الفهرس

الفصل الاول:القطوع المخروطية ....(٢)

القطع المخروطي..(٢)

المحل الهندسي..(٣)

الدائرة ....(١١)

القطع المكافئ...(٢٣)

القطع الناقص...(٣٦)

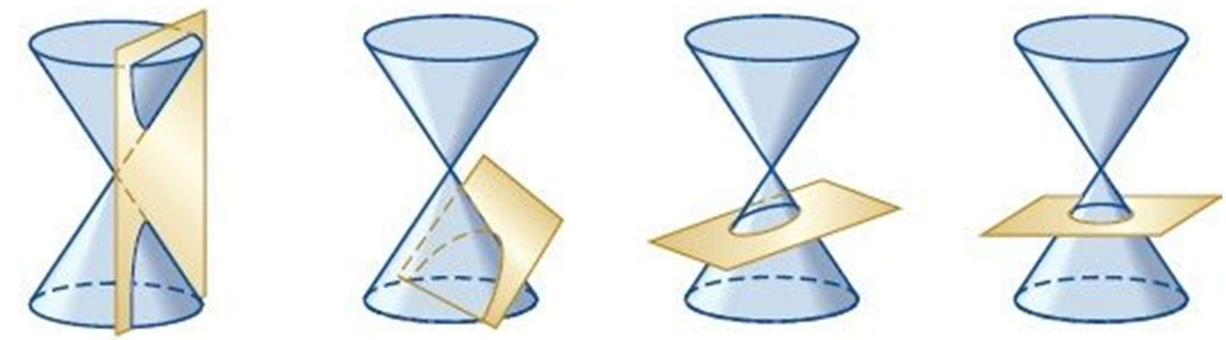
القطع الزائد..(٥٠)

الفصل الاول :القطوع المخروطية

CONIC SECTIONS

أولا القطع المخروطي

Conic sections



(١) اذا كان المستوى القاطع عموديا على المحور ولا يمر بالراس فإن الشكل الناتج يسمى دائرة .

(٢) اذا كان المستوى القاطع مائلا قليلا على المحور ويقطع احد المخروطين دون الاخر فإن الشكل الناتج يسمى قطعا ناقصا.

(٣) اذا زاد الميل القاطع ليصبح موازيا لراسم المخروط ويقطع احد المخروطين دون الاخر فإن الشكل الناتج يسمى قطعا مكافئا .

(٤) اذا قطع المستوى فرعي المخروط كان القطع لا يحتوي على نقطة الراس فإن الشكل الناتج يسمى قطعا زائدا .

ثانيا   المحل الهندسي   Locus

Adel Awwad

تعريف

يسمى المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة بالمحل الهندسي لهذه النقطة .

قوانين مهمة جدا :

(١) قانون المسافة بين نقطتين

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

(٢) قانون بعد نقطة عن خط مستقيم

$$ف = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

الامثلة

(١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٣ وحدات عن النقطة م (٣،−٢)؟

الحل :

نجد البعد بين النقطتين م (٣،−٢) ، ن (س،ص)

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$٣ = \sqrt{(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢}$$

$$\therefore (س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٩$$

(٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٤ وحدات عن النقطة م (١،٥)؟

✍ **الحل :**

نجد البعد بين النقطتين م(١،٥) ، ن(س،ص)

$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$٤ = \sqrt{(س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢}$

$\therefore (س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$

---

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٣ وحدات عن المستقيم ٤س − ٣ص = ٣ وتمر اثناء حركتها بالنقطة ب(٠،٤)؟

✍ **الحل :**

نجد البعد بين النقطة ب(٠،٤) ، والمستقيم ٤س − ٣ص = ٣

$ف = \frac{|أس_١ + بص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

$٣ = \frac{|٤س - ٣ص - ٣|}{\sqrt{١٦ + ٩}} \leftarrow ١٥ = |٤س - ٣ص - ٣|$

$١٥ = |٤س - ٣ص - ٣|$

اما $١٥ = ٤س - ٣ص - ٣ \leftarrow ٤س - ٣ص = ١٨$ تهمل لانها لا تحقق النقطة ب(٠،٤)

او $-١٥ = ٤س - ٣ص - ٣ \leftarrow ٤س - ٣ص = -١٢$ ✓✓

---

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٤ وحدات عن المستقيم س = ٤ وتمر اثناء حركتها بالنقطة ب(٨،٠)

✍ **الحل :**

$$ف = \frac{|أس_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

$$٤ = \frac{|س - ٤|}{\sqrt{١}} \leftarrow ٤ = |س - ٤|$$

$$٤ = |س - ٤|$$

إما $٤ = س - ٤ \leftarrow س = ٨$ ✓✓ تهمل لانها لا تحقق النقطة ب(٠،٤)

او $-٤ = س - ٤ \leftarrow س = ٠$ تهمل لانها لا تحقق النقطة ب(٨،٠)

---

(٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة (٢،−٢) مساويا دائما بعدها عن المستقيم س = ٤ .

✍ الحل

$$\sqrt{(س-٢)^2 + (ص+٢)^2} = |س - ٤|$$

$$\therefore (س-٢)^2 + (ص+٢)^2 = (س-٤)^2 \leftarrow س^2 - ٤س + ٤ + (ص+٢)^2 = س^2 - ٨س + ١٦$$

$$\therefore (ص+٢)^2 = -٤س + ١٢ \leftarrow (ص+٢)^2 = -٤(س-٣)$$

---

(٦) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة (−١،٢) مساويا دائما بعدها عن المستقيم ص = ٣ .

✍ الحل

$$\sqrt{(س+١)^2 + (ص-٢)^2} = |ص - ٣|$$

$$\therefore (س+١)^2 + (ص-٢)^2 = (ص-٣)^2 \leftarrow (س+١)^2 + ص^2 - ٤ص + ٤ = ص^2 - ٦ص + ٩$$

$$\therefore (س+١)^2 = -٢ص + ٥ \leftarrow (س+١)^2 = -٢(ص - \frac{٥}{٢})$$

(٧) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة (−١،١) مساويا دائما بعدها عن المستقيم س = ٢ ؟.

الحل

$$\sqrt{(\text{س}+١)^٢+(\text{ص}-١)^٢}=|\text{س}-٢|$$

$$\therefore (\text{س}+١)^٢+(\text{ص}-١)^٢=(\text{س}-٢)^٢ \leftarrow \cancel{\text{س}^٢}+٢\text{س}+١+(\text{ص}-١)^٢=\cancel{\text{س}^٢}-٤\text{س}+٤$$

$$\therefore (\text{ص}-١)^٢=-٦\text{س}+٣ \leftarrow (\text{ص}-١)^٢=-٦(\text{س}-\tfrac{١}{٢}).$$

(٨) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين (٣،٠) (−٣،٠)؟

الحل

$$\sqrt{(\text{س}-٣)^٢+\text{ص}^٢}=\sqrt{(\text{س}+٣)^٢+\text{ص}^٢}$$

تربيع الطرفين

$$\therefore (\text{س}-٣)^٢+\cancel{\text{ص}^٢}=(\text{س}+٣)^٢+\cancel{\text{ص}^٢} \leftarrow \cancel{\text{س}^٢}-٦\text{س}+\cancel{٩}=\cancel{\text{س}^٢}+٦\text{س}+\cancel{٩}$$

$$\therefore ١٢\text{س}=٠ \leftarrow \text{س}=٠$$

(٩) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين (٠،٤) (٠،−٤)؟

الحل

$$\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}-٤)^٢}=\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٤)^٢}$$

تربيع الطرفين

$$\therefore \cancel{\text{س}^٢}+(\text{ص}-٤)^٢=\cancel{\text{س}^٢}+(\text{ص}+٤)^٢ \leftarrow \cancel{\text{ص}^٢}-٨\text{ص}+\cancel{١٦}=\cancel{\text{ص}^٢}+٨\text{ص}+\cancel{١٦}$$

$$١٦\text{ص}=٠ \leftarrow \text{ص}=٠$$

(١٠) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تتحرك على بعدين متساويين من المحورين الاحداثيين .

الحل :

المقصود بالمحورين الاحداثيين ، محور السينات ومحور الصادات ؟

$$|\text{س}| = |\text{ص}|$$

$$\text{ص} = \text{س} \quad ، \quad \text{ص} = -\text{س}$$

---

(١١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين $\text{ب}_1(1،0)$ $\text{ب}_2(-1،0)$ مساويا دائما ٤ وحدات ؟

الحل

$$\text{ن ب}_1 + \text{ن ب}_2 = 4 \text{ وحدات}$$

$$\sqrt{(\text{س}-1)^2+\text{ص}^2} + \sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} = 4 \leftarrow \sqrt{(\text{س}-1)^2+\text{ص}^2} = 4 - \sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2}$$

$$\sqrt{(\text{س}-1)^2+\text{ص}^2} = 4 - \sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2}$$

تربيع الطرفين

$$(\text{س}-1)^2+\text{ص}^2 = 16 - 8\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} + ((\text{س}+1)^2+\text{ص}^2)$$

$$(\text{س}-1)^2+\cancel{\text{ص}^2} = 16 - 8\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} + ((\text{س}+1)^2+\cancel{\text{ص}^2})$$

$$(\text{س}-1)^2 = 16 - 8\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} + (\text{س}+1)^2$$

$$\cancel{\text{س}^2} - 2\text{س} + \cancel{1} = 16 - 8\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} + \cancel{\text{س}^2} + 2\text{س} + \cancel{1}$$

$$8\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} = 4\text{س} + 16 \leftarrow 2\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} = \text{س} + 4$$

$$2\sqrt{(\text{س}+1)^2+\text{ص}^2} = \text{س} + 4$$

تربيع الطرفين

$$٤(س^٢ + ٢س + ١ + ص^٢) = س^٢ + ٨س + ١٦ \leftarrow ٤س^٢ + ٨س + ٤ + ٤ص^٢ = س^٢ + ٨س + ١٦$$

$$٣س^٢ + ٤ + ٤ص^٢ = ١٦ \leftarrow ٣س^٢ + ٤ص^٢ = ١٢$$

$$\therefore \frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٣} = ١$$

---

(١٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) بحيث يكون الفرق المطلق من بعدي النقطة ن(س،ص) عن النقطتين ب$_١$(٠،٤) ب$_٢$(٠،−٤) مساويا دائما ٤ وحدات ؟

الحل

$$|ن ب_١ - ن ب_٢| = ٤ \text{ وحدات}$$

$$\sqrt{س^٢ + (ص-٤)^٢} - \sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} = ٤ \leftarrow \sqrt{س^٢ + (ص-٤)^٢} = ٤ + \sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢}$$

$$\sqrt{س^٢ + (ص-٤)^٢} = ٤ + \sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}}$$

$$\cancel{س^٢} + (ص-٤)^٢ = ١٦ + ٨\sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} + \cancel{س^٢} + (ص+٤)^٢$$

$$\cancel{ص^٢} - ٨ص + \cancel{١٦} = ١٦ + ٨\sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} + \cancel{ص^٢} + ٨ص + \cancel{١٦}$$

$$٨\sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} = ١٦ص + ١٦ \leftarrow \sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} = (٢ص + ٢)$$

$$\sqrt{س^٢ + (ص+٤)^٢} = (٢ص + ٢) \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}}$$

$$س^٢ + (ص+٤)^٢ = (٤ص^٢ + ٨ص + ٤) \leftarrow س^٢ + ص^٢ + \cancel{٨}ص + ١٦ = (٤ص^٢ + \cancel{٨}ص + ٤)$$

$$س^٢ + ص^٢ + ١٦ = (٤ص^٢ + ٤) \leftarrow س^٢ - ٣ص^٢ = -١٢$$

$$\therefore \frac{ص^٢}{٤} - \frac{س^٢}{١٢} = ١$$

---

(١٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن المستقيم س = ٩ مساويا دائما ٣ امثال بعدها عن عن النقطة (١،٠)؟

✍الحل

$٣\sqrt{(\text{س}-١)^٢+\text{ص}^٢} = |\text{س}-٩|$ تربيع الطرفين

$\therefore ٩((\text{س}-١)^٢+\text{ص}^٢) = (\text{س}-٩)^٢ \leftarrow ٩(\text{س}^٢-٢\text{س}+١+\text{ص}^٢) = \text{س}^٢-١٨\text{س}+٨١$

$(٩\text{س}^٢-\cancel{١٨}\text{س}+٩+٩\text{ص}^٢) = \text{س}^٢-\cancel{١٨}\text{س}+٨١ \leftarrow ٨\text{س}^٢+٩\text{ص}^٢=٧٢.$

$$\therefore \frac{\text{س}^٢}{٩}+\frac{\text{ص}^٢}{٨}=١$$

---

(١٤) ا،ب،جـ مثلث محيطه ٣٠ وحدة فيه احداثيات الرأسين ا،ب هما ا(٠،٥) ب(٠،−٥)والرأس جـ يتحرك في المستوى، جد معادلة المحل الهندسي الناتج من تحرك الراس جـ .

