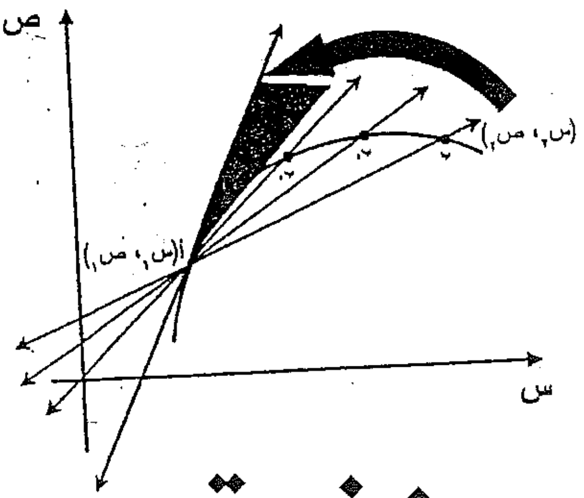
"وقل رب زدني علما"

مدارس جوهرة عمان

مدارس لؤلؤة طارق

أوراق عمل في

التفاضل



$$\acute{ق}(س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

0795562444

2020-2019

معدل التغير

اذا تغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ فان

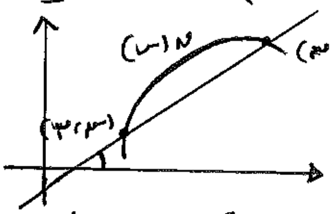
① التغير في س : $\Delta س = س_2 - س_1$

② التغير في الاقتران : $\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$

③ معدل التغير في الاقتران ق : $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

* اذا قطع مستقيم منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ كما في الشكل المجاور فان :



ميل القاطع $= \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$=$ ظاهـ ; هـ مع الاتجاه الموجب لمحور س

او $= -$ ظاهـ ; هـ مع الاتجاه السالب لمحور س

* اذا كان ; ١) $ق(س) = جـ$ (ثابت) فان $\frac{\Delta ص}{\Delta س} =$ صفر دائماً .

٢) $ق(س) = أس + ب$ فان $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = أ$ دائماً

اذا كان : $ق(س) = 2س^3 - س^2 + 5$ وتغيرت س من -1 الى 2 جد

① التغير في س ② التغير في الاقتران ق(س)

الحل :

① $\Delta س = 2 - -1 = 3$

② $\Delta ص = ق(2) - ق(-1)$

$= 17 - 2 = 15$

① اذا كان $ق(س) = \frac{3س}{س-1}$ ، $س \neq 1$ وتغيرت س من ٤ الى ٢ جد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

الحل :
$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(2) - ق(4)}{2 - 4} = \frac{6 - 4}{-2} = -1$$

② $ق(س) = \frac{1}{\sqrt[3]{3س+1}}$

جد معدل تغير ق(س) في الفترة $[-3 ، 0]$

الحل :
$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(0) - ق(-3)}{0 + 3} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

③ اذا كان معدل تغير ق(س) يساوي ٦ عندما $س_1 = 2$ ، $\Delta س = 3$ وكان $ق(2) = 4$ جد ق(٥)

الحل : نجد $س_2$ ← $3 = س_2 - 2$ ← $س_2 = 5$

$6 = \frac{ق(5) - ق(2)}{3}$ ← $18 = ق(5) - 4$

$\therefore ق(5) = 22$

④ اذا كان $ق(س) = س^2 + س$ وكان معدل تغير ق يساوي ٧ عندما تغيرت س من أ الى ٤ جد الثابت أ .

الحل :

$7 = \frac{ق(4) - ق(أ)}{4 - أ}$ ← $7 = \frac{20 - أ^2 - أ}{4 - أ}$ $\times -$

$7 = \frac{أ^2 + أ - 20}{أ - 4}$ ← $7 = \frac{(أ+5)\cancel{(أ-4)}}{\cancel{أ-4}}$

$\therefore أ + 5 = 7$ ← $أ = 2$

⑤ اذا كان معدل تغير ق(س) في $[أ ، أ+1]$ يساوي -4 وكان $ق(س) = س^2 - 3س$ جد الثابت أ

الحل : $-4 = \frac{ق(أ+1) - ق(أ)}{\cancel{أ} + 1 - \cancel{أ}}$

$-4 = (أ+1)^2 - 3(أ+1) - (أ^2 - 3أ)$

$-4 = \cancel{أ^2} + 2أ + 1 \cancel{- 3أ} - 3 \cancel{- أ^2} \cancel{+ 3أ}$

$2أ - 2 = -4$ ← $أ = -1$

تدريب : اذا كان $ق(س) = 2س^3 + 5$ ، وعندما تغيرت س من -2 الى أ كانت معدل تغير ق $= 14$ جد الثابت أ .

⑥ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + \text{ب}}$ وكان معدل تغير الاقتران ق في الفترة $[٠ ، ٣]$ يساوي $\frac{١}{٣}$ جد قيمة الثابت ب .

الحل :

$$\frac{١}{\cancel{٣}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(٠)}{\cancel{٣}} \longleftarrow ١ = \sqrt{٣+\text{ب}} - \sqrt{\text{ب}}$$

$$١ + \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{٣+\text{ب}} \quad (\text{بالتربيع})$$

$$١ + ٢\sqrt{\text{ب}} + \cancel{\text{ب}} = ٣ + \cancel{\text{ب}} \longleftarrow ٢\sqrt{\text{ب}} = ٢$$

$$\sqrt{\text{ب}} = ١ \longleftarrow \text{ب} = ١$$

⑦ اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = ٣\text{س} - ٥ + ٢\text{ق}(\text{س})$ وكان معدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[-١ ، ٣]$ يساوي ٤ جد معدل تغير $\text{ه}(\text{س})$ في نفس الفترة .

