

القائد في الرياضيات

التكامل

(الفرع الأدبي والفندقي)

للأستاذ

معاذ البشيش

الصف الثاني عشر
للفرعين الأدبي والفنقي والسياسي
الوحدة الأولى
التكامل

- ١- التكامل غير الحدود .
- ٢- التكامل المحدود .
- ٣- خصائص التكامل المحدود .
- ٤- التكامل بالتعويض .
- ٥- تطبيقات هندسية .
- ٦- تطبيقات فيزيائية .
- ٧- المساحة .
- ٨- حلول جميع تدريبات وأسئلة الكتاب .
- ٩- أسئلة من الدورات السابقة لامتحان الوزارة على كل درس .

مع تحيات
الأستاذ معاذ البشير

التكامل غير المحدود

- تمهيد ...

تعلمنا في المستوى الثالث أنه إذا كان

$$ق(س) = س^٣ + س^٢ \text{ فإن } ق'(س) = ٣س^٢ + ٢س$$

أما في هذا الدرس فإننا سوف نأخذ العملية العكسية

وهي إيجاد الاقتران ق(س) إذا علمنا المشتقة ق'(س)

وتسمى هذه العملية بالتكامل .

فمثلاً :

$$\text{تكامل } ٣س^٢ + ٢س \text{ يعني إيجاد الاقتران } ق(س)$$

الذي مشتقته تساوي $٣س^٢ + ٢س$ ونكتب على شكل :

$$\int (٣س^٢ + ٢س) دس$$

ويقرأ الرمز \int ← التكامل

- أما دس تعني أن الاقتران بدلالة المتغير س .

$$\text{فيكون } \int (٣س^٢ + ٢س) دس = س^٣ + س^٢ + ج$$

حيث ج ثابت .

نلاحظ أن :

العلاقة بين التكامل غير المحدود والمشتقة الأولى

هي علاقة عكسية أي أن :

$$ق(س) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} ق'(س)$$

تكامل غير المحدود

لاحظ أن كلاً من الاقترانات التالية

تكون مشتقتها تساوي $٣س^٢ + ٢س$ وهي :

$$ق(س) = ٣س^٢ + ٢س + ١٧$$

$$ق(س) = ٣س^٢ + ٢س + ٦٥$$

$$ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٢٠$$

ويوجد أيضاً عدد كبير جداً من الاقترانات

وتتشابه جميعها في $٣س^٢ + ٢س$ ، وتختلف في العدد الثابت ،لذلك نكتبها بشكل عام على الصورة $٣س^٢ + ٢س + ج$

حيث ج عدد ثابت ، وتعني ثابت التكامل غير المحدود .

مثال / خارجي :

$$\text{جد : (أ) } \int ٤س^٢ دس \quad \text{(ب) } \int ٦س دس$$

الحل :

(أ) المطلوب هو إيجاد الاقتران الذي مشتقته هي $٤س^٢$ فيكون هو :

$$س^٤ + ج \quad \text{أي أن } \int ٤س^٢ دس = س^٤ + ج$$

(ب) المطلوب هو إيجاد الاقتران الذي مشتقته تساوي $٦س$ فيكون هو :

$$٣س^٢ + ج \quad \text{أي أن } \int ٦س دس = ٣س^٢ + ج$$

قواعد التكامل غير المحدود :

$$(١) \quad \int (أ دس + أس + ج) dx = \frac{أ دس^٢}{٢} + \frac{أس}{١} + ج دس + ثابت$$

مثال :

$$(أ) \quad \int (٥ دس + ٥ دس + ٨ دس + ٨ دس) dx = ٥ دس^٢ + ٥ دس + ٨ دس^٢ + ٨ دس + ثابت$$

$$(ب) \quad \int (٣ دس - ٣ دس + ٣ دس + ٣ دس) dx = ٣ دس^٢ - ٣ دس + ٣ دس^٢ + ٣ دس + ثابت$$

$$(٢) \quad \int (س^١ دس + س^١ دس) dx = \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٢}{٢} + ثابت$$

مثال :

$$(أ) \quad \int (س^٥ دس + س^٥ دس) dx = \frac{س^٦}{٦} + \frac{س^٦}{٦} + ثابت$$

$$(ب) \quad \int (س^٨ دس + س^٨ دس) dx = \frac{س^٩}{٩} + \frac{س^٩}{٩} + ثابت$$

مثال / خارجي :

جد التكاملات التالية :

$$(١) \quad \int (س^٧ دس + س^٧ دس) dx \quad (٢) \quad \int (ع^٥ دس + ع^٥ دس) dx \quad (٣) \quad \int (هـ^٤ دس + هـ^٤ دس) dx$$

$$(٤) \quad \int \frac{١}{س} دس \quad (٥) \quad \int \frac{٢}{س^٥} دس \quad (٦) \quad \int \frac{١}{ص} دص$$

الحل :

$$(١) \quad \int (س^٧ دس + س^٧ دس) dx = \frac{س^٨}{٨} + \frac{س^٨}{٨} + ثابت$$

$$(٢) \quad \int (ع^٥ دس + ع^٥ دس) dx = \frac{ع^٦}{٦} + \frac{ع^٦}{٦} + ثابت$$

$$(٣) \quad \int (هـ^٤ دس + هـ^٤ دس) dx = \frac{هـ^٥}{٥} + \frac{هـ^٥}{٥} + ثابت$$

$$(٤) \quad \int \frac{١}{س} دس = \ln |س| + ثابت$$

$$\int \frac{س^٢}{٢} دس = \frac{س^٣}{٦} + ثابت$$

$$(٥) \quad \int \frac{٧}{س} دس = \int \frac{٧}{س} دس = ٧ \ln |س| + ثابت$$

$$\int \frac{٧}{س} دس = ٧ \ln |س| + ثابت$$

$$(٦) \quad \int \frac{١}{ص} دص = \ln |ص| + ثابت$$

$$\int \frac{٣}{ص} دص = \int \frac{٣}{ص} دص = ٣ \ln |ص| + ثابت$$

$$(٣) \quad \int (س) دس = \frac{س^٢}{٢} + ثابت$$

فمثلاً :

$$(أ) \quad \int (س^٦ دس + س^٦ دس) dx = \frac{س^٧}{٧} + \frac{س^٧}{٧} + ثابت$$

$$(ب) \quad \int (١٢ ع^٣ دس + ١٢ ع^٣ دس) dx = \frac{١٢ ع^٤}{٤} + \frac{١٢ ع^٤}{٤} + ثابت$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } [٢س^٢ (س + ٢س)] \text{ دس} \\ = [٢س^٢ + ٤س^٣] \text{ دس} \\ = \frac{٢س^٢}{٥} + \frac{٤س^٣}{٤} + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } [٥س + \frac{٢س}{٢}] \text{ دس} \\ = [٥س + س] \text{ دس} \\ = ٥س + \frac{٢س}{٢} + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{هـ) } [\frac{٧}{٣س}] \text{ دس} \\ = [\frac{٧س}{٣}] \text{ دس} \\ = \frac{٧س}{٣} + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\text{ج} + \frac{٧}{٢س^٢} =$$

$$\text{و) } [\frac{٤ - ٢س٨ + ٣س٦}{٢س}] \text{ دس}$$

$$\begin{aligned} = [٤س - ٨س + ٣س] \text{ دس} \\ = [٤س - ٨س + ٣س] \text{ دس} \\ = \frac{٤س}{١} - ٨س + \frac{٣س}{٢} + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\text{ج} + \frac{٤}{س} + ٨س + ٢س^٣ =$$

$$\text{٤) } [(س) \mp هـ (س)] \text{ دس} = [(س) \mp هـ (س)] \text{ دس}$$

(أي أن التكامل يتوزع في حالتي الجمع والطرح)

مثال / خارجي :

جد التكاملات :

$$\begin{aligned} \text{أ) } [٤س^٣ + ٦س] \text{ دس} \\ = \frac{٤س^٣}{٤} + \frac{٦س}{٢} + \text{ج} \\ = س^٣ + ٣س + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } [٢س^٢ + ٣س] \text{ دس} \\ = \frac{٢س^٢}{٢} + \frac{٣س}{١} + \text{ج} \\ = س^٢ + ٣س + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\text{ج) } [٥س^٢ + ٧س - ٦] \text{ دس} = \frac{٥س^٢}{٣} + \frac{٧س}{٢} - ٦س + \text{ج}$$

مثال / خارجي :

جد التكاملات :

$$\text{أ) } [(٥ + ٤س)(١ + ٤س)] \text{ دس} = [٥ + ٤س + ٤س + ٤س^٢] \text{ دس}$$

$$\begin{aligned} = [٥ + ٨س + ٤س^٢] \text{ دس} \\ = \frac{٥}{١} + \frac{٨س}{٢} + \frac{٤س^٢}{٣} + \text{ج} \\ = ٥ + ٤س + \frac{٤س^٢}{٣} + \text{ج} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } [(٢ - ٣س)] \text{ دس} = [٢س - ٣س^٢] \text{ دس}$$

$$\begin{aligned} = \frac{٢س}{٢} - \frac{٣س^٢}{٣} + \text{ج} \\ = س - س^٢ + \text{ج} \end{aligned}$$

مثال (٢) / كتاب ص ١٦٢ :

جد كلاً من التكاملات الآتية :

$$(١) \int س٤ دس$$

$$= \frac{س٥}{٥} + ج$$

$$(٢) \int ٢- دس$$

$$= -٢س + ج$$

$$(٣) \int \frac{١}{س٢} دس ، س \neq ٠$$

$$= \int س٢- دس = \frac{س١-}{١-} + ج$$

$$(٤) \int \frac{١}{جتا٢س} دس = \int قاس دس = ظاس + ج$$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٦٣ :

جد كلاً من التكاملات الآتية :

$$(١) \int دس = ١ دس + ج$$

(٥) تكامل الاقترانات الدائرية :

$$* \int جاس دس = -جتاس + ج$$

$$* \int جتاس دس = جاس + ج$$

$$* \int قاس٢ دس = ظاس + ج$$

أيضاً :

$$* \int جا أس دس = \frac{-جتا أس}{أ} + ج$$

$$* \int جتا أس دس = \frac{جا أس}{أ} + ج$$

$$* \int قاس٢ أس دس = \frac{ظا أس}{أ} + ج$$

مثال / خارجي :

جد التكاملات :

$$(١) \int (٢س٢ + ٥جاس) دس$$

$$= \frac{٢س٣}{٣} - ٥جتاس + ج$$

$$(٢) \int (جتاس + قاس) دس$$

$$= جاس + طاس + ج$$

$$(٣) \int (٣قاس + ٢جاس) دس$$

$$= ٣ظاس - ٢جتاس + ج$$

$$(٤) \int (جا٣س + جتا٢س) دس$$

$$= \frac{-جتا٣س}{٣} + \frac{جا٢س}{٢} + ج$$

$$(2) \left[(4س - 3جاس) دس = \frac{٤س^٢}{٢} - 3جاس + ج \right]$$

$$= 2س^٢ + 3جاس + ج$$

$$(2) \left[3س دس = \frac{٤س^٢}{٤} + ج \right]$$

مثال (٤) / كتاب ص ١٦٤ :

جد كلاً مما يأتي :

$$(1) \left[س(س٢ - ١) دس = س٢ - ٢س دس \right]$$

$$= \frac{٣س^٢}{٢} - \frac{٢س}{٢} + ج$$

$$(3) \left[س^٥ دس = \frac{س^٤}{٤} + ج \right]$$

$$(4) \left[\frac{1}{س} دس = \frac{١}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} + ج \right]$$

مثال (٣) / كتاب ص ١٦٤ :

جد قيمة التكامل الآتي :

$$\int (3س - ٢س^٥ + ٩) دس$$

الحل :

$$\int (3س - ٢س^٥ + ٩) دس = \frac{٣}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٥}{٣}} + ٩س + ج$$

$$(2) \int \frac{س(س - ٥)}{س} دس = \int (س - ٥) دس$$

$$= س - ٥ دس = \frac{س^٢}{٢} - ٥س + ج$$

تدريب (٤) / كتاب ص ١٦٥ :

جد كلاً من التكاملات الآتية :

$$(1) \int (٣ + س٢) دس$$

$$= \int (٣ + س٢ + ١٢س + ٩) دس = \frac{٤س^٢}{٣} + ٦س^٢ + ٩س + ج$$

$$(2) \int \frac{س^٥ - ٢س}{س^٣} دس$$

تدريب (٣) / كتاب ص ١٦٤ :

جد كلاً من التكاملين الآتيين :

$$(1) \int (3س^٢ - \frac{٦}{س}) دس$$

$$= \int (٣س^٢ - \frac{١}{٢س}) دس =$$

$$= \frac{٣س^٣}{٣} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} + ج = س^٣ - \frac{١}{٤} س^{-\frac{١}{٢}} + ج = س^٣ - \frac{١}{٤} س^{-\frac{١}{٢}} + ج$$

السؤال (١) / كتاب ص ١٦٦ :

جد كلاً مما يأتي :

$$(أ) \left[\frac{1}{٢} دس = \frac{1}{٢} س + ج \right]$$

$$(ب) \left[\frac{دس}{س} = \frac{س-٥}{س} دس + \frac{س-٤}{س} ج \right]$$

$$(ج) \left[(٢ س - ٢) دس = ٢ س - \frac{س}{٣} + ج \right]$$

$$(د) \left[(٣ س) دس = \frac{٣ س}{٣} + ج = س + ج \right]$$

$$(هـ) \left[\frac{٢-}{س-٥} دس = ٢ س - ٥ دس \right]$$

$$= \frac{٢ س - ٦}{٦} + ج = \frac{٢ س - ٦}{٣} + ج$$

السؤال (٢) / كتاب ص ١٦٦ :

جد كلاً مما يأتي :

$$(أ) \left[١٠ س - ٢ \sqrt[٦]{س} + ٣ ق٢ س دس \right]$$

$$= \left[١٠ س - ٢ س + \frac{١}{٦} س + ٣ ق٢ س دس \right]$$

$$= \frac{١٠ س}{٣} - \frac{٢ س}{٦} + \frac{٧}{٦} ق٢ س + ج$$

$$(٢) \left[\frac{س^٢ - ٥ س}{س} دس \right]$$

$$= \left[(س - ٥) س دس \right]$$

$$= \left[(س^٢ \times س - ٥ س \times س) دس \right]$$

$$= \left[س^٣ - ٥ س^٢ دس \right]$$

$$= \frac{س^٣}{٨} - \frac{٥ س^٢}{٣} + ج$$

$$(٣) \left[\frac{س^٢ + ٢ س - ١٥}{س - ٣} دس \right]$$

$$= \left[\frac{(س - ٣)(س + ٥)}{س - ٣} دس \right]$$

$$= \left[س + ٥ دس \right]$$

$$= \frac{س}{٢} + ٥ س + ج$$

$$(٤) \left[\frac{س^٢ + ٦٤}{س + ٤} دس \right]$$

$$= \left[\frac{(س + ٤)(س - ٤ + ١٦)}{س + ٤} دس \right]$$

$$= \frac{س^٢}{٣} - ٢ س + ١٦ س + ج$$

مثال / (خارجي) :

$$ص = \left[\frac{٥س}{١ + ٢س} دس ، جد \frac{دص}{دس} \right]$$

الحل :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٥س}{١ + ٢س}$$

$$(ب) \left[(٢ - س)(٤س + ١) دس \right]$$

$$= ٨س + ٢ - ٢س٤ - س دس$$

$$= ٧س + ٢ - ٢س٤ دس$$

$$= \frac{٧س^٢}{٢} + ٢س - \frac{٢س٤}{٣} + ج$$

مثال / (خارجي) :

$$\text{إذا كان } \left[ق(س) = ٤س^٢ - ٦س^٢ + ٢ ، فجد ق'(١) \right]$$

الحل : (نشتق الطرفين)

$$ق'(س) = ١٢س - ١٢س$$

$$ق'(١) = ١٢ - ١٢ = ٠$$

$$(ج) \left[٣ظاس جتاس دس \right]$$

$$= ٣ \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = ٣$$

$$= ٣جتاس + ج$$

$$(د) \left[\frac{٨ + ٦س + ٢س^٢}{٢ + س} دس \right]$$

$$= \frac{(٢+س)(٤+س)}{٢+س} دس$$

$$= \frac{٢س^٢}{٢} + ٤س + ج$$

مثال (١) / كتاب ص ١٦١ :

$$\text{إذا كان } ص = \left[(٤س^٢ - ٣س^٣) دس \right]$$

$$\text{فجد } \frac{دص}{دس} \text{ عندما } س = ٢ .$$

الحل : (نشتق الطرفين)

$$\frac{دص}{دس} = ٨س - ٩س^٢$$

$$\text{عند } س = ٢$$

$$\frac{دص}{دس} = ٨(٢) - ٩(٢)^٢ = ١٠$$

تعريف :

إذا كان ق اقتراناً متصلاً ، فإن :

$$(أ) \left[ق'(س) دس = ق(س) + ج ، (ج ثابت التكامل) \right]$$

(ب) مشتقة (التكامل غير المحدود للاقتران ق(س)) = ق(س) .

$$\frac{دص}{دس} \left[ق(س) دس = ق(س) . \right]$$

تدريب (١) / كتاب ص ١٦١ :

$$\text{إذا كان ص} \left[\frac{١ - س٤}{١ + س٢} \right] = \text{دس} ،$$

$$\text{فجد} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{عندما س} = -١ .$$

الحل :

$$\frac{١ - س٤}{١ + س٢} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\frac{٥ - }{٢} = \frac{١ - (١-) \times ٤}{١ + (١-)} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

مثال / (خارجي) :

$$\text{إذا كان ق} (س) = س٦ + س٤ + ٢ = ٧$$

فجد ق (٢) :

الحل : (نكامل الطرفين)

$$\left[\text{ق} (س) \text{دس} = س٦ + س٤ + ٢ \text{دس} \right]$$

$$\text{ق} (س) = \frac{س٦}{٢} + \frac{س٤}{٢} + ٢$$

$$\text{ق} (س) = س٣ + س٢ + ٢$$

نستفيد من المعطى لإيجاد الثابت ج :

$$\text{ق} (١) = ٧$$

$$٧ = ٢ + ٢(١) + ج$$

$$ج = ٣$$

$$\text{ومنه ق} (س) = س٢ + س٢ + ٣$$

$$\text{ق} (٢) = ٢ + ٢(٢) + ٣$$

$$= ٢ + ٤ + ٣ = ٩$$

$$= ١٦ + ٨ + ٣ = ٢٧$$

سؤال (٣) / كتاب ص ١٦٦ :

$$\text{جد} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{عندما س} = ٥ ، \text{حيث ص} \left[\frac{١ + س٤}{س} \right] = \text{دس} .$$

الحل :

$$\frac{١ + س٤}{س} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\text{عند س} = ٥ \leftarrow \frac{٢١}{٥} = \frac{١ + ٥ \times ٤}{٥} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

سؤال (٥) / كتاب ص ١٦٦ :

$$\text{إذا كان} \left[\text{ع} (س) \text{دس} = س٦ - س٣ + ٢س٣ - ٥ = ٥ \right]$$

فجد ع (١) .

