القائد في الرياضيات

تطبيقات التفاضل

(الفرع الأدبي والفندقي)

للأستاذ

معاذ البشيش

الصف الثاني عشر

للفرعين الأدبي والفندقي والسياحي

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

١ـ التفسير الهندسي .

٢ـ التفسير الفيزيائي .

٣ـ التزايد والتناقص .

٤ـ القيم القصوى .

٥ـ تطبيقات اقتصادية على التفاضل .

٦ـ أمثلة متنوعة وشاملة لجميع أفكار المادة .

٧ـ حلول جميع تدريبات وأسئلة الكتاب .

٨ـ أسئلة من الدورات السابقة لامتحان الوزارة على كل درس .

مع تحيات

الأستاذ معاذ البشيش

التفسير الهندسي للمشتقة

قاعدة :

ميل المماس = قَ(س)

معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة التماس (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

ص ــ ص$_{١}$ = قَ(س$_{١}$) (س ــ س$_{١}$)

مثال(١) كتاب ص ١١٩ :

إذا كان ص = ق(س) = س^{٣} ــ ٦س + ٥ ، فجد

ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = -٢ :

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} ــ ٦

ميل المماس عندما س = -٢ يساوي قَ(-٢)

قَ(-٢) = ٣ (-٢)^{٢} ــ ٦ = ٣ × ٤ ــ ٦ = ٦

تدريب(١) كتاب ص١١٩ :

إذا كان ق(س) = س^{٢} ــ ٣س ، فجد

ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢ ، -٢) :

الحل : قَ(س) = ٢س ــ ٣

ميل المماس عندما س = ٢ يساوي قَ(٢)

قَ(٢) = ٢ × ٢ ــ ٣ = ٤ ــ ٣ = ١

سؤال / خارجي :

أوجد ميل المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{٢س}{٣س + ١}$ عند (٢ ، $\frac{٤}{٧}$)

الحل :

قَ(س) = $\frac{(٣س + ١) \times ٢ - ٢س \times ٣}{(٣س + ١)^{٢}}$ = $\frac{\cancel{٦س} + ٢ - \cancel{٦س}}{(٣س + ١)^{٢}}$

قَ(س) = $\frac{٢}{(٣س + ١)^{٢}}$

م = قَ(٢) = $\frac{٢}{(٦ + ١)^{٢}}$ = $\frac{٢}{٤٩}$

سؤال / خارجي :

اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى

ق(س) = س^{٢} + ٣س عند (١ ، ٤) :

الحل :

قَ(س) = ٢س + ٣

م = قَ(١) = ٢ × ١ + ٣ = ٥

معادلة المماس : ص ــ ص$_{١}$ = م (س ــ س$_{١}$)

ص ــ ٤ = ٥(س ــ ١)

سؤال / خارجي :

اكتب معادلة المماس المرسوم لمنحنى

ق(س) = س^{٣} ــ ٢س عندما س = ٢ :

الحل :

قَ(س) = ٣س^{٢} ــ ٢

م = قَ(٢) = ٣ × ٤ ــ ٢ = ١٠

نحتاج إلى نقطة التماس ⟵ (٢ ، ق(٢))

ق(٢) = (٢)^{٣} ــ ٢(٢) = ٨ ــ ٤ = ٤

نقطة التماس هي (٢ ، ٤)

معادلة المماس : ص ــ ص$_{١}$ = م (س ــ س$_{١}$)

ص ــ ٤ = ١٠(س ــ ٢)

مثال(٢) كتاب ص ١١٩ :

إذا كان ق(س) = (٢س + ١) (٣س – ٤) ،

فجد معادلة المماس عندما س = ٢ :

الحل : قَ(س) = (٢س + ١) (٣) + (٣س – ٤) (٢)

م = قَ(٢) = (٥) (٣) + (٢) (٢) = ١٩

نحتاج الى نقطة التماس (٢ ، ق(٢))

ق(٢) = (٥) (٢) = ١٠ ⟵ (٢ ، ١٠)

معادلة المماس هي : ص - ص$_١$ = م (س – س$_١$)

ص - ١٠= ١٩ (س – ٢) ⟵ ص = ١٩س – ٢٨

سؤال / خارجي :

إذا كان ق(س) = أس^٢ – ٧س + ٦ ، وكان

ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢ يساوي ١٣

فما قيمة الثابت أ ؟

الحل : ميل المماس = قَ(٢)

قَ(س) = ٢أس – ٧

قَ(٢) = ٤أ – ٧

١٣ = ٤أ – ٧

٢٠ = ٤أ ⟵ أ = ٥

تدريب(٢) كتاب ص١٢٠ :

إذا كان ق(س) = (س^٢ + ١)^٢ ، فجد

معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١ :

الحل : قَ(س) = ٢ (س^٢ + ١) × ٢س

م = قَ(س) = ٢ (١ + ١) × ٢ = ٨

نحتاج إلى نقط التماس (١ ، ق(١))

ق(١) = (١ + ١)^٢ = ٤ ⟵ النقطة (١ ، ٤)

معادلة المماس : ص – ص$_١$ = م (س – س$_١$)

ص – ٤ = ٨ (س – ١)

سؤال / خارجي :

إذا كان ق(س) = س^٣ – ٢٧س ، أوجد قيم س على

المنحنى ق(س) والتي يكون المماس عندها

موازياً لمحور السينات ؟

الحل :

عندما يوازي المماس محور السينات يكون الميل = ٠

أي أن قَ(س) = ٠

٣س^٢ – ٢٧ = ٠

٣س^٢ = ٢٧

س^٢ = ٩ ⟵ س = ∓ ٣

مثال(٣) كتاب ص ١٢٠ :

اذا كان ق(س) = أس^٢ + ٢س + ٥ ، حيث أ عدد ثابت ،

وكان ميل المماس عندما س = ٢ يساوي ١٨ ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل : ميل المماس = قَ(٢)

قَ(س) = ٢أس + ٢

قَ(٢) = ٢أ(٢) + ٢

١٨ = ٤ أ + ٢

ومنه : أ = ٤

<u>سؤال / خارجي</u> :

جد قيم س والتي يكون عندها المماس

لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} ـ ١٢س

موازياً لمحور السينات ؟

الحل :

عندما يوازي المماس محور السينات يكون الميل = صفر

أي أن قَ(س) = ٠

٣س^{٢} ـ ١٢ = ٠

٣س^{٢} = ١٢

س^{٢} = ٤ ⟵ س = ∓ ٢

<u>سؤال / خارجي</u> :

إذا كان ق(س) = س^{٣} ـ ٥س + ١٢ ، أوجد النقاط

على منحنى ق(س) والتي يكون ميل المماس

عندها يساوي ٧ :

الحل :

م = قَ(س) = ٣س^{٢} ـ ٥

٧ = ٣س^{٢} ـ ٥

١٢ = ٣س^{٢}

س^{٢} = ٤ ⟵ س = ∓ ٢

ق(٢) = ٨ ـ ١٠ + ١٢ = ١٠ النقطة (٢ ، ١٠)

ق(ـ ٢) = ـ ٨ + ١٠ + ١٢ = ١٤ النقطة (ـ٢ ، ١٤)

<u>سؤال / خارجي</u> :

إذا كان ق(س) = س^{٣} ـ ٥س ، أوجد النقاط على منحنى ق(س)

والتي يكون ميل المماس عندها يساوي ٧ ؟

الحل :

م = قَ(س) = ٣س^{٢} ـ ٥

٧ = ٣س^{٢} ـ ٥

١٢ = ٣س^{٢}

س^{٢} = ٤ ⟵ س = ∓ ٢

ق(٢) = ٨ ـ ١٠ = ـ ٢ النقطة (٢ ، ـ ٢)

ق(ـ ٢) = ـ ٨ + ١٠ = ٢ النقطة (ـ٢ ، ٢)

<u>سؤال / خارجي</u> :

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ـ ٤س ، أوجد قيم س

والتي يكون ميل المماس عندها يساوي صفر ؟

الحل :

م = قَ(س) = $\cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}}$ س^{٢} ـ ٤ = ٠

س^{٢} ـ ٤ = ٠

س^{٢} = ٤

س = ∓ ٢

الأسئلة /ص١٢١

سؤال(١) كتاب ص١٢١ :

جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية

عند قيم س المبينة إزاء كل منها :

أ) ق(س) = ٣س + ٥ ، س = ٢

ق(٢) = ٦ + ٥ = ١١

النقطة (٢ ، ١١)

م = قَ(س) = ٣

معادلة المماس : ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ١١ = ٣ (س – ٢)

ب) ق(س) = س^{٢} + ٣س – ١ ، س = ١

ق(١) = ١ + ٣ – ١ = ٣

النقطة (١ ، ٣)

قَ(س) = ٢س + ٣

م = قَ(١) = ٢× ١+ ٣ = ٥

معادلة المماس : ص – ٣ = ٥ (س – ١)

جـ) ق(س) = (٢س – ٤) (س^{٢} + ١) ، س = صفر

ق(٠) = (٢× ٠ – ٤) ((٠)^{٢} + ١) = –٤

النقطة (٠ ، -٤)

قَ(س) = (٢س – ٤) × (٢س) + (س^{٢} + ١) × (٢)

م = قَ(٠) = (٠ – ٤) × ٠ + (٠ + ١) × ٢

= ٠ + ٢ = ٢

معادلة المماس : ص – – ٤ = ٢(س – ٠)

ص + ٤ = ٢س

سؤال(٢) كتاب ص١٢١ :

إذا كان ق(س) = $\frac{٢س + ٢}{س^{٢} + ١}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١ .

الحل : ق(١) = $\frac{٢ + ٢}{١ + ١}$ = ٢

النقطة (١ ، ٢)

قَ(س) = $\frac{(س^{٢} + ١)(٢) - (٢س + ٢)(٢س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

قَ(١) = $\frac{(١ + ١)(٢) - (٢ + ٢)(٢)}{(١ + ١)^{٢}}$

= $\frac{٤ - ٨}{٤}$ = $\frac{-٤}{٤}$ = – ١

معادلة المماس : ص – ٢ = – ١ (س – ١)

سؤال(٣) كتاب ص١٢١ :

إذا كان ق(س) = أ س^{٢} + ٤س – ٣ ، حيث أ عدد ثابت ، وكان ميل المنحنى عندما س = ٣ يساوي ٢٢ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل : قَ(س) = ٢أس + ٤

قَ(٣) = ٢ أ × ٣ + ٤

٢٢ = ٢ أ × ٣ + ٤

٢٢ = ٦أ + ٤

٦أ = ١٨

أ = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣

سؤال(٤) كتاب ص١٢١ :

إذا كان ق(س) = $س^{٥}$ + ٤$س^{٢}$ ، فجد ميل المنحنى للاقتران ق عندما س = ١ .

الحل :

قَ(س) = ٥$س^{٤}$ + ٨س

قَ(١) = ٥ + ٨ = ١٣ = ميل المماس

سؤال(٥) كتاب ص١٢١ :

إذا كان ق(س) = $(٣س^{٢} - ٢)^{٤}$ ،

فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (-١ ، ق (-١)) .

