل : مشكلة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \sin س}{٤(\frac{\pi}{٢} - س)^٢} \times \frac{١ + \sin س}{١ + \sin س}$

$\frac{١}{٤} \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \sin^٢ س}{(\frac{\pi}{٢} - س)^٢} = \frac{١}{٤} \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\cos^٢ س}{(\frac{\pi}{٢} - س)^٢}$

$\frac{١}{٤} \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{٢} - س)}{\frac{\pi}{٢} - س}\right)^٢ \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١}{١ + \sin س}$

$ص = \frac{\pi}{٢} - س$

$ص \to ٠$

$= \frac{١}{٤} \times ١^٢ \left(\lim_{ص \to ٠} \frac{\sin ص}{ص}\right)^٢ = \frac{١}{٤}$

---

⑩ $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sin س - \cos س}{س - \frac{\pi}{٤}}$ (كتاب ٢٠١١ ش)

الحل : مشكلة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sin س - \cos س}{س - \frac{\pi}{٤}} \times \frac{\sin س + \cos س}{\sin س + \cos س}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sin^٢ س - \cos^٢ س}{(س - \frac{\pi}{٤})(\sin س + \cos س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\sin س + \cos س}$

$\frac{-٢\sqrt{٢}}{٢} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{-(\cos^٢ س - \sin^٢ س)}{(س - \frac{\pi}{٤})(\sin س + \cos س)}$

$\frac{-٢\sqrt{٢}}{٢} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\cos ٢س}{(س - \frac{\pi}{٤})(\sin س + \cos س)}$

$\frac{-٢\sqrt{٢}}{٢} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sin(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{(س - \frac{\pi}{٤})(\sin س + \cos س)}$

$\frac{-٢\sqrt{٢}}{٢} \times \lim_{ص \to ٠} \frac{\sin ٢ص}{ص(\sin(ص + \frac{\pi}{٤}) + \cos(ص + \frac{\pi}{٤}))}$

$ص = \frac{\pi}{٤} - س$ ، $ص \to ٠$

$\frac{-٢\sqrt{٢}}{٢} \times \lim_{ص \to ٠} \frac{\sin ٢ص}{ص} = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٢} \times ٢$

$= -٢\sqrt{٢}$

(١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \text{جتا}^2 س}{(\pi + 2س)^2}$ (٢٠٠٤ م)

الحل : مشكلة

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\,\text{جتا}^2 س - 1}{(\pi + 2س)^2}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\,\text{جتا}^2 س}{(\pi + 2س)^2}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{\text{جتا} س}{\pi + 2س} \right)^2$

في حال وجود مثلثين في البسط وخطي في المقام نفرض ص = الخطي

ص = $\pi + 2س$ ، ص $\to$ ٠ ، $س = \frac{ص}{2} - \frac{\pi}{2}$

$= 2 \lim_{ص \to ٠} \left(\frac{\text{جتا}(\frac{ص}{2} - \frac{\pi}{2})}{ص} \right)^2$

$= 2 \lim_{ص \to ٠} \left(\frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - \frac{ص}{2})}{ص} \right)^2$

$= 2 \lim_{ص \to ٠} \left(\frac{\text{جا} \frac{ص}{2}}{ص} \right)^2$

$= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

الجزء الثاني: إيجاد ثوابت

مثال (١٠) (كتاب + ٢٠١٣ م)

إذا كان م(س) = $\begin{cases} \frac{\text{اس}^4 - 16س}{\text{اس} - 2} & ، س < 2 \\ \text{أ جتا}(\frac{\pi}{2} س) + 2 & ، س \geq 2 \end{cases}$

جد قيمة الثابت (أ) التي تجعل $\lim_{س \to 2}$ م(س) موجودة

الحل $\lim_{س \to 2}$ م(س) موجودة

$\lim_{س \to 2^+}$ م(س) = $\lim_{س \to 2^-}$ م(س)

$\lim_{س \to 2^+} \frac{\text{اس}^4 - 16س}{\text{اس} - 2} = \lim_{س \to 2^-}$ أ جتا$(\frac{\pi}{2} س) + 2$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{|(س-2)(س+1)|}{|س-2|} = -أ + 2$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{|س-2| \times |س+1|}{|س-2|} = -أ + 2$

$\lim_{س \to 2^+} |س+1| = -أ + 2$

$٦ = -أ + 2$ ← $\boxed{أ = -4}$

مثال (١١) (كتاب)

إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}أس}{\text{ظا}ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{س} = ٦$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

الحل $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}أس}{س} = ٦$

$أ = ٦$ ← $\boxed{أ = ١٢}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{ب س} = ٦$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{س(ب)} = ٦$

$\frac{٣}{ب} = ٦$ ← $\frac{١}{ب} = ٢$

$٢(ب) = ١$ ← $ب = \frac{١}{٢}$

$\boxed{ب = \frac{١}{٢}}$

مثال (١٢) (كتاب)

إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \frac{٤س^2 - \text{جا}س}{ن س - \text{ظا}٤س} = \frac{١}{٤}$

جد قيمة الثابت (ب)

الحل $\lim_{س \to ٠} \frac{٤س^2 - \text{جا}س}{ن س - \text{ظا}٤س} = \frac{١}{٤}$

$\frac{\lim_{س \to ٠} \frac{٤س^2}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}}{\lim_{س \to ٠} \frac{ن س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٤س}{س}} = \frac{١}{٤}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{ع(س) - ب}{٤ - ب} = \frac{١}{٤}$

$\frac{ن - ن}{٤ - ن} = \frac{١}{٤} \leftarrow \frac{ن - ن}{ن - ٤} = \frac{١}{٤}$

$-٤ب = ب - ٤$

$-٥ب = -٤$

$ب = \frac{٤}{٥}$

ورقة عمل (٤)

