

# القائد في الرياضيات

النهايات والاتصال

(الفرع الأدبي والفندقي)

للأستاذ

معاذ البشيش

الصف الثاني عشر  
للفرعين الأدبي والفندقي والسياحي  
الوحدة الأولى  
النهايات والاتصال

- ١- مفهوم النهاية .
- ٢- نظريات النهايات .
- ٣- نهاية خارج قسمة اقترانين .
- ٤- الاتصال عند نقطة .
- ٥- نظريات الاتصال .
- ٦- أمثلة متنوعة وشاملة لجميع أفكار المادة .
- ٧- حلول جميع تدريبات وأسئلة الكتاب .
- ٨- أسئلة من الدورات السابقة لإمتحان الوزارة على كل درس .

مع تحيات  
الاستاذ معاذ البشيش

مفهوم النهايةمقدمة

مثال : إذا كان لدينا الجدول التالي الذي يمثل قيم  $s$  ، وقيم  $q(s)$   
للإقتران  $q(s) = s + 1$  ، ادرس سلوك الإقتران حول  $s = 2$  :

س	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	٢	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩
ق(س)	٣,٠١	٣,٠٠١	٣,٠٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩

جهة اليمين (+)      جهة اليسار (-)

الحل :

# لاحظ أن : كلما اقتربت قيم  $s$  من العدد (٢) من جهة اليمين

فإن قيم  $q$  تقترب من العدد (٣) ، ويعبر عن ذلك بالرموز :  $q(s) \rightarrow 3$   $s \rightarrow 2^+$

# وكلما اقتربت قيم  $s$  من العدد (٢) من جهة اليسار

فإن قيم  $q$  تقترب من العدد (٣) ، ويعبر عن ذلك بالرموز :  $q(s) \rightarrow 3$   $s \rightarrow 2^-$

بما أن :  $q(s) \rightarrow 3$   $s \rightarrow 2^+$  =  $q(s) \rightarrow 3$   $s \rightarrow 2^-$  فإن  $q(s) \rightarrow 3$   $s \rightarrow 2$

سؤال:

بالاعتماد على الجدول التالي أوجد نهاية  $q(s)$  :

س	٣,٣	٣,٢	٣,١	٣	٢,٩	٢,٨	٢,٧
ق(س)	٤,٣	٤,٢	٤,١		٥,٩	٥,٨	٥,٧

الحل :

نهاية  $q(s) = 4$   $s \rightarrow 3^+$

نهاية  $q(s) = 6$   $s \rightarrow 3^-$

بما أن : نهاية  $q(s) \neq$  نهاية  $q(s)$   $s \rightarrow 3^-$   $s \rightarrow 3^+$

فإن نهاية  $q(s)$  غير موجودة .

ملاحظة :

١- تكون النهاية موجودة إذا كانت  
النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

٢- تكون النهاية غير موجودة إذا كانت  
النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار .

٣-  $s \rightarrow a$  هذا يعني أن  $s$

تقترب من العدد  $a$  ولكن  $s \neq a$

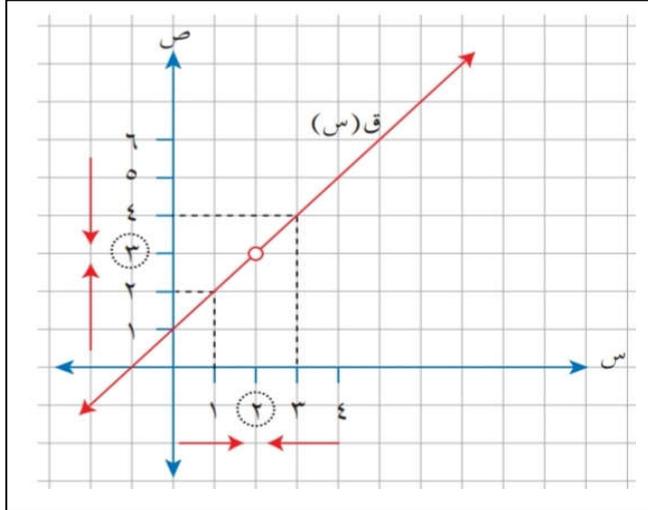
**إيجاد النهاية من خلال الرسم :**

مثال (١) / كتاب ص ١٤ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) =  $\frac{س^٢ - ٢س}{س - ٢}$  ،

جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

$$(١) ق(٢) \quad (٢) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ٢$$

$$(٣) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = -٢ \quad (٤) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ٢$$



**الحل :**

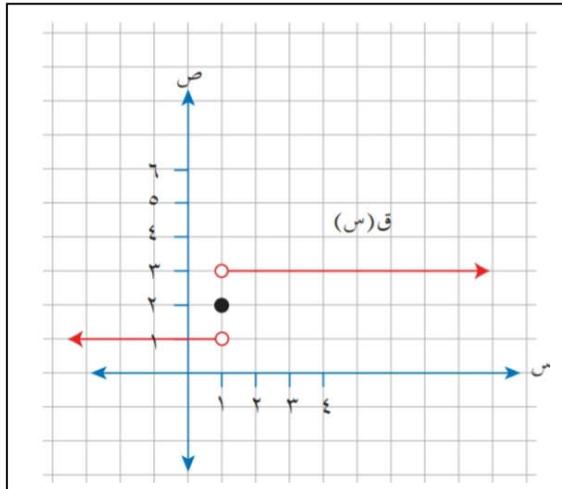
$$(١) ق(س) \text{ غير معرف عند } س = ٢ .$$

$$(٢) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ٢ = ٣$$

$$(٣) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = -٢ = ٣$$

$$(٤) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ٢ = ٣ \text{ ومنها } \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ٢ = ٣$$

مثال (٢) / كتاب ص ١٤ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران المتشعب :



$$\left. \begin{array}{l} ١ > س ، ١ \\ ١ = س ، ٢ \\ ١ < س ، ٣ \end{array} \right\} = ق(س)$$

جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

$$(١) ق(١) \quad (٢) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = -١$$

$$(٣) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ١ \quad (٤) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ١$$

**الحل :**

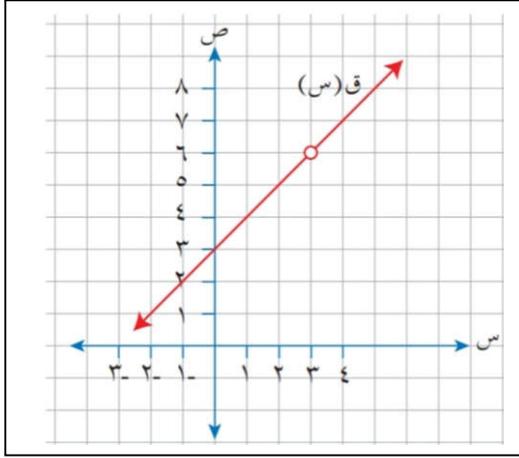
$$(١) ق(١) = ٢$$

$$(٢) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = -١ = ١ \quad (٣) \text{ نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ١ = ٣$$

$$(٤) \text{ بما أن نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ١ \neq \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س = ١$$

فإن نهاية ق(س) غير موجودة .

تدريب (١) / كتاب ص ١٦ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران :



$$ق(س) = \frac{س^2 - 9}{س - 3}$$

جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

$$(١) ق(٣) \quad (٢) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq -٣$$

$$(٣) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq +٣ \quad (٤) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٣$$

**الحل :**

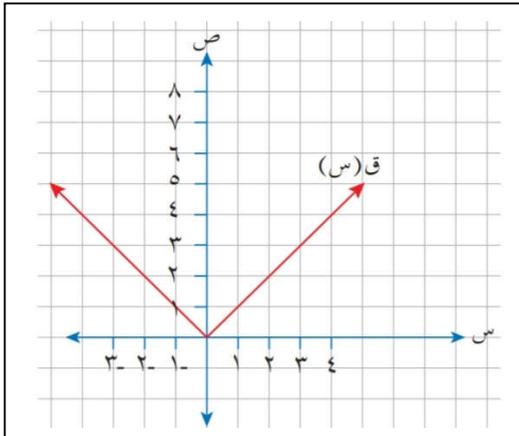
$$(١) ق(س) \text{ غير معرف عند } س = ٣ .$$

$$(٢) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq -٣ = ٦ \quad (٣) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq +٣ = ٦$$

$$(٤) \text{بما أن } \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq -٣ = ٦ \text{ و } \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq +٣ = ٦$$

$$\text{فإن } \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٣ = ٦$$

مثال (٣) / كتاب ص ١٧ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران :



$$ق(س) = \begin{cases} س - ١ , س > ٠ \\ س , س \leq ٠ \end{cases}$$

جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

$$(١) ق(٠) \quad (٢) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٢$$

$$(٣) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٠$$

**الحل :**

$$(١) ق(٠) = ٠$$

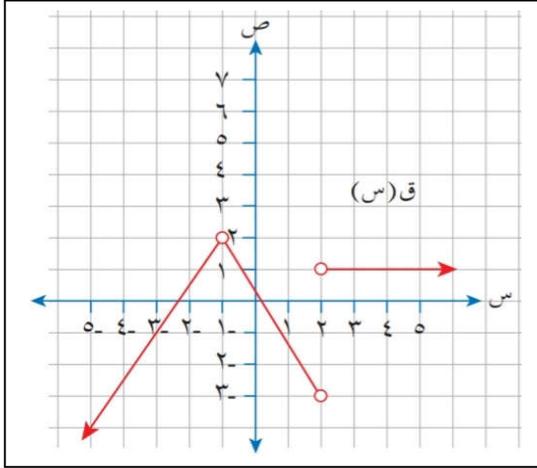
$$(٢) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٢ = ٢ , \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٢ = ٢$$

$$\text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٢ = ٢$$

$$(٣) \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٠ = ٠ , \text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٠ = ٠$$

$$\text{نهاية } ق(س) \text{ عند } س \leq ٠ = ٠$$

تدريب (٢) / كتاب ص ١٨ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(1) \text{ نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} \leq 1 \\ \text{س} < 2 \end{matrix} \quad (2) \text{ نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 2 \end{matrix}$$

$$(3) \text{ نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix}$$

**الحل :**

$$(1) \text{ نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} \leq 1 \\ \text{س} < 2 \end{matrix} = 2, \quad \text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 1 \\ \text{س} \leq 2 \end{matrix} = 2$$

$$\text{ومنه نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 1 \\ \text{س} \leq 2 \end{matrix} = 2$$

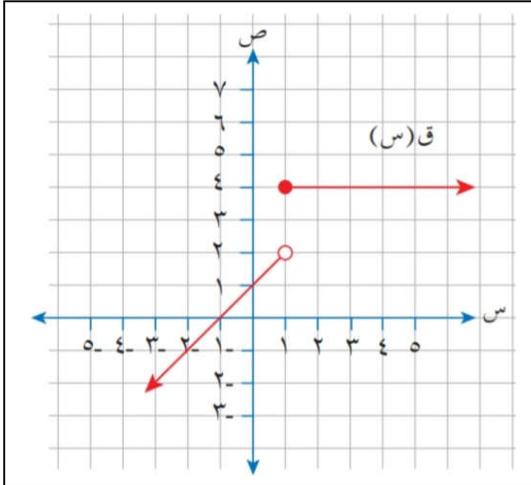
$$(2) \text{ نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 1, \quad \text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 2$$

$$\text{ومنه نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = \text{غير موجودة}$$

$$(3) \text{ نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 1, \quad \text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 1$$

$$\text{ومنه نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 1$$

مثال (٤) / كتاب ص ١٨ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد كلاً مما يأتي :



$$(1) \text{ قيمة الثابت أ ، حيث نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} \leq 1 \\ \text{س} < 2 \end{matrix} = 1$$

$$(2) \text{ قيمة الثابت ب ، حيث نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 0$$

$$(3) \text{ قيمة الثابت ج ، حيث نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} \text{ غير موجودة .}$$

**الحل :**

$$(1) \text{ بما أن نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} \leq 1 \\ \text{س} < 2 \end{matrix} = 1, \quad \text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 1 \\ \text{س} \leq 2 \end{matrix} = 1$$

$$\text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 1 \\ \text{س} \leq 2 \end{matrix} = 1$$

$$\text{فإن أ} = 2$$

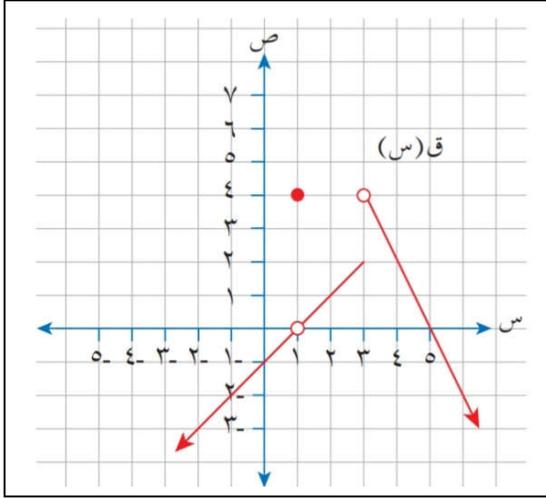
$$(2) \text{ بما أن نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 0, \quad \text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 0$$

$$\text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 2 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} = 0 \quad \text{فإن ب} = 1$$

$$(3) \text{ بما أن نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} \neq \text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix}$$

$$\text{نهايا ق(س) } \begin{matrix} \text{س} < 3 \\ \text{س} \leq 3 \end{matrix} \text{ غير موجودة فإن ج} = 1$$

تدريب (٣) / كتاب ص ١٩ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

(١) نهياً ق(س)  $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s)$

(٢) الثابت أ ، حيث نهياً ق(س) = ٠  $\lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = 0$

(٣) الثابت ب ، حيث نهياً ق(س) غير موجودة  $\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s)$

الحل :

(١) نهياً ق(س) = ١ ، نهياً ق(س) = ١  $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = 1$  ،  $\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) = 1$

نهياً ق(س) = ١  $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 1$

(٢) بما أن نهياً ق(س) = ٠ عندما  $s \rightarrow 1^-$  ،  $s \rightarrow 1^+$  ،  $s \rightarrow 1$

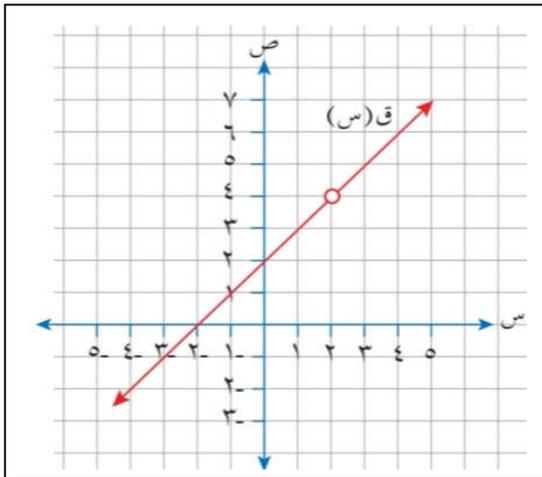
فإن قيمة أ = ١ ، ٥

(٣) بما أن نهياً ق(س)  $\neq$  نهياً ق(س) ومنه نهياً ق(س) = غير موجودة  $\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) \neq \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s)$

فإن قيمة ب = ٣

### تمارين ومسائل / ص ٢٠

سؤال (١) / كتاب ص ٢٠ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ،  $\frac{s-2}{s-2}$  ،



جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

(أ) ق(٢) (ب) نهياً ق(س)  $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s)$

(ج) ق(٣) (د) نهياً ق(س)  $\lim_{s \rightarrow 3^-} f(s)$

الحل :

(أ) ق(س) غير معرف عند  $s = 2$

(ب) نهياً ق(س) = ٤ ، نهياً ق(س) = ٤  $\lim_{s \rightarrow 2^-} f(s) = 4$  ،  $\lim_{s \rightarrow 2^+} f(s) = 4$

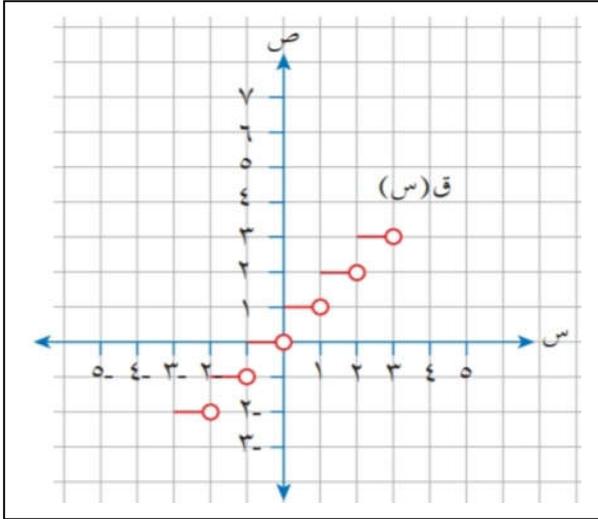
نهياً ق(س)  $\lim_{s \rightarrow 2} f(s) = 4$

(ج) ق(٣) = ٥

(د) نهياً ق(س) = ٥ ، نهياً ق(س) = ٥  $\lim_{s \rightarrow 3^-} f(s) = 5$  ،  $\lim_{s \rightarrow 3^+} f(s) = 5$