الحل :

ق (-١) = $(٣ \times (-١)^{٢} - ٢)^{٤}$ = $(٣ - ٢)^{٤}$ = ١

النقطة (-١، ١)

قَ(س) = ٤$(٣س^{٢} - ٢)^{٣}$ × ٦س

قَ(-١) = ٤$(٣ - ٢)^{٣}$ × -٦

= ٤ × ١ × -٦ = -٢٤ ⟵ ميل المماس

معادلة المماس : ص - ١ = -٢٤ (س + ١)

وزارة (٢٠١٩) شتوية :

١) إذا كان ق(س) = $س^{\frac{٣}{٢}}$ + ١ ، فإن ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٢) يساوي :

أ) ١ ب) ٢ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٥}{٢}$

٢) إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً حيث ق(٠) = ١ ، قَ(٠) = ٠ فإن معادلة المماس لمنحنى ق عند س = ٠ هي :

أ) ص = -١ ب) ص = ١

جـ) س = ١ د) س = -١

وزارة (٢٠١٩) صيفية :

١) إذا كان ق(س) = $\frac{٨}{س}$ ، س ≠ ٠

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = ٢ .

الحل :

قَ(س) = $\frac{-٨}{س^{٢}}$

م = قَ(٢) = $\frac{-٨}{٤}$ = -٢

ق(٢) = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

النقطة (٢ ، ٤)

معادلة المماس : ص - ٤ = -٢(س - ٢)

٢) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ - ١٢س ، فما قيمة س التي يكون لمنحنى الاقتران ق عندها مماساً موازياً لمحور السينات :

الحل :

المماس يوازي محور السينات

قَ(س) = صفر

٢س - ١٢ = ٠

٢س = ١٢

س = ٦

التفسير الفيزيائي للمشتقة

اذا تحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم ، فإن سرعة الجسم ع(ن) في أي لحظة هي مشتقة المسافة ، أي أن ع(ن) = فَ (ن) .

وتسارع الجسم ت(ن) اللحظي هو مشتقة السرعة أي أن : ت(ن) = عَ(ن) = فً (ن) .

مثال(١) كتاب ص١٢٢ :

إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة :

ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٥ ،

فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثوان .

الحل :

ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٥

ع(ن) = فَ (ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن

ومنه فإن السرعة بعد مرور ٣ ثوان :

ع(٣) = ٣(٣)^{٢} + ٦ ×(٣) = ٢٧ + ١٨ = ٤٥ م/ث .

سؤال / خارجي :

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٨ ،

احسب سرعة الجسم وتسارعه عندما ن = ٣ .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} + ٤ن

ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن + ٤

ومنه ع(٣) = ٣ × (٣)^{٢} + ٤ × ٣ = ٢٧ + ١٢ = ٣٩

ت(٣) = ٦ × ٣ + ٤ = ١٨ + ٤ = ٢٢

تدريب(١) كتاب ص١٢٣ :

إذا تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة : ف(ن) = ٣ن^{٢} – ٣ن + ٢ ،

فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

الحل :

ع(ن) = فَ (ن) = ٦ن – ٣

ع(٢) = ٦ × (٢) – ٣ = ٩

مثال(٢) كتاب ص١٢٣ :

يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = (٢ن^{٢}+١)^{٢} ،

حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ،

ن الزمن بالثواني . جد تسارع الجسيم

بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

الحل :

السرعة ع (ن) = فَ (ن) = ٢(٢ن^{٢} + ١)(٤ن)

ع(ن) = ٨ن(٢ن^{٢} +١)

التسارع = ت(ن) = عَ(ن) = (٨ن)(٤ن) + (٢ن^{٢} + ١)(٨)

ت(١) = (٨)(٤) + (٣)(٨) = ٣٢ + ٢٤ = ٥٦ م/ث^{٢}

تدريب(٢) كتاب ص١٢٣ :

يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٢ن^{٣} + ٤ن^{٢} + ٦ ، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني . جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

الحل :

ع(ن) = فَ (ن) = ٦ن^{٢} + ٨ن

ت(ن) = عَ(ن) = ١٢ن + ٨

ت(٢) = ١٢ × ٢ + ٨ = ٢٤ + ٨ = ٣٢ .

مثال(٣) كتاب ص١٢٤ :

إذا كانت ف(ن) = ن^{٣} – ٩ن^{٢} + ١٥ن هي المسافة التي يقطعها جسيم ، حيث ن الزمن بالثواني ، فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} – ١٨ن + ١٥

عندما تنعدم السرعة ، فإن : ع(ن) = ٠

٣ن^{٢} – ١٨ن + ١٥ = ٠

ن^{٢} – ٦ن + ٥ = ٠

(ن – ٥)(ن – ١) = ٠

ومنه : ن = ٥ ، ن = ١

التسارع ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن – ١٨

ت(٥) = ٦(٥) – ١٨ = ٣٠ – ١٨ = ١٢ م/ث^{٢} .

ت(١) = ٦(١) – ١٨ = - ١٢ م/ث^{٢} .

سؤال / خارجي :

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} ـ ٣ن^{٢} + ٥ن + ٨ احسب تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ن^{٢} – ٦ن + ٥

عندما تنعدم السرعة ، فإن : ع(ن) = ٠

ن^{٢} – ٦ن + ٥ = ٠

(ن – ٥)(ن – ١) = ٠

ن = ٥ أو ن = ١

التسارع ت(ن) = عَ(ن) = ٢ن – ٦

ت(٥) = ٢ × ٥ ـ ٦ = ١٠ ـ ٦ = ٤

ت(١) = ٢ × ١ ـ ٦ = ٢ ـ ٦ = ـ ٤

سؤال / خارجي :

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} ـ ٥ن + ٦ احسب التسارع عندما تكون السرعة = ٧ م / ث .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} ـ ٥

بما أن ع(ن) = ٧

فإن ٣ن^{٢} ـ ٥ = ٧

٣ن^{٢} = ١٢

ن^{٢} = ٤ $\longrightarrow$ ن = ـ ٢ ، ٢

ت(ن) = ٦ن

نأخذ ن = ٢ $\longrightarrow$ ت(٢) = ٦ × ٢ = ١٢

ن = ـ ٢ تُهمل ، لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالباً .

تدريب(٣) كتاب ص١٢٤ :

يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة : ف(ن) = ٢ن٣ – ٣ن٢ + ٢ ،

احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٦ن^{٢} – ٦ن

عندما ينعدم التسارع ، فإن : ت(ن) = ٠

ت(ن) = عَ(ن) = ١٢ن – ٦ = ٠

١٢ن = ٦ ⟵ ن = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ع($\frac{١}{٢}$) = ٦ × ($\frac{١}{٢}$)^{٢} – ٦ × $\frac{١}{٢}$ =

= $\frac{٣}{٢}$ – ٣ = $\frac{٣ - ٦}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

سؤال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن ف(ن) = ن^{٣} + ٤ن

احسب السرعة المتوسطة في [١ ، ٣] .

الحل :

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{ف(ن٢) – ف(ن١)}}{\text{ن٢ – ن١}}$

= $\frac{\text{ف(٣) – ف(١)}}{٣ - ١}$

= $\frac{(٢٧ + ١٢) - (١ + ٤)}{٢}$

= $\frac{٣٤}{٢}$ = ١٧

سؤال / خارجي :

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} – ن^{٢} + ٤

احسب سرعة الجسم عندما يكون تسارعه = ١٠ م / ث^{٢} .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} – ٢ن

ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن – ٢

بما أن ت(ن) = ١٠

فإن ٦ن – ٢ = ١٠

٦ن = ١٢ ⟵ ن = ٢

ع(٢) = ٣ × (٢)^{٢} – ٢ × ٢

= ٣ × ٤ – ٤ = ١٢ – ٤ = ٨

سؤال / خارجي :

يتحرك جسم بحيث أن ف(ن) = ن^{٢} + ٣ن + ٢ ،

إذا كانت السرعة المتوسطة في [١ ، أ] تساوي السرعة اللحظية

عند ن = ٥ فجد أ .

الحل :

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{ف(أ) – ف(١)}}{\text{أ – ١}}$ =

= $\frac{(\text{أ}^{٢} + ٣ \times \text{أ} + ٢) - (١ + ٣ + ٢)}{\text{أ – ١}}$

= $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{٣أ} - ٤}{\text{أ – ١}}$ = $\frac{(\text{أ} + ٤)\cancel{(\text{أ} - ١)}}{\cancel{\text{أ} - ١}}$ = أ + ٤

السرعة اللحظية = ع(ن) = فَ(ن) = ٢ن + ٣

عند ن = ٥ ⟵ ع(٥) = ٢ × ٥ + ٣ = ١٠ + ٣ = ١٣

أ + ٤ = ١٣

أ = ١٣ – ٤ = ٩

الأسئلة / ص١٢٥

سؤال(١) كتاب ص١٢٥ :

إذا كانت فـ(ن) =ن^{٣} + ٣ن^{٢} هي المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية ، فجد :

أ) السرعة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

ب) التسارع عندما تكون السرعة ٩ م/ث .

الحل : أ) ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن

ع(٢) = ٣ × ٤ + ٦ × ٢ = ٢٤

ب) ع(ن) = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن = ٩

ن^{٢} + ٢ن – ٣ = ٠

(ن – ٣)(ن – ١) = ٠

ن= -٣ ، ن = ١

تهمل ، لا يمكن أن يكون الزمن سالباً .

ت(ن) = ٦ن + ٦ ⟵ ت(١) = ٦ × ١ + ٦ = ١٢

سؤال(٢) كتاب ص١٢٥ :

تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطه الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة : فـ(ن) = ٢ن^{٢} .

إذا كانت سرعته المتوسطة فبي الفترة الزمنية [٠، أ] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوان ، فجد قيمة أ .

الحل :

فـ(ن) = ٢ن^{٢}

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{فـ(أ) – فـ(٠)}}{\text{أ – ٠}}$ = $\frac{\text{٢أ}^{٢}\text{ – ٠}}{\text{أ}}$ = ٢أ

السرعة اللحظية ع(ن) = فَ(ن) = ٤ن

ع(٣) = ٤ × ٣ = ١٢

٢أ = ١٢ ⟵ أ = ٦

سؤال(٣) كتاب ص١٢٥ :

إذا كان فـ(ن) = (٢ن – ٢)^{٣} + ٤ يمثل المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية ، فجد السرعة المقطوعة بعد مرور ٤ ثوان من بدء الحركة .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣(٢ن – ٢)^{٢} × ٢

ع(٤) = ٣(٢× (٤) – ٢)^{٢} × ٢

= ٣(٨ – ٢)^{٢} × ٢ = ١٠٨ × ٢ = ٢١٦ .

سؤال(٤) كتاب ص١٢٥ :

إذا مثل الاقتران فـ(ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته ، وكان فـ(ن) = ن^{٣} – ن^{٢} + ٥ ، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢} ؟

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} – ٢ن

ت(ن) = عَ (ن) = ٦ن – ٢

٤ = ٦ن – ٢

٦ = ٦ن

ن = ١

ع(١) = ٣×(١)^{٢} – ٢×(١) = ٣ – ٢ = ١ .