السؤال الأول

جد كلاً من النهايات الآتية

(١) $\lim_{س \to \pi} \frac{١ + \text{جتا}س}{(س - \pi)^{٢}}$ (٠١٥، ش) — $\frac{١}{٢}$

(٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٢ - س}{\text{جا}\pi س}$ (٠١٥، ش) — $-\frac{١}{\pi}$

(٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢\text{جا}س - ١}{٤\text{جتا}^{٢}س - ٣}$ (٠١٥، ش) — $\frac{١}{٢}$

(٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢س}{س^{٢} - \frac{\pi}{٢}س}$ (٠١٣، ش) — $-\frac{٤}{\pi}$

(٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - \sqrt{٢}\,\text{جا}س}{١ - ٢\sqrt{٢}\,\text{جتا}س}$ (٠١٥، ش) — -١

(٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٤ - س\,\text{ظا}س - ٤\text{جتا}س}{س\,\text{جا}٤س}$ (٠١٦، ش) — $\frac{١}{٤}$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢\text{جا}٣س - \text{جا}٤س}{س^{٣}}$ (٠١٧، ش) — ٨

(٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}س}{\pi + ٢س}$ (٠٠٨، ش) — $\frac{١}{٢}$

(٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}^{٢}س}{س^{٣}}$ — -٦

(١٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٦س - \text{جتا}٤س}{س^{٢}}$ كتاب — -١٠

(١١) $\lim_{س \to -٩} \frac{\text{جا}س + \text{جا}٩}{٩ + س}$ كتاب — $\text{جتا}٩$

(١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢س}{س\sqrt{٣}\,س}$ ١٩٩٩ — غير موجوده

(١٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢س}{٦س^{٢}}$ — $\frac{١}{٣}$

السؤال الثاني

(١) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{٩ - \text{جتا}أس}{س^{٢}} = ١٨$

جد قيمة الثوابت $أ ، ب$

$أ = ١ ، ب = \pm ٦$

(٢) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{س\,\text{جا}س - \text{ظا}٢س}{\text{جا}٣س - أس} = ١$

جد قيمة الثابت $(أ)$ — $أ = ٥$

(٣) إذا كان $\lim_{س \to ٠} \frac{ب - \text{جتا}أس}{٦س^{٢}} = \frac{١}{٣}$ ١٩٩٨

جد قيمة كل من الثابتين $أ ، ب$

$ب = ١ ، أ = \pm ٢$

الفصل الثاني: الإتصال

الدرس الأول: الإتصال عند نقطة

يكون الإقتران $f(س)$ متصلاً عند نقطة مثل (P) إذا كان منحنى الإقتران عند تلك النقطة لا يتوي على انقطاع أو قفزه بحيث يمكن رسم منحنى الإقتران دون رفع القلم عن الورقة

شروط اتصال الإقتران $f(س)$ عند النقطة (P)

1. أن يكون الإقتران معرف عند $س = P$ أي أن $f(P)$ = عدد حقيقي
2. نهاية $f(س)$ عند $س \to P$ موجودة
3. نهاية $f(س)$ عند $س \to P$ = $f(P)$

* أي شرط من هذه الشروط لا يتحقق يعتبر الإقتران $f(س)$ غير متصل (منفصل) عند $س = P$

دراسة الإتصال على بعض الإقترانات

1. إقترانات كثيرات الحدود متصلة على $ح$
2. الجذور الفردية متصلة على $ح$
3. الجذور الزوجية متصلة على مجالها $\sqrt{f(س)}$ $f(س) \geq 0$
   بشرط أن تكون النقطة واقعة ضمن الفترة وبنهايتها موجودة من الجهتين
4. الإقتران النسبي متصل على $ح - \{$أصفار المقام$\}$
   $P \in ح - \{$أصفار المقام$\}$

توضيح

1. $f(س) = \sqrt{س - 3}$
   البحث في اتصال $f(س)$ عند
   1) $س = 5$ 2) $س = 1$ 3) $س = 3$
   الحل $\sqrt{س - 3}$ — — — | + + + (عند 3)
   1) عند $س = 5$، $\sqrt{س - 3}$ متصل لأنه معرف
   2) عند $س = 1$، $\sqrt{س - 3}$ غير متصل
   لأنه غير معرف $f(1) \to \sqrt{-2}$ غير معرف
   3) عند $س = 3$، $\sqrt{س - 3}$ غير متصل
   لأن نهاية $f(س)$ عند $س \to 3$ غير موجودة

③ $م(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ٩}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند

١) $س = ٤$ ، ٢) $س = -٣$

الحل $م(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ٩}$

متصل $\forall$ ح $-$ {-٣ ، ٣} مجال الاقتران

متصل $\forall$ ح $-$ {-٣ ، ٣}

١) متصل عند $س = ٤$

٢) غير متصل عند $س = -٣$

الجزء الأول :

البحث في الاتصال عند نقطة

مثال (١) كتاب

إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٦ - س & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران $م(س)$ عند $س = ٢$

الحل $م(٢) = -٤$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} ٦ - س = -٤$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} \leftarrow$ صيغة $\frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)^{١}(س + ٢)}{س - ٢} = -٤$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

$م(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال (٢) كتاب

إذا كان $م(س) = \begin{cases} ٣س + ٥ & ، س \leq ٣ \\ ٣س^{٢} - ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$

حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٣$

الحل $م(٣) = ٣ \times ٣ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣^{+}} م(س) = \lim_{س \to ٣^{+}} ٣س^{٢} - ٤ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = م(٣) = ١٤$

$م(س)$ متصل عند $س = ٣$

مثال (٣) كتاب

$م(س) = \begin{cases} \frac{|س^{٢} - ١٤|}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ س + ٣ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٣$

الحل $م(٣) = ٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{|س^{٢} - ١٤|}{س - ٣}$