الحل :

$$٤ = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(-١)}{٤} \Longleftarrow \boxed{\text{ق}(٣) - \text{ق}(-١) = ١٦}$$

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ه}(٣) - \text{ه}(-١)}{٤}$$

$$= \frac{٩ + ٢\text{ق}(٣) - (-٣ + ٢\text{ق}(-١))}{٤}$$

$$= \frac{١٢ + ٢(\text{ق}(٣) - \text{ق}(-١))}{٤}$$

$$= \frac{١٢ + ٢ \times ١٦}{٤} = \frac{٤٤}{٤} = ١١$$

⑧ اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \text{ق}^٢(\text{س})$ وكان معدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[٢ ، ٥]$ يساوي ٦ جد معدل تغير $\text{ه}(\text{س})$ في نفس الفترة علماً بأن $\text{ق}(٢) + \text{ق}(٥) = ١٢$

الحل :

$$٦ = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٣} \longleftarrow \boxed{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢) = ١٨}$$

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(٢)}{٣} = \frac{\text{ق}^٢(٥) - \text{ق}^٢(٢)}{٣}$$

$$= \frac{(\text{ق}(٥) + \text{ق}(٢))(\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢))}{٣}$$

$$= \frac{١٢ \times ١٨}{٣} = ٧٢$$

تدريب ١

① اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٣\text{ق}(\text{س}) - ٥$ وكان معدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[-١ ، ٢]$ يساوي ١٠ . جد معدل تغير $\text{ه}(\text{س})$ في نفس الفترة .

② اذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + ٣$ معدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[٢ ، ٥]$ يساوي ٣ ومعدل تغير $\text{ه}(\text{س})$ في نفس الفترة يساوي ٣ جد قيمة $\text{ه}(٥)$

⑨ اذا كان معدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[١ ، ٤]$ يساوي ٧ ومعدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[١ ، ٦]$ يساوي ٩ جد معدل تغير $\text{ق}(\text{س})$ في $[٤ ، ٦]$

الحل :

$$٧ = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٣} \longleftarrow \boxed{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١) = ٢١}$$

$$٩ = \frac{\text{ق}(٦) - \text{ق}(١)}{٥} \longleftarrow \boxed{\text{ق}(٦) - \text{ق}(١) = ٤٥}$$

بحذف $\text{ق}(١)$

$$\therefore \text{ق}(٦) - \text{ق}(٤) = ٢٤$$

$$\therefore \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(٦) - \text{ق}(٤)}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$$

⑩ اذا كان القاطع لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ في النقطتين $(١ ، ٧)$ ، $(٣ ، \text{ق}(٣))$ يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه السالب لمحور السينات جد $\text{ق}(٣)$

الحل : $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = -\text{ظا}\,\frac{\pi}{٤} = -١$

$$\therefore -١ = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٢}$$

$$-١ = \frac{\text{ق}(٣) - ٧}{٢}$$

$$-٢ = \text{ق}(٣) - ٧ \longleftarrow \text{ق}(٣) = ٥$$

(11) اذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{8}{\text{ق}(\text{س})}$
وكان القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (−1، ق(−1)) ، (5، 2) يصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
جد: معدل تغير هـ(س) في [−1، 5]
الحل:

ق(س)

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{ظا}\,\frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\therefore -1 = \frac{\text{ق}(5) - \text{ق}(-1)}{6}$$

$$-6 = 2 - \text{ق}(-1) \longleftarrow \text{ق}(-1) = 8$$

هـ(س)

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ}(5) - \text{هـ}(-1)}{6} = \frac{\frac{8}{\text{ق}(5)} - \frac{8}{\text{ق}(-1)}}{6}$$

$$= \frac{\frac{8}{2} - \frac{8}{8}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

تمارين [1]

1) اذا كان ق(س) = س² + هـ(س)

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^3 + 1 & ، \ 1 \le \text{س} < 5 \\ 10 & ، \ 5 \le \text{س} < 7 \end{cases}$$

جد معدل تغير ق(س) في الفترة [1، 5]

2) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{4}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠، وكان معدل تغير ق(س) عندما تغيرت س من أ الى 6 يساوي $-\frac{1}{3}$ جد أ

3) اذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{12}{\text{ق}(\text{س})}$ وكان معدل تغير ق(س) في الفترة [2، 4] يساوي 5
جد معدل تغير هـ(س) في نفس الفترة
علماً بأن ق(2) × ق(4) = 15

4) اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س} + 4 & ، \ \text{س} \ge 1 \\ \text{س}^2 & ، \ \text{س} < 1 \end{cases}$$

وكان معدل تغير ق(س) يساوي 3 عندما زادت س من 1+هـ الى 1
فما قيمة الثابت أ .