سؤال(٥) كتاب ص١٢٥ :

تحرك جسيم بحيث كان بعده عن نقطة الأصل معطى بالعلاقة : ف(ن) = ن^{٢} + ٤ .
متى تساوي سرعته المتوسطة سرعته في اللحظة التي يكون فيها الزمن ٤ ثوان ؟

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٢ن

ع(٤) = ٨ ⟵ السرعة اللحظية

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{ف(ن) – ف(٠)}}{\text{ن – ٠}}$

٨ = $\frac{\text{ن}^{٢} + ٤ - (٤)}{\text{ن} - ٠}$

٨ = $\frac{\text{ن}^{٢}}{\text{ن}}$

٨ = ن

وزارة (٢٠١٨) صيفية :

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٣} + ٩ن + ١ حيث ق المسافة التي يقطعها الجسيم عندما تكون سرعته ١٢ م/ث جد تسارعه .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} + ٩

٣ن^{٢} + ٩ = ١٢

٣ن^{٢} = ٣

ن^{٢} = ١ ⟵ ن = ١ ، ـ ١

ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن

ت(١) = ٦ م/ث^{٢}

وزارة (٢٠١٩) شتوية :

يتحرك جسيم في خط مستقيم وفقاً للعلاقة ف(ن) = ٣ن^{٢} ـ ن^{٣} + ١ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالامتار ، ن الزمن بالثواني احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٦ن ـ ٣ن^{٢}

ت(ن) = عَ(ن) = ٦ ـ ٦ن

ينعدم التسارع ت(ن) = صفر

٦ ـ ٦ن = ٠

٦ = ٦ن ⟵ ن = ١

ع(١) = ٦ × ١ ـ ٣ × (١)^{٢}

= ٦ ـ ٣ = ٣ م/ث

وزارة (٢٠١٩) صيفية :

يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة ف(ن) = ٣ن^{٣} ـ ١٨ن^{٢} + ١٠ حيث ف المسافة المقطوعة بالامتار ، ن الزمن بالثواني جد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٩ن^{٢} ـ ٣٦ن

ت(ن) = عَ(ن) = ١٨ن ـ ٣٦

ينعدم التسارع ت(ن) = صفر

١٨ن ـ ٣٦ = ٠

١٨ن = ٣٦

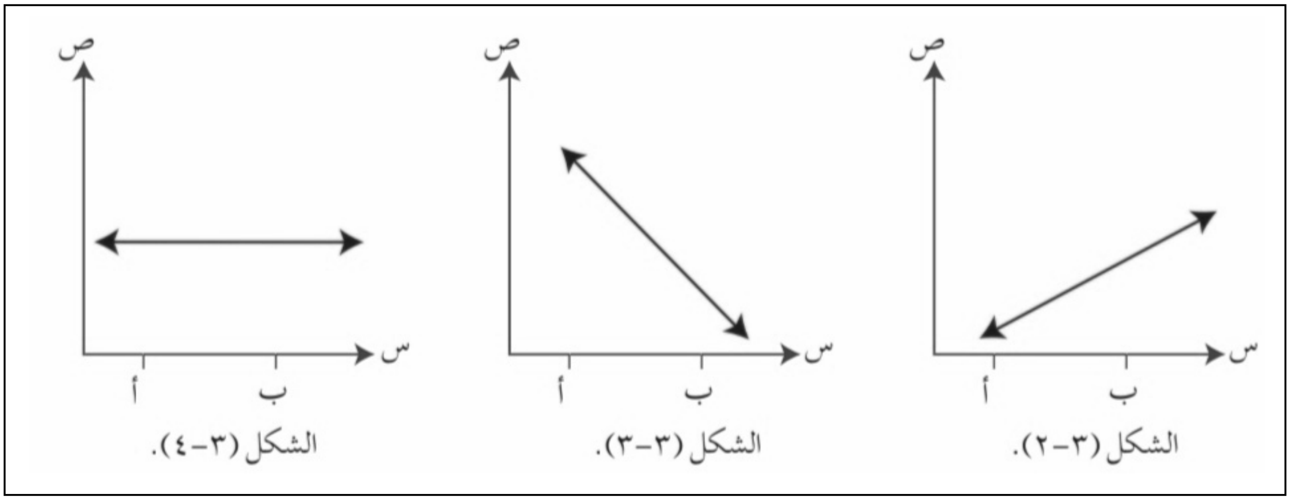
ن = ٢

ع(٢) = ٩ × (٢)^{٢} ـ ٣٦ × ٢

= ٩ × ٤ ـ ٧٢

= ٣٦ ـ ٧٢ = ـ ٣٦ م/ث

التزايد والتناقص



* لاحظ من **الشكل الأول** أنه كلما زادت قيمة س زادت قيمة ص ، وكان الاقتران متزايدا في الفترة [أ ، ب]

* أما في **الشكل الثاني** كلما زادت قيمة س قلت قيمة ص ، وكان الاقتران متناقصا في الفترة [أ ، ب]

* وأما في **الشكل الثالث** مهما تغيرت قيمة س فإن قيمة ص تبقى ثابتة ، ويكون الاقتران في هذه الحالة ثابتا في الفترة [أ ، ب]

<u># سنقوم بتحديد فترات التزايد والتناقص :</u>

أولاً : من منحنى الاقتران الأصلي ق (س) .

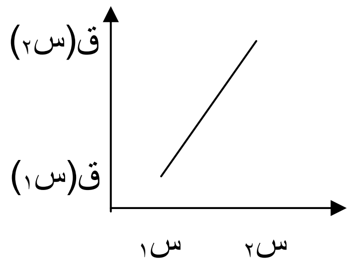
ثانياً : من المشتقة الأولى للاقتران قَ(س) .

ثالثاً : من رسمة منحنى المشتقة الأولى للاقتران قَ(س) .

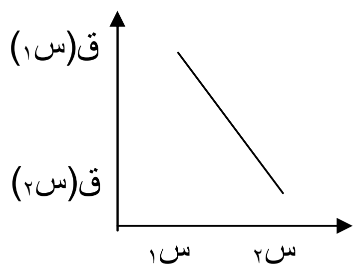
أولاً : من منحنى الاقتران الأصلي ق (س) :

تعريف : إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [أ ، ب] ، وكان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ∋ [أ ، ب] ، فإن :

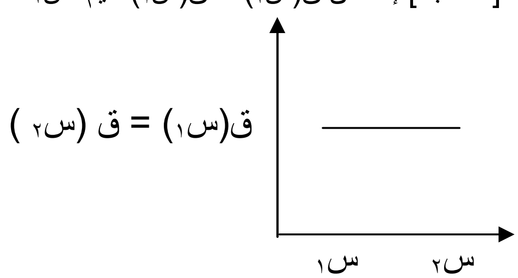
١) الاقتران ق يكون متزايداً في الفترة [أ ، ب] إذا كان ق($س_{٢}$) > ق($س_{١}$) عندما $س_{٢}$ > $س_{١}$.



٢) الاقتران ق يكون متناقصاً في الفترة [أ ، ب] إذا كان ق($س_{٢}$) < ق($س_{١}$) عندما $س_{٢}$ > $س_{١}$.



٢) الاقتران ق يكون ثابتاً في الفترة [أ ، ب] إذا كان ق($س_{٢}$) = ق($س_{١}$) لقيم $س_{٢}$ ، $س_{١}$ جميعها .

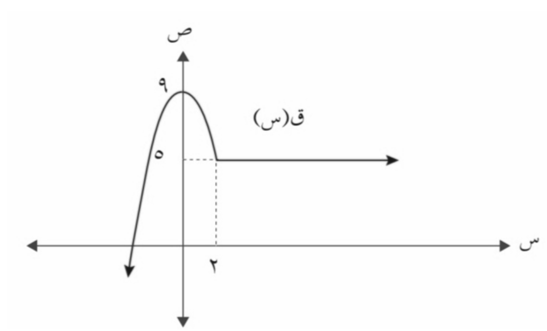


<u>مثال(١) / كتاب ص١٢٧</u> :

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ،

جد فترات التزايد والتناقص والثبات لمنحنى الاقتران ق .

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ - س^{٢} \text{ ، } س \leq ٢ \\ ٥ \text{ ، } س > ٢ \end{cases}$$



الحل :

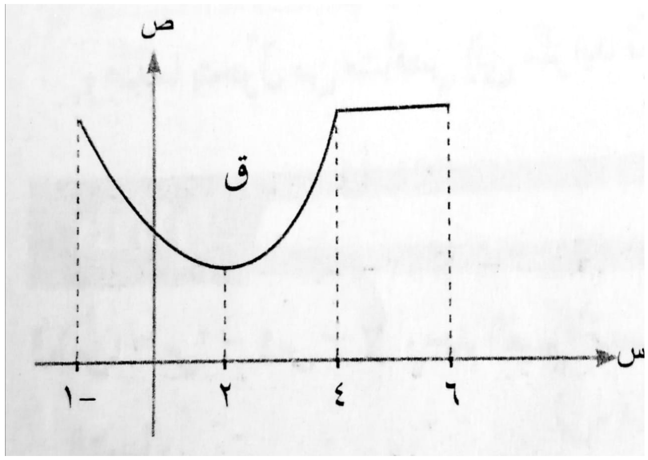
ق(س) يكون متزايد في الفترة من (- ∞ ، ٠] .

ق(س) يكون متناقص في الفترة من [٠ ، ٢] .

ق(س) يكون ثابت في الفترة من [٢ ، ∞) .

سؤال : الشكل يمثل ق(س) حيث ق معرف على الفترة [ـ ١ ، ٦] جد الفترة

التي يكون فيها ق(س) : ١) متزايد ٢) متناقص ٣) ثابت



الحل :

ق(س) متزايد في الفترة [٢ ، ٤] .

ق(س) متناقص في الفترة [ـ ١ ، ٢] .

ق(س) ثابت في الفترة [٤ ، ٦] .

ثانياً : من المشتقة الأولى للاقتران قَ(س) :

نظرية :

إذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة [أ ، ب] ، وقابلاً للإشتقاق على الفترة (أ ، ب) ، فإن :

١) ق يكون متزايداً في الفترة [أ ، ب] إذا كانت قَ(س) > ٠ لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) .

٢) ق يكون متناقصاً في الفترة [أ ، ب] إذا كانت قَ(س) < ٠ لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) .

٣) ق يكون ثابتاً في الفترة [أ ، ب] إذا كانت قَ(س) = ٠ لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) .

بمعنى أن :

١) قَ(س) > ٠ **متزايد** ٢) قَ(س) < ٠ **متناقص** ٣) قَ(س) = ٠ **ثابت**

يمكن إيجاد فترات التزايد والتناقص من خلال إشارة المشتقة الأولى للاقتران ق(س) وذلك كما يلي :

١ــ نجد المشتقة الأولى قَ(س) للاقتران ق .

٢ــ إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع قَ(س) = صفراً ، وإيجاد قيم س .

٣ــ نضع أصفار المشتقة الأولى على خط الأعداد وندرس إشارة قَ(س) حول أصفار هذه المشتقة .

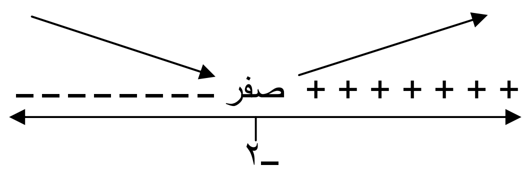
٤ــ قَ(س) > ٠ **متزايد** // قَ(س) < ٠ **متناقص** // قَ(س) = ٠ **ثابت**

<u>مثال(٢) / كتاب ص ١٢٩</u> :

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ٤س + ٣

الحل : قَ(س) = ٢س + ٤

٢س + ٤ = ٠ ⟵ ٢س = ــ ٤ ⟵ س = ــ ٢



الاقتران ق **متناقص** في الفترة (ــ ∞ ، ــ ٢]

و**متزايد** في الفترة [ــ ٢ ، ∞ [

<u>مثال (٣) / كتاب ص١٣٠</u> :

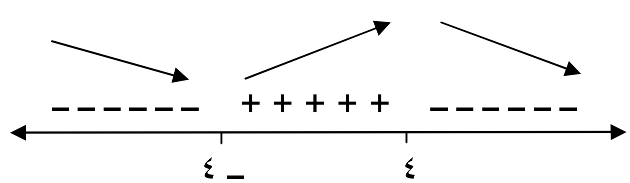
إذا كان ق(س) = ٤٨س ــ $س^{٣}$ ،

فجد فترات التزايد والتناقص لهذا الاقتران .