✍الحل : محيط المثلث = ٣٠ وحدة

$\therefore \overline{\text{اجـ}}+\overline{\text{بجـ}}=٢٠$

$\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}-٥)^٢}+\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٥)^٢}=٢٠ \leftarrow \sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}-٥)^٢}=٢٠-\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٥)^٢}$

$\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}-٥)^٢}=٢٠-\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٥)^٢}$ تربيع الطرفين

$\cancel{\text{س}^٢}+(\text{ص}-٥)^٢=٤٠٠-٤٠\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٥)^٢}+\cancel{\text{س}^٢}+(\text{ص}+٥)^٢$

$\cancel{\text{ص}^٢}-١٠\text{ص}+\cancel{٢٥}=٤٠٠-٤٠\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٥)^٢}+\cancel{\text{ص}^٢}+١٠\text{ص}+\cancel{٢٥}$

$٢\sqrt{\text{س}^٢+(\text{ص}+٥)^٢}=(\text{ص}+٢٠)$ تربيع الطرفين

$٤\text{س}^٢+٤(\text{ص}+٥)^٢=(\text{ص}^٢+٤٠\text{ص}+٤٠٠)$

$٤\text{س}^٢+٤\text{ص}^٢+٤٠\text{ص}+١٠٠=\text{ص}^٢+٤٠\text{ص}+٤٠٠ \leftarrow ٤\text{س}^٢+٣\text{ص}^٢=٣٠٠$

$$\therefore \frac{\text{س}^٢}{٧٥}+\frac{\text{ص}^٢}{١٠٠}=١$$

تمرين
١

(١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٧وحدات عن النقطة م(–٢،٣)؟

(٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٤ وحدات عن المستقيم ٤س + ٥ص = ٢ ؟

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره وحدة واحدة عن المستقيم س = ٧ ؟

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين $ب_١$ (٠،٣) $ب_٢$ (٠،–٣) مساويا دائما ٣ وحدات؟

الفصل الثاني

معادلات القطوع المخروطية

EQUATIONES OF CONIC SECTIONS

أولا

الدائرة

THE CIRCL

تعريف

Adel Awwad

هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص)التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى المركز يساوي مقدار ثابت وهو نصف القطر .

معادلة الدائرة

١ الصورة القياسية .

مركزها (د،هـ) ونصف قطرها (ر).

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ر^{٢}

١ الصورة العامة.

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص+جـ = ٠

المركز م(−ل،−ك)

ر = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$

ملاحظة

في معادلة الدائرة دائما معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

الامثلة

١ جد مركز ونصف القطر في الدوائر التالية :

١) $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

الحل :

المركز $(٠،٠)$ $ر = \sqrt{٩} = ٣$

٢) $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٨١$

الحل :

المركز $(٢،٠)$ $ر = \sqrt{٨١} = ٩$

٣) $(س + ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٥$

الحل :

المركز $(-١،-٣)$ $ر = \sqrt{١٥}$

٤) $(٢س + ٢)^{٢} + (٢ص - ٦)^{٢} = ١٦$

الحل :

$٤(س + ١)^{٢} + ٤(ص - ٣)^{٢} = ١٦ \leftarrow (س + ١)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٤$

المركز $(-١،٣)$ $ر = \sqrt{٤} = ٢$

٥) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س = ٥$

الحل :

$س^2 + ص^2 - ٤س - ٥ = ٠$

$٢ل = -٤ \leftarrow ل = -٢$ $\quad$ $٢ك = ٠ \leftarrow ل = ٠$

$م(-ل ، -ك) = م(٢ ، ٠)$ $\quad$ $ر = \sqrt{٤ + ٠ + ٥} = ٣$

٦) $س^2 + ص^2 + ٤س - ٦ص = ٣$

الحل :

$س^2 + ص^2 + ٤س - ٦ص - ٣ = ٠$

$٢ل = ٤ \leftarrow ل = ٢$ $\quad$ $٢ك = -٦ \leftarrow ل = -٣$

$م(-ل ، -ك) = م(-٢ ، ٣)$ $\quad$ $ر = \sqrt{٤ + ٩ + ٣} = ٤$

٧) $٢س^2 + ٢ص^2 - ٤س + ٨ص = ١٠$

الحل :

$س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص = ٥ \leftarrow س^2 + ص^2 - ٢س + ٤ص - ٥ = ٠$

$٢ل = -٢ \leftarrow ل = -١$ $\quad$ $٢ك = ٤ \leftarrow ل = ٢$

$م(-ل ، -ك) = م(١ ، -٢)$ $\quad$ $ر = \sqrt{١ + ٤ + ٥} = \sqrt{١٠}$

٢ جد معادلة الدائرة التي مركزها (-٢ ، ٣) ونصف قطرها ٤ وحدات .

الحل :

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$

$(س + ٢)^2 + (ص - ٣)^2 = ١٦$

٣ جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها ٧ وحدات؟

الحل :

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

٤ جد معادلة الدائرة التي مركزها (١،٤) وتمر بالنقطة (٣،٥)؟

الحل :

نصف القطر : هي المسافة بين مركز الدائرة واي نقطة على محيط الدائرة

المسافة بين النقطتين (١،٤) (٣،٥) تمثل نصف القطر

$ر = \sqrt{(٣-١)^٢ + (٥-٤)^٢}$

$ر = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

$(س - ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٥$

٥ جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها هما (٢،٤) (٦،٢) وتمر بالنقطة (٦،٢).

الحل :

احداثيات منتصف قطعة مستقيمة

$(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢})$

$(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢})$

$م(\frac{٢+٦}{٢}، \frac{٤+٢}{٢}) = م(٤،٣)$

$ر = \sqrt{(٤-٢)^٢ + (٣-٤)^٢}$

$ر = \sqrt{٥}$

$(س - ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٥$

٦ جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢،٣) وتمس محور السينات

اذا كانت الدائرة تمس محور السينات فإن ر = ص (الاحداثي الصادي لمركز الدائرة)

اذا كانت الدائرة تمس محور الصادات فإن ر = س (الاحداثي السيني لمركز الدائرة)

الحل :

$$(\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}=٩$$

---

٧ جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٢،٢) وتمس محور الصادات.

الحل :

$$(\text{س}+٢)^{٢}+(\text{ص}-٢)^{٢}=٤$$

---

٨ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (١،٢) وتمس محور السينات عند (٧،٠) .

الحل :

بما ان الدائرة تمس محور السينات عند (٧،٠) فإن الاحداثي الصادي لمركز الدائرة = طول نصف القطر

$$(\text{س}-٧)^{٢}+(\text{ص}-\text{ر})^{٢}=\text{ر}^{٢}$$

(١،٢) تحقق المعادلة

$$(١-٧)^{٢}+(٢-\text{ر})^{٢}=\text{ر}^{٢}\leftarrow ٣٦+٤-٤\text{ر}+\cancel{\text{ر}^{٢}}=\cancel{\text{ر}^{٢}}\leftarrow ٤٠=٤\text{ر}$$

$$٤٠=٤\text{ر}\leftarrow ١٠=\text{ر}$$

$$(\text{س}-٧)^{٢}+(\text{ص}-١٠)^{٢}=١٠٠$$

---

٩ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٢،٣) وتمس محور الصادات عند (٠،٥) .

الحل :

$$(\text{س}-\text{ر})^{٢}+(\text{ص}-٥)^{٢}=\text{ر}^{٢}$$

(٢،٣) تحقق المعادلة

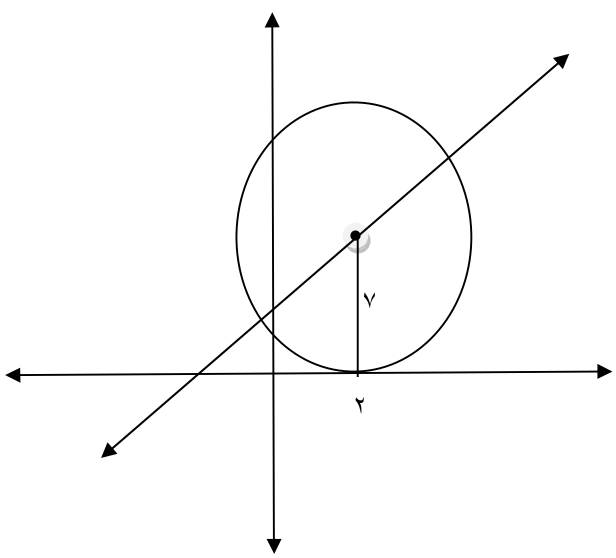
$(٢ - ر)^{٢} + (٣ - ٥)^{٢} = \cancel{ر^{٢}} \leftarrow ٤ - ٤ر + ٤ = \cancel{ر^{٢}} \leftarrow ٨ = ٤ر$

$٨ = ٤ر \leftarrow ٢ = ر$

$(س - ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤$

---

١٠ جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٣س + ١ وتمس محور السينات عند النقطة (٢،٠) .



الحل :

$(س - ٢)^{٢} + (ص - ٧)^{٢} = ٤٩$

---

١١ جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٢س + ٥ وتمس محور السينات عند النقطة (٣،٠) .

الحل :

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ١١)^{٢} = ١٢١$

---

١٢ جد معادلة الدائرة التي مركزها (٤،٤) وتمس المستقيم ص = ٢س − ٣ .

الحل :

٢س − ص − ٣ = ٠ ، (٤،٤)

نصف القطر: يمثل المسافة بين نقطة (مركز الدائرة) ومستقيم (المماس) .

$$\text{نق} = \frac{|\text{٤}\times\text{٢}-\text{٤}\times\text{١}-\text{٣}|}{\sqrt{\text{٤}+\text{١}}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٥}}}$$

$$(\text{س}-\text{٤})^{\text{٢}} + (\text{ص}-\text{٤})^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٥}}$$

---

١٢ جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٣) وتمس المستقيم ٣س + ٤ص + ٢ = ٠

✍الحل :

٣س + ٤ص + ٢ = ٠ ، (٢، ٣)

نصف القطر: يمثل المسافة بين نقطة (مركز الدائرة) ومستقيم (المماس)

$$\text{نق} = \frac{|\text{٣}\times\text{٢}+\text{٤}\times\text{٣}+\text{٢}|}{\sqrt{\text{٩}+\text{١٦}}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{٥}} = \text{٤}$$

$$(\text{س}-\text{٢})^{\text{٢}} + (\text{ص}-\text{٣})^{\text{٢}} = \text{١٦}$$

---

١٣ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠، ٠) ، (٨، ٠) ، (٤، −٤)

✍الحل :

يجب ان نستخدم الصورة العامة في الحل الصورة العامة.

$$\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} + \text{٢ل س} + \text{٢ك ص} + \text{جـ} = \text{٠}$$

(٠، ٠)

٠ + ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ٠ ← جـ = ٠ .... (١)

(٨، ٠)

٦٤ + ٠ + ١٦ل + ٠ + ٠ = ٠ ← ل = −٤ .... (٢)

(٤، −٤)

١٦ + ١٦ + ٨ل − ٨ك = ٠ ← ٣٢ − ٣٢ − ٨ك = ٠ ← ك = ٠ ....(٣)

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٨س = ٠

---

١٤ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠،٠) ، (٢،٠) ، (٣، −١)

الحل :

يجب ان نستخدم الصورة العامة في الحل .

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

(٠،٠)

٠ + ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ٠ ← جـ = ٠ ....(١)

(٢،٠)

٤ + ٠ + ٤ل + ٠ + ٠ = ٠ ← ل = −١ ....(٢)

(٣، −١)

٩ + ١ + ٦ل − ٢ك = ٠ ← ٤ − ٢ك = ٠ ← ك = ٢ ....(٣)

∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٤ص = ٠

---

١٥ جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على الخط المستقيم ٣س + ٤ص = ٧ و تمر بالنقاط (١، −٢) ، (٤، −٣) .