نهياً ق(س) = ٥  $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 5$

سؤال (٢) / كتاب ص ٢٠ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



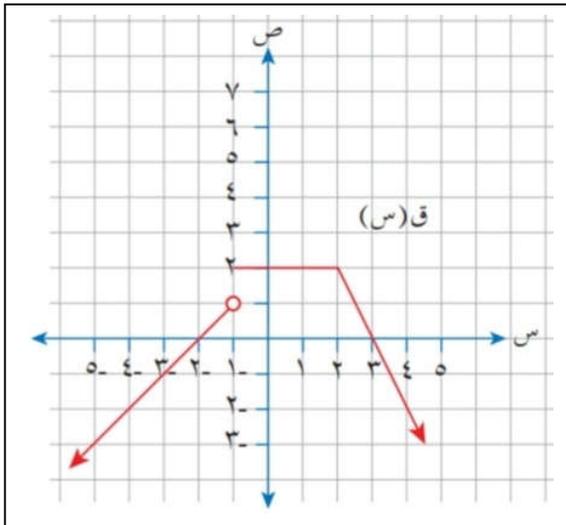
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

- (أ) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 0.5^+} C(S)$  ، (ب) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^+} C(S)$   
 (ج) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow -2^-} C(S)$  ، (د) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^-} C(S)$

الحل:

- (أ) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 0.5^+} C(S) = 1$  ، نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^+} C(S) = 1$   
 نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 0.5^+} C(S) = 1$   
 (ب) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^+} C(S) = 3$   
 (ج) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow -2^-} C(S) = 0$   
 (د) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^-} C(S) = 2$  غير موجودة

سؤال (٣) / كتاب ص ٢٠ : اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

- (أ) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^-} C(S)$  ، (ب) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 1^-} C(S)$   
 (ج) قيمة أ ، حيث نهاية ق(س) غير موجودة  $\lim_{S \rightarrow A} C(S)$   
 (د) قيم ب ، حيث نهاية ق(س) = صفراً  $\lim_{S \rightarrow B} C(S) = 0$

الحل :

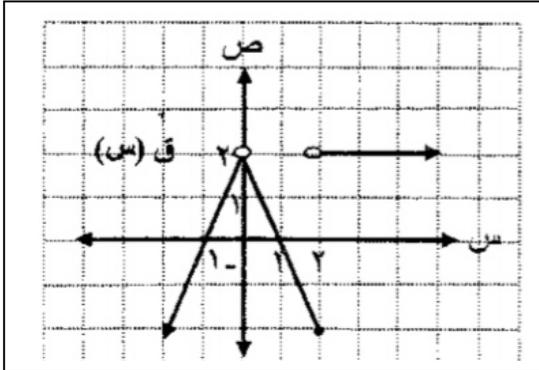
- (أ) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^-} C(S) = 2$  ، نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 1^-} C(S) = 2$   
 نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 2^-} C(S) = 2$   
 (ب) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 1^-} C(S) = 2$  ، نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 1^-} C(S) = 2$   
 نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 1^-} C(S) = 2$

(ج) نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow 1^-} C(S) \neq$  نهاية ق(س)  $\lim_{S \rightarrow -1^-} C(S)$  ومنه نهاية ق(س) غير موجودة ، أي أن  $A = -1$

(د)  $B = 2, 3$  تكون عندهم النهاية تساوي صفراً .

اسئلة الوزارة

# وزارة (٢٠١٩) شتوية : معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،

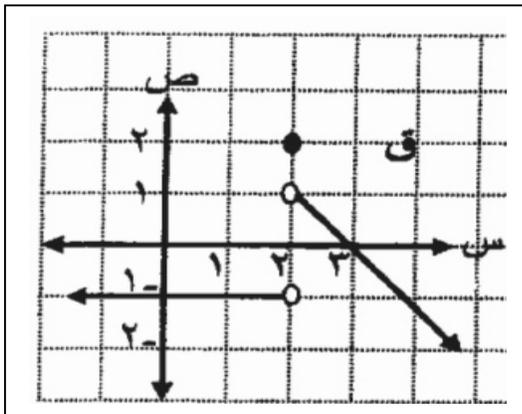


ما مجموعة قيم الثابت م ، حيث نهـا ق(س) غير موجودة ؟  
 $س < م$

**الحل :**

م = { ٢ } عندها تكون النهاية غير موجودة .

# وزارة (٢٠١٩) صيفية : معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



أجب عن الفقرتين (١) ، (٢) الآتيتين :

(١) ما نهـا ق(س) ؟  
 $س < م$

(٢) إذا كانت نهـا ق(س) = صفر ،  
 $س < م$

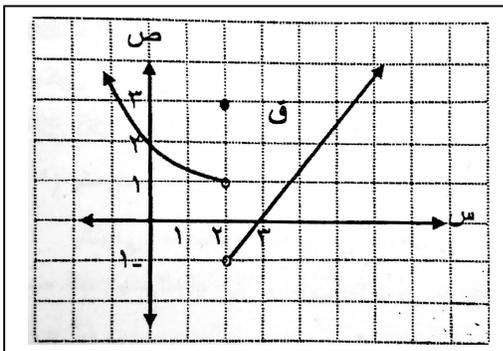
فإن قيمة الثابت م تساوي :

**الحل :**

(١) نهـا ق(س) = ١  
 $س < م$

(٢) عند م = ٣ النهاية تساوي صفراً .

# وزارة (٢٠١٨) صيفية : معتمداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ،



ما نهـا ق(س) ؟  
 $س < م$

**الحل :**

نهـا ق(س) = ١ -  
 $س < م$

نظريات النهايات**نظرية (١) :**

$$(٣) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٣ \end{matrix} (٢ - \text{س}) (١ + \text{س})$$

$$(١ + ٣)(٢ - ٣) =$$

$$٤ = (٤) \times (١) =$$

نهيا  $\begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ \text{أ} \end{matrix}$  ج = ج ، حيث ج عدد ثابت .  
نهاية الثابت = الثابت نفسه

**مثال / خارجي:** جد قيمة كل من النهايات التالية :

$$(١) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٨ \end{matrix} ٦ = ٦ \quad (٢) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٢ \end{matrix} \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

**مثال (٣) / كتاب ص ٢٦ :** جد قيمة كل مما يأتي :

$$(١) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٣ \end{matrix} ٣$$

$$(٢) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٢ \end{matrix} (٣\text{س} + ٤\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٧)$$

**الحل :**

$$(١) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٣ \end{matrix} ٣ = ٣(٣) = ٢٧$$

$$(٢) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٢ \end{matrix} (٣\text{س} + ٤\text{س}^٢ - ٥\text{س} - ٧)$$

$$= (٢) \times ٣ + ٤ \times (٢)^٢ - ٥ \times ٢ - ٧ =$$

$$٨ + ١٦ - ١٠ - ٧ =$$

$$٧ =$$

**نظرية (٢) :** (الأصل في النهايات التعويض المباشر)

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود

فإن نهيا  $\begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ \text{أ} \end{matrix}$  ق(س) = ق(أ)

# تحسب نهاية اقترانات كثيرات الحدود بالتعويض المباشر بدل س .

**مثال / خارجي:** جد قيمة كل مما يأتي :

$$(١) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} ٢\text{س} + ٥$$

$$(٢) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٢ \end{matrix} ٤\text{س} - ١$$

$$(٣) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٣ \end{matrix} (٢ - \text{س})(١ + \text{س})$$

**الحل :**

$$(١) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} ٢(١) + ٥ =$$

$$٢ + ٥ =$$

$$٧ =$$

$$٧ =$$

$$(٢) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ٢ \end{matrix} ٤\text{س} - ١ =$$

$$٤ \times (٢) - ١ =$$

$$٨ - ١ =$$

$$٧ =$$

**مثال (٤) / كتاب ص ٢٦ :**

$$\text{جد قيمة نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} (٣\text{س} + ٥\text{س} + ٧)$$

**الحل :**

$$\text{نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} (٣\text{س} + ٥\text{س} + ٧)$$

$$= ٣ \times (١) + ٥ \times (١) + ٧ =$$

$$١٥ =$$

**تدريب (١) / كتاب ص ٢٧ :**

جد قيمة كل مما يأتي :

$$(١) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} (٩ + ٤\text{س} + ٥\text{س}^٢ - ٦\text{س})$$

$$(٢) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} (٧\text{س} + ٥\text{س}^٢)(١٠ - \text{س})$$

$$(٣) \text{ نهيا } \begin{matrix} \text{س} \\ \leftarrow \\ ١ \end{matrix} (٥\text{س} + ٢\text{س}^٢)$$

حل تدريب (١) / كتاب ص ٢٧ :

$$(١) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (١ - \text{س}^٦ + ٥\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٩)$$

$$٩ + (١ -) \times ٤ + (١ -) \times ٥ - (١ -) =$$

$$١ = ٩ + ٤ - + ٥ - ١ =$$

$$(٢) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (٧\text{س}^٢ + ٥\text{س})(١٠ - \text{س})$$

$$(١٠ - ١ - + (١ -)) (١ - \times ٥ + (١ -) \times ٧) =$$

$$(١٠ -) \times (٥ - + ٧) =$$

$$٢٠ - = ١٠ - \times ٢ =$$

$$(٣) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (٥\text{س}^٢ + ٢\text{س})$$

$$٢(١ - \times ٥ + (١ -)) =$$

$$٦٤ - = ٢(٤ -) = ٢(٥ - + ١) =$$

سؤال (٤) / كتاب ص ٣١ / تمارين ومسائل:

$$\text{إذا كانت نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ١) = ٢٥$$

فما قيمة الثابت م ؟

**الحل :**

$$٢٥ = ١ + ٣ \times ٥ + (٣) \times م$$

$$٢٥ = ١ + ١٥ + ٩ \times م$$

$$١ = م \leftarrow ٩ = م ٩$$

**نظرية (٣) :** إذا كانت " أ ، ل ، ك ، ج " أعداد حقيقية

وكانت

$$\text{نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س) = ل ، \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} هـ(س) = ك$$

**فإن :**

$$(١) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ج \times ق(س) = ج \times \text{نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س)$$

$$\text{ج} \times ل =$$

$$(٢) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س) \bar{هـ}(س) =$$

$$= \text{نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س) \bar{هـ}(س)$$

$$ل \bar{ك} =$$

$$(٣) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س) \times هـ(س) =$$

$$= \text{نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س) \times هـ(س)$$

$$ل \times ك =$$

$$(٤) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ن(س) = \text{نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س)$$

$$\text{ن} = ل$$

$$(٥) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س) = \text{نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} ق(س)$$

$$\text{ن} = ل$$

سؤال (٢) / كتاب ص ٣١ / تمارين ومسائل:

جد قيمة كل مما يأتي :

$$(أ) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (٣\text{س}^٤ - ٥\text{س}^٣ + ٦\text{س} - ٧)$$

$$(٧ - (٢ -) \times ٦ + (٢ -) \times ٥ - (٢ -) \times ٣) =$$

$$٦٩ = ١٩ - ٨٨ = (٧ - ١٢ - ٤٠ + ٤٨) =$$

$$(ب) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (١ + ٢\text{س})(٢ - ٥\text{س})$$

$$(٢ - ٥ + ١)(١ + ١) =$$

$$٨ = ٤ \times ٢ =$$

$$(ج) \text{ نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (٢ + ٢\text{س})$$

$$^\circ (٢ + ١ -) =$$

$$١ = ^\circ (١) =$$

**# إيجاد قيمة الثابت بالتعويض المباشر :**

$$\text{مثال/ خارجي : إذا كانت نهـ } \left\{ \begin{array}{l} \text{س} \\ \text{أ} \end{array} \right\} (٣\text{س} + ١) = ١٥$$

فما قيمة الثابت أ ؟

$$\text{الحل : } ١٥ = أ + ٦ \leftarrow ١٥ = أ + ٢ \times ٣$$

$$\text{ومنه } أ = ٦ - ١٥ = ٩$$

ملاحظة هامة :

في اسئلة المعطيات والمطلوب :

١- يجب تجهيز المعطيات قبل البدء في إيجاد

المطلوب وذلك بجعل نها ق (س) &amp; نها ه (س)

لوحدها ( موضوع القانون ) .

٢- التعامل مع المطلوب وفق النظريات السابقة

والاستفادة من المعطيات في الوصول للحل .

مثال (١) / كتاب ص ٢٣ :

إذا علمت أن نها ق (س) = ٩ ، نها ه (س) = ٣ -

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(١) \text{ نها ق (س) + نها ه (س) }$$

$$(٢) \text{ نها ق (س) \times نها ه (س) }$$

**الحل :**

$$(١) \text{ نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$\text{نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$٩ = ٣ - + ٩ =$$

$$(٢) \text{ نها ق (س) \times نها ه (س) =}$$

$$\text{نها ق (س) \times نها ه (س) =}$$

$$٢٧ = ٣ - \times ٩ =$$

السؤال (١) / كتاب ص ٣١ / تمارين ومسائل :

إذا علمت أن نها ق (س) = ٨ ، نها ه (س) = ٢ -

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(أ) \text{ نها ق (س) + نها ه (س) }$$

**الحل :**

$$\text{نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$٢٨ = ٤ - ٣٢ = ٢ - \times ٢ + ٨ \times ٤$$

$$(ب) \text{ نها ق (س) - نها ه (س) =}$$

$$\text{الحل : نها ق (س) - نها ه (س) =}$$

$$١٢ = ٤ + ٨ = ٢ - \times ٢ - ٨ =$$

$$(ج) \text{ نها ق (س) \times نها ه (س) =}$$

$$\text{نها ق (س) \times نها ه (س) =}$$

$$١٦ = ٢ - \times ٨ =$$

$$(د) \text{ نها ق (س) =}$$

$$٤٠ = ٨ \times ٥ =$$

$$(هـ) \text{ نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$\text{نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$١٧ = ١ + ١٦ = ١ + ٨ \times ٢ =$$

$$(و) \text{ نها ق (س) - نها ه (س) =}$$

$$\text{نها ق (س) - نها ه (س) =}$$

$$٧ - ٣ \times ٣ + ٢(٢ -) =$$

$$٧ - ٩ + ٨ - =$$

$$٦ - = ٢ + ٨ - =$$

$$(ز) \text{ نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$\text{نها ق (س) + نها ه (س) =}$$

$$٤ + ٣ \times ٢ + ٢ - \times ٣ + ٨ \times ٢ =$$

$$٤ + ٦ + ٦ - + ١٦ =$$

$$٢٠ =$$

**مثال (٥) / كتاب ص ٢٧ :**

$$9 = (1 + \text{س} + \text{ق}(\text{س})) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١}$$

$$\text{فجد قيمة } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢} \text{ : } \text{ق}(\text{س}) \text{ :}$$

**الحل : ( نجهز المعطيات )**

$$9 = 1 + \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣} + \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٤}$$

$$9 = 1 + 2 + \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٥}$$

$$6 = 3 - 9 = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٦}$$

$$\text{لذا فإن : } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٧} = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٨} = 6$$

$$36 = 6 \times 6 =$$

**تدريب (٢) / كتاب ص ٢٧ :**

$$5 = (3 - \text{س} + \text{ق}(\text{س})) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٩}$$

$$\text{فجد قيمة } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٠} \text{ : } \text{ق}(\text{س}) \text{ :}$$

**الحل : ( نجهز المعطيات )**

$$5 = 3 - \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١١} + \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٢}$$

$$5 = 3 - 1 + \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٣}$$

$$9 = 4 + 5 = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٤}$$

$$\text{لذا فإن : } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٥} = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٦} = 9$$

$$81 = 9 \times 9 =$$

**سؤال (٣) / كتاب ص ٣١ :**

$$27 = (1 + \text{س} + \text{ق}(\text{س})) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٧}$$

$$\text{فجد قيمة } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٨} \text{ : } \text{ق}(\text{س}) \text{ :}$$

**الحل : ( نجهز المعطيات )**

$$27 = 1 + \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ١٩} + \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٠}$$

$$27 = 1 + 4 + \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢١}$$

$$30 = 3 - 27 = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٢}$$

$$\text{لذا فإن : } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٣} = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٤} = 30$$

$$1000 = 30 \times 33.33 =$$

**أسئلة وزارة متنوعة :****وزارة ٢٠١٨ صيفية :**

$$\text{إذا كانت } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٥} = \text{ق}(\text{س}) \text{ ، } 12 =$$

$$\text{فإن } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٦} \text{ تساوي :}$$

**الحل : ( نجهز المعطيات )**

$$12 = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٧}$$

$$\frac{12}{2} = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٨}$$

$$\text{ومنه } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٢٩} = 6$$

$$\text{لذا فإن : } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣٠} = \text{ق}(\text{س}) \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣١} = 36$$

$$36 = 6 \times 6 =$$

**وزارة ٢٠١٩ صيفية (١) :**

$$\text{إذا كانت } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣٢} = \text{ق}(\text{س}) \text{ ، } 4 = \text{ق}(\text{س}) \text{ هـ} \text{ :}$$

$$\text{فإن } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣٣} \text{ تساوي :}$$

**الحل :**

$$\underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣٤} = 2 \times \text{ق}(\text{س}) \text{ هـ} \text{ :}$$

$$8 = 4 \times 2 =$$

**وزارة ٢٠١٩ صيفية (٢) :**

$$\text{إذا كانت } \underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣٥} = (2\text{م} - 4\text{س}) \text{ ، } 16 =$$

$$\text{فإن قيمة الثابت م تساوي :}$$

**الحل :**

$$\underset{\text{س}}{\overset{\text{س}}{\llcorner}} \text{س} \text{ها} \text{ ٣٦} = (2\text{م} - 4\text{س})$$

$$\text{ومنه } 16 = 2\text{م} - 8$$

$$8 = 2\text{م} -$$

$$\frac{8}{2} = \text{م}$$

$$\text{م} = 4$$

نهاية الاقترانات المتشعبةمثال (٦) / كتاب ص ٢٨ :

$$\left. \begin{array}{l} ٥س + ١ ، ٢ > س \\ ٢س ، ٢ \leq س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

(١) ق(٢)      (٢) نهـ ق(س)

(٣) نهـ ق(س)      (٤) نهـ ق(س)

الحل : (١) ق(٢) = (٢) = ٢(٢) = ٤

(٢) نهـ ق(س) = نهـ ق(س) = (٥س + ١) = ٦ = ١ + ١ × ٥

(٣) نهـ ق(س) = نهـ ق(س) = ٢ = ٩ = ٢(٣)

(٤) لاحظ أن س = ٢ هي القيمة التي ينتشعب عندها الاقتران .