5) اذا كان التغير في الاقتران ق(س) يساوي (Δس)² − 5(Δس) جد ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في الفترة [1، 3]

6) اذا كان
هـ(س) = س² − ق(2س+3)
وكان معدل تغير ق(س) في [−1، 5] يساوي 4 جد معدل تغير هـ(س) في [−2، 1]

7) اذا كان
هـ(س) = 4س − 3 ق(س) + 7
وكان التغير في الاقتران ق في [1، 5] يساوي 8
جد معدل التغير في الاقتران هـ(س) في نفس الفترة

8) اذا كان ل(س) = 2س ق(س) وكان معدل تغير ق(س) في [−1، 2] يساوي 4 ومعدل تغير ل(س) في نفس الفترة يساوي 2
جد قيمة ق(−1)

9) اذا كان معدل تغير الاقتران ق(س) في [2، 5] يساوي 6 جد معدل تغير الاقتران :
هـ(س) = س² ق(س) − 3س في نفس الفترة علماً بأن هـ(س) يمر بالنقطة (2، −16)

المشتقة الأولى للاقتران

اذا كان:

ص = ق(س) اقترانا فان:

المشتقة الأولى للاقتران ق : هي اقتران جديد يمكن الحصول عليه باحدى الطرق التالية:

① قانون تعريف المشتقة

② قواعد الاشتقاق.

ويرمز لها باحدى الرموز التالية:

$\text{ق}'(\text{س})$ ، $\text{ص}'$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

قانون تعريف المشتقة:

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}}$$

أشكال أخرى للقانون:

① $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

② $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

حيث $\text{هـ} = \Delta\text{س}$

اذا كان

① $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + 5$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{2\text{ع}^2 + \cancel{5} - 2\text{س}^2 - \cancel{5}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{2\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 2 \times 2\text{س} = 4\text{س}.$$

② $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - \text{س} - 3$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^2 - \text{ع} - \cancel{3} - \text{س}^2 + \text{س} + \cancel{3}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-1}{\cancel{\text{س} - \text{ع}}}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ع} + \text{س})\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + -1$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س} - 1$$

③ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^3 + 1}$ ، $\text{س} \neq -1$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{1}{\text{ع}^3 + 1} - \frac{1}{\text{س}^3 + 1}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^3 + \cancel{1} - \text{ع}^3 - \cancel{1}}{(\text{ع}^3 + 1)(\text{س}^3 + 1)} \times \frac{1}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-1}{\cancel{(\text{س} - \text{ع})}}(\text{س}^2 + \text{س}\text{ع} + \text{ع}^2)}{(\text{ع}^3 + 1)(\text{س}^3 + 1)} \times \frac{1}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-3\text{س}^2}{(\text{س}^3 + 1)^2}$$

تدريب: جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

① $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^3 + \text{س} - 7$

② $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{1 - \text{س}}$ ، $\text{س} \neq 1$

④ $ق(س) = \sqrt{س^2 + ٦س}$

جد $قَ(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$قَ(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{\sqrt{ع^2 + ٦ع} - ٤}{ع - ٢} \times \frac{\sqrt{ع^2+٦ع} + ٤}{\sqrt{ع^2+٦ع} + ٤}$$

⑧

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{ع^2 + ٦ع - ١٦}{٨(ع - ٢)}$$

$$قَ(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع+٨)\cancel{(ع-٢)}}{٨\cancel{(ع-٢)}} = \frac{٥}{٤}$$

⑤ $ق(س) = \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$ ، $س \neq ٠$

جد $قَ(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{ع}} - \frac{1}{\sqrt[3]{س}}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt[3]{س} - \sqrt[3]{ع}}{\sqrt[3]{ع س}} \times \frac{1}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt[3]{س} - \sqrt[3]{ع}}{\sqrt[3]{ع س}} \times \frac{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س ع} + \sqrt[3]{ع^2}}{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س ع} + \sqrt[3]{ع^2}} \times \frac{1}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\overset{-1}{\cancel{س - ع}}}{\sqrt[3]{ع س} \times ٣\sqrt[3]{س^2}} \times \frac{1}{\cancel{ع - س}}$$

$$\therefore قَ(س) = \frac{-1}{\sqrt[3]{س^2} \times ٣\sqrt[3]{س^2}}$$

$$قَ(س) = \frac{-1}{٣\sqrt[3]{س^4}}$$

تدريب:

باستخدام تعريف المشتقة جد:

① $قَ(س)$ للاقتران $ق(س) = \sqrt[3]{س^2}$

② $قَ(١)$ للاقتران $ق(س) = (\sqrt{س} - ٥)^3$

⑥ $ق(س) = \sqrt{٢س} - س^2$ جد $قَ(س)$

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع} - ع^2 - \sqrt{٢س} + س^2}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع} - \sqrt{٢س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}}{\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}} + \lim_{ع \to س} \frac{س^2 - ع^2}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{٢ع - ٢س}}{\cancel{(ع - س)}\, ٢\sqrt{٢س}} + \lim_{ع \to س} \frac{\overset{-1}{\cancel{(س - ع)}}(س + ع)}{\cancel{ع - س}}$$

$$قَ(س) = \frac{1}{\sqrt{٢س}} + -٢س$$

⑦ $ق(س) = (س+٢)^2 \sqrt{س}$

جد $قَ(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$قَ(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(ع+٢)^2\sqrt{ع} - ٩}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(ع+٢)^2\sqrt{ع} - ٩\sqrt{ع}}{ع - ١} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩\sqrt{ع} - ٩}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\sqrt{ع}\left((ع+٢)^2 - ٩\right)}{ع - ١} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩(\sqrt{ع} - ١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\sqrt{ع}(ع+٢-٣)(ع+٢+٣)}{ع - ١} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩(\sqrt{ع} - ١)}{ع - ١} \times \frac{\sqrt{ع} + ١}{\sqrt{ع} + ١}$$