الحل : قَ(س) = ٤٨ ــ ٣$س^{٢}$

٤٨ ــ ٣$س^{٢}$ = ٠ ⟵ ٤٨ = ٣$س^{٢}$

١٦ = $س^{٢}$ ⟵ س = ٤ ، ــ ٤



الاقتران ق متناقص في الفترتين : (ــ ∞ ، ــ ٤] ، [٤ ، ∞) .

ومتزايد في الفترة [ــ ٤ ، ٤] .

<u>تدريب (١) / كتاب ص١٣١</u> :

جد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران مما يأتي :

١) هـ(س) = ٧ + س . ٢) ق(س) = $(٢س ــ ٤)^{٢}$.

الحل :

١) هـَ(س) = ١ موجبة دائماً .

إذن هـ(س) متزايد على ح ⟵ (ــ ∞ ، ∞) .

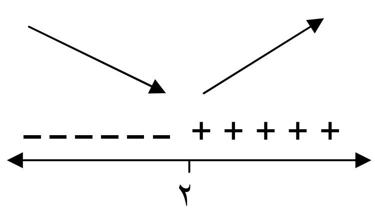
٢) قَ(س) = ٢ (٢س ــ ٤) × ٢

٤ (٢س ــ ٤) = ٠

٢س ــ ٤ = ٠

٢س = ٤

س = ٢



الاقتران ق متناقص في الفترة (ــ ∞ ، ٢]

ومتزايد في الفترة [٢ ، ∞) .

<u>سؤال (١) / خارجي</u> :

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ـ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ـ ٦س + ٨ ،

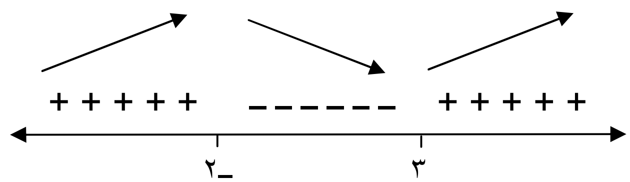
أوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

الحل :

قَ(س) = س^{٢} ـ س ـ ٦ = ٠

(س ـ ٣)(س + ٢) = ٠

س = ٣ ، ـ ٢



ق(س) متزايد في الفترتين : (ـ ∞ ، ٠] ، [٣ ، ∞)

ومتناقص في الفترة [ـ ٢ ، ٣] .

<u>سؤال (٢) / خارجي</u> :

إذا كان ق(س) = (س + ٢)^{٣} ، فجد فترات

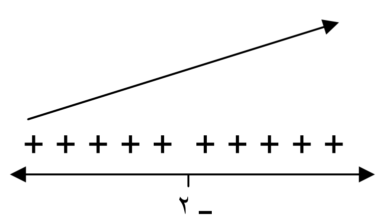
التزايد والتناقص للاقتران ق .

الحل :

قَ(س) = ٣(س + ٢)^{٢} × ١
الفترة

= ٣(س + ٢)^{٢} = ٠

س = ـ ٢



ق(س) متزايد في (ـ ∞ ، ∞)

أو يمكن أن تكتب على ح .

<u>سؤال (٣) / خارجي</u> :

إذا كانت قَ(س) = (س + ١)^{٢}(س ـ ٣)^{٣} ، فجد

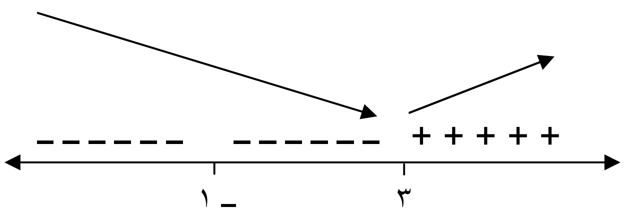
فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

الحل :

قَ(س) = ٠

(س + ١)^{٢}(س ـ ٣)^{٣} = ٠

س = ـ ١ ، ٣



ق(س) متزايد في [٣ ، ∞) ومتناقص في (ـ ∞ ، ٣]

ثالثاً : من رسمة منحنى المشتقة الأولى للاقتران قَ(س) .

<u>الفكرة الرئيسية</u> : هي تحويل الرسمة إلى خط الأعداد .

١ـ نحدد قيم س التي يقطع عندها منحنى المشتقة الأولى محور السينات حيث توضع هذه القيم على خط الأعداد .

٢ـ نقوم بدراسة الإشارة حول هذه القيم حيث تكون إشارة حسب موقع رسمة المنحنى كما يلي :

أ ـ الرسمة **فوق** محور السينات نضع إشارة **موجبة** .

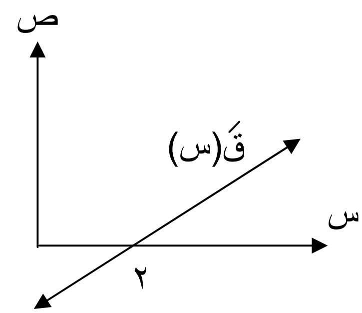
ب ـ الرسمة **تحت** محور السينات نضع إشارة **سالبة** .

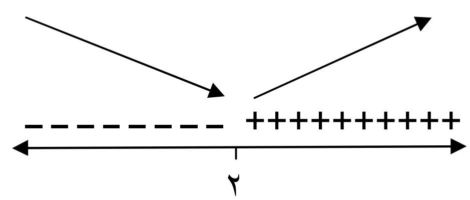
جـ ـ الرسمة **على** محور السينات يكون **ثابت** .

٣ـ نحدد فترات التزايد والتناقص من خط الأعداد كما تعلمنا سابقاً .

مثال (٤) / كتاب ص١٣١ :

اعتماداً على الشكل (٣ ــ ٧) الذي يمثل منحنى قَ(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

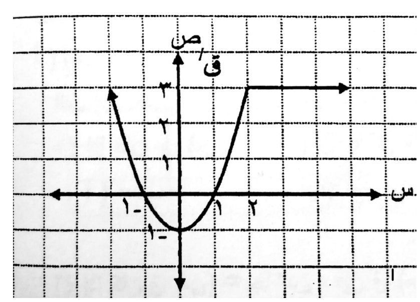




يكون الاقتران متناقص في الفترة (ــ ∞ ، ٢] ، ومتزايد في الفترة [٢ ، ∞) .

وزارة (٢٠١٨) صيفية :

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق ، ما الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران ق متناقصاً ؟



أ) (ــ ∞ ، ٠] ب) [ــ١ ، ١]

جـ) [٠ ، ٢] د) (ــ ∞ ، ∞]

وزارة (٢٠١٨) شتوية :

إذا كان ق(س) = س (٢٧ ــ س^{٢}) ، فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

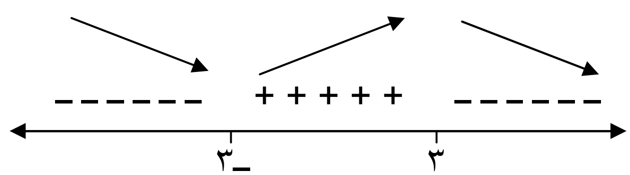
الحل :

ق(س) = ٢٧س ــ س^{٣}

قَ(س) = ٢٧ ــ ٣س^{٢} = ٠

٣س^{٢} = ٢٧

س^{٢} = ٩ $\longrightarrow$ س = ٣ ، ــ ٣



متزايد في الفترة [ــ ٣ ، ٣]

ومتناقص في الفترتين (ــ ∞ ، ــ ٣] ، [٣ ، ∞)

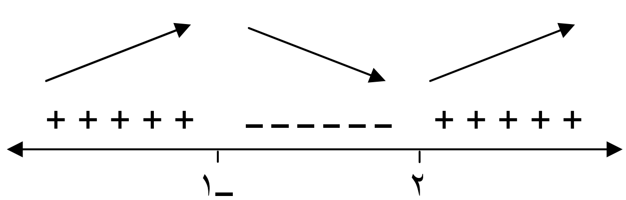
وزارة (٢٠١٧) صيفية :

ليكن ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ــ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ــ ٢س + ٧

قَ(س) = س^{٢} ــ س ــ ٢ = ٠

(س ــ ٢)(س + ١) = ٠

س = ٢ ، س = ــ ١



متزايد في الفترتين : (ــ ∞ ، ــ ١] ، [٢ ، ∞)

ومتناقص في الفترة [ــ ١ ، ٢]

الأسئلة /ص١٣٣

سؤال (١)/ كتاب ص١٣٣ : جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي :

أ) ق(س) = ٣ ـ ٤س

الحل : قَ(س) = ـ ٤ سالبة دائماً

إذن ق(س) متناقص على ح ⟵ (ـ ∞ ، ∞) .

ب) ق(س) = ٨س ـ س^{٢}

الحل : قَ(س) = ٨ ـ ٢س ⟵ ٨ ـ ٢س = ٠ ⟵ ٨ = ٢س ⟵ س = ٤

+ + + + + + + − − − − − −

٤

ق متزايد في الفترة (ـ ∞ ، ٤] ومتناقص في الفترة [٤ ، ∞)

جـ) ق(س) = ٤س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٢

الحل : قَ(س) = ١٢س^{٢} ـ ١٢ س ⟵ ١٢س^{٢} ـ ١٢ س = ٠

ومنه ١٢س(س ـ ١) = ٠ ⟵ س = ٠ ، ١

++++ − − − − ++++

٠ ١

ق متزايد في (ـ ∞ ، ٢] ، [١ ، ∞)

ومتناقص في [٠ ، ١]

د) ق(س) = (س + ٢) (س + ٣)

الحل : قَ(س) = (س + ٢) (١) + (س + ٣) (١) ⟵ قَ(س) = ٢س + ٥

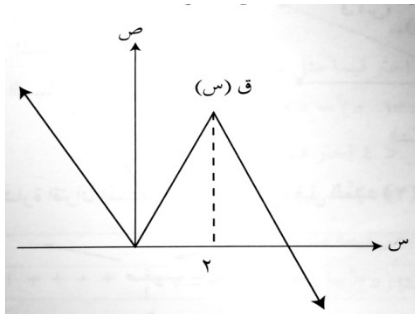
ومنه ٢س + ٥ = ٠ ⟵ س = $\frac{-٥}{٢}$

− − − − − ++++++

$\frac{-٥}{٢}$

ق متناقص في (ـ ∞ ، $\frac{-٥}{٢}$] ومتزايد في [$\frac{-٥}{٢}$ ، ∞)

<u>سؤال (٢)/ كتاب ص١٣٣ :</u> اعتماداً على الشكل (٣ـ ٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، جد فترات التزايد والتناقص ق .



الشكل (٣-٨).

الحل : ق متناقص في (ـ ∞ ، ٠] وفي [٢ ، ∞)

ومتزايد في [٠ ، ٢]

<u>سؤال (٣)/ كتاب ص١٣٣ :</u> بين أن الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٢س + ٥ يكون متزايداً لقيم س جميعها .

الحل : قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢ = ٠ ⟵ ٣س^{٢} = ـ ٢ لا يوجد لها حل .

+++++++ ++++++

قَ موجبة دائما لذلك ق متزايد على ح .

<u>سؤال (٤)/ كتاب ص١٣٣ :</u> إذا كان قَ(س) = هـَ(س) ، فأثبت أن ق(س) = هـ(س) + جـ حيث جـ عدد ثابت .