نهـ ق(س) = نهـ ق(س) = (٥س + ١) = ١١ = ١ + ٢ × ٥

نهـ ق(س) = نهـ ق(س) = ٢ = ٤ = ٢(٢)

بما أن نهـ ق(س) ≠ نهـ ق(س)

فإن نهـ ق(س) غير موجودة .

تدريب (٣) / كتاب ص ٢٩ :

$$\left. \begin{array}{l} ٢س + ١ ، ٣ \geq س \\ ٢س - ٤ ، ٣ < س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

(أ) ق(٢)      (ب) نهـ ق(س)

(ج) نهـ ق(س)      (د) نهـ ق(س)

$$\left. \begin{array}{l} ٦س + ١ ، ٣ \geq س \\ ٤س + ١ ، ٣ < س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة ،

فجد نهـ ق(س) ( إن وجدت ) .

الحل :

(أ) ق(٢) = (٢) = ١ + ٢(٢) = ٥

(ب) نهـ ق(س) = (١) = ٢ = ١ + ٢

(ج) نهـ ق(س) = (٤) = ٢ - ٤ × ٤ = ١٤

(د) عند س = ٣ ينتشعب الاقتران :

نهـ ق(س) = (٤) = ٢ - ٣ × ٤ = ١٠

نهـ ق(س) = (٣) = ١ + ٢ = ١٠

إذن نهـ ق(س) = ١٠

(٢) نهـ ق(س) = نهـ ق(س) = ١ + ٣ × ٤ = ١٣

سؤال (٥) / كتاب ص ٣١ / تمارين ومسائل:

$$\left. \begin{array}{l} ٤س + ١ ، ٥ > س \\ ٥س - ٢ ، ٥ \leq س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي :

(أ) نهـ ق(س)      (ب) نهـ ق(س)      (ج) نهـ ق(س)

الحل :

(أ) نهـ ق(س) = (١) - ٥ = ٤

(ب) نهـ ق(س) = (٤) = ١ + ٢ × ٤ = ٧

(ج) عند س = ٥ ينتشعب الاقتران :

نهـ ق(س) = (٤) = ١ + ٥ × ٤ = ٢١

نهـ ق(س) = (٥) = ٥ - ٥ = ٠

بما أن نهـ ق(س) ≠ نهـ ق(س)

فإن نهـ ق(س) غير موجودة .

سؤال / خارجي :

$$\left. \begin{array}{l} ٢س + ١ ، ٣ \neq س \\ ٦ ، ٣ = س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

(أ) ق(٣)      (ب) نهـ ق(س)

(ج) نهـ ق(س)      (د) نهـ ق(س)

حل السؤال الخارجي :

(أ) ق(٣) = ٦

(ب) نهياً ق(س) = ١ + ٩ = ١ + ٢(٣) = ١٠

(ج) نهياً ق(س) = ١ + ١٦ = ١ + ٢(٤) = ١٧

(د) نهياً ق(س) = ١ + ٤ = ١ + ٢(-٢) = ٥

(ج) نهياً ق(س) = ٤ × ٥ = ٢٠

(د) عند س = ٦ يتشعب الاقتران :

نهياً ق(س) = ٦ - ٢(٦) = ٣٠

نهياً ق(س) = ٦ × ٥ = ٣٠

إذن نهياً ق(س) = ٣٠

سؤال (٦) / كتاب ص ٣٢ / تمارين ومسائل:

إذا كان هـ (س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} + ١ ، \text{س} \neq ٣ \\ \text{س} ، \text{س} = ٨ \end{array} \right\}$

فجد قيمة كل مما يأتي :

(أ) نهياً هـ (س) = ٥ ، (ب) نهياً هـ (س) = ٣ ، (ج) هـ (٣)

الحل :

(أ) نهياً هـ (س) = ٥ = ١ + ٢(٥) = ٢٦

(ب) نهياً هـ (س) = ٣ = ١ + ٢(٣) = ١٠

(ج) هـ (٣) = ٨

سؤال / خارجي :

إذا كانت ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} - ١ ، \text{س} > ٢ \\ \text{س} ، \text{س} = ٢ \\ \text{س} + ٧ ، \text{س} < ٢ \end{array} \right\}$

فجد نهياً ق(س) :

الحل : عند س = ٢ يتشعب الاقتران :

نهياً ق(س) = ٢ + ٧ = ٩ = ٣

نهياً ق(س) = ٢ - ٤ = ١ - ٢(٢) = ٣

إذن نهياً ق(س) = ٣

سؤال (٨) / كتاب ص ٣٢ / تمارين ومسائل:

إذا كان ق(س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} + ١ ، \text{س} > ٢ \\ \text{س} ، ٢ \leq \text{س} \leq ٦ \\ \text{س} - ٦ ، \text{س} < ٦ \end{array} \right\}$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت) :

(أ) نهياً ق(س) = ٥ ، (ب) نهياً ق(س) = ٦

(ج) نهياً ق(س) = ٦ ، (د) نهياً ق(س) = ٦

الحل :

(أ) نهياً ق(س) = ٥ = ١ + ٢(٥) = ١١

(ب) عند س = ٦ يتشعب الاقتران :

نهياً ق(س) = ٦ × ٥ = ١٠

نهياً ق(س) = ٦ - ٦ = ٠ = ١ + ٢(٦) = ١٣

إذن نهياً ق(س) غير موجودة .

قاعدة : إذا كان ق اقتراناً متشعباً ، وكان الاقتران ق

يتشعب عند س = أ ، فإن نهياً ق(س) تكون

موجودة إذا كانت نهياً ق(س) = نهياً ق(س) = أ

تذكر : الإنسان معجزة لو أراد ذلك / معاذكو ٨-٨

مثال (٧) / كتاب ص ٢٩ :

إذا كان هـ (س) =  $\left. \begin{array}{l} \text{س} + ١ ، \text{س} > ٣ \\ \text{س} ، \text{س} = ٣ \\ \text{س} + ١ ، \text{س} < ٣ \end{array} \right\}$

وكانت نهياً هـ (س) موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟

حل مثال (٧) / كتاب ص ٢٩ :بما أن  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  موجودةفإن  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  هـ (س)نهي  $\lim_{s \rightarrow 3} (1 + s^2) = (1 + 3^2) = 10$  (أس) (١)ومنه :  $\lim_{s \rightarrow 3} (1 + 3 \times s) = 1 + 3^2 = 10$ 

$$1 + 3^2 = 1 + 27$$

$$1 + 3^2 = 28$$

$$3^2 = 27$$

$$9 = 3^2$$

تدريب (٤) / كتاب ص ٣٠ :(١) إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) = 0$  ،  $s > 1$  ،  
ب  $\lim_{s \rightarrow 1} (7 + s^2) = 8$  ،  $s \leq 1$  } = (س)وكانت  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} = 1$  ،  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} = 1$  موجودة

فما قيمة كل من الثابتين : أ ، ب ؟

(٢) إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 4} (5s^3) = 80$  ،  $s > 4$  ،  
 $s \leq 4$  } = (س)وكانت  $\lim_{s \rightarrow 4} \frac{1}{s} = \frac{1}{4}$  موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟**الحل :**(١) بما أن  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} = 1$  موجودةومنه  $\lim_{s \rightarrow 1} (7 + s^2) = 7 + 1^2 = 8$ 

$$16 = 7 + 9$$

$$9 = 3^2$$

$$3 = 3$$

أيضاً  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} = 1$  موجودةومنه  $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s} = 1$  موجودة (س)

$$1 \times 1 = 1 + 7 = 8$$

$$3 - 1 = 2 = 8$$

(٢) بما أن  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  موجودةفإن  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  هـ (س) =  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  (س)

$$3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27}$$

$$3 = 3$$

سؤال (٧) / كتاب ص ٣٢ / تمارين ومسائل:إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 2} (s) = 2$  ،  
 $\lim_{s \rightarrow 2} (4 + s) = 6$  ،  $s > 2$  ،  
 $\lim_{s \rightarrow 2} (5s^2 + 1) = 21$  ،  $s \leq 2$  } = (س)وكانت  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$  موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟**الحل :** بما أن  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$  موجودةفإن  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$  هـ (س) =  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$  (س)نهي  $\lim_{s \rightarrow 2} (5s^2 + 1) = (5 \times 2^2 + 1) = 21$  (أس) (٤)

$$4 + 2 \times 1 = 6 = 5 \times 2 + 1$$

$$4 + 1 = 5 + 2$$

$$5 - 1 = 4 - 2$$

$$4 = 4$$

سؤال (٩) / كتاب ص ٣٢ / تمارين ومسائل:إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 3} (s^3 - 1) = 26$  ،  $s > 3$  ،  
 $\lim_{s \rightarrow 3} (10) = 10$  ،  $s \leq 3$  } = (س)وكانت  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  موجودة ، فما قيمة الثابت أ ؟**الحل :** بما أن  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  موجودةفإن  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  هـ (س) =  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{s} = \frac{1}{3}$  (س)

$$10 - (2) \times 3 = 4$$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 - 6 = 10$$

$$4 = 4$$

أسئلة وزارة متنوعة :

## # وزارة (٢٠١١) صيفية :

$$\left. \begin{array}{l} ٧ ، س > ٠ \\ ٥ ، س = ٠ \\ ٣ ، س < ٠ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فجد نهياً ق(س) :

الحل : عند س = ٠ يتشعب الاقتران :

$$\text{نهياً ق(س)} = ٣$$

$$\text{نهياً ق(س)} = ٧$$

إذن نهياً ق(س) غير موجودة .

## # وزارة (٢٠١٢) صيفية :

$$\left. \begin{array}{l} ٣ ، س \geq ٢ \\ ٢ ، س < ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكانت نهياً ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت م ؟

الحل :

بما أن نهياً ق(س) موجودة

$$\text{فإن نهياً ق(س)} = \text{نهياً ق(س)}$$

$$٢ = م (٢)$$

$$٨ = م ٢$$

$$٤ = م$$

## # وزارة (٢٠١٢) شتوية :

$$\left. \begin{array}{l} ٥ - ٢ ، س < ٥ \\ ٢٠ ، س = ٥ \\ ٥ + ٨ ، س > ٥ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكانت نهياً ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت م ؟

الحل :

بما أن نهياً ق(س) موجودة

$$\text{فإن نهياً ق(س)} = \text{نهياً ق(س)}$$

$$\text{نهياً ق(س)} = ٥ - ٢ = ٣$$

$$٥ + ٨ = ٥ - ٢ (٥)$$

$$٥ + ٤٠ = ٥ - م ٢٥$$

$$٥٠ = م ٢٥$$

$$٢ = م$$

## # وزارة (٢٠١٩) صيفية :

$$\left. \begin{array}{l} ٢ ، س \geq ٥ \\ ٣ - ، س < ٥ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فإن نهياً ق(س) تساوي :

الحل :

$$\text{نهياً ق(س)} = ٢$$

" المركب الذي يقوده رُبان خائف

لن يصل الى وجهته " . / معاذكو ٨\_٨

نهاية خارج قسمة اقترانينمقدمة

لإيجاد نهاية قسمة اقترانين يتم

التعويض المباشر وهناك ثلاث حالات :

(١) الحالة الأولى :

إذا كان ناتج التعويض المباشر عدد تكون

النهاية ذلك العدد .

مثال / خارجي : جد قيمة كل مما يأتي :

$$(١) \text{نهاية} \frac{٥ - ٢س}{١ + س} \text{س} \leftarrow ٣$$

الحل :

$$\frac{٥ - ٢(٣)}{١ + ٣} \text{نهاية} \frac{٥ - ٢س}{١ + س} \text{س} \leftarrow ٣$$

$$١ = \frac{٤}{٤} = \frac{٥ - ٩}{٤} =$$

$$(٢) \text{نهاية} \frac{١ - س}{٤ - ٢س} \text{س} \leftarrow ١$$

الحل :

$$٠ = \frac{٠}{٣ - ٤} = \frac{١ - ١}{٤ - ٢(١)} = \frac{١ - س}{٤ - ٢س} \text{س} \leftarrow ١$$

⬅ لاحظ أن :  $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$

$$(٣) \text{نهاية} \frac{٣ + ٤س - ٢س}{٢س} \text{س} \leftarrow ٦$$

الحل :

$$\frac{٣ + ٢ \times ٤ - ٢(٦)}{٢ \times ٦} = \frac{٣ + ٤س - ٢س}{٢س} \text{س} \leftarrow ٦$$

$$\frac{١ - ٤}{١٢} = \frac{٣ + ٤س - ٢س}{١٢} = \frac{٣ + ٨ - ٤}{١٢} =$$

(٢) الحالة الثانية :

إذا كان ناتج التعويض  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

تكون النهاية غير موجودة .

مثال / خارجي : جد قيمة كل مما يأتي :

$$(١) \text{نهاية} \frac{٣ - ٢س}{١ - س} \text{س} \leftarrow ١$$

الحل :

$$\frac{٣ - ٢(١)}{١ - ١} = \frac{٣ - ٢س}{١ - س} \text{س} \leftarrow ١$$

$$\text{النهاية غير موجودة} \quad \frac{٢ - ١}{٠} = \frac{٣ - ١}{٠} =$$

$$(٢) \text{نهاية} \frac{٣ + ٢س}{٤ - ٢س} \text{س} \leftarrow ٢$$

الحل :

$$\text{النهاية غير موجودة} \quad \frac{٧}{٠} = \frac{٣ + ٢(٢)}{٤ - ٢ \times ٢} =$$

$$(٣) \text{نهاية} \frac{١}{٢(٠)} = \frac{١}{٠} = \frac{١}{٢س} \text{س} \leftarrow ٠$$

النهاية غير موجودة

مثال (١) / كتاب ص ٣٣ :

إذا علمت أن نهاية  $\frac{١}{١ - س} ق(س) = ٦$  ،

نهاية  $\frac{١}{١ - س} هـ(س) = ٢$  ، فجد قيمة كل مما يأتي :

$$(١) \text{نهاية} \frac{ق(س)}{هـ(س)} \text{س} \leftarrow ١$$

$$(٢) \text{نهاية} \frac{ق(س) + ٣س}{هـ(س) + ٢} \text{س} \leftarrow ١$$

حل مثال (١) / كتاب ص ٣٣ :

$$(١) \frac{\text{نهايا ق(س)}}{\text{س} < ١} = \frac{\text{نهايا هـ(س)}}{\text{س} < ١}$$

$$= \frac{\text{نهايا ق(س)}}{\text{س} < ١} = \frac{٦}{٢ - ٣} = \frac{\text{نهايا هـ(س)}}{\text{س} < ١} = ٣$$

$$(٢) \frac{\text{نهايا ق(س)} + ٣}{\text{س} < ١} = \frac{\text{نهايا هـ(س)} + ٢}{\text{س} < ١}$$

$$(٣) \frac{\text{نهايا س} + ٣}{\text{س} < ٢} = \frac{\text{نهايا س} + ٢}{\text{س} < ٢} = \frac{٣ + ٢}{٤ - ٢} = \frac{٥}{٢}$$

$$\frac{\text{نهايا غير موجودة}}{٥} =$$

$$(٤) \frac{\text{نهايا س} - ١}{\text{س} < ٣} = \frac{\text{نهايا س} - ٣}{\text{س} < ٣} = \frac{١ - ٣}{٣ + ٣} = \frac{-٢}{٦}$$

$$\frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣} =$$

سؤال (١) / كتاب ص ٣٩ :

إذا كانت نهايا ق(س) = ٣ ، نهايا هـ(س) = ٩ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(أ) \frac{\text{نهايا ق(س)}}{\text{س} < ٢} = \frac{\text{نهايا هـ(س)}}{\text{س} < ٢}$$

$$\frac{\text{نهايا ق(س)}}{\text{س} < ٢} = \frac{\text{نهايا هـ(س)}}{\text{س} < ٢}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٣}{٩} = \frac{\text{نهايا هـ(س)}}{\text{س} < ٢} =$$

$$(ب) \frac{\text{نهايا هـ(س)} + ١}{\text{س} < ٢} = \frac{\text{نهايا ق(س)} + ٥}{\text{س} < ٢}$$

$$\frac{\text{نهايا هـ(س)} + ١}{\text{س} < ٢} = \frac{\text{نهايا ق(س)} + ٥}{\text{س} < ٢}$$

$$= \frac{\text{نهايا ق(س)} + ٥}{\text{س} < ٢} = \frac{\text{نهايا س} - ٥}{\text{س} < ٢}$$

$$\frac{١٠}{٥ - ٢ + ٣} = \frac{١ + ٩}{٥ - ٢ + ٣} =$$

النهايا غير موجودة

مثال (٢) / كتاب ص ٣٤ :

جد قيمة النهايا في كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(١) \frac{\text{نهايا س} + ١}{\text{س} < ٢} = \frac{٥}{٥} = \frac{١ + ٢}{٣ + ٣} = ١$$

$$(٢) \frac{\text{نهايا س} - ٥}{\text{س} < ٥} = \frac{٥ - ٥}{١٥ + ٥} = \frac{٥ - ٥}{٢٠} = ٠$$

$$(٣) \frac{\text{نهايا س} - ١}{\text{س} < ١} = \frac{٥}{١ - ٣} = \frac{\text{نهايا غير موجودة}}{٠}$$

تدريب (١) / كتاب ص ٣٥ :

جد قيمة النهايا لكل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(١) \frac{\text{نهايا س} - ٢}{\text{س} < ١} = \frac{٢٥ - ٢(١)}{٥ + ١} = \frac{٢٤ - ٢}{٦} = \frac{٢٢}{٦} = ٤$$

$$(٢) \frac{\text{نهايا س} - ٤}{\text{س} < ٢} = \frac{٤ - ٢ \times ٢}{٣ + ٢} = \frac{٤ - ٤}{٥} = ٠$$

## وزارة (٢٠١٨) شتوية :

جد قيمة كل مما يأتي :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{2-s} + \frac{\sqrt{s^3 + 1 + s}}{s-7}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{2-s} + \frac{5 \times 2 + \sqrt{1 + 5 \times 3}}{s-7} =$$

$$\frac{3}{3} + \frac{10 + \sqrt{16}}{2} =$$

$$1 + \frac{14}{2} = 1 + \frac{10 + 4}{2} =$$

$$6 = 1 + 7 =$$

## (٣) الحالة الثالثة :

إذا كان ناتج التعويض  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ 

تعد هذه القيمة غير معينة ، لذا يكتب الاقتران على صورة مكافئة باستخدام إحدى الطرائق الآتية :

## ١- التحليل إلى العوامل :

تتضمن هذه الطريقة تحليل البسط أو تحليل المقام إلى العوامل الأولية باستخدام :

$$(١) \text{ الفرق بين مربعين : } s^2 - a^2 = (s+a)(s-a)$$

(٢) إخراج العامل المشترك وتستخدم

إذا لم يوجد في كثير الحدود حد ثابت .