③

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\sqrt{ع}\cancel{(ع - ١)}(ع + ٥)}{\cancel{ع - ١}} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩\cancel{(ع - ١)}}{٢\cancel{(ع - ١)}}$$

$$\therefore قَ(١) = ٦ + \frac{٩}{٢} = \frac{٢١}{٢}$$

تدريب :

اذا كان $د(س) = \frac{1}{٢س - \sqrt{س}}$

جد $د'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑧ اذا كان $ل(س) = (س - أ)\, د(س)$

حيث $د(س)$ متصل عند $س = أ$

باستخدام تعريف المشتقة أثبت أن :

$د(أ) = ل'(أ)$

البرهان :

$$ل'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{ل(ع) - ل(أ)}{ع - أ}$$

$$ل'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{\cancel{(ع - أ)}\, د(ع) - ٠}{\cancel{ع - أ}}$$

$$\therefore ل'(أ) = \lim_{ع \to أ} د(ع) = د(أ)$$

⑨ اذا كان التغير في الاقتران $ص = د(س)$

هو $\Delta ص = ٤س\,هـ + ٣هـ - ٢هـ^{٣}$

وذلك عندما تتغير $س$ بمقدار $هـ$.

جد $د'(٢)$

الحل :

$$د'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤س\,هـ + ٣هـ - ٢هـ^{٣}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{هـ}(٤س + ٣ - ٢هـ^{٢})}{\cancel{هـ}}$$

$$د'(س) = ٤س + ٣$$

$$د'(٢) = ٨ + ٣ = ١١$$

⑩ اذا تغيرت $س$ بمقدار $هـ$ وكان

$د(س + هـ) = س^{٢}هـ + د(س) - ٣جا٢هـ$

جد $د'(٤)$

الحل :

$$د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^{٢}هـ + \cancel{د(س)} - ٣جا٢هـ - \cancel{د(س)}}{هـ}$$

$$د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^{٢}\cancel{هـ}}{\cancel{هـ}} - \frac{٣جا٢هـ}{هـ}$$

$$د'(س) = س^{٢} - ٦$$

$$\therefore د'(٤) = ١٦ - ٦ = ١٠$$

⑪ اذا كان $د(س) = جاس$

جد $د'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جاع - جاس}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢جتا\tfrac{١}{٢}(ع + س)\, جا\tfrac{١}{٢}(ع - س)}{ع - س}$$

$$= ٢جتاس \times \lim_{ع \to س} \frac{جا\tfrac{١}{٢}(ع - س)}{ع - س}$$

$$د'(س) = ٢جتاس \times \tfrac{١}{٢} = جتاس$$

⑫ $د(س) = ٢ + جتا^{٢}٣س$

جد $د'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{٢} + جتا^{٢}٣ع - \cancel{٢} - جتا^{٢}٣س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(جتا٣ع - جتا٣س)(جتا٣ع + جتا٣س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢جا\tfrac{١}{٢}(٣ع + ٣س)\, جا\tfrac{١}{٢}(٣ع - ٣س)}{ع - س} \times ٢جتا٣س$$

←

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{-2جا\frac{3}{2}(ع-س)\, جا\frac{3}{2}(ع+س)}{ع-س} \times 2جتا3س$$

$$= -2 \times \underset{ع \to س}{نها} \frac{جا\frac{3}{2}(ع-س)}{ع-س} \times جا3س \times 2جتا3س$$

$$= -2 \times \frac{3}{2} \times 2جا3س\, جتا3س$$

$$\therefore ق'(س) = -6جا3س\, جتا3س\,.$$

(١٣) $ق(س) = 2س - ظاس$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$ق'(س) = \underset{ع \to س}{نها} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{2ع - ظاع - 2س + ظاس}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{2\cancel{(ع-س)}}{\cancel{ع-س}} + \underset{ع \to س}{نها} \frac{ظاس - ظاع}{ع-س}$$

$$= 2 + \underset{ع \to س}{نها} \frac{ظا(س-ع)(1+ظاس\, ظاع)}{ع-س}$$

$$= 2 + \underset{ع \to س}{نها} \frac{ظا(س-ع)}{ع-س} \times (1+ظا^2س)$$

$$ق'(س) = 2 - قا^2س\,.$$

(١٤) $ق(س) = قتا2س$

جد $ق'(\frac{\pi}{6})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$ق'(س) = \underset{ع \to س}{نها} \frac{قتا2ع - قتا2س}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{\frac{1}{جا2ع} - \frac{1}{جا2س}}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{جا2س - جا2ع}{جا2ع\, جا2س} \times \frac{1}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{2جتا(س+ع)\, جا(س-ع)}{جا2ع\, جا2س} \times \frac{1}{ع-س}$$

$$ق'(س) = \frac{2جتا2ع}{جا^2 2س} \times \underset{ع \to س}{نها} \frac{جا(س-ع)}{ع-س}$$

$$ق'(س) = \frac{-2جتا2س}{جا^2 2س}$$

$$\therefore ق'(\frac{\pi}{6}) = -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{-4}{3}$$

تدريب:

① $ق(س) = قا^2س$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

② $ق(س) = 5س - ظتاس$

جد $ق'(\frac{\pi}{4})$ باستخدام تعريف المشتقة

(١٥) $ق(س) = س\, جا2س$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$ق'(س) = \underset{ع \to س}{نها} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{ع\, جا2ع - س\, جا2س}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{ع\, جا2ع - س\, جا2ع}{ع-س} + \underset{ع \to س}{نها} \frac{س\, جا2ع - س\, جا2س}{ع-س}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{جا2ع\cancel{(ع-س)}}{\cancel{ع-س}} + \underset{ع \to س}{نها} \frac{س(جا2ع - جا2س)}{ع-س}$$

$$= جا2س + \underset{ع \to س}{نها} \frac{س \times 2جتا(ع+س)\, جا(ع-س)}{ع-س}$$

$$= جا2س + 2س\, جتا2س \times \underset{ع \to س}{نها} \frac{جا(ع-س)}{ع-س}$$

$$\therefore ق'(س) = جا2س + 2س\, جتا2س$$

تدريب:

$ق(س) = س\, ظاس$

جد $ق'(\frac{\pi}{4})$ باستخدام تعريف المشتقة

تدريب [٢]

١) إذا كان ق(س) = $\frac{1}{\text{س}^2}$ ، س ≠ ٠

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

٢) إذا كان ق(س) = $\sqrt{2\text{س}^3+1}$

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

٣) إذا كان ق(س) = $\text{س}^2 + \sqrt[3]{\text{س}}$

جد قَ(١) باستخدام تعريف المشتقة

٤) إذا كان ق(س) = ٣جاس − جتا٢س

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

٥) إذا كان ق(س) = $\sqrt{3+\text{ظاس}}$

جد قَ($\frac{\pi}{4}$) باستخدام تعريف المشتقة

٦) إذا كان ق(س) = $1 + \text{س}^{\frac{3}{2}}$ ، س ≥ ٠

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

٧) إذا تغيرت س بمقدار هـ وكان التغير في الاقتران = $2\text{س}^2\text{هـ}$ − جا٥هـ

جد قَ(٢)

٨) إذا كان ق(س) = $\frac{1}{1+\text{جا}2\text{س}}$

جد قَ(٠) باستخدام تعريف المشتقة

٩) إذا كان ق(س) = س^2 جتاس

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

١٠) إذا كان:

ق(س) = $\frac{1}{\sqrt{2\text{س}-1}}$ ، س > $\frac{1}{2}$

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

١١) إذا كان ق(س) = $\text{ظتا}^2\text{س}$.

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة

١٢) إذا كان ق(س) = جاس^2

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

١٣) إذا كان:

ق(س) = $\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 4\text{س} + 7$

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

١٤) إذا كان:

ق(س) = $\text{س}^2\sqrt{\text{س}-2}$

جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

قواعد الاشتقاق

قاعدة $\boxed{1}$:

مشتقة الاقتران الثابت = صفر .

مثال : ١) $\text{ق}(\text{س}) = ٧ \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = $ صفر

٢) $\text{ص} = \sqrt{٣} \longrightarrow \text{صَ} = $ صفر

٣) $\text{ص} = ٥\pi \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = $ صفر

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}\frac{\pi}{٦} \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = $ صفر

قاعدة $\boxed{2}$:

مشتقة $\text{أ س} = \text{أ}$

مثال : ١) $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س} \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = ٤$

٢) $\text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س} \longrightarrow \text{صَ} = \frac{٢}{٣}$

٣) $\text{ص} = \text{س} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$

قاعدة $\boxed{3}$:

مشتقة $\text{أ س}^{\text{ن}} = \text{أ} \times \text{ن س}^{\text{ن}-١}$

مثال : ١) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٤} \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = ٨\text{س}^{٣}$

٢) $\text{ص} = \text{س}^{٥} \longrightarrow \text{صَ} = ٥\text{س}^{٤}$

٣) $\text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{٦} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}^{٥}$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{-٢} \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = -٨\text{س}^{-٣}$

٥) $\text{ص} = ٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}} \longrightarrow \text{صَ} = ٨\text{س}^{\frac{١}{٣}}$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = ١٠\text{س}^{\frac{١}{٥}} \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س}^{\frac{-٤}{٥}}$

مثال : اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ١٢\text{س}^{\frac{-١}{٣}}$ جد $\text{قَ}(٨)$

الحل :

$\text{قَ}(\text{س}) = -٤\text{س}^{\frac{-٤}{٣}} = \frac{-٤}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}}$

$\text{قَ}(٨) = \frac{-٤}{\sqrt[٣]{(٨)^{٤}}} = \frac{-٤}{(٢)^{٤}} = \frac{-١}{٤}$

قاعدة $\boxed{4}$:

مشتقة $(\text{م}(\text{س}) \mp \text{ه}(\text{س}))$ = مشتقة $\text{م}(\text{س}) \mp$ مشتقة $\text{ه}(\text{س})$

$= \text{مَ}(\text{س}) \mp \text{هَ}(\text{س})$

مثال : ١) $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢}$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٩\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$.