الحل : بما أن (ق ـ هـ)َ = قَ ـ هـَ = صفر

إذن (ق ـ هـ)(س) = جـ (عدد ثابت)

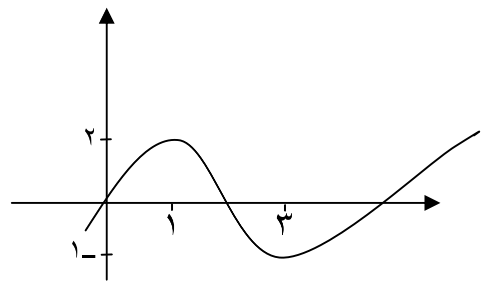
ق(س) ـ هـ (س) = جـ

ومنه ق(س) = هـ (س) + جـ

القيم القصوى

النقطة الحرجة : هي النقطة التي يتغير عندها الاقتران من حالة التزايد إلى حالة التناقص أو العكس ويكون عندها المماس أفقي أي أن قَ(س) = ٠ ، وهي توجد عند القمم والقيعان .

__سؤال(١) / خارجي__ : جد النقط الحرجة في رسمة الاقتران ق بالإعتماد على الشكل المجاور :

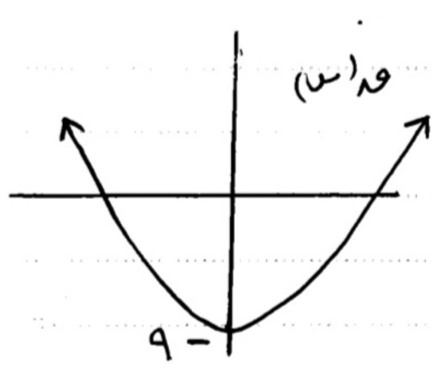


الحل : عند النقطة (١ ، ٢) هي نقطة حرجة لأن قبلها متزايد وبعدها متناقص ويكون قَ(١)= ٠ .

والنقطة (٣ ، ـ ١) نقطة حرجة لأن قبلها متناقص وبعدها متزايد وايضاً قَ(٣) = ٠ .

__سؤال(٢) / خارجي__ :

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، أوجد النقط الحرجة ؟



الحل :

النقط الحرجة

هي (٠ ، ـ ٩) لأن الاقتران قبلها متناقص وبعدها متزايد .

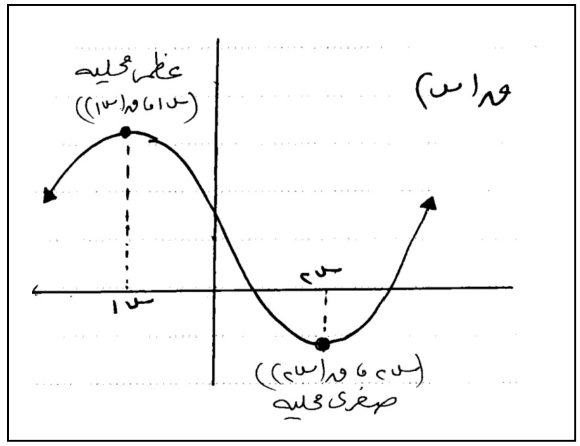
أيضاً قَ(٠) = ٠

__ملاحظة:__

نلاحظ أن النقط الحرجة موجودة عند القمم والقيعان .

 # إيجاد القيم القصوى من الاقتران الأصلي (ق(س)) :

ليكن منحنى الاقتران ق(س) كما في الشكل :



نلاحظ أن :

١ــ يكون للاقتران أعلى قيمة عند س$_١$ ، وتكون هذه القيمة مساوية لناتج تعويض س$_١$ في الاقتران الأصلي ق(س)

ونقول

عند س = س$_١$ يوجد قيمة عظمى محلية وقيمتها ق(س$_١$) .

٢ــ يكون للاقتران أقل قيمة عند س$_٢$ ، وتكون هذه القيمة مساوية لناتج تعويض س$_٢$ في الاقتران الأصلي ق(س)

ونقول

عند س = س$_٢$ يوجد قيمة صغرى محلية وقيمتها ق(س$_٢$) .

ملاحظة :

القيمة الصغرى هي ق(س$_٢$)

القيمة العظمى هي ق(س$_١$)

 # تسمى القيم العظمى والقيم الصغرى

للاقتران ق(س) بـ القيم القصوى .

سؤال(٣) / خارجي :

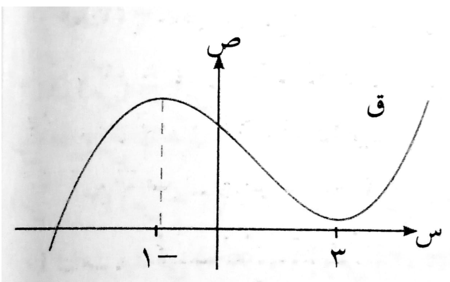
الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) اعتمد على الرسم في إيجاد :

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران .

٢) قيم س الحرجة .

٣) القيم القصوى .

٤) قَ(٣) ، قَ(ــ١) .



الحل :

١) ق متزايد في الفترتين : (ــ ∞ ، ــ ١] ، [٣ ، ∞)

ومتناقص في [ــ ١ ، ٣] .

٢) الحرجة هي : س = ــ ١ ، س = ٣

٣) ق(ــ١) قيمة عظمى ، ق(٣) قيمة صغرى

٤) قَ(٣) = صفر ، قَ(ــ١) = صفر

سؤال(٤) / خارجي :

الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)

اعتمد على الرسم في إيجاد :

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران .

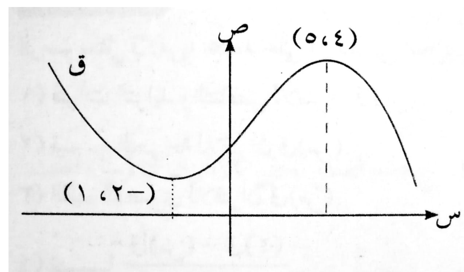
٢) قيم س الحرجة .

٣) قيمة س التي يوجد عندها قيمة عظمى .

٤) القيمة العظمى .

٥) قيمة س التي يوجد عندها قيمة صغرى .

٦) القيمة الصغرى .



الحل :

١) ق متزايد في [ـ ٢ ، ٤]

ومتناقص في الفترتين : (ـ ∞ ، ـ ٢] ، [٤ ، ∞)

٢) الحرجة هي : س = ـ٢ ، ٤

٣) س = ٤

٤) ق(٤) = ٥

٥) س = ـ ٢

٦) ق(ـ٢) = ١

 # إيجاد القيم القصوى من رسمة قَ(س) :

سؤال(٥) / خارجي :

الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س)

اعتمد على الرسم في إيجاد :

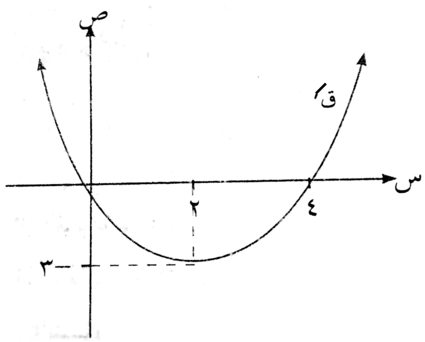
١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٢) قيم س الحرجة للاقتران ق(س) .

٣) القيم القصوى للاقتران ق(س) .

٤) نهــــا $\frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$ ، هـ ← ٠

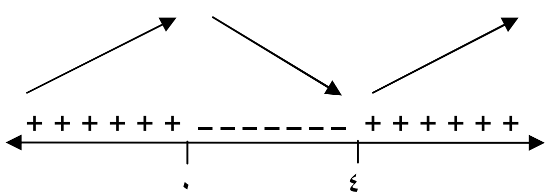
٥) ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢ ، ٤



الحل :

نقوم برسم خط الأعداد ونضع عليه أصفار قَ

وهي ٠ ، ٤ وتكون الإشارة كما في الشكل المجاور .



١) ق متزايد في الفترتين : (ـ ∞ ، ٠] ، [٤ ، ∞)

ومتناقص في الفترة [٠ ، ٤] .

٢) قيم س الحرجة هي : ٠ ، ٤

٣) قيمة عظمى عند س = ٠ هي ق(٠) ،

وقيمة صغرى عند س = ٤ هي ق(٤) .

٤) نهــــا $\frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$ = قَ(٢) = ـ ٣ ، هـ ← ٠

٥) ميل المماس هو : قَ(٢) = ـ ٣

قَ(٤) = ٠

سؤال(٦) / خارجي :

الشكل المجاور يمثل قَ(س)

اعتمد على الرسم في إيجاد :

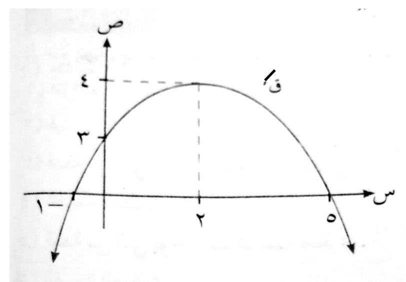
١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٢) قيم س الحرجة للاقتران ق(س) .

٣) القيم القصوى للاقتران ق(س) .

٤) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(٢)}}{\text{س} - ٢}$

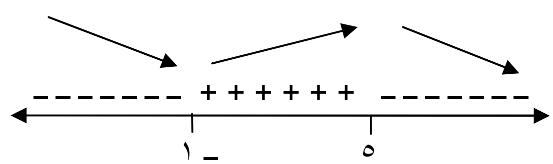
٥) ميل المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٠ .



الحل :

نقوم برسم خط الأعداد ونضع عليه أصفار قَ

وهي ــ ١ ، ٥ وتكون الإشارة كما في الشكل المجاور .



١) ق متناقص في الفترتين : (ــ ∞ ، ــ١] ، [٥ ، ∞)

ومتزايد في الفترة [ــ ١ ، ٥] .

٢) حرجة عند س = ــ١ ، ٥ .

٣) صغرى عند س = ــ ١   هي ق(ــ١)

وعظمى عند س = ٥   هي ق(٥)

٤) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(٢)}}{\text{س} - ٢} = \text{قَ(٢)}$

٥) ميل المماس هو : قَ(٠) = ٣ .

سؤال(٧) / خارجي :

الشكل المجاور يمثل قَ(س)

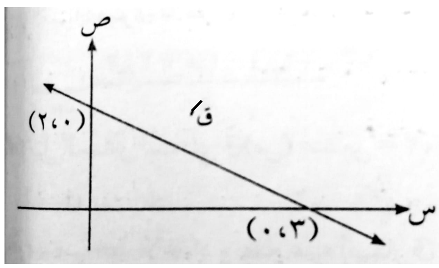
اعتمد على الرسم في إيجاد :

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) .

٢) قيم س الحرجة للاقتران ق(س) .

٣) القيم القصوى للاقتران ق(س) .

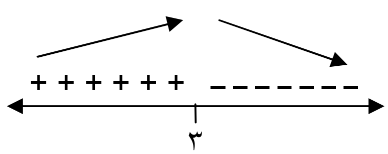
٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(٠)}}{\text{س}}$



الحل :

نقوم برسم خط الأعداد ونضع عليه أصفار قَ

وهي ٣ ، وتكون الإشارة كما في الشكل المجاور .



١) ق متزايد في (ــ ∞ ، ــ١] ومتناقص في [٣ ، ∞)

٢) حرجة عند س = ٣

٣) عظمى عند س = ٣   هي ق(٣)

٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ق(س)} - \text{ق(٠)}}{\text{س}} = \text{قَ(٠)} = ٢$

قاعدة : (اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى)

١) نجد قَ(س) ونساويها بالصفر ونجد قيم س فتكون هي النقاط الحرجة للاقتران ق(س) .

٢) ندرس إشارة قَ(س) لإيجاد التزايد والتناقص .

٣) عندما يتحول ق(س) من متزايد إلى متناقص تكون القيمة عظمى ، وعندما يتحول من متناقص إلى متزايد تكون القيمة صغرى .