الحل :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

(١، −٢)

١ + ٤ + ٢ل − ٤ك + جـ = ٠ ← ٢ل − ٤ك + جـ = −٥ ....(١)

(٤، −٣)

١٦ + ٩ + ٨ل − ٦ك + جـ = ٠ ← ٨ل − ٦ك + جـ = −٢٥ ....(٢)

المركز (−ل، −ك) يقع على المستقيم ٣س + ٤ص = ٧

∴ −٣ل − ٤ك = ٧ ....(٣)

(١) مع (٢)

−٢ل + ٤ك − ~~جـ~~ = ٥

٨ل − ٦ك + ~~جـ~~ = −٢٥

٦ل − ٢ك = −٢٠

٦ل − ٢ك = −٢٠ ← ٣ل − ك = −١٠ ....(٤)

(٣) ، مع (٤)

− ~~٣ل~~ − ٤ك = ٧

~~٣ل~~ − ك = −١٠

−٥ك = −٣

−٥ك = −٣ ← ك = $\frac{٣}{٥}$

٣ل = $\frac{٣}{٥}$ − ١٠ ← ٣ل = $\frac{-٤٧}{٥}$ ← ل = $\frac{-٤٧}{١٥}$

٢ل − ٤ك + جـ = −٥ ← ٢ × $\frac{-٤٧}{١٥}$ − ٤ × $\frac{٣}{٥}$ + جـ = −٥

$\frac{-٩٤}{١٥}$ − $\frac{٣٦}{١٥}$ + جـ = −٥ ← $\frac{-٢٦}{٣}$ + جـ = −٥ ← جـ = $\frac{-١٥}{٣}$ + $\frac{٢٦}{٣}$ ← جـ = $\frac{١١}{٣}$

س^{٢} + ص^{٢} − $\frac{٩٤}{١٥}$س + $\frac{٦}{٥}$ص + $\frac{١١}{٣}$ = ٠

١٦ تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى بحيث $\text{س} = ٥ + ٣\text{جاهـ}$ ، $\text{ص} = ٢ + ٣\text{جتاهـ}$ حيث هـ زاوية متغيرة جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) وبين نوعه .

الحل :

$$\text{س} = ٥ + ٣\text{جاهـ} \leftarrow \text{جاهـ} = \frac{(\text{س} - ٥)}{٣} \qquad \text{ص} = ٢ + ٣\text{جتاهـ} \leftarrow \text{جتاهـ} = \frac{\text{ص} - ٢}{٣}$$

$$\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = \frac{(\text{س} - ٥)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} - ٢)^{٢}}{٩}$$

$$٩ = (\text{س} - ٥)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢}$$ دائرة

١٧ تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى بحيث $\text{س} = ٧ + ٤\text{جاهـ}$ ، $\text{ص} = ٥ + ٤\text{جتاهـ}$ حيث هـ زاوية متغيرة جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) وبين نوعه .

الحل :

$$\text{س} = ٧ + ٤\text{جاهـ} \leftarrow \text{جاهـ} = \frac{(\text{س} - ٧)}{٤} \qquad \text{ص} = ٥ + ٤\text{جتاهـ} \leftarrow \text{جتاهـ} = \frac{\text{ص} - ٥}{٤}$$

$$\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = \frac{(\text{س} - ٧)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص} - ٥)^{٢}}{١٦}$$

$$١٦ = (\text{س} - ٧)^{٢} + (\text{ص} - ٥)^{٢}$$ دائرة

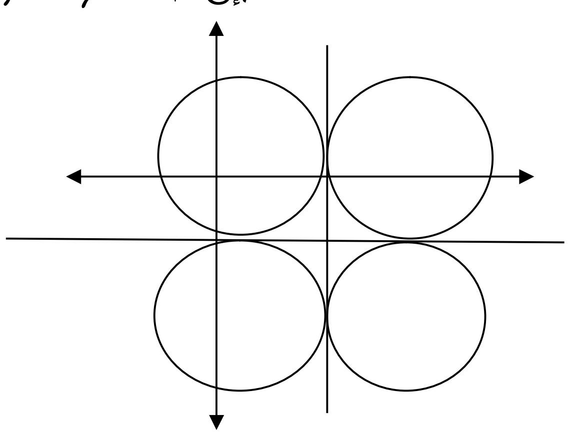
١٨ جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين $\text{ص} = -١$ ، $\text{س} = ٣$ علما بإن نصف قطرها ٣ وحدات

الحل : $(\text{س} - ٦)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} = ٩$

$$\text{س}^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} = ٩$$

$$\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ٩$$

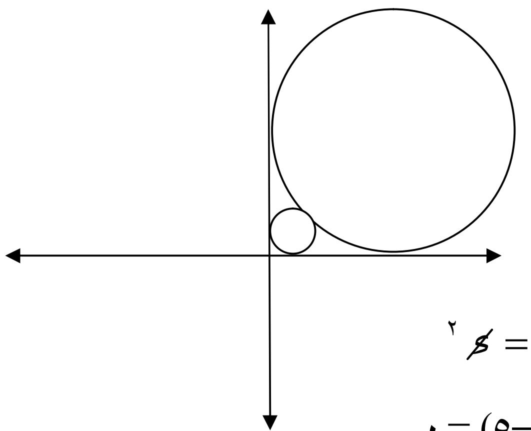
$$(\text{س} - ٦)^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ٩$$



١٩ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (١،٢) .

الحل :

بما ان الدائرة تمس المحورين وتمر بالنقطة (١،٢) ، اذن الدائرة تقع في الربع الاول



المركز (ى،ى) ونصف القطر = د

$$(س - ى)^٢ + (ص - ى)^٢ = ى^٢$$

(١،٢) تحقق معادلة الدائرة

$$(١ - ى)^٢ + (٢ - ى)^٢ = ى^٢ \leftarrow ١ - ٢ى + ى^٢ + ٤ - ٤ى + \cancel{ى^٢} = \cancel{ى^٢}$$

$$١ - ٢ى + ى^٢ + ٤ - ٤ى = ٠ \leftarrow ى^٢ - ٦ى + ٥ = ٠ \leftarrow (ى - ١)(ى - ٥) = ٠$$

$$(ى - ١)(ى - ٥) = ٠ \leftarrow ى = ٥ \quad ، \quad ى = ١$$

$$(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$$

$$(س - ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١$$

تمرين ٢

(١) جد نصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

(٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣،٥) وتمس المستقيم $٢س + ٣ص + ٤ = ٠$

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م(س،ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا مقداره ٣ وحدات عن المستقيم الذي معادلته $٣س + ٤ص = ٥$ وتمر اثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها

$(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

(٤) جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند (٢،٠) ويقع مركوها على المستقيم $ص = ٢س$.

(٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣،٤) وتمس المستقيم $٣س + ٢ص + ٤ = ٠$

(٦) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين ويقع مركزها على المستقيم $ص = ٢$.

(٧) جد معادلة الدائرة التي تقع في الربع الثاني وتمس محور الصادات ومركزها يقع على المستقيم $٢س + ص = ٦$ ونصف قطرها ٤ وحدات .

(٨) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (-١،٨) .

(٩) جد طول الوتر العمودي على محور السينات المار بالنقطة (٤،٠) في الدائرة التي معادلتها

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

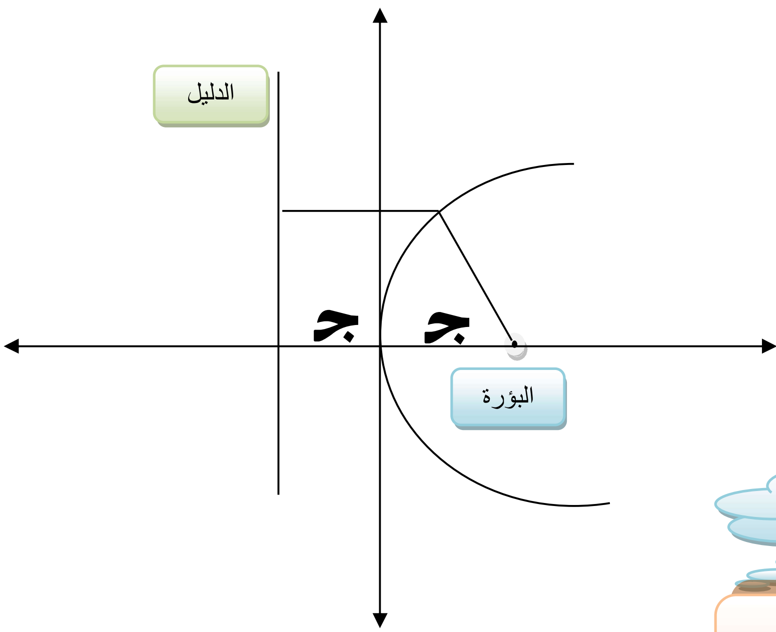
(١٠) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٢،٠) وتمس محور الصادات وتمس المستقيم $ص = ١$.

ثانيا القطع المكافئ THE PARABOLA

Adel Awwad

تعريف

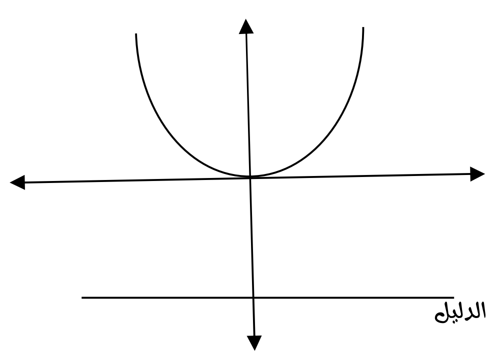
هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص) التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم يسمى الدليل



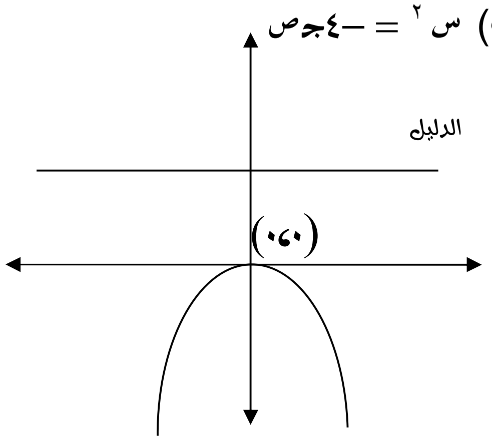
معادلة القطع المكافئ

اذا كان احداثيات رأس القطع (٠،٠)

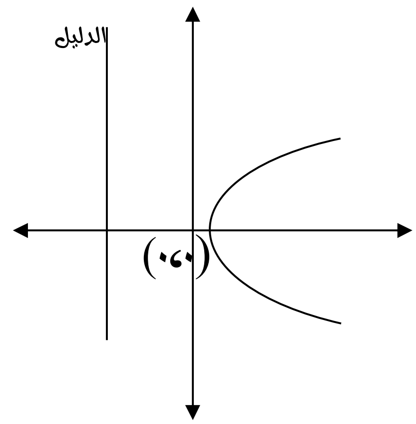
(أ) س ^{٢} = ٤جـص



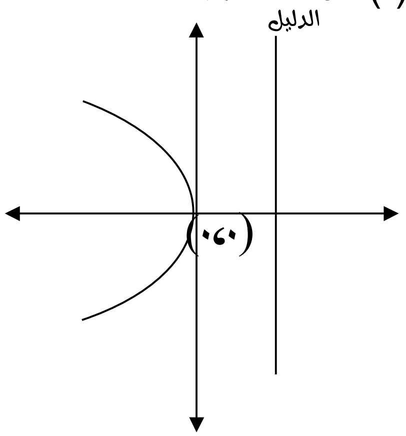
(ب) س ^{٢} = −٤جـص



(ج) ص^{٢} = ٤جس

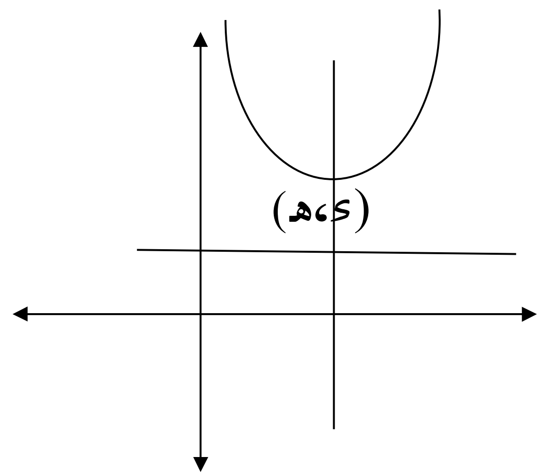


(د) ص^{٢} = −٤جس

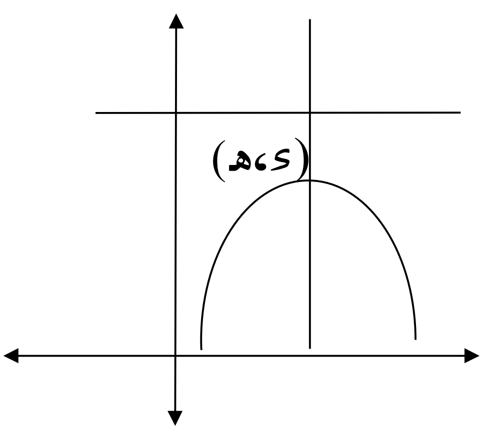


اذا كان احداثيات رأس القطع (د،هـ)