٢) $\text{ص} = ٢\text{س}^{٥} - ٣\text{س}^{٢} + ٨$

$\text{صَ} = ١٠\text{س}^{٤} - ٦\text{س}$

٣) $\text{ص} = ٦\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٣\text{س}^{-١} + ٢\text{س} - ٩$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}^{\frac{-١}{٣}} + ٣\text{س}^{-٢} + ٢$

مثال : $\text{ق}(\text{س}) = \text{أس}^{٣} + ٨\text{س}^{-٢} + ٥$ ، $\text{قَ}(٢) = ١٠$ جد قيمة الثابت أ

الحل :

$\text{قَ}(\text{س}) = ٣\text{أس}^{٢} - ١٦\text{س}^{-٣}$

$= ٣\text{أس}^{٢} - \frac{١٦}{\text{س}^{٣}}$

$\text{قَ}(٢) = ١٢\text{أ} - ٢ \longrightarrow ١٠ = ١٢\text{أ} - ٢ \longrightarrow \text{أ} = ١$

قاعدة $\boxed{5}$:

مشتقة الجذور :

أ) مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

ب) الجذور الأخرى ← تحول الى قوة : $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

مثال : ١) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س}+١} \longrightarrow \text{قَ}(\text{س}) = \frac{٢}{٢\sqrt{٢\text{س}+١}}$

$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+١}}$

٢) $\text{ص} = ٦\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}} = ٦\text{س}^{\frac{٤}{٣}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٨\text{س}^{\frac{١}{٣}}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \sqrt[٥]{\text{س}} - \sqrt{٤\text{س}}$

الحل : تحول الى قوة :

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{س}^{\frac{١}{٥}} - \sqrt{٤\text{س}}$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٤\text{س} + \frac{١}{٥}\text{س}^{\frac{-٤}{٥}} - \frac{٤}{٢\sqrt{٤\text{س}}}$

$= ٤\text{س} + \frac{١}{٥}\text{س}^{\frac{-٤}{٥}} - \frac{٢}{\sqrt{٤\text{س}}}$

مثال: $\text{ص} = \frac{1}{3}\text{س}^3 - \sqrt{3\text{س}^2+4} + 5$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 - \frac{6\text{س}}{2\sqrt{3\text{س}^2+4}} = \text{س}^2 - \frac{3\text{س}}{\sqrt{3\text{س}^2+4}}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2} = 4 - \frac{6}{4} = \frac{5}{2}$$

قاعدة $\boxed{6}$:

مشتقة الضرب:

(أ) مشتقة (ثابت × اقتران) = الثابت × مشتقة الاقتران

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = 6\sqrt{9-4\text{س}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 6 \times \frac{-4}{2\sqrt{9-4\text{س}}} = \frac{-12}{\sqrt{9-4\text{س}}}$$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 5\text{هـ}(\text{س}) - 8$

$\text{هـ}'(-2) = 3$ ، جد $\text{ق}'(-2)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 6\text{س} + 5\text{هـ}'(\text{س})$$

$$\text{ق}'(-2) = -12 + 5\times 3 = 3$$

(ب) مشتقة (اقتران × اقتران)

= الأول × م الثاني + الثاني × م الأول

مثال ١: $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2+3\text{س})(\text{س}^3-5)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^2+3\text{س})(3\text{س}^2) + (\text{س}^3-5)(2\text{س}+3)$$

٣) $\text{ص} = (3\text{س}-5)(\text{س}^3-2\text{س}^2-1)$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (3\text{س}-5)(3\text{س}^2-4\text{س}) + (\text{س}^3-2\text{س}^2-1)\times 3$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3} = 1\times 15 + 8\times 2 = 31$$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = (2\text{س}^2+1)\text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(1) = 3$

$\text{هـ}'(1) = -4$

جد $\text{ق}'(1)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = (2\text{س}^2+1)\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \times 4\text{س}$

$$\text{ق}'(1) = 3\times -4 + 3\times 4 = -4$$

٤) $\text{ص} = (\text{س}^2-\text{س})\sqrt{2-2\text{س}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-1}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^2-\text{س}) \times \frac{-\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\sqrt{2-2\text{س}}} + \sqrt{2-2\text{س}} \times (2\text{س}-1)$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-1} = 2 \times \frac{-1}{2} + 2\times -3 = -7$$

(ج) مشتقة ضرب ٣ اقترانات ← نشتق بالترتيب

$$\text{ص} = \text{م}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{م}'(\text{س})\text{هـ}(\text{س})\text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س})\text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})\text{هـ}(\text{س})\text{ل}'(\text{س})$$

مثال: اذا كان $\text{ص} = \text{س}^2\sqrt{6-\text{س}}\ \text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}'(2) = -1$

$\text{هـ}(2) = 3$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}\sqrt{6-\text{س}}\ \text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{6-\text{س}}}\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^2\sqrt{6-\text{س}}\ \text{هـ}'(\text{س})$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2} = 4\times 2\times 3 + 4\times\frac{-1}{4}\times 3 + 4\times 2\times -1$$

$$= 24 - 3 - 8 = 13$$

مثال: اذا كان:

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) \neq 0$

وكان $\text{ل}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ قابلين للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$

$\text{ق}'(\text{أ}) = \text{صفر}$ ، أثبت أن $\text{ق}(\text{أ}) = \frac{\text{ل}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})}$

البرهان:

بالضرب التبادلي:

$$\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$$

نشتق الطرفين ← $\text{ق}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س})$

$$\text{ق}(\text{أ})\text{هـ}'(\text{أ}) + \text{هـ}(\text{أ})\text{ق}'(\text{أ}) = \text{ل}'(\text{أ})$$