نفحص $|س^{٢} - ١٤|$ ⊙ إعادة تعريف

$س^{٢} - ١٤$	$-$	$+$
	$\sqrt{١٤}$	٣

$\lim_{س \to ٣^{+}}$ $\frac{س^{٢} - ١٤}{س - ٣}$ ÷ صيغة

$\lim_{س \to ٣^{+}} \frac{(س - \sqrt{١٤})(س + \sqrt{١٤})}{س - ٣} = ٤$

$\lim_{س \to ٣^{-}} \frac{١٤ - س^{٢}}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{(\sqrt{١٤} - س)(\sqrt{١٤} + س)}{س - ٣}$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = -٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س)$ غير موجودة

$م(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

مثال (٤) كتاب + (٣،١٤ ص)

إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \frac{س^3+س^2+2س-4}{س-1} & ، س \neq 1 \\ 5س-1 & ، س = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = 1$

الحل $ل(1) = 5 - 1 = 4$

$نها_{س \to 1} ل(س) = نها_{س \to 1} \frac{س^3+س^2+2س-4}{س-1}$ ← شكل

قسمة ترتيبية

$نها_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+2س+4)}{س-1} = 7$

$نها_{س \to 1} ل(س) \neq ل(1)$

$\therefore ل(س)$ غير متصل عند $س = 1$

مثال (٥) كتاب

إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{|ظاس|}{س} & ، س < 0 \\ 1 - جتاس & ، س \geq 0 \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = 0$

الحل $م(0) = 1 - 1 = صفر$

* $نها_{س \to 0^+} م(س) = نها_{س \to 0^+} (1 - جتاس) = 1 - 1 = صفر$

* $نها_{س \to 0^-} م(س) = نها_{س \to 0^-} \frac{|ظاس|}{س}$

$|ظاس|$ اعادة تعريف

	$-ظاس$		$ظاس$
$س$	$---$	0	$+++$
	π		0

$نها_{س \to 0^-} \frac{-ظاس}{س} = -1$

$\because نها_{س \to 0^+} م(س) \neq نها_{س \to 0^-} م(س)$

$\therefore م(س)$ غير متصل عند $س = 0$

مثال (٦) كتاب

إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س-3} & ، س < 3 \\ س^2 - 9 & ، س \geq 3 \end{cases}$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = 3$

الحل $ل(3) = 1 \cdot 1 = صفر$

* $نها_{س \to 3^+} ل(س) = نها_{س \to 3^+} (س^2 - 9)$ نعمل تعريف

	$س^2-9$		$س^2-9$
$س$	$+++$	0	$---$
	3		-3

$نها_{س \to 3^+} (س^2 - 9) = صفر$

* $نها_{س \to 3^-} ل(س) = نها_{س \to 3^-} \sqrt{س-3}$ ← شكل

$نها_{س \to 3^-} \sqrt{س-3} = صفر$

	$---$		$+++$
$س$		3	

$نها_{س \to 3} ل(س) = صفر = ل(3)$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = 3$

مثال (٧) (كتاب)

$م(س) = \begin{cases} س^2 + س & ، س < 2 \\ [\![س + 4]\!] & ، س = 2 \\ \sqrt{س^2 + 5} + \frac{6}{س} & ، س > 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = 2$

الحل $م(2) = [\![6]\!] = 6$

* $نها_{س \to 2^+} م(س) = نها_{س \to 2^+} \sqrt{س^2 + 5} + \frac{6}{س} = 3 + 3 = 6$

* $نها_{س \to 2^-} ل(س) = نها_{س \to 2^-} س^2 + س = 6$

$نها_{س \to 2} ل(س) = ل(2) = 6$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = 2$

مثال (٨) كتاب + ٣،١٤ ص

$ع(س) = \begin{cases} |\frac{س}{2} - 1| & ، -1 < س < 3 \\ [\![س + 3]\!] & ، 3 \leq س < 4 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران $ع(س)$ عند $س = 3$

الحل $ع(3) = [\![\frac{3}{2} + 3]\!] = [\![5 و 4]\!] = 4$

* $\lim_{س \to ٣} ع(س) = \lim_{س \to ٣} [٥ س + ٣]$

محصور $[٥ ، ٤] = ٤$

* $\lim_{س \to ٣} ع(س) = \lim_{س \to ٣} |س - ١|$ محصور ④

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س}{٣} - ١ = \frac{١}{٣}$

$\lim_{س \to ٣} ع(س)$ غير موجودة

ع (س) غير متصل عند س = ٣

مثال (٩) ٢٠١٧ شتوي

$م(س) = \begin{cases} (س - ٣)^٢ & \\ [س] - س + [س - ٤] & س \in]٤ ، ٦[\end{cases}$

ابحث في اتصال م (س) عند س = ٤

الحل م (٤) = ١

* $\lim_{س \to ٤^+} م(س) = \lim_{س \to ٤^+} (س - ٣)^٢ = ١$

* $\lim_{س \to ٤^-} م(س) = \lim_{س \to ٤^-}$ [س] − س + [س − ٤]

[س] : ٤ ٣ ٢ ١ ٠ | ٥ ٤ ٣ ٢ ١

$\lim_{س \to ٤^-} = \lim_{س \to ٤^-} |س - ٣| + ٣ - ٤$

محصور $|س - ٣|$ ⑤

$\lim_{س \to ٤^-} = \lim_{س \to ٤^-} س - ٣ - ١$

$\lim_{س \to ٤^-} = \frac{س - ٤}{س - ٤} = ١$

$\lim_{س \to ٤} م(س) = م(٤) = ١$

م (س) متصل عند س = ٤

ابحث في اتصال ل (س) عند س = $\frac{١}{٣}$

الحل ل $(\frac{١}{٣}) = -٢$

* $\lim_{س \to \frac{١}{٣}^+} ل(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٣}^+} -٦س - [س]$

محصور $[س] \leftarrow [\frac{١}{٣}] = ٠$

$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^+} = -٦س = -٦ \times \frac{١}{٣} = -٢$