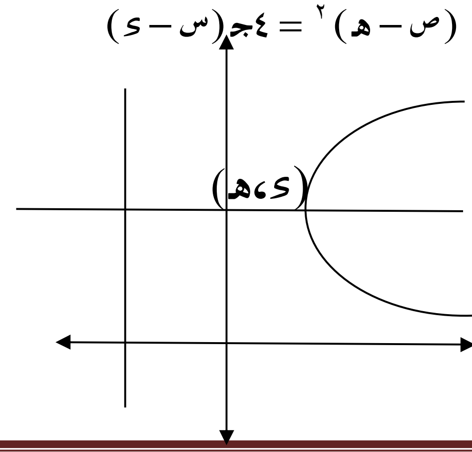
(أ) (س − د)^{٢} = ٤جـ(ص − هـ)



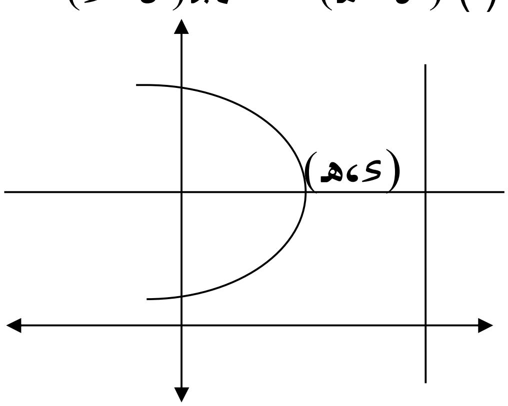
(ب) (س − د)^{٢} = −٤جـ(ص − هـ)



(ج) (ص − هـ)^{٢} = ٤جـ(س − د)



(د) (ص − هـ)^{٢} = −٤جـ(س − د)



ملاحظات مهمة جدا

١) مايميز معادلة القطع المكافئ هو أن أحد المتغيرين يكون مربع والاخر يكون غير مربع .
٢) المسافة بين البؤرة والرأس تساوي جـ والمسافة بين الرأس والدليل تساوي جـ .
٣) البؤرة دائما داخل الشكل والدليل خلف الشكل .
٤) البؤرة = الرأس + جـ.

الامثلة

(١) جد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل

(أ) ص ^٢^ = ٤س

الحل :

احداثيات الرأس (٠،٠)   ٤جـ = ٤ ←جـ = ١

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (٠،٠) +١

احداثيات البؤرة = (١،٠)

معادلة المحور ص= ٠   معادلة الدليل س= -١

(ب) س ^٢^ = ١٦ص

الحل :

احداثيات الرأس (٠،٠)   ٤جـ = ١٦ ←جـ = ٤

احداثيات البؤرة = الرأس+ جـ

احداثيات البؤرة = (٠،٠) + ١

احداثيات البؤرة = (٠،٤)

معادلة المحور س= ٠		معادلة الدليل ص= -٤

(جـ) (ص – ١)^٢ = ٢٤(س + ١)

الحل :

احداثيات الرأس (–١،١)		٤جـ = ٢٤ ← جـ = ٦

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (–١،١) + ٦

احداثيات البؤرة = (٥،١)

معادلة المحور ص= ١		معادلة الدليل س= -٧

(د) (ص + ١)^٢ = –٨(س – ٢)

الحل :

احداثيات الرأس (٢،-١)		٤جـ = –٨ ← جـ = –٢

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (٢،-١) – ٢

احداثيات البؤرة = (٠،-١)

معادلة المحور ص= -١		معادلة الدليل س = ٤

(هـ) س ^{٢} + ٨س − ٤ص = ٤

الحل :

س ^{٢} + ٨س − ٤ص = ٤ ← س ^{٢} + ٨س = ٤ص + ٤

اكمال المربع

$\left(\frac{٨}{٢}\right)^{٢}$ = ١٦

س ^{٢} + ٨س + ١٦ = ٤ص + ٤ + ١٦ ← س ^{٢} + ٨س + ١٦ = ٤ص + ٢٠

(س + ٤) ^{٢} = ٤(ص + ٥)

احداثيات الرأس (−٤، −٥) ٤جـ = ٤ ← جـ = ١

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (−٤، −٥) + ١

احداثيات البؤرة = (−٤، −٤)

معادلة المحور س= −٤ معادلة الدليل ص =−٦

(و) س ^{٢} + ٨س − ٤ص = ٤

الحل :

ص ^{٢} − ٤ص + ٤س − ٤ = ٠ ← ص ^{٢} − ٤ص = −٤س + ٤

اكمال المربع

$\left(\frac{-٤}{٢}\right)^{٢}$ = ٤

$ص^{٢} - ٤ص + ٤ = -٤س + ٨ \leftarrow ص^{٢} - ٤ص + ٤ = -٤(س - ٢)$

$(ص - ٢)^{٢} = -٤(س - ٢)$

احداثيات الرأس (٢،٢)　　$٤جـ = -٤ \leftarrow جـ = -١$

احداثيات البؤرة = الرأس + ج

احداثيات البؤرة = (٢،٢) − ١

احداثيات البؤرة = (١،٢)

معادلة المحور ص=٢　　　معادلة الدليل　س =٣

---

(٢) جد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات رأسه (٢،٣) واحداثيات بؤرته = (-١،٣).

الحل :

جـ = المسافة بين البؤرة والرأس

جـ = ٣

$(ص - ٣)^{٢} = -١٢(س - ٢)$

---

(٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات رأسه (١،١) ومعادلة دليله ص = -٢ .

الحل :

جـ = ٣

$(س - ١)^{٢} = ١٢(ص - ١)$

---

(٤) جد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات بؤرته (٣،١) ومعادلة دليله ص = -٣.

الحل :

احداثيات الراس = (٣،-١)

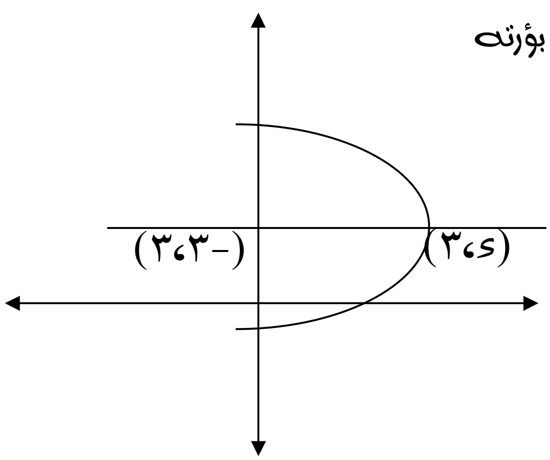
جـ = ٢

(س − ٣)^{٢} = ٨(ص + ١)

(٥) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات و احداثيات بؤرته (-٣،٣) ويمر بالنقطة (٠،-١) ويقع راسه على يمين بؤرته.

الحل :

بما ان محوره يوازي محور السينات وراسه على يمين بؤرته



(ص − هـ)^{٢} = −٤جـ(س − د)

هـ = ٣   د−جـ = −٣ ← د=جـ − ٣

(ص − ٣)^{٢} = −٤جـ(س−جـ + ٣)

ويمر بالنقطة (٠،-١)

∴ ١٦ = −٤جـ(٣−جـ) ← ٤ = −٣جـ+جـ^{٢} ← ٤ =جـ^{٢} − ٣جـ − ٤ = ٠

جـ^{٢} − ٣جـ − ٤ = ٠ ← جـ = ٤ ، جـ = −١

(ص − ٣)^{٢} = −١٦(س − ١)

(ص − ٣)^{٢} = ٤(س + ٤) تهمل

(٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات و احداثيات راسه (٢،١) ويمر بالنقطة (٤،٥).

الحل :

احداثيات راسه (٢،١)

$(س - د)^2 = 4ج(ص - هـ)$

$(س - 2)^2 = 4ج(ص - 1)$

ويمر بالنقطة $(4، 5)$

$(4 - 2)^2 = 4ج(5 - 1) \leftarrow 4 = 16ج \leftarrow ج = \frac{1}{4}$

$\therefore (س - 2)^2 = (ص - 1)$

ملاحظات مهمة

(أ) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات هي :

$ص = اس^2 + ب س + ج$ ، $ا \neq 0$ ، $ا، ب، ج \in ح$

(ب) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات هي :

$س = اص^2 + ب ص + ج$ ، $ا \neq 0$ ، $ا، ب، ج \in ح$

(7) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط $(3، 2)$ ، $(6، 1)$ ، $(0، 1)$ ودليله يوازي محور السينات

الحل :

بما ان دليله يوازي محور السينات

$\therefore$ محوره يوازي محور الصادات

$ص = اس^2 + ب س + ج$

$(3، 2)$

$2 = 9ا + 3ب + ج$......(1)

(٦،١)

١ = ٣٦أ + ٦ب + جـ........(٢)

(٠،١)

١ = ٠ + ٠ + جـ ← جـ = ١

٩أ + ٣ب = ١ ← −١٨أ − ٦ب = −٢

٣٦أ + ٦ب = ٠ ← ٣٦أ + ٦ب = ٠

١٨أ = −٢

١٨أ = −٢ ← $\frac{-١}{٩}$

١ = ٣٦ × $\frac{-١}{٩}$ + ٦ب + ١ ← ٠ = −٤ + ٦ب ← ب = $\frac{٢}{٣}$

ص = $\frac{-١}{٩}$ س^{٢} + $\frac{٢}{٣}$ س + ١

---

(٨) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم ص=س+١ ويمر بالنقطتين (٠،٢) ، (٤،٢) .

✍الحل:

(س − د)^{٢} = ٤جـ(ص − هـ)

احداثيات الرأس (د،د+١)

(س − د)^{٢} = ٤جـ(ص − د −١)

(٠،٢) ، (٤،٢) تحقق المعادلة

د^{٢} = ٤جـ(١ − د)........(١)

(٤ − د)^{٢} = ٤جـ(١ − د).......(٢)

$$\frac{د^{٢}}{(٤-د)^{٢}}=\frac{٤ج(١-د)}{٤ج(١-د)} \leftarrow د^{٢}=(٤-د)^{٢}$$

$$د^{٢}=(٤-د)^{٢} \leftarrow \cancel{د^{٢}}=١٦-٨د+\cancel{د^{٢}} \leftarrow د=٢$$

$$\therefore (س-٢)^{٢}=٤ج(ص-٣)$$

$$\therefore ٤=-٤ج \leftarrow ج=-١$$

$$\therefore (س-٢)^{٢}=-٤(ص-٣)$$

(٩) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور السينات ويمر بالنقطتين (٨،١٠)، (٤،٤) .

الحل :

احداثيات الرأس (د،٠)

$$ص^{٢}=٤ج(س-د)$$

(٨،١٠) تحقق المعادلة

$$١٠٠=٤ج(٨-د)........(١)$$

(٤،٤) تحقق المعادلة

$$١٦=٤ج(٤-د).......(٢)$$

$$\frac{٤}{٢٥}=\frac{(٤-د)}{(٨-د)} \leftarrow ١٠٠-٢٥د=٣٢-٤د$$

$$١٠٠-٢٥د=٣٢-٤د \leftarrow ٦٨=٢١د$$

$$٦٨=٢١د \leftarrow د=\frac{٦٨}{٢١} \qquad \therefore ج=\frac{٢١}{٤}$$

$$\therefore ص^{٢}=٢١\left(س-\frac{٦٨}{٢١}\right)$$

(١٠) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور السينات ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم ص = س مع الدائرة س ٢ + ص ٢ +٦س=٠ .

الحل :

احداثيات الرأس (د،٠)

(ص – هـ) ٢ = ٤جـ(س – د)

ص ٢ = ٤جـ(س – د)

س ٢ + ص ٢ +٦س=٠

∴ ٢س ٢ +٦س=٠ ⟵ ٢س(س+٣)=٠ ⟵ س = ٠ ، س = –٣

(٠،٠) تحقق المعادلة

٠ = ٤جـ × د ⟵ د = ٠

(–٣،–٣) تحقق المعادلة

٩ = ٤جـ(–٣) ⟵ جـ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ص ٢ = –٣س

---

(١١) تتحرك النقطة و(س،ص) على منحنى قطع مكافئ ينطبق محوره على محور الصادات ومعادلته ص = ق(س) بحيث يتحدد موقعها في اللحظة ن ≥ ٠ بالمعادلتين ص =جا٢ن ، س =جتان–جان

الحل :

ص =جا٢ن

س =جتان–جان ⟵ س ٢ =جتا ٢ ن–٢جانجتان+جا ٢ ن

$س^٢ = ١ - جا٢ن \leftarrow س^٢ = ١ - ص \leftarrow س^٢ = -(ص - ١)$

$\therefore س^٢ = -(ص - ١)$ قطع مكافئ .

(١٢) اذا كان المستقيم $ص = س + ١$ مماسا لمنحنى القطع المكافئ $س^٢ + ٢س = ٨ص + جـ$ جد الثابت جـ ثم عين معادلته .