<u>مثال (١) / كتاب ص١٣٦</u> :

جد النقط الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٢} ـ ٤س + ٣ .

الحل :

قَ(س) = ٢س ـ ٤

قَ(س) = ٠ ومنه ٢س ـ ٤ = ٠

س = ٢ ، وعليه توجد قيمة حرجة عندما س = ٢

النقطة الحرجة هي (٢ ، ـ ١)

ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ + + + + + +

٢

صغرى عند س = ٢ ، وقيمتها ق(٢) = (٢)^{٢} ـ ٤ × ٢ + ٣

= ٤ ـ ٨ + ٣ = ـ ١

<u>تدريب (١) / كتاب ص١٣٦</u> :

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٢} ـ ٢س + ١ .

الحل :

قَ(س) = ٢س ـ ٢

قَ(س) = ٠

ومنه ٢س ـ ٢ = ٠

س = ١ ، وعليه توجد قيمة حرجة عند س = ١

النقطة الحرجة : (١ ، ٠)

ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ + + + + + +

١

صغرى عند س = ١ ، وقيمتها ق(١) = (١)^{٢} ـ ٢×١ + ١

ق(١) = ٠

<u>مثال (٢) / كتاب ص١٣٧</u> :

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} ـ ٣س^{٢} ـ ١٢س + ٥ .

الحل :

قَ(س) = ٦س^{٢} ـ ٦س ـ ١٢

قَ(س) = ٠

ومنه ٦س^{٢} ـ ٦س ـ ١٢ = ٠

س^{٢} ـ س ـ ٢ = ٠

(س ـ ٢)(س + ١) = ٠

س= ٢ أو س = ـ ١

توجد أعداد حرجة عند س = ٢ ، س = ـ ١

النقط الحرجة : (٢ ، ـ١٥) ، (ـ١ ، ١٢)

+ + + + + + ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ + + + + + +

ـ١ ٢

صغرى محلية عند س = ٢ ، وقيمتها ق(٢) = ـ ١٥

عظمى محلية عند س = ـ١ ، وقيمتها ق(ـ١) = ١٢

الأسئلة / ص١٢٥

سؤال (١) / كتاب ص١٤١ :

جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية

(إن وجدت) لكل مما يأتي :

أ) ق(س) = س^{٣} ـ ٣س + ١

الحل :

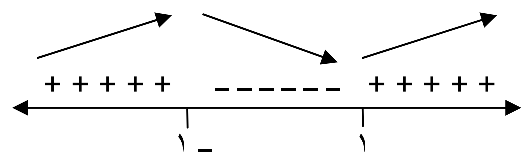
قَ(س) = ٣س^{٢} ـ ٣

قَ(س) = ٠

٣س^{٢} ـ ٣ = ٠

٣س^{٢} = ٣

س^{٢} = ١ ⟵ س = ∓ ١



ق(ـ١) = ـ١ + ٣ + ١ = ٣ عظمى محلية

ق(١) = ١ ـ ٣ + ١ = ـ ١ صغرى محلية

ب) ل(س) = ٤س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٢

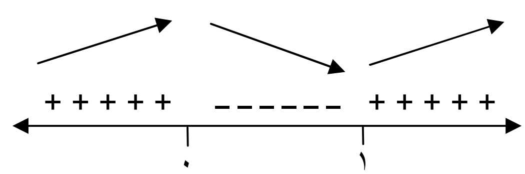
الحل :

لَ(س) = ١٢س^{٢} ـ ١٢س

١٢س^{٢} ـ ١٢س = ٠

١٢س (س ـ ١) = ٠

س = ٠ ، س = ١



ل(٠) = ٠ ـ ٠ + ٢ = ٢ عظمى محلية

ل(١) = ٤ ـ ٦ + ٢ = ٠ صغرى محلية

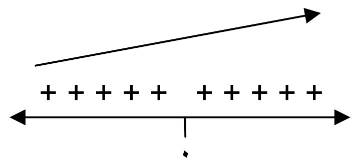
جـ) هـ (س) = س^{٣} + ٤

الحل :

هـَ (س) = ٣س^{٢}

٣س^{٢} = ٠

س^{٢} = ٠ ⟵ س = ٠



هـ (س) متزايد على ح . **إذن لا توجد قيم قصوى محلية**

د) ك (س) = س^{٣} ـ ٢س^{٢} ـ ٤س + ٨

الحل :

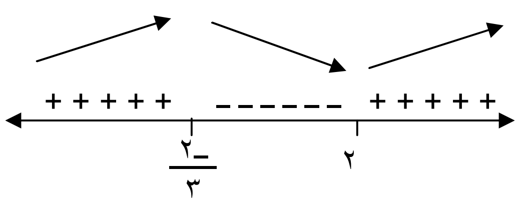
كَ (س) = ٣س^{٢} ـ ٤س ـ ٤

٣س^{٢} ـ ٤س ـ ٤ = ٠

(٣س + ٢)(س ـ ٢) = ٠

٣س + ٢ = ٠ ⟵ ٣س = ـ ٢ ⟵ س = $\frac{-٢}{٣}$

س ـ ٢ = ٠ ⟵ س = ٢



ك (٢) = ٨ ـ ٨ ـ ٨ + ٨ = ٠ صغرى محلية

ك ($\frac{-٢}{٣}$) = $\frac{-٨}{٢٧}$ ـ $\frac{٨}{٩}$ + $\frac{٨}{٣}$ + ٨ = $\frac{٢٥٦}{٢٧}$ عظمى محلية

ملاحظة : سؤال (٢) / كتاب ص١٤١ (غير مطلوب)

سؤال (٣) / كتاب ص١٤١ :

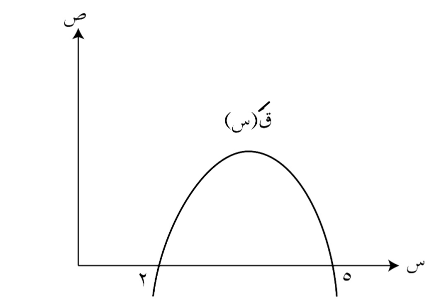
اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق ، حيث قَ(٢) = قَ(٥) = صفراً

جد كلاً مما يأتي :

أ) قيم س الحرجة للاقتران .

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

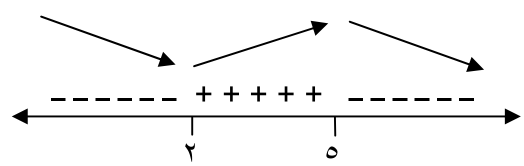
جـ) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق محدداً نوعها .



الحل :

أ) الحرجة هي { ٢ ، ٥ }

ب)



ق متناقص في الفترتين : (ـ ∞ ، ٢] ، [٥ ، ∞)

ومتزايد في الفترة : [٢ ، ٥]

جـ) (٢ ، ق(٢)) نقطة قيمة صغرى محلية

(٥ ، ق(٥)) نقطة قيمة عظمى محلية

سؤال (٤) / كتاب ص١٤١ :

إذا كان للاقتران ق(س) = ٣س^{٢} ـ أس + ٤ قيمة حرجة عندما س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

قَ(س) = ٦س ـ أ

قَ(٢) = ٠

٦ × ٢ ـ أ = ٠

١٢ ـ أ = ٠ ⟵ أ = ١٢

وزارة (٢٠١٩) شتوية :

(١) إذا كان ق(س) = ١٢س ـ س^{٣} ، فجد كلاً مما يأتي :

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق .

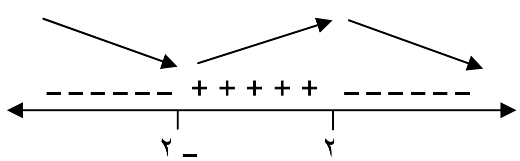
٢) القيم القصوى للاقتران ق .

الحل :

١) قَ(س) = ١٢ ـ ٣س^{٢} = ٠

٣س^{٢} = ١٢

س^{٢} = ٤ ⟵ س = ∓ ٢



ق متناقص في الفترتين : (ـ ∞ ، ـ٢] ، [٢ ، ∞)

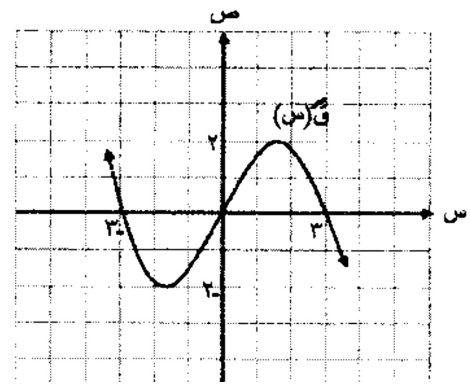
ومتزايد على الفترة [ـ ٢ ، ٢]

٢)

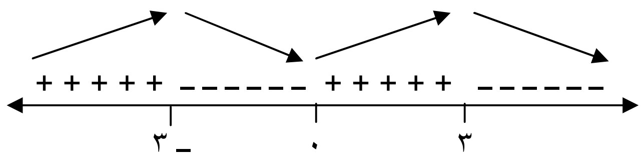
عند س = ـ ٢ قيمة صغرى محلية وهي ق(ـ٢) = ـ١٦

عند س = ٢ قيمة عظمى محلية وهي ق(٢) = ١٦

(٢) معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق ما قيمة س التي يكون عندها للاقتران ق قيمة صغرى محلية :



الحل :



عند س = ٠ قيمة صغرى محلية .

(٣) إذا كان للاقتران ق(س) = س^{٢} + ل س + ١ قيمة قصوى محلية عند س = ٠ فإن قيمة الثابت ل تساوي :

الحل :

قيمة قصوى محلية عند س = ٠

عند س = ٠ ⟵ نقطة حرجة

قَ(٠) = ٠

قَ(س) = ٢س + ل

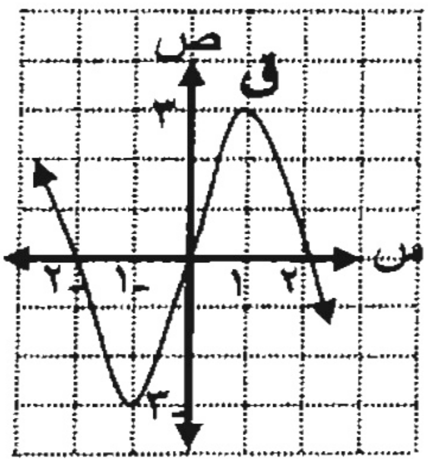
قَ(٠) = ٢ × ٠ + ل

٠ = ٠ + ل

ل = ٠

وزارة (٢٠١٩) صيفية :

(١) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق أجب عن الفقرتين (١) ، (٢) :



(١) ما قيم س الحرجة :

الحل : القيم الحرجة عند القمم والقيعان .

عند س = ـ ١ ، س = ١

{ ـ١ ، ١ }

(٢) ما قيمة س التي يكون للاقتران ق عندها قيمة صغرى محلية .

الحل :

قيمة صغرى محلية عند س = ـ ١

لا تَحْسَبن المجْدَ تمراً أنت آكله

لن تبلغ المجد حتى تلعق الصبرا

مع تحياتي : الأستاذ معاذ البشيش

تطبيقات اقتصادية

تعريف :

إذا كانت س هي عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة ضمن فترة معينة في مصنع ما فإن :

ك(س) = اقتران التكلفة الكلية .

كَ(س) = التكلفة الحدية .

د(س) = اقتران الإيراد الكلي

= التكلفة الكلية + الربح

= ك(س) + ر(س) .