(٣) تحليل العبارة التربيعية باستخدام الأقواس .

(٤) الفرق بين مكعبين :

$$s^3 - a^3 = (s-a)(s^2 + sa + a^2)$$

(٥) مجموع مكعبين :

$$s^3 + a^3 = (s+a)(s^2 - sa + a^2)$$

## أمثلة على التحليل :

## مثال / خارجي :

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي :

$$(١) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 9}{s - 3}$$

الحل :

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 9}{s - 3} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s+3)(s-3)}{s-3}$$

$$6 = 3 + 3 =$$

$$(٢) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 - 2s}{s^3}$$

الحل :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 - 2s}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s-2)}{s^3}$$

$$\frac{2-0}{3} = \frac{2-0}{3} =$$

$$(٣) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 2s - 2}{s - 2}$$

الحل :

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s-2)(s+1)}{s-2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s-2}{s-2} = (1+1) = 2 = 3 - 1 =$$

$$(٤) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 - 8}{s - 2}$$

الحل :

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s-2)(s^2 + 2s + 4)}{s-2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 2} (s^2 + 2s + 4) = (4 + 4 + 4) = 12 =$$

$$12 = (4 + 4 + 4) \times 1 =$$

الحل :

$$(1) \text{ نهـ } \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س - ٢} =$$

$$= \frac{(س+٣)(س+٢)}{(س-٣)(س-٢)}$$

$$= \frac{(س+٢)}{(س-٣)}$$

$$= \frac{١}{٦} = \frac{١-}{٦-} = \frac{٢+٣-}{٣-٣-} =$$

$$(2) \text{ نهـ } \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} =$$

$$= \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـ } \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س - ٢} =$$

$$= (٢) + ٢ \times ٢ + ٤ = ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$$

$$(5) \text{ نهـ } \frac{س^٣ + ٨}{س - ٢} =$$

الحل :

$$= \frac{(س+٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$= \frac{(س^٢ - ٢س + ٤)}{س - ٢}$$

$$= \frac{١٢}{٤ -}$$

$$(6) \text{ نهـ } \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٥} =$$

$$= \frac{(س-٤)(س+٤)}{س - ٥}$$

$$= \frac{(س+٥)(س+٣)}{س - ٥}$$

$$= \text{نهـ } \frac{س + ٣ + ٥}{س - ٥} = ٨$$

تدريب (٣) / كتاب ص ٣٥ :

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$(1) \text{ نهـ } \frac{س^٢ + ٣س}{س + ٣} =$$

$$= \frac{(س+٣)(س)}{س+٣}$$

$$= \text{نهـ } \frac{س}{س} = ٣ -$$

مثال (٣) / كتاب ص ٣٥ :

$$\text{جد نهـ } \frac{س^٥ - ١٠}{س - ٢} =$$

الحل :

$$= \frac{س(س^٤ - ١٠)}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـ } \frac{٥}{س} = ١٠ = ٢ \times ٥$$

مثال (٤) / كتاب ص ٣٥ :

جد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \text{ نهـ } \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س - ٢} =$$

$$(2) \text{ نهـ } \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} =$$

## ٢- الضرب بالمرافق :

المقدار	المرافق	حاصل الضرب
س - أ	س + أ	س <sup>٢</sup> - أ <sup>٢</sup>
س - أ	س + √س	س - أ <sup>٢</sup>
س - √ص	س + √ص	س - ص
س - √ص	س - √ص	س - ص

## أمثلة :

س - ٤ مرافقه هو س + ٤ حاصل الضرب = س<sup>٢</sup> - ١٦

س - ٢ مرافقه هو س + √س حاصل الضرب = س - ٤

س - √٣ مرافقه هو س - √٣ حاصل الضرب = س - ٣

## ملاحظات :

- يتم ضرب كل من البسط والمقام بالمرافق دائماً .

- يصبح المقدار المضروب في مرافقه يساوي

( مربع الأول - مربع الثاني )

والمقدار الآخر سواء في البسط أو في المقام يبقى كما هو .

## مثال :

$$\frac{\sqrt{s} + 2}{\sqrt{s} + 2} \times \frac{\sqrt{s} - 2}{s - 4} = \frac{s - 4}{(\sqrt{s} + 2)(s - 4)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 2s}{s - 10} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{2 - 10} = \frac{0}{-8} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s(s-2)}{s(s-2) \cdot 5} = \frac{s(s-2)}{s(s-2) \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s}{s} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 + 27}{s + 3} = \frac{3^2 + 27}{3 + 3} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s(s+27)}{s+3} = \frac{3(3+27)}{3+3} = \frac{84}{6} = 14$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s(s+3)(s-2)(s+9)}{s+3} = \frac{3(3+3)(3-2)(3+9)}{3+3} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 12}{6} = 36$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s(s-2)(s+9)}{s+3} = \frac{3(3-2)(3+9)}{3+3} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 12}{6} = 6$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-3)(s-2)(s+9)}{s+3} = \frac{(3-3)(3-2)(3+9)}{3+3} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 12}{6} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-3)(s-2)(s+9)}{s+3} = \frac{(3-3)(3-2)(3+9)}{3+3} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 12}{6} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 9} \frac{s^2 - 6s + 9}{s - 9} = \frac{9^2 - 6 \cdot 9 + 9}{9 - 9} = \frac{0}{0} = \frac{(s-3)(s-3)}{s-9} = \frac{(s-3)(s-3)}{(s-3)(s+3)} = \frac{s-3}{s+3} = \frac{9-3}{9+3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-3)(s-3)}{(s-3)(s+3)} = \frac{s-3}{s+3} = \frac{3-3}{3+3} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-3)(s-3)}{(s+3)} = \frac{(3-3)(3-3)}{3+3} = \frac{0 \cdot 0}{6} = 0$$

لا تتسلق الجبال ليراك العالم  
تسلقها لترى أنت العالم  
محبيكم الأستاذ : معاذ البشير

## مثال / خارجي:

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي :

$$١- \text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 9} \frac{\sqrt{3-s}}{9-s} = \frac{0}{0}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 9} \frac{\sqrt{3-s}}{9-s} \times \frac{\sqrt{3+s}}{\sqrt{3+s}} = \frac{\sqrt{3-s}\sqrt{3+s}}{9-s}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 9} \frac{9-s}{(3+s)(9-s)} = \frac{9-s}{(3+s)(9-s)}$$

$$= \frac{1}{6} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{3+9} = \frac{1}{12}$$

$$٢- \text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 7} \frac{\sqrt{9+s}-4}{7-s} = \frac{0}{0}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 7} \frac{\sqrt{9+s}-4}{7-s} \times \frac{\sqrt{9+s}+4}{\sqrt{9+s}+4} = \frac{(\sqrt{9+s}-4)(\sqrt{9+s}+4)}{(7-s)(\sqrt{9+s}+4)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 7} \frac{(9+s)-16}{(9+s+4)(7-s)} = \frac{(9+s)-16}{(9+s+4)(7-s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 7} \frac{9-s-16}{(9+s+4)(7-s)} = \frac{9-s-16}{(9+s+4)(7-s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 7} \frac{1-s}{(9+s+4)(7-s)} = \frac{1-s}{(9+s+4)(7-s)}$$

$$= \frac{1-7}{8} = \frac{1-7}{4+4} = \frac{1-7}{9+7+4} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$٣- \text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-2s} \cdot 3}{2-s} = \frac{0}{0}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-2s} \cdot 3}{2-s} \times \frac{\sqrt{6-2s} \cdot 3}{\sqrt{6-2s} \cdot 3} = \frac{6-2s}{2-s}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{36-(2s)9}{(6+2s)3(2-s)} = \frac{36-(2s)9}{(6+2s)3(2-s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{36-18s}{(6+2s)3(2-s)} = \frac{36-18s}{(6+2s)3(2-s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{18(2-s)}{(6+2s)3(2-s)} = \frac{18(2-s)}{(6+2s)3(2-s)}$$

$$= \frac{3}{2} = \frac{18}{12} = \frac{18}{6+6} = \frac{18}{6+2 \times 2} = \frac{18}{6+4} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$٤) \text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-2s}-4}{5+s-2s} = \frac{0}{0}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-2s}-4}{5+s-2s} \times \frac{\sqrt{9-2s}+4}{\sqrt{9-2s}+4} = \frac{(\sqrt{9-2s}-4)(\sqrt{9-2s}+4)}{(5+s-2s)(\sqrt{9-2s}+4)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 5} \frac{(9-2s)-16}{(9-2s+4)(5+s-2s)} = \frac{(9-2s)-16}{(9-2s+4)(5+s-2s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 5} \frac{9+2s-16}{(9-2s+4)(5+s-2s)} = \frac{9+2s-16}{(9-2s+4)(5+s-2s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 5} \frac{2s-25}{(9-2s+4)(5+s-2s)} = \frac{2s-25}{(9-2s+4)(5+s-2s)}$$

$$\text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 5} \frac{1-(s-5)}{(9-2s+4)(5+s-2s)} = \frac{1-(s-5)}{(9-2s+4)(5+s-2s)}$$

$$= \frac{(5+5)1-}{(4+4) \times (1-5)} = \frac{10-5}{(4+4) \times (1-5)} = \frac{5}{16} = \frac{10}{32} = \frac{10}{8 \times 4} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{16} = \frac{10}{32} = \frac{10}{8 \times 4} = \frac{5}{16}$$

$$٥) \text{نهاية} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-s}}{2-3+s} = \frac{0}{0}$$

# هنا الضرب بمرافق البسط ومرافق المقام .

$$= \frac{\cancel{s}^2 (2 + \sqrt{4 + \cancel{s}^2})}{\cancel{s}^2} \text{ نهيا } s < 0$$

$$= \frac{2 + \sqrt{4 + 2}}{2 + \sqrt{4 + 2}} = 2 + 2 = 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

**مثال (٥) / كتاب ص ٣٧ :**

$$\text{جد نهيا } s < 1 \text{ : ناتج التعويض } \frac{1-s}{1-s}$$

$$= \frac{1-s}{1-s} \times \frac{1-s}{1+s} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{\cancel{s}^1}{(1+s)(1-s)} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

**تدريب (٣) / كتاب ص ٣٧ :**

جد قيمة كل مما يأتي ( إن وجدت ) :

$$(1) \text{ نهيا } s < 5 \text{ : } \frac{15-s^3}{5-20+s}$$

$$= \frac{5 + \sqrt{20 + s}}{5 + \sqrt{20 + s}} \times \frac{15-s^3}{5-20+s} \text{ نهيا } s < 5$$

$$= \frac{(5 + \sqrt{20 + s})(15-s^3)}{25-20+s} \text{ نهيا } s < 5$$

$$= \frac{(5 + \sqrt{20 + s})(\cancel{s}^3 - 5)}{\cancel{s}^3 - 5} \text{ نهيا } s < 5$$

$$= 3 = (5 + \sqrt{20 + 5})^3 = (5 + \sqrt{25})^3$$

$$= 30 = 10 \times 3 = (5 + 5) \times 3$$

**تابع / (٥) :**

$$= \frac{2 + \sqrt{3 + s}}{2 + \sqrt{3 + s}} \times \frac{1 + \sqrt{s}}{1 + \sqrt{s}} \times \frac{1 - \sqrt{s}}{2 - 3 + \sqrt{s}} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{3 + s})(1 - \sqrt{s})}{(1 + \sqrt{s})(4 - 3 + \sqrt{s})} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{3 + s})(\cancel{s}^1 - \sqrt{s})}{(1 + \sqrt{s})(1 - \sqrt{s})} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{2 + \sqrt{4}}{1 + 1} = \frac{2 + \sqrt{3 + 1}}{1 + 1}$$

$$= 2 = \frac{4}{2} = \frac{2 + 2}{2}$$

$$(6) \text{ نهيا } s < 1 \text{ : } \frac{\cancel{s}^2 - \sqrt{s} - 2}{1 - s}$$

$$= \frac{\sqrt{s} + \sqrt{s} - 2}{\sqrt{s} + \sqrt{s} - 2} \times \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s} - 2}{1 - s} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{\sqrt{s} - \sqrt{s} - 2}{(1 - s)(\sqrt{s} + \sqrt{s} - 2)} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{2 - 2}{(1 - s)(\sqrt{s} + \sqrt{s} - 2)} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= \frac{2(1 - s)}{(1 - s)(\sqrt{s} + \sqrt{s} - 2)} \text{ نهيا } s < 1$$

$$= 1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{1 + 1 - 2}$$

$$(7) \text{ نهيا } s < 0 \text{ : } \frac{s^2}{2 - 4 + \sqrt{s}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{4 + \sqrt{s}}}{2 + \sqrt{4 + \sqrt{s}}} \times \frac{s^2}{2 - 4 + \sqrt{s}} \text{ نهيا } s < 0$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{4 + \sqrt{s}})^2}{\sqrt{s} - 4 + 4} \text{ نهيا } s < 0$$

## مثال / خارجي :

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow 3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{s \times 1 - 1 \times 3}{s^3} = \frac{3 - 3}{27} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} \frac{1}{3-s} \times \frac{1-s}{s^3} = \frac{1-s}{s^3(3-s)} = \frac{1-s}{s^3(3-s)}$$

$$\frac{1-s}{9} = \frac{1-s}{3 \times 3}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 2} \left( \frac{10}{s} - 5 \right) = \frac{10}{2} - 5 = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{10 \times 1 - 5 \times s}{s \times 1} = \frac{10 - 5s}{s} = \frac{10 - 5s}{s}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s-2} \times \frac{10-s}{s} = \frac{10-s}{s(s-2)} = \frac{10-s}{s(s-2)}$$

$$\frac{10-5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s+2+2}{s+2+2} \times \frac{s+2-2}{s-2} = \frac{s+2+2}{s+2+2} \times \frac{s-2}{s-2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s+2+2}{(s+2+2)(s-2)} = \frac{s+2+2}{(s+2+2)(s-2)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s-2}{(s+2+2)(s-2)} = \frac{s-2}{(s+2+2)(s-2)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2+2+2}$$

## ٣ - توحيد المقامات :

$$\frac{a \times d + b \times c}{b \times d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

مثال :

$$(1) \frac{s \times 4 + 2 \times 3}{s^2} = \frac{4}{s} + \frac{3}{s}$$

$$\frac{s \times 4 + 6}{s^2} =$$

$$(2) \frac{s^3 - (1+s)^3}{(1+s)s} = \frac{4}{1+s} - \frac{3}{s}$$

$$\frac{s^3 - 1 - 3s^2 - 3s - 1}{(1+s)s} = \frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 2}{(1+s)s}$$

$$\frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 2}{(1+s)s} = \frac{s^3 - 3s^2 - 3s - 2}{(1+s)s}$$

ملاحظة :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

مثال :

$$\frac{1+s}{2} \times \frac{3}{s} = \frac{3(1+s)}{2s}$$

ملاحظة : ( مبدأ تصفير البسط )