* $\lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} ل(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{(١ - ٣س)^٢}}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{٩س^٢ - ١}{|١ - ٣س|}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}^-} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{١ - ٣س}$

$= -٢$

$\lim_{س \to \frac{١}{٣}} ل(س) = ل(\frac{١}{٣}) = -٢$

ل (س) متصل عند س = $\frac{١}{٣}$

الجزء الثاني : نظريات الاتصال

إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = ﻫ فإن

① م + هـ متصل عند س = ﻫ

② م − هـ متصل عند س = ﻫ

③ م × هـ متصل عند س = ﻫ

④ $\frac{م}{هـ}$ متصل عند س = ﻫ

هـ (ﻫ) ≠ صفر

⑤ $\frac{م}{هـ}$ غير متصل عند س = ﻫ

هـ (ﻫ) = صفر

مثال (١٠) آداب + (٢٠١٦ شتوي)

ل (س) = $\begin{cases} \frac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}} & س \in]\frac{١}{٣} ، ٢[\\ -٢ & س = \frac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & س \in]-\infty ، \frac{١}{٣}[\end{cases}$

ابحث في اتصال ل (س) عند س = $\frac{١}{٣}$ ، س = $\frac{٤}{٣}$

* إذا كان على الأقل أحد القوسين أو كليهما غير متصل عند س = أ فيقال النظرية ، وفي هذه الحالة يتم إجراء العمليات الحسابية بين القوسين ثم نبحث في اتصال القوس الناتج عند النقطة (أ)

مثال (١١) قتاب

إذا كان م(س) ، هـ(س) قوسين متصلين عند س = أ ، أثبت أن م(س) + هـ(س) متصل عند س = أ

الحل نفرض أن ع(س) = م(س) + هـ(س)

ع(أ) = م(أ) + هـ(أ)

$\lim_{س \to أ} ع(س) = \lim_{س \to أ} م(س) + هـ(س)$

$= \lim_{س \to أ} م(س) + \lim_{س \to أ} هـ(س)$

= م(أ) + هـ(أ)

∴ ع(س) = م(س) + هـ(س) متصل عند س = أ

مثال (١٢)

إذا كان $م(س) = \frac{1 - س^2}{س - 1}$ ،

هـ(س) = $\sqrt{س^2 + 4}$ ، ابحث في اتصال

ع(س) = م(س) × هـ(س) عند س = ٢

الحل م(س) = $\frac{1 - س^2}{س - 1}$ متصل ∀ ح - {١}

متصل عند س = ٢

هـ(س) = $\sqrt{س^2 + 4}$ + + + + + + متصل على ح ∴ متصل عند س = ٢

حسب نظرية الاتصال

ع(س) = م(س) × هـ(س) متصل عند س = ٢

مثال (١٣)

$م(س) = \begin{cases} س^2 & ، س < 2 \\ 3 & ، س = 2 \\ س + 2 & ، س > 2 \end{cases}$

هـ(س) = $س^3 - 1$ ، بين أن (م × هـ)(س) متصل عند س = ٢

الحل هـ(س) = $س^3 - 1$ ، متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود

* اتصال م(س)

م(٢) = ٤

$\lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^+} 3س - 2 = 4$

$\lim_{س \to 2^-} م(س) = \lim_{س \to 2^-} س^2 = 4$

$\lim_{س \to 2} م(س) = م(2) = 4$

م(س) متصل عند س = ٢

حسب النظرية (م × هـ)(س) متصل عند س = ٢

مثال (١٤)

إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{1}{8}س^2 + 1 & ، س \geq 2 \\ \frac{س}{2} + 2 & ، س < 2 \end{cases}$

$هـ(س) = \frac{جتا \frac{\pi}{4} س}{س}$

ابحث في اتصال (م + هـ)(س) عند س = ٢

الحل اتصال هـ(س)

$هـ(س) = \frac{جتا \frac{\pi}{4} س}{س}$ متصل ∀ ح - {٠}

متصل عند س = ٢

* اتصال م(س)

م(٢) = $\frac{3}{2}$

$\lim_{س \to 2^+} م(س) = \frac{3}{2}$

$\lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^+} \frac{1}{8}س^2 + 1 = \frac{س}{2} + 2$

$= \frac{1}{8}(4 + 8) = \frac{3}{2}$

$\lim_{س \to 2^-} م(س) = \lim_{س \to 2^-} \frac{س}{2} + 2 = 3$

∴ $\lim_{س \to 2} م(س)$ غير موجود

∴ م(س) غير متصل عند س = ٢

$= \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س+٢} \times \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{س-٢}$

$= \frac{١}{٤} \times ١٢ = ٣$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = ص(ع)$ متصل عند $س = ٢$

$(م + هـ)(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال (١٥) كتاب

ابحث في اتصال $(م+ع)(س)$ عند $س = ٢$

حيث $م(س) = \begin{cases} س^٢+٤ & ، س \geq ٢ \\ س+٦ & ، س < ٢ \end{cases}$

$ع(س) = \begin{cases} س^٣-٢ & ، س \geq ٢ \\ ٣س & ، س < ٢ \end{cases}$

الحل اتصال $م(س)$

$م(٢) = ٨$

$\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} س+٦ = ٨$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = \lim_{س \to ٢^-} س^٢+٤ = ٨$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = ٨$

$م(س)$ متصل عند $س = ٢$

اتصال $ع(س)$

$ع(٢) = ٦$

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = \lim_{س \to ٢^+} ٣س = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \lim_{س \to ٢^-} س^٢-٢ = ٦$

$\lim_{س \to ٢} ع(س) = ٦$

$ع(س)$ متصل عند $س = ٢$

$(م + ع)(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال (١٦)