الحل : (نشق الطرفين)

$$\text{ع} (س) = ١٨ - س٦ + ٦$$

$$\text{ع} (١) = ١٨ - ٦ + ٦ = ١٨$$

$$= ١٨$$

سؤال (٤) / كتاب ص ١٦٦ :

إذا كان ق اقتراً قابلاً للاشتقاق ، وكان

$$\text{ق} (س) = س٦ - س٨ + ٥ = ٥ ، \text{وكان ق} (١) = ٢ ،$$

فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل :

$$\left[\text{ق} (س) = س٦ - س٨ + ٥ \text{دس} \right]$$

$$\text{ق} (س) = \frac{س٦}{٢} - \frac{س٨}{٤} + ٥$$

$$\text{ق} (س) = س٣ - س٢ + ٥$$

تابع / حل سؤال (٤) :

من المعطى ق(١-) = ٢

$$٢ = ٣ - ٢(١-) - ٤(١-) \times ٥ + (١-) \times ٥$$

$$٢ = ٣ - ٢ - ٤ + ٥ - ٥ + ٥$$

$$٢ = ٤ - ٥ + ٥$$

$$٦ = ٥ - ٥ + ٥$$

ومنه ق(س) = ٣س^٢ - ٤س + ٥ + ٦سؤال (٦) / كتاب ص ١٦٦ :

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان ق(س) = ٢س - ٥ ،
وكان ق(٢) = ٤ ، فجد قيمة ق(١) .

الحل :

$$\left[\text{ق(س)} = ٢س - ٥ \text{ دس} \right]$$

$$\text{ق(س)} = \frac{٢س^٢}{٢} - ٥س + ٥$$

$$\text{ق(س)} = ٢س - ٥س + ٥$$

من المعطى ق(٢) = ٤

$$٤ = ٤ - ٥ \times ٢ + ٥$$

$$٤ = ٥ - ١٠ + ٥$$

$$٤ = ٥ - ٥ + ٥$$

$$١٠ = ٥ - ٥ + ٥$$

ومنه ق(س) = ٢س^٢ - ٥س + ١٠

$$\text{ق(١)} = ٢(١) - ٥(١) + ١٠ = ١٠ - ٥ + ١٠ = ١٥$$

$$١٥ = ١٠ - ٥ + ١٠ = ١٥$$

سؤال (٧) / كتاب ص ١٦٦ :

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان
ق(س) = ٣س(٦ - س) + ٤س^٣ ، وكان
ق(٢) = ١ - ٥ ، فجد قيمة ق(١) .

حل سؤال (٧) :

$$\text{ق(س)} = ١٨س - ٣س٥ + ٤س^٣$$

$$\left[\text{ق(س)} = ١٨س - ٣س٥ + ٤س^٣ \text{ دس} \right]$$

$$\text{ق(س)} = ٩س^٢ - ٣س٥ + ٤س^٣ + ٥$$

من المعطى ق(٢) = ١ - ٥

$$١ - ٥ = ٩(٢) - ٣(٢)٥ + ٤(٢) + ٥$$

$$١ - ٥ = ٣٦ - ٣٠ + ٤٠ + ٥$$

$$١٣ - ٥ = ٣٦ - ٣٠ + ٤٠ + ٥$$

ومنه ق(س) = ٩س^٢ - ٣س٥ + ٤س^٣ - ٥

$$\text{ق(١)} = ٩(١) - ٣(١)٥ + ٤(١) - ٥ = ٩ - ١٥ + ٤ - ٥ = -٧$$

$$\text{ق(١)} = ٩ - ١٥ + ٤ - ٥ = -٧$$

سؤال (٨) / كتاب ص ١٦٦ :

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق ،
وكان ق(س) = $\frac{٢س^٢ + ٦س + ٨س^٣}{س}$ ، وكان
ق(١) = ١٢ فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل :

$$\text{ق(س)} = ٢س + ٦ + ٨س^٢$$

$$\left[\text{ق(س)} = ٢س + ٦ + ٨س^٢ \text{ دس} \right]$$

$$\text{ق(س)} = \frac{٢س^٢}{٢} + ٦س + \frac{٨س^٣}{٣} + ٦$$

من المعطى ق(١) = ١٢

$$١٢ = \frac{٢}{٢} + ٦ + \frac{٨}{٣} + ٦$$

$$١٢ = \frac{٢ + ٣٦ + ٨ + ٣٦}{٣}$$

$$١٢ = \frac{٥٥}{٣} + ٦$$

تابع / حل سؤال (٨) :

$$\frac{55}{6} - 12 = \text{ج}$$

$$\frac{17}{6} = \frac{55 - 72}{6} = \text{ج}$$

$$\frac{17}{6} + \frac{8}{3} + 6 + \frac{2}{2} = \text{ق(س)}$$

ومنه ل(٣) - ل(١)

$$\frac{153}{2} + \text{ج} - \left(\frac{1}{2} + \text{ج} \right)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{153}{2}} =$$

$$76 = \frac{152}{2} = \frac{1 + 153}{2} =$$

سؤال (٩) / كتاب ص ١٦٦ :

إذا كان ل اقتراً قابلاً للاشتقاق، وكان

$$\text{ل(س)} = 6\text{س}^2 - 6\text{س}^3 + 2\text{س}^4،$$

فجد قيمة ل(٣) - ل(١) :

$$\text{ل(س)} = [6\text{س}^2 - 6\text{س}^3 + 2\text{س}^4]$$

$$\text{ل(س)} = \frac{6\text{س}^2}{2} - \frac{6\text{س}^3}{3} + \frac{2\text{س}^4}{4}$$

$$\text{ل(س)} = 3\text{س}^2 - \frac{2\text{س}^3}{2} + \frac{1}{2}\text{س}^4$$

$$\text{ل(٣)} = 9 - \frac{81 \times 3}{2} - 27 \times 2 = \text{ل(٣)}$$

$$\text{ل(٣)} = \frac{18 - 243 - 108}{2}$$

$$\text{ل(٣)} = \frac{153}{2}$$

$$\text{ل(١)} = 1 - \frac{3}{2} - 2 = \text{ل(١)}$$

$$\text{ل(١)} = \frac{1}{2} = \frac{2 - 3 - 4}{2}$$

وزارة (٢٠٢٠) :

$$(١) \text{ إذا كان } \text{ق(س)} = 5\text{س}^2 - 3\text{س}^3 + 4$$

فإن ق(٢) تساوي :

$$(أ) ١٧ \quad (ب) ١٨ \quad (ج) ٢١ \quad (د) ٢٢$$

(٢) ل(٢) دس يساوي :

$$(أ) \frac{2}{3} + \text{ج} \quad (ب) \frac{2}{3} + \text{س} + \text{ج}$$

$$(ج) \text{ل} + \text{س} + \text{ج} \quad (د) 2 + \text{ل} + \text{ج}$$

(٣) ٦ جتا ٣ س دس يساوي :

$$(أ) 6\text{جا}^3\text{س} + \text{ج} \quad (ب) 6\text{جا}^3\text{س} + \text{ج}$$

$$(ج) 2\text{جا}^3\text{س} + \text{ج} \quad (د) 2\text{جا}^3\text{س} + \text{ج}$$

للحياة قاعدتين ...
الأولى عدم الاستسلام
والثانية تذكر الأولى دائماً .
معلمكم المحب : معاذ البشير

التكامل المحدود

$$(٣) \int_1^7 l \, ds = l(٧ - ١) = ٦ \times l = ٦l$$

تعلم أن $\int_1^b q(s) \, ds = q(s) + c$

$$\int_1^b q(s) \, ds = q(s) + c$$

$$= q(b) - q(a)$$

مثال / خارجي :

$$\int_1^4 ٤ \, ds = ١٢ \text{ فجد قيمة الثابت أ .}$$

الحل :

$$٤(٨ - ١) = ١٢ \leftarrow ٣ = ٨ - \text{أ} \leftarrow \text{أ} = ٥$$

مثال / خارجي :

$$\int_1^4 q(s) \, ds = ٧ \text{ ، } q(٤) = ٧ \text{ ، } q(١) = ٢ \text{ ، فجد } \int_1^4 q(s) \, ds .$$

الحل :

$$\int_1^4 q(s) \, ds = q(s) + c = ٧ - ٢ = ٥$$

سؤال (٢) / كتاب ص ١٧١ :

$$\int_1^4 ٤ \, ds = ٢٠ \text{ ، فجد قيمة الثابت م .}$$

الحل :

$$٤(٤ - ١) = ٢٠$$

$$٥ = ١ + م \leftarrow م = ٤$$

مثال / خارجي :

$$\int_1^2 q(s) \, ds = ١٧ \text{ فجد } q(b) .$$

الحل :

$$\int_1^2 q(s) \, ds = q(s) + c = ١٧ - ٢ = ١٥$$

$$١٧ = q(٢) - ٢ \leftarrow q(٢) = ١٩$$

$$١٥ = q(١) \leftarrow q(١) = ١٥$$

قاعدة (٢) :

$$\int_1^b \frac{1+s^n}{1+n} \, ds = \left[\frac{1+s^{n+1}}{1+n} \right]_1^b = \frac{1+b^{n+1}}{1+n} - \frac{1+1^{n+1}}{1+n}$$

مثال (١) / كتاب ص ١٦٨ :

أوجد :

$$\int_1^2 ٣s^٢ \, ds = \left[s^٣ \right]_1^2 = ٨ - ١ = ٧$$

قاعدة (١) :

$$\int_1^b k \, ds = k(s) + c = k(b) - k(a) \text{ حيث } k \text{ ثابت .}$$

مثال / خارجي :

$$\int_1^7 \frac{1-s^٧}{٧} \, ds = \left[\frac{1-s^٨}{٨} \right]_1^7 = \frac{1-7^٨}{٨} - \frac{1-1^٨}{٨}$$

$$\frac{٢}{٧} = \frac{١}{٧} + \frac{١}{٧} = \frac{١-}{٧} - \frac{١}{٧} =$$

مثال / خارجي :

$$(١) \int_1^6 ٤ \, ds = ٤(٦ - ١) = ٢٠$$

$$(٢) \int_1^7 ٧ \, ds = ٧(٧ - ١) = ٤٢$$

مثال (٢) / كتاب ص ١٦٩ :

جد قيمة التكامل الآتي : $\int_1^2 (3s^2 - 12s + 5) ds$

الحل :

$$\int_1^2 (3s^2 - 12s + 5) ds = \left[s^3 - 6s^2 + 5s \right]_1^2$$

$$= (8 - 24 + 10) - (1 - 6 + 5) = -6 - (-1) = -5$$

تدريب (١) / كتاب ص ١٦٩ :

جد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \int_1^4 \frac{6}{s} ds = \left[6 \ln s \right]_1^4 = 6 \ln 4 - 6 \ln 1 = 6 \ln 4$$

$$\int_1^2 \frac{1}{s^2} ds = \left[-\frac{1}{s} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$12 = \int_1^2 (2s - 1) ds = \left[s^2 - s \right]_1^2 = (4 - 2) - (1 - 1) = 2$$

$$(2) \int_1^2 \frac{7}{s^3} ds = \left[-\frac{7}{2s^2} \right]_1^2 = -\frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$$

$$6 = (1 - 0) 6 = 6$$

تدريب (٣) / كتاب ص ١٧٠ :

إذا كان $\int_1^6 6s ds = 9$ ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل :

$$9 = \int_1^6 (3s^2 + b) ds$$

$$9 = \left[s^3 + bs \right]_1^6 = (216 + 6b) - (3 + b) = 213 + 5b$$

$$9 = 213 + 5b \implies 5b = -204 \implies b = -40.8$$

ملاحظة هامة :

بما أن $\int_1^q (s) ds = \text{عدد ثابت}$
لذلك فإن مشتقة التكامل المحدود = صفر .

مثال (٣) / كتاب ص ١٧٠ :

إذا كان $\int_1^4 (4s^3 - 3s^2 + 3) ds = 0$ ،
فجد قيمة $\frac{d}{ds}$.

الحل :

$$\frac{d}{ds} = 0$$

مثال / خارجي :

إذا كان $\int_1^2 \frac{s^2}{1+s} ds = 0$ ، جد $\frac{d}{ds}$.

الحل :

$$\frac{d}{ds} = 0$$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٧٠ : إذا كان $\int_1^2 (s-1) ds = 3$ ،

جد قيمة $\int_1^2 (s-1) ds = 5$:

$$\int_1^2 (s-1) ds = \left[\frac{s^2}{2} - s \right]_1^2 = (2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

$$8 = 2 \times 4 = (3 - 5) 4 = -8$$

$$\left[2s^2 - \frac{2s^2}{2} + 3s = 2 \text{ دس} - s + 2s^2 \right] =$$

$$8 = 2 + 6 = (4 + 2 + 8) - (4 - 2 + 8) =$$

سؤال (١) / كتاب ص ١٧١ :

احسب قيمة كل مما يأتي :

$$(أ) \int_1^6 2 - \frac{1}{s} \text{ دس}$$

$$10 - = 0 \times 2 - = (1 - 6)2 - =$$

$$(ب) \int_8^1 \frac{1}{s^3} \text{ دس}$$

$$\left[\frac{1}{s^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2s^2} \text{ دس} \right] =$$

$$\left(\frac{1}{2(1)^2} - \frac{1}{2(8)^2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64} \right) = \frac{32}{64} - \frac{1}{64} = \frac{31}{64}$$

$$\frac{9}{16} = 3 - \times \frac{3}{16} = (4 - 1) \frac{3}{16} =$$

$$(ج) \int_0^7 (2s + 8s^2 - 5s^4 + 7) \text{ دس}$$

$$= \left[s^2 + \frac{8s^3}{3} - s^5 + 7s \right]_0^7 =$$

$$= (49 + 7777 - 16807 + 49) - (0) =$$

$$= 5106$$

$$(د) \int_2^3 (2 - s) (1 + s) \text{ دس}$$

$$= \int_2^3 (2 + 2s - s^2) \text{ دس}$$

سؤال (٣) / كتاب ص ١٧١ :

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [١ ، ٥] ، وكان

ق(س) = ٢س + ١ ، فجد قيمة ق(٥) - ق(١) .

الحل : (تكامل الطرفين)

$$\int_1^5 (2s + 1) \text{ دس} = \left[s^2 + s \right]_1^5$$

$$\text{ق(٥) - ق(١) = } (25 + 5) - (1 + 1) =$$

$$\text{ق(٥) - ق(١) = } 30 - 2 = 28$$

سؤال (٤) / كتاب ص ١٧١ :

احسب قيمة التكامل الآتي : $\int_2^4 (4s - 6s^2 + 3) \text{ دس}$

الحل :

$$\left[4s - 2s^3 + 3s \right]_2^4 =$$

$$= (16 + 12 - 128) - (8 + 6 - 24) =$$

$$= (0) - (-10) =$$

$$= 10 = 2 + 2 = \text{صفر}$$

ملاحظة هامة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مباشرة

باستخدام الخاصية في الدرس القادم .