لكن $\text{ق}'(\text{أ}) = 0$

$$\therefore \text{ق}(\text{أ})\text{هـ}'(\text{أ}) = \text{ل}'(\text{أ})$$

$$\therefore \text{ق}(\text{أ}) = \frac{\text{ل}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})}$$

تدريب: $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^3 - 2\text{س})\ \text{هـ}(\text{س})$

$\text{هـ}'(2) = -1$ ، $\text{ق}(2) = 12$ جد $\text{ق}'(2)$

قاعدة $\boxed{7}$:

مشتقة القسمة :

ⓐ مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}\right) = \frac{\text{المقام} \times \text{م البسط} - \text{البسط} \times \text{م المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال : 1) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{3\text{س}+1}{\text{س}^2-4}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2-4)\times 3 - (3\text{س}+1)\times 2\text{س}}{(\text{س}^2-4)^2}$

2) $\text{ص} = \frac{\text{س}^2+\text{س}-4}{\text{س}^2-\text{س}+4}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}^2-\text{س}+4)(2\text{س}+1) - (\text{س}^2+\text{س}-4)(2\text{س}-1)}{(\text{س}^2-\text{س}+4)^2}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2} = \frac{6\times 5 - 2\times 3}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

3) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{4\text{س}-2}{\sqrt{\text{س}}}$ جد $\text{ق}'(4)$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\sqrt{\text{س}}\times 4 - (4\text{س}-2)\times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}}$

$\text{ق}'(4) = \frac{2\times 4 - 14\times\frac{1}{4}}{4} = \frac{8-\frac{7}{2}}{4} = \frac{9}{8}$

4) $\text{ص} = (\text{س}^2-5)\left(\text{س} + \frac{2\text{س}-1}{\text{س}-4}\right)$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3}$

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^2-5)\left(1 + \frac{(\text{س}-4)\times 2 - (2\text{س}-1)}{(\text{س}-4)^2}\right) + \left(\text{س} + \frac{2\text{س}-1}{\text{س}-4}\right)\times 2\text{س}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3} = 4\left(1 + \frac{-2-5}{1}\right) + \left(3 + \frac{5}{-1}\right)\times 6$

$= -24 - 12 = -36$

5) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3-5}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{ق}(2) = -3$ ، $\text{ق}'(2) = \text{صفر}$ جد $\text{هـ}'(2)$

الحل :

$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3-5}{\text{ق}(\text{س})}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})\times 3\text{س}^2 - (\text{س}^3-5)\times \text{ق}'(\text{س})}{(\text{ق}(\text{س}))^2}$

$\text{هـ}'(2) = \frac{-3\times 12 - 3\times \text{صفر}}{9} = \frac{-36}{9} = -4$

ⓑ مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}\right) = \frac{\text{م الاقتران}}{\text{الثابت نفسه}}$

مثال : $\text{ص} = \frac{7\text{س}-\text{س}^2+3}{5} \longrightarrow \text{ص}' = \frac{7-2\text{س}}{5}$

ⓒ مشتقة $\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right) = \frac{-\text{الثابت}\times \text{م المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال : 1) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{-2}{3\text{س}^2-5}$ جد $\text{ق}'(1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2\times 6\text{س}}{(3\text{س}^2-5)^2} \longrightarrow \text{ق}'(1) = \frac{12}{4} = 3$

2) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^3-10} + \frac{\text{س}^2}{4} - 5\text{س}$ جد $\text{ق}'(2)$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-1\times 3\text{س}^2}{(\text{س}^3-10)^2} + \frac{2\text{س}}{4} - 5$

$\text{ق}'(2) = \frac{-12}{4} + \frac{4}{4} - 5 = -7$

3) $\text{ص} = \frac{6}{\sqrt{2\text{س}+1}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=4}$

الحل : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-6\times\frac{2}{2\sqrt{2\text{س}+1}}}{2\text{س}+1} = \frac{-6}{(2\text{س}+1)\sqrt{2\text{س}+1}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=4} = \frac{-6}{9\times 3} = \frac{-2}{9}$

4) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} - \frac{2}{\text{س}-1}}$ جد $\text{ق}'(3)$

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1 - \frac{-2\times 1}{(\text{س}-1)^2}}{2\sqrt{\text{س}-\frac{2}{\text{س}-1}}}$

$\text{ق}'(3) = \frac{1-\frac{2}{4}}{2\times 2} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$

5) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{3+\text{أ}\text{س}}$ ، $\text{ق}'(1) = 2$ ، جد أ

الحل : $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-1\times \text{أ}}{(3+\text{أ}\text{س})^2} \longrightarrow \text{ق}'(1) = \frac{-\text{أ}}{(3+\text{أ})^2} = 2$

$\therefore 2(9+6\text{أ}+\text{أ}^2) = -\text{أ} \longrightarrow 2\text{أ}^2+13\text{أ}+18 = 0$

$(2\text{أ}+9)(\text{أ}+2) = 0 \longrightarrow \text{أ} = \frac{-9}{2}$ ، -2

قاعدة $\boxed{8}$:

مشتقة القوس المرفوع لقوة :

$$\text{ص} = \left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\text{ن}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن} \times (\text{القوس نفسه})^{\text{ن}-1} \times \text{مشتقة ما داخل القوس}$$

$$= \text{ن}\left(\text{هـ}(\text{س})\right)^{\text{ن}-1} \times \text{هـ}'(\text{س}) .$$