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ١$$

$س^٢ + ٢س = ٨ص + جـ \leftarrow ٢س + ٢ = ٨\frac{ءص}{ءس} \leftarrow ٢س + ٢ = ٨$

$٢س + ٢ = ٨ \leftarrow ٢س = ٦ \leftarrow س = ٣ \leftarrow (٣،٣)$

$س^٢ + ٢س = ٨ص + جـ \leftarrow ٩ + ٦ = ٢٤ + جـ \leftarrow جـ = -٩$

$س^٢ + ٢س = ٨ص - ٩$

(١٣) قذف جسم رأسيا الى الاعلى حسب العلاقة $ف(ن) = ٦ن - ن^٢$ ، حيث ن : الزمن ، ف :المسافة جد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم مستخدما تعريف القطع المكافئ .

الحل :

$ف(ن) = ٦ن - ن^٢ \leftarrow ن^٢ - ٦ن = -ف$

اكمال المربع $ن^٢ - ٦ن + ٩ = -ف + ٩ \leftarrow (ن - ٣)(ن - ٣) = -(ف - ٩)$

$(ن - ٣)^٢ = -(ف - ٩)$

اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم هو ف =٩ عندما ن = ٣ .

تمرين ٣

(١) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٢،٣) ، (-١،٦) ، (١،٠) ومحوره يوازي محور الصادات

(٢) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٣،١) ، (٦،٣) ، (٣،-٣) ومحوره يوازي محور السينات.

(٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٣،٢٩) ، (-٥،٥) ، (-٧،٤) ومحوره يوازي محور الصادات.

(٤) قذف جسم رأسيا الى الاعلى حسب العلاقة ف(ن) = ٨ن – ٢ن^{٢} ، حيث ن : الزمن ، ف :المسافة جد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم مستخدما تعريف القطع المكافئ .

(٥) تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى الديكارتي بحيث ان ص =جاهـجتاهـ ، س =جتاهـ+جاهـ حيث قياس زاوية حادة ، ما معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص).

(٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ورأسه يقع على المستقيم ص=س+٢ ويمر بالنقطتين (٣،٥) ، (٣،٢) .

(٧) جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره س=٢ ومعادلة دليله ص=١ ويمر منحناه بالنقطة (٦،٦) .

(٨) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٤،٢) ويقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته (ص + ٢)^{٢} = ١٢(س – ٢).

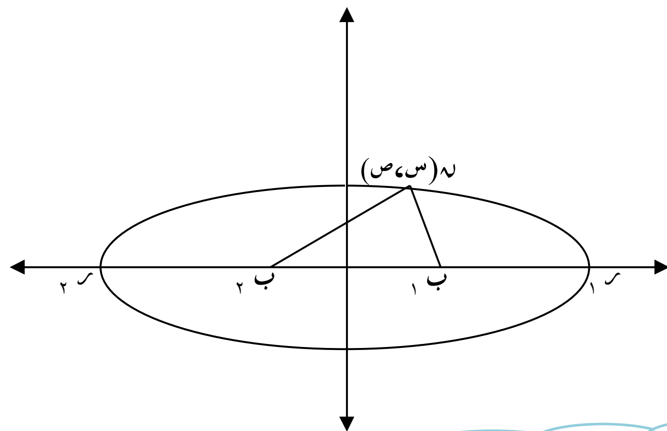
(٩) اثبت ان معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ ص^{٢} = ٤جس عند النقطة (س$_{١}$،ص$_{١}$) هي ص$_{١}$ص = ٢ج(س + س$_{١}$)

ثالثا القطع الناقص THE ELLIPSE

Adel Awwad

تعريف

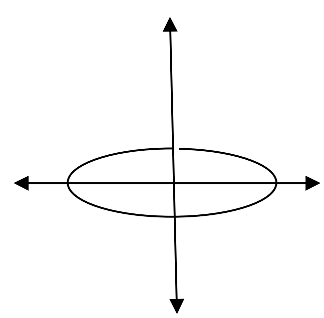
هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص) التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب$_{١}$،ب$_{٢}$ تسميان البؤرتين يساوي مقدار ثابت وهو ٢أ .



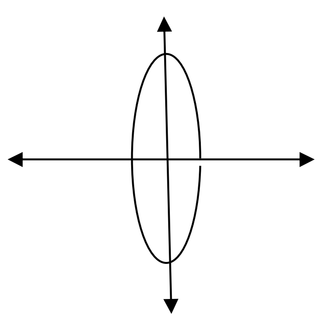
معادلة القطع الناقص

اذا كان احداثيات المركز (٠،٠)

(أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

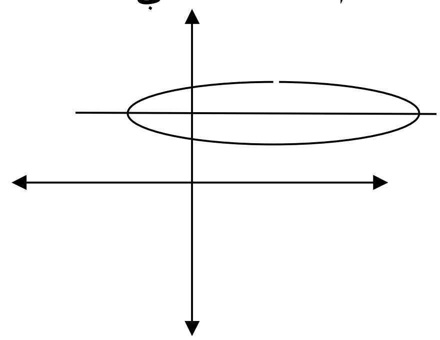


(ب) $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

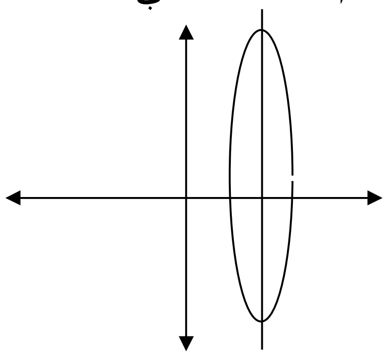


اذا كان احداثيات المركز (د،هـ)

أ) $\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$



(ب) $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$



ملاحظات مهمة جدا

(١) ما يميز معادلة القطع الناقص ان المتغيرين مربعين وبينهما اشارة + والمعاملات مختلفة .

(٢) أ : المسافة بين المركز والراس

(٣) $\text{أ}^{٢}$: دائما هو العدد الاكبر .

جـ : المسافة بين المركز والبؤرة .

$\text{ب}^{٢}$: دائما هو العددالاصغر.

(٤) طول المحور الاكبر = ٢أ

(٥) $\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$

طول المحور الاصغر = ٢ب

(٦) الاختلاف المركزي $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} < ١$

(٧) البعد البؤري = ٢جـ

الامثلة

(١) جد عناصر القطوع الناقصة فيما يلي :

(أ) $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

الحل :

المركز (٠،٠)

$أ^{٢} = ١٦ \leftarrow أ = ٤$ $\qquad$ $ب^{٢} = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow جـ^{٢} = ١٦ - ٩ \leftarrow جـ^{٢} = ٧ \leftarrow جـ = \sqrt{٧}$

احداثيات الرأس = (٠،٠) $\pm$ أ

$ر_{١}$ (أ،٠) ، $ر_{٢}$ (−أ،٠) $\leftarrow$ (٤،٠)،(−٤،٠)

احداثيات البؤرتين = (٠،٠) $\pm$ جـ

$ب_{١}$ (جـ،٠) ، $ب_{٢}$ (−جـ،٠) $\leftarrow$ $(\sqrt{٧}،٠)$،$(-\sqrt{٧}،٠)$

طول المحور الاكبر = ٢أ = ٨

طول المحور الاصغر = ٢ب = ٦

البعد البؤري = ٢جـ = $٢\sqrt{٧}$

$هـ = \frac{\sqrt{٧}}{٤} < ١$

(ب)

$\frac{(ص - ١)^{٢}}{١٤٤} + \frac{(س + ١)^{٢}}{٢٥} = ١$

الحل :

المركز (-١،١)

$أ^٢ = ١٤٤ \leftarrow أ = ١٢$ $ب^٢ = ٢٥ \leftarrow ب = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١٤٤ - ٢٥ \leftarrow جـ^٢ = ١١٩ \leftarrow جـ = \sqrt{١١٩}$

احداثيات الرأس = (-١،١) ± ١٢

(-١،١٣)،(-١،-١١)

احداثيات البؤرتين = (-١،١) ± جـ

$\left(-١،١ + \sqrt{١١٩}\right)،\left(-١،١ - \sqrt{١١٩}\right)$

طول المحور الاكبر = ٢أ = ٢٤

طول المحور الاصغر = ٢ب = ١٠

البعد البؤري = ٢جـ = $٢\sqrt{١١٩}$

$هـ = \frac{\sqrt{١١٩}}{١٢} < ١$

جـ) $٩ص^٢ + ١٦س^٢ = ١٤٤$

الحل :

$\frac{٩ص^٢}{١٤٤} + \frac{١٦س^٢}{١٤٤} = \frac{١٤٤}{١٤٤} \leftarrow \frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٩} = ١$

المركز (٠،٠)

$أ^٢ = ١٦ \leftarrow أ = ٤$ $ب^٢ = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١٦ - ٩ \leftarrow جـ^٢ = ٧ \leftarrow جـ = \sqrt{٧}$

احداثيات الرأس $= (٠،٠) \pm أ$

$ر_١ \,(٠،أ)$ ، $ر_٢ \,(٠،-أ) \leftarrow (٠،٤)،(٠،-٤)$

احداثيات البؤرتين $= (٠،٠) \pm جـ$

$ب_١ \,(٠،جـ)$ ، $ب_٢ \,(٠،-جـ) \leftarrow (٠،\sqrt{٧})،(٠،-\sqrt{٧})$

طول المحور الاكبر $= ٢أ = ٨$

طول المحور الاصغر $= ٢ب = ٦$

البعد البؤري $= ٢جـ = ٢\sqrt{٧}$

$هـ = \frac{\sqrt{٧}}{٤} < ١$

(د) $س^٢ + ٤ص^٢ + ٦س - ٨ص + ٩ = ٠$

الحل :

$س^٢ + ٤ص^٢ + ٦س - ٨ص = -٩ \leftarrow س^٢ + ٦س + ٤ص^٢ - ٨ص = -٩$ (اكمال مربع)

$س^٢ + ٦س + ٩ + ٤(ص^٢ - ٢ص + ١) = -٩ + ٩ + ٤$

$(س + ٣)^٢ + ٤(ص + ١)^٢ = ٤ \leftarrow \frac{(س + ٣)^٢}{٤} + \frac{(ص - ١)^٢}{١} = ١$

المركز $(-٣،١)$

$أ^٢ = ٤ \leftarrow أ = ٢$ $\quad$ $ب^٢ = ١ \leftarrow ب = ١$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٤ - ١ \leftarrow جـ^٢ = ٣ \leftarrow جـ = \sqrt{٣}$

احداثيات الرأس $=$ (-٣،١) $\pm$ ٢

(-١،١)،(-٥،١)

احداثيات البؤرتين $=$ (-٣،١) $\pm$ جـ

$\left(-٣+\sqrt{٣}،١\right)،\left(-٣-\sqrt{٣}،١\right)$

طول المحور الاكبر $=$ ٢أ $=$ ٤

طول المحور الاصغر $=$ ٢ب $=$ ٢

البعد البؤري $=$ ٢جـ $= ٢\sqrt{٣}$

$هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} < ١$

---

(٢) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٣،٠)،(-٣،٠) ويتقاطع مع محور السينات عند س = ٤ ، -٤ .

الحل :

المركز $= \left(\frac{س_١+س_٢}{٢}،\frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right) = \left(\frac{٣+-٣}{٢}،\frac{٠+٠}{٢}\right) = (٠،٠)$

جـ $=$ ٣ أ $=$ ٤

جـ^٢ $=$ أ^٢ $-$ ب^٢ $\leftarrow$ ٩ $=$ ١٦ $-$ ب^٢ $\leftarrow$ ب^٢ $=$ ١٦ $-$ ٩

ب^٢ $=$ ٧ $\leftarrow$ ب $= \sqrt{٧}$

$\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٧} = ١$

(٣) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠،٠) ومحوره الاكبر على محور الصادات وطول محوره الاصغر ٤ وحدات وبعده البؤري $٢\sqrt{٥}$.

الحل :

$٢ب = ٤ \leftarrow ب = ٢ \qquad ٢جـ = ٢\sqrt{٥} \leftarrow جـ = \sqrt{٥}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٥ = أ^{٢} - ٤ \leftarrow أ^{٢} = ٩ \leftarrow أ = ٣$

$$\frac{س^{٢}}{٤} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$$

---

(٤) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (-٣،٢) واحد رأسيه النقطة (-٣،-٤) واختلافه المركزي يساوي ٠,٥

الحل :

$أ = ٢ + ٤ \leftarrow أ = ٦$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{١٠} \leftarrow \frac{جـ}{٦} = \frac{٥}{١٠} \leftarrow جـ = ٣$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٩ = ٣٦ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٢٧$

$$\frac{(ص - ٢)^{٢}}{٣٦} + \frac{(س + ٣)^{٢}}{٢٧} = ١$$

---

(٥) قطع ناقص اختلافه المركزي يساوي $\frac{٢}{٣}$ واحد رأسيه النقطة (٣،١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (١،١) جد معادلته .

