

الأوائل في الرياضيات

الوحدة الرابعة

التكامل
الفصل الثاني



0788118727 MOHDAWWAD mohdawwad2

Mohammad Awwad الاستاذ محمد عواد

أ. محمد عواد

#حب_الرياضيات ادمان

الوحدة الرابعة

التكامل



ما هو التكامل؟

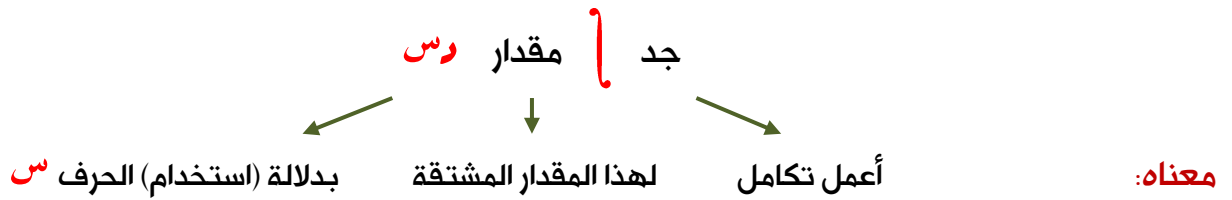
هو عملية عكسية للاشتقاق وبإجراء هذه العملية يتم إعادة $وَه$ (س) ← المشتقة لتصبح $وَه$ (س)



أولاً: التكامل غير المحدود

التكامل غير المحدود وفيه يتم عمل تكامل للمقدار باستخدام قواعد التكامل

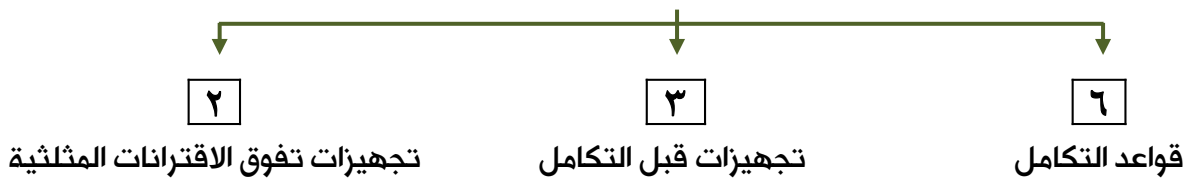
صيغة السؤال



وهنا نحن نقوم بعمل تكامل وفي نهاية السطر نضع **+ ج** ← (عليها علامة)

أستاذ: كيف ممكن أعمل تكامل لأي مقدار؟

علشان نعمل تكامل لأي مقدار لازم نسيطر على **عناصر الخطة** التالية:



إذا أخطت فحاول مرة أخرى ، فقد سقطنا مرارا وتكرارا



حتى تعلمنا معارة المشي، فالسقوط ليس عيبا

إنما العيب في عدم الوقوف مرة أخرى.....



قاعدة (1): العدد الثابت دس

العدد \times س + ج

$$\left[\text{أ دس} \leftarrow \text{أ س} + \text{ج} \right]$$

أمثلة: جد كل مما يلي:

$$(1) \left[3 \text{ دس} = 3 \text{ س} + \text{ج} \right]$$

$$(2) \left[7 - \text{دس} = 7 \text{ س} - \text{ج} \right]$$

$$(3) \left[\frac{5}{2} \text{ دس} = \frac{5}{2} \text{ س} + \text{ج} \right]$$

$$(4) \left[4 - \text{دس} = 4 \text{ س} - \text{ج} \right]$$

$$(5) \left[7 \text{ دل} = 7 \text{ ل} + \text{ج} \right]$$

$$(6) \left[- \text{دس} = - \text{س} + \text{ج} \right]$$

ملاحظة

ن
 موجب \leftarrow نزيد درجة
 سالب \leftarrow ننزل درجة + ج
 كسر \leftarrow نقرب س $\frac{أ+ب}{ب}$

قاعدة (2): $\left[\text{س}^{\text{ن}} \text{ دس} \leftarrow \text{س}^{\text{ن}} + \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{1+\text{ن}} \right]$

بشرط $\text{ن} \neq 1$

أمثلة: جد كل مما يلي:

$$(1) \left[\text{س}^2 \text{ دس} = \text{س}^2 + \frac{\text{س}^2}{3} + \text{ج} \right]$$

$$(2) \left[\text{س}^{10} \text{ دس} = \text{س}^{10} + \frac{\text{س}^{10}}{16} + \text{ج} \right]$$

$$(3) \left[\text{س}^{3-} \text{ دس} = \text{س}^{3-} + \frac{\text{س}^{2-}}{2-} + \text{ج} \right]$$

$$(4) \left[\text{س}^{7-} \text{ دس} = \text{س}^{7-} + \frac{\text{س}^{6-}}{6-} + \text{ج} \right]$$

$$(5) \left[\text{س}^{\frac{3}{2}} \text{ دس} = \text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{\frac{5}{2}}}{12} + \text{ج} \right]$$

$$(6) \left[\text{س}^{\frac{7}{5}} \text{ دس} = \text{س}^{\frac{7}{5}} + \frac{\text{س}^{\frac{12}{5}}}{12} + \text{ج} \right]$$

$$(7) \left[\text{س}^{\frac{8-}{8}} \text{ دس} = \text{س}^{\frac{8-}{8}} + \frac{\text{س}^{\frac{3-}{8}}}{8} + \text{ج} \right]$$

$$(8) \left[\text{س}^{\frac{12-}{5}} \text{ دس} = \text{س}^{\frac{12-}{5}} + \frac{\text{س}^{\frac{7-}{5}}}{7-} + \text{ج} \right]$$

قاعدة (3): $\left[\text{أ س}^{\text{ن}} \text{ دس} \leftarrow \text{أ} + \frac{\text{أ س}^{\text{ن}}}{1+\text{ن}} \right]$

بشرط $\text{ن} \neq 1$

أمثلة: جد كل مما يلي:

$$(1) \left[6 \text{ س}^2 \text{ دس} = 6 \text{ س}^2 + \frac{6 \text{ س}^2}{3} + \text{ج} \right]$$

$$(2) \left[8 \text{ س} \text{ دس} = 8 \text{ س} + \frac{8 \text{ س}^2}{2} + \text{ج} \right]$$



السلبيّة قيد والإيجابية قرار
 قدر أن تكون إيجابيا ولا تدع
 قيودك تكبلّك

قاعدة (4): الاقترانات المثلثية



$$\left[\begin{array}{l} \text{جاس وس} = - \text{جتاس} + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{جتاس وس} = \text{جاس} + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{قاآس وس} = \text{ظاس} + \text{ج} \end{array} \right.$$

أمثلة: جد كل مما يلي:

$$\left[\begin{array}{l} \text{٥ جتاس وس} = \text{٥ جاس} + \text{ج} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٢ جاس وس} = - \text{٢ جتاس} + \text{ج} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٦ جاس وس} = \text{٦ جتاس} + \text{ج} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٧ قاآس وس} = \text{٧ ظاس} + \text{ج} \end{array} \right. \quad (3)$$

أمثلة: جد التكاملات الآتية:

$$\left[\begin{array}{l} \text{٥} \int (\text{٦س}^٢ - \text{٢س}) \text{ وس} \quad (\text{وزاري}) \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{١} \int \text{س}^٥ + \text{س}^٣ + \text{س}^٩ + ١٨ \text{ وس} \end{array} \right. \quad (1)$$

الحل:

الحل:

$$\left[\begin{array}{l} \text{٦} \int \text{س}^٤ - ٢ \text{ وس} \quad (\text{وزاري}) \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٢} \int \text{س}^٤ + \text{س}^٣ - \text{س}^٨ + \text{س}^٩ + ١٨ \text{ وس} \end{array} \right. \quad (2)$$

الحل:

الحل:

$$\left[\begin{array}{l} \text{٧} \int \text{س}^٣ - \text{س} \text{ وس} \quad (\text{وزاري}) \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{٣} \int \text{س}^{١٢} + \text{س}^٩ - \text{س}^٢ + \text{س}^٨ + ١٢ \text{ وس} \end{array} \right. \quad (3)$$

الحل:

الحل:

$$\left[\begin{array}{l} \text{٤} \int \text{س}^٣ + \frac{\text{س}^٧}{٢} + \text{س}^٩ + \text{س}^٥ + \text{س}^٨ - ١٨ \text{ وس} \end{array} \right. \quad (4)$$

الحل:



قاعدة (5): الاقترانات المثلثية بداخله (أ س + ب)

لا تنسى بنقسم على $\boxed{1}$ ← معامل س

أمثلة: جد كل مما يلي:

$$(1) \quad \left[\text{جتا}(9 - 3س) \text{ وس} + \frac{\text{جا}(9 - 3س)}{3} = \text{جتا}(9 - 3س) \text{ وس} \right]$$

$$(2) \quad \left[\text{قا}^2(5س) \text{ وس} + \frac{\text{ظا}5س}{5} = \text{جتا} \frac{س}{5} \text{ وس} \right]$$

$$(3) \quad \left[\text{جا}(2 - 6س) \text{ وس} - \frac{\text{جتا}(2 - 6س)}{2} = \text{جتا}(2 - 6س) \text{ وس} \right]$$

$$(4) \quad \left[\text{جا}(9 + 7س) \text{ وس} = \text{قا}^2(9 - 3س) \text{ وس} \right]$$

$$(5) \quad \left[\text{جا}(9 - 3س) \text{ وس} = \text{قا}^2(9 - 3س) \text{ وس} \right]$$

قاعدة (6): القوس

$$\left[(أ س + ب)^n \text{ وس} \leftarrow \frac{(أ س + ب)^{1+n}}{1 \times (1+n)} \right]$$

أمثلة: جد كل مما يلي:

$$(1) \quad \left[(5س + 6)^3 \text{ وس} + \frac{4(5س + 6)}{5 \times 4} = (5س + 6)^4 \text{ وس} \right]$$

$$(2) \quad \left[(3س - 4)^6 \text{ وس} + \frac{7(3س - 4)}{3 - 7} = (3س - 4)^7 \text{ وس} \right]$$

$$(3) \quad \left[(5س + 2)^{-6} \text{ وس} + \frac{-(5س + 2)}{2 \times 5} = (5س + 2)^{-5} \text{ وس} \right]$$

$$(4) \quad \left[(9 + 7س)^8 \text{ وس} = (9 + 7س)^9 \text{ وس} \right]$$

$$(5) \quad \left[(8 + 7س)^0 \text{ وس} = (8 + 7س)^1 \text{ وس} \right]$$





تدريب (1): جد التكاملات الآتية:

$$(1) \int (س^٥ + س^{-٥} + ٥س - ٥) دس$$

الحل:

$$(6) \int (٩ + س٢)^٤ دس$$

الحل:

$$(2) \int (س٣ - ٢س٦ + ١) دس$$

الحل:

$$(7) \int ٦(س٢ + ٤)^٣ دس$$

الحل:

$$(3) \int (٤س٣ - ٢جتا س - ٥ جا س) دس$$

الحل:

$$(8) \int ٥س^٢ - جا(٣ + س٢) + جتا(٦ - س) دس$$

الحل:

$$(4) \int (٠.١س^٢ - س + \frac{1}{٤}) دس$$

الحل:

$$(9) \int س^{\frac{1}{٥}} + س^{\frac{٧}{٢}} + س^{-\frac{1}{٣}} دس$$

الحل:

$$(5) \int \left(\frac{س^٣}{٥} - ٤قا س + ٣ جا س \right) دس$$

الحل:

$$(10) \int (س + ٣)^٢ دس \leftarrow \text{(بدنا الحل بطريقتين)}$$

الحل:





ندينا ٤ حالات لا يجوز فيها إجراء التكامل مباشرة يجب:
 أولاً: نجهز المقدار (تجهيز)
 ثانياً: نقوم بإجراء التكامل حسب القواعد
 والحالات الأربعة هي:

1. السين تحت الجذر $\sqrt[n]{\frac{م}{ن}}$ نجهز

$\left[\sqrt[n]{\frac{م}{ن}} \right] \leftarrow$ نجهز \leftarrow $\left[\frac{م}{ن} \right]$ ← الداخل
 ← الخارج بعد ما نجهز نعمل تكامل

مثال: جد $\int \sqrt[3]{\frac{س}{٥}} \cdot س \cdot دس$ نحوله لأس كسر

نجهز $\leftarrow \int س^{\frac{٥}{٣}}$

نعمل تكامل $\leftarrow \frac{٣}{٨} س^{\frac{٣}{٨}} + ج$



$$(4) \int \sqrt[3]{٤س - ٣س} \cdot دس$$

الحل:

$$(1) \int \sqrt[٥]{\frac{س}{٣}} \cdot دس$$

الحل:

$$(5) \int \sqrt[٤]{٥س} \cdot دس$$

الحل:

$$(2) \int \sqrt[٨]{س} \cdot دس$$

الحل:

$$(6) \int \sqrt[3]{(٩ + ٣س) \cdot دس}$$

الحل:

$$(3) \int \sqrt[٥]{\frac{س}{٣}} \cdot دس$$

الحل:

2. الضرب بين السينات $س^ن \times س^م$

عند وجود ضرب بين السينات ← هنا نجهز نضرب المعاملات ونجمع الأسس فوق السينات

$$\left[س^ن \times س^م \right] \leftarrow \left[س^{ن+م} \right] \text{ وس } \text{وبعدين نعمل تكامل للناتج}$$

مثال: جد $\left[س^٢(٥+س٦) \right]$ وس لاحظ لازم نوزع الضرب



$$\text{نجهز } \left[س^٢(٥+س٦) \right]$$

$$\text{نعمل تكامل } \frac{٢}{٢} س^٢ + \frac{٢}{٣} س^٢$$

$$(3) \left[س^٢(٥+س٦) \right]$$

الحل:

$$(1) \left[(٥+٤٣)(٣-٤٢) \right]$$

الحل:

$$(2) \left[(٣-٤٥) \right]$$

الحل:

هناك تجهيز خاص نستخدمه عند وجود معادلة داخل قوس فوقه تربيع

مثال: $\left[(٣+س^٢) \right]$ وس هنا نجهز بجعله قوسين بينهم ضرب ثم نوزع الضرب



$$\left[(٣+س^٢) \times (٣+س^٢) \right]$$

$$\left[٩ + ٢س٣ + ٢س٣ + س^٤ \right]$$

$$\left[٩ + ٢س٣ + س^٤ \right] \leftarrow \left[٩ + \frac{٢}{٣} س^٦ + \frac{٥}{٥} س^٥ \right]$$

3. (أ) قسمة عدد على السينات $\frac{1}{s}$

هنا نقوم برفع المقدار الموجود في المقام إلى جانب الرقم الموجود في البسط ← مع تغيير إشارة أس المقام

$$\left[\frac{1}{s^n} \text{ دس} \leftarrow \text{نجهز} \leftarrow \left[1s^{-n} \text{ دس} \leftarrow \text{ثم نعمل تكامل} \right. \right.$$

$$\left. \left[\frac{1}{(a+b)^n} \text{ دس} \leftarrow \text{نجهز} \leftarrow \left[1(a+b)^{-n} \text{ دس} \leftarrow \text{ثم نعمل تكامل} \right. \right. \right.$$



مثال: جد $\left[\frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^5} + \frac{6}{(1-s^2)^5} \text{ دس} \right.$

نجهز $\left[6s^{-3} + 6s^{-5} + 6(1-s^2)^{-5} \text{ دس} \right.$

نعمل تكامل = $\frac{6s^{-2}}{-2} + \frac{6s^{-4}}{-4} + \frac{6(1-s^2)^{-4}}{-4} + C$

(2) $\left[\frac{1}{s^8} \text{ دس} \right.$

الحل:

(1) $\left[\frac{1}{s^5} \text{ دس} \right.$

الحل:

(4) $\left[\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \text{ دس} \right.$

الحل:

(3) $\left[\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} \text{ دس} \right.$

الحل:

(6) $\left[\frac{6}{s^3} \text{ دس} \right.$

الحل:

(5) $\left[\frac{4}{s^{\frac{4}{3}}} \text{ دس} \right.$

الحل:

(ب) إذا في المقام فقط سين واحدة ← نوزع البسط على المقام

$$\text{مثال (١): } \left[\frac{س٣ + س}{س٤} \right] \text{ وس}$$

$$\text{نطرح الأسس } \left[\frac{س٣}{س٤} + \frac{س}{س٤} \right] \text{ وس}$$



$$\left[\frac{س٣}{س٢} + \frac{س٣}{س٢} \right] \text{ وس}$$

$$\text{تكامل} = \frac{س٣}{س٣} + \frac{س٣}{س٢} = ج + \frac{س٣}{س٢}$$

$$\text{مثال (٢): } \left[\frac{س٥ + س٢ + س٧}{س٢} \right] \text{ وس}$$

$$\left[\frac{س٥}{س٢} + \frac{س٢}{س٢} + \frac{س٧}{س٢} \right] \text{ وس}$$

$$\left[\frac{س٥}{س٢} + س٢ + س٧ \right] \text{ وس}$$

$$= \frac{س٥}{س٢} + س٢ + س٧ = ج + \frac{س٥}{س٢} + س٢ + س٧$$

$$(2) \left[\frac{س٥ + س٢}{س} \right] \text{ وس}$$

الحل:

$$(1) \left[\frac{س٣ - ٨}{س} \right] \text{ وس}$$

الحل:

$$(4) \left[\frac{س٥ + س٢}{س٤} \right] \text{ وس}$$

الحل:

$$(3) \left[\frac{س٣ + س٢ + س٥}{س} \right] \text{ وس}$$

الحل:

(ج) إذا في المقام معادلة (س ± أ) ← (١) نحل (٢) نختصر (٣) نعمل تكامل

محتاج أخذ غفوة



$$\text{مثال: } \left[\frac{س٢ - ٢٥}{س - ٥} \right] \text{ وس}$$

$$\text{نجهز } \left[\frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥} \right] \text{ وس} \leftarrow \left[\frac{س + ٥}{س} \right] \text{ وس} \leftarrow \text{تكامل} = س + ٥ + \frac{س٢}{س}$$

$$(2) \left[\frac{س٢ + ٢}{س + ١} \right] \text{ وس}$$

الحل:

$$(1) \left[\frac{س٣ - ١٢٥}{س - ٥} \right] \text{ وس}$$

الحل:

$$(4) \left[\frac{س٢ + س٣ - ٤}{س + ٤} \right] \text{ وس}$$

الحل:

$$(3) \left[\frac{س٣ - ٦}{س - ٢} \right] \text{ وس}$$

الحل:

أمثلة: جد التكاملات الآتية:



عن جد؟!

$$(2) \int \left(3s^2 - \frac{2}{s} + 4 \right) ds$$

الحل:

$$(1) \int \left(s^2 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \right) ds$$

الحل:

$$(4) \int \left(s^7 + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{9}{s} \right) ds$$

الحل:

$$(3) \int \left(s^4 - \frac{3}{s} + 2s^0 \right) ds$$

الحل:

$$(6) \int (s+3)(s^2+5) ds$$

الحل:

$$(5) \int s \sqrt{s} ds$$

الحل:

$$(8) \int s \left(s^2 + \frac{2}{s} \right) ds$$

الحل:

$$(7) \int (s+2)(s-1) ds$$

الحل:

انت سويت الي
تقدر عليه

$$(10) \int \frac{1}{s^3} ds$$

الحل:

$$(9) \int s \left(s^3 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} \right) ds$$

الحل:

$$(12) \int \frac{s^3 + 8}{s + 2} ds$$

الحل:

$$(11) \int \frac{ds}{s^3}$$

الحل:



$$(14) \left[\begin{array}{l} \text{هـ}^{-4} \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(13) \left[\begin{array}{l} \text{س}^3 - 27 \\ \text{س} - 3 \end{array} \right] \text{ دس} \\ \text{الحل:}$$

$$(16) \left[\begin{array}{l} \text{س}^{\frac{2}{5}} \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(15) \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\text{س}^3} \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(18) \left[\begin{array}{l} 4\text{س}^3 + 6\text{س} \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(17) \left[\begin{array}{l} \overline{\text{ص}} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(20) \left[\begin{array}{l} 5\text{س}^2 + 7\text{س} - 9 \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(19) \left[\begin{array}{l} 2\text{س} + 5 \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(22) \left[\begin{array}{l} \frac{5}{\text{س}^2} \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$



$$(21) \left[\begin{array}{l} \overline{\text{ص}} \left(\overline{\text{ص}} + \frac{2}{\overline{\text{ص}}} \right) \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(24) \left[\begin{array}{l} 2\text{س}^2 + 9\text{س} \text{ دس} \\ \text{الحل:} \end{array} \right.$$

$$(23) \left[\begin{array}{l} 6\text{س}^2 + 5\text{س} + 9 \\ \text{س}^2 \end{array} \right] \text{ دس} \\ \text{الحل:}$$



$$(26) \quad \left[3 \text{ قاس} + 7 \text{ جاس} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(25) \quad \left[7 \text{ جتاس} + 7 \text{ قاس} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(28) \quad \left[8 \text{ ع} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(27) \quad \left[8 \text{ س} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(30) \quad \left[\frac{24 - 5s - 2s^2}{16 - 2s} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(29) \quad \left[\frac{8 + 6s - 2s^2}{2 - s} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(32) \quad \left[\frac{1}{4} \text{ جتاس} - 4 \text{ قاس} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(31) \quad \left[\frac{6 - s - 2s^2}{3 - s} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(34) \quad \left[\frac{3}{2-s} + 3s^2 + 3s + 3s^3 \text{ وس} \right]$$

الحل:

لماذا؟



$$(33) \quad \left[\frac{3}{5-s} + \frac{3}{2-s} + 3s \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(36) \quad \left[\frac{2-s}{2-5s} \text{ وس} \right]$$

الحل:

$$(35) \quad \left[\frac{-\text{وس}}{5-s} \right]$$

الحل:

متى؟



$$(38) \left[\text{وس } (س^2 + 3) \right]$$

الحل:

$$(37) \left[\text{وس } (س^2 + 2س) \right]$$

الحل:

$$(40) \left[\text{وس } \frac{س^5 + س^3 + س^2 + س}{س} \right]$$

الحل:

$$(39) \left[\text{وس } (س^2 - 3س) \right]$$

الحل:

$$(42) \left[\text{وس } \frac{س^6 - 8س}{س^3} \right]$$

الحل:

$$(41) \left[\text{وس } \frac{س^4 + س^3 + س^2}{س} \right]$$

الحل:

$$(44) \left[\text{وس } \frac{س^2 - 3س - 6}{س^5} \right]$$

الحل:

$$(43) \left[\text{وس } \frac{س^6 - 5س}{س^3} \right]$$

الحل:

هل لديكم أي أسئلة؟



$$(46) \left[\text{وس } \frac{س^2 - 16}{س - 4} \right]$$

الحل:

$$(45) \left[\text{وس } \frac{س^2 - 25}{س - 5} \right]$$

الحل:

$$(48) \left[\text{وس } \frac{س^3 - 27}{س^2 + 6} \right]$$

الحل:

$$(47) \left[\text{وس } \frac{س^2 - 2}{س - 1} \right]$$

الحل:



$$(50) \int \frac{s^2 - 9}{s - 3} ds$$

الحل:

$$(49) \int (3s + 5) ds$$

الحل:

$$(52) \int \frac{s^3 - 8}{s - 2} ds$$

الحل:

$$(51) \int \frac{s^2 + 2s}{s + 2} ds$$

الحل:

$$(54) \int \frac{2}{s} - \frac{3}{5} + 4s^2 + 8 ds$$

الحل:



$$(53) \int \sqrt{s} ds$$

الحل:

$$(56) \int 6s - 2 + \sqrt{s} ds$$

الحل:

$$(55) \int \frac{2}{s} - \frac{3}{5} + 4s^2 + 8 ds$$

الحل:

$$(58) \int (2s - 1)(s + 9) ds$$

الحل:

$$(57) \int 10s^2 - \sqrt{s} + 3 ds$$

الحل:

$$(60) \int 4s^2 + 4s + 3 ds$$

الحل:

$$(59) \int (2s + 2) ds$$

الحل:

(62) $\left[\text{وس } (5 + 2s) \frac{1}{3} \right]$ **الحل:**



(61) $\left[\text{وس } 5 + 2s \right]$ **الحل:**

(63) $\left[\text{وس } (10s - s^2 + s - \frac{1}{2}) \right]$ **الحل:**



تدريب (2): ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

(1) $\left[\text{وس يساوي:} \right]$

(أ) صفر (ب) s^2 (ج) $s + 1$ (د) $1 + s$

(2) $\left[2 - 2s \text{ جاس وس يساوي:} \right]$

(أ) $2 + 2s$ (ب) $2 + 2s$ (ج) $2 - 2s$ (د) $1 + s$

(3) $\left[m \text{ وس حيث } m \text{ عدد ثابت:} \right]$

(أ) $m + 1$ (ب) $m + s$ (ج) صفر (د) $m + \frac{2}{2}$

(4) $\left[6 \text{ قاس } 3s \text{ وس يساوي:} \right]$

(أ) $6 + 3s$ (ب) $2 + 3s$ (ج) $18 + 3s$ (د) صفر

(5) $\left[\text{صفر وس يساوي:} \right]$

(أ) صفر (ب) $s + 1$ (ج) $s + \frac{2}{2}$ (د) s

تدريبات شاملة



$$(1) \left[\frac{8}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s^3} + (s+3)^2 \right] \text{ وس}$$

$$\text{الحل: } \left[\frac{3}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{s^3} + \frac{8}{s^5} + \frac{3}{s^2} + \frac{8}{s} \right] \text{ وس}$$

$$\text{نكامل } \frac{2}{s} + \frac{8}{s^3} + \frac{3}{s^4} + \frac{4}{s^5} + \frac{8}{s^4} + \frac{3}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^4} + \frac{4}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{3}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{3}{s^5}$$

$$\text{خطوة بدون علامة } \frac{2}{s} + \frac{3}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{3}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{3}{s^5} + \frac{2}{s^4} + \frac{3}{s^5}$$

$$(2) \left[(s+3)(s^2-1) \right] \text{ وس يوجد ضرب ضرب أولاً}$$

$$\text{الحل: } \left[s^3 - s^2 + 3s - 3 \right] \text{ وس وزعنا الضرب}$$

$$\frac{4}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^3} - \frac{3}{s^3} + \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s}$$

$$(3) \left[\frac{3}{(s+5)^6} + \frac{s^3-8}{s^2-2} \right] \text{ وس بدنا نتخلص من القسمة}$$