في الاقتران الكسري إذا كانت النهاية موجودة وكان المقام = صفر فإن البسط = صفر

$$٥ \text{ إذا علمت أن نهـ } \frac{٥س^٢ - ٥س}{٢س - ٢}$$

موجودة فأوجد قيمة أ ؟

الحل : ( مبدأ تصفير البسط )

$$٥س^٢ - ٥س = ٠ \text{ عند } ٢ < \text{س}$$

$$٠ = ٢(٢) - ٥(٢) = ٤ - ١٠$$

$$١٠ = ٤ - ٠ \text{ ← } ٠ = ١٠ - ٤$$

$$\frac{٥}{٢} = \frac{١٠}{٤} = أ$$

مثال (٦) / كتاب ص ٣٨ :

$$\frac{٠}{٠} = \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢س}}{٤س - ٢س}$$

$$\frac{١س - ٢س}{٢س} = \frac{١ - ٢}{٤س - ٢س}$$

$$\frac{١}{٢(٢س - ٢س)} \times \frac{١ - ٢}{٢س} = \frac{١ - ٢}{٢(٢س - ٢س)}$$

$$\frac{١ - ٢}{٨} = \frac{١}{٢} \times \frac{١ - ٢}{٤} =$$

$$\frac{٠}{٠} = \frac{١٢ - ٣س}{\frac{١}{٢س} - \frac{٤}{٢س}} \text{ نهـ } \frac{١٢ - ٣س}{٤س}$$

$$\frac{١٢ - ٣س}{\frac{١ - ٤س}{٢س}} = \frac{١٢ - ٣س}{٢س} \times \frac{٢س}{١ - ٤س} = \frac{١٢ - ٣س}{١ - ٤س}$$

$$\frac{٣س}{٢س - ٤س} \times \frac{١٢ - ٣س}{٤س} = \frac{٣(١٢ - ٣س)}{٢(٢س - ٤س)}$$

$$\frac{٣س}{٢س - ٤س} \times \frac{١ - ٤س}{٢س} = \frac{٣(١ - ٤س)}{٢(٢س - ٤س)}$$

$$٤٨ - ٣٦س = ٣(٤س - ٢س) = \frac{٣(٤س - ٢س)}{٤}$$

$$\frac{٠}{٠} = \frac{\frac{٤}{٦ + س} + \frac{٢}{٣ - س}}{س} \text{ نهـ } \frac{٤(٣ - س) + ٢(٦ + س)}{س(٦ + س)(٣ - س)}$$

$$\frac{١٢ - ٤س + ١٢ + ٢س}{س(٦ + س)(٣ - س)} = \frac{٢٤ - ٢س}{س(٦ + س)(٣ - س)}$$

$$\frac{١}{س} \times \frac{٢٤ - ٢س}{(٦ + س)(٣ - س)} = \frac{٢٤ - ٢س}{س(٦ + س)(٣ - س)}$$

$$\frac{١}{س} \times \frac{٢٤ - ٢س}{(٦ + س)(٣ - س)} = \frac{٢٤ - ٢س}{س(٦ + س)(٣ - س)}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٢٤ - ٢س}{٣(٦ + س)(٣ - س)}$$

تدريب (٤) / كتاب ص ٣٨ :

$$\frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{1+s}}{2-s} \text{ نهايا } \begin{matrix} 3 < s \\ 2 < s \end{matrix}$$

$$\frac{(1+s) \times 1 - 3 \times 1}{(1+s)^3} \text{ نهايا } \begin{matrix} 3 < s \\ 2 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2-s} \times \frac{1+s-3}{(1+s)^3} \text{ نهايا } \begin{matrix} 3 < s \\ 2 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1}{-s} \times \frac{1-3}{(1+s)^3} \text{ نهايا } \begin{matrix} 3 < s \\ 2 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1-}{9} = \frac{1-}{3 \times 3} = \frac{1-}{(1+2) \times 3} =$$

$$\frac{0}{0} = \frac{27 - s^3}{s^3 - 9} \text{ نهايا } \begin{matrix} 3 < s \\ 3 < s \end{matrix}$$

$$\frac{(9 + s^3 + s^2)(3-s)}{s^3(3-s)} \text{ نهايا } \begin{matrix} 3 < s \\ 3 < s \end{matrix}$$

$$3 = \frac{27}{9} = \frac{9+9+9}{3 \times 3} =$$

$$\frac{0}{0} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2-s}}{14-s^2} \text{ نهايا } \begin{matrix} 5 < s \\ 7 < s \end{matrix}$$

$$\frac{(2-s) \times 1 - 5 \times 1}{(2-s) \times 5} \text{ نهايا } \begin{matrix} 5 < s \\ 7 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1}{14-s^2} \times \frac{(2-s) - 5}{(2-s) \times 5} \text{ نهايا } \begin{matrix} 5 < s \\ 7 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1}{-s} \times \frac{1-5}{(2-s) \times 5} \text{ نهايا } \begin{matrix} 5 < s \\ 7 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1-}{50} = \frac{1-}{2 \times 5 \times 5} =$$

$$\frac{0}{0} = \frac{3 - (1+s)}{8-s} \text{ نهايا } \begin{matrix} 8 < s \\ 8 < s \end{matrix}$$

$$\frac{3 + 1 + s}{3 + 1 + s} \times \frac{3 - 1 + s}{8-s} \text{ نهايا } \begin{matrix} 8 < s \\ 8 < s \end{matrix}$$

$$\frac{\frac{3-s}{9-1+s}}{(3+1+s)(8-s)} \text{ نهايا } \begin{matrix} 8 < s \\ 8 < s \end{matrix}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3+3} =$$

أسئلة شاملة / تمارين ومسائل / كتاب ص ٣٩ + ٤٠

السؤال (٢) / كتاب ص ٣٩ :

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي (إن وجدت) :

$$\frac{1}{8} = \frac{1 + (0)^2}{8+0} = \frac{1+s^2}{8+s} \text{ نهايا } \begin{matrix} 8 < s \\ 0 < s \end{matrix}$$

$$\frac{6}{0} = \frac{1 \times 5 + (1)^2}{1-1} = \frac{5+s^2}{1-s} \text{ نهايا } \begin{matrix} 5 < s \\ 1 < s \end{matrix}$$

النهاية غير موجودة

$$\frac{0}{0} = \frac{4 - s^3 - s^2}{s^3 - 12} \text{ نهايا } \begin{matrix} 4 < s \\ 4 < s \end{matrix}$$

$$\frac{(1+s)(4-s)}{(s-4)^3} \text{ نهايا } \begin{matrix} 4 < s \\ 4 < s \end{matrix}$$

$$\frac{0-}{3} = \frac{0 \times 1-}{3} =$$

$$\frac{6-14-}{12+7-} = \frac{2 \times 3 - 7 - \times 2}{(7+5) + 7-} =$$

$$4- = \frac{20-}{5} =$$

السؤال (٥) / كتاب ص ٤٠ :

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{1}{2-س} \text{ ،}$$

$$\text{فجد نهيا } \frac{\text{ق(س) + هـ} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} \text{ :}$$

$$\text{نهيا } \frac{\text{ق(س) + هـ} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} \text{ :}$$

$$\text{نهيا } = \frac{\frac{1}{2-س} - \frac{1}{2-س+هـ}}{\text{هـ}}$$

$$\text{نهيا } = \frac{1}{هـ} \times \frac{س - 2 - (س + هـ - 2)}{(2-س)(2-س+هـ)}$$

$$\text{نهيا } = \frac{1}{هـ} \times \frac{-}{(2-س)(2-س+هـ)}$$

$$\frac{1-}{2(2-س)} = \frac{1-}{(2-س)(2-0+س)} =$$

السؤال (٦) / كتاب ص ٤٠ :

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{س^2 - س + 2}{1 - س^2} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 1$$

$$\frac{3}{2} = \frac{س(س+2)(1-س)}{س(س+1)(1-س)} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 1$$

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{7-س}{2+س} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 7$$

$$\frac{\sqrt{2+س} + 3}{2+س} \times \frac{7-س}{\sqrt{2+س} - 3} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 7$$

$$\frac{1-}{(2+س)(7-س)} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 7$$

$$6- = (3+3) \times 1- =$$

السؤال (٣) / كتاب ص ٤٠ :

$$\text{إذا كان ق(س) = س ، فجد نهيا } \frac{\text{ق(س)}^2 - \text{ق(س)}}{3+س} \text{ :}$$

$$\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{9-س^2}{3+س} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 3$$

$$\text{نهيا } = \frac{(3-س)(3+س)}{3+س} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 3$$

$$6- = 3- 3- =$$

السؤال (٤) / كتاب ص ٤٠ :

$$\text{إذا علمت أن نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 7 = \text{ ،}$$

$$\text{نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ هـ} = 2 \text{ ، فبين أن :}$$

$$4- = \frac{\text{ق(س)}^2 - 3\text{هـ} - \text{ق(س)}}{7+س} \text{ نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ س } \leftarrow 5$$

الحل : نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\text{نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ ق(س)}^2 - \text{نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ ق(س)} - 3\text{هـ}}{\text{س } \leftarrow 5}$$

$$\frac{\text{نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ ق(س)} - \text{نهيا } \frac{\cdot}{\cdot} \text{ ق(س)} - 3\text{هـ}}{\text{س } \leftarrow 5}$$

## أسئلة وزارة متنوعة :

## وزارة ( ٢٠١٧ ) صيفية :

$$\frac{0}{0} = \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 4} = \frac{\text{س}^3 - 4\text{س}^2}{16 - 4\text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 4} = \frac{\text{س}^2 (\text{س} - 4)}{4(\text{س} - 4)}$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{2 \cdot 4}{4 + 4} = \frac{2}{8}$$

## وزارة ( ٢٠١٨ ) صيفية :

$$\frac{0}{0} = \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 4} = \frac{1 - \frac{1}{\text{س}}}{4 - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 4} = \frac{\frac{\text{س} - 4}{\text{س}}}{4 - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 4} = \frac{1 - \frac{4}{\text{س}}}{4 - \text{س}}$$

$$= \frac{1 - \frac{4}{16}}{4 - 4} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{0}$$

## وزارة ( ٢٠١٩ ) شتوية :

$$\frac{0}{0} = \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 8}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{(\text{س} - 2)(\text{س} + 4)}{\text{س}(\text{س} - 2)}$$

$$= \frac{3}{2} = \frac{4 + 2}{2}$$

## وزارة ( ٢٠١٩ ) صيفية :

$$\frac{0}{0} = \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{\frac{2}{9 + \text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{1 - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{\frac{\text{س} - 9 + \text{س}}{\text{س}(9 + \text{س})}}{1 - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 1} = \frac{1 - \frac{9}{\text{س}}}{1 - \text{س}}$$

$$= \frac{9 - 9}{50} = \frac{9 - 9}{10 \times 5}$$

## وزارة ( ٢٠١٨ ) شتوية :

$$\frac{0}{0} = \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{3 - 1 + \sqrt{4\text{س} + 3}}{2 - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{3 - 1 + \sqrt{4\text{س} + 3}}{2 - \text{س}} \times \frac{3 - 1 + \sqrt{4\text{س} + 3}}{3 + 1 + \sqrt{4\text{س} + 3}}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{9 - 1 + 4\text{س}}{(3 + 1 + \sqrt{4\text{س} + 3})(2 - \text{س})}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{8 - 4\text{س}}{(3 + 1 + \sqrt{4\text{س} + 3})(2 - \text{س})}$$

$$= \frac{\text{نهايا}}{\text{س} \leftarrow 2} = \frac{4(\text{س} - 2)}{(3 + 1 + \sqrt{4\text{س} + 3})(2 - \text{س})}$$

$$= \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{4}{3 + 3}$$

لا يصل الناس الى محطات النجاح دون أن يمروا

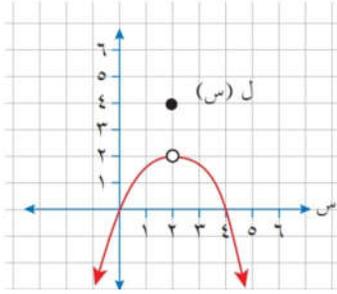
بمحطات التعب ، وصاحب الإرادة القوية

لا يطيل الوقوف في هذه المحطات ...

معلمكم المحب : معاذ البشير

الاتصال

(٣)

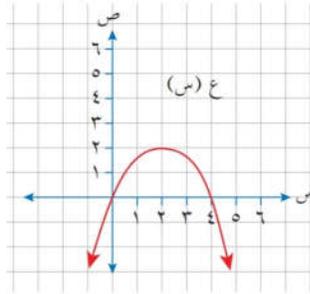


ق(٢) = ٤ ، ق(س) معرف عند س = ٢

نهـيا ق(س) = نهـيا ق(س) = ٢  
س ← ٢نهـيا ق(س) = ٢  
س ← ٢

نهـيا ق(س) ≠ ق(٢)

ومنه ق (س) غير متصل عند س = ٢



(٤)

ق(٢) = ٢ ، ق(س) معرف عند س = ٢

نهـيا ق(س) = نهـيا ق(س) = ٢  
س ← ٢نهـيا ق(س) = ٢  
س ← ٢نهـيا ق(س) = ق(٢) = ٢  
س ← ٢

لذا فإن الاقتران متصل عند س = ٢

الاتصال عند نقطة :

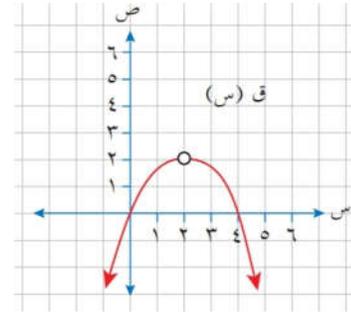
يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ

إذا حقق الشروط الآتية :

١- الاقتران ق معرفاً عند س = أ .

٢- نهـيا ق(س) موجودة .  
س ← أ٣- نهـيا ق(س) = ق(أ)  
س ← أمثال (١): ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

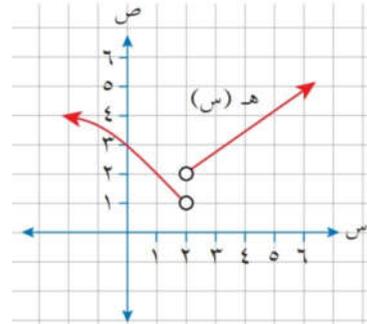
(١)



ق(س) غير معرف عندما س = ٢

ومنه ق(س) غير متصل عند س = ٢ .

(٢)



ق(س) غير معرف عند س = ٢ .

أيضا نهـيا ق(س) غير موجودة .  
س ← ٢

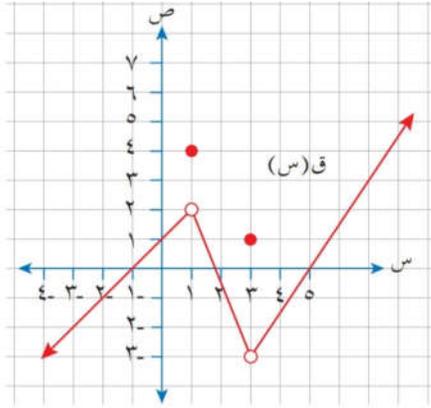
ومنه ق(س) غير متصل عند س = ٢

**ملاحظة هامة :**

إذا أعطانا بالسؤال رسم وطلب إيجاد نقاط عدم الاتصال ننظر إلى القفزات والحلقات .

**السؤال (١) / كتاب ص ٥٣ :**

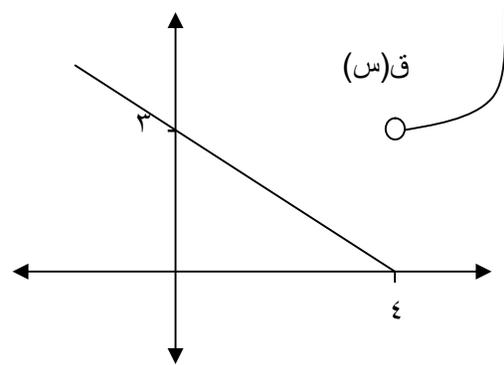
اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحني الاقتران ق المعروف على مجموعة الأعداد الحقيقية ، حدد قيم س التي يكون الاقتران عندها غير متصل .



**الحل :** قيم س هي { ٣ ، ١ }

**مثال (٢) :** معتمداً على الشكل المجاور

ابحث اتصال الاقتران ق عند  $s = 4$  :



**الحل :**

ق(٤) = ٠ ، ق(س) معرف عند  $s = 4$

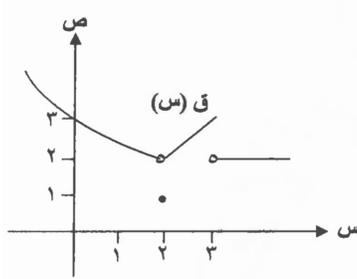
نهاية ق(س) = ٣ ، نهاية ق(س) = ٠  
 $s < 4$  ،  $s < -4$

نهاية ق(س) = غير موجودة  
 $s < 4$

ومنه ق(س) غير متصل عند  $s = 4$  .

**وزارة (٢٠١٦) صيفية :**

اكتب قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل .

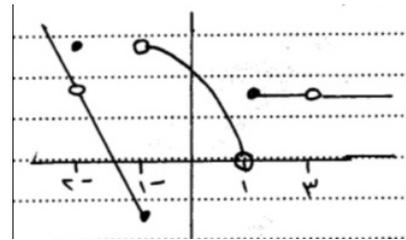


**الحل :**

قيم س هي { ٣ ، ٢ }

**مثال (٣) :** معتمداً على الشكل المجاور ،

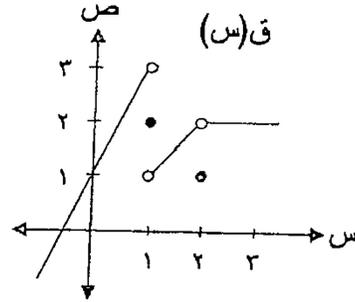
جد قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل :



**الحل :** قيم س هي { ٣ ، ١ ، ١- ، ٢- }

**وزارة (٢٠١٥) صيفية :**

اكتب قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل



الحل : قيم س هي { ٢ ، ١ }

$$٥ = ١ + ٢(٢) = (١ + ٢) \text{ نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{س} \\ \leftarrow -٢ \end{array} \right\}$$

$$٥ = ٥ - ٢ \times ٥ = (٥ - ٥) \text{ نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{س} \\ \leftarrow +٢ \end{array} \right\}$$

$$٥ = \text{ومنه نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{ق(س)} \\ \leftarrow ٢ \end{array} \right\}$$

$$٥ = (٢) \text{ نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{ق(س)} \\ \leftarrow ٢ \end{array} \right\}$$

# الاقتران ق متصل عندما س = ٢ .

**قاعدة :**

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود فهو متصل لجميع الأعداد الحقيقية ح .