الحل :

$هـ = \frac{٢}{٣}$

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة = أ−جـ

$٢ = أ - جـ \leftarrow أ = ٢ + جـ$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣} = \frac{جـ}{٢+جـ} \leftarrow ٣جـ = ٤ + ٢جـ \leftarrow جـ = ٤$

$أ = ٢ + جـ \leftarrow أ = ٢ + ٤ = ٦$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ١٦ = ٣٦ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٢٠$

$$\frac{(س+٣)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص-١)^{٢}}{٢٠} = ١$$

---

(٦) اذا كان طول المحور الاكبر لقطع ناقص يساوي ضعف طول محوره الاصغر فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص ؟

الحل :

$٢أ = ٤ب \leftarrow أ = ٢ب$

$جـ^{٢} = ٤ب^{٢} - ب^{٢} \leftarrow جـ^{٢} = ٣ب^{٢} \leftarrow جـ = \sqrt{٣}ب$

$$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٣}ب}{٢ب} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

---

(٧) قطع ناقص البعد بين بؤرتيه يساوي طول محوره الاصغر جد الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص .

الحل :

$٢جـ = ٢ب \leftarrow جـ = ب$

$جـ^{٢} = ٤ب^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٢ب^{٢} = أ^{٢} \leftarrow أ = \sqrt{٢}ب$

$$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{ب}{\sqrt{٢}ب} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

(٨) قطع ناقص يقع محوره الاكبر على محور السينات ومعادلته $\frac{س^{٢}}{٤٩} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ اختلافه المركزي $\frac{٥}{٧}$

جد : (أ) $ب^{٢}$ (ب) اذا كانت ك نقطة على منحني القطع الناقص جد محيط المثلث ك$ف_{١}$$ف_{٢}$

حيث $ف_{١}$،$ف_{٢}$ بؤرتا القطع الناقص .

الحل:

$أ^{٢} = ٤٩ \leftarrow أ = ٧$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{جـ}{٧} = \frac{٥}{٧} \leftarrow جـ = ٥$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٢٥ = ٤٩ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٢٤$

محيط المثلث ك$ف_{١}$$ف_{٢}$ $= ٢أ + ٢جـ$

$١٤ + ١٠ = ٢٤$

---

(٩) اذا كان المستقيم المار بالنقطة (١٢,٥ ،٠) يمس منحنى قطع ناقص بالنقطة (٨،٣) جد طول كلا من محوري القطع الناقص واختلافه المركزي علما ان محوري القطع ينطبقان على محوري السينات والصادات .

الحل:

ميل المماس $= \frac{٣ - ٠}{٨ - ١٢,٥}$

$م = \frac{٣}{-٤,٥} = \frac{-٢}{٣}$

$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$　　(٨،٣) تحقق المعادلة

$\frac{٦٤}{أ^{٢}} + \frac{٩}{ب^{٢}} = ١$ .... (١)

$$\frac{٢س}{أ^{٢}}+\frac{٢ص\,ص'}{ب^{٢}}=٠ \rightarrow \frac{١٦}{أ^{٢}}+\frac{-٤}{ب^{٢}}=٠ \rightarrow \frac{١٦}{أ^{٢}}=\frac{٤}{ب^{٢}}$$

$$٤أ^{٢}=١٦ب^{٢} \rightarrow أ^{٢}=٤ب^{٢}$$

$$\frac{٦٤}{٤ب^{٢}}+\frac{٩}{ب^{٢}}=١ \rightarrow \frac{١٦}{ب^{٢}}+\frac{٩}{ب^{٢}}=١ \rightarrow \frac{٢٥}{ب^{٢}}=١ \rightarrow ب^{٢}=٢٥$$

$$أ^{٢}=٤ب^{٢} \rightarrow أ^{٢}=١٠٠$$

$$جـ^{٢}=أ^{٢}-ب^{٢} \rightarrow جـ^{٢}=١٠٠-٢٥=٧٥$$

$$جـ^{٢}=٧٥ \rightarrow جـ=\sqrt{٧٥}=٥\sqrt{٣}$$

$$هـ=\frac{جـ}{أ}=\frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

طول المحور الاكبر = ٢٠ طول المحور الاصغر = ١٠

---

(١٠) اثبت ان معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}}+\frac{ص^{٢}}{ب^{٢}}=١$ عند النقطة $(س_{١}،ص_{١})$ هي :

$$\frac{س_{١}س}{أ^{٢}}+\frac{ص_{١}ص}{ب^{٢}}=١$$

الحل:

$$\frac{٢س}{أ^{٢}}+\frac{٢ص\,ص'}{ب^{٢}}=٠ \rightarrow \frac{٢س_{١}}{أ^{٢}}+\frac{٢ص'ص_{١}}{ب^{٢}}=٠ \rightarrow \frac{س_{١}}{أ^{٢}}=\frac{-ص'ص_{١}}{ب^{٢}}$$

$$ب^{٢}س_{١}=-أ^{٢}ص'ص_{١} \rightarrow م=\frac{-ب^{٢}س_{١}}{أ^{٢}ص_{١}}$$

$$(ص-ص_{١})=\frac{-ب^{٢}س_{١}}{أ^{٢}ص_{١}}(س-س_{١}) \rightarrow (أ^{٢}ص_{١}ص-أ^{٢}ص_{١}ص_{١})=(-ب^{٢}س_{١}س-ب^{٢}س_{١}س_{١})$$

$$(أ^2 ص_1 ص - أ^2 ص_1 ص_1) = (-ب^2 س_1 س - ب^2 س_1 س_1) \;/\; أ^2 \times ب^2$$

$$\frac{ص_1 ص}{ب^2} - \frac{ص_1 ص_1}{ب^2} = \frac{-س_1 س}{أ^2} - \frac{-س_1 س_1}{أ^2} \leftarrow \frac{س_1 س}{أ^2} + \frac{ص_1 ص}{ب^2} = \frac{(س_1)^2}{أ^2} + \frac{(ص_1)^2}{ب^2}$$

$$\frac{س_1 س}{أ^2} + \frac{ص_1 ص}{ب^2} = 1$$

مساحة القطع الناقص

مساحة القطع الناقص $= \pi$ أ $\times$ ب

الامثلة

(١) جد مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^2}{16} + \frac{ص^2}{9} = 1$

الحل :

أ$^2 = 16 \leftarrow$ أ $= 4$　　　ب$^2 = 9 \leftarrow$ ب $= 3$

مساحة القطع الناقص $= \pi$ أ $\times$ ب

م $= \pi$ أ $\times$ ب $\leftarrow$ م $= \pi \times 4 \times 3 = 12\pi$

(٢) قطع ناقص مساحته 30π وحدة مربعة ورأساه النقطتان $(-6،0)$،$(6،0)$ جد معادلته ؟

الحل :

أ $= 6$

م $= \pi$ أ $\times$ ب $\leftarrow 30\pi = \pi \times 6 \times$ ب $\leftarrow$ ب $= 5$

$$\frac{س^2}{٣٦}+\frac{ص^2}{٢٥}=١$$

(٣) قطع ناقص بؤرتاه (٤،٠)،(-٤،٠) والنقطة و (س،ص) تقع على منحنى القطع بحيث ان محيط المثلث و$ب_1ب_2$ يساوي ٢٤جد معادلته .

الحل :

محيط المثلث و$ب_1ب_2$ = ٢أ + ٢جـ ← ٢٤ = ٢أ + ٨ ← أ = ٨

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ← ١٦ = ٦٤ - $ب^2$ ← $ب^2$ = ٦٤ - ١٦

$ب^2$ = ٤٨

$$\frac{س^2}{٦٤}+\frac{ص^2}{٤٨}=١$$

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س،ص) المتحركة في المستوى الديكارتي بحيث س = ٢جاهـ

ص = ٣جتاهـ ؟

الحل :

س = ٢جاهـ ← $س^2$ = ٤$جا^2$هـ ← $\frac{س^2}{٤}$ = $جا^2$هـ

ص = ٣جتاهـ ← $ص^2$ = ٩$جتا^2$هـ ← $\frac{ص^2}{٩}$ = $جتا^2$هـ

∴ $\frac{س^2}{٤}+\frac{ص^2}{٩}=١$ قطع ناقص

(٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س،ص) المتحركة في المستوى الديكارتي بحيث

$\frac{س-٣}{٥}$ = جاهـ ص = -٢ + ٤جتاهـ .

الحل :

$\frac{س - ٣}{٥} =$ جاهـ $\leftarrow \frac{(س - ٣)^{٢}}{٢٥} =$ جا^{٢}هـ

ص $= -٢ + ٤$جتاهـ $\leftarrow$ ص $+ ٢ = ٤$جتاهـ $\leftarrow$ (ص $+ ٢)^{٢} = ١٦$جتا^{٢}هـ $\leftarrow \frac{(ص + ٢)^{٢}}{١٦} =$ جتا^{٢}هـ

$\therefore \frac{(س - ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{١٦} = ١$ قطع ناقص

تمرين

٤

(١) جد معادلة القطع الناقص الذي احد بؤرتيه مركز الدائرة $(٢س - ٦)^٢ + (٢ص - ٤)^٢ = ٣٦$ وطول محوره الاصغر يساوي طول قطر الدائرة ومعادلة محوره الاصغر هي $س = -١$.

(٢) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (٢،٣) و احدى بؤرتيه النقطة (٢،-١) وطول محوره الاصغر ٦ وحدات .

(٣) جد معادلة القطع الناقص الذي راساه (٢،٠)،(-٨،٠) وطول محوره الاصغر يساوي اربعة امثال المسافة بين احد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس .

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س،ص) المتحركة بحيث ان مجموع بعديها عن النقطتين (٠،±٣) يساوي ١٠ .

(٥) جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلا من المستقيمات :

$س = ٣$ ، $ص = -١$

$س = ١٣$ ، $ص = ٧$

(٦) اذا كانت المعادلة $ك س^٢ + ٥ص^٢ = ١٧$ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الاكبر موازٍ لمحور السينات ، اثبت ان :

$$ك = \frac{١٧}{ب^٢ + جـ^٢}$$

(٧) اذا كانت م، ن نقطتان ماديتان والنقطة م تدور في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع النقطة ن في احدى بؤرتي هذا المدار فإذا كان طول المحور الاكبر = ١٠ وحدات والاختلاف المركزي = ٠,٣ جد :

(أ) اطول مسافة بين م، ن .

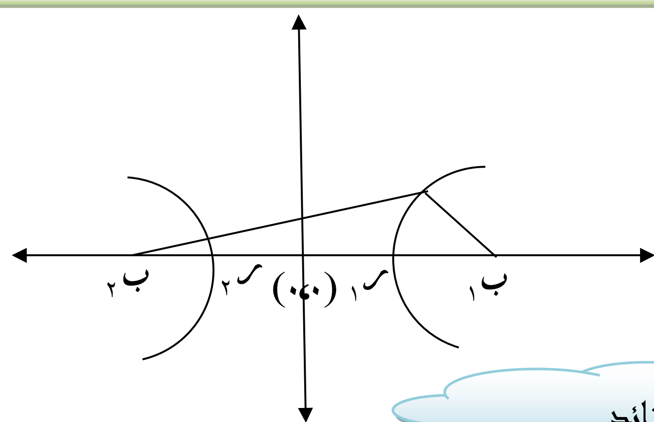
(ب) اقصر مسافة بين م، ن .

رابعا القطع الزائد THE HYPERBOLIC

Adel Awwad

تعريف

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص)التي يكون الفرق المطلق لبعديها عن نقطتين ثابتتين $ب_1$، $ب_2$ تسميان البؤرتين يساوي مقدار ثابت وهو ٢أ .