إذا كان $م(س) = س^٢$ ،

$هـ(س) = \frac{١}{س^٢}$ ، ابحث في اتصال

$(م \times هـ)(س)$ عند $س = صفر$

الحل $م(س)$ متصل عند $س = صفر$

لأنه كثير حدود

$هـ(س) = \frac{١}{س^٢}$ متصل $\forall$ ح $\in$ ح

لأنه نسبي

$(م \times هـ)(س) = \frac{س^٢}{س^٢}$

$ل(س) = \frac{س^٢}{س^٢}$

$ل(٠) = \frac{٠}{٠}$ غير معرف

$ل(س) = م(س) \times هـ(س)$ غير متصل عند $س = صفر$

مثال (١٧) كتاب

إذا كان $م(س) = (س-١)^٢ [٢-س]$

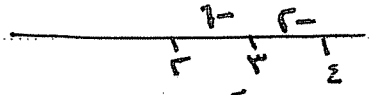
ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٣$

الحل $(س-١)^٢$ متصل عند $س = ٣$ كثير حدود

$[٢-س]$ ← فحص $[-١]$ غير متصل

$س = ٢$

$ل = ١$



$م(س) = \begin{cases} -(س-١)^٢ & ، س < ٢ \\ -٢(س-١)^٢ & ، ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

$م(٣) = -٤$

$\lim_{س \to ٣^+} م(س) = \lim_{س \to ٣^+} -٢(س-١)^٢ = -٨$

$\lim_{س \to ٣^-} م(س) = \lim_{س \to ٣^-} -(س-١)^٢ = -٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س)$ غير موجود

$م(س)$ غير متصل عند $س = ٣$

مثال (١٨) ٢٠١٤ ش

$م(س) = \begin{cases} س+٢ & ، س \leq ١ \\ ٣س^٢ & ، ١ < س < ١٢ \\ ١٣س-٢١ & ، س \geq ١٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \leq ١ \\ ٢س-١ & ، س > ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال $(م + هـ)(س)$ عند $س = ١$

الحل م (س) غير متصل عند س = ١

هـ (س) غير متصل عند س = ١

ل (س) = م (س) + هـ (س)

ل (١) = م (١) + هـ (١) = ٣ + ٢ = ٥

$\lim_{س \to ١} ل(س) = \lim_{س \to ١} م(س) + \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$\lim_{س \to ١^+} ل(س) = \lim_{س \to ١^+} ٣س^٢ + \lim_{س \to ١^+} ١$

$= ٣ + ٢$

$\lim_{س \to ١^+} ل(س) = ٥$

* $\lim_{س \to ١^-} ل(س) = \lim_{س \to ١^-} م(س) + هـ(س)$

$= \lim_{س \to ١^-} ٢ + ٢س + س^٢ = ٥$

ل (س) = م (س) + هـ (س)

متصل عند س = ١

مثال (١٩)

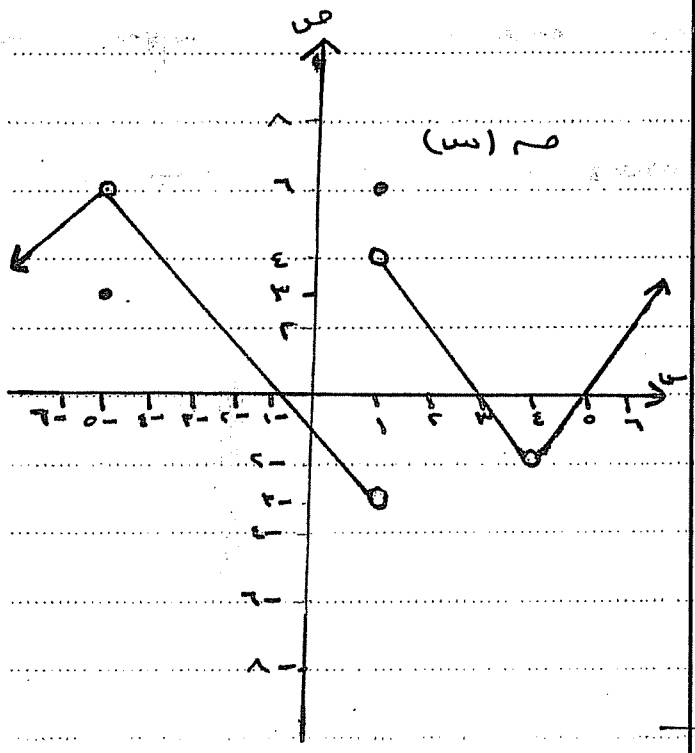
$م(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \geq ٣ \\ س & ، س < ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال (م × هـ) (س) عند س = ٣

الحل

مثال ١٠١ (كتاب)



معتمدا" الشكل أعلاه ، جد قيم (P) التي يكون م(س) عندها غير متصل

الحل * ٥- ← $\lim_{س \to -٥} م(س) \neq م(-٥)$

* ١ ← $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$

$\lim_{س \to ١} م(س)$ غير موجوده

* ٤ ← القيمتان غير معرف عند P = ٤

P = P- ، ٥ ، ١ ، ٤ ، P

ملاحظة (٣) حالات النهاية

① $\lim_{س \to P} م(س) = م(P)$

② إذا وجدت الصورة (المساواة) مع اختلاف جهتي النهاية نقل على

$\lim_{س \to P^+} م(س) = \lim_{س \to P^-} م(س)$

③ إذا وجدت الصورة بشكل منفرد نقل على $\lim_{س \to P} م(س) = م(P)$ ، م(P) = $\lim_{س \to P} م(س)$

الجزء الثالث :
إيجاد ثوابت

مثال (٢١) كتاب + ٢٠١٠ ش

إذا كان $g(س) = \begin{cases} \frac{أ}{س} + س^2 & ، س < 2 \\ [س] + 3 & ، 2 \leq س < 3 \\ ٧ & ، س = 3 \end{cases}$

متصلة عند $س = 2$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل $g(س)$ متصل عند $س = أ$