**مثال (٤) :**

$$\text{ليكن ق(س) = س}^٢ + ٦$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢ :

**الحل :**

ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود .

**مثال (١) / كتاب ص ٤٨ :**

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ١ ، \text{س} > ٢ \\ \text{س} - ٥ ، \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢ .

**الحل :**

$$(١) \text{ ق معرف عند س = ٢ ،}$$

$$\text{ق(٢) = } ٥ - ٢ \times ٥ = ٥ - ١٠ = ٥$$

**تدريب (١) / كتاب ص ٤٩ :**

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ٢ ، \text{س} > ١ \\ \text{س}^٣ ، ١ \leq \text{س} < ٣ \\ \text{س}^٣ - ١٨ ، \text{س} < ٣ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث في اتصال ق عند كل مما يأتي :

$$(١) \text{ س} = ٠ \quad (٢) \text{ س} = ١ \quad (٣) \text{ س} = ٣$$

**الحل :**

$$(١) \text{ ق(٠) = نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{ق(س)} \\ \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} = ٢$$

$$\text{ق(س) متصل عند س} = ٠$$

$$(٢) \text{ ق(١) = } ١ \times ٣ = ٣$$

$$\text{نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{س}^٣ \\ \leftarrow +١ \end{array} \right\} = ٣ = ١ \times ٣$$

$$\text{نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{س}^٢ + ٢ \\ \leftarrow -١ \end{array} \right\} = ٣ = ٢ + ١$$

$$\text{ق(١) = نهايا } \left. \begin{array}{l} \text{ق(س)} \\ \leftarrow \text{س} \end{array} \right\}$$

$$\text{ومنه ق(س) متصل عند س} = ١$$

$$(٣) \text{ ق(س) غير معرف عند س} = ٣ ،$$

$$\text{ومنه ق(س) غير متصل عند س} = ٣$$

مثال (٢) / كتاب ص ٤٩ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + 3 \neq 1 \\ \text{س} = 4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما  $\text{س} = 1$  :

**الحل :**

$$(1) \text{ هـ معرف عندما } \text{س} = 1 \text{ ، هـ } (1 -) = 4$$

$$(2) \text{ نهيا } \text{س} + 1 = 3 \text{ ، } \text{س} = 2$$

$$(3) \text{ نهيا هـ (س) } \neq (1 -) \text{ هـ}$$

# الاقتران هـ غير متصل عندما  $\text{س} = 1$

**الحل :**

$$(1) \text{ ق معرف عند } \text{س} = 1 \text{ ، ق } (1) = 2 \times 1 = 2$$

$$(2) \text{ نهيا } \text{س} - 1 = 1 \text{ ، } \text{س} = 2$$

$$\text{نهيا } \text{س} + 1 = 2 \text{ ، } \text{س} = 1$$

$$\text{ومنه نهيا ق (س) = غير موجودة}$$

# الاقتران ق غير متصل عند  $\text{س} = 1$ .

سؤال (٣) / كتاب ص ٥٣ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 1 \\ \text{س} = 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

فابحث في اتصال الاقتران هـ عندما  $\text{س} = 1$  :

**الحل :**

$$(1) \text{ هـ } (1) = 3 \text{ ، } (2) \text{ نهيا هـ (س) } = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$\text{هـ } (1) \neq \text{نهيا هـ (س)}$$

# الاقتران هـ غير متصل عند  $\text{س} = 1$ .

تدريب (٢) / كتاب ص ٤٩ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 2 \\ \text{س} = 4 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما  $\text{س} = 2$  :

**الحل :**

$$(1) \text{ ق معرف عند } \text{س} = 2 \text{ ، ق } (2) = 4$$

$$(2) \text{ نهيا } \text{س} - 2 = 2 \text{ ، } \text{س} = 4$$

$$(3) \text{ ق } (2) \neq \text{نهيا ق (س)}$$

# الاقتران ق غير متصل عند  $\text{س} = 2$

سؤال (٤) / كتاب ص ٥٣ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + 3 > 1 \\ \text{س} - 5 \leq 1 \\ \text{س} + 3 \leq 1 \end{array} \right\} = \text{إذا علمت أن ق (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما :

$$(أ) \text{ س} = 1 \quad (ب) \text{ س} = 1$$

**الحل :**

$$(أ) \text{ ق متصل عند } \text{س} = 1$$

$$\text{لأن ق } (1) = \text{نهيا ق (س)} = 4$$

$$(ب) \text{ ق غير متصل عند } \text{س} = 1$$

لأن النهاية غير موجودة عند  $\text{س} = 1$ .

سؤال (٢) / كتاب ص ٥٣ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 1 \\ \text{س} \leq 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما  $\text{س} = 1$  :

**قاعدة :** إذا طلب السؤال إيجاد الثوابت

وكان يحتوي المتشعب المتصل على :

$$\begin{array}{l} \leq -1 \\ \text{نأخذ} \leftarrow \boxed{\text{نها} + = \text{نها} -} \\ > \end{array}$$

$$\begin{array}{l} = -2 \\ \text{نأخذ} \leftarrow \boxed{\text{النهاية} = \text{الصورة}} \\ \neq \end{array}$$

$$\begin{array}{l} > -3 \\ \text{نأخذ} \leftarrow \boxed{\text{نها} + = \text{الصورة}} \\ = \\ \boxed{\text{نها} - = \text{الصورة}} \\ < \end{array}$$

**مثال (٤) / كتاب ص ٥٠ :**

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 + 10, \text{ س} \neq 2 \\ \text{س}^2, \text{ س} = 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان ق متصلاً عندما  $\text{س} = 2$  ، فجد قيمة الثابت أ :**الحل :**

$$\text{نها} \text{ ق (س)} = \text{ق (س)} \leftarrow \text{س}^2$$

$$\text{نها} \text{ ق (س)} = (10 + \text{س}^3) \leftarrow \text{س}^2$$

$$2^2 = 10 + 2^3$$

$$4 = 18$$

$$2^2 = 9 \leftarrow \text{أ} = 3, -3$$

**مثال (٥) / كتاب ص ٥١ :**

$$\left. \begin{array}{l} 2 > \text{س}, \text{ أس}^2 + \text{ب} \\ 2 = \text{س}, \text{ ٨} \\ 2 < \text{س}, \text{ أس}^3 + 3\text{س} \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان ق متصلاً عندما  $\text{س} = 2$  ، فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب :**الحل :**

$$\text{أولاً : نها} \text{ ق (س)} = \text{ق (س)} \leftarrow \text{س}^2$$

$$\text{نها} \text{ ق (س)} = \text{أس}^2 + \text{ب} \leftarrow \text{س}^2$$

$$4 = \text{أ} + \text{ب} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ثانياً : نها} \text{ ق (س)} = \text{ق (س)} \leftarrow \text{س}^3$$

$$\text{نها} \text{ ق (س)} = 3\text{س} + \text{أس}^3 \leftarrow \text{س}^3$$

$$8 = 6 + \text{أ} \dots \dots \dots (2)$$

# يمكن استخدام طريقة الحذف والتعويض لإيجاد الثوابت .

$$8 = \text{أ} + \text{ب} \leftarrow \text{ب} = 0 \leftarrow 0 = \text{ب}$$

$$8 = (\text{أ} + 6) \leftarrow$$

بالتعويض قيمة ب في المعادلة (١)

$$8 = 0 + \text{أ} \Rightarrow \text{أ} = 2$$

**مثال (٣) / كتاب ص ٥٠ :**

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq \text{س}, \text{ ٧} + \text{أس} \\ 3 < \text{س}, \text{ ١} + \text{س} \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان ق متصلاً عندما  $\text{س} = 3$  ،

فجد قيمة الثابت أ :

**الحل :**

$$\text{نها} \text{ ق (س)} = \text{ق (س)} \leftarrow \text{س}^3$$

$$\text{نها} \text{ ق (س)} = (\text{أس} + 7) \leftarrow \text{س}^3$$

$$1 + 3 = 7 + 3$$

$$4 = 7 + 3$$

$$7 - 4 = 3$$

$$3 = 3$$

$$1 = 1$$

## تدريب (٣) / كتاب ص ٥٢ :

$$(1) \text{ إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} 2 > \text{س} ، \\ 2 \leq \text{س} ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 + 2\text{س} \\ 6 + \text{أس} \end{array}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما  $\text{س} = 2$  ،

فجد قيمة الثابت أ :

الحل :

$$\text{نها ق (س) = نها ق (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 2 \\ \text{س} \leftarrow 2 \end{array}$$

$$\text{نها ق (س) = نها ق (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 2 \\ \text{س} \leftarrow 2 \end{array}$$

$$6 + 2\text{س} = 4 + \text{أس}$$

$$6 + 2 \times 2 = 4 + \text{أ} \times 2$$

$$10 = 4 + 2\text{أ}$$

$$6 = 2\text{أ}$$

$$(2) \text{ إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} 1 > \text{س} ، \\ 1 = \text{س} ، \\ 1 < \text{س} ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 + \text{أس} \\ 7 \\ \text{س} - \text{ب} \end{array}$$

وكان ق متصلًا عند  $\text{س} = 1$  ،

فجد قيمة الثابتين أ ، ب :

الحل :

$$\text{نها ق (س) = نها ق (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 1 \\ \text{س} \leftarrow 1 \end{array}$$

$$7 = 3 + \text{أ}$$

$$4 = \text{أ}$$

$$\text{نها ق (س) = نها ق (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 1 \\ \text{س} \leftarrow 1 \end{array}$$

$$7 = \text{ب} - 1$$

$$6 = \text{ب}$$

## سؤال (٥) / كتاب ص ٥٣ :

$$\text{إذا كان ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 3 ، \\ \text{س} = 3 ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 3} \\ \text{م} + 2 \end{array}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما  $\text{س} = 3$  ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

$$\text{نها ق (س) = نها ق (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 3 \\ \text{س} \leftarrow 3 \end{array}$$

$$\text{نها ق (س) = نها ق (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 3 \\ \text{س} \leftarrow 3 \end{array}$$

$$1 = 3 + \text{م}$$

$$\text{ومنه م} = 1 - 3 = -2$$

## سؤال (٦) / كتاب ص ٥٤ :

$$\text{إذا كان هـ (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{س} > 2 ، \\ \text{س} = 2 ، \\ \text{س} < 2 ، \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} + \text{أ} \\ 8 \\ \text{ب} + \text{س} + 6 \end{array}$$

وكان الاقتران هـ متصلًا عندما  $\text{س} = 2$  ،

فجد قيمة كل من الثابتين : أ ، ب .

الحل :

$$\text{نها هـ (س) = نها هـ (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 2 \\ \text{س} \leftarrow 2 \end{array}$$

$$8 = 2 + \text{أ}$$

$$6 = \text{أ}$$

$$\text{نها هـ (س) = نها هـ (س)} \quad \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow 2 \\ \text{س} \leftarrow 2 \end{array}$$

$$8 = 6 + 2\text{ب}$$

$$2 = 2\text{ب}$$

$$1 = \text{ب}$$

## سؤال (٧) / كتاب ص ٥٤ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{أس - ب} \\ \text{س} > 1 \\ \text{س} = 4 \\ \text{أس}^3 + \text{ب} + 2 \\ \text{س} < 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ل (س)}$$

وكان الاقتران ل متصلاً عندما  $s = 1$  ،  
فجد قيمة كل من الثابتين : أ ، ب .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{نهيا أس - ب} &= \text{ق (١)} \\ \text{س} &< 1 \\ \text{أ - ب} &= 4 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{نهيا أس}^2 + \text{ب} + 2 &= \text{ق (١)} \\ \text{س} &< 1 \\ \text{أ} + \text{ب} + 2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{أ} + \text{ب} = 2 \dots\dots\dots (2)$$

بجمع المعادلتين :

$$6 = 4 \leftarrow \text{أ} = 3$$

بالتعويض في : أ - ب = 4

$$3 - \text{ب} = 4$$

$$\text{ب} = -1$$

## سؤال (٨) / كتاب ص ٥٤ :

إذا كان الاقتران ق متصلاً عندما  $s = 2$  ، وكانت

$$\text{نهيا ق (س)} + \text{س} = 6 \text{ ، فجد قيمة ق (٢) .}$$

الحل :

$$\text{نهيا ق (س)} + \text{نهيا س} = 6$$

$$\text{نهيا ق (س)} + 2 = 6$$

$$\text{نهيا ق (س)} = 4$$

$$\text{نهيا ق (س)} = 2$$

ولأن ق متصل عند  $s = 2$  فإن :

$$\text{نهيا ق (س)} = \text{ق (٢)} = 2$$

## مثال / خارجي :

إذا كانت نهيا ق (س) = 9 ، وكانت ق (3) = 5 ابحث في اتصال ق (س) عند  $s = 3$  :

الحل :

$$\text{ق (٣)} = 5$$

$$\text{نهيا ق (س)} = 9$$

$$\text{نهيا ق (س)} + \text{نهيا س} = 9$$

$$\text{نهيا ق (س)} = 9 - 4$$

$$\text{نهيا ق (س)} = 5$$

$$\text{نهيا ق (س)} = \text{ق (٣)} = 5$$

$$\# \text{ ق متصل عند } s = 3 .$$

## وزارة (٢٠١٨) صيفية :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + \text{أ} \\ \text{س} > 3 \\ \text{س} = 1 \\ \text{س}^2 + \text{أس} + \text{ب} \\ \text{س} < 3 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

وكان الاقتران ق متصلاً عند  $s = 3$  فما قيمة أ ، ب :

الحل :

$$\text{نهيا س} + \text{ق (٣)} = 1$$

$$1 = 3 + \text{أ}$$

$$\text{أ} = -2$$

$$\text{نهيا س}^2 + \text{أس} + \text{ب} = \text{ق (٣)}$$

$$1 = 9 + 3\text{أ} + \text{ب}$$

$$1 = 9 - 6 + \text{ب}$$

$$1 = 3 + \text{ب}$$

$$\text{ب} = -2$$

وزارة (٢٠١٩) صيفية :

$$(١) \left. \begin{array}{l} \text{أ س} + \text{ب} ، \text{س} > ٢ \\ \text{س} = ١٤ ، \\ \text{س} - \text{ب} ، \text{س} < ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عند س = ٢

فجد قيمة أ ، ب :

الحل :

$$\text{نهيا س} - \text{ب} = \text{ق(٢)} = ١٤$$

$$\text{س} < ٢ - \text{ب} = ١٤$$

$$\text{س} - \text{ب} = ١٤$$

$$\text{ب} = \text{س} - ١٤$$

$$\text{نهيا س} + \text{ب} = \text{ق(٢)} = ١٤$$

$$\text{س} < ٢ + \text{ب} = ١٤$$

$$\text{س} + \text{ب} = ١٤$$

$$\text{س} + \text{س} - ١٤ = ١٤$$

$$\text{س} = ١٤$$

(٢) إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عندما س = ٧

وكان ق(٧) = ١٢ ، هـ(٧) = ٣ فبين أن

$$\text{نهيا س} - \text{ق(س)} = ١$$

$$\text{س} < ٧ \text{ هـ(س) + س}$$

الحل :

$$\text{نهيا س} - \text{ق(س)} = ١٢ = \text{ق(٧)}$$

$$\text{نهيا س} - \text{هـ(س)} = ٣ = \text{هـ(٧)}$$

$$\text{نهيا س} - \text{ق(س)} - \text{نهيا س} + \text{هـ(س)} = ١٢ - ٣$$

$$\text{نهيا س} - \text{هـ(س)} = ٩$$

$$٩ = \frac{١٠ - ١٢}{٧ + ٣} = ١$$

وزارة (٢٠١٩) شتوية :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - ٨ = ٤ - \text{س} \\ \text{س} \neq ٢ \\ \text{س} = ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة ك التي تجعل ق(س) متصلًا عند س = ٢ .

الحل :

$$\text{نهيا س} < ٢ = \frac{\text{س} - ٨}{٤ - \text{س}} = \text{ق(٢)}$$

$$\text{نهيا س} < ٢ = \frac{(\text{س} - ٨)(٢ - \text{س})}{(٤ - \text{س})٢} = ٦$$

$$\text{س} < ٢ = \frac{١٢}{٢}$$

$$\text{س} < ٢ = ٦$$

$$\text{س} < ٢ = ٦$$

$$\text{س} < ٢ = ٦$$

ما تعلمناه :

(١) معرفة إذا كان الاقتران متصل أو غير متصل

عند نقطة ما ، مع مراعاة شروط الاتصال .

(٢) إيجاد الثوابت حسب قاعدة الاقتران المعطى بالسؤال .

نظريات الاتصالأولاً : اتصال الاقترانات النسبية

الاقتران النسبي  $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$  هو اقتران متصل على جميع الأعداد ما عدا أصفار المقام .

مثال (١) / خارجي :

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{س^٣}{س^٢ - ٤}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون

عندها الاقتران ق غير متصل هي :

**الحل :**

$$\text{نجد أصفار المقام } س^٢ - ٤ = ٠$$

$$٠ = (س - ٢)(س + ٢)$$

$$س = ٢ \text{ ، } س = -٢$$

نقط عدم الاتصال هي  $\{ -٢ ، ٢ \}$

ملاحظة :

في الاقتران النسبي نقط عدم الاتصال (الانفصال)

هي قيم س التي تجعل المقام يساوي صفرأ .

مثال (٢) / خارجي :

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{س^٣}{س^٢ - ٤س}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون

عندها الاقتران ق غير متصل هي :

$$\text{الحل : نجد أصفار المقام } \leftarrow س^٢ - ٤س = ٠$$

$$٠ = (س - ٤)س$$

$$س = ٠ \text{ ، } س = ٤$$

نقط عدم الاتصال هي  $\{ ٠ ، ٤ \}$

مثال (٣) / خارجي :

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{س - ٣}{س^٢ + ٤}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون

عندها الاقتران ق غير متصل هي :

**الحل :**

$س^٢ + ٤$  لا يحلل ( لا توجد قيمة نعوضها في س وتصفر المقام)

وبالتالي لا يوجد نقط عدم اتصال .