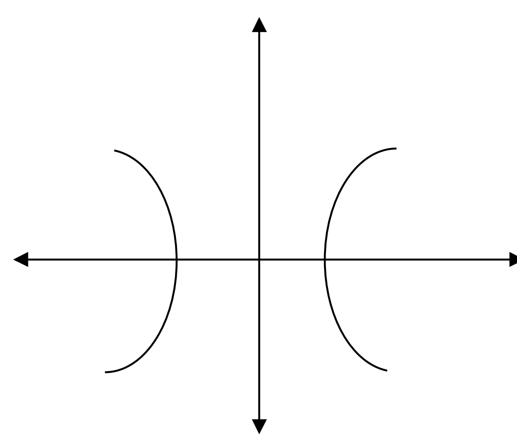


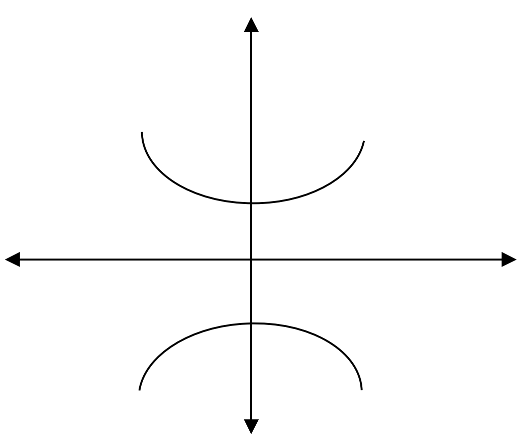
معادلة القطع الزائد

اذا كان احداثيات المركز (٠،٠)

(أ) $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

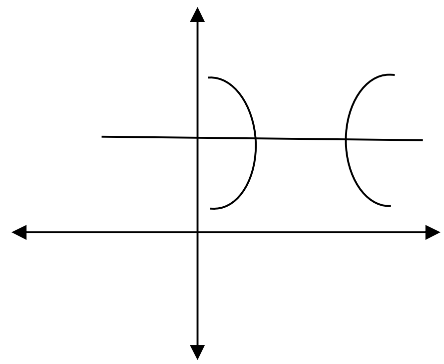
(ب) $\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$



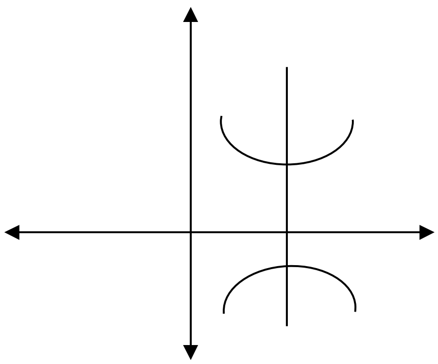


اذا كان احداثيات المركز (د،هـ)

أ) $\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$



(ب) $\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$



ملاحظات مهمة جدا

(١) ما يميز معادلة القطع الزائد ان المتغيرين مربعين وبينهما اشارة (−).

(٢) أ : المسافة بين المركز والراس

جـ : المسافة بين المركز والبؤرة .

(٣) $أ^2$: دائما هو العدد الاول .

$ب^2$: دائما هو العدد الثاني.

(٤) طول المحورالقاطع = ٢أ

طول المحورالمرافق = ٢ب

(٥) $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

(٦)الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} > 1$

(٧) البعد البؤري = ٢جـ

الامثلة

(١) جد عناصر القطوع الزائدة فيما يلي :

(أ) $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحل :

المركز (٠،٠)

$ا^٢ = ١٦ \leftarrow ا = ٤$　　$ب^٢ = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^٢ = ا^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١٦ + ٩ \leftarrow جـ^٢ = ٢٥ \leftarrow جـ = ٥$

احداثيات الرأس = (٠،٠) ± ا

$ر_١(ا،٠)$ ، $ر_٢(-ا،٠) \leftarrow (٤،٠)،(-٤،٠)$

احداثيات البؤرتين = (٠،٠) ± جـ

$ب_١(جـ،٠)$ ، $ب_٢(-جـ،٠) \leftarrow (٥،٠)،(-٥،٠)$

طول المحور القاطع = ٢ا = ٨

طول المحور المرافق = ٢ب = ٦

البعد البؤري = ٢جـ = ٢ × ٥ = ١٠

$هـ = \frac{٥}{٤} > ١$

(ب) $\frac{ص^٢}{٨١} - \frac{س^٢}{٢٥} = ١$

الحل :

المركز (٠،٠)

$أ^٢ = ٨١ \leftarrow أ = ٩$　　$ب^٢ = ٢٥ \leftarrow ب = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٨١ + ٢٥ \leftarrow جـ^٢ = ١٠٦ \leftarrow جـ = \sqrt{١٠٦}$

احداثيات الرأس $= (٠،٠) \pm أ$

$ر_١ (٠،أ)$ ، $ر_٢ (٠،-أ) \leftarrow (٠،٩)،(٠،-٩)$

احداثيات البؤرتين $= (٠،٠) \pm جـ$

$ب_١ (٠،جـ)$ ، $ب_٢ (٠،-جـ) \leftarrow \left(٠،\sqrt{١٠٦}\right)،\left(٠،-\sqrt{١٠٦}\right)$

طول المحور القاطع $= ٢أ = ١٨$

طول المحور المرافق $= ٢ب = ١٠$

البعد البؤري $= ٢جـ = ٢ \times \sqrt{١٠٦}$

$هـ = \frac{\sqrt{١٠٦}}{٩} > ١$

(جـ) $\frac{(س - ٢)^٢}{٤} - \frac{(ص + ٢)^٢}{٩} = ١$

الحل :

المركز (٢،-٢)

$أ^٢ = ٤ \leftarrow أ = ٢$　　$ب^٢ = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٤ + ٩ \leftarrow جـ^٢ = ١٣ \leftarrow جـ = \sqrt{١٣}$

احداثيات الرأس $= (٢،-٢) \pm ٢$

(٤،-٢)،(٠،-٢)

احداثيات البؤرتين = (٢،-٢) ±جـ

$\left(٢+\sqrt{١٣}،-٢\right)،\left(٢-\sqrt{١٣}،-٢\right)$

طول المحور القاطع = ٢أ = ٤

طول المحور المرافق = ٢ب = ٦

البعد البؤري = ٢جـ = $٢\sqrt{١٣}$

هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢} > ١$

د) $(ص+١)^٢ - (س-٣)^٢ = ١$

الحل:

المركز (٣،-١)

$أ^٢ = ١ \leftarrow أ = ١$　　　$ب^٢ = ١ \leftarrow ب = ١$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١+١ \leftarrow جـ^٢ = ٢ \leftarrow جـ = \sqrt{٢}$

احداثيات الرأس = (٣،-١) ±١

(٣،٠)،(٣،-٢)

احداثيات البؤرتين = (٣،-١) ±جـ

$\left(٣،-١+\sqrt{٢}\right)،\left(٣،-١-\sqrt{٢}\right)$

طول المحور القاطع = ٢أ = ٢

طول المحور المرافق = ٢ب = ٢

البعد البؤري = ٢جـ = ٢$\sqrt{٢}$

هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{١} > ١$

(هـ) ٤س^{٢} − ص^{٢} + ١٦س + ١٠ص − ١٧ = ٠

الحل:

٤س^{٢} − ص^{٢} + ١٦س + ١٠ص = ١٧ ← ٤س^{٢} + ١٦س − ص^{٢} + ١٠ص = ١٧ (اكمال مربع)

٤(س^{٢} + ٤س) − (ص^{٢} − ١٠ص) = ١٧

٤(س^{٢} + ٤س + ٤) − (ص^{٢} − ١٠ص + ٢٥) = ١٧ + ١٦ − ٢٥ ← $\frac{(\text{س}+٢)^{٢}}{٢} - \frac{(\text{ص}-٥)^{٢}}{٨} = ١$

المركز (−٢،٥)

أ^{٢} = ٢ ← أ = $\sqrt{٢}$ ب^{٢} = ٨ ← ب = $\sqrt{٨}$

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← جـ^{٢} = ٢ + ٨ ← جـ^{٢} = ١٠ ← جـ = $\sqrt{١٠}$

احداثيات الرأس = (−٢،٥) ± $\sqrt{٢}$

(−٢ + $\sqrt{٢}$،٥)،(−٢ − $\sqrt{٢}$،٥)

احداثيات البؤرتين = (−٢،٥) ± جـ

(−٢ + $\sqrt{١٠}$،٥)،(−٢ − $\sqrt{١٠}$،٥)

طول المحور القاطع = ٢أ = ٢$\sqrt{٢}$

طول المحور المرافق = ٢ب = ٢$\sqrt{٨}$

البعد البؤري $= ٢جـ = ٢\sqrt{٣}$

$هـ = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٢}} > ١$

(و) $٩س^٢ - ٤ص^٢ - ٥٤س - ١٦ص + ٢٩ = ٠$

الحل :

$٩س^٢ - ٤ص^٢ - ٥٤س - ١٦ص = -٢٩ \leftarrow ٩س^٢ - ٥٤س - ٤ص^٢ - ١٦ص = -٢٩$ (اكمال مربع)

$٩س^٢ - ٥٤س - ٤ص^٢ - ١٦ص = -٢٩ \leftarrow ٩(س^٢ - ٦س) - ٤(ص^٢ - ٤ص) = -٢٩$

$٩(س^٢ - ٦س + ٩) - ٤(ص^٢ - ٤ص + ٤) = -٢٩ + ٨١ - ١٦ \leftarrow \frac{(س-٣)^٢}{٤} - \frac{(ص+٢)^٢}{٩} = ١$

المركز $(٣، -٢)$

$أ^٢ = ٤ \leftarrow أ = ٢ \qquad ب^٢ = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٢ + ٨ \leftarrow جـ^٢ = ١٣ \leftarrow جـ = \sqrt{١٣}$

احداثيات الرأس $= (٣، -٢) \pm ٢$

$(-٤، -٢)، (١، -٢)$

احداثيات البؤرتين $= (٣، -٢) \pm جـ$

$(٣ + \sqrt{١٣}، -٢)، (٣ + \sqrt{١٣}، -٢)$

طول المحور القاطع $= ٢أ = ٤$

طول المحور المرافق $= ٢ب = ٦$

البعد البؤري $= ٢جـ = ٢\sqrt{١٣}$ $\qquad$ $هـ = \frac{\sqrt{١٣}}{٢} > ١$

(٢) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) ورأساه (±٣،٠) وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

الحل :

$\text{أ} = ٣$　　$٢\text{ب} = ٤ \leftarrow \text{ب} = ٢$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$$

---

(٣) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٥،١) ، (-١،١) وطول محوره القاطع ٣ وحدات.

الحل :

$٢\text{جـ} = ٦ \leftarrow \text{جـ} = ٣$　　$٢\text{أ} = ٣ \leftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٢}$

$$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \leftarrow ٩ = \frac{٩}{٤} + \text{ب}^{٢} \leftarrow \text{ب}^{٢} = \frac{٢٧}{٤}$$

المركز (٢،١)

$$\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\frac{٩}{٤}} - \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{\frac{٢٧}{٤}} = ١$$

---

(٤) جد معادلة القطع الزائد الذي نهايتا محوره المرافق بؤرتاه (٠،٣) ، (٠،-٣) ويمر بالنقطة(٢،٣) .

الحل :

$٢\text{ب} = ٦ \leftarrow \text{ب} = ٣$

المركز (٠،٠)

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$$

(٢،٣) تحقق المعادلة

$$\frac{س^{2}}{أ^{2}} - \frac{ص^{2}}{9} = 1 \Rightarrow \frac{4}{أ^{2}} - \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \frac{4}{أ^{2}} = 2$$

$$\frac{4}{أ^{2}} = 2 \Rightarrow 2أ^{2} = 4 \Rightarrow أ^{2} = 2$$

$$\therefore \frac{س^{2}}{2} - \frac{ص^{2}}{9} = 1$$

---

(٥) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (١،٢) واحد رأسيه (−٣،٢) واختلافه المركزي $ه = \frac{3}{2}$.

الحل :

$أ = 4$ $\qquad$ $ه = \frac{جـ}{أ} = \frac{3}{2} \Rightarrow جـ = 6$

$$جـ^{2} = أ^{2} + ب^{2} \Rightarrow 36 = 16 + ب^{2} \Rightarrow ب^{2} = 20$$

$$\frac{(س-1)^{2}}{36} - \frac{(ص-2)^{2}}{20} = 1$$

---

(٦) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره القاطع على محور الصادات وطول محوره المرافق يساوي ٤ وحدات وبعده البؤري $2\sqrt{5}$.

الحل :

$م(0،0)$ $\qquad$ $2ب = 4 \Rightarrow ب = 2$ $\qquad$ $2جـ = 2\sqrt{5} \Rightarrow جـ = \sqrt{5}$

$$جـ^{2} = أ^{2} + ب^{2} \Rightarrow 5 = أ^{2} + 4 \Rightarrow أ^{2} = 20$$

$$\therefore \frac{ص^{2}}{1} - \frac{س^{2}}{4} = 1$$

---

(٧) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق يساوي ٧ وحدات وينطبق على محور الصادات ويمر بالنقطة (٣،−٢).