مثال 1) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 5\text{س})^4$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 4(\text{س}^2+5\text{س})^3(2\text{س}+5)$$

$$= (8\text{س}+20)(\text{س}^2+5\text{س})^3$$

2) $\text{ص} = 3(9-2\text{س})^{-2}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -6(9-2\text{س})^{-3} \times -2$$

$$= 12(9-2\text{س})^{-3}$$

3) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[4]{(\text{س}^3+4\text{س})^5}$ جد $\text{ق}'(2)$

الحل : نحول لقوة ← $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^3+4\text{س})^{\frac{5}{4}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{5}{4}(\text{س}^3+4\text{س})^{\frac{1}{4}}(3\text{س}^2+4)$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt[4]{\text{س}^3+4\text{س}}\,(3\text{س}^2+4)$$

$$\text{ق}'(2) = \frac{5}{\cancel{4}} \times 2 \times \cancel{16}^{4} = 40$$

4) $\text{ص} = \left(\frac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2+1}\right)^6$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\left(\frac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2+1}\right)^5 \times \frac{(\text{س}^2+1)\times 2\text{س} - (\text{س}^2-1)\times 2\text{س}}{(\text{س}^2+1)^2}$$

5) $\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{س} + \sqrt{1-\text{س}^3}\right)^4$ جد $\text{ق}'(-2)$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = 4\left(\text{س}+\sqrt{1-\text{س}^3}\right)^3\left(1 + \frac{-3\text{س}^2}{2\sqrt{1-\text{س}^3}}\right)$$

$$\text{ق}'(-2) = 4(-2+3)^3\left(1 - \frac{12}{6}\right)$$

$$= 4 \times 1 \times -1 = -4 .$$

تدريب : $\text{ص} = \left(\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) - 7\right)^3$

$\text{هـ}'(3) = -1$ ، $\text{هـ}(3) = 2$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = 3$

6) $\text{ص} = \text{س}\sqrt[3]{3\text{س}-1}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3}$

الحل : نحول الى قوة :

$$\text{ص} = \text{س}\,(3\text{س}-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \frac{1}{3}(3\text{س}-1)^{-\frac{2}{3}} \times 3 + (3\text{س}-1)^{\frac{1}{3}} \times 1$$

$$= \frac{\text{س}}{\sqrt[3]{(3\text{س}-1)^2}} + \sqrt[3]{3\text{س}-1}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3} = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

7) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2+3)^3}{2\text{س}-1}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(2\text{س}-1)\times 3(\text{س}^2+3)^2 \times 2\text{س} - (\text{س}^2+3)^3 \times 2}{(2\text{س}-1)^2}$$

مثال : اذا كان $\text{ق}(2) = -1$ ، $\text{ق}'(2) = 3$

$\text{هـ}(2) = 3$ ، $\text{هـ}'(2) = 4$ جد :

1) $(\text{ق}+\text{هـ})'(2) = \text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}'(\text{س})$

$$= \text{ق}'(2) + \text{هـ}'(2) = 3 + 4 = 7$$

2) $(3\text{ق} - 2\text{هـ})'(2)$

$$= 3\text{ق}'(\text{س}) - 2\text{هـ}'(\text{س}) = 3\text{ق}'(2) - 2\text{هـ}'(2)$$

$$= 9 - 8 = 1$$

3) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(2)$

$$= \frac{\text{هـ}(2)\times\text{ق}'(2) - \text{ق}(2)\,\text{هـ}'(2)}{(\text{هـ}(2))^2} = \frac{2\times 3 + 1\times 4}{4}$$

$$= \frac{5}{2}$$

4) $\left((\text{ق}\times\text{هـ})(2)\right)' =$ صفر لأنه ثابت .

مشتقه

5) $\left.\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{س}^2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س})\right)\right|_{\text{س}=2}$

$$= 2\text{س}\,\text{ق}(2)\,\text{هـ}(2) + \text{س}^2\,\text{ق}'(2)\,\text{هـ}(2) + \text{س}^2\,\text{ق}(2)\,\text{هـ}'(2)$$

$$= 4 \times -1 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 + 4 \times -1 \times 4 = \text{صفر}$$

6) $(\text{ق}^3)'(2) = \left(\left(\text{ق}(\text{س})\right)^3\right)'(2)$

$$= 3(\text{ق}(2))^2 \times \text{ق}'(2) = 3 \times (-1)^2 \times 3$$

$$= 9$$

مثال: إذا كان $ل(س) = \frac{س^٢ + ١}{٢ - س}$

$م'(١) = ٢$ ، $م(١) = ٣$

جد $ع'(١)$ في الحالات التالية:

أ) $ع(س) = م(س)\, ل(س) - ٤س$

الحل:

$ع'(س) = م(س)\, ل'(س) + ل(س)\, م'(س) - ٤$

$ع'(١) = ٣ \times ٤ + ٢ \times ٢ - ٤$

$= ١٢ + ٤ - ٤$

$\therefore ع'(١) = ١٢$

$ل(١) = \frac{١ + ١}{٢ - ١} = ٢$

$ل'(س) = \frac{(٢ - س) \times ٢س - (س^٢ + ١) \times -١}{(٢ - س)^٢}$

$ل'(١) = \frac{١ \times ٢ + ٢}{(١)^٢}$

$ل'(١) = ٤$

ب) $ع(س) = \frac{