مثال (٤) / خارجي :

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{س^٣ + ١}{س^٢ - ٣س - ٢٨}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون

عندها الاقتران ق غير متصل هي :

**الحل :** نجد أصفار المقام

$$س^٢ - ٣س - ٢٨ = ٠$$

$$٠ = (س - ٧)(س + ٤)$$

$$س = ٧ \text{ ، } س = -٤$$

نقط عدم الاتصال هي  $\{ -٤ ، ٧ \}$

مثال (٥) / خارجي :

$$\left. \begin{array}{l} س^٢ + ١ ، س > ٤ \\ س = ٦ ، س \\ س + ٢ ، س < ٤ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

أوجد نقاط عدم الاتصال للاقتران ق .

**الحل :** ق(٤) = ٦

$$\text{نهـا } \left. \begin{array}{l} س^٢ + ١ \\ س < -٤ \end{array} \right\} = ١ + ١٦ = ١٧$$

$$\text{نهـا } \left. \begin{array}{l} س + ٢ \\ س < ٤ \end{array} \right\} = ٢ + ٤ = ٦$$

نهـا ق(س) = غير موجودة  
س < ٤

ق(س) غير متصل عند س = ٤

**ملاحظة :**

في الاقتران النسبي إذا كان المقام هو  
(س<sup>٢</sup> + عدد موجب) أو (عدد موجب + س<sup>٢</sup>)  
فإنه لا توجد نقط عدم اتصال .

**مثال (٣) / كتاب ص ٥٩ :**

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها

كل اقتران مما يأتي غير متصل :

$$(١) \text{ ق(س) = س}^٢ + ٥س + ١$$

**الحل :** ق اقتران كثير حدود متصل لقيم س جميعها

( لا يوجد له نقاط عدم اتصال )

$$(٢) \text{ هـ (س) = } \frac{١ - س^٢}{٣ - س}$$

**الحل :** نجد أصفار المقام

$$٣ - س = ٠ \leftarrow س = ٣$$

هـ غير متصل عند س = ٣

$$(٣) \text{ ل(س) = } \frac{٥س}{١ - س^٢}$$

**الحل :** نجد أصفار المقام

$$١ - س^٢ = ٠$$

$$س^٢ = ١ \leftarrow س = ١ ، -١$$

ل غير متصل عند س = ١ ، -١ ، س = -١

**مثال (٧) / خارجي :**

إذا علمت أن س = ٢ هي نقطة

عدم اتصال للاقتران :

$$\text{ق(س) = } \frac{١ - س^٣}{٢ + أس} \text{ فجد قيمة أ .}$$

**الحل :**

س = ٢ هي نقطة عدم اتصال

أي أن س = ٢ هي صفر المقام .

$$\text{ومنه } ٢ \times ٢ + أ = ٠$$

$$٢ - أ = ٢$$

$$١ = أ$$

**تدريب (٣) / كتاب ص ٦٠ :**

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها

كل اقتران مما يأتي غير متصل :

$$(١) \text{ ق(س) = س}^٢ - ٣س + ٨$$

**الحل :**

ق اقتران كثير حدود متصل لقيم س جميعها

( لا يوجد له نقاط عدم اتصال )

تابع / تدريب (٣) // كتاب ص ٦٠ :

$$(٢) \text{ هـ (س)} = \frac{١ - \text{س}}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}$$

الحل : نجد أصفار المقام

$$\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦ = ٠$$

$$\text{س}(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٣) = ٠$$

$$\text{س} = ٢ \text{ - } \text{س} = ٣ \text{ - }$$

هـ غير متصل عند س = ٢ ، س = ٣

$$(٣) \text{ ل (س)} = \frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^٣ - ١}$$

الحل : نجد أصفار المقام

$$\text{س}^٣ - ١ = ٠$$

$$\text{س}^٣ = ١ \leftarrow \text{س} = ١$$

ل (س) غير متصل عند س = ١

$$(ج) \text{ ل (س)} = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^١ - ١} + \frac{٥}{\text{س}}$$

الحل : نجد أصفار المقام

$$\text{س}^٢ - ١ = ٠$$

$$\text{س}^٢ = ١ \leftarrow \text{س} = ١ ، \text{س} = -١$$

$$\text{أيضاً س} = ٠$$

ل (س) غير متصل عند س = ١ ، س = -١ ، س = ٠

$$(د) \text{ م (س)} = \left. \begin{array}{l} \text{س}^٣ + ٣ ، \text{س} > ٢ \\ \text{س} - ٦ ، \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\}$$

الحل : م (٢) = ٤

$$\text{نهياً س}^٣ + ٣ = ١١ \text{ ، } \text{س}^٣ = ٨ \text{ ، } \text{س} = ٢$$

$$\text{نهياً س} - ٦ = ٤ \text{ ، } \text{س} = ١٠$$

$$\text{نهياً م (س)} = \text{غير موجودة}$$

$$\text{م (س) غير متصل عند س} = ٢$$

وزارة (٢٠١٦) شتوية :

ما نقط عدم الاتصال للاقتران

$$\text{ق (س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٣\text{س}} + \frac{١}{\text{س} + ٢}$$

الحل :

$$\text{س} + ٢ = ٠ \leftarrow \text{س} = -٢$$

$$\text{س}^٢ - ٣\text{س} = ٠$$

$$\text{س}(\text{س} - ٣) = ٠$$

$$\text{س} = ٣ \text{ ، } \text{س} = ٠$$

نقط عدم الاتصال هي { ٣ ، ٠ ، -٢ }

سؤال (٥) // كتاب ص ٦١ :

جد قيم س (إن وجدت) التي لا يكون عندها

كل اقتران مما يأتي متصلاً :

$$(أ) \text{ ق (س)} = \text{س}^٢ + ١$$

الحل : ق اقتران كثير حدود متصل لقيم س جميعها

( لا يوجد له نقاط عدم اتصال )

$$(ب) \text{ هـ (س)} = \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$$

الحل : نجد أصفار المقام

$$\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦ = ٠$$

$$\text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣) = ٠$$

$$\text{س} = ٢ \text{ ، } \text{س} = ٣$$

هـ غير متصل عند س = ٢ ، س = ٣

**وزارة (٢٠١٨) شتوية :**

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{\text{س}(\text{س} - ٤)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها  
الاقتران ق غير متصل هي :

**الحل :** نجد أصفار المقام

$$٠ = (\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)$$

$$\text{س} = ١ \quad \text{س} = -٢$$

نقط عدم الاتصال هي { ١ ، -٢ }

**وزارة (٢٠١٩) شتوية :**

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{٢}{\text{س}} + \frac{١}{(٣ - \text{س})^2}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها  
الاقتران ق غير متصل هي :

**الحل :** نجد أصفار المقام

$$٠ = (٣ - \text{س})^2 \leftarrow \text{س} = ٣$$

$$\text{أيضاً س} = ٠$$

نقط عدم الاتصال هي { ٣ ، ٠ }

**وزارة (٢٠١٩) صيفية :**

$$\text{إذا كان ق(س) = } \frac{\text{س}}{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}$$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها  
الاقتران ق غير متصل هي :

**الحل :** نجد أصفار المقام

$$٠ = (\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)$$

$$\text{س} = ١ \quad \text{س} = -٢$$

نقط عدم الاتصال هي { ١ ، -٢ }

**نظرية :** إذا كان كلاً من الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

متصلين عندما س = أ ، فإن :

$$١) \text{ ق} + \text{ هـ متصل عندما س} = \text{أ} .$$

$$٢) \text{ ق} - \text{ هـ متصل عندما س} = \text{أ} .$$

$$٣) \text{ ق} \times \text{ هـ متصل عندما س} = \text{أ} .$$

$$٤) \frac{\text{ق}}{\text{هـ}} \text{ متصل عندما س} = \text{أ} ، \text{ إذا كان هـ(أ) } \neq ٠$$

**ملاحظة هامة :**

١) متصل ( + ، - ، ÷ ، × ) متصل  $\xleftarrow{\text{الناتج}}$  متصل

٢) متصل ( + ، - ، ÷ ، × ) غير متصل

$\xleftarrow{\text{ناتج}}$  يجب تنفيذ العملية الحسابية ثم نبحت في الاتصال .

٣) غير متصل ( + ، - ، ÷ ، × ) غير متصل

$\xleftarrow{\text{ناتج}}$  يجب تنفيذ العملية الحسابية ثم نبحت في الاتصال .

**بشكل عام :**

إذا كان أحد الاقترانين أو كلاهما غير متصل

فيجب إيجاد جمع ، طرح ، ضرب ، قسمة

الاقترانين (دمج الاقترانين) ثم نبحت في الاتصال .

مثال (١) / خارجي :

إذا كان ق(س) = ٥ + ٢س ،

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \geq س ، \\ ٣ < س ، \end{array} \right\} = (س) \text{ هـ} \quad \begin{array}{l} ٥ - ٢س \\ ١ + س \end{array}$$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٣ .

**الحل :**

(١) ق(س) متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود .

$$(٢) \text{ هـ} (٣) = (٣) - ٢(٣) = ٥ - ٦ = -١ = ٥ - ٩ = ٤$$

$$\text{نهيا س} \leftarrow ٣ = ٥ - ٢(٣) = ٥ - ٦ = -١$$

$$\text{نهيا س} \leftarrow ٣ = ١ + ٣ = ٤$$

$$\text{نهيا هـ} (س) = ٤$$

وبالتالي هـ(س) متصل عند س = ٣ .

حسب نظريات الاتصال

متصل + متصل = متصل

هذا يعني أن الاقتران ل(س) متصل عند س = ٣ .

مثال (٢) / خارجي :إذا كان ق(س) = ٢س - س<sup>٢</sup> ،

$$\text{وكان هـ} (س) = \frac{س^٣}{س - ١}$$

ابحث في اتصال ق(س) - هـ(س) عند س = ٢ .

**الحل :**

(١) ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود .

(٢) نجد أصفار المقام للاقتران هـ(س)

$$س^٢ - ١ = ٠ \rightarrow س^٢ = ١ \rightarrow س = ١ ، ١ -$$

نلاحظ أن س = ٢ ليس صفراً للمقام

هـ(س) متصل عند س = ٢ .

ق(س) - هـ(س) = متصل - متصل

= متصل

مثال (٣) / خارجي :

إذا كان ق(س) = س - ٣ ،

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س ، \\ ٣ > س ، \end{array} \right\} = (س) \text{ هـ} \quad \begin{array}{l} ٢ + س \\ ٤ + س \end{array}$$

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س)

ابحث في اتصال الاقتران ل(س) عند س = ٣ .

**الحل :**

(١) ق(س) متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود .

$$(٢) \text{ هـ} (٣) = ٣ - ٢ + ٣ = ٤$$

$$\text{نهيا س} \leftarrow ٣ = ٤ + ٣ = ٧$$

$$\text{نهيا س} \leftarrow ٣ = ٢ + ٣ = ٥$$

$$\text{نهيا هـ} (س) = \text{غير موجودة}$$

هـ(س) غير متصل عند س = ٣

# بما أن أحد الاقترانين غير متصل هنا لا بد

من تنفيذ العملية الحسابية لإيجاد قاعدة الاقتران ل(س)

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س ، \\ ٣ > س ، \end{array} \right\} \times (س - ٣) =$$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س ، \\ ٣ > س ، \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} (٢ + س)(٣ - ٣) \\ (٤ + س)(٣ - ٣) \end{array} \right\}$$

$$\text{نهيا ل} \leftarrow ٣ = (٣ - ٣)(٢ + ٣) = ٠ \times ٥ = ٠$$

$$\text{نهيا ل} \leftarrow ٣ = (٣ - ٣)(٤ + ٣) = ٠ \times ٧ = ٠$$

$$\text{نهيا ل} \leftarrow ٣ = ٠$$

$$\text{ل} (٣) = (٣ - ٣)(٢ + ٣) = ٠ \times ٥ = ٠$$

$$\text{ل} (٣) = \text{نهيا ل} \leftarrow ٣$$

ل(س) متصل عند س = ٣ .

حسب نظريات الاتصال

$$\text{متصل} + \text{متصل} = \text{متصل}$$

هذا يعني أن الاقتران ل(س) متصل عند  $s = 3$ .مثال (٢) / كتاب ص ٥٧ :

$$\text{إذا كان ق(س) = } s^2 + 10 ,$$

$$\left. \begin{array}{l} s > 0 , \\ s \leq 0 , \end{array} \right\} = (س) هـ$$

$$\text{م(س) = (ق - هـ) (س) ، فابحث}$$

$$\text{اتصال الاقتران م عندما } s = 0 .$$

**الحل :**

$$(١) \text{ ق(س) متصل عند } s = 0 \text{ لأنه كثير حدود .}$$

$$(٢) \text{ هـ (٥) = } 5 \times 3 = 15$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 25 = (٥) \text{ م(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 15 = 5 \times 3 = \text{م(س)}$$

$$\text{نهيا } s \leftarrow 0 \text{ هـ (س) = غير موجودة}$$

$$\text{هـ (س) غير متصل عند } s = 0$$

# بما أن أحد الاقترانين غير متصل هنا لا بد

من تنفيذ العملية الحسابية لإيجاد قاعدة الاقتران م (س)

$$\text{م(س) = (ق - هـ) (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} s > 0 , \\ s \leq 0 , \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} 10 \\ s^2 - 3s + 10 \end{array} \right\} =$$

$$\text{م(٥) = } 5 = 10 - 25 = 10 + 10 - 25$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 10 = \text{م(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 25 = 10 + 10 - 25 = \text{م(س)}$$

$$\text{نهيا } s \leftarrow 0 \text{ م(س) = غير موجودة}$$

# م (س) غير متصل عند  $s = 0$ .مثال (١) / كتاب ص ٥٥ :

$$\text{إذا كان ق(س) = } s^3 + 2s ,$$

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 0 , \\ s < 0 , \end{array} \right\} = (س) هـ$$

$$\text{وكان ل(س) = (ق × هـ) (س) ، فابحث}$$

$$\text{اتصال الاقتران ل عندما } s = 0 :$$

**الحل :**

$$(١) \text{ ق(س) متصل عند } s = 0 \text{ لأنه كثير حدود .}$$

$$(٢) \text{ هـ (٥) = } 5 \times 5 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 0 = 5 \times 5 = \text{م(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 0 = (٥) \text{ م(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 0 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 0 \end{array} \right\} = 0 = \text{م(س)}$$

$$\text{وبالتالي هـ (س) متصل عند } s = 3 .$$

حسب نظريات الاتصال

$$\text{متصل} \times \text{متصل} = \text{متصل}$$

هذا يعني أن الاقتران ل(س) متصل عند  $s = 0$ .تدريب (١) / كتاب ص ٥٦ :

$$\text{إذا كان ق(س) = } s^2 + 2 ,$$

$$\left. \begin{array}{l} s \geq 3 , \\ s < 3 , \end{array} \right\} = (س) هـ$$

$$\text{فابحث اتصال (ق + هـ) عندما } s = 3 :$$

**الحل :**

$$(١) \text{ ق(س) متصل عند } s = 3 \text{ لأنه كثير حدود .}$$

$$(٢) \text{ هـ (٣) = } 3 = 1 - 3 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 3 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 3 \end{array} \right\} = 2 = 1 - 3 = \text{م(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 3 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 3 \end{array} \right\} = 2 = 3 - 5 = \text{م(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نهيا } s \leftarrow 3 \\ \text{نهيا } s \leftarrow 3 \end{array} \right\} = 2 = \text{م(س)}$$

$$\text{وبالتالي هـ (س) متصل عند } s = 3 .$$

تدريب (٢) / كتاب ص ٥٩ :

إذا كان ق(س) = ٥ + ٢س ،

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ (س)} = \left. \begin{array}{l} ٦ + ٢س \\ ١ - \geq \text{س} \end{array} \right\} \\ \text{س} - ٣٥ < ١ \end{array} \right\}$$

فابحث اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س) عندما س = ١ .

**الحل :**

(١) ق(س) متصل عند س = ١ لأنه كثير حدود .

$$\text{هـ (٢)} = (١ -) = ٦ + ٢(١ -) = ٧$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (٢)} = ٦ + ٢(١ -) = ٧$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (٢)} = ١ + ٣٥ = ٣٦$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (س)} = \text{غير موجودة}$$

$$\text{هـ (س)} \text{ غير متصل عند س} = ١$$

# بما أن أحد الاقترانين غير متصل هنا لا بد

من تنفيذ العملية الحسابية لإيجاد قاعدة الاقتران م(س).

$$\text{م(س)} = \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq ٣ \\ \text{س} < ٣ \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} (٥ + ٢س)(٦ + ٢س) \\ (٥ + ٢س)(٥ - ٣٥) \end{array} \right\}$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{م(س)} = (٦ + ٢(١ -))(٥ + ٢(١ -))$$

$$= (٦ + ١)(٥ + ١) = ٦ \times ٧ = ٤٢$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{م(س)} = (٥ + ٢(١ -))(٥ - ٣٥)$$

$$= (٥ + ١)(١ + ٣٥) = ٦ \times ٣٦ = ٢١٦$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{م(س)} = \text{غير موجودة}$$

# م(س) غير متصل عند س = ١ .

سؤال (١) / كتاب ص ٦١ :

إذا كان ق(س) = ٥س + ٢ - ١ ،

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ (س)} = \left. \begin{array}{l} ٩ + \text{س} \\ \text{س} \geq ٢ \end{array} \right\} \\ \text{س} + ١ < ٢ \end{array} \right\}$$

وكان ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٢ .