$\therefore$ نهـا $_{س \to أ} g(س)$ موجودة

نهـا $_{س \to 3^+} g(س)$ = نهـا $_{س \to 2^-} g(س)$

نهـا $_{س \to 2^+} [س] + 3$ = نهـا $_{س \to 2^-} \frac{أ}{س} + س^2$

$4 + 3 = \frac{أ}{2} + 4$

$0 = \frac{أ}{2} + 4 \leftarrow$ $1 = \frac{أ}{2}$

$\boxed{أ = 2}$

مثال (٢٢) ٢٠٠٦ ش

إذا كان $م(س) = \begin{cases} أ س^2 + ب س & ، س < 2 \\ 3 ب & ، س = 2 \\ أ س + ب + 12 & ، س > 2 \end{cases}$

متصلة عند $س = 2$

جد قيمة $أ ، ب$

الحل $م(س)$ متصل عند $س = 2$

$\therefore$ نهـا $_{س \to 2^+} م(س)$ = $م(2)$

نهـا $_{س \to 2^+} أ س + ب + 12 = 3 ب$

$4 أ + ب + 12 = 3 ب$

$\boxed{4 أ - ب = -12}$ ①

$\therefore$ نهـا $_{س \to 2^-} م(س) = م(2)$

نهـا $_{س \to 2^-} أ س^2 + ب س = 3 ب$

$4 أ + 2 ب = 3 ب$

$\boxed{4 أ - ب = 0}$

بحل المعادلتين $\boxed{أ = 2 ، ب = 8}$

مثال (٢٣)

$م(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - (3 - 2ج) س - 6ج}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ 4 س - 1 & ، س = 3 \end{cases}$

جد قيمة الثابت (ج) التي تجعل

$م(س)$ متصل عند $س = 3$

الحل $م(س)$ متصل عند $س = 3$

نهـا $_{س \to 3} م(س)$ = $م(3)$

نهـا $_{س \to 3} \frac{س^2 - (3 - 2ج) س - 6ج}{س - 3} = 11$

قسمة تركيبية

نهـا $_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س + 2ج)}{س - 3} = 11$

$3 + 2ج = 11$

$2ج = 8 \leftarrow$ $\boxed{ج = 4}$

مثال (٢٤)

إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{س\sqrt{س} - 1}{س - 1} & ، س > 1 \\ ب & ، س = 1 \\ أ س^2 & ، س < 1 \end{cases}$

جد قيمة $أ ، ب$ علماً أن $م(س)$ متصل

عند $س = 1$

الحل $م(س)$ متصل عند $س = 1$

$\therefore$ نهـا $_{س \to 1^+} م(س)$ = $م(1)$ ، نهـا $_{س \to 1^-} م(س) = م(1)$

نهـا $_{س \to 1^+} م(س) = م(1)$

نهـا $_{س \to 1^+} \frac{س\sqrt{س} - 1}{س - 1} = ب$ $\quad ص = \sqrt{س}$ ، $س = ص^2$

نهـا $_{ص \to 1^+} \frac{ص^3 - 1}{ص^2 - 1} = ب \leftarrow$ نهـا $_{ص \to 1^+} \frac{ص^2 - 1}{ص^2 - 1} = ب$

نهـا $_{ص \to 1^+} \frac{(ص - 1)(ص^2 + ص + 1)}{(ص - 1)(ص + 1)} = ب$

$\boxed{ب = \frac{3}{2}}$

* $\lim_{س \to 1^-} م(س) = م(1)$

$\lim_{س \to 1^+} ٢م س = ب$

$٢م = \frac{٣}{٤}$ $\boxed{م = \frac{٣}{٨}}$

مثال (٢٥)

إذا كان

$$م(س) = \begin{cases} \frac{جا(س^٢ - \frac{\pi}{٤})}{جا ٢س} & ، س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ \frac{س^٢ + (١-م)س}{م س} & ، ٠ < س < ٢ \end{cases}$$

جد قيمة م إذا علمت أن م(س) متصل عند س = صفر

الحل $\lim_{س \to 0^+} م(س) = م(٠)$ ، $\lim_{س \to 0^-} م(س) = م(٠)$

* $\lim_{س \to 0^+} م(س) = م(٠)$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{س^٢ + (١-م)س}{م س} = ٢$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{س(س + ١ - م)}{م س} = ٢$

$\frac{١-م}{م} = ٢ \leftarrow ٢م = ١ - م$

$\boxed{م = \frac{١}{٣}}$ $٣م = ١$

* $\lim_{س \to 0^-} م(س) = م(٠)$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{جا(\frac{\pi}{٤} - س^٢)}{س جا ٢س} = ٢$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{(جا(\frac{\pi}{٤} - س^٢))}{س} \times \frac{س^٢}{جا ٢س} = ٢$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{جا(\frac{\pi}{٤} - س^٢)}{س^٢} \times \lim_{س \to 0^-} \frac{س}{جا ٢س} = ٢$

$\frac{ب^٢ - ١}{٢} = ٢$

$ب^٢ - ١ = ٤ \leftarrow ب^٢ = ٥$

$\boxed{ب = \pm \sqrt{٥}}$

مثال (٢٦)

إذا كان $م(س) = ٢ + ١١ - س$ متصل عند $س = ١$ ، وكان $م(١) = ٤$ ، جد

$\lim_{س \to 1^+} \frac{|س - ١١|}{س - ١} + \sqrt{م(س)}$

الحل $|س - ١١|$

س	١
س - ١	- | +
	١

$\lim_{س \to 1^+} \frac{١ - س}{س - ١} + \sqrt{م(س)}$

$\lim_{س \to 1^+} -١ + \sqrt{م(س)}$

م(س) متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to 1^+} م(س) = م(١) = ٤$

$\lim_{س \to 1^+} -١ + \sqrt{م(١١)} = -١ + \sqrt{٤}$

$= \boxed{١}$

ورقة عمل (٥)