دَ (س) = الإيراد الحدي .

ر(س) = اقتران الربح

= الإيراد الكلي ـ التكلفة الكلية

= د(س) ـ ك(س) .

رَ(س) = الربح الحدي

= الإيراد الحدي ـ التكلفة الحدية

= دَ (س) ـ كَ(س) .

الحل :

١) التكلفة الكلية ك(س) = $٠,٠١س^٢ - ٧٠س + ٢٠٠$

$\longleftarrow$ التكلفة الحدية كَ(س) = $٠,٠٢س - ٧٠$

الإيراد الكلي د (س) = $٨٠س - ٠,٠٢س^٢$

$\longleftarrow$ الإيراد الحدي دَ (س) = $٨٠ - ٠,٠٤س$

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

= ($٨٠س - ٠,٠٢س^٢$) ـ ($٠,٠١س^٢ - ٧٠س + ٢٠٠$)

= $٨٠س - ٠,٠٢س^٢ - ٠,٠١س^٢ + ٧٠س - ٢٠٠$

= $١٥٠س - ٠,٠٣س^٢ - ٢٠٠$

$\longleftarrow$ الربح الحدي رَ(س) = $١٥٠ - ٠,٠٦س$

٢) يكون الربح أكبر ما يمكن عندما رَ(س) = ٠

$١٥٠ - ٠,٠٦س = ٠ \longrightarrow ١٥٠ = ٠,٠٦س$

$س = \frac{١٥٠}{٠,٠٦} = \frac{١٥٠٠٠}{٦} = ٢٥٠٠$

رَ + + + + + ـ ـ ـ ـ ـ ـ

٢٥٠٠ قيمة عظمى

<u>مثال(١) / خارجي</u> :

إذا كانت تكلفة إنتاج س من القطع هي

ك(س) = $٠,٠١س^٢ - ٧٠س + ٢٠٠$

وكان الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه القطع هو د(س) = $٨٠س - ٠,٠٢س^٢$

١) جد التكلفة الحدية ، الإيراد الحدي ، الربح الحدي .

٢) جد عدد القطع التي تعطي أكبر ربح .

<u>مثال(٢) / خارجي</u> :

وجد مصنع أن التكلفة الكلية للإنتاج اليومي للتلفزيونات يعطى بالاقتران ك(س) = $٤س^٢ - ٢٥٠س + ٢٠٠$ فإذا بيع الجهاز الواحد بسعر ١٥٠ دينار فما هو الإنتاج اليومي للمصنع الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن .

الحل :

الإيراد الكلي الناتج عن بيع س أجهزة

= س × سعر البيع للجهاز الواحد

= س × ١٥٠ = ١٥٠س

ر(س) = د(س) ـ ك(س)

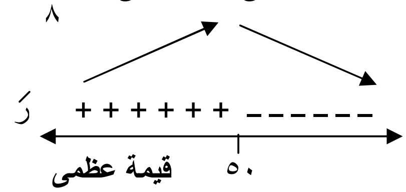
رَ(س) = دَ(س) ـ كَ(س) = ٠ (الربح أكبر ما يمكن)

١٥٠ ـ (٨س ـ ٢٥٠) = ٠

١٥٠ ـ ٨س + ٢٥٠ = ٠

٤٠٠ ـ ٨س = ٠

٤٠٠ = ٨س ⟵ س = $\frac{٤٠٠}{٨}$ = ٥٠



<u>مثال(٣) / خارجي</u> :

إذا كان اقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ١٠٠س + ٢٠٠

واقتران الإيراد الكلي هو د(س) = ٤٠٠س ـ ٣س^{٢} + ٥٠

أوجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن .

الحل :

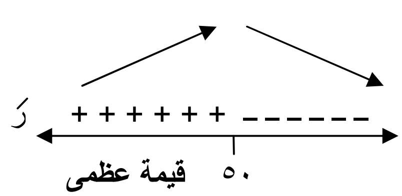
الربح ر(س) = د(س) ـ ك(س)

= (٤٠٠س ـ ٣س^{٢} + ٥٠) ـ (١٠٠س + ٢٠٠)

= ٣٠٠س ـ ٣س^{٢} ـ ١٥٠

رَ(س) = ٣٠٠ ـ ٦س = ٠

٣٠٠ = ٦س ⟵ س = $\frac{٣٠٠}{٦}$ = ٥٠



<u>مثال(٤) / خارجي</u> :

مصنع للثلاجات ينتج س ثلاجة شهرياً إذا كانت تكلفة الإنتاج

تعطى بالعلاقة ك(س) = ١٦٠٠٠ ـ ٤س + س^{٢}

وكان يبيع الثلاجة الواحدة بسعر ٢٥٠ دينار ، أوجد ما يلي :

أ) اقتران الإيراد الكلي .

ب) عدد الثلاجات التي يجب أن يبيعها حتى يحقق

أكبر ربح ممكن .

الحل :

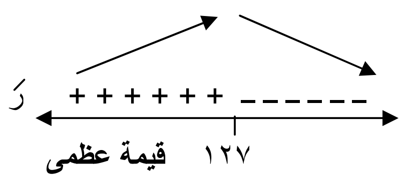
أ) د(س) = س × ٢٥٠ = ٢٥٠س

ب) رَ(س) = دَ(س) ـ كَ(س)

رَ(س) = ٢٥٠ ـ (ـ ٤ + ٢س) = ٠

٢٥٤ ـ ٢س = ٠

٢٥٤ = ٢س ⟵ س = ١٢٧



<u>مثال(٥) / خارجي</u> :

إذا كان د(س) = ٢٠٠ + ٠,٢س ـ ٠,٠١س^{٢} هو

اقتران الإيراد الناتج عن بيع س قطعة فجد أكبر إيراد .

الحل :

دَ(س) = ٠,٢ ـ ٠,٠٢س = ٠ (أكبر إيراد)

٠,٢ = ٠,٠٢س ⟵ س = ١٠

أكبر إيراد د(١٠) = ٢٠٠ + ٠,٢ × ١٠ ـ ٠,٠١ ×(١٠)^{٢}

= ٢٠٠ + ٢ ـ ١ = ٢٠١

<u>مثال(٦) / خارجي</u> :

إذا كان د(س) = ١٦س ـ س^{٢} ـ ٢٠ ،

ك(س) = ٢س^{٢} ـ ٨س + ١٥ هما إيراد وتكلفة

س من الوحدات فجد :

١) أكبر إيراد ممكن

٢) أقل تكاليف ممكنة

٣) اقتران الربح

٤) قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن

الحل :

١) دَ(س) = ١٦ ـ ٢س = ٠

١٦ = ٢س ⟵ س = ٨

أكبر إيراد = د(٨) = ١٦ × ٨ ـ (٨)^{٢} ـ ٢٠ = ٤٤

٢) كَ(س) = ٤س ـ ٨ = ٠ ⟵ ٤س = ٨ ⟵ س = ٢

أقل تكاليف = ك(٢) = ٢(٢)^{٢} ـ ٨ × (٢) + ١٥ = ٧

٣) ر(س) = د(س) ـ ك(س)

= (١٦س ـ س^{٢} ـ ٢٠) ـ (٢س^{٢} ـ ٨س + ١٥)

= ٢٤س ـ ٣س^{٢} ـ ٣٥

٤) رَ(س) = ٢٤ ـ ٦س = ٠

٢٤ = ٦س ⟵ س = ٤

رَ + + + + + + ـ ـ ـ ـ ـ ـ

٤

قيمة عظمى

<u>مثال(١) / كتاب ص١٥٠</u> :

لاحظت إحدى الشركات التي تصنع ألعاب الأطفال

أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي

ك(س) = ٣٠٠ ـ ٠,٢س + ٠,٠٠١س^{٢} دينار ، وأن

الربح الناتج من بيع س لعبة هو ر(س) = ٠,٤س دينار

جد كلاً مما يأتي :

١) اقتران التكلفة الحدية .

٢) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن .

٣) الإيراد الحدي الناتج من بيع (١٠٠٠) لعبة .

الحل :

١) كَ(س) = ـ ٠,٢ + ٠,٠٠٢س

٢) التكلفة أقل ما يمكن عندما كَ(س) = ٠

ـ ٠,٢ + ٠,٠٠٢س = ٠

٠,٢ = ٠,٠٠٢س ⟵ س = ١٠٠

٣) الإيراد الكلي = ك(س) + ر(س)

د(س) = ٣٠٠ ـ ٠,٢س + ٠,٠٠١س^{٢} + ٠,٤س

د(س) = ٣٠٠ + ٠,٢س + ٠,٠٠١س^{٢}

الإيراد الحدي = دَ(س) = ٠,٢ + ٠,٠٠٢س

دَ(١٠٠٠) = ٠,٢ + ٠,٠٠٢ × ١٠٠٠

= ٠,٢ + ٢ = ٢,٢ دينار

<u>تدريب(١) / كتاب ص١٥١</u> :

إذا كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو

د(س) = ٥٠س + ٢س^{٢} دينار ، واقتران التكلفة الكلية

ك(س) = ٣٠س + ٤س^{٢} + ٢٠٠ دينار ،

حيث س عدد الوحدات المبيعة ، فجد قيمة س التي تجعل

الربح أكبر ما يمكن .

الحل :

الربح أكبر ما يمكن ⟵ رَ(س) = ٠

رَ(س) = دَ(س) ـ كَ(س)

= (٥٠ + ٤س) ـ (٣٠ + ٨س)

= ٢٠ ـ ٤س

٢٠ ـ ٤س = ٠ ⟵ ٢٠ = ٤س ⟵ س = ٥

رَ + + + + + + + ـ ـ ـ ـ ـ ـ

٥

قيمة عظمى

<u>مثال(٢) / كتاب ص١٥١</u> :

وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالاقتران ك(س) = ٥٠٠٠ + ٦٠س + ٠,٠٠٢س^{٢} . إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ ٨٠ ديناراً ، فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

الإيراد الكلي = عدد الأجهزة × سعر الجهاز

د (س) = س × ٨٠ = ٨٠س

رَ(س) = دَ (س) ـ كَ(س)

= ٨٠ ـ (٦٠ + ٠,٠٠٤س)

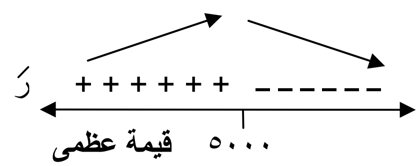
= ٢٠ ـ ٠,٠٠٤س

لإيجاد أكبر ربح ممكن :

رَ(س) = ٠

٢٠ ـ ٠,٠٠٤س = ٠

٢٠ = ٠,٠٠٤س ⟵ س = ٥٠٠٠ جهاز



<u>تدريب(٢) / كتاب ص١٥١</u> :

وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعياً تعطى بالاقتران ك(س) = ٥٠س + ٣٠٠ . إذا بيع الجهاز بمبلغ (٢٠٠ ـ س) دينار ، فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن .

الحل :

الإيراد الكلي د (س) = س × (٢٠٠ ـ س)

= ٢٠٠س ـ س^{٢}

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

رَ(س) = دَ(س) + كَ(س)

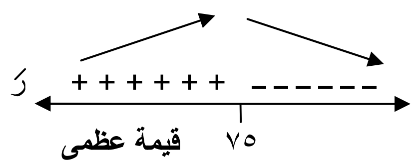
= (٢٠٠ ـ ٢س) ـ (٥٠) = ١٥٠ ـ ٢س

لإيجاد أكبر ربح ممكن :

رَ(س) = ٠

١٥٠ ـ ٢س = ٠

١٥٠ = ٢س ⟵ س = ٧٥



الأسئلة ص١٥٣

<u>سؤال(١) / كتاب ص١٥٣</u> :

إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٨٠س + س^{٢} واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٤٠ + ١٦٠س حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فجد الربح الحدي .