**الحل :**

(١) ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود .

$$\text{هـ (٢)} = ٩ + ٢ = ١١$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (٢)} = ٩ + ٢ = ١١$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (س)} = ١ + ٢ \times ٥ = ١١$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (س)} = ١١$$

وبالتالي هـ(س) متصل عند س = ٢

# ويكون ل(س) متصل عند س = ٢

لأنه ناتج عن جمع اقترانين متصلين

سؤال (٢) / كتاب ص ٦١ :

إذا كان ق(س) = ٥س + ٢ + ٤ ،

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ (س)} = \left. \begin{array}{l} ٤ + \text{س} \\ \text{س} > ٠ \end{array} \right\} \\ \text{س} - ٤ \leq ٠ \end{array} \right\}$$

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) ،

فابحث في اتصال الاقتران ل عندما س = ٠ .

**الحل :** (١) ق(س) متصل عند س = ٠ لأنه كثير حدود .

$$\text{هـ (٠)} = ٤ - ٤ = ٠$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (٠)} = ٤ + ٠ = ٤$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (س)} = ٤ - ٤ = ٠$$

$$\text{نهـ} \left. \begin{array}{l} \text{س} \leftarrow \text{س} \\ \text{س} \leftarrow \text{س} \end{array} \right\} \text{هـ (س)} = ٤$$

وبالتالي هـ(س) متصل عند س = ٠

# ويكون ل(س) متصل عند س = ٠ (ناتج ضرب متصلين)

**سؤال (٣) / كتاب ص ٦١ :**إذا كان  $ق(س) = ٩ - ٢س$  ،

$$\left. \begin{array}{l} س ، ٣ > س \\ ٠ ، ٣ = س \\ س - ، ٣ < س \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}$$

وكان  $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$  فبين أن $ل(س)$  متصل عندما  $س = ٣$  .**الحل :**(١)  $ق(س)$  متصل عند  $س = ٣$  لأنه كثير حدود .(٢) هـ  $(س)$  غير متصل عند  $س = ٣$ لأن نهـ  $٣ \leq س$  هـ  $(س) =$  غير موجودة .

# بما أن أحد الاقترانين غير متصل هنا لا بد

من تنفيذ العملية الحسابية لإيجاد قاعدة الاقتران  $ل(س)$  . $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ 

$$\left. \begin{array}{l} س ، ٣ > س \\ ٠ ، ٣ = س \\ س - ، ٣ < س \end{array} \right\} =$$

 $ل(٣) = ٠$ نهـ  $٣ \leq س$   $ل(٣) = ٣ \times (٩ - ٢(٣)) = ٠$ نهـ  $٣ < س$   $ل(٣) = ٣ - \times (٩ - ٢(٣)) = ٠$ نهـ  $٣ \leq س$   $ل(س) = ٠$  $ل(٣) =$  نهـ  $٣ \leq س$   $ل(س) = ٠$ #  $ل(س)$  متصل عند  $س = ٣$  .**سؤال (٤) / كتاب ص ٦١ :**إذا كان  $ق(س) + هـ(س)$  متصلاً عندما  $س = ٢$  ، فهل نستنتجأن كلاً من  $ق$  ، هـ متصل عندما  $س = ٢$  ؟ برر إجابتك .**الحل :**

الاستنتاج غير صحيح

$$\left. \begin{array}{l} س ، ٢ > س \\ ٦ ، ٢ \leq س \end{array} \right\} = \text{ق (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} س ، ٦ > س \\ ٤ ، ٢ \leq س \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} س ، ١٠ > س \\ ١٠ ، ٢ \leq س \end{array} \right\} = \text{ق + هـ}$$

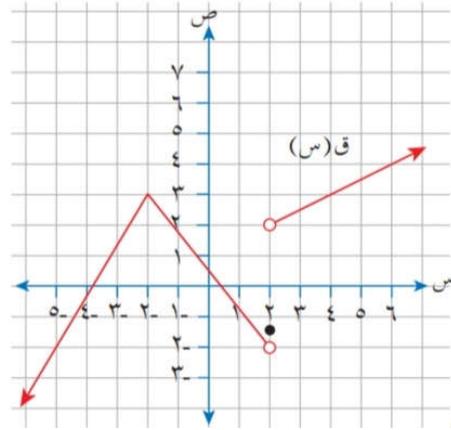
#  $ق + هـ$  متصل عند  $س = ٢$ ولكن كل من  $ق$  ، هـ غير متصلين عند  $س = ٢$ **وزارة (٢٠١٦) صيفية :**إذا كان هـ  $(س) = ٦ + ٢س$  ،

$$\left. \begin{array}{l} س ، ٢ \geq س \\ ٨ + س ، ٢ < س \end{array} \right\} = \text{ل (س)}$$

وكان  $ق(س) = هـ(س) - ل(س)$ فابحث في اتصال الاقتران  $ق$  عندما  $س = ٢$ **الحل :** (١) هـ  $(س)$  متصل عند  $س = ٢$  لأنه كثير حدود .(٢)  $ل(٢) = ٣ \times (٢) - ٢ = ٤$  ،  $ق(٢) = ٦ + ٢(٢) = ١٠$ نهـ  $٢ \leq س$   $ل(٢) = ٣ \times (٢) - ٢ = ٤$  ،  $ق(٢) = ٦ + ٢(٢) = ١٠$ نهـ  $٢ < س$   $ل(٢) = ٨ + ٢ = ١٠$ نهـ  $٢ \leq س$   $ل(س) = ١٠$ وبالتالي  $ل(س)$  متصل عند  $س = ٢$ # ويكون  $ق(س)$  متصل عند  $س = ٢$  (ناتج طرح متصلين)

أسئلة الوحدة / كتاب ص ٦٣سؤال (١) / كتاب ص ٦٣ :

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد قيمة كل مما يأتي :



أ) نهايا  $\lim_{s \rightarrow 1^-} (ق(س) + ٢هـ(س) + س)$

أولاً : نجهز نهايا  $\lim_{s \rightarrow 1^-} ق(س)$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} ق(س) = ٢ + ٢ = ٢٩$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} ق(س) = ٣ = \sqrt[٣]{٢٧}$$

ومنه

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} ق(س) + \lim_{s \rightarrow 1^-} ٢هـ(س) + \lim_{s \rightarrow 1^-} س =$$

$$٣ + ٢ \times ٣ + ١ =$$

$$= ١ + ٦ + ٣ = ١٠$$

ب) نهايا  $\lim_{s \rightarrow 1^-} (ق(س) \times هـ(س))$

$$= ٣ \times ٣ = ٩$$

سؤال (٣) / كتاب ص ٦٣ :

$$\left. \begin{array}{l} ٢أس + ب > س \\ ٧ = س \\ ٢أس - ٤ب - ٦ < س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما  $س = ١$

فجد قيمة كل من الثابتين : أ ، ب .

**الحل :**

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} ٢أس + ب = ٦ - ٤ب = ق(١)$$

$$٧ = ٦ - ٤ب = ق(١)$$

$$٧ = ٥ - ٤ب \leftarrow ١٢ = ٤ب - ١٢$$

$$ب = \frac{١٢}{٤} = ٣$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} ٢أس + ب = ٢أس + ب = ق(١)$$

$$٧ = ٣ + ٢أس = ٢أس + ٣$$

$$١٠ = ٢أس + ٣ \leftarrow ٧ = ٣ + ٢أس$$

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = أس$$

سؤال (٢) / كتاب ص ٦٣ :

إذا كانت نهايا  $\lim_{s \rightarrow 1^-} ق(س) = ٢ + ٢٩ = ٣١$  ،

نهايا  $\lim_{s \rightarrow 1^-} هـ(س) = ٣$  ،

فجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) ق(٢) = ١,٥}$$

$$\text{ب) نهايا } \lim_{s \rightarrow 1^-} ق(س) = ٢$$

ج) نهايا  $\lim_{s \rightarrow 2^-} ق(س) =$  غير موجودة

د) قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل :

# ق غير متصل عند  $س = ٢$  .

$$\text{هـ) نهايا } \lim_{s \rightarrow 2^-} (ق(س) - ٢س) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} ق(س) + \lim_{s \rightarrow 2^-} ٢س = (٢ + ٤) = ٦$$

$$= \lim_{s \rightarrow 2^-} ق(س) + \lim_{s \rightarrow 2^-} ٢س = (٢ + ٤) = ٦$$

$$= \text{نهايا } \frac{1}{\text{س} < 4} \times \frac{1 - \cancel{\text{س}}}{(2 - \text{س})} = \frac{1}{(4 - \text{س})^2}$$

$$= \frac{1 - \cancel{\text{س}}}{4} = \frac{1 - \cancel{\text{س}}}{2 \times 2} = \frac{1 - \cancel{\text{س}}}{2 \times (2 - \text{س})} =$$

$$= \text{نهايا } \frac{0}{\text{س} < 7} = \frac{5 - \text{س} + \text{س}^3}{49 - \text{س}^2}$$

$$= \text{نهايا } \frac{5 - \text{س} + \text{س}^3}{\text{س} < 7} \times \frac{5 - \text{س} + \text{س}^3}{5 - \text{س} + \text{س}^3} =$$

$$= \text{نهايا } \frac{25 - \text{س} + \text{س}^3}{\text{س} < 7} = \frac{(5 - \text{س} + \text{س}^3)(49 - \text{س}^2)}{(5 - \text{س} + \text{س}^3)}$$

$$= \text{نهايا } \frac{21 - \text{س}^3}{\text{س} < 7} = \frac{(5 - \text{س} + \text{س}^3)(7 + \text{س})(7 - \text{س})}{(5 - \text{س} + \text{س}^3)}$$

$$= \text{نهايا } \frac{3(7 - \text{س})}{\text{س} < 7} = \frac{3(7 - \text{س})}{(5 - \text{س} + \text{س}^3)(7 + \text{س})(7 - \text{س})}$$

$$= \frac{3}{140} = \frac{3}{10 \times 14}$$

**سؤال (٥) / كتاب ص ٦٤ :**

إذا كان ق(س) = س<sup>٣</sup> + ٥س ،

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \geq 1 \\ \text{س} < 1 \end{array} \right\} = \text{هـ (س)}$$

وكان ل(س) = (ق + هـ)(س) ،

فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ١ .

**الحل :**

(١) ق متصل عند س = ١ لأنه كثير حدود .

(٢) هـ متصل عند س = ١ لأن نهايا هـ (س) = هـ (١) = ٩

# ل(س) متصل عند س = ١ (ناتج جمع متصلين)

**سؤال (٤) / كتاب ص ٦٣ :**

جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي :

$$\text{أ) نهايا } \frac{1 + \text{س}}{1 + \text{س}^2} + \sqrt{3 - \text{س}}$$

$$= \frac{1 + 1 - \cancel{\text{س}}}{1 + \text{س}^2} + \sqrt{1 - \cancel{\text{س}} - 3} =$$

$$= \frac{2}{2} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

$$\text{ب) نهايا } \frac{\text{س}^5 - 5\text{س}^2}{\text{س} < 5} = \frac{\text{س}^2(\text{س}^3 - 5)}{\text{س}^2(10 - \text{س})} =$$

$$= \frac{5}{2} = \frac{\text{س}(\text{س} - 5)}{\text{س}^2(\text{س} - 5)}$$

$$\text{ج) نهايا } \frac{1 + \text{س}^2 - \text{س}^2}{\text{س} < 1} = \frac{1 + 1 \times 2 - 2}{1 \times 3 - 12} =$$

$$= \frac{0}{9} = \frac{1 + 1 \times 2 - 2}{1 \times 3 - 12} =$$

$$\text{د) نهايا } \frac{\text{س}^3 - 27}{\text{س} < 3} = \frac{27 - 27}{3 - 3} =$$

$$= \frac{(3 - \text{س})(\text{س}^2 + 3\text{س} + 9)}{\text{س}^3 - 3} =$$

$$= 27 = 9 + 9 + 9 =$$

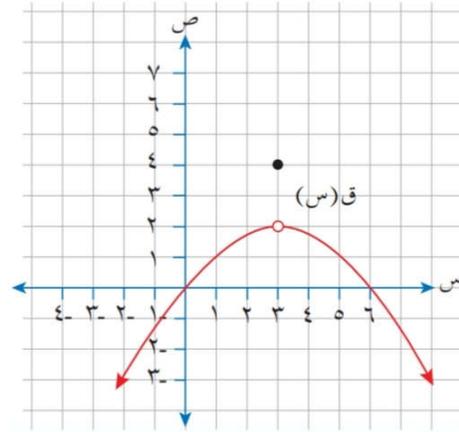
$$\text{هـ) نهايا } \frac{1}{\text{س} < 4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 - \text{س}} = \frac{1}{8 - 2\text{س}}$$

$$= \frac{(2 - \text{س}) - 2}{(2 - \text{س})^2} = \frac{2 - \text{س} - 2}{8 - 2\text{س}} = \frac{-\text{س}}{8 - 2\text{س}}$$

$$= \frac{1}{\text{س} < 4} \times \frac{(2 - \text{س}) - 2}{(2 - \text{س})^2} = \frac{1}{8 - 2\text{س}}$$

**سؤال (٦) / كتاب ص ٦٤ :**

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى

الاقتران ق ، ابحث اتصال الاقتران ق عندما  $s = 3$  .**الحل :**

$$ق(3) = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} ق(س) = 2$$

$$ق(3) \neq \lim_{s \rightarrow 3} ق(س)$$

فيكون ق غير متصل عند  $s = 3$  .**سؤال (٧) / كتاب ص ٦٤ :**

إذا كان كل من الاقترانين : ق ، ه متصلين

عندما  $s = 5$  ، وكان ه  $(5) = 4$  ،

$$\lim_{s \rightarrow 5} ق(س) + 1 = 1 \text{ ، فجد } ق(5) .$$

**الحل :**لأن ق ، ه متصلين عند  $s = 5$ 

$$ق(5) = ه(5) = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow 5} ق(س) = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow 5} ق(س) + 1 = 1$$

$$1 = \frac{ق(5) + 1}{1}$$

$$1 = \frac{ق(5) + 1}{4 \times 3}$$

$$12 = ق(5) + 1$$

$$ق(5) = 12 - 1 = 11 \text{ فيكون } ق(5) = 11$$

**سؤال (٨) / كتاب ص ٦٥ :**

$$\frac{3-s}{s^3-2s} + \frac{1}{s} = 0 \text{ إذا كان } ق(س)$$

فما قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلين ؟

**الحل :****( نجد أصفار المقام )**

$$s = 0$$

$$s^3 - 2s = 0 \Rightarrow s(s^2 - 2) = 0$$

$$s = 0 \text{ أو } s = \sqrt{2}$$

ق غير متصل عند  $s = 0, \sqrt{2}$  .**سؤال (٩) / كتاب ص ٦٥ : ( ضع دائرة )**

(١) إذا كان م عدداً ثابتاً ، وكان

$$\lim_{s \rightarrow 1} م(س) = 5 \text{ ، فإن قيمة م هي :}$$

**الحل :**

$$م(1) = 5 = 5 + 1 \times 4 - 1^2$$

$$م = 5 + 4 - 1$$

$$م = 8 \text{ ( الإجابة ج )}$$

$$(٥) \text{ إذا كانت نهاية } \left( \frac{٣}{س} \right) \text{ ق(س) } = ٩$$

$$\text{فإن قيمة نهاية } \left( \frac{٣}{س} \right) \text{ ق(س) } = ٩ :$$

**الحل :**

$$\left( \frac{٣}{س} \right) \text{ ق(س) } = ٩$$

$$\left( \frac{٣}{س} \right) \text{ ق(س) } = ٩ \Rightarrow ٣ = \frac{٩}{س}$$

$$\text{ومنه نهاية } \left( \frac{٣}{س} \right) \text{ ق(س) } = ٩ = ٣ \Rightarrow ٩ = ٣ \text{ (الإجابة أ)}$$

$$(٢) \text{ نهاية } \left( \frac{٤ - ٢}{س - ١} \right) \text{ تساوي :}$$

**الحل :**

$$\left( \frac{٤ - ٢}{س - ١} \right) = ٣$$

$$\left( \frac{٢}{س - ١} \right) = ٣ \Rightarrow ٢ = ٣(س - ١) \text{ (الإجابة ب)}$$

$$(٣) \text{ إذا كان ق(س) } = \frac{س^٥ - ٢}{س^٢ + ٣س - ٢}$$

فإن قيم س التي لا يكون عندها الاقتران ق متصلًا هي :

**الحل :** ( نجد أصفار المقام )

$$س^٢ - ٢س + ٣ = ٠$$

$$س(س - ٢) + ٣ = ٠$$

$$س = ٢ \quad س = ١$$

$$س = \{ ٢, ١ \} \text{ (الإجابة ج)}$$

$$(٤) \left. \begin{array}{l} س - ١ = ٠, \quad س \geq ٢ \\ س = ٣, \quad س = ٢ \\ س^٢ = ٢, \quad س < ٢ \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

$$\text{فإن نهاية } \left( \frac{٣}{س} \right) \text{ هـ (س) =}$$

**الحل :**

$$\left( \frac{٣}{س} \right) \text{ هـ (س) } = ١ - ٢ = ١$$

$$\left( \frac{٣}{س} \right) \text{ هـ (س) } = ٣ = ٤$$

$$\left( \frac{٣}{س} \right) \text{ هـ (س) } = \text{غير موجودة (الإجابة د)}$$

رسالتي لكم طلابي :

" كن قائداً ، فالتاريخ لا يَنْكُرُ الجنود "