نجهز نرفعها للبسط نجهز نحلل فرق بين مكعبين

$$\text{الحل: } \left[\frac{(s^2+2s+4)(s-2)}{s^2-2} + \frac{3(s+5)^6}{s^2-2} \right] \text{ وس}$$

$$\text{نكامل } \frac{3(s+5)^6}{s^2-2} + \frac{2s^2}{s^2} + \frac{3s}{s^3} + \frac{3(s+5)^6}{s^2-2}$$

$$(4) \left[\frac{s^2}{s} + \frac{1}{s} \right] \text{ وس نجهز الجذر أولاً ثم نوزع القسمة}$$



$$\text{الحل: } \left[\frac{s^2}{s} + \frac{1}{s} \right] \text{ وس}$$

$$\left[\frac{s^2}{s} + \frac{1}{s} \right] \text{ وس طرحنا الأسس } \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2 \times 2}{1 \times 2}$$

$$\left[\frac{3}{s} + \frac{1}{s} \right] \text{ وس } \frac{2}{s} - \frac{3}{s} = \frac{1}{s}$$

$$(5) \left[\frac{3}{s^5} \right] \text{ وس هنا تجهيزين جذر وقسمة}$$

$$\text{الحل: } \left[\frac{3}{s^5} \right] \text{ وس}$$

$$\left[\frac{3}{s^5} \right] \text{ وس نكامل } \frac{3}{s^5} \times 3 = \frac{9}{s^5} + \frac{3}{s^5}$$

• عدد ٢ تجهيز تفوق للاقتوانات المثلثية

أولاً: ظاس ← عند وجود ظاس في أي سؤال تكامل ← نجهز نضع مكان ظاس ← $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$
وهذا تجهيز وبعدين راح نقدر نكامل

أمثلة:



$$(٢) \left[\begin{array}{l} ٣ \text{ ظاس جتاس} + ٢ \text{ وس} \end{array} \right]$$

الحل:

$$(١) \left[\begin{array}{l} \text{ظاس جتاس وس} \\ \downarrow \end{array} \right]$$

$$\text{الحل: نجهز} \left[\begin{array}{l} \text{جاس} \\ \text{جتاس} \end{array} \right] \text{ وس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{جاس وس} \end{array} \right]$$

$$= - \text{جتاس} + \text{ج}$$

ثانياً: قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ يعني جتاس مقلوب قاس معناها ← في أي سؤال تكامل:

• عند وجود قاس في المقام نرفعه للبسط يصبح جتاس

• عند وجود جتاس في المقام ← نجهز نرفعه للبسط يصبح قاس

• عند وجود قاس في البسط ← ينزل للمقام يصبح جتاس ، كل ما سبق هو تجهيز

أمثلة:

$$(٢) \left[\begin{array}{l} ٣ \\ \text{جتاس}^٢ \text{ وس} \end{array} \right]$$

الحل:

$$(١) \left[\begin{array}{l} ٨ \\ \text{قاس} \end{array} + \frac{٦}{\text{جتاس}^٢} \text{ وس} \right]$$

$$\text{الحل: نجهز} \left[\begin{array}{l} ٦ \text{ قاس} + ٨ \text{ جتاس وس} \end{array} \right]$$

$$\text{الآن نكامل} \leftarrow ٦ \text{ ظاس} + ٨ \text{ جاس} + \text{ج}$$

$$(٤) \left[\begin{array}{l} ٥ \text{ قاس جتاس وس} \end{array} \right]$$

$$\text{الحل: نجهز} \left[\begin{array}{l} ١ \\ \text{جتاس} \end{array} \right] \times ٥ \text{ وس}$$

$$\left[\begin{array}{l} ٥ \text{ وس} \end{array} \right] \leftarrow ٥ \text{ وس} + \text{ج}$$

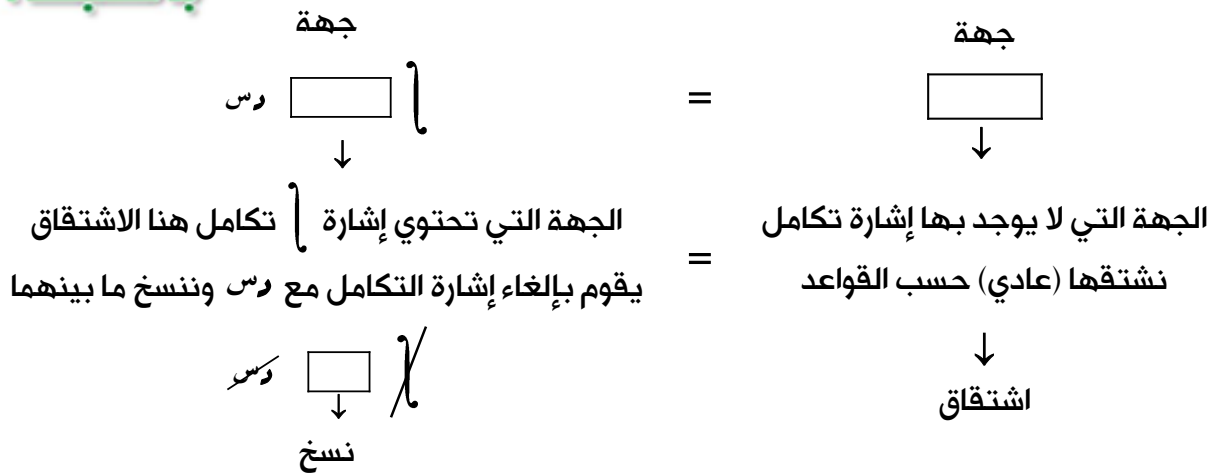
$$(٣) \left[\begin{array}{l} ٢ - ٧ \text{ قاس} + ٦ \\ \text{جتاس}^٢ \end{array} \text{ وس} \right]$$

الحل:

الاشتقاق مع وجود التكامل في السؤال



أولاً: الاشتقاق في حالة وجود التكامل غير المحدود \int دس
دائماً وأبداً يوجد في السؤال إشارة = تقسم إلى طرفين (جهتين)



أمثلة للتوضيح:

(١) إذا كان $\int \frac{ص}{س} = \int \frac{ص}{س} \times \int \frac{س^٣}{س^٣} = \int \frac{ص \times س^٣}{س^٣}$

الحل: نشتق $\int \frac{ص}{س} = \int \frac{ص \times س^٣}{س^٣}$
نلغي التكامل مع وننسخ اللي بينهم

(٢) $\int (س) = \int (س + س^٢) = \int (س + س^٢) \times \int (١) = \int (س + س^٢) \times ١$

الحل: نشتق $\int (س) = \int (س + س^٢) = \int (س + س^٢) \times ١$
نسخ
 $\int (س) = \int (س + س^٢) = ١ \times (س + س^٢) = س + س^٢$
 $\int (١) = \int (١) = ١ \times (١) = ١$

(٣) $\int (س) = \int (س + س^٢) = \int (س + س^٢) \times \int (١) = \int (س + س^٢) \times ١$

الحل: نلغي $\int (س) = \int (س + س^٢) = \int (س + س^٢) \times ١$ مع دس = هذه الجهة نشتقها لعدم وجود
 $\int (س) = \int (س + س^٢) = ١ \times (س + س^٢) = س + س^٢$
 $\int (١) = \int (١) = ١ \times (١) = ١$



(٤) إذا كان $\int \frac{ص}{س} = \int \frac{ص}{س} \times \int \frac{س^٣ - ١}{س^٣ - ١} = \int \frac{ص \times (س^٣ - ١)}{س^٣ - ١}$

الحل: نشتق $\int \frac{ص}{س} = \int \frac{ص \times (س^٣ - ١)}{س^٣ - ١}$
نموت التكامل مع دس وننسخ
 $\int \frac{ص}{س} = \int \frac{ص \times (س^٣ - ١)}{س^٣ - ١}$

(٥) إذا كان $\left[3\sqrt{s} = s + 9 \right]$ وكان $\sqrt{s} = 1$ فجد قيمة الثابت a

الحل: نشتق الطرفين $3\sqrt{s} = s + 9$

نعوض بـ (١) $3\sqrt{1} = 1 + 9$

$$3 = 1 + 9$$

$$3 - 1 = 9 \rightarrow 2 = 9$$



ثانياً: الاشتقاق في حالة وجود التكامل المحدود $\int_a^b \square ds$ يسحتوي حدود (أرقام) $\left[\int_a^b \square ds \right]$

هنا معلومة هامة \leftarrow راح تعجبك دائماً وأبداً مشتقة التكامل المحدود \leftarrow صفر

أمثلة للتوضيح:

(١) إذا كان $\int_2^5 (4s^2 + 3) ds = \int_2^5 \square ds$

الحل: نشتق $\int_2^5 (4s^2 + 3) ds = \int_2^5 \square ds$ مشتقة التكامل المحدود

أكبداً



(٢) $\int_1^7 \frac{1-s^2}{s+5} ds = \int_1^7 \square ds$ ، فجد $\frac{ds}{ds}$ عند $s = 3$

الحل: $\frac{ds}{ds} = 0$ إذا دائماً عند اشتقاق التكامل المحدود تعامل معه كأنه رقم مشتقته (صفر)

اشتقاق التكامل المحدود: هو الاقتران الموجود بين إشارة التكامل و ds

أمثلة:

(2) إذا كان $\int_0^5 \frac{1}{s+5} ds = \int_0^5 \square ds$ ، جد $\frac{ds}{ds}$

الحل:

(1) إذا كان $\int_0^5 (s^2 + 2) ds = \int_0^5 \square ds$ ، جد $\frac{ds}{ds}$

الحل:

(4) إذا كان $\int_0^5 (5 - 7s^3) ds = \int_0^5 \square ds$ ، جد $\frac{ds}{ds}$

الحل:

(3) إذا كان $\int_0^5 \frac{s^2}{1+s^3} ds = \int_0^5 \square ds$ ، جد $\frac{ds}{ds}$

الحل:

$$(5) \text{ إذا كان } ص = \left[(5\sqrt{s} + \sqrt{s})^3 \right] \text{ و } س ، \text{ جد } \frac{ص}{س}$$

الحل:

$$(6) \text{ إذا كان } و = (س) = \left[\frac{س^3}{س^2 + 7س + 1} \right] \text{ و } س ، \text{ جد } و (1)$$

الحل:



$$(7) \text{ إذا كان } ع (س) = و = س^3 - 6س^2 + 6س + 5 \text{ و } س ، \text{ جد } ع (1)$$

الحل:

$$(8) \text{ إذا كان } و = (س) = و = س^3 + 2س^2 + 5 \text{ و } س ، \text{ جد } و (1) ، و (1)$$

الحل:

$$(9) \text{ إذا كان } و = (س) = و = س^3 - 5س + 6 \text{ و } س ، \text{ جد } و (4)$$

الحل:



$$(10) \text{ إذا كان } ص = \left[\frac{5س}{س^2 + 1} \right] \text{ و } س ، \text{ جد } \frac{ص}{س}$$

الحل:

$$(11) \text{ إذا كان } و = (س) = \left[\frac{س + 2}{س + 3} \right] \text{ و } س ، \text{ جد } و (2)$$

الحل:

$$(12) \text{ إذا كان } و = و = س^2 + 2س ، \text{ جد } و (2) \text{ علماً أن } و (1) = 7$$

الحل:

$$(13) \text{ إذا كان } و = (س) = و = س^3 + 2س^2 + 6س ، \text{ جد } و (3)$$

الحل:

$$(14) \text{ إذا كان } و = (س) = و = س^3 + 5س ، \text{ جد } و (2)$$

الحل:



ملاحظة « اشتقاق التكامل المحدود دائماً يساوي صفر

أمثلة:

$$(1) \text{ إذا كان } \int_1^9 \sqrt{9+s^2} \, ds \text{ جد } \frac{ds}{s}$$

الحل:

$$(2) \text{ إذا كان } \int_0^1 \frac{s^2}{9+s^2} \, ds + \int_1^2 \frac{s^2}{7+s^2} \, ds = \text{جد } \frac{ds}{s}$$