السؤال الأول :

① إذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{جا ٧س^{٢}}{س} & ، س \neq صفر \\ س+١ & ، س = صفر \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = صفر$

غير متصل عند $س = ١$

② $م(س) = س^{٤}[س]$ ، ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = صفر$

$م(س)$ متصل عند $س = ٠$

③ كتاب $م(س) = \begin{cases} \frac{|س|+٢}{٥} & ، س \neq ٢ \\ ٥ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٢$

غير متصل عند $س = ٢$

④ $م(س) = \begin{cases} \frac{٧س-٣}{|٣س-س^{٢}|} & ، س > ٢ \\ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٢$

متصل عند $س = ٢$

السؤال الثاني :

① $م(س) = س^{٢} + [\frac{س}{٣} - ٢] + |س-٢|$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٢$

متصل عند $س = ٢$

② $م(س) = \begin{cases} ٢٠٠٦ ص & ، س \leq ١ \\ ٣+٢س & ، س > ١ \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \leq ١ \\ ٢ & ، س > ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال $(م \cdot هـ)(س)$ عند $س = ١$

غير متصل

③ $م(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٢} - ١] & ، ٠ \leq س < ٢ \\ \frac{-|س|}{س} & ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $س = ٥$

متصل

④ $هـ(س) = ٤س + ٥$

$م(س) = \begin{cases} س^{٢}+٣ & ، س \leq ١ \\ ٢س+٢ & ، س > ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال $\frac{م}{هـ}(س)$ عند $س = ١$

متصل

السؤال الثالث

① $م(س) = \begin{cases} [س] + ٢ & ، س < ٢ \\ ٢س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

جد قيمة $(أ)$ علماً بأن $م(س)$ متصل عند $س = ٢$

$أ = ٢$

② كتاب $م(س) = \begin{cases} ٣س^{٣}+٥ & ، س \neq ٤ \\ ٢٥أ+١٦ & ، س = ٤ \end{cases}$

جد قيمة $(أ)$ التي تجعل $م(س)$ متصل عند $س = ٤$

$أ = ١$

③ كتاب $م(س) = \begin{cases} أس^{٣} - ب س + ١ & ، س \geq ١ \\ ٥ & ، س = ١ \\ س^{٢} - (أ+ب)س + ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

متصل عند $س = ١$

جد قيمة $أ ، ب$

$أ = ١ ، ب = -٣$

④ كتاب $م(س) = \begin{cases} ٢ صتا^{٢} س & ، س \geq \frac{\pi}{٤} \\ أ س^{٢} + \pi & ، س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

جد قيمة $(أ)$ التي تجعل $م(س)$ متصل عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$أ = -٤$

الدرس الثاني :
الاتصال على فترة

عند البحث في اتصال الاقتران
م(س) على فترة أو على مجاله
نتبع الخطوات التاليه

① اعادة تعريف اقتران القيمه
المطلقه واقتران أكبر عدد صحيح
مع مراعاة مجال كل منهما

② البحث في الاتصال عند أطراف
الفترة المغلقة ان وجدت [أ ، ب]

* طرف بداية الفترة من جهة اليمين
نهاية م(س) = م(أ)
س ← أ+

* طرف نهاية الفترة من جهة اليسار
نهاية م(س) = م(ب)
س ← ب-

③ نبحث في الاتصال عند نقاط التحول
إذا وجدت (ب)
نهاية م(س) = نهاية م(س) = م(ب)
س ← ب+ ، س ← ب-

④ نبحث في الاتصال على المجالات
الجزئية (المتداخلة) ، كل منها
حسب نوع اقترانها المقابل

⑤ كتابة ملخص عام

مثال (١) كتاب : $\frac{س^2-٥}{س-٥}$ ، $س \neq ٥$
إذا كان ل(س) = $س+٥$ ، $س = ٥$
ابحث في اتصال ل(س) على مجاله

الحل

مثال (٢) كتاب : $\frac{س^2-٣٧}{س-٣}$ ، $س \geq ٣$
إذا كان م(س) = $٥+س$ ، $س < ٣$
ابحث في اتصال م(س) على مجاله

الحل

مثال (٣) كتاب

إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} [س] + س & ، -١ < س < ٠ \\ \frac{٣}{٥}س^٢ + ٧ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ على الفترة $[-١ ، ٣]$

الحل

مثال (٤) ٢٠٠٧ شتى

إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٣س - ١ & ، س < ٢ \\ ٥س + ٢ & ، ٢ \leq س < ٤ \\ \frac{٥س}{س^٢ - ٣٦} & ، س > ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ لجميع قيم $(س)$ الحقيقية

الحل

مثال (٥) : ٢٠٠٩ ش

$$ص(س) = \begin{cases} س^2 + 7 - س & ، -1 \leq س < 0 \\ [س] + 5 - س^2 & ، 0 \leq س < 1 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ص(س) على $[-1 ، 1]$

الحل

مثال (٦) ٢٠١٢ ش

$$\text{إذا كان } ص(س) = \begin{cases} 5س - 9 & ، س \geq 2 \\ [\frac{1}{2} - 3] & ، 2 > س \geq 4 \\ 1 س - 14 & ، س < 4 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ص(س) حيث [ ] تعني عدد الصحيح

الحل

مثال (٧)

إذا كان $ص(س) = \begin{cases} \frac{س^2-1}{س+1} & ، -2 < س < -1 \\ س[-س]+1 & ، -1 \le س < 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال ص(س) على الفترة $[-2, 1)$

الحل

مثال (٨) $ص = 2.10 س$

$ع = 2.11 س + كتا ب$

ابحث في اتصال كل من الدالتين ع(س) ، ص(س) على الفترة $[1, 3]$

الحل

مثال (٩) كتاب + ١١ ٣٠ هـ

إذا كان ل (س) = $\frac{س^{٢}-١}{س+٣}$ ، هـ (س) = [-س]