القطع الزائد

الحل :

القطع الزائد سيني

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

$$2ب = 7 \leftarrow ب = \frac{7}{2} \leftarrow ب^2 = \frac{49}{4}$$

ويمر بالنقطة (3، −2).

$$\frac{9}{أ^2} - \frac{4}{\frac{49}{4}} = 1 \leftarrow \frac{9}{أ^2} - \frac{16}{49} = 1 \leftarrow \frac{9}{أ^2} = 1 + \frac{16}{49}$$

$$\frac{9}{أ^2} = \frac{65}{49} \leftarrow أ^2 = \frac{441}{65}$$

$$\frac{س^2}{\frac{441}{65}} - \frac{ص^2}{\frac{49}{4}} = 1$$

---

(8) قطع زائد بعده البؤري يساوي مثلي البعد بين طرفي محوره المرافق جد اختلافه المركزي هـ .

الحل :

$$2جـ = 4ب \leftarrow جـ = 2ب$$

$$جـ^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow 4ب^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow 3ب^2 = أ^2 \leftarrow أ = \sqrt{3}ب$$

$$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{2ب}{\sqrt{3}ب} \leftarrow هـ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

---

(9) قطع مخروطي معادلته $(س + 2ص)(2س - ص) = 4$ جد اختلافه المركزي .

الحل :

$(س + ٢ص)(٢س - ص) = ٤ \leftarrow س^٢ - ٤ص^٢ = ٤ \leftarrow \frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{١} = ١$

$أ^٢ = ٤ \leftarrow أ = ٢$ $\qquad$ $ب^٢ = ١ \leftarrow ب = ١$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٤ + ١ \leftarrow جـ^٢ = ٥ \leftarrow جـ = \sqrt{٥}$

$هـ = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

---

(١٠) قطع مخروطي معادلته $(س + ٣ص)(س - ٣ص) = ١٨$ جد احداثيات بؤرتيه .

الحل :

$(س + ٣ص)(س - ٣ص) = ١٨ \leftarrow س^٢ - ٩ص^٢ = ١٨ \leftarrow \frac{س^٢}{١٨} - \frac{ص^٢}{٢} = ١$

$أ^٢ = ١٨ \leftarrow أ = \sqrt{١٨}$ $\qquad$ $ب^٢ = ٢ \leftarrow ب = \sqrt{٢}$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١٨ + ٢ \leftarrow جـ^٢ = ٢٠ \leftarrow جـ = \sqrt{٢٠}$

المركز $(٠،٠)$

احداثيات بؤرتيه $= (٠،٠) \pm \sqrt{٢٠}$

$= \left(\pm\sqrt{٢٠}، ٠\right)$

---

(١١) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد $٤س^٢ - ٣ص^٢ = ١$ عند $(١،١)$.

الحل :

$٨س - ٦ص \frac{ءص}{ءس} = ٠ \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{٨س}{٦ص} = \frac{٤س}{٣ص}$

$م = \frac{٤}{٣}$

$(ص - ١) = \frac{٤}{٣}(س - ١)$ معادلة المماس

$(ص - ١) = \frac{-٣}{٤}(س - ١)$ معادلة العمودي على المماس .

(١٢) قطع زائد مركزه (٠،٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم $ص = \sqrt{٣}س + ٢$ عند النقطة $(٢\sqrt{٣}،٤)$ جد معادلته.

الحل :

ميل المماس $= \sqrt{٣}$

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١ \leftarrow \frac{٢س}{أ^{٢}} - \frac{٢صص'}{ب^{٢}} = ٠ \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٢سب^{٢}}{٢صأ^{٢}}$$

$$\sqrt{٣} = \frac{٤\sqrt{٣}ب^{٢}}{٨أ^{٢}} \leftarrow ٨\cancel{\sqrt{٣}}أ^{٢} = ٤\cancel{\sqrt{٣}}ب^{٢} \leftarrow ٢أ^{٢} = ب^{٢}$$

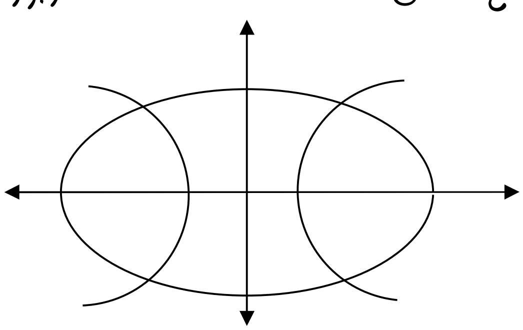
$(٢\sqrt{٣}،٤)$ تحقق المعادلة

$$\frac{١٢}{أ^{٢}} - \frac{١٦}{ب^{٢}} = ١ \leftarrow \frac{١٢}{أ^{٢}} - \frac{٨}{أ^{٢}} = ١ \leftarrow \frac{٤}{أ^{٢}} = ١ \leftarrow ٤ = أ^{٢}$$

$\therefore ب^{٢} = ٨$

$\therefore \frac{س^{٢}}{٤} - \frac{ص^{٢}}{٨} = ١$

(١٣) جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتاه القطع الناقص $٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ١٤٤$ وبؤرتاه هما رأسا هذا القطع .



الحل :

$٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ١٤٤$

$\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

$أ^{٢} = ١٦ \leftarrow أ = ٤ \qquad ب^{٢} = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow جـ^{٢} = ١٦ - ٩ = ٧ \leftarrow جـ = \sqrt{٧}$

الرأسين $= (٠،٠) \pm ٤$ البؤرتين $= (٠،٠) \pm \sqrt{٧}$

$= (\pm ٤ ،٠) \qquad = (\pm \sqrt{٧} ،٠)$

رأسا القطع الزائد $= (\pm \sqrt{٧} ،٠)$

بؤرتا القطع الزائد $= (\pm ٤ ،٠)$

$أ = \sqrt{٧} \qquad جـ = ٤$

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} \leftarrow ١٦ = ٧ + ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$\therefore \frac{س^{٢}}{٧} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

---

(١٤) تتحرك نقطة ن (س،ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س =جاهـ+جتاهـ ، ص = ٢$\sqrt{جاهـ جتاهـ}$ حيث هـ زاوية متغيرة اثبت ان النقطة ن (س،ص) تتحرك على منحنى قطع زائد .

الحل :

$س = جاهـ + جتاهـ \leftarrow س^{٢} = (جاهـ + جتاهـ)^{٢} \leftarrow س^{٢} = جا^{٢}هـ + ٢جاهـ جتاهـ + جتا^{٢}هـ$

$\therefore س^{٢} = ١ + ٢جاهـ جتاهـ$ ....(١)

$ص = ٢\sqrt{جاهـ جتاهـ} \leftarrow ص^{٢} = ٤جاهـ جتاهـ$ ....(٢)

من (١) ، (٢)

$$س^2 = 1 + 2جاهـ جتاهـ$$
$$ص^2 = 4جاهـ جتاهـ$$
$$س^2 - ص^2 = 1 - 2جاهـ جتاهـ$$

من (1)

$$س^2 = 1 + 2جاهـ جتاهـ \leftarrow س^2 - 1 = 2جاهـ جتاهـ$$

$$س^2 - ص^2 = 1 - 2جاهـ جتاهـ \leftarrow س^2 - ص^2 = 1 - س^2 + 1$$

$$2س^2 - ص^2 = 2 \leftarrow \frac{س^2}{1} - \frac{ص^2}{2} = 2$$

(15) اذا كانت المعادلتين $س = قان$ ، $ص = ظان$ $\frac{-\pi}{2} < ن < \frac{\pi}{2}$ تحددان موقع الجسم $أ(س،ص)$ على المنحنى في اللحظة ن ، جد معادلة المنحنى بدلالة س ، ص .

الحل :

$$س = قان \leftarrow س^2 = قا^2ن \qquad ص = ظان \leftarrow ص^2 = ظا^2ن$$

$$س^2 - ص^2 = قا^2ن - ظا^2ن \leftarrow س^2 - ص^2 = \cancel{ظا^2ن} + 1 - \cancel{ظا^2ن}$$

$س^2 - ص^2 = 1$ قطع زائد

(16) اذا علمت ان معادلة قطع زائد هي $4ص^2 - 9س^2 = 36$ جد الفرق المطلق بين النقطة $(2، 3\sqrt{2})$ وبؤرتي هذا القطع .

الحل :

المطلوب قيمة $2أ$.

$$4ص^2 - 9س^2 = 36 \leftarrow \frac{ص^2}{9} - \frac{س^2}{4} = 1$$

$أ^٢ = ٩ \leftarrow أ = ٣ \leftarrow ٢أ = ٦$

(١٧) اذا كان $هـ_١$ ، $هـ_٢$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين

$\frac{س^٢}{ل^٢} - \frac{ص^٢}{ك^٢} = ١$ ، $\frac{ص^٢}{ك^٢} - \frac{س^٢}{ل^٢} = ١$ ، اثبت ان $\frac{١}{هـ_١^٢} + \frac{١}{هـ_٢^٢} = ١$

الحل :

$$\frac{س^٢}{ل^٢} - \frac{ص^٢}{ك^٢} = ١$$

$أ^٢ = ل^٢ \leftarrow أ = ل$ $\qquad$ $ب^٢ = ك^٢ \leftarrow ب = ك$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ل^٢ + ك^٢ \leftarrow جـ = \sqrt{ل^٢ + ك^٢}$

$$هـ_١ = \frac{\sqrt{ل^٢ + ك^٢}}{ل} \leftarrow هـ_١^٢ = \frac{ل^٢ + ك^٢}{ل^٢} \leftarrow \frac{١}{هـ_١^٢} = \frac{ل^٢}{ل^٢ + ك^٢} \ldots\ldots (١)$$

$$\frac{ص^٢}{ك^٢} - \frac{س^٢}{ل^٢} = ١$$

$أ^٢ = ك^٢ \leftarrow أ = ك$ $\qquad$ $ب^٢ = ل^٢ \leftarrow ب = ل$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ك^٢ + ل^٢ \leftarrow جـ = \sqrt{ك^٢ + ل^٢}$

$$هـ_٢ = \frac{\sqrt{ك^٢ + ل^٢}}{ك} \leftarrow هـ_٢^٢ = \frac{ك^٢ + ل^٢}{ك^٢} \leftarrow \frac{١}{هـ_٢^٢} = \frac{ك^٢}{ك^٢ + ل^٢} \ldots\ldots (٢)$$

$$\frac{١}{هـ_١^٢} + \frac{١}{هـ_٢^٢} = \frac{ل^٢}{ل^٢ + ك^٢} + \frac{ك^٢}{ك^٢ + ل^٢} = \frac{ل^٢ + ك^٢}{ك^٢ + ل^٢} = ١$$

(١٨) قطع زائد معادلته $٢س^٢ - ٣ص^٢ + ١٨ص = ك$ جد قيمة ك التي تجعل المحور القاطع لهذا القطع موازيا لمحور الصادات .

الحل :

$$٢س^٢ - ٣(ص^٢ - ٦ص) = ك \leftarrow ٢س^٢ - ٣(ص^٢ - ٦ص + ٩) = ك - ٢٧$$

$$٢س^٢ - ٣(ص - ٣)^٢ = (ك - ٢٧) \leftarrow \frac{س^٢}{\frac{(ك-٢٧)}{٢}} - \frac{(ص-٣)^٢}{\frac{(ك-٢٧)}{٣}} = ١$$

$$\therefore ك - ٢٧ > ٠ \leftarrow ك > ٢٧$$

---

(١٩) النقطة ا(س،ص) تتحرك في المستوى بحيث ان الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين الثابتتين (±٥،٠) يساوي ٦ وحدات ما نوع المنحنى الذي تصنعه هذه النقطة اثناء حركتها وما معادلته .

الحل :

$$٢ا = ٦ \leftarrow ا = ٣ \leftarrow ا^٢ = ٩ \qquad جـ = ٥$$

$$جـ^٢ = ا^٢ + ب^٢ \leftarrow ٢٥ = ٩ + ب^٢ \leftarrow ب^٢ = ١٦$$

القطع زائد

$$\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$$

تمرين

٥

(١) جد معادلة المماس لمنحنى القطع الزائد الذي معادلته ٩س^٢ – ٥ص^٢ = ٤ عند النقطة (١،-١).

(٢) جد البعد البؤري للقطع الذي معادلته $\frac{س^{٢}}{٩} - \frac{ص^{٢}}{٧} = ١$.

(٣) قطع زائد اختلافه المركزي $\frac{٥}{٢}$ ، واحد رأسيه النقطة (٠،-١)والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (٣،-١) جد معادلته ؟

(٤) قطع زائد معادلته ٩س^٢ – ١٨س = ٤ص^٢ + ٨ص+ ٣١ جد كلا مما يلي لهذا القطع :

(أ) احداثيات كلا من الرأسين .
(ب) احداثيات كلا من البؤرتين
(ج) طول المحور القاطع ومعادلته
(د) الاختلاف المركزي .

(٥) جد معادلة الدائرة التي تمر بمركز القطع الزائد الذي احداثيات بؤرتيه (٣،-١)،(-٧،-١)وتمر بالنقطة (٤،٢) ويقع مركزها على محور الصادات ؟