الحل:

$$(3) \int_1^2 \frac{1-s}{s+2} \, ds + \int_2^9 \frac{s^2}{9+s^2} \, ds + \int_2^3 \frac{ds}{s} \text{ علماء بأن } \int_2^3 \frac{ds}{s} \text{ أوجد } \int_1^2 \frac{ds}{s} \text{ ، هـ } (2) = 9 \text{ ، هـ } (2) = 3$$

الحل:



قاعدة: $\int_1^a \frac{1}{s} \, ds = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$

أمثلة:

$$(1) \text{ إذا كانت } \int_1^2 \frac{1}{s} \, ds \text{ هي مشتقة الاقتران } \ln(s) \text{ ،$$

المعرف على $[2, 9]$ وكان $\int_1^2 \frac{1}{s} \, ds = 1.1$ ،

$$\int_2^9 \frac{1}{s} \, ds = 2.5 \text{ احسب } \int_1^9 \frac{1}{s} \, ds$$

الحل:

$$(2) \text{ إذا كانت } \int_1^3 \frac{1}{s} \, ds = 1.1 \text{ ،$$

الحل:

$$(3) \text{ إذا كانت } \int_1^2 \frac{1}{s} \, ds = 0.69 \text{ هي مشتقة (هـ)}$$

المعرف على $[-2, 3]$ فما قيمة $\int_2^3 \frac{1}{s} \, ds - \int_1^2 \frac{1}{s} \, ds$

الحل:

$$(4) \text{ إذا كانت } \int_1^2 \frac{1}{s} \, ds = 0.69 \text{ ،$$

$$\int_1^2 \frac{1}{s} \, ds = 0.69 \text{ احسب } \int_1^2 \frac{1}{s} \, ds$$

الحل:

ثانياً: التكامل المحدود

لا توجد قواعد جديدة لإجراء التكامل المحدود نفس قواعد التكامل غير المحدود ولكن الفرق هو أننا بعد إجراء عملية التكامل (نعوض) بالحدود (الأرقام) لإيجاد ناتج التكامل المحدود .



أولاً: القاعدة العامة: جد $\int_a^b f(x) dx$ (س) وس

(أ) مربع عجيب [نعمل تكامل $f(x)$ (س)]

(ب) أحلى قوسين بينهم $\int_a^b f(x) dx$ -

نعوض محل كل س نعوض محل كل س
داخل المربع بالعدد داخل المربع بالعدد
اللي موجود فوق اللي موجود تحت

(ج) الفرق (الناتج) - (الناتج) = $\int_a^b f(x) dx$ ← قيمة التكامل المحدود

لاحظ أن: القاعدة العامة تستخدم دائماً لإجراء أي تكامل محدود (في كل الحالات) وإجباري عند وجود سينات .

ملاحظة



(١) عند إجراء التكامل المحدود داخل المربع العجيب لا نضع + ج ← إنساها

(٢) علشان ما نزعل من بعض إذا كان سؤال التكامل المحدود يحتوي تجهيز جهز خارج المربع العجيب

أمثلة:

$$(1) \int_1^8 f(x) dx = 8$$

الحل:

$$(2) \int_1^4 f(x) dx = 4$$

الحل:

$$(3) \int_4^8 f(x) dx = \frac{8}{5}$$

الحل:

$$(4) \int_1^4 f(x) dx = 2s^2$$

الحل:

لا يُقَدَّر بَشَرُهُ



$$(6) \int_{-1}^2 \frac{1}{s^3} ds =$$

الحل:

$$(5) \int_{-2}^3 3s^2 ds =$$

الحل:

$$(8) \int_{-1}^2 (-4s) ds =$$

الحل:

$$(7) \int_{-1}^3 (s^2 + 7) ds =$$

الحل:

$$(10) \int_{-1}^2 (2s^3 - 4s) ds =$$

الحل:

$$(9) \int_{-2}^0 (7s^2) ds =$$

الحل:

$$(12) \int_{-2}^2 (6s^2 - 8s + 3) ds =$$

الحل:

$$(11) \int_{-1}^3 (4s^3 + 2s - 2) ds =$$

الحل:



$$(13) \int_{-1}^2 (3s^3 - 4s^2 + 2) ds =$$

الحل:

ثانياً: إيجاد مجاهيل التكامل المحدود

الفكرة هنا ← راح يعطينا تكامل محدود = عدد ويضع حرف مجهول مثلاً أ أو ب

مخطط إيجاد المجاهيل (شو نعمل)

أحب ما تعمل حتى تعمل ما تحب



$$\int_a^b \boxed{} \text{ دس} = \text{رقم جد مجهول مثلاً (م)}$$

أ) نعمل تكامل محدود للمقدار

سينات قاعدة عامة عدد عالسريع وَ (س) ← وَ (س) []
 [] العدد (فوق - تحت) نلغي الفتحة

ب) نكمل إجراءات التكامل المحدود لما تخلص كل شيء ممكن جهة اليمين الناتج = الرقم

ج) يصبح الموضوع حل معادلة عادي

ملاحظة:

عكس

- + ← -
- - ← +
- × ← ÷
- ÷ ← ×
- √ ← قوة
- قوة ← √



مثلاً: • ٢ = ٢ ← ٦ = ٢

• ١٢ = ٢ ← ٦ = ٢

• ٣ ± = ٢ ← ٩ = ٢

• ٢ = ٢ + ٢ ← نصف ← ونحل

• ٠ = ٢ - ٢ + ٢

• ٢ ، ٣ - = ٢ ← ٠ = (٢ - ٢)(٣ + ٢)

ملاحظة

أي حرف غير س عندما يكون التكامل بدلالة س يعتبر عدد ثابت [م دس ← هذا الـ [م] عدد

تدريبات محلولة: جد قيمة قيم (م)

(1) $\int_1^4 \text{ دس} = 18$ ، جد قيمة الثابت (م)

الحل: م (٤ - ١) عالسريع

$\int_1^4 \text{ دس} = 18 \rightarrow \frac{18}{3} = \text{دس} \rightarrow \boxed{6 = \text{دس}}$

(2) $\int_{-2}^4 \text{ دس} = 36$ ، جد قيمة (م)

الحل: م (٤ - -٢) عالسريع

$\int_{-2}^4 \text{ دس} = 36 \rightarrow \frac{36}{6} = \text{دس} \rightarrow \boxed{2 = \text{دس}}$

(3) $\begin{cases} 4س = 18 \\ 2س = 18 \end{cases}$ فجد قيم (م)

الحل: $18 = [2س]$ تكامل على القاعدة العامة

$$\begin{aligned} & 2(0)2 - (2م)2 \\ & \frac{18}{2} = 2م \end{aligned}$$

$3 \pm = م \leftarrow 9 = 2م$

(4) $\begin{cases} 2س + 3 = 6 \\ 3س + 2 = 6 \end{cases}$ فجد قيم (م)

الحل: $[2س + 3]$

$$(2س + 3) - (3س + 2) = 6 - 6$$

$$6 = 4 - 3س + 2م$$

$$0 = 10 - 3س + 2م$$

$2 = م \leftarrow 0 = (2-6)(5+م)$ ، $5 = -م$ ، $2 = م$



(5) إذا كان (س) متصلًا وكان (س) = 4 ، (س) = 12 ، $\begin{cases} 1س = 16 \\ 2س = 16 \end{cases}$ فما قيمة الثابت (أ)

الحل: $16 = [1س]$

$$16 = (1س) - (2س)$$

$$4 \times 1 - 12 \times 1$$

$$4 - 12$$

$2 = 1 \leftarrow \frac{16}{8} = 1$

أسئلة الجاهيل



(1) إذا كان $\begin{cases} 1س = 8 \\ 2س = 8 \end{cases}$ فما قيمة (ج)

الحل:

(2) إذا كان $\begin{cases} 1س = 24 \\ 2س = 8 \end{cases}$ فما قيمة (ب)

الحل:



(3) إذا كان $\begin{cases} 1س = 48 \\ 2س = 48 \end{cases}$ فما قيمة (ك)

الحل:

(4) إذا كان $\begin{cases} 1س = 35 \\ 2س = 35 \end{cases}$ فما قيمة (د)

الحل:

$$(5) \int_{-1}^m \text{إذا كان } 4 \text{ وس } = 20, \text{ فما قيمة } (m)$$

الحل:

$$(6) \int_{0}^{1+a} \text{إذا كان } 2 \text{ وس } = 9, \text{ فما قيمة } (a)$$

الحل:



$$(7) \int_{1}^5 \text{إذا كان } 5 \text{ وس } = 7 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (a)$$

الحل:

$$(8) \int_{1}^{3+a} \text{إذا كان } 3 + 2 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (a)$$

الحل:

$$(9) \int_{-1}^{0+10} \text{إذا كان } 10 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (a)$$

الحل:

$$(10) \int_{2}^m \text{إذا كان } 2 - 4 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (m)$$

الحل:

$$(11) \int_{1+2}^{4-2} \text{إذا كان } 4 - 2 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (a)$$

الحل:



$$(12) \int_{1}^{2+a} \text{إذا كان } 2 - 1 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (a)$$

الحل:

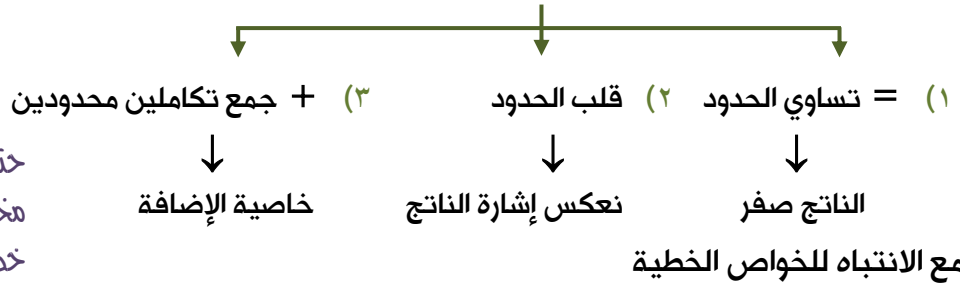
$$(13) \int_{1+2}^{7-} \text{إذا كان } 7 - \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (m)$$

الحل:

$$(14) \int_{2}^1 \text{إذا كان } 3 - 2 \text{ وس } = 0, \text{ فما قيم } (a)$$

الحل:

• للتكامل المحدود ٣ خصائص رئيسية



حتى لا تتألم عليك الدروس في مختلف المواد فخطط ونظم خطتك ثم نفذ وأنجز بشكل مستمر واحذر التسويف والتأجيل



(أ) خاصية التوزيع ← الخاصية الخبيثة $\int_a^b (c \cdot f(x) \pm g(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

لازم نوزع التكامل يعني نعمل تكامل للمقدار الموجود بجانب $f(x)$ (س)

$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ (هذا نعمله تكامل محدود)

(ب) $\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

عدد مضروب في اقتران العدد بينزل زي ما هو ما بنعمله تكامل

– **خاصية (١):** تساوي حدود التكامل

$\int_a^b f(x) dx = 0$ (س) = صفر (عندما يكون الحد العلوي = الحد السفلي ← الناتج صفر)



(أ) $\int_a^a f(x) dx = 0$ (س) = صفر

(ب) $\int_a^a f(x) dx = 0$ (س) = صفر

أمثلة:

(2) $\int_0^3 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^3 = 9 + 4\sqrt{3}$

الحل:

(1) $\int_0^{\pi} (\sin^2 x + 9) dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx + 9x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{9\pi^2}{2}$

الحل:

(3) $\int_{-2}^2 (6x^2 + 9) dx = 2x^3 + 9x \Big|_{-2}^2 = 40$

الحل:

حتى الأفكار تحتاج بشكل دائم
إلى تنظيف من غبار الأفكار
السلبية المحيطة



– **خاصية (2):** قلب حدود التكامل

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

عند قلب حدود التكامل ← نعكس إشارة الناتج مع الانتباه للخاصية الخبيثة ← نعمل تكامل للمقدار إذا كان لدينا \mp مع $f(x)$

(1) إذا كان $\int_a^b f(x) dx = 6$ ، فجد $\int_b^a f(x) dx$

الحل: $\int_b^a f(x) dx = -6$

(2) إذا كان $\int_2^7 f(x) dx = 12$ ، فجد $\int_7^2 f(x) dx$

الحل: أولاً: إيجاد قيمة $f(x)$ لحالها نقسم على (3) للطرفين $\therefore \int_2^7 f(x) dx = 4$

ثانياً: نوجد المطلوب $\int_7^2 f(x) dx = 4 \times 2 = 8$



(3) إذا كان $\int_1^3 \frac{f(x)}{2} dx = 4$ ، فجد $\int_3^1 f(x) dx$

الحل: ضرب تبادلي $\int_1^3 f(x) dx = 8$

لازم نوزع التكامل المحدود $\int_3^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = 5$

$$\int_3^1 f(x) dx = 5 - (3-1) = 2$$

تعلمت أن التنافس مع كائنات أفضل
تنافس في العالم فكلما تنافس الإنسان
مع نفسه كلما تطور، بحيث لا يكون
اليوم كما كان أمس ولا يكون
الغد كما كان اليوم



مه لا يملك تصور لمستقبله
لا يملك خطة لحاضره
وله يترك ذكرى مشرقه لماضيه



$$(4) \text{ إذا كان } \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) + 2 = 10, \text{ فجد } \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) =$$

الحل: انتبه: لازم أولاً نوزع التكامل لوجود جمع +

$$\begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) + 2 = 10$$

$$\begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) + 2 = (1-4)2 + 10$$

$$\begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) + 2 = 10 \quad \leftarrow \quad \boxed{6} \quad \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) = 4$$

$$\begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) = \boxed{4}$$

$$(5) \text{ إذا كان } \begin{matrix} 3 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) + 2 = 12, \text{ فإن } \begin{matrix} 3 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) =$$

الحل:

$$(6) \text{ إذا كان } \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) - 15 = 10, \text{ فإن } \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) =$$

الحل:

$$(7) \text{ إذا كان } \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) + 2 = 8, \text{ فإن } \begin{matrix} 7 \\ | \\ \hline \end{matrix} \begin{matrix} 7 \\ | \\ \hline \end{matrix} (س) - 2 + 1 =$$

الحل:

شكراً!