ابحث في اتصال الاقتران

م (س) = ل (س) × هـ (س) على الفترة

[٠ ، ٣]

الجزء الثاني :
ايجاد ثوابت

مثال (١٠)

إذا كان م (س) = $\frac{س^{٢}-٣س-٥}{س^{٢}-ب س+٩}$

متصلاً على ح ، جد مجموعة قيم ب

مثال (١١) (٢٠٠٠)

إذا كان م(س) = { م س - ن ، س ≤ ١ ; ٣س ، ١ < س < ٢ ; ب س^٢ - م ، س ≥ ٢ }

متصل عند

جد قيمة كلاً من م ، ب

مثال (١٢) كتاب

إذا كان ع(س) = { جا م س / ٥ س ، س < ٠ ; ٣ ، س = ٠ ; ب (٢ + س)^{١/س} ، س > ٠ }

متصلاً على الفترة [-π ، π]

جد قيمة كلاً من م ، ب

مثال (١٣) كتاب

إذا كان هـ(س) = { (س^٢ - س - ٣٠) / (م س - ٢٦) ، س < ٦ ; ١ ، س = ٦ ; ب س ، س > ٦ }

متصل عند

جد قيمة كلاً من م ، ب

مثال (١٤) كتاب

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2+2(هـ-1)س-4هـ}{س-2} & ، س \neq 2 \\ 5+س & ، س = 2 \end{cases}$

متصلاً على ح ، جد قيمة الثابت هـ

مثال (١٥)

جد نقاط عدم الاتصال في كل من الآتي

① $م(س) = \frac{5}{س^3-6س+1}$

الحل متصل على ح لا يوجد نقاط عدم اتصال

② $م(س) = \frac{س-2}{س^4-16}$

الحل نقاط عدم الاتصال

$س = ±\sqrt{4}$ ، $\sqrt{4}$ أصفار المقام

③ $م(س) = \frac{س^2-5}{س^3-13س-4}$

الحل عدم الاتصال أصفار المقام

$س^3-13س-4 = 0$ ، $س^3-3 = 4$

$س^7 = 1$

$س = -1$

$ح = 7$

④ $م(س) = \frac{\frac{س^3+1}{س-1}}{\frac{ح}{س^2-6س+8}}$

الحل عدم الاتصال أصفار المقام

$ح = 0$ ، $س = 1$ ، $س = 2$ ، $س = 4$

⑤ $م(س) = \frac{1}{س} + \frac{1}{س+3}$

الحل عدم الاتصال $س = 0$ ، $س = -3$

⑥ $م(س) = [2س+1]$

الحل عدم الاتصال $س = \frac{ص}{ل} \pm \frac{ك}{ل}$ ، $ل \neq 0$

ورقة عمل (٦)

السؤال الأول

① لتكن $ق(س) = \begin{cases} 4-س & ، س < 4 \\ س^2 - 11 & ، س \geq 4 \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق(س)$ على مجاله

متصل على $ح$

② لتكن $م(س) = \begin{cases} 3 & ، س = 1 \\ [س]+5 & ، 1 < س < 2 \\ 4 & ، س = 2 \end{cases}$

بيّن أن $م(س)$ متصل على الفترة

أ) $[1.6, 3.2]$ ب) $(1.3, 3)$ ج) $[1.2, 3)$ د) $(1.3, 3.1]$

③ لتكن $ك(س) = \begin{cases} \sqrt{س+1} & ، س \geq 3 \\ [2س+2] & ، 3 < س < 6 \\ |س-9| & ، س = 6 \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ على الفترة $[6, 10]$

متصل على $[6, 10)$

④ لتكن $م(س) = \begin{cases} \frac{4}{س+1} & ، س = 3 \\ \sqrt{س^2+1} & ، س > 3 \\ 6 & ، س < 3 \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ على الفترة

$[-2, 3]$

متصل على $[-2, 3] - \{0\}$

السؤال الثاني :

① لتكن $ق(س) = \frac{س^2+5س+2}{أ س^2+س+3}$

جد قيم $(أ)$ التي تجعل الاقتران $ق(س)$ متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية

$أ \in ح - \{\frac{1}{2}\}$

② لتكن $م(س) = \begin{cases} أ س^2+ب س & ، س < 2 \\ 3ب & ، س = 2 \\ أ س + ب + 12 & ، س > 2 \end{cases}$

أوجد قيمة الثوابت $أ، ب$ علماً أن $م(س)$ متصل على $ح$

$أ = 2 ، ب = 8$

③ $\sqrt{3-س} + |س+1| ، -2 \leq س < 0$

$\frac{4}{س+1} ، 0 \leq س < 3$

$6 ، س = 3$

ابحث في اتصال $م(س)$ على الفترة

$[-2, 3]$

متصل على $[-2, 3] - \{0\}$

④ لتكن $م(س) = \begin{cases} أ س^2+ب س & ، س < 2 \\ 3ب & ، س = 2 \\ أ س + ب + 12 & ، س > 2 \end{cases}$

أوجد قيمة الثوابت $أ، ب$ علماً أن $م(س)$ متصل على $ح$

$أ = 2 ، ب = 8$

⑤ $م(س) = \begin{cases} \sqrt{3-س} + |س+1| & ، -2 \leq س < 0 \\ \frac{4}{س+1} & ، 0 \leq س < 3 \\ 6 & ، س = 3 \end{cases}$

ابحث في اتصال $م(س)$ على الفترة

$[-2, 3]$

متصل على $[-2, 3] - \{0\}$

⑥ لتكن $م(س) = س^2 + 2$ ، $هـ(س) = [5 - س]$

ابحث في اتصال $\frac{م(س)}{هـ(س)}$ في الفترة $(4, 7)$

متصل على $(4, 7) - \{5\}$