الحل :

$$\int_0^2 \text{ق}(\text{س}) \text{دس} = 13$$

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(2) = 13$$

$$\text{ق}(\text{س}) = 17$$

$$\int_0^2 \text{ق}(\text{س}) \text{دس} = 17 + 13$$

$$\text{ق}(\text{س}) = 4$$

وزارة (٢٠٢٠) :

$$(1) \int_0^2 \text{س}^3 \text{دس} = \text{ص} \text{ ، فما قيمة } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} ?$$

(أ) ٣٢ (ب) ١٠ (ج) ٨ (د) صفر

(٢) إذا كان $\int_0^2 \text{س}^2 \text{دس} = 32$ ، فما قيمة الثابت ل ؟

(أ) ٨ (ب) ٢ (ج) ٢- (د) ٨-

$$(3) \int_0^3 \frac{\text{س}^3 + 8}{\text{س} + 2} \text{دس} \text{ يساوي :}$$

(أ) ١٢ (ب) ١٩ (ج) ٢٧ (د) ٣٠

أعظم النجاحات تأتي بعد أشق العثرات

" تأكد أنك تفعل أفضل ما تستطيع "

الأستاذ : معاذ البشير

سؤال (٥) / كتاب ص ١٧١ :

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :

$$(أ) \int_1^2 \text{س}^3 (4 - \text{س}^2) \text{دس}$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{\text{س}^6}{4} - \text{س}^5 \right] \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^7}{28} - \frac{\text{س}^6}{6} \right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^7}{28} - \frac{2^6}{6} \right) - \left(\frac{1^7}{28} - \frac{1^6}{6} \right) = \left(\frac{9}{2} - 0 \right) - \left(\frac{9}{2} - 0 \right) =$$

$$0 = \left(\frac{9}{2} \right) - \left(\frac{9}{2} \right) = 0$$

$$(ب) \int_1^2 \frac{\text{س}^2(3 - \text{س})}{2 \times 3} \text{دس} = \int_1^2 \frac{\text{س}^2(3 - \text{س})}{6} \text{دس}$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{\text{س}^3}{6} - \frac{\text{س}^4}{6} \right) \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^4}{24} - \frac{\text{س}^5}{30} \right]_1^2 = \frac{124}{6} - \frac{120}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$(ج) \int_0^2 \frac{\text{س}^2 + 7\text{س} - 6}{\text{س} - 1} \text{دس}$$

$$= \int_0^2 \frac{(\text{س} + 7)(\text{س} - 1)}{\text{س} - 1} \text{دس} = \int_0^2 (\text{س} + 7) \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^2}{2} + 7\text{س} \right]_0^2 =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 7 \times 2 \right) - \left(\frac{0^2}{2} + 7 \times 0 \right) = (2 + 14) - 0 = 16$$

سؤال (٦) / كتاب ص ١٧١ :

إذا كان $\int_0^2 \text{ق}(\text{س}) \text{دس} = 13$ ، وكان $\text{ق}(5) = 17$ ،فجد قيمة $\text{ق}(2)$.

خصائص التكامل المحدود

$$(1) \int_a^b l \, dx = \int_a^b c \, dx \text{ ، حيث } l \text{ عدد ثابت .}$$

مثال (١) / كتاب ص ١٧٢ :

$$\int_1^3 dx \text{ إذا كان } \int_1^3 c \, dx = 6 \text{ ،}$$

$$\int_1^3 dx \text{ هـ (س) دس } = 2 \text{ ، فجد قيمة كل ما يلي :}$$

$$(1) \int_1^3 2 \, dx \text{ ق (س) دس } = 2 \times 6 = 12$$

$$(2) \int_1^3 (3 \text{ هـ (س) } - 6 \text{ ق (س) } + 4 \text{ دس}) \, dx =$$

$$= \int_1^3 (3 \times 3 - 6 \times 6 + 4 \times 3) \, dx =$$

$$= (36 - 36 + 12) \times 2 = 24$$

تدريب (١) / كتاب ص ١٧٣ :

$$\int_1^2 l \, dx \text{ إذا كان } \int_1^2 dx = 2 \text{ ،}$$

$$\int_1^2 5 \, dx \text{ ع (س) دس } = 5 \text{ ، فجد قيمة كل ما يلي :}$$

$$(1) \int_1^2 \frac{5 \, dx}{2} \text{ دس} = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

$$(2) \int_1^2 (3 \text{ ل (س) } - 2 \text{ ع (س)}) \, dx = 3 \times 2 - 2 \times 5 = 6 - 10 = -4$$

$$(2) \int_a^b (c \text{ هـ (س) } + d \text{ ق (س)}) \, dx = \int_a^b c \, dx + \int_a^b d \, dx$$

مثال / خارجي :

$$\int_1^6 dx \text{ إذا كان } \int_1^6 dx = 12 \text{ فجد ما يلي :}$$

$$(1) \int_1^6 5 \, dx \text{ ق (س) دس } = 5 \times 12 = 60$$

$$(2) \int_1^6 (2 \text{ ق (س) } - 3 \text{ دس}) \, dx = \int_1^6 2 \, dx - \int_1^6 3 \, dx = 24 - 36 = -12$$

مثال / خارجي :

$$\int_1^{10} dx \text{ إذا كان } \int_1^{10} dx = 10 \text{ ، } \int_1^8 dx \text{ هـ (س) دس } = 8 \text{ ، فجد ما يأتي :}$$

$$(1) \int_1^{10} (2 \text{ ق (س) } + 3 \text{ هـ (س)}) \, dx = \int_1^{10} 2 \, dx + \int_1^{10} 3 \, dx = 20 + 30 = 50$$

$$(2) \int_1^{10} (3 \text{ هـ (س) } - 2 \text{ ق (س)}) \, dx = 3 \times 10 - 2 \times 10 = 30 - 20 = 10$$

$$= 30 - 20 = 10$$

$$(3) \int_1^{10} (2 \text{ ق (س) } + 1 \text{ دس}) \, dx = \int_1^{10} 2 \, dx + \int_1^{10} 1 \, dx = 20 + 10 = 30$$

$$= 20 + 10 = 30$$

$$\int_{-1}^1 (3) \text{ ق (س) دس} = \text{صفر}$$

مثال : جد التكاملات :

$$(1) \int_{-3}^3 (5س^2 + \frac{8}{س}) \text{ دس} = \text{صفر}$$

$$(2) \int_{-1}^1 \frac{س^2 + 1}{5س^3 + 2} \text{ دس} = \text{صفر}$$

$$(4) \int_{-1}^1 \text{ ق (س) دس} = \int_{-1}^1 \text{ ق (س) دس}$$

مثال :

إذا كان

$$\int_{-1}^1 \text{ ق (س) دس} = 3, \int_{-1}^1 \text{ هـ (س) دس} = 4, \text{ فجد ما يأتي :}$$

$$(1) \int_{-4}^1 (\text{ق (س)} + \text{هـ (س)}) \text{ دس}$$

$$= 3 + 4 = 7$$

$$(2) \int_{-4}^1 (2 \text{ هـ (س)} + \text{ق (س)}) \text{ دس}$$

$$= 2 \times 4 + 3 = 11$$

$$= 8 + 3 = 11$$

$$= 0$$

حل تدريب (1) / كتاب ص 173 :

(نجهز المعطيات)

$$\int_{-1}^1 2 \text{ ل (س) دس} = 2 \int_{-1}^1 \text{ ل (س) دس} = 2 \times 0 = 0$$

$$(1) \int_{-1}^1 5 \text{ ع (س) دس} = 5 \times \int_{-1}^1 \text{ ع (س) دس} = 5 \times 0 = 0$$

$$(2) \int_{-1}^1 2 \text{ ع (س)} - 3 \text{ ل (س)} - 2 \text{ س دس} = \int_{-1}^1 (2س^2 - 3 - 2س) \text{ دس} = \int_{-1}^1 (2س^2 - 2س - 3) \text{ دس} = \left[\frac{2س^3}{3} - س^2 - 3س \right]_{-1}^1 = \left(\frac{2}{3} - 1 - 3 \right) - \left(-\frac{2}{3} - 1 + 3 \right) = \frac{2}{3} - 4 - 3 + \frac{2}{3} + 1 - 3 = \frac{4}{3} - 9 = -\frac{23}{3}$$

$$10 = 3 - 13 = (1 - 4) - (3 + 10) =$$

مثال / خارجي :

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :

$$(1) \int_{-2}^3 (6س^2 + 4س - 5) \text{ دس} = \int_{-2}^3 (6س^2 - 5 + 4س) \text{ دس} = \left[2س^3 - 5س + 2س^2 \right]_{-2}^3 = (54 - 15 + 18) - (-8 + 10 - 8) = 57 - 2 = 55$$

$$(2) \int_{-2}^2 (2س^2 + 2س - 5) \text{ دس} = \left[\frac{2س^3}{3} + س^2 - 5س \right]_{-2}^2 = \left(\frac{16}{3} + 4 - 10 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 4 + 10 \right) = \frac{32}{3} - 16 - 4 = \frac{32}{3} - 20 = -\frac{28}{3}$$

$$= (10 + 8 + 16) - (10 - 18 + 54) =$$

$$55 = 2 - 57 =$$

$$(2) \int_{-2}^2 5س^2 (3 + س) \text{ دس} = \int_{-2}^2 (15س^2 + 5س^3) \text{ دس} = \left[5س^3 + \frac{5س^4}{4} \right]_{-2}^2 = \left(40 + \frac{80}{4} \right) - \left(-40 + \frac{80}{4} \right) = 80 + 20 - (-40 + 20) = 100 - (-20) = 120$$

$$(3) \int_{-2}^2 (5س^4 + 10س^2) \text{ دس} = \left[س^5 + \frac{10س^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(32 + \frac{80}{3} \right) - \left(-32 + \frac{-80}{3} \right) = 64 + \frac{160}{3} + 32 - \frac{80}{3} = 96 + \frac{80}{3} = \frac{288 + 80}{3} = \frac{368}{3}$$

$$(4) \int_{-2}^2 (س^3 + 5س) \text{ دس} = \left[\frac{س^4}{4} + \frac{5س^2}{2} \right]_{-2}^2 = \left(4 + \frac{20}{2} \right) - \left(4 + \frac{20}{2} \right) = 0$$

$$= (0) - (0 + 1) = -1$$

(٥) خاصية الإضافة :

$$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} + \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = \overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$$

مثال ١ # :

إذا كان $\overset{\text{أ}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٣٠$ ، $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٢٠$ فجد $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$:

$$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} + \overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$$

$$٥٠ = ٢٠ + ٣٠ =$$

مثال ٢ # :

إذا كان $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ١٨$ ، $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ١١$ فجد $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$:

$$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} + \overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$$

$$٢٩ = ١١ + ١٨ =$$

مثال ٣ # :

إذا كان $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٤$ ، $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ١١$ فجد $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$:

$$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} + \overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$$

$$٧ = ١١ + ٤ =$$

ومنه $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٧ \times ٣ =$

مثال (٢) / كتاب ص ١٧٤ :

إذا كان $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٢$ ، $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٤$

فجد كلاً مما يأتي :

(١) $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$

$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٢ \leftarrow \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٤$

ومنه $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ١$

(٢) $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} + \overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}}$

$$٣ = ٤ + ١ =$$

(٣) $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = \text{صفرًا}$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٧٥ :

إذا كان $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٥$ ، $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٤$

فجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٢$

$\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٥ \leftarrow \overset{\text{ب}}{\underset{\text{ب}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ٤$

ومنه $\overset{\text{ب}}{\underset{\text{أ}}{\text{أ}} \text{ ق (س) دس}} = ١٥ \times ٢ = ٣٠$

$$(أ) \int_{\frac{1}{4}}^1 3 \, dx = 3 \int_{\frac{1}{4}}^1 dx = 3 \left(x \right)_{\frac{1}{4}}^1 = 3 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 3 \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$18 = 6 \times 3 =$$

$$(ب) \int_{\frac{1}{4}}^1 dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 dx = \int_{\frac{1}{4}}^1 2 \, dx = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 dx = 2 \left(x \right)_{\frac{1}{4}}^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 2 \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$10 = 6 + 4 =$$

$$(ج) \int_{\frac{1}{4}}^1 (2x - 1) \, dx = \int_{\frac{1}{4}}^1 2x \, dx - \int_{\frac{1}{4}}^1 1 \, dx = \left(x^2 \right)_{\frac{1}{4}}^1 - \left(x \right)_{\frac{1}{4}}^1 = \left(1 - \frac{1}{16} \right) - \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{16} - \frac{3}{4} = \frac{15}{16} - \frac{12}{16} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^1 2x \, dx - \int_{\frac{1}{4}}^1 1 \, dx =$$

$$= \left[x^2 + 4 \right]_{\frac{1}{4}}^1 = (1 + 4) - \left(\frac{1}{16} + 4 \right) = 5 - 4\frac{1}{16} = 4\frac{15}{16} = 4.9375$$

$$13 = 9 + 4 =$$

سؤال (٢) / كتاب ص ١٧٧ :

$$\text{إذا كان } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{L(x)}{2} \, dx = 3, \text{ } \int_{\frac{1}{2}}^1 (H(x) + 1) \, dx = 5$$

فجد قيمة كل مما يأتي :

(نجهز المعطيات)

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 L(x) \, dx = 6, \int_{\frac{1}{2}}^1 (H(x) + 1) \, dx = 5$$

$$(أ) \int_{\frac{1}{2}}^1 (H(x) - 1) \, dx = 4$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (H(x) - 1) \, dx = 4$$

$$(٢) \int_{\frac{1}{6}}^2 dx + \int_{\frac{1}{6}}^2 dx = \int_{\frac{1}{6}}^2 2 \, dx = 2 \int_{\frac{1}{6}}^2 dx = 2 \left(x \right)_{\frac{1}{6}}^2 = 2 \left(2 - \frac{1}{6} \right) = 2 \left(\frac{11}{6} \right) = \frac{11}{3} = 3.6667$$

$$11 = 10 + 1 =$$

تدريب (٣) / كتاب ص ١٧٥ :

$$\text{إذا كان } \int_{\frac{1}{2}}^1 (3 - x) \, dx = 18,$$

$$\text{فجد قيمة التكامل الآتي : } \int_{\frac{1}{2}}^1 dx$$

الحل :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (3 - x) \, dx = 18$$

$$18 = \int_{\frac{1}{2}}^1 3 \, dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 x \, dx = \left[3x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(3 - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{8} = \frac{12}{8} - \frac{3}{8} = \frac{9}{8} = 1.125$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 3 \, dx = 18 - 12 = 6$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 3 \, dx = 30$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 dx = 10$$

سؤال (١) / كتاب ص ١٧٧ :

$$\text{إذا كان } \int_{\frac{1}{2}}^1 2 \, dx = 12,$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 dx = 4, \text{ فجد قيمة كل مما يأتي :}$$

(نجهز المعطيات)

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 2 \, dx = 12 \leftarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 dx = 4$$

فكرة إيجاد الثوابت :مثال / خارجي :

إذا كان $\int_1^2 (س + ٥) دس = ٠$ فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$$٠ = \int_1^2 (س + ٥) دس$$

$$٠ = (١٥ + ١) - (٥ + ١)$$

$$٠ = ٦ - ١٥ + ١$$

$$٠ = (٦ + ١) (١ - أ)$$

$$٦ - ١ = أ$$

مثال / خارجي :

إذا كان $\int_2^6 ق(س) دس = ٠$ فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

بما أن قيمة التكامل تساوي صفرأ ، وقاعدة الاقتران ق

غير معلومة ، فإن الحد العلوي للتكامل = الحد السفلي للتكامل .

$$٦ = ٢ - أ$$

$$٨ = أ$$

$$٢ = أ$$

ب) $\int_1^2 (٣س - ٨) دس = ٦ \times ٣ + \int_1^2 س دس = ١٨ + (١ - ٤) - ٢٤ = ٩ - ٢٤ = ١٨ + ٣ - ٢٤ = ١٨ - ٢١ = -٣$

$$٩ - ٢٤ = ١٨ + ٣ - ٢٤ = ١٨ - ٢١ = -٣$$

سؤال (٥) / كتاب ص ١٧٧ :

إذا كان $\int_1^4 (٣س - ٥) دس = ٩$

فجد قيمة التكامل الآتي :

$\int_1^4 (٢س + ١) دس$

الحل : (نجهز المعطيات)

$\int_1^4 (٣س - ٥) دس = ٩$

$$٩ = \int_1^4 ٣س دس - \int_1^4 ٥ دس$$

$$٩ = \int_1^4 ٣س دس - ٥س$$

$$٩ = (٢٠ - ٥) - \int_1^4 ٣س دس$$

$$٦ = ١٥ - ٩ = \int_1^4 ٣س دس$$

$$٢ = \int_1^4 ق(س) دس$$

المطلوب : $\int_1^4 (٢س + ١) دس$

$$= \int_1^4 ٢س دس + \int_1^4 ١ دس$$

$$٧ = ٣ + ٤ = (١ - ٤) + ٤ = \int_1^4 س دس + ٢ \times ٢$$

مثال (٣) / كتاب ص ١٧٦ :

(١) إذا كان $\int \frac{x^2-4}{x+2} dx = 0$ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$$x^2 - 4 = x^2 + 2x - 2x - 4$$

$$= (x^2 + 2x) - 2x - 4$$

$$= x(x+2) - 2x - 4$$

$$= x(x+2) - 2(x+2) + 4 - 4$$

$$= (x-2)(x+2)$$

الحل :

$$0 = \int (x-2)(x+2) dx$$

$$= \int (x^2 - 4) dx = \frac{x^3}{3} - 4x + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x + C$$