خاصية (3): الإضافة + جمع تكاملين محدودين:

نستخدمها في حالتين:

(أ) إذا أعطانا في السؤال تكاملين محدودين وطلب قيمة تكامل ثالث ← وكلهم إسمهم $\int (س) دس$

(ب) إذا أعطانا اقتران متشعب وطلب تكامل محدود

خاصية الإضافة نبدأ دائماً لتطبيقها بالمطلوب



$$\int \overset{ب}{(س) دس} = \int \overset{ج}{(س) دس} + \int \overset{ب}{(س) دس}$$

← مشترك ← تحت ← مشترك

(1) إذا كان $\int \overset{ب}{(س) دس} = 6$ ، $\int \overset{ج}{(س) دس} = 4$ ، فجد $\int \overset{ب}{(س) دس}$

الحل: نلاحظ بداية أن التكاملات المعطاة جاهزة قيمتها

نطبق خاصية الإضافة $\int \overset{ب}{(س) دس} = \int \overset{ج}{(س) دس} + \int \overset{ب}{(س) دس} = 4 + 6 = 10$

(2) إذا كان $\int \overset{ب}{(س) دس} = 10$ ، $\int \overset{ج}{(س) دس} = 2$ ، فجد $\int \overset{ب}{(س) دس}$



الحل: أولاً نجهز المعطى الأول $\int \overset{ب}{(س) دس} = 10$ ← $\int \overset{ب}{(س) دس} = 10$

نطبق الإضافة $\int \overset{ب}{(س) دس} = \int \overset{ج}{(س) دس} + \int \overset{ب}{(س) دس} = 2 + 10 = 12$

قلب الحدود

(3) إذا كان $\int \overset{ب}{(س) دس} = 8$ ، $\int \overset{ج}{(س) دس} = -4$ ، فجد $\int \overset{ب}{(س) دس}$

(**الحل:** 1) نوجد قيمة المحدود الأول $\int \overset{ب}{(س) دس} = 8$ ← $\int \overset{ب}{(س) دس} = 8$

(2) $\int \overset{ب}{(س) دس} = -4$

(3) المطلوب $\int \overset{ب}{(س) دس} \times 3 = \int \overset{ب}{(س) دس} + \int \overset{ب}{(س) دس} = 8 + 16 = 24$

$$(4) \text{ إذا كان } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 16 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ، فجد } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 3 = 2 - (س) \text{ ، فجد } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 8 =$$

$$\text{الحل: نجهز } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } \frac{16}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 8 =$$



$$\text{نجهز } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } 3 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 12 - 3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 15 =$$

$$\text{نطبق الإضافة } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } = 15 + 8 - = \boxed{7}$$

سؤال تواصل: إذا أعطانا تكاملين محدودين أسمائهم مختلفة مثلاً: (س) أو ل (س) أو ع (س)

$$(5) \text{ إذا كان } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ، فجد } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 5 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ، فجد } \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 2 + (س) \text{ و } 8 =$$

$$\text{الحل: هنا نجهز } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } 5 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 5 = -$$

$$\text{نوزع } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 4 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } 8 =$$

$$\text{نعوض } (6 \times 4) - (10) - (1-3)2 + (10) - 24 = 8 + 10 - 24 = \boxed{22}$$

– **خاصية (4):** المتشعب خاصية الإضافة

$$(1) \text{ إذا كان } (س) \text{ و } \left. \begin{array}{l} 2 \leq س \leq 1- ، 2-س \\ 3 \geq س > 2 ، 6-2س \end{array} \right\} \text{ ، فجد } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 8 =$$

$$\text{الحل: } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } 4-س = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ و } (س) \text{ و } 6-2س$$

$$\left[\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$(12-8) - (18-27) + ((1-2)-2(1-2)) - ((2)2-2(2)2)$$

$$4 - -9 + 4 - 4$$

$$\boxed{13} = 13 + 0$$



$$(2) \text{ إذا كان } \begin{matrix} \overset{1}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 9, \end{matrix} \begin{matrix} \overset{2}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 18, \end{matrix} \text{ جد } \begin{matrix} \overset{2}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} \end{matrix}$$

الحل:



$$(3) \text{ إذا كان } \begin{matrix} \overset{1}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 5, \end{matrix} \begin{matrix} \overset{4}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 9, \end{matrix} \text{ جد } \begin{matrix} \overset{4}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} \end{matrix}$$

الحل:

$$(4) \text{ إذا كان } \begin{matrix} \overset{1}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 3, \end{matrix} \begin{matrix} \overset{2}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 4, \end{matrix} \text{ جد } \begin{matrix} \overset{2}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} \end{matrix}$$

الحل:

$$(5) \text{ إذا كان } \begin{matrix} \overset{1}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 6, \end{matrix} \begin{matrix} \overset{3}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 4, \end{matrix} \text{ جد } \begin{matrix} \overset{3}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} \end{matrix}$$

الحل:



$$(6) \text{ إذا كان } \begin{matrix} \overset{1}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 12, \end{matrix} \begin{matrix} \overset{1}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} = 8, \end{matrix} \text{ جد } \begin{matrix} \overset{3}{\text{أ}} \\ \text{وه (س)} \\ \text{دس} \end{matrix}$$

الحل:

$$(7) \text{ إذا كان } \begin{cases} 1 \leq s \leq 2 \\ 2 \leq s \leq 3 \end{cases} \text{ جد } \begin{cases} 2s - 4 \\ 2s + 3 \end{cases} \text{ و } s = 8$$

الحل:

100%



$$(8) \text{ إذا كان } \begin{cases} 1 \leq s \leq 2 \\ 2 < s \leq 3 \end{cases} \text{ جد } \begin{cases} 2s - 2 \\ 2s + 3 \end{cases} \text{ و } s = 8$$

الحل:

$$(9) \text{ إذا كان } \begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ 1 < s \leq 2 \end{cases} \text{ جد } \begin{cases} 1 + 2s \\ 1 + s \end{cases} \text{ و } s = 8$$

الحل:

$$(10) \text{ إذا كان } \begin{cases} 1 \leq s \leq 2 \\ 2 \leq s \leq 3 \end{cases} \text{ جد ما يلي: } \begin{cases} 2s - 6 \\ 2s + 3 \end{cases}$$



$$(أ) \begin{cases} 2s - 6 \\ 2s + 3 \end{cases} \text{ و } s = 8$$

الحل:

$$(11) \text{ إذا كان } \int_{-1}^2 (2 - (s)) \, ds = 3 - 8 = -5 \text{ ، جد } \int_{-1}^2 (s + 5 + 7) \, ds$$

الحل:



$$(12) \text{ إذا كان } \int_{-8}^3 (s) \, ds = -8 \text{ ، جد ما يلي:}$$

$$(أ) \int_{-3}^8 (s + 3) \, ds \quad (ب) \int_{-8}^3 \frac{(s)}{2} \, ds$$

الحل:

$$(13) \text{ إذا كان } \int_{-3}^2 (s - 2) \, ds = 8 \text{ ، } \int_{-4}^2 (s) \, ds = -12 \text{ ، جد ما يلي:}$$

$$(أ) \int_{-3}^2 (s) \, ds \quad (ب) \int_{-4}^3 (s + 3) \, ds$$

الحل:





14) إذا كان $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (س) وس = 12 ، $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (س) وس = 4 ، جد ما يلي:

أ) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (س) وس
 ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (س) وس
 ج) $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (س) وس + 2س وس

الحل:



15) إذا كان $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (س) وس = 3 ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (س) وس = 5 ، جد ما يلي:

أ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (س) وس
 ب) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (س) وس - 2س + 8ل وس

الحل:

أمثلة على التكامل المحدود:

(1) إذا كان $v = (2)$ ، $v = (3) = 2 -$ ، جد $\int_2^3 v \text{ (س) دس}$

الحل:

(2) إذا كان $v = (1) = 3 -$ ، $\int_1^3 v \text{ (س) دس} = 18$ ، جد $v \text{ (ب)}$

الحل:

(3) إذا كان $\int_1^7 v \text{ دس} = 18$ ، فما قيم $v \text{ (ك)}$

الحل:

(4) إذا كان $\int_2^5 v \text{ دس} = 40$ ، فما قيم $v \text{ (ب)}$

الحل:

ما اعتقد



(5) إذا كان $\int_1^4 v \text{ دس} = 12$ ، فما قيم $v \text{ (أ)}$

الحل:

(6) إذا كان $\int_1^3 v \text{ (س) دس} = 5 + \frac{1}{2}$ ، جد $\int_1^3 v \text{ (س) دس}$

الحل:



(7) إذا كان $f(s) = s^2 - 8$ ، جد $f(2) - f(1)$

الحل:

(8) جد قيمة $\int_{-2}^3 (s^2 - 3) ds$

الحل:

(9) جد قيمة $\int_1^8 (s^2 + 8) ds$

الحل:

(10) جد قيمة $\int_1^2 \frac{5s^6 + 6}{s^6} ds$

الحل:

(11) إذا كانت $\int_1^5 \frac{s^2}{8 + s^7} ds$ ، جد $\frac{5s}{s}$

الحل:



(12) إذا كانت $f(s) = s^2 + 5$ ، جد $f(3)$

الحل:



أمثلة على خواص التكامل المحدود:

$$(1) \text{ جد قيمة } \int_2^5 \frac{5}{s} + 2s^2 \, ds$$

الحل:

$$(2) \text{ إذا كان } \int_1^2 (s) \, ds = 8 \text{ ، جد } \int_1^5 (s) \, ds$$

الحل:

$$(3) \text{ إذا كان } \int_1^2 (s^2 + 7) \, ds = 52 \text{ ، فما قيم (أ)}$$

الحل:

$$(4) \text{ إذا كان } \int_1^2 (s) \, ds = 10 \text{ ، } \int_1^2 \frac{(s)}{2} \, ds = 8 \text{ ، جد } \int_1^2 (s-3) \, ds$$

الحل:

$$(5) \text{ إذا كان } \int_1^2 (s) \, ds = 8 \text{ ، } \int_1^2 (4s) \, ds = 8 \text{ ، جد } \int_1^2 (3s) \, ds$$

الحل:



$$(6) \text{ إذا كان } \int_1^2 (s) \, ds = \left. \begin{array}{l} 3 \geq s \geq 1 \text{ ، } s^2 + 2s \\ 5 \geq s \geq 3 \text{ ، } s^3 \end{array} \right\}$$

الحل:

توقف عن هذا.



$$(7) \text{ إذا كان } \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = 6 \text{ ، جد } \int_1^2 (4f(x) + x^2) dx$$

الحل:

$$(8) \text{ إذا كان } \int_1^0 f(x) dx = 2 \text{ ، } \int_0^2 (f(x) - 2) dx = 8 \text{ ، جد } \int_1^2 (6x^2 - f(x)) dx$$

الحل:

$$(9) \text{ إذا كان } f(1) = 5 \text{ ، } f(2) = 19 \text{ ، جد } \int_1^2 (2f(x) + 3x^2 - 7) dx$$

الحل:

معليش.



$$(10) \text{ إذا كان } \int_{1+2^b}^0 f(x) dx = 0 \text{ ، فما قيم } (b)$$

الحل:

$$(11) \text{ إذا كان } \int_1^3 (x^2 - 9) dx = -10 \text{ ، فما قيم } (x)$$

الحل:

$$(12) \text{ إذا كان } \int_x^2 (4x - 1) dx = 3 \text{ ، فما قيم } (x)$$

الحل:

ثالثاً: التكامل بالتعويض



متى نستخدم طريقة التكامل بالتعويض؟

نستخدم هذه الطريقة عند وجود ضرب بين اقترانين وبشرطين:

(١) ما بنقدر نضربهم

(٢) اقتران اكبر من الآخر بدرجة واحدة فقط

من الآخر نستخدمها في ٣ حالات:

(أ) $\int (سينات) \times (سينات) \leftarrow \begin{matrix} ن \\ وس \end{matrix}$ يوجد أس

(ب) $\int (سينات) \times \left\{ \begin{array}{l} جا (معادلة) \\ جئا (معادلة) \\ قئا^2 (معادلة) \\ وه () \end{array} \right.$

(ج) $\int (سينات) \times \left\{ \begin{array}{l} وه (معادلة) \\ أو وه (معادلة) \end{array} \right.$

(غرفة الدكتور سامر)

هنا نلجأ للتكامل باستخدام طريقة التعويض وفق الخطوات التالية:

أولاً: بجانب السؤال نعمل غرفة الاشتقاق

(١) نفرض $ص =$ المعادلة الأكبر

(٢) نشتق $\frac{دص}{دس} =$ المشتقة

(٣) $دس = \frac{دص}{مشتقة}$

جد \int (معادلة صغيرة) (معادلة كبيرة) $\leftarrow \begin{matrix} ن \\ وس \end{matrix}$

ثانياً: تنزل زي ما هي مطها تصبح

\int (معادلة صغيرة) $\leftarrow \begin{matrix} ن \\ وس \\ مشتقة \end{matrix}$

اشطب اشطب اشطب

$$ج + \frac{ص^{١+ن}}{١+ن}$$

نرجع $دص$ معادلتها $\leftarrow \begin{matrix} ن \\ وس \\ مشتقة \end{matrix}$



لاحظ الفرق:

\int $س^٢ (س - ٢ - ٥) دس \leftarrow$ هاي تجهيز مش تكامل بالتعويض

\int $س^٢ (س - ٢ - ٥) دس^٣ \leftarrow$ هاي تكامل بالتعويض لأننا ما بنقدر نضرب (تجهز)

ملاحظات هامة جداً

أولاً: قبل إجراء التكامل بالتعويض (إن وجد) جذر أو قسمة لازم نجهز أولاً قبل البدء



$$أ) \left[\begin{array}{l} \text{(صغيرة)} \\ \text{المعادلة الكبيرة} \end{array} \right] \frac{م}{ن} \text{ وس أولاً نجهز}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{(صغيرة)} \\ \text{(المعادلة الكبيرة)} \end{array} \right] \frac{م}{ن} \text{ وس ثم نطبق التعويض}$$

$$ب) \left[\begin{array}{l} \text{معادلة صغيرة} \\ \text{(معادلة كبيرة)} \end{array} \right] \frac{م}{ن} \text{ وس أولاً نجهز نرفعها للبسط وتغير إشارة الأس}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{(معادلة صغيرة)} \\ \text{(المعادلة الكبيرة)} \end{array} \right] \frac{م}{ن} \text{ وس}$$

$$ج) \left[\begin{array}{l} \text{معادلة صغيرة} \\ \text{جنا}^2 \text{ (معادلة كبيرة)} \end{array} \right] \frac{م}{ن} \text{ وس نرفعها للبسط وتصبح قا}^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{(معادلة صغيرة)} \\ \text{قا}^2 \text{ (المعادلة الكبيرة)} \end{array} \right] \text{ وس}$$

ثانياً: احنا دائماً ما نفرضه ص دائماً المعادلة الأكبر درجة من حيث الأس ونأخذ المعادلة فقط (السينات)

$$- \left[\begin{array}{l} \text{(سينات)} \\ \text{(سينات)} \end{array} \right] \text{ قوة وس} \leftarrow \text{ص} = \text{ما بداخل القوة}$$

$$- \left[\begin{array}{l} \text{(سينات)} \\ \text{جا} \end{array} \right] \text{ (سينات) وس} \leftarrow \text{ص} = \text{معادلة الجيب}$$

$$- \left[\begin{array}{l} \text{(سينات)} \\ \text{قا}^2 \end{array} \right] \text{ (سينات) وس} \leftarrow \text{ص} = \text{السينات الموجودة مع قا}^2$$

$$- \left[\begin{array}{l} \text{سينات} \\ \text{جنا} \end{array} \right] \text{ (سينات) وس} \leftarrow \text{ص} = \text{سينات}$$

$$- \left[\begin{array}{l} \text{سينات} \times \text{ه} \\ \text{()} \end{array} \right] \text{ وس} \leftarrow \text{ص} = \text{معادلة فوق ه}$$

$$- \left[\begin{array}{l} \text{سينات} \times \text{ه} \\ \text{(معادلة)} \end{array} \right] \text{ وس} \leftarrow \text{ص} = \text{معادلة أمام ه}$$

هل لديكم أي أسئلة؟



ثالثاً: نشط الذاكرة بالأمثلة التالية لقواعد الاشتقاق:

$$(1) \text{ ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س} - 5$$

$$\frac{ص}{س} = \text{س}^3 - \text{س}^2 + \text{س} - 5$$

$$(2) \text{ ص} = \text{س}^2 - \text{س} + \text{س}^2 + \text{س}^3 + 1$$

$$\frac{ص}{س} = \text{س}^2 + 1 - \text{س}^2 + \text{س}^3$$

الشكل الأول: \int (سينات) (سينات) قوة s وس



← ص = ما بداخل القوة

$$\frac{s}{\text{مشتقة ص}} = \text{وس}$$

أمثلة:

(1) $\int s^2 (1 + s^2)^7 \text{ وس}$

الحل:

(2) $\int (2 + s^2)(s^3 + s^2 + 9) \text{ وس}$

الحل:

(3) $\int s^3 (s^2 + 9)^{\frac{7}{5}} \text{ وس}$

الحل:

(4) $\int (1 + s^2) \sqrt[5]{s^2 + s - 4} \text{ وس}$

الحل:

(5) $\int s (s^2 + 2)^4 \text{ وس}$

الحل:

(6) $\int (s + 3) \sqrt[3]{s^2 + 6s + 4} \text{ وس}$

الحل:

(7) $\int \frac{10 - s}{(s^2 - s + 9)^3} \text{ وس}$

الحل:

(8) $\int \frac{1 + s}{\sqrt[3]{s^2 + 2s + 5}} \text{ وس}$

الحل:

(9) $\int \frac{s^2}{\sqrt[4]{s^3 + 7}} \text{ وس}$

الحل:

(10) $\int \frac{4s - 6}{\sqrt[3]{s^3 - 2s + 1}} \text{ وس}$

الحل:

(11) $\int \frac{1 + s}{(s^2 + 2s + 1)^2} \text{ وس}$

الحل:

إذا لم تحاول أه تفعل شيئاً أبعد
مما قد أتقنته فانك لا تتقدم أبداً



أكثر الأمور غرابة أنه تجلس
في المقعد الأخير نائماً تحلم
أنك في المقدمة



الشكل الثاني: $\left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (سينات) وس}$

← ص =

$$\frac{S}{\text{مشتقة ص}} = S$$

أها



أمثلة:

$$(2) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (س}^3 \text{) جا (س}^3 \text{ + 8) وس}$$

الحل:

$$(1) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (س}^2 \text{ + 1) جا (س}^2 \text{ + س + 9) وس}$$

الحل:

$$(4) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \frac{1 + S^2}{9 + S + S^2} \text{ وس}$$

الحل:

$$(3) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (س}^2 \text{ + 6) قا (س}^3 \text{ + س + 8) وس}$$

الحل:

$$(6) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (س}^2 \text{ + 1) قا (س}^2 \text{ + س + 1) وس}$$

الحل:

$$(5) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (س}^2 \text{ - 3) جا (س}^2 \text{ - 3) وس}$$

الحل:

غير متوقع



$$(7) \left[\begin{array}{l} \text{جا} \\ \text{قا} \end{array} \right] \text{ (س}^3 \text{ - 6) جا (س}^3 \text{ - 6) وس}$$

الحل:

الشكل الثالث: $\int (سینات) \bar{و} (سینات) دس$

$$\leftarrow ص =$$

$$\frac{ص}{مشتقة ص} = دس$$



أمثلة:

(1) إذا كان $\bar{و} (٤) = ١٢$ ، $\bar{و} (١) = ٨ -$ ، جد قيمة $\int_{١-}^{٢} ٢س \bar{و} (س) دس$

الحل:

(2) إذا كان $\bar{و} (٩) = ١٩$ ، $\bar{و} (١٣) = ٢$ ، جد قيمة $\int (٤س + ٦) \bar{و} (س^٢ + ٣س + ٩) دس$

الحل:

مَلل



(3) إذا كان $\bar{و} (٨-) = ٥$ ، $\bar{و} (٢٧) = ٦ -$ ، جد قيمة $\int_{٢-}^{٣} ٣س^٢ \bar{و} (س^٣) دس$

الحل:

(4) إذا كان $\int_٥^٢ (س) دس = ٣$ ، جد قيمة $\int_{١-}^{٢} ٨س \bar{و} (س + ١) دس$

الحل:

أمثلة على التكامل بالتعويض:



$$(2) \int \frac{s^3}{(s^2 - 3)^4} ds$$

الحل:

$$(1) \int (s^3 + 5s^2 - 7) \cdot (s^2 + 5)^{-1} ds$$

الحل:

$$(4) \int \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s} ds$$

الحل:

$$(3) \int (s^2 + 7) \sqrt{s^2 + 5} ds$$

الحل:

$$(6) \int s^2 \ln s^3 ds$$

الحل:

$$(5) \int s^2 (s^3 + 1)^{-1} ds$$

الحل:

$$(8) \int \ln s \ln s^3 ds$$

الحل:

$$(7) \int (s^2 + 1) \ln (s^3 + 3s - 7) ds$$

الحل:



$$(9) \int \ln s \ln (s^2 + 1) ds \text{ إذا كانت } \ln 1 = 0, \ln 5 = 1, \ln 17 = 2 \text{ جد}$$

الحل:

رابعاً: قاعدة الاقتران ميل المماس



تعلم أن العلاقة بين التكامل والاشتقاق علاقة عكسية ← بمعنى أن:

كل إشارة \int ← بتلغي مشتقة $(-)$ والعكس صحيح

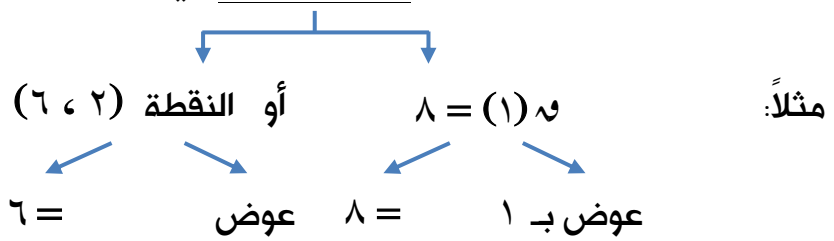
إذاً دور التكامل هو إلغاء الاشتقاق وإعادته ليصبح الاقتران الأصلي \int (س)

بداية ← لو أعطانا في السؤال مشتقة \int (س) ← وطلب إعادتها للاقتران الأصلي

\int (س) ← هنا ما الإجراء؟

أولاً: نعمل تكامل + \int

ثانياً: نحسب قيمة \int ← من خلال المعلومة في السؤال



ثالثاً: نضع المعادلة كاملة + قيمة \int

رابعاً: إذا كان مطلوب نعوض مثلاً \int (2) نعوض محل س بـ 2 / وإذا ما طلب روح

الصيغ المختلفة للسؤال

الإجراءات	المطلوب فجد	المعطى في السؤال
(1) $\int = (س)$ وس \int (2) $\int = (س)$ نكامل + \int (3) نحسب \int عوض 1 = 6 (4) $\int = (س)$ = الاقتران + قيمة \int (5) $\int = (3)$ = نعوض محل س بـ 3	فجد قاعدة الاقتران إلى هنا جد \int (3) علماً أن $\int = (1) = 6$	(1) إذا كان $\int = (س) = \dots$ 
(1) ميل المماس = $\int = (س)$ (2) $\int = (س)$ وس \int (3) $\int = (س)$ نكامل + \int (4) نوجد قيمة \int عوض بـ 2 = 5 (5) $\int = (س)$ = الاقتران كامل + قيمة \int	فجد قاعدة الاقتران المار بنقطة (2, 5)	(2) إذا كان ميل المماس يساوي

الطالب السلبي سرعان ما يشعر بالإحباط واليأس والملل !!!
 الطالب الإيجابي سرعان ما يتخلص من مشاعر الإحباط واليأس
 والملل لأنه لا يملك وقت لهذه التفاهات !!!