الحل :

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

رَ(س) = دَ (س) ـ كَ(س)

= (٨٠ + ٢س) ـ (١٦٠)

= ٢س ـ ٨٠

سؤال(٢) / كتاب ص١٥٣ :

ينتج مصنع للحواسيب س جهاز أسبوعياً . فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢} ، وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ ديناراً ، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟

الحل :

الإيراد الكلي د(س) = س × ٢٥٠ = ٢٥٠س

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

رَ(س) = دَ (س) ـ كَ(س)

= ٢٥٠ ـ (٥٠ + ٢س)

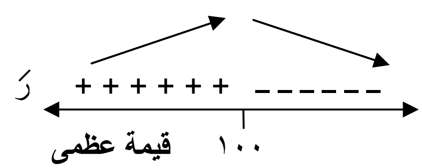
= ٢٠٠ ـ ٢س

لإيجاد أكبر ربح ممكن :

رَ(س)= ٠

٢٠٠ ـ ٢س = ٠

٢٠٠ = ٢س ⟵ س = ١٠٠



سؤال(٣) / كتاب ص١٥٣ :

إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٦٠س ـ س^{٢} دينار ، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٢٠ + ٨س دينار حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فجد الربح الحدي .

الحل :

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

رَ(س) = دَ (س) ـ كَ(س)

= (٦٠ ـ ٢س) ـ (٨) = ٥٢ ـ ٢س

سؤال(٤) / كتاب ص١٥٣ :

إذا كان د(س) = ١٦س ـ س^{٢} ـ ٢٠ دينار ، ك(س) = ٢س^{٢} ـ ٨س + ١٥ دينار ، هما إيراد س من وحدات سلعة معينة وتكلفتها ، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن .

الحل :

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

رَ(س) = دَ (س) ـ كَ(س)

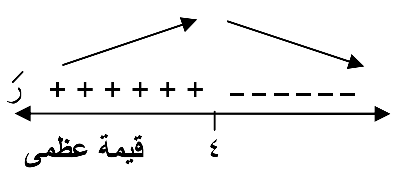
= (١٦ ـ ٢س) ـ (٤س ـ ٨) = ٢٤ ـ ٦س

لإيجاد أكبر ربح ممكن :

رَ(س)= ٠

٢٤ ـ ٦س = ٠

٢٤ = ٦س ⟵ س = ٤



سؤال(٥) / كتاب ص١٥٣ :

ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة يومياً . فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة : ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + س^{٢} ، وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار ، فجد عدد الثلاجات التي يجب أن يبيعها المصنع شهرياً لتحقيق أكبر ربح ممكن .

الحل :

الإيراد الكلي د(س) = س × ٥٠٠ = ٥٠٠س

الربح ر(س) = د (س) ـ ك(س)

رَ(س) = دَ (س) ـ كَ(س)

= ٥٠٠ ـ (٤ + ٢س)

= ٤٩٦ ـ ٢س

لإيجاد أكبر ربح ممكن :

رَ(س) = ٠

٤٩٦ ـ ٢س = ٠

٤٩٦ = ٢س ⟵ س = ٢٤٨

رَ ++++++ | ------

٢٤٨ **قيمة عظمى**

سؤال(٦) / كتاب ص١٥٣ :

يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة . بمبلغ ٩٠ ديناراً . فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة :

ك(س) = ٠,٢س^{٢} + ٧٠س + ١٠٠ دينار

فجد الربح الحدي .

الحل :

الإيراد الكلي د(س) = س × ٩٠ = ٩٠س

الربح الحدي رَ(س) = دَ(س) + كَ(س)

= ٩٠ ـ (٠,٤س + ٧٠) = ٢٠ ـ ٠,٤س

وزارة (٢٠١٩) شتوي :

لاحظ مصنع أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي ك(س) = ٠,٣س^{٢} ـ ٦٠س + ٧٠ وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هو ر(س) = ٠,٥س دينار ، جد :

١) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن .

٢) الإيراد الحدي الناتج عن بيع ١٠٠٠ لعبة .

الحل :

١) التكلفة أقل ما يمكن : كَ(س) = ٠

كَ(س) = ٠,٦س ـ ٦٠ = ٠

٠,٦س = ٦٠ ⟵ س = ١٠٠ **عدد اللعب**

رَ ------ | ++++++

١٠٠

٢) الإيراد الكلي د(س) = ك(س) + ر(س)

الإيراد الحدي دَ (س) = كَ(س) + رَ(س)

= (٠,٦س ـ ٦٠) + (٠,٥)

= ٠,٦س ـ ٥٩,٥

دَ (١٠٠٠) = $\frac{٦}{١٠}$ × ١٠٠٠ ـ ٥٩,٥

= ٦٠٠ ـ ٥٩,٥

= ٥٤٠,٥

وزارة (٢٠١٩) صيفي :

إذا كان الإيراد الكلي للمبيعات في إحدى الشركات هو د(س) = ٥٠س + س^{٢} ديناراً حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما ، فإن اقتران الإيراد الحدي الناتج من بيع س وحدة يساوي :

أ) ٥٠س + ٢س   ب) ٥٠ + س^{٢}

جـ) ٥٠س + ٢س^{٢} د) ٥٠ + ٢س

أسئلة الوحدة / كتاب ص١٥٤

سؤال(١) / كتاب ص١٥٤ :

يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٢ن^{٣} ـ ١٢ن + ٣ ، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني . جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته ٤٢ م/ث .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٦ن^{٢} ـ ١٢

٦ن^{٢} ـ ١٢ = ٤٢

٦ن^{٢} = ٥٤

ن^{٢} = ٩ ⟵ ن = ٣ أو ن = ـ ٣ ⟵ تهمل

ت(ن) = ١٢ن

ت(٣) = ١٢ × ٣ = ٣٦

سؤال(٢) / كتاب ص١٥٤ :

يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن) = م(ن ـ ١)^{٢} ، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، ن الزمن بالثواني . إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثوان تساوي ١٢ م / ث ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

ع(ن) = فَ(ن) = ٢م (ن ـ ١)

ع(٤) = ١٢

٢م (٤ ـ ١) = ١٢

٢م × ٣ = ١٢

٦ م = ١٢

م = ٢

سؤال(٤) / كتاب ص١٥٤ :

إذا كان ق(س) = س^{٢}(٦ ـ س) ، فجد :

أ) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق .

ب) القيم العظمى والصغرى للاقتران ق (إن وجدت) .

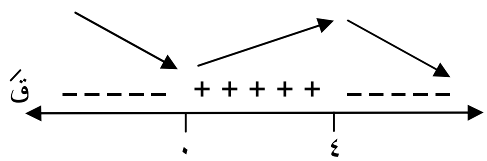
الحل :

أ) ق(س) = س^{٢}(٦ ـ س) = ٦س^{٢} ـ س^{٣}

قَ(س) = ١٢س ـ ٣س^{٢} = ٠

٣س (٤ ـ س) = ٠

س = ٠ أو س = ٤



متزايد [٠ ، ٤]

متناقص (ـ ∞ ، ٠] ، [٤ ، ∞)

ب) عند س = ٠ قيمة صغرى محلية

ق(٠) = ٠

عند س = ٤ قيمة عظمى محلية

ق(٤) = ٣٢

سؤال(٥) / كتاب ص١٥٤ :

يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار ، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة :

ك(س) = ٠.٠٣س^{٢} + ٤٠س + ٧٠ ديناراً ،

فجد الربح الحدي :

الحل :

الإيراد الكلي د(س) = س × ١٠٠ = ١٠٠ س

الربح ر(س) = د(س) ـ ك(س)

الربح الحدي رَ(س) = دَ(س) ـ كَ(س)

= ١٠٠ ـ (٠,٦س + ٤٠)

= ٦٠ ـ ٠,٦س

<u>سؤال(٧) / كتاب ص١٥٤</u> :

إذا كان ق(س) = س(٣س ـ ١)^{٢} ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١ .

الحل :

عندما س = ١ : ص$_{١}$ = ١ × (٣ × ١ ـ ١)^{٢}

= ١ × (٢)^{٢} = ٤

النقطة هي (١ ، ٤)

ميل المماس = قَ(١)

نقوم بإيجاد قَ(س) :

ق(س) = س (٣س ـ ١)^{٢}

= س(٩س^{٢} + ٦س + ١) فك القوس التربيعي

= ٩س^{٣} + ٦س^{٢} + س

قَ(س) = ٢٧س^{٢} + ١٢س + ١

قَ(١) = ٢٧ ـ ١٢ + ١ = ١٦

معادلة المماس

ص ـ ص$_{١}$ = م (س ـ س$_{١}$)

ص ـ ٤ = ١٦ (س ـ ١)

<u>سؤال(٩) / كتاب ص١٥٤</u> :

إذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢} دينار اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما ، فجد التكلفة الحدية لإنتاج ٢٠ قطعة من هذه السلعة .

الحل :

التكلفة الحدية كَ(س) = ٦س

كَ(٢٠) = ٦ × ٢٠ = ١٢٠

<u>سؤال(١٠) / كتاب ص١٥٥</u> :

إذا كان ق(س) = (٣س ـ ٤)^{٣} ، فجد قيمة س التي تجعل قَ(س) = ٣٦ .

الحل :

قَ(س) = ٣٦

٣(٣س ـ ٤)^{٢} × ٣ = ٣٦

٩(٣س ـ ٤)^{٢} = ٣٦

(٣س ـ ٤)^{٢} = ٤ نأخذ الجذر التربيعي للطرفين

٣س ـ ٤ = ٢ ⟵ ٣س = ٦ ⟵ س = ٢

٣س ـ ٤ = ـ ٢ ⟵ ٣س = ٢ ⟵ س = $\frac{٢}{٣}$

دع المقارنة .. واستمتع بالرحلة

محبكم الأستاذ : معاذ البشيش

سؤال(١١) / كتاب ص١٥٥ :

يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد ، لكل فقرة أربعة بدائل ، واحد منها فقط صحيح .

ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :

(١) إذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٢} ـ ١٢س + ١ قيمة حرجة عندما س = ٣ ، فإن قيمة أ تساوي :

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٢ د) ـ٢

(٢) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢ ـ س)^{٤} عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) يساوي ٤ ،

فإن قيمة س$_{١}$ تساوي :

أ) ـ ٣ ب) ـ٢ جـ) ٢ د) ٣

(٣) إذا كان ق(س) = س^{٢} ـ ٤س ، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عندما س تساوي :

أ) صفراً ب) ٢ جـ) ـ٤ د) ٤

(٤) فترة التزايد للاقتران ق(س) = س^{٢} ـ ٢س ـ ٢ هي :

أ) [٢ ، ٣] ب) [٠ ، ١] جـ) [٠ ، ∞) د) (ـ ∞ ، ١]

(٥) يتحرك جسيم وفق العلاقة : ف(ن) = ٦ن^{٢} ـ ن^{٣} ، حيث ف المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم

في زمن قدره ن ثانية . المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفراً هي :

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

(٦) إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٣} ـ ٣س^{٢} قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، فإن قيمة الثابت أ تساوي :

أ) ٢ ب) ـ٢ جـ) ـ٣ د) ٣

رقم السؤال	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)
الإجابة	(أ)	(د)	(ب)	(جـ)	(ب)	(أ)

" كن قائداً .. فالتاريخ لا يذكر الجنود " ^_^