تدريب (٤) / كتاب ص ١٧٦ :

(١) إذا كان $\int \frac{y^2-7}{y+3} dy = 0$ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

$$y^2 - 7 = y^2 + 3y - 3y - 7$$

$$= (y^2 + 3y) - 3y - 7$$

$$= y(y+3) - 3y - 7$$

$$= y(y+3) - 3(y+3) + 9 - 7$$

$$= (y-2)(y+3)$$

الحل :

$$0 = \int (y-2)(y+3) dy$$

$$= \int (y^2 - y - 6) dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 6y + C$$

تابع / حل تدريب (٤) .

$$0 = 2 - n^2 + n^3$$

$$0 = 2 - n^3 + n^3$$

$$0 = 2 + n^3 - n^3$$

$$0 = (n-2)(n^2 + 2n + 4)$$

$$n = 2 \text{ أو } n = 1$$

السؤال (٣) / كتاب ص ١٧٧ :

إذا كان $\int \frac{5x+7}{x-1} dx = 0$ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$$5x + 7 = 5x - 5 + 12$$

$$= 5(x-1) + 12$$

$$= 5(x-1) + 12$$

السؤال (٤) / كتاب ص ١٧٧ :

إذا كان $\int \frac{4s^2-2}{s^3} ds = 0$ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

$$0 = \int \frac{4s^2-2}{s^3} ds = \int (4s^{-1} - 2s^{-3}) ds$$

$$= \int (4s^{-1} - 2s^{-3}) ds = 4 \ln|s| + \frac{1}{s^2} + C$$

$$0 = 4 \ln|s| + \frac{1}{s^2} + C$$

$$0 = 4 \ln|s| + \frac{1}{s^2} + C$$

$$0 = 4 \ln|s| + \frac{1}{s^2} + C$$

$$0 = (2+m)(3-m)$$

$$m = 3 \text{ أو } m = 2$$

التكامل بالتعويض

نستخدم طريقة التكامل بالتعويض بصورته الأساسية عند وجود تكامل على نحو الصورة :

$$\int u^h \cdot \frac{dv}{dx} dx$$

أي وجود مقدار يصعب إجراء تكامله مباشرة ، ومشتقة ذلك المقدار تكون موجودة هي ، أو ثابت مضروب في المشتقة .
فنفرض أن $v =$ المقدار ، وتكون $dv =$ مشتقة المقدار

مثال / خارجي :

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :

$$\int (3s^2 + 5s + 7) \cdot ds$$

$$\text{الحل : نفرض } v = 3s^2 + 5s + 7$$

$$dv = 6s + 5$$

$$\int \frac{dv}{6} = \frac{1}{6} \int dv = \frac{1}{6} (6s^2 + 5s + 7) + C$$

$$\int (3s^2 + 5s + 7) \cdot ds = \frac{1}{6} (6s^2 + 5s + 7) + C$$

$$= \frac{1}{6} (6s^2 + 5s + 7) + C$$

$$\int \frac{ds}{(3 + 2s^2)}$$

$$\text{الحل : نفرض } v = 3 + 2s^2$$

$$dv = 4s$$

$$\int \frac{dv}{4v} = \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{4} \ln|v| + C = \frac{1}{4} \ln|3 + 2s^2| + C$$

$$\int \frac{1}{(3 + 2s^2)} ds = \frac{1}{4} \ln|3 + 2s^2| + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln|3 + 2s^2| + C$$

مثال / خارجي :

جد قيمة كل من التكاملات :

$$\int (2s + 7) \cdot ds$$

$$\text{الحل : نفرض } v = 2s + 7$$

$$dv = 2$$

$$\int \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int dv = \frac{1}{2} (2s + 7) + C$$

$$\int (2s + 7) \cdot ds = \frac{1}{2} (2s + 7) + C$$

$$= \frac{1}{2} (2s + 7) + C$$

$$\int \frac{ds}{(5 + 7s + 2s^2)}$$

$$\int \frac{ds}{(5 + 7s + 2s^2)}$$

$$\int \frac{1}{(2s^2 + 7s + 5)} ds$$

$$\text{نفرض } v = 2s^2 + 7s + 5$$

$$\int \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \ln|v| + C = \frac{1}{2} \ln|2s^2 + 7s + 5| + C$$

تابع حل فرع (ب)

$$\left[\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} \right]$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^3} \times \frac{1}{s^3} \times (1+s^2) =$$

$$= \frac{1}{s^3} \times \frac{1}{(1+s^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{s^3(1+s^2)^2} =$$

$$(3) \left[\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} \right]$$

الحل : نفرض ص = $1+s^3+s^2$

$$\frac{1}{(1+s^2)^3} = \frac{1}{s^3+s^2} = \text{دس}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)^3} \left[\frac{1}{(1+s^2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \text{ جا ص} + \frac{1}{3} \text{ جا } (1+s^3+s^2) =$$

$$(4) \left[\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} \right]$$

$$\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \text{دس} \leftarrow \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \text{دس}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} =$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} =$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} =$$

مثال / خارجي :

جد قيمة كل من التكاملات :

$$(1) \left[\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} \right]$$

$$\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \text{دس} \leftarrow \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \text{دس}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)}$$

$$(2) \left[\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} \right]$$

$$\frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \text{دس} \leftarrow \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \text{دس}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)}$$

$$= \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)} = \frac{1}{(1+s^2)(1+s^3)}$$

مثال (١) / كتاب ص ١٧٨ :جد قيمة التكامل الآتي : $\int 3s^2(5 + s^3) ds$ الحل : نفرض $v = 5 + s^3 \leftarrow ds = \frac{dv}{3s^2}$

$$\int \frac{dv}{3s^2} = \int \frac{dv}{3(5 + s^3)} =$$

$$= \int \frac{1}{3} \frac{dv}{5 + s^3} = \int \frac{1}{3} \frac{dv}{5 + s^3} =$$

تدريب (١) / كتاب ص ١٧٩ :

جد قيمة التكامل الآتي :

 $\int 21(2s^2 + s^3)(4s + s^2) ds$ الحل :نفرض $v = 2s^2 + s^3 \leftarrow ds = \frac{dv}{4s + s^2}$

$$\int \frac{dv}{4s + s^2} = \int \frac{dv}{4s + s^2} =$$

$$= \int \frac{21 \times v}{8} = \int \frac{21v}{8} =$$

مثال / خارجي :

جد قيمة كل من التكاملات :

 $\int 3s^2(1 + s^3) ds$ الحل : نفرض $v = 1 + s^3 \leftarrow ds = \frac{dv}{3s^2}$

#

عندما $s = 0 \leftarrow v = 1 + 3(0) = 1$ عندما $s = 1 \leftarrow v = 1 + 3(1) = 4$ تابع / الحل :

$$\int \frac{1}{4} ds = \frac{1}{4} s + C = \frac{1}{4} s + C =$$

$$= \frac{1}{4} s + C = \frac{1}{4} s + C =$$

$$\int \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} s + C = \frac{1}{2} s + C =$$

$$v = 9 + s^2 \leftarrow ds = \frac{dv}{2s}$$

عندما $s = 0 \leftarrow v = 9 + 2(0) = 9$ عندما $s = 4 \leftarrow v = 9 + 2(4) = 17$

$$\int \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} s + C = \frac{1}{2} s + C =$$

$$\int \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2} s + C = \frac{1}{2} s + C =$$

$$4 = 2 \times 2 = (4 - 0) = 4$$

قاعدة (١) :

$$\left[(أ + ب)^{ن} دس = \frac{(أ + ب)^{ن+١}}{(١ + ن) أ} + ج \right]$$

مثال / خارجي :

جد قيمة كل من التكاملات :

$$(١) \int (س + ٣)^٨ دس$$

$$= \int + \frac{٩(س + ٣)^٩}{٩ \times ٥} = \int + \frac{٩(س + ٣)^٩}{٤٥}$$

$$(٢) \int (س٢ - ٩)٧ دس$$

$$= \int + \frac{٧(س٢ - ٩)٧}{٥ \times ٢} = \int + \frac{٧(س٢ - ٩)٧}{١٠}$$

$$(٣) \int \frac{٨(س٣ - ٢)٥}{(س٣ - ٢)٥} دس$$

$$= \int + \frac{٨(س٣ - ٢)٥}{٤ \times ٣} = \int + \frac{٨(س٣ - ٢)٥}{١٢}$$

$$(٤) \int \frac{٢}{٣(١ + س٤)} دس = \int \frac{٢}{٣(١ + س٤)} دس$$

$$= \int + \frac{٥}{٣(١ + س٤)٣} = \int + \frac{٥}{٤ \times ٥} = \int + \frac{٥}{٢٠}$$

$$(٥) \int \frac{٨(١ + س٢) \times ٨}{٤ \times ٢} دس = \int \frac{٨(١ + س٢)٨}{٤ \times ٢} دس$$

$$= \int \frac{٨(١ + س٢)٨}{٤ \times ٢} دس = \int \frac{٨(١ + س٢)٨}{٨} دس = ٨٠ = ١ - ٨١ = ٤(١) - ٤(٣) = ٤(١ + س٢) =$$

قاعدة (٢) :

$$(١) \int (أ + ب) دس = \frac{ج(أ + ب) - ج}{١} + ج$$

$$(٢) \int ج(أ + ب) دس = \frac{ج(أ + ب) - ج}{١} + ج$$

$$(٣) \int ق(أ + ب) دس = \frac{ق(أ + ب) - ق}{١} + ج$$

مثال / خارجي :

جد قيمة كل من التكاملات :

$$(١) \int (س٢ - ٥) دس = \frac{ج(س٢ - ٥) - ج}{٥} + ج$$

$$(٢) \int ٨ج(س٣ + ١) دس = \frac{٨ج(س٣ + ١) - ٨ج}{٣} + ج$$

$$(٣) \int ٥س٢ + ٣قا(س٤ + ٧) دس$$

$$= \frac{٥س٢}{٣} + \frac{٣ظ(س٤ + ٧)}{٤} + ج$$

$$(٤) \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = (٤) \frac{2}{3} - (١) \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال (٢) / كتاب ص ١٧٩:

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(١) \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

الحل:

$$\text{نفرض } v = 1 + s^2 \leftarrow \frac{dv}{2s} = ds \Rightarrow \frac{dv}{2\sqrt{v}} = ds$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

تدريب (٣) / كتاب ص ١٨٢:

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(١) \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$\text{نفرض } v = 1 + s^2 \leftarrow \frac{dv}{2s} = ds \Rightarrow \frac{dv}{2\sqrt{v}} = ds$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$(٢) \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$(٢) \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$\text{نفرض } v = 1 + s^2 \leftarrow \frac{dv}{2s} = ds \Rightarrow \frac{dv}{2\sqrt{v}} = ds$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$(٣) \int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds$$

$$\text{نفرض } v = 1 + s^2 \leftarrow \frac{dv}{2s} = ds \Rightarrow \frac{dv}{2\sqrt{v}} = ds$$

$$\text{عندما } s = 0 \leftarrow v = 1$$

$$\text{عندما } s = 2 \leftarrow v = 5$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} ds = \int \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{dv}{2} = \frac{1}{2} \int v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{v} + C = \sqrt{1+s^2} + C$$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-s)(1-s)}} ds$$

الحل :

$$\text{نفرض } v = 4 - s \quad \leftarrow \quad ds = -ds \quad \leftarrow \quad ds = -\frac{1}{2} dv$$

$$\text{عندما } s = 1 \quad \leftarrow \quad v = 3$$

$$\text{عندما } s = 4 \quad \leftarrow \quad v = 0$$

$$= \int_3^0 \frac{1}{\sqrt[3]{v}} \left(-\frac{1}{2}\right) dv = -\frac{1}{2} \int_3^0 v^{-\frac{1}{3}} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} v^{\frac{2}{3}} \right]_3^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{9}{4}$$

مثال (٣) / كتاب ص ١٨٣ :

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-s)(1-s)}} ds$$

الحل :

$$= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-s)(1-s)}} ds$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-s)(1-s)}} ds$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(4-s)(1-s)}} ds$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(s+1)(s)}} ds$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(s+1)(s)}} ds$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(s+1)(s)}} ds$$

تدريب (٥) / كتاب ص ١٨٣ :

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(s^2-1)(s^2-1)}} ds$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(s^2-1)(s^2-1)}} ds$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(s^2-1)(s^2-1)}} ds$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(s^2-1)(s^2-1)}} ds$$

تدريب (٤) / كتاب ص ١٨٢ :

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :

$$(1) \int_1^a \frac{(b+x)^{n+1}}{(1+x)^a} dx$$

$$(2) \int_1^a \frac{(b+x)^n}{1+x} dx$$

مثال / خارجي :

إذا علمت أن ق(١) = ٣ ، ق(٨) = ١٢

جد $\int_1^8 3x^2 \cdot \text{ق}(x) \, dx$.نفرض ص = x^3 ← دس = $\frac{\text{دص}}{3x^2}$

عندما س = ١ ← ص = ١

عندما س = ٢ ← ص = ٨

$$= \int_1^8 3x^2 \cdot \text{ق}(x) \cdot \frac{\text{دص}}{3x^2} =$$

$$= \text{ق}(ص) \Big|_1^8 = \text{ق}(٨) - \text{ق}(١) = ١٢ - ٣ = ٩$$

مثال / خارجي :إذا علمت أن $\int_0^1 \text{ق}(س) \, دس = ٤$ جد قيمة $\int_0^2 ٦س^٢ \cdot \text{ق}(س+١) \, دس$.نفرض ص = $س^٢ + ١$ ← دس = $\frac{\text{دص}}{٢س}$

عندما س = ٠ ← ص = ١

عندما س = ٢ ← ص = ٥

$$= \int_0^2 ٦س^٢ \cdot \text{ق}(ص) \cdot \frac{\text{دص}}{٢س} = ١٢ = ٤ \times ٣$$

وزارة (٢٠١٩) (ضع دائرة)(١) $\int (س-١)^٢ \, دس$ يساوي :أ) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ← ج) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ← ب) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ← ج) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ج) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ← د) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ← ج) $\int (س-١)^٢ \, دس$ ← د) $\int (س-١)^٢ \, دس$ (٢) $\int ٦جا(٦س-٣) \, دس$ يساوي :أ) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ← ج) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ← ب) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ← ج) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ج) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ← د) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ← ج) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ ← د) $\int ٦جا(٦س-٢) \, دس$ (٣) $\int ٣س^٢ (س+٧) \, دس$ تساوي

الحل : (واجب)

الاسئلة / كتاب ص ١٨٤السؤال (١) / كتاب ص ١٨٤ :

اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة

كل تكامل من التكاملات الآتية :

$$(أ) \int (١ - ٢س) (س - ٢) دس$$

$$\text{نفرض ص} = س - ٢ \leftarrow \text{دس} = \frac{دص}{١ - ٢س}$$

$$= \int \frac{دص}{\cancel{١ - ٢س}} (١ - ٢س) دس$$

$$= \int \frac{ص}{٣} دس + \int \frac{٢(س - ٢) دص}{٣}$$

$$(ب) \int ٢س٦ \sqrt{٢ - ٣س٢} دس$$

$$\text{نفرض ص} = ٢ - ٣س٢ \leftarrow \text{دس} = \frac{دص}{٢س٦}$$

$$= \int \frac{٢}{\cancel{٢س٦}} ص \frac{٢}{٢س٦} دص$$

$$= \int \frac{٧}{٧} ص \frac{٥}{٧} دص + \int \frac{٧}{٧} (٢ - ٣س٢) \frac{٥}{٧} دص$$

$$(ج) \int (٢س٣ - ٢س٢) ق٢(س٢ - ٣س) دس$$

$$\text{نفرض ص} = ٢س٣ - ٢س٢ \leftarrow \text{دس} = \frac{دص}{٢س٣ - ٢س٢}$$

$$= \int \frac{دص}{\cancel{٢س٣ - ٢س٢}} ق٢(س٢ - ٣س) دص$$

$$= - \int \text{ظا ص} دص + - \int \text{ظا} (س٢ - ٣س) دص$$

$$(د) \int \frac{٩ - ٣س}{(س٦ - ٢س)٢} دس = \int (٩ - ٣س) (س٦ - ٢س)٢ دس$$

$$\text{نفرض ص} = س٦ - ٢س \leftarrow \text{دس} = \frac{دص}{٦ - ٢س}$$

$$= \int \frac{دص}{(\cancel{٦ - ٢س})٢} (٩ - ٣س) دص$$

$$= \int \frac{٣}{٢} دص + \int \frac{١ - ص}{١} دص$$

$$= \int \frac{٣ - ١ - ص}{(س٦ - ٢س)٢} دص$$

السؤال (٢) / كتاب ص ١٨٤ :

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :

$$(أ) \int \sqrt{٢ - ٣س٣} دس = \int \frac{٢}{٣(٢ - ٣س٣)} دس$$

$$= \int \frac{٥}{٥} دص + \int \frac{٥}{٥ \times ٣} دص = \int \frac{٥}{٥} دص + \int \frac{٥}{١٥} دص$$

$$(ب) \int (١ - س) (١ + س٤ - ٢س٢) دس$$

$$\text{نفرض ص} = ١ + س٤ - ٢س٢ \leftarrow \text{دس} = \frac{دص}{٤ - ٤س}$$

$$= \int \frac{دص}{٤(١ - س)} دص + \int \frac{ص}{٦ \times ٤} دص$$

$$= \int \frac{٢(١ + س٤ - ٢س٢) دص}{٢٤}$$

$$(ب) \int_{1-}^{1-} 3^2 (س - 2)^3 دس = \text{صفر}$$

$$(ج) \int_{1-}^{1-} 3^2 \sqrt[3]{س - 2} دس = \int_{1-}^{1-} 3^2 (س - 2)^{\frac{1}{3}} دس$$

نفرض ص = س - 2 ← دس = $\frac{دص}{3}$

عندما س = 0 ← ص = 1 -

$$\text{عندما س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 0$$

$$\int_{1-}^{1-} 3^2 \sqrt[3]{س - 2} دس = \frac{دص}{3} \times \frac{3}{4} (ص)^{\frac{4}{3}} = \frac{دص}{4} (ص)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{4} (1 - 2)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} (0 - 2)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$(د) \int_{1-}^{2-} \frac{س^2 - 3}{(س^3 - 2)^2} دس$$

$$\int_{1-}^{2-} \frac{س^2 - 3}{(س^3 - 2)^2} دس = \int_{1-}^{2-} \frac{س^2 - 3}{(س^3 - 2)^2} دس$$

نفرض ص = س³ - 2 ← دس = $\frac{دص}{3س^2}$

عندما س = 2 ← ص = 2³ - 2 = 6

عندما س = 1 ← ص = 1³ - 2 = -1

$$\int_{1-}^{2-} \frac{س^2 - 3}{(س^3 - 2)^2} دس = \frac{دص}{3} \int_{-1}^6 \frac{1}{ص^2} دص = \frac{دص}{3} \left[-\frac{1}{ص} \right]_{-1}^6 = \frac{دص}{3} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{-1} \right) = \frac{دص}{3} \left(-\frac{1}{6} - 1 \right) = \frac{دص}{3} \left(-\frac{7}{6} \right) = -\frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \text{صفر}$$

$$(ج) \int_{1-}^{2-} 2^2 (س - 2) دس = \int_{1-}^{2-} 4(س - 2) دس = 4 \left[\frac{س^2}{2} - 2س \right]_{1-}^{2-} = 4 \left(\frac{4}{2} - 4 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right) = 4 \left(2 - 4 - \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \right) = 4 \left(2 - 4 - \frac{1}{2} + 2 \right) = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) = -2$$

$$(د) \int_{1-}^{2-} 3^2 (س + 1) دس = \int_{1-}^{2-} 9(س + 1) دس = 9 \left[\frac{س^2}{2} + س \right]_{1-}^{2-} = 9 \left(\frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) = 9 \left(2 + 2 - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(4 - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(\frac{8}{2} - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{45}{2}$$

$$\text{نفرض ص} = س + 1 \leftarrow دس = \frac{دص}{1} = دص$$

$$= \int_{1-}^{2-} 3^2 (س + 1) دس = \int_{1-}^{2-} 9(س + 1) دس = 9 \int_{1-}^{2-} (س + 1) دس = 9 \left[\frac{س^2}{2} + س \right]_{1-}^{2-} = 9 \left(\frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) = 9 \left(2 + 2 - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(4 - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(\frac{8}{2} - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{45}{2}$$

$$= \int_{1-}^{2-} 3^2 (س + 1) دس = \int_{1-}^{2-} 9(س + 1) دس = 9 \left[\frac{س^2}{2} + س \right]_{1-}^{2-} = 9 \left(\frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right) = 9 \left(2 + 2 - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(4 - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(\frac{8}{2} - \frac{3}{2} \right) = 9 \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{45}{2}$$

السؤال (٣) / كتاب ص ١٨٤:

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(أ) \int_{1-}^{2-} \sqrt[4]{س + 1} دس$$

$$\int_{1-}^{2-} \sqrt[4]{س + 1} دس = \int_{1-}^{2-} (س + 1)^{\frac{1}{4}} دس = \left[\frac{4}{5} (س + 1)^{\frac{5}{4}} \right]_{1-}^{2-} = \frac{4}{5} \left(2^{\frac{5}{4}} - 1^{\frac{5}{4}} \right) = \frac{4}{5} \left(2^{\frac{5}{4}} - 1 \right)$$

$$\int_{1-}^{2-} \frac{3}{\sqrt[2]{(س + 1)}} دس = \int_{1-}^{2-} \frac{3}{\sqrt{س + 1}} دس = \left[3 \sqrt{س + 1} \right]_{1-}^{2-} = 3 \left(\sqrt{2 + 1} - \sqrt{1 + 1} \right) = 3 \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right)$$

$$\int_{1-}^{2-} \left(\frac{3}{\sqrt[2]{(س + 1)}} - \frac{3}{\sqrt[2]{(س + 1)}} \right) دس = \int_{1-}^{2-} 0 دس = 0$$

$$\int_{1-}^{2-} \left(\frac{3}{\sqrt[2]{(س + 1)}} - \frac{3}{\sqrt[2]{(س + 1)}} \right) دس = \int_{1-}^{2-} 0 دس = 0$$

$$= \frac{26}{6}$$

السؤال (٤) / كتاب ص ١٨٤ :

إذا علمت أن ق(٨-) = ٥ ، ق(٢٧-) = ٦ -

جد $\int_1^3 3^x \cdot \ln(3) dx$.

$$\text{نفرض } v = 3^x \leftarrow \text{دس} = \frac{dv}{3^x \ln 3}$$

$$\text{عندما } x = 3 \leftarrow v = 27$$

$$\text{عندما } x = 2 \leftarrow v = 8$$

$$= \int_8^{27} \frac{dv}{v} = \ln v \Big|_8^{27} = \ln 27 - \ln 8$$

$$= \ln(27) - \ln(8) = \ln\left(\frac{27}{8}\right) = 11 - 6 = 5$$

السؤال (٥) / كتاب ص ١٨٤ :

إذا علمت أن $\int_0^2 3^x dx = 3$ جد قيمة $\int_1^2 8^x \ln(3) dx$.

$$\text{نفرض } v = 3^{x+1} \leftarrow \text{دس} = \frac{dv}{3^x \ln 3}$$

$$\text{عندما } x = 2 \leftarrow v = 9$$

$$\text{عندما } x = 1 \leftarrow v = 3$$

$$= \int_3^9 \frac{dv}{v} = \ln v \Big|_3^9 = \ln 9 - \ln 3 = \ln\left(\frac{9}{3}\right) = \ln 3 = 12 - 3 = 9$$

سؤال / خارجي :

إذا علمت أن هـ (٥) = ٧ ، هـ (٢) = ٤

فإن قيمة $\int_1^4 x^2 dx$ تساوي :

$$\text{(أ) } 3$$

$$\text{(ب) } 3$$

$$\text{(ج) } 6$$

$$\text{(د) } 6$$

قم بواجبك ، وأكثر قليلاً
وسياتي المستقبل من تلقاء نفسه

محبتكم : الأستاذ معاذ البشيش

تطبيقات التكامل (تطبيقات هندسية)

تعلم أن ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) هو ق'(س) ، ولأن التكامل يعتبر عملية عكسية للتفاضل فإنه بالإمكان إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي وذلك بإيجاد التكامل ومعرفة إحدى النقط التي يمر بها المنحنى لإيجاد الثابت (ج) .

مثال / خارجي :

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) يعطى بالعلاقة :
(٦س^٢ + ٢) وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٦)
فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

الحل :

$$ق'(س) = ٦س^٢ + ٢$$

$$ق(س) = \int (٦س^٢ + ٢) دس$$

$$ق(س) = ٢س^٣ + ٢س + ج$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (١ ، ٦) حيث ق(١) = ٦
ق(١) = (١)٢ = ٢(١) + ٢ + ج

$$٦ = ٢ + ٢ + ج \leftarrow ج = ٢$$

$$ق(س) = ٢س^٣ + ٢س + ٢$$

مثال (١) / كتاب ص ١٨٦ :

جد قاعدة الاقتران ق ، علماً بأن ميل المماس لمنحناه
عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

$$ق'(س) = ٣س^٢ - ٨س، وأن منحناه يمر بالنقطة (١- ، ٣)$$

الحل :

$$ق'(س) = ٣س^٢ - ٨س$$

$$ق(س) = \int (٣س^٢ - ٨س) دس$$

$$ق(س) = س^٣ - ٤س^٢ + ج$$

تابع / حل المثال (١)

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (١- ، ٣) حيث ق(١-) = ٣

$$ق(١-) = (١-) = ٤(١-) - ٣(١-) + ج$$

$$٣ = ٤ - ١ - ٣ \leftarrow ج = ٨$$

$$ق(س) = ٤س - ٣س^٢ + ٨$$

تدريب (١) / كتاب ص ١٨٦ :

جد قاعدة الاقتران ق ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (١- ، ٢)

وأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند
النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

$$ق'(س) = ٢س - ١ .$$

$$ق(س) = \int (٢س - ١) دس$$

$$ق(س) = س^٢ - س + ج$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (١- ، ٢) حيث ق(١-) = ٢

$$ق(١-) = (١-) = ١ - ١ + ج$$

$$٢ = ١ + ١ + ج \leftarrow ج = ٠$$

$$ق(س) = س^٢ - س$$

مثال (٢) / كتاب ص ١٨٦ :

جد قاعدة الاقتران ص = ق(س) ، علماً بأن ميل المماس لمنحاه عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :
 $\frac{ص}{دس} = \frac{ص}{س} \sqrt{٩ + ٢س}$ ، وأن النقطة (-٤ ، ١) تقع على منحى الاقتران ص .

الحل :

$$ق(س) = \sqrt{٩ + ٢س}$$

ق(س) = $\sqrt{٩ + ٢س}$ دس (تكامل بالتعويض)

$$ص = ٩ + ٢س \longleftarrow دس = \frac{ص}{س}$$

$$ق(س) = \sqrt{\frac{ص}{س}}$$

$$ق(س) = \sqrt{\frac{١}{٢ص}}$$

$$ق(س) = \frac{٣}{٣ \times ٣} + \frac{٣}{٣}$$

$$ق(س) = \frac{١}{٣} + \sqrt{٣ص}$$

$$ق(س) = \frac{١}{٣} + \sqrt{٩ + ٢س}$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (-٤ ، ١) حيث ق(-٤) = ١

$$ق(-٤) = \frac{١}{٣} + \sqrt{٩ + ٢(-٤)}$$

$$١ = \frac{١٢٥}{٣} + \frac{١٢٢}{٣} \longleftarrow ج$$

$$ق(س) = \frac{١}{٣} + \sqrt{٩ + ٢س} = \frac{١٢٢}{٣}$$

سؤال (١) / كتاب ص ١٨٨ :

إذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٦ - ٢س + ٩س^٢) ، فجد قاعدة الاقتران ق ، علماً بأن ق(٠) = ٥ .

الحل :

$$ق(س) = ٦ - ٢س + ٩س^٢$$

$$ق(س) = ٦ - ٢س + ٩س^٢ \text{ دس}$$

$$ق(س) = ٦ - ٢س + ٩س^٢ \text{ دس} + \frac{٩}{٤}س^٤$$

لإيجاد ج نستفيد من ق(٠) = ٥

$$ق(٠) = ٦ - ٢(٠) + ٩(٠)^٢ + \frac{٩}{٤}(٠)^٤ = ٥$$

$$٥ = ٥ - ٠ + ٠ + ٠ \longleftarrow ج$$

$$ق(س) = ٦ - ٢س + ٩س^٢ + \frac{٩}{٤}س^٤$$

سؤال (٢) / كتاب ص ١٨٨ :

جد قاعدة الاقتران ق ، إذا كان ميل المماس للمنحى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :
 $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{\sqrt{٨ + ٢س}}$ ، وكان منحى الاقتران ق

يمر بالنقطة (٠ ، ٤) .

الحل :

$$ق(س) = \frac{١}{٣} (٨ + ٢س)^٢$$

$$ق(س) = \frac{١}{٣} (٨ + ٢س)^٢ \text{ دس}$$

$$ص = ٨ + ٢س \longleftarrow دس = \frac{ص}{س}$$

تابع/ حل السؤال (٢)

$$ق(س) = \left[\frac{1}{ص} \times \frac{3}{ص} - \frac{2}{ص} \right] = \frac{3}{ص^2} - \frac{2}{ص}$$

$$ق(س) = \frac{3}{ص} - \frac{2}{ص} = \frac{3 - 2}{ص} = \frac{1}{ص}$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (٤ ، ٠) حيث ق(٠) = ٤

$$ق(٠) = \frac{3}{٠} - \frac{2}{٠} = \frac{3 - 2}{٠} = \frac{1}{٠}$$

$$٤ = \frac{3}{٠} - \frac{2}{٠} = \frac{3 - 2}{٠} = \frac{1}{٠}$$

$$٤ = \frac{3}{٠} - \frac{2}{٠} = \frac{3 - 2}{٠} = \frac{1}{٠}$$

$$٤ = \frac{3}{٠} - \frac{2}{٠} = \frac{3 - 2}{٠} = \frac{1}{٠}$$

$$ق(س) = \frac{3}{ص} - \frac{2}{ص} = \frac{3 - 2}{ص} = \frac{1}{ص}$$

سؤال (٤) / كتاب ص ١٨٨ :

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند

النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

ل(س) = ٢س - ٤ (س٣ - ٤) ، فجد قاعدة الاقتران ل ،

علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣) .

الحل :

$$ل(س) = ٢س - ٤ (س٣ - ٤) = ٢س - ٨س٣ + ١٦$$

$$ل(س) = ٢س - ٨س٣ + ١٦$$

$$ل(س) = ٢س - ٨س٣ + ١٦$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (٣ ، ٠) حيث ل(٣) = ٣

$$٣ = ٢(٣) - ٨(٣)٣ + ١٦ = ٦ - ٨(٢٧) + ١٦ = ٦ - ٢١٦ + ١٦ = -٢٠٤$$

$$٣ = ٢(٣) - ٨(٣)٣ + ١٦ = ٦ - ٢١٦ + ١٦ = -٢٠٤$$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٨٦ :

جد ق(١٤) ، علماً بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

ق(س) = ٦ - ٢س٢ ، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) .

الحل :

$$ق(س) = ٦ - ٢س٢$$

$$ق(س) = ٦ - ٢س٢$$

$$ق(س) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢س٢) \times ٣ = \frac{٤}{٢} (١ - ٢س٢) = ٢(١ - ٢س٢)$$

$$ق(س) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢س٢) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢س٢)$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (٥ ، ٠) حيث ق(٥) = ٥

$$ق(٥) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢(٥)٢) = \frac{٤}{٣} (١ - ٥٠) = \frac{٤}{٣} (-٤٩) = -\frac{١٩٦}{٣}$$

$$٥ = \frac{٤}{٣} (١ - ٢(٥)٢) = \frac{٤}{٣} (١ - ٥٠) = \frac{٤}{٣} (-٤٩) = -\frac{١٩٦}{٣}$$

$$ق(س) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢س٢) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢س٢)$$

$$ق(١٤) = \frac{٤}{٣} (١ - ٢(١٤)٢) = \frac{٤}{٣} (١ - ٣٩٢) = \frac{٤}{٣} (-٣٩١) = -\frac{١٥٦٤}{٣}$$

$$١٨٥ = \frac{٧٤٠}{٤} = \frac{١١}{٤} + ٨١ \times \frac{٩}{٤} = \frac{١١ + ٧٢٩}{٤} = \frac{٧٤٠}{٤}$$

سؤال (٣) / كتاب ص ١٨٨ :

جد قيمة ق(١) ، علماً بأن ميل المماس للمنحنى

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي :

٢٥(س + ٤) ، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (١- ، ٧).

الحل :

$$ق(س) = ٢٥(س + ٤)$$

$$ق(س) = ٢٥(س + ٤) دس$$

$$ق(س) = ٢٥(س + ٤) + ج$$

$$ق(س) = ٢٥(س + ٤) + ج$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (١- ، ٧) حيث ق(١-) = ٧

$$ق(١-) = ٢٥(١- + ٤) + ج$$

$$٧ = ٢٥(١- + ٤) + ج$$

$$ق(س) = ٢٥(س + ٤) + ٨$$

$$ق(١) = ٢٥(١ + ٤) + ٨ = ١٠٨$$

وزارة (٢٠٢٠) :

إذا ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س)

عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤س + ١) وكان

منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

فإن قيمة ق(١ -) تساوي :

$$٣ (أ) \quad ٤ (ب) \quad ٥ (ج) \quad ٧ (د)$$

وزارة (٢٠١٩) :

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س)

عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{١}{٢(١ + س)}$ ، س $\neq ١ -$

فجد قاعدة الاقتران ق ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة

$$(١ ، \frac{١}{٢})$$

الحل : (واجب)**سؤال (٥) / كتاب ص ١٨٨ :**

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ه يعطى بالقاعدة

ه(س) = $\frac{٢س^٢ - ٥س}{س}$ ، فجد ه(٢) ،

علماً بأن منحنى الاقتران ه يمر بالنقطة (١- ، ٥) .

الحل :

$$ه(س) = ٢س - ٥$$

$$ه(س) = ٢س - ٥ دس = ٢س - ٥س + ج$$

لإيجاد ج نستفيد من النقطة (١- ، ٥) حيث ه(١-) = ٥

$$ه(١-) = ٢(١-) - ٥ + ج = ٥$$

$$ه(س) = ٢س - ٥س + ١٠$$

$$ه(٢) = ٢(٢) - ٥(٢) + ١٠ = ٧$$

تطبيقات التكامل (تطبيقات فيزيائية)

تعلم أن مشتقة المسافة = السرعة (فك = ع) وأن مشتقة السرعة = التسارع (ع = ت)
ولأن التكامل عملية عكسية للتفاضل لذلك فإن

$$\int ع(ن) دن = ف(ن) \quad \text{أيضاً} \quad \int ت(ن) دن = ع(ن)$$

مثال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن سرعته ع(ن) = ٥ + ٢ن
جد المسافة المقطوعة بعد مرور ٤ ثواني علماً بأن
ف(٠) = ٣ .

الحل :

$$ف(ن) = \int ع(ن) دن = \int (٥ + ٢ن) دن$$

$$ف(ن) = ٥ن + ن^٢ + ج$$

لإيجاد ج : ف(٠) = ٣

$$٣ = (٠) = ٥ \times ٠ + ٠^٢ + ج$$

$$ج = ٣$$

$$\text{ومنه } ف(ن) = ٥ن + ن^٢ + ٣$$

$$ف(٤) = (٤) = ٥ \times ٤ + ٤^٢ + ٣$$

$$٣٩ = ٣ + ٢٠ + ١٦ =$$

مثال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن سرعته ع(ن) = ٣ + ٨ن + ن^٢
جد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانيتين علماً بأن
ف(٠) = ١ .

الحل :

$$ف(ن) = \int ع(ن) دن = \int (٣ + ٨ن + ن^٢) دن$$

$$ف(ن) = ن^٣ + ٤ن^٢ + ٣ن + ج$$

لإيجاد ج : ف(٠) = ١

$$١ = ٠^٣ + ٤ \times ٠^٢ + ٣ \times ٠ + ج$$

$$١ = (٠) = ٠^٣ + ٤ \times (٠)^٢ + ٣ \times ٠ + ج$$

$$ج = ١$$

$$ف(ن) = ن^٣ + ٤ن^٢ + ٣ن + ١$$

$$ف(٢) = (٢) = ٢^٣ + ٤(٢)^٢ + ٣(٢) + ١$$

$$٣٣ = ٨ + ١٦ + ٦ + ١ =$$

مثال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت(ن) = ٦ + ٤
جد المسافة المقطوعة بعد مرور ٣ ثواني علماً بأن
ع(٠) = ٤ ، ف(٠) = ٥ .

الحل :

$$ع(ن) = \int ت(ن) دن = \int (٦ + ٤ن) دن$$

لإيجاد ج : ع(٠) = ٤

$$٤ = ٠ + ٠ + ج \leftarrow ج = ٤$$

$$ع(ن) = ٢ن^٢ + ٤ن + ٤$$

$$ف(ن) = \int ع(ن) دن = \int (٢ن^٢ + ٤ن + ٤) دن$$

$$ف(ن) = ن^٣ + ٢ن^٢ + ٤ن + ج$$

تابع / مثال خارجي :

لإيجاد ج : ف(٠) = ٥

$$٥ = ٥ \leftarrow ج + ٠ + ٠ + ٠ = ٥$$

$$ف(ن) = ٥ + ٤ن + ٢ن^٢ + ٣ن^٣$$

$$ف(٣) = ٥ + ٤(٣) + ٢(٣)^٢ + ٣(٣)^٣ = ٦٢$$

$$٦٢ = ٥ + ١٢ + ١٨ + ٢٧ =$$

مثال / خارجي :

إذا كانت سرعة جسم هي ع(ن) = ١٢(١ + ٢ن)°

وكان ف(٠) = ٨ فجد المسافة المقطوعة

بعد مرور ثانية واحدة .

الحل :

$$ف(ن) = ع(ن) دن = ١٢(١ + ٢ن) دن$$

$$= ١٢(١ + ٢ن)^٢ + ج$$

$$ف(ن) = ١٢(١ + ٢ن)^٢ + ج$$

لإيجاد ج : ف(٠) = ٨

$$٨ = ١٢(١ + ٠)^٢ + ج$$

$$٨ = ج$$

$$ف(ن) = ٨ + ١٢(١ + ٢ن)^٢$$

$$ف(١) = ٨ + ١٢(١ + ٢(١))^٢ = ٧٣٦$$

$$٧٣٦ = ٧ + ٧٢٩ =$$

مثال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن سرعته ع(ن) = ٣(١ + ن)²

جد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانيتين علماً بأن

ف(٠) = ١

الحل :

$$ف(ن) = ع(ن) دن = ٣(١ + ن)² دن$$

تابع / الحل :

$$ف(ن) = (١ + ن) + ج$$

لإيجاد ج : ف(٠) = ١

$$١ = (١ + ٠) + ج \leftarrow ج = ٠$$

$$ف(ن) = (١ + ن) + ج$$

$$ف(٢) = (١ + ٢) + ج = ٢٧$$

مثال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت(ن) = ١٢ م/ث² فإذا كان

ع(٠) = ٤ ، ف(٠) = ١٥ فجد :

(١) سرعة الجسم في اللحظة ن .

$$ت(ن) = ١٢ \leftarrow ع(ن) = ١٢ دن + ج$$

$$ع(٠) = ٤ \leftarrow ٤ = ١٢(٠) + ج \leftarrow ج = ٤$$

$$ومنه ع(ن) = ١٢ن + ٤$$

(٢) سرعة الجسم بعد مرور ٣ ثواني .

$$ع(٣) = ٤ + ٣ \times ١٢ = ٤٠$$

(٣) المسافة المقطوعة بعد مرور ن ثانية .

$$ف(ن) = ع(ن) دن = (٤ + ١٢ن) دن$$

$$ف(ن) = ٦ن^٢ + ٤ن + ج$$

$$ف(٠) = ١ \leftarrow ١ = ٠ + ٠ + ج \leftarrow ج = ١$$

$$ف(ن) = ٦ن^٢ + ٤ن + ١$$

(٤) المسافة المقطوعة بعد مرور ٢ ثواني .

$$ف(٢) = ١ + ٤ \times ٢ + ٦ \times ٤ = ٣٧$$

$$٣٧ = ١ + ٨ + ٢٤ =$$

مثال (١) / كتاب ص ١٨٩ :

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي ف(٠) = ٤ م . إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (٦ - ٢ن + ٢ن^٢) م/ث ، فجد موقعه بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة .

الحل :

$$ف(ن) = ع(ن) دن = (٦ - ٢ن + ٢ن^٢) دن$$

$$ف(ن) = ٦ن - ٢ن^٢ + ٢ن^٣$$

$$لإيجاد ج : ف(٠) = ٤ ، ومنه ج = ٤$$

$$ف(ن) = ٦ن - ٢ن^٢ + ٢ن^٣$$

$$ف(٣) = ٦(٣) - ٢(٣)^٢ + ٢(٣)^٣ = ٤$$

$$٦٧ = ٤ + ٥٤ + ٩$$

موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة = ٦٧ م

تدريب (١) / كتاب ص ١٩٠ :

(١) يتحرك جسيم على خط مستقيم ، وتعطى سرعته

بالعلاقة : ع(ن) = (٥ - ٢ن) م/ث ، حيث

ن : الزمن بالثواني . جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء ،

علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م .

الحل :

$$ف(ن) = ع(ن) دن = (٥ - ٢ن) دن$$

$$ف(ن) = ٥ن - ٢ن^٢$$

$$لإيجاد ج : ف(٠) = ٣ ، ومنه ج = ٣$$

$$ف(٢) = ٥(٢) - ٢(٢)^٢ = ٣$$

$$٣ = ٣ + ١٠ - ٤$$

$$٣ = ٣ + ١٠ - ٤$$

(٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته

بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة :

$$ع(ن) = (٦ - ٢ن + ٢ن^٢) م/ث . جد موقعه$$

بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة ،

علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م .

الحل :

$$ف(ن) = ع(ن) دن = (٦ - ٢ن + ٢ن^٢) دن$$

$$ف(ن) = ٦دن - ٢دن^٢ + ٢دن^٣$$

$$لإيجاد ج : ف(٠) = ٥$$

$$٦ = ١ + ٥$$

$$ف(١) = ٦(١) - ٢(١)^٢ + ٢(١)^٣ = ٧$$

$$٧ = ٦ + ١$$

مثال (٢) / كتاب ص ١٩٠ :

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن تسارعها

بعد مرور ن ثانية من انطلاقها يعطى بالعلاقة :

ت(ن) = (١٢ - ٦ن) م/ث^٢ . إذا علمت أن موقعها الابتدائي

ف(٠) = ٢ م ، وأن سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث ، فجد :

(١) سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من انطلاقها .

(٢) موقع النقطة المادية بعد مرور ثلاث ثوانٍ من انطلاقها .

الحل :

$$١) ع(ن) = ت(ن) دن = (١٢ - ٦ن) دن$$

$$ع(ن) = ١٢ن - ٣ن^٢$$

$$لإيجاد ج : ع(٠) = ٣$$

$$٣ = ٣$$

تابع / الحل :

$$(٢) \text{ ف(ن) = ع(ن) دن } \left[= \text{ دن } (-١٢ + ن + ٥) \text{ دن} \right]$$

$$\text{ف(ن) = } (-١٢ + ن + ٥) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + ٥ + ٦ = ٣$$

$$\text{لإيجاد ج : ف(٠) = ٣}$$

$$٣ = ٣ \leftarrow \text{ج} + ٠ + ٠ = ٣$$

$$\text{ف(ن) = } (-١٢ + ن + ٥) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + ٥ + ٦ = ٣$$

$$\text{ف(٣) = } (-١٢ + ٣ + ٥) \text{ دن} = ٣ + (٣) \times ٥ + ٦ = ٣٦$$

$$٣٦ = ٣ + ١٥ + ٥٤ =$$

$$\text{ع(ن) = } ٦ - ٢ + ٣ = ٣$$

$$\text{ومنه ع(٢) = } ٦ - ٢ + ٣ = ٣$$

$$= ٢٤ - ١٢ + ٣ = ١٥ \text{ م/ث}$$

$$(٢) \text{ ف(ن) = ع(ن) دن } \left[= \text{ دن } (-١٦ + ن + ٣) \text{ دن} \right]$$

$$\text{ف(ن) = } (-١٦ + ن + ٣) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + ٣ + ٦ = ٢$$

$$\text{لإيجاد ج : ف(٠) = ٢}$$

$$٢ = ٢ \leftarrow \text{ج} + ٠ + ٠ = ٢$$

$$\text{ف(ن) = } (-١٦ + ن + ٣) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + ٣ + ٦ = ٢$$

$$\text{ف(٣) = } (-١٦ + ٣ + ٣) \text{ دن} = ٢ + ٣ \times ٣ + ٦ = ٣٨$$

$$= ٢٧ + ٩ + ٢ = ٣٨ \text{ م}$$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٩٠ :

يتحرك جسيم على حط مستقيم ، وبتسارع ثابت مقداره

ت(ن) = ١٢ - ٢ م/ث^٢ . إذا كانت سرعته الابتدائية

ع(٠) = ٥ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م ، فجد :

(١) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة .

(٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة .

الحل :

$$(١) \text{ ع(ن) = ت(ن) دن } \left[= \text{ دن } (-١٢) \text{ دن} \right]$$

$$\text{ع(ن) = } (-١٢) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + ١٢ = ٥$$

$$\text{لإيجاد ج : ع(٠) = ٥}$$

$$٥ = ٥ \leftarrow \text{ج} + ٠ = ٥$$

$$\text{ع(ن) = } (-١٢) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + ١٢ = ٥$$

$$\text{ع(٤) = } (-١٢) \times ٤ + ٥ = ٤٨ - ٤٨ = ٥$$

الأسئلة / كتاب ص ١٩٢

السؤال (١) / كتاب ص ١٩٢ :

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته

بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة :

$$\text{ع(ن) = } (١٢ - ٢ن) \text{ م/ث} . \text{ جد القاعدة التي}$$

تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة .

الحل :

$$\text{ف(ن) = ع(ن) دن } \left[= \text{ دن } (١٢ - ٢ن) \text{ دن} \right]$$

$$\text{ف(ن) = } (١٢ - ٢ن) \text{ دن} \rightarrow \text{ج} + \frac{(١٢ - ٢ن) \text{ دن}}{٢} = ٢$$

السؤال (٢) / كتاب ص ١٩٢ :

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها

بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة :

$$\text{ع(ن) = } (٨ + ٤ن) \text{ م/ث} . \text{ جد موقع النقطة المادية}$$

بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها ، علمًا بأن

موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢ م .

حل / سؤال (٢)

ب) ف(ن) = [ع(ن) دن] = [(-)٦(ن-١) + ٨] دن

$$\rightarrow = \frac{-6 \times (ن-١) + ٨}{٥ \times ٢} + ٨$$

$$= \frac{٣}{٥} - (١-٢) + ٨$$

لايجاد ج : ف(٠) = ٣

$$\rightarrow = \frac{٣}{٥} + ٠ + ٣ = ٣ - \frac{٣}{٥}$$

$$\rightarrow = \frac{١٢}{٥}$$

$$\text{ف(ن)} = \frac{٣}{٥} - (١-٢) + ٨ + \frac{١٢}{٥}$$

$$\text{ف(٢)} = \frac{٣}{٥} - (٣-) + ٨ \times ٢ + \frac{١٢}{٥}$$

$$= \frac{٣}{٥} - ٢٤٣ + ١٦ + \frac{١٢}{٥}$$

$$= \frac{٧٢٩}{٥} + ١٦ + \frac{١٢}{٥}$$

$$= \frac{٧١٧}{٥} + ١٦ = \frac{٦٣٧}{٥}$$

السؤال (٤) / كتاب ص ١٩٢ :

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد

مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة :

$$\text{ع(ن)} = (١-٣)(١+٤ن) \text{ م/ث} ، \text{ ج د} :$$

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة .

ف(ن) = [ع(ن) دن] = [٨ + ٤(ن)] دن

$$\text{ف(ن)} = ٢ن^٢ + ٨ن + ٤$$

لايجاد ج : ف(٠) = ٢

$$\rightarrow = ٢ = ٠ + ٠ + ٠$$

$$\text{ف(ن)} = ٢ن^٢ + ٨ن + ٢$$

$$\text{ف(٤)} = ٢ + (٤) \times ٨ + ٢ \times (٤) = ٢ + ٣٢ + ٣٢ = ٦٦$$

$$\text{ف(٤)} = ٦٦ = ٢ + ٣٢ + ٣٢$$

السؤال (٣) / كتاب ص ١٩٢ :

إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور

ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة :

ت(ن) = ٤٨(١-٢ن) م/ث^٢ ، وكان موقعه الابتدائي

ف(٠) = ٣ م ، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث ، فجد :

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة .

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانييتين من بدء الحركة .

الحل :

أ) ع(ن) = [ت(ن) دن] = [٤٨(١-٢ن)] دن

$$\rightarrow = \frac{٤٨ \times (١-٢ن)}{٤ \times ٢} + ٤ = \frac{١٢(١-٢ن)}{٢} + ٤$$

لايجاد ج : ع(٠) = ٢

$$\rightarrow = ٢ = ٠ + (٠-١) \times ١٢$$

$$\text{ع(ن)} = ٨ + (١-٢ن) \times ١٢$$

$$\text{ع(١)} = ٨ + (٢-١) \times ١٢ = ٨ + ١٢ = ٢٠$$

(٢) ما موقع النقطة المادية بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة ؟

- (أ) ٤٣ م (ب) ٤٠ م
(ج) ٢٤ م (د) ١٩ م

إجابة سؤال / وزارة ٢٠٢٠ :

الفقرة	(١)	(٢)
الإجابة	ب	أ

تمسك بأحلامك ، واقتل جُزئك الذي
يخبرك بأنك لا تستطيع الوصول لما
تريد ... ٨ - ٨
محكم الأستاذ : معاذ البشيش

(ب) موقع الجسم بعد مرور ثانييتين من بدء الحركة ،
علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧ م .

الحل :

$$ع(ن) = (١ - ٣ن) (١ + ٤ن)$$

$$ع(ن) = ١٢ن^٢ + ٣ن - ٤ن - ١$$

$$ع(ن) = ١٢ن^٢ - ١ن - ١$$

$$ف(ن) = ع(ن) دن = (١٢ن^٢ - ١ن - ١) دن$$

$$ف(ن) = ٤ن^٣ - \frac{١}{٢}ن^٢ - ١ن - ١$$

(ب) لإيجاد ج : ف(٠) = ٧

$$٧ = ج + ٠ - ٠ - ٠ \leftarrow ج = ٧$$

$$ف(ن) = ٤ن^٣ - \frac{١}{٢}ن^٢ - ١ن - ١$$

$$ف(٢) = ٤ \times ٨ - ٢ - ٢ - ١ = ٣٥$$

سؤال / وزارة (٢٠٢٠) :

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث أن تسارعها

بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة :

ت(ن) = (٦ - ٥) م/ث^٢ ، إذا علمت أن سرعتها الابتدائية

ع(٠) = ٤ م/ث ، وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٣ م ،

أجب عن الفقرتين (١) ، (٢) الآتيتين :

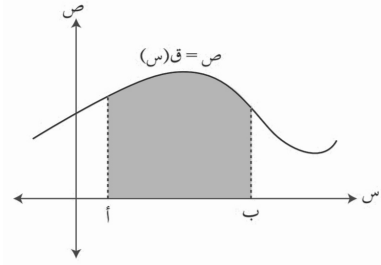
(١) ما سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانييتين من انطلاقها ؟

(أ) ٢ م/ث (ب) ٦ م/ث

(ج) ١٤ م/ث (د) ١٨ م/ث

تطبيقات التكامل (المساحة)

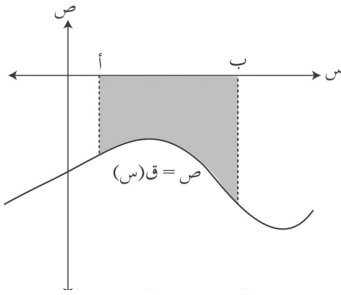
أحد التطبيقات على التكامل هو إيجاد المساحة المحصورة ، حيث :



(١) إذا كان $ق(س)$ واقعاً فوق محور السينات فإن

$\int_a^b ق(س) دس$ يكون موجباً .

ويكون $\int_a^b ق(س) دس =$ المساحة المحصورة



(٢) إذا كان $ق(س)$ واقعاً تحت محور السينات فإن

$\int_a^b ق(س) دس$ يكون سالباً .

ويكون $المساحة المحصورة = | \int_a^b ق(س) دس |$

(٣) إذا كان $ق(س)$ يقطع محور السينات في $[ا ، ب]$

عند $س = ج$ ،

حيث $ق(س)$ واقعاً تحت محور السينات في $[ا ، ج]$ ،

أيضاً $ق(س)$ واقعاً فوق محور السينات في $[ج ، ب]$ فإن :

$$\int_a^b ق(س) دس = \int_a^ج ق(س) دس - \int_ج^ب ق(س) دس$$

$$المساحة المحصورة = \left| \int_a^ج ق(س) دس \right| + \int_ج^ب ق(س) دس$$

مثال (١) / كتاب ص ١٩٥ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = $س^2 + ٤$ ، ومحور السينات ، والمستقيمين :

$$س = ١ ، س = ٤ .$$

الحل :

لمعرفة متى يقطع المنحنى ق(س) محور السينات نضع

$$٠ = ق(س)$$

$$٢س^2 + ٤ = ٠ \leftarrow س^2 = -٤ \leftarrow س = -٢$$

وهذه القيمة لا تقع ضمن الفترة المطلوبة ، لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٤ \\ ١ \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} ٤ \\ ١ \end{array} \right] \text{ دس } (٤ + ٢س) = \frac{٢س^2}{٣} + ٤س$$

$$= (١٦ + ١٦) - (١ + ٤) = ٣٢ - ٥ = ٢٧$$

ومنه فإن المساحة = ٢٧ وحدة مربعة

مثال (٢) / كتاب ص ١٩٥ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ص = ق(س) = $س^3 - ١٢س^2$ ، ومحور السينات ،

والمستقيمين : س = ١ ، س = ٢ .

الحل :

لمعرفة متى يقطع المنحنى ق(س) محور السينات نضع

$$٠ = ق(س)$$

$$٣س^3 - ١٢س^2 = ٠ \leftarrow س = ٢ ، ٢$$

حيث أن قيمة س = ٢ لا تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] \text{ دس } (١٢س^2 - ٣س^3) = ١٢س - ٣س^2$$

$$= (٨ - ٢٤) - ((١ - ١٢) - ١) = ٢٧ - ٢٧ = ٠$$

ومنه فإن المساحة = $|٢٧ - ٢٧| = ٢٧$ وحدة مربعةمثال / خارجي :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = $س^2 + ٣$ ، ومحور السينات والمستقيمين :

$$س = ١ ، س = ٤ .$$

الحل :

$$٠ = ق(س)$$

$$س^2 + ٣ = ٠ \leftarrow س^2 = -٣$$

لا يوجد لها حل \leftarrow ق(س) لا يقطع محور السينات

لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٤ \\ ١ \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} ٤ \\ ١ \end{array} \right] \text{ دس } (٣ + ٢س) = \frac{٢س^2}{٣} + ٣س$$

$$= (١٢ + \frac{٦٤}{٣}) - (٣ + \frac{١}{٣}) =$$

$$= \frac{٦٣}{٣} + ٩ = ٢١ + ٩ = ٣٠$$

ومنه فإن المساحة = ٣٠ وحدة مربعة

مثال / خارجي :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = $س^2 - ١٦س$ ، ومحور السينات ، والمستقيمين :

$$س = ٠ ، س = ٣ .$$

الحل :

$$س^2 - ١٦س = ٠ \leftarrow س = ١٦ ، ٠$$

لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٣ \\ ٠ \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} ٣ \\ ٠ \end{array} \right] \text{ دس } (١٦س - ٣س^2) = ١٦س - ٣س^2$$

$$= (٠ - ٢٧) - (٤٨ - ٠) = -٢٧ - ٤٨ = -٧٥$$

ومنه فإن المساحة = $|٧٥ - ٣٩| = ٣٩$ وحدة مربعة

مثال (٣) / كتاب ص ١٩٦ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$$ص = ق(س) = س^2 - ٢س ، ومحور السينات$$

$$\text{على الفترة } [١ ، ٤] .$$

الحل :

$$س^2 - ٢س = ٠$$

$$س(س - ٢) = ٠ \leftarrow س = ٠ ، س = ٢$$

نلاحظ أن قيمة س = ٢ تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك نقوم بتجزئة التكامل :

$$\text{أولاً : } \int_1^2 (س^2 - ٢س) دس = \int_1^2 \left(س^2 - \frac{٢س^٢}{٣} \right) دس =$$

$$= \left(\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} \right) - \left(\frac{٨}{٣} - \frac{٢}{٣} \right) =$$

$$١م = \left| \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} \right| = \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{ثانياً : } \int_2^4 (س^2 - ٢س) دس = \int_2^4 \left(س^2 - \frac{٢س^٢}{٣} \right) دس =$$

$$= \left(\frac{٦٤}{٣} - \frac{١٦}{٣} \right) - \left(\frac{٨}{٣} - \frac{٢}{٣} \right) =$$

$$٢م = \frac{٢٠}{٣} = \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = ١م + ٢م$$

$$= \frac{٢٢}{٣} = \frac{٢٠}{٣} + \frac{٢}{٣} = \text{وحدة مربعة}$$

مثال / خارجي :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$$ص = ق(س) = ٢س - ٦ ، ومحور السينات$$

$$\text{على الفترة } [١ ، ٦] .$$

الحل :

$$٢س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ٣$$

نلاحظ أن قيمة س = ٣ تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك نقوم بتجزئة التكامل :

$$\text{أولاً : } \int_1^3 (٢س - ٦) دس = \int_1^3 (٢س^٢ - ٦س) دس =$$

$$= (١٨ - ٩) - (١ - ٠) = ٩$$

$$١م = |٩ - ٠| = \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{ثانياً : } \int_3^6 (٢س - ٦) دس = \int_3^6 (٢س^٢ - ٦س) دس =$$

$$= (٣٦ - ٣٦) - (١٨ - ٩) = ٩$$

$$٢م = ٩ = \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = ١م + ٢م$$

$$= ٩ + ٩ = ١٨$$

سؤال (١) / كتاب ص ٢٠٠ :

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ص = ق(س) ، ومحور السينات والمستقيمين المحددين

في كل مما يأتي :

$$أ) ق(س) = ١٢ ، س = ١ ، س = ٢$$

الحل :

$$\left[\begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] \begin{array}{l} ١٢ \text{ دس} \\ ١٢ = ٢٤ \\ (١٢ -) \end{array} = ٣٦ = \left[\begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array}$$

ومنه فإن المساحة = ٣٦ وحدة مربعة

$$ب) ق(س) = ٥ - ٢س ، س = ٢ ، س = ٢,٥$$

الحل :

$$٥ - ٢س = ٠ \leftarrow س = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$$

وهذه القيمة لا تقع ضمن الفترة المطلوبة ، لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٢ \\ ٢ \end{array} \right] \begin{array}{l} (٥ - ٢س) \text{ دس} \\ ٥ - ٢س = ٠ \end{array} = \left[\begin{array}{l} ٢ \\ ٢ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٢ \\ ٢ \end{array}$$

$$٢٠ = (٤ - ١٠) - (٤ - ١٠) = ١٤ + ٦ = ٢٠$$

ومنه فإن المساحة = ٢٠ وحدة مربعة

$$ج) ق(س) = ٣ - ٢س ، س = ٤ ، س = ٢$$

الحل :

$$٣ - ٢س = ٠ \leftarrow س = \frac{٣}{٢} = ١,٥$$

وهذه القيم لا تقع ضمن الفترة المطلوبة ، لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٢ \\ ٤ \end{array} \right] \begin{array}{l} (٣ - ٢س) \text{ دس} \\ ٣ - ٢س = ٠ \end{array} = \left[\begin{array}{l} ٢ \\ ٤ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٢ \\ ٤ \end{array}$$

$$٥٠ = (٦ + ٨) - (١٢ + ٦٤) = ٥٢ + ٢ = ٥٠$$

ومنه فإن المساحة = ٥٠ وحدة مربعة

تدريب (١) / كتاب ص ١٩٨ :

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ص = ق(س) ، ومحور السينات على الفترة المحددة

في كل مما يأتي :

$$أ) ق(س) = ١٢ - ٤س ، [٢, ١]$$

الحل :

$$١٢ - ٤س = ٠ \leftarrow س = ٣$$

نلاحظ أن قيمة س = ٣ لا تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك فإن :

$$\left[\begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] \begin{array}{l} ١٢ - ٤س \text{ دس} \\ ١٢ - ٤س = ٠ \end{array} = \left[\begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \end{array}$$

$$(٨ - ٢٤) - (٢ - ١٢) = ١٠ - ٦ = ٤$$

المساحة المطلوبة = ٤ وحدة مربعة

$$ب) ق(س) = ٣س - ١٢ ، [٢, ٠]$$

الحل :

$$٣س - ١٢ = ٠ \leftarrow س = ٤$$

س = ٤ أو س = ٤ لا تقع في [٢, ٠]

$$\left[\begin{array}{l} ٢ \\ ٠ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٣س - ١٢ \text{ دس} \\ ٣س - ١٢ = ٠ \end{array} = \left[\begin{array}{l} ٢ \\ ٠ \end{array} \right] \begin{array}{l} ٢ \\ ٠ \end{array}$$

$$(٨ - ٢٤) - (٠) = ١٦$$

المساحة المطلوبة = ١٦

سؤال (٢) / كتاب ص ٢٠٠ :

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ص = ق(س) ، ومحور السينات على الفترة المحددة

في كل مما يأتي :

$$أ) ق(س) = ٦ - ٦س^٢ ، [٠ ، ٢-]$$

الحل :

$$٦ - ٦س^٢ = ٠ \leftarrow س = \sqrt[٢]{١}$$

نلاحظ أن قيمة س = ١- تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك نقوم بتجزئة التكامل :

$$\text{أولاً : } \int_{٢-}^{١-} (٦ - ٦س^٢) دس = \int_{٢-}^{١-} ٦س^٢ - ٦س دس$$

$$= (٦س^٣ - ٣س^٢) \Big|_{٢-}^{١-} = (٦ - ٣) - (١٢ - ٤) = ٣ - ٨ = -٥$$

$$= ٥ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{ثانياً : } \int_{١-}^{٠} (٦ - ٦س^٢) دس = \int_{١-}^{٠} ٦ - ٦س^٢ دس$$

$$= (٦س - ٢س^٣) \Big|_{١-}^{٠} = (٠ - ٢) - (٦ - ٢) = -٢ - ٤ = -٦$$

$$= ٦ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = ٥ + ٦ = ١١$$

$$= ١١ \text{ وحدة مربعة}$$

$$٣) ق(س) = ٦ - ٦س^٢ ، [١ ، ٤]$$

الحل :

$$٦ - ٦س^٢ = ٠ \quad س = ١$$

نلاحظ أن قيمة س = ١ تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك نقوم بتجزئة التكامل :

أولاً :

$$\int_{١}^{٣} (٦ - ٦س^٢) دس = \int_{١}^{٣} ٦س^٢ - ٦س دس$$

$$= (٢س^٣ - ٣س^٢) \Big|_{١}^{٣} = (٥٤ - ٢٧) - (٦ - ٣) = ٢٧ - ٣ = ٢٤$$

$$= ٢٤ \text{ وحدة مربعة}$$

ثانياً :

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٦س^٢) دس = \int_{٣}^{٤} ٦س^٢ - ٦س دس$$

$$= (٢س^٣ - ٣س^٢) \Big|_{٣}^{٤} = (١٢٨ - ٣٦) - (٢٤ - ٢٧) = ٩٢ - ٣ = ٨٩$$

$$= ٨٩ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = ٨٩ + ٢٤ = ١١٣$$

$$= ١١٣ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{تابع } f: \text{ثانياً: } \int_{-4}^0 (4x^2 - 3x + 8) dx = 13$$

$$13 = (192 - 64) - (240 - 120) =$$

$13 = 2$ وحدة مربعة

$$\text{المساحة المطلوبة} = 13 + 11 = 24$$

$$24 = 13 + 11 =$$

$$\text{د) ق(س) = } -4x^2 - 3x + 8 \text{ ، } [-1, 1]$$

الحل :

$$-4x^2 - 3x + 8 = 0 \leftarrow x^2 = \frac{3}{4} - 2$$

لا يوجد لها حل \leftarrow ق(س) لا يقطع محور السينات

لذلك فإن :

$$\int_{-1}^1 (-4x^2 - 3x + 8) dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x \right]_{-1}^1$$

$$= \left(-\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + 8 \right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} - 8 \right) = 8 \frac{2}{3}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \left| 8 \frac{2}{3} - 0 \right| = 8 \frac{2}{3}$$

أجمل ما في الإنسان روح التحدي ...

أن يقاتل حتى يصل إلى ما يريد ...



$$\text{ب) ق(س) = } 4x^2 \text{ ، } [-1, 1]$$

الحل :

$$4x^2 = 0 \leftarrow x = 0$$

نلاحظ أن قيمة $x = 0$ تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك نقوم بتجزئة التكامل :

$$\text{أولاً: } \int_{-1}^0 4x^2 dx + \int_0^1 4x^2 dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \left(0 - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{4}{3} - 0 \right) = 0$$

$1 = 1$ وحدة مربعة

$$\text{ثانياً: } \int_{-1}^1 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3}x^3 \right]_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) = 0$$

$$1 = 2$$
 وحدة مربعة

$$\text{المساحة المطلوبة} = 1 + 1 = 2$$

$$2 = 1 + 1 = \text{وحدة مربعة}$$

$$\text{ج) ق(س) = } 3x^2 - 4x + 8 \text{ ، } [3, 5]$$

الحل :

$$3x^2 - 4x + 8 = 0 \leftarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 96}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{-80}}{6}$$

نلاحظ أن قيمة $x = \frac{4 \pm \sqrt{-80}}{6}$ تقع ضمن الفترة المطلوبة

لذلك نقوم بتجزئة التكامل :

$$\text{أولاً: } \int_3^5 (3x^2 - 4x + 8) dx = \left[x^3 - 2x^2 + 8x \right]_3^5$$

$$= (125 - 50 + 40) - (27 - 36 + 24) = 11$$

$$11 = 11 \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٤) / كتاب ص ١٩٧ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ق(س) = $s^2 + 3s$ ، ومحور السينات .

الحل :

$$s^2 + 3s = 0$$

$$s(s+3) = 0 \leftarrow s = 0 , s = -3$$

فتكون المساحة المطلوبة محصورة بين منحنى الاقتران ق
ومحور السينات على الفترة $[-3, 0]$:

$$\int_{-3}^0 (s^2 + 3s) ds = \left[\frac{s^3}{3} + \frac{3s^2}{2} \right]_{-3}^0$$

$$= (0) - \left(\frac{27}{2} + 9 \right) = -\frac{45}{2}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \left| -\frac{45}{2} \right| = \frac{45}{2} \text{ وحدة مربعة}$$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٩٨ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ق(س) = $s^2 - 2s - 3$ ، ومحور السينات .

الحل :

$$s^2 - 2s - 3 = 0$$

$$(s-3)(s+1) = 0 \leftarrow s = 3 , s = -1$$

$$\int_{-1}^3 (s^2 - 2s - 3) ds = \left[\frac{s^3}{3} - s^2 - 3s \right]_{-1}^3$$

$$= (9 - 9 - 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 - 3 \right) = 10$$

$$= 10 - \left(\frac{1}{3} - 1 - 3 \right) = 10 + \frac{2}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \left| \frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال (٣) / كتاب ص ٢٠٠ :

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى
الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات

في كل مما يأتي :

$$(أ) \quad 4s - s^2$$

الحل :

$$4s - s^2 = 0$$

$$s(4-s) = 0 \leftarrow s = 0 , s = 4$$

$$\int_0^4 (4s - s^2) ds = \left[2s^2 - \frac{s^3}{3} \right]_0^4$$

$$= (32 - \frac{64}{3}) - (0) = \frac{32}{3}$$

$$(ب) \quad 4s^3 - 12s^2$$

الحل :

$$4s^3 - 12s^2 = 0$$

$$4s^2(s-3) = 0 \leftarrow s = 0 , s = 3$$

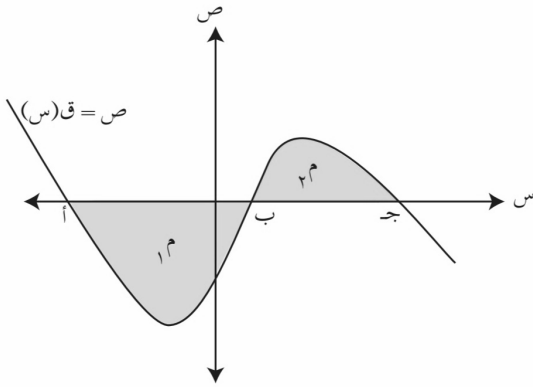
$$\int_0^3 (4s^3 - 12s^2) ds = \left[s^4 - 4s^3 \right]_0^3$$

$$= (81 - 108) - (0) = -27$$

$$\text{المساحة المطلوبة} = \left| -27 \right| = 27 \text{ وحدة مربعة}$$

تدريب (٣) / كتاب ص ١٩٩ :

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $ص = ق(س)$. فإذا كانت المساحة $١م = ٨$ وحدات مربعة ،
والمساحة $٢م = ٥$ وحدات مربعة ، فجد قيمة كل مما يأتي ، مبرراً إجابتك :



$$(١) \int_a^b ق(س) دس = ٨$$

، لأن $ق(س)$ تحت محور السينات .

$$(٢) \int_b^c ق(س) دس = ٥$$

، لأن $ق(س)$ فوق محور السينات .

$$(٣) \int_a^c ق(س) دس = \int_a^b ق(س) دس + \int_b^c ق(س) دس$$

$$٣ = ٥ + ٨ =$$

(٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات على الفترة [أ ، ج] .

$$المساحة المطلوبة = ١م + ٢م = ٨ + ٥ = ١٣$$

السؤال (٤) / كتاب ص ٢٠٠ :

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $ص = ق(س)$

فإذا كانت المساحة $١م = ١٣$ وحدة مربعة ،

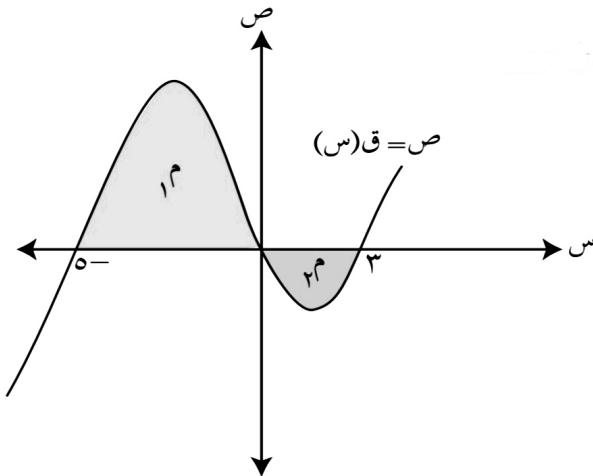
والمساحة $٢م = ٣$ وحدات مربعة ،

فجد قيمة $\int_{٥}^٣ ق(س) دس$ ، مبرراً إجابتك .

الحل :

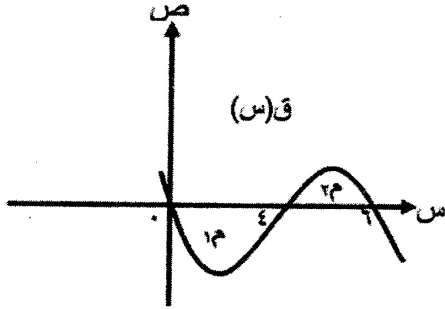
$$\int_{٥}^٣ ق(س) دس = \int_{٥}^٣ ق(س) دس + \int_{٣}^١ ق(س) دس$$

$$. ١٠ = ٣ + ١٣ =$$



وزارة (٢٠٢٠):

معتدماً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، حيث المساحة $١٣ = ٨$ وحدات مربعة ،
والمساحة $٤ = ٤$ وحدات مربعة ، أجب عن الفقرتين الآتيتين :



(١) ما مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق

ومحور السينات على الفترة $[٠, ٦]$ ؟

- (أ) ١٢ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٣٢

(٢) ما قيمة $\int_0^6 Q(S) dS$ ؟

- (أ) ١٢- (ب) ١٢ (ج) ٤- (د) ٤

وزارة (٢٠٢٠):

ما مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $٩ - س$ ، ومحور السينات
على الفترة $[٠, ٤]$ ؟

- (أ) ٢٨ (ب) ٢٠ (ج) ٥ (د) ١

الحل :

$$٩ - س = ٠ \leftarrow س = ٩$$

نلاحظ أن قيمة $س = ٩$ لا تقع ضمن الفترة المطلوبة

$$\int_0^4 (٩ - س) dS = ٩س - \frac{س^2}{٢} \Big|_0^4$$

$$٢٨ = (٤ - ٣٦) = (٠) - \left(-\frac{٨}{٢} - ٣٦ \right)$$

أسئلة الوحدة / كتاب ص ٢١٥

ملاحظة هامة : سيتم حل الأسئلة المتعلقة بالمادة المطلوبة فقط .

السؤال (١) / كتاب ص ٢١٥ :

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في كل مما يأتي :

$$(أ) \text{ ص} = \left[\frac{١ - ٤س}{٥ + ٢س} \right] \text{ دس}$$

$$\text{الحل : } \frac{١ - ٤س}{٥ + ٢س} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$(ب) \text{ ص} = \left[\frac{٣}{١ - (٢ - ٤س)(٣س)} \right] \text{ دس}$$

$$\text{الحل : } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$$

$$(ج) \text{ ص} = \left[\text{ظا}(٤ + س) \right] \text{ دس}$$

$$\text{الحل : } \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ظا}(٤ + س)$$

السؤال (٢) / كتاب ص ٢١٥ :

إذا كان ق(س) = $\left[س(٢ - س) - س^٢ \right]$ دس ، فجد ق'(٢) .

الحل : (نشتق الطرفين)

$$\text{ق}'(س) = س(٢ - س) - س^٢$$

$$\text{ق}'(٢) = (٢) ٢ = (٢ - ٢) - ٢ = (٢) \times ٢ = (٢ - ٢) \times ٢$$

$$\text{ق}'(٢) = (٢) \times ٢ = ٢ - ٤ = -٢$$

السؤال (٤) / كتاب ص ٢١٥ :

$$(أ) \left[\frac{٧س - ٢}{٣س} \right] \text{ دس}$$

$$\left[(٧س - ٢) \left(\frac{١}{٣س} - \frac{٥}{٣س} \right) \right] \text{ دس} = \left[\frac{١ - ٥}{٣س} \right] \text{ دس}$$

$$= \frac{\frac{٥}{٣س} \times ٧ - \frac{٨}{٣س}}{\frac{٥}{٣س} - \frac{٨}{٣س}} = \frac{٥ \times ٧ - ٨}{٥ - ٨}$$

$$(ب) \left[\frac{٦}{٥س} \right] \text{ دس} = \left[٦س^٥ \right] \text{ دس}$$

$$= ٦س^٥ +$$

$$(ج) \left[(٢ - س)(٢ + س) \right] \text{ دس} = \left[(٢ - س^٢) \right] \text{ دس}$$

$$= \frac{٢س - س^٣}{٣} + ٤س +$$

$$(د) \left[(٢ - س^٣) \right] \text{ دس} = \frac{٢(٢ + س^٣)}{٣ \times ٣} +$$

تابع / السؤال (٤) :

$$\text{هـ) } \left[(1 - s^2)(s^2 - s) \right] \text{ دس}^\circ$$

الحل :

$$\text{ص} = s^2 - s \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{1 - s^2}$$

$$= \left[(1 - s^2)(s^2 - s) \right] \frac{\text{دص}}{1 - s^2} =$$

$$= \frac{\text{ص}^2}{2} + \frac{(s^2 - s)^2}{2} =$$

$$\text{هـ) } \left[\frac{s^2}{1 + s^3} \right] \text{ دس} , s < 1$$

$$\left[(s^2)(1 + s^3) \right] \frac{1}{2} \text{ دس}$$

$$\text{ص} = 1 + s^3 \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{1 + s^3}$$

$$= \left[(s^2)(1 + s^3) \right] \frac{1}{2} \frac{\text{دص}}{1 + s^3} =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\text{ص}^2 \right] \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{1}{6} (1 + s^3) =$$

$$\text{ي) } \left[\frac{1 + s^2}{(s^2 + s)} \right] \text{ دس}$$

$$= \left[(1 + s^2) \text{ قأ}^2 (s^2 + s) \right] \text{ دس} =$$

$$\text{ص} = s^2 + s \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{1 + s^2}$$

$$= \left[(1 + s^2) \text{ قأ}^2 (s^2 + s) \right] \frac{\text{دص}}{1 + s^2} =$$

$$= \text{ظا} (s^2 + s) =$$

$$= \text{ظا} (s^2 + s) =$$

السؤال (٥) / كتاب ص ٢١٦ :

احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :

$$\text{أ) } \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{s}} \text{ دس} = \int_1^8 \frac{1}{s^{1/3}} \text{ دس}$$

$$= \left[\frac{3}{2} s^{2/3} \right]_1^8 =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{1^2} \right] =$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$(ج) \int \left(\frac{1}{س} - \frac{1}{س^2} \right) دس =$$

$$\int \left(س^{-1} - س^{-2} \right) دس =$$

$$\int \left[\frac{س^{-1}}{1} - \frac{س^{-2}}{1} \right] دس =$$

$$= \left(\frac{1}{س} + 2 \times 2 \right) - (1 + 2) = \int \left[\frac{1}{س} + 2 \right] دس =$$

$$= 3 - 2 - 1 + \frac{1}{س} = \frac{1}{س} - 1 = \frac{1}{س} - \frac{س}{س} = \frac{1-س}{س}$$

$$(د) \int \frac{س^2 + 7س + 12}{س + 4} دس =$$

$$= \int \frac{(س+3)(س+4)}{س+4} دس =$$

$$= \int (س+3) دس =$$

$$= \left(3 + \frac{1}{س} \right) - \left(3 - \frac{1}{س} \right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{س} - 3 + \frac{1}{س} = \frac{2}{س}$$

$$(ز) \int \frac{10}{س^2 + 6س} دس =$$

$$= \int \frac{10}{س(س+6)} دس =$$

$$= \int \left[\frac{10}{1 \times 6} - \frac{10}{س(س+6)} \right] دس =$$

$$= \int \left[\frac{5}{3} - \frac{10}{س(س+6)} \right] دس =$$

السؤال (٦) / كتاب ص ٢١٦ :

ب^٣ + ب⁻ -
إذا كان $\int (س) دس = ٥$ ، فجد قيمة الثابت ب .
ب^٢ + ب⁻

الحل :

$$ب^3 + ب^{-} = ب^2 + ب^{-}$$

$$ب^2 + ب^{-} - ٣ = ٥$$

$$ب^2 + ب^{-} = ٨$$

$$ب^2 = ٨ - ب^{-} \text{ أو } ٣ = ب^{-}$$

السؤال (٧) / كتاب ص ٢١٦ :

$$\text{إذا كان } \int_1^0 (س) ق(س) دس = ٤ ، \int_1^0 (س) ق(س) دس = ٢٠$$

فجد قيمة كل مما يأتي :

الحل : (نجهز المعطيات ثم تكون الإجابة كالتالي) :

$$(أ) \int_0^1 (س) ق(س) دس = ٢ -$$

$$(ب) \int_1^0 (س) ق(س) دس = \int_1^0 (س) ق(س) دس + \int_0^1 (س) ق(س) دس$$

$$٢ = ٢ - + ٤ =$$

$$(ج) \int_0^1 (٣ق(س) - ٤س) دس = ٣ \int_0^1 ق(س) دس - ٤ \int_0^1 س دس$$

$$= ١٢ - - (٥٠ - ٢) = ١٢ - + ٤٨ = ٣٦$$

السؤال (٨) / كتاب ص ٢١٧ :

جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي :

$$(أ) \int_1^3 ٢ب دس = ١٢$$

$$١٢ = (٣ - ١) ٢ب$$

$$١٢ = ٤ \times ٢ب$$

$$١٢ = ٨ب \leftarrow ب = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

$$(ب) \int_1^0 (١ - ٢س) دس = ٠$$

$$٠ = \int_1^0 س - ٢س دس$$

$$(ب - ٢ب) - (٢ - ١) = ٠$$

$$٠ = ٢ب - ٢ + ١ - ٢ب$$

$$٠ = ٢ب - ٢ + ١ - ٢ب$$

$$٠ = ٢ب - ٢ + ١ - ٢ب$$

$$٠ = (١ - ٢) (٢ + ١)$$

$$١ = ٢ - \text{أو } ٣ = ١$$

$$(ج) \int_1^0 (٢س + ٢) دس = ٢١ \text{ (واجب)}$$

الحل : يترك للطالب (قيمة ب = ٣ -)

$$(د) \int_1^0 (١ - ٤س) دس = ٥ب \text{ (واجب)}$$

الحل : يترك للطالب (قيمة ب = ٣ - أو ب = ١)

السؤال (٩) / كتاب ص ٢١٧ :

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س)

عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة (١ + س)(٣س + ٢)

فجد قاعدة الاقتران ق ، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ١).

الحل :

$$\text{ميل المماس} = \text{ق}'(س) = (س + ١)(٣س + ٢)$$

$$٣س^٣ + ٢س^٢ + ٣س + ٢ =$$

$$٣س^٣ + ٥س^٢ + ٢ =$$

$$\text{ق}(س) = (س + ١)(٣س^٢ + ٥س + ٢) \text{ دس}$$

$$٣س^٣ + ٥س^٢ + ٢س + ٣س^٢ + ٥س + ٢ =$$

$$١ - (٢) \leftarrow \text{ق}(٢) = ١ -$$

$$١ - = ٨ + ٤ + ٤ \times \frac{٥}{٢} + ٨$$

$$١ - = ٨ + ٤ + ١٠ = ٢٢$$

$$٢٣ - = ٢٢ - ١ - = ٢٣$$

$$\text{ق}(س) = ٣س^٣ + \frac{٥}{٢}س^٢ + ٢س - ٢٣$$

السؤال (١٠) / كتاب ص ٢١٧ :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ص = ق(س) = ٣س^٣ - ٢٧ ، ومحور السينات

في الفترة [-٤ ، ٠] .

الحل :

$$\text{ق}(س) = ٣س^٣ - ٢٧ = ٠$$

$$٣س^٣ = ٢٧ \leftarrow \text{س} = ٣ ، ٣ -$$

$$\text{س} = -٣ \text{ تقع في الفترة } [-٤ ، ٠]$$

أولاً :

$$\int_{-٤}^{-٣} (٣س^٣ - ٢٧) \text{ دس} = \left[\frac{٣س^٤}{٤} - ٢٧س \right]_{-٤}^{-٣}$$

تابع / الحل :

$$= (٣س^٤ - ١٠٨س) - (٣س^٤ - ١٠٨س)$$

$$= ١٠٨س - ١٠٨س = ٠$$

$$١٠ = ١٠$$

ثانياً :

$$\int_{-٣}^{-١} (٣س^٣ - ٢٧) \text{ دس} = \left[\frac{٣س^٤}{٤} - ٢٧س \right]_{-٣}^{-١}$$

$$= (٣س^٤ - ١٠٨س) - (٣س^٤ - ١٠٨س)$$

$$= ١٠٨س - ١٠٨س = ٠$$

المساحة المطلوبة = ١٠ + ١٠ =

$$٢٠ = ١٠ + ١٠ = ٢٠$$

السؤال (١١) / كتاب ص ٢١٧ : (واجب)

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم ، بتسارع

مقداره ت(ن) = ١٢ن(١ - ن) م/ث^٢ ،

حيث ن الزمن بالثواني . فإذا كانت سرعتها

الابتدائية ع(٠) = ٣ م / ث ، وموقعها الابتدائي

ف(٠) = ٢ م ، فجد :

(أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ

من بدء الحركة .

(ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين

من بدء الحركة .

الحل : (يترك للطالب ٨ - ٨)

$$\text{ع}(٤) = ١٥٧ =$$

$$\text{ف}(٢) = ٨ =$$