مثال (١): إذا كان η اقتتراناً قابلاً للاشتقاق وكانت $\eta = (س) = ٢ - س٦$ فجد قاعدة الاقتران η علماً بأن منحى الاقتران يمر بالنقطة $(٣, -١)$



الحل: $\eta = (س) = ٢ - س٦$ وس بدنا نكمل

$$\eta = (س) = ٢ - \frac{٢}{٣} س^٣ + ٢$$

$$٣ = ٢ - ١ - ٣ + ٢$$

$$٣ = ٢ + ٣ \leftarrow ٣ = ٢ + ٥ \leftarrow \boxed{٢ = ٣}$$

$$\eta = (س) = ٢ - س٢ - ٢$$

مثال (٢): إذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران η عند النقطة $(س, ص)$ يساوي $(٢ - س٣)(٢ + س)$ فجد قاعدة الاقتران η علماً بأن منحى η يمر بالنقطة $(٢, ٥)$

الحل: ميل المماس $= \eta'(س)$

$$\eta'(س) = (٢ - س٣)(٢ + س) \text{ وس نجهز}$$

$$\eta'(س) = (٢ - س٣)(٢ + س) = ٤ - س٢ - س٦ + ٢س٣$$

$$\eta'(س) = ٤ - س٢ - س٦ + ٢س٣ = ٤ - س٢ - ٦س + ٢س٣$$

$$٥ = ٢ - ٢ + ٣ + ٢ \leftarrow ٥ = ٢ + ٤ - ٦ + ٢ \leftarrow \text{نعوض } ٢$$

$$٥ = ٢ + ٤ - ٦ + ٢ \leftarrow ٥ = ٢ + ٨ \leftarrow \boxed{٣ = ٤}$$

$$\eta'(س) = ٤ - س٢ - ٦س + ٢س٣ = ٤ - س٢ - ٦س + ٢س٣$$

مثال (٣): إذا كان η اقتتراناً قابلاً للاشتقاق وكان $\eta = (س) = ٢س٣ - س٦ + ٤$ وكان $\eta(٢) = ٥$ ، فجد قيمة $\eta(١)$



$$\eta = (س) = ٢س٣ - س٦ + ٤ \text{ وس}$$

$$\eta = (س) = ٢س٣ - س٦ + ٤ + س + ٤$$

$$\eta = (س) = ٢س٣ - س٦ + ٤ + س + ٤$$

$$٥ = ٢ - ٢ + ٣ - ٦ + ٤ + ٢ + ٤$$

$$٥ = ٢ - ٢ + ٣ - ٦ + ٤ + ٢ + ٤ \leftarrow ٥ = ٢ + ٤ \leftarrow \boxed{١ = ٣}$$

$$\eta = (س) = ٢س٣ - س٦ + ٤ + س + ٤$$

$$\eta(١) = (١) = ٢(١)٣ - ٦(١) + ٤ + ١ + ٤ = ٢ - ٦ + ٤ + ١ + ٤ = ٥$$

$$\eta(٢) = ٥$$

عوض



$$(1) \quad \text{وه } (س) = \left[\text{وه } (س) \text{ وس} \right]$$

(2) تكامل عادي + ج

(3) التخلص من (ج) من المساعدة بالسؤال

مثال (4): إذا كان $\text{وه } (س) = س^3 - س^2$ ، احسب قاعدة الاقتران وه علماً بأن النقطة $(2, 3)$ تقع عليه

الحل:

مثال (5): إذا كان وه قابل للاشتقاق وكانت $\text{وه } (س) = س^6 - س^8 + س^3 + 5$ ، وكان $\text{وه } (1) = 3$ ، احسب

قاعدة الاقتران

الحل:

مثال (6): إذا كانت $\text{وه } (س) = (س^2 + 1)^3$ ، احسب قاعدة الاقتران المار بالنقطة $(0, 13)$

الحل:



مثال (7): إذا كانت $\text{وه } (س) = س^2 - 5$ ، وكان $\text{وه } (2) = 4$ ، احسب $\text{وه } (1)$

الحل:

مثال (8): إذا كانت $\text{وه } (س) = س^3(6 - س + 5س^2 + 4س^3)$ ، وكان $\text{وه } (2) = 1$ ، احسب قيمة $\text{وه } (1)$

الحل:

مثال (٩): إذا كانت $f(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^3}$ وكان $f(1) = 12$ ، احسب قاعدة الاقتران

الحل:

مثال (١٠): إذا كانت $f(s) = s^2 - 3s - 2$ ، احسب قيمة $f(3) - f(1)$

الحل:



مثال (١١): إذا كان ميل المماس لمنحنى f عند النقطة (s, v) يساوي $3s^2 + 6s - 3$ ، احسب قاعدة الاقتران f علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(-2, 0)$

الحل:

مثال (١٢): إذا كان ميل المماس يعطى بالعلاقة $f(s) = \sqrt{2s - 1}$ ، احسب قاعدة الاقتران المار بالنقطة $(0, 0)$

الحل:

مثال (١٣): إذا كان ميل المماس لمنحنى f عند (s, v) لمنحنى $f(s) = 2(s - 4)$ ، احسب قاعدة الاقتران المار بالنقطة $(0, 3)$

الحل:



مثال (١٤): إذا كان ميل المماس لمنحنى \bar{v} عند النقطة (s, v) يساوي $s^2 - 1$ ، احسب قاعدة الاقتران \bar{v} علماً بأن $\bar{v} = 3 - 3s$

الحل:



مثال (١٥): إذا كان ميل المماس لمنحنى \bar{v} هو $\bar{v} = (s)$ $= s^3 + s^2 + 4$ ، احسب قاعدة الاقتران المار بالنقطة $(0, 4)$

الحل:

مثال (١٦): احسب قيمة \bar{v} (١) علماً أن ميل المماس عند (s, v) هو $2(5s + 4)^4$ وأن المنحنى يمر بالنقطة $(-1, 7)$

الحل:

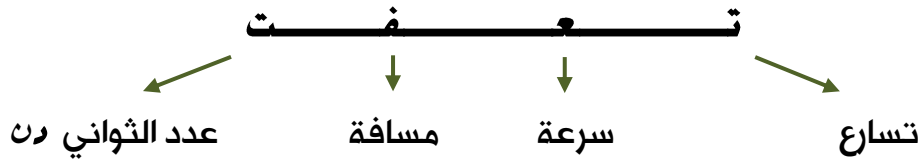
مثال (١٧): إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة: $\bar{v} = (s) = \frac{s^2 - 5s}{s}$ ، $s \neq 0$ ، احسب \bar{v} (٢) المار بالنقطة $(-1, 5)$

الحل:

مثال (١٨): إذا كان ميل المماس لمنحنى \bar{v} هو $\frac{dv}{ds} = s^2 - 9$ ، ويمر بالنقطة $(-4, 1)$ ، فما قاعدة الاقتران \bar{v}

الحل:





(ن) ت ← (ن) ع ← (ن) ف

تسارع ← سرعة ← مسافة (موقعه)
 كامل كامل

ت (ن) =

ع (ن) = نعمل تكامل

ف (ن) = نعمل تكامل كمان مرة

تنظيم الوقت يجعل الوقت كافياً ،
 وتضييع الوقت يجعلك تشكّي مه
 ضيق الوقت



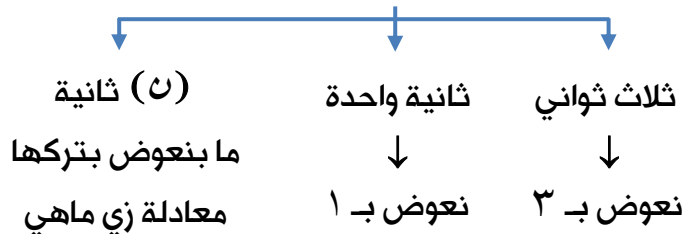
✦ الخطوات اللي رح نعملها كل مرة للانتقال من حرف لآخر

(١) نعمل تكامل + ج

(٢) نحسب قيمة ج من المعلومة
 ع (٠) = ٣ ف (٠) = ٥
 عوض بـ صفر عوض بـ صفر

(٣) نضع المعادلة كاملة + قيمة ج

(٤) نعوض بعدد الثواني بعد كلمة (بعد مرور)



✦ ملاحظات ومصطلحات

فضفضة



(١) موقعه نفسها المسافة ف (ن)

(٢) السرعة الابتدائية معناها ع (٠) نعوض بـ صفر

(٣) الموقع الابتدائي معناها ف (ن) نعوض بـ صفر

(٤) جد القاعدة بعد مرور (ن) ثانية هنا يكون فقط مطلوب التكامل وإيجاد القاعدة بدون تعويض

(٥) وحدات القياس (المسافة ← م) / (السرعة ← م / ث) / (التسارع ← م / ث^٢)

(١) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره $t = 12$ م/ث^٢ جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة إذا علمت أن سرعتها الابتدائية $t = 0$ م/ث

$$t = 0 \text{ م/ث}$$

$$t = 12$$



إذا لم نعلم أين نذهب ،
فللطرف نفي بالعرض

$$t = 12 \text{ م/ث}$$

$$v = 0 \text{ م/ث}$$

$$v = \text{عوض}$$

$$t = 12 \text{ م/ث}$$

$$v = 12 + 0 \text{ م/ث}$$

$$v = 12 + 0 \times 12 = 12 \text{ م/ث}$$

$$t = 12 \text{ م/ث} \quad v = 12 + 2 \text{ م/ث}$$

$$t = 31 \text{ م/ث} = 12 + 2 \times 12 = 36 \text{ م/ث}$$

(٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور $t = 3$ ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة $t = 6 - 2t + 6t^2$ م/ث^٢ جد موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة علماً أن $t = 0$ م

$$t = 6 - 2t + 6t^2$$

$$t = 3 \text{ م}$$

$$t = 6 - 2t + 6t^2$$

$$t = 3$$

$$t = 6 - 2t + 6t^2 \rightarrow t = 3$$

$$t = 6 - 2t + 6t^2 \rightarrow t = 3$$

$$t = 6 - 2t + 6t^2$$

$$t = 3 = 6 - 2(3) + 6(3)^2 = 6 - 6 + 54 = 54 \text{ م}$$

(٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور $t = 3$ ثانية

$t = 12 - 2t + t^2$ م/ث^٢ جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور $t = 3$ ثانية

$$t = 12 - 2t + t^2$$

$$t = 3 \text{ م}$$

$$t = 12 - 2t + t^2$$

$$t = 12 - 2t + t^2$$

$$t = 12 - 2t + t^2$$



مثال (١): يتحرك جسيم حسب العلاقة: $ع(ن) = (ن٢ + ٤) م / ث$ ، احسب المسافة بعد مرور (٣) ثواني علماً بأن الموقع الابتدائي ف (٠) = ٦

الحل:



مثال (٢): إذا كانت ت $(ن) = ٦ + ٢$ ، احسب السرعة بعد مرور (ن) ثانية من الحركة علماً بأن

$$ع(٢) = ١٣$$

الحل:

مثال (٣): يتحرك جسيم حسب العلاقة $ع(ن) = (١ - ن٣)(١ + ن٤) م / ث$ ، احسب ما يلي:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من الحركة

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين علماً أن ف (٠) = ٧

الحل:

مثال (٤): إذا كانت ت $= ١٢ م / ث٢$ ، احسب السرعة علماً بأن السرعة الابتدائية هي ٧ م / ث

الحل:



السلبية قيد والإيجابية قرار

قرر أن تكون إيجابياً ولا تدع قيودك تكبلك

مثال (٥): يتحرك جسيم حسب العلاقة: $t = 12 - 6t^2$ وكانت $t = 2$ ، $t = 3$ ،

احسب:



مه الجميل أه تتخيل أه كل دقيقة
تقضيها في سماء معلمك
هي عبارة عن علامة ترفه معلمك

(أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين

(ب) المسافة (موقع الجسيم) بعد مرور (٣) ثواني

الحل:

مثال (٦): إذا كان تسارع جسيم معطى بالعلاقة: $t = 6n^2$ ، احسب المسافة علماً بأن

ع $t = 2$ ، ف $t = 5$

الحل:

مثال (٧): يتحرك جسيم حسب العلاقة: $t = \frac{2n^2 + 3n}{n}$ ، $n \neq 0$ ، جد الاقتران الذي يمثل

موقع الجسيم بعد مرور (٥) ثانية من بدء الحركة

الحل:



مثال (٨): يتحرك جسيم حسب العلاقة: $ع = ٢٠ + ١$ ، احسب المسافة علماً بأن $ف = ٩ =$

الحل:



مثال (٩): إذا كانت $ع = ٣(١ + ن)^٢$ ، احسب المسافة علماً بأن $ف = ١٢ =$

الحل:

مثال (١٠): يتحرك جسيم حسب العلاقة: $ع = (ن)١٢$ (جاء $٢٠ - ١$) / ٢ ، احسب القاعدة التي تمثل

موقع الجسيم بعد مرور $(ن)$ ثانية

الحل:

مثال (١١): إذا كانت $ت = ٤٨(١ - ٢ن)^٣$ وكانت $ع = ٢٠ / ٢$ ، ف $ف = ٣ =$ ، احسب:

(أ) سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة

(ب) موقع الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من الحركة

الحل:



ركز في دراستك
في هذه المرحلة
فالفشل لا يحبه أحد

هنا سنقوم بإيجاد المساحة باستخدام التكامل المحدود ← نحتاج لـ اقتران + حدود

صيغة السؤال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين ؟

أولاً: اقتران واحد ومعه المحدود $h = (s) = \dots\dots\dots$ ومحور السينات والمستقيمين $s = 1$ ، $s = 2$

أو الفترة [1 ، 2] ← الإجراءات

أ) مساواة الاقتران بالصفر $h = (s) = 0$

لإيجاد قيم (س) فمثلاً إذا كانت قيمة (س) الناتجة هي $s = 3$

ب) نشوف هل [3] تقع

أنا مهتم
بالموضوع



أو مش بينهم هنا نعمل [3] ويكون
لدينا مساحة واحدة فقط

$$\int_1^3 = \text{المساحة} \quad h = (s) \text{ دس}$$

نعمل تكامل محدود والناتج هو المساحة

بين العددين [1 ، 2]

إذا بينهم ترتيبهم من الصغير للكبير

$$\int_1^2 = \text{المساحة} \quad h = (s) \text{ دس}$$

ويكون لدينا مساحتين المساحة

$$\int_1^2 + \int_2^3 = \text{المساحة}$$

$$\int_1^2 + \int_2^3 = \text{المساحة} \quad h = (s) \text{ دس}$$

نعمل تكامل

محدود

محدود

ثم نجمع المساحتين



جميع الورود في أيام الغد هي بذور اليوم

أمثلة:

(1) احسب المساحة المحصورة بين $h = 2 - s^2$

ومحور السينات عندما $s = 1$ ، $s = 3$

الحل:

(2) احسب المساحة المحصورة بين $h = 2 - s^2$

ومحور السينات على [1 ، 3]

الحل:

ملاحظات هامة جداً

عفوًا؟



(1) المساحات (محرم شرعاً) أن تكون قيمتها سالبة فإذا كان ناتج التكامل المحدود في

هذا الدرس (سالب) ← هنا نستخدم ابغض الحلال (الطلاق)

نستخدم القيمة المطلقة | | ← فيصبح الناتج موجب

(2) ناتج التكامل المحدود يكون سالباً ← إذا كانت المنطقة المطلوب مساحتها تحت محور السينات

(4) احسب المساحة المحصورة بين $s^2 = 2$ ومحور السينات في الفترة [1 ، 2]

الحل:



(3) احسب المساحة المحصورة بين $s^2 = 2$ ومحور السينات عندما $s = 3$ ، $s = 5$

الحل:

(6) احسب المساحة المحصورة بين $s^2 = 4$ ومحور السينات والمستقيمين $s = 0$ ، $s = 3$

الحل:

(5) احسب المساحة المحصورة بين $s = 7$ ومحور السينات في الفترة [1 ، 3]

الحل:

(7) احسب المساحة المحصورة بين $s^3 = 3$ ومحور السينات والمستقيمين $s = 2$ ، $s = 1$

الحل:



تمارين وواجبات: احسب المساحة المحصورة بين s ومحور السينات:

هل تعبت من الدراسة؟؟
شعورك بالتعب دليل على جهدك
وجهدك سيكون الوسيلة الأمثل
للشعور بلذة النجاح

- (1) $s = (s) = 12 - 1 = 4$ ، [1 ، 2]
- (2) $s = (s) = 3s^2 - 12s$ ، [0 ، 2]
- (3) $s = (s) = 6 - 2s$ ، [1 ، 4]
- (4) $s = (s) = 6 - 6s^2$ ، [-2 ، 0]
- (5) $s = (s) = 4s^3$ ، [-1 ، 1]
- (6) $s = (s) = 3s^2 - 48$ ، [3 ، 5]
- (7) $s = (s) = -s^2 - 4$ ، [-1 ، 1]
- (8) $s = (s) = 12 = s$ ، $s = 1$ ، $s = 2$
- (9) $s = (s) = 5 - 2s$ ، $s = 2$ ، $s = 3$
- (10) $s = (s) = 3s^2 - 3$ ، $s = 2$ ، $s = 4$



ثانياً: اقتران واحد ومحور السينات (بدون حدود) \neq (س) = ومحور السينات

الإجراءات

أ) مساواة الاقتران بالصفر \neq (س) = ٠

وذلك لإيجاد قيم (س) وهي تكون الحدود

ب) نحلل لإيجاد قيم (س) ← المعادلة كلها سينات (نأخذ عامل مشترك) ←
مش كلها سينات (نفتح قوسين)

بعد إيجاد قيم (س) بعد إيجاد مثلاً $\left. \begin{array}{l} \text{أ} = \text{س} \\ \text{ب} = \text{س} \end{array} \right\}$

ج) نعمل تكامل محدود لإيجاد قيمة المساحة = $\left. \begin{array}{l} \text{أ} \leftarrow \text{صغير} \\ \text{ب} \leftarrow \text{كبير} \end{array} \right\}$ \neq (س) \neq (س) الناتج هو المساحة (الإجابة)

أمثلة:

1) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^2 - ٢٥ = ٠$ ومحور السينات

الحل:

2) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س - ٩ = ٠$ ومحور السينات

الحل:

3) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^2 - ٥س = ٠$ ومحور السينات

الحل:

4) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^٦ - ٣س^٣ = ٠$ ومحور السينات

الحل:

5) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^٦ - ٣س^٣ = ٠$ ومحور السينات

الحل:

6) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^2 - ٢س = ٠$ ومحور السينات

الحل:

7) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^2 + ٢س - ٣ = ٠$ ومحور السينات

الحل:

8) احسب المساحة المحصورة بين \neq $س^2 + ٧س + ٦ = ٠$ ومحور السينات

الحل:

تمارين وواجبات: احسب المساحة المحصورة بين \neq ومحور السينات:

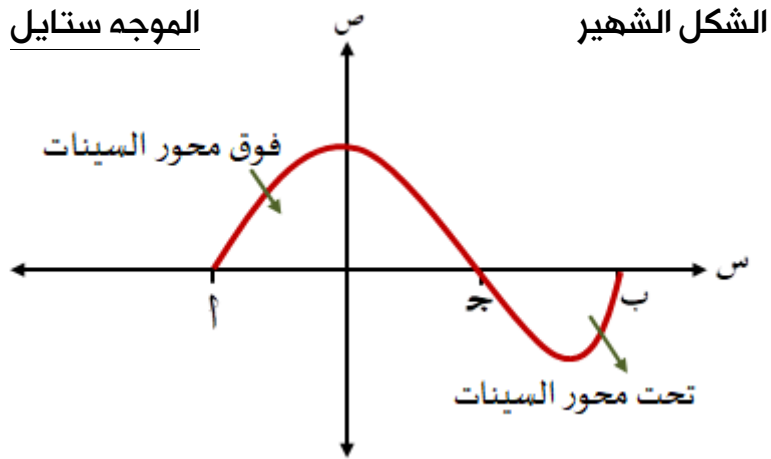
3) \neq (س) = $س^2 - ٣س - ١٠ = ٠$

1) \neq (س) = $س^2 - ٤س = ٠$

2) \neq (س) = $س^3 - ٢س^٢ = ٠$



خامساً: إيجاد المساحة بين اقتران ومحور السينات



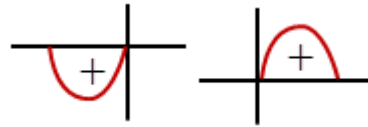
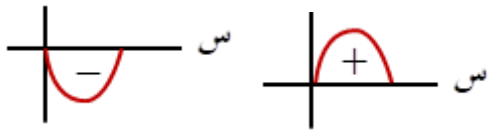
هنا مهم جداً الانتباه للمطلوب في السؤال هل هو طالب جد ؟

جد | تكامل

مساحة

هنا إذا كانت المنطقة المطلوبة تكاملها
فوق محور السينات ← الناتج موجب
تحت محور السينات ← الناتج سالب

لأنه لو المطلوب مساحة فالناتج دائماً موجب سواء
كانت المنطقة المطلوبة فوق أو تحت محور السينات



خطوات الحل:



(١) لازم استخراج المعطيات من السؤال أي مساحة كل منطقة ووضعها على الرسمة

(٢) الإجابة على المطلوب مع الانتباه ← المطلوب

مساحة كله موجب ولا تكامل (فوق + تحت -)

مساحة تجمع المنطقتين

تكاملاً فوق + تحت -

ولو طالب منطقتين

✦ خليهم في جيبك:



مساحة المستطيل = الطول × العرض



مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times$ القاعدة \times الارتفاع

مثال (١): يمثل الشكل التالي المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران y ومحور السينات في الفترة $[١, ٤]$ فإذا علمت أن المساحة $٨ = \int_1^4 y dx$ وحدات والمساحة $٥ = \int_1^4 y dx$ وحدات، أجب عن الأسئلة التالية:

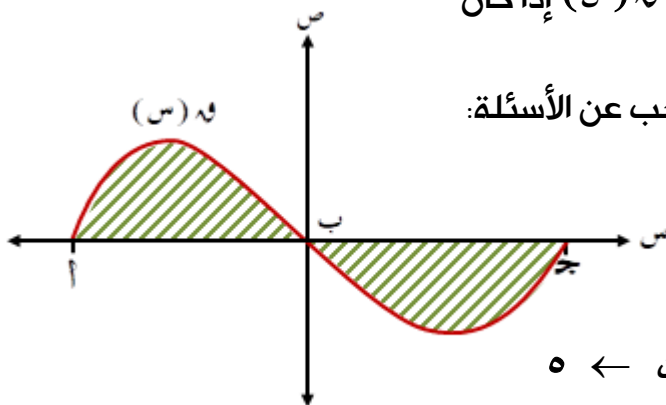


أ) جد $\int_1^4 y dx$ (س) رس ← تحت المحور ← $[-٨]$

ب) جد $\int_1^4 y dx$ (س) رس ← $\int_1^4 y dx$ (س) رس + $\int_1^4 y dx$ (س) رس = $٨ - ٥ = ٣$

ج) جد المساحة للمنطقة المغلقة المحصورة بين الاقتران y (س) ومحور السينات للفترة $[١, ٤]$ هنا المطلوب مساحة لمنطقتين وكلاهما موجب
المساحة = $٨ + ٥ = ١٣ = \int_1^4 y dx + \int_1^4 y dx$

مثال (٢): معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى y (س) إذا كان



$\int_1^4 y dx = ٣$ ، $\int_1^4 y dx = -٥$ ، فأجب عن الأسئلة:

أ) جد $\int_1^4 y dx$ (س) رس ← $٢ -$

ب) جد المساحة للفترة $[ب, ج]$ مع محور السينات ← ٥

ج) جد المساحة المحصورة للفترة $[١, ج]$ مع محور السينات ← ٨

الحل:

سأبذل قصارى

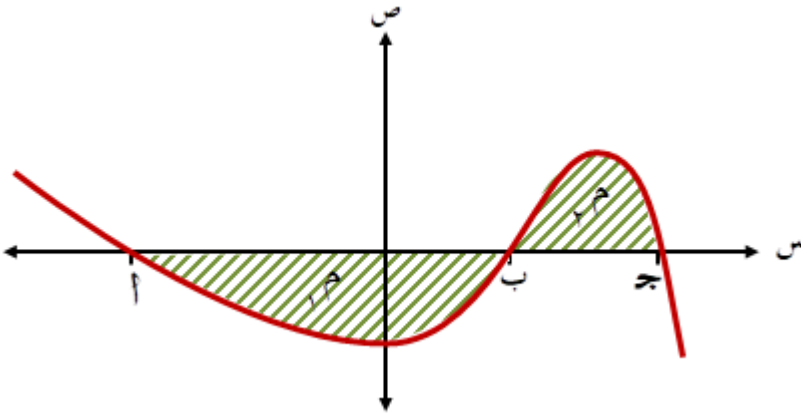


إذا أعجبتك مهارة شخص فقم بما قام به من جهد تصبح مثله ، ولذا يمكنك أن تكون من المتفوقين إذا قدمت نفس الجهد الذي قدموه

مثال (٣): في الشكل المجاور إذا كانت $١^٢ = ٨$ ، $٢^٢ = ٥$ ، أوجد ما يلي:

- (١) $\int_١^٢ f(x) dx$ (٢) $\int_٢^٣ f(x) dx$ (٣) $\int_٣^٤ f(x) dx$ (٤) المساحة المحصورة على [أ ، ج]

الحل:



مثال (٤): إذا كانت $١^٣ = ١٣$ ، $٢^٣ = ٣$ احسب قيمة $\int_{-٥}^٣ f(x) dx$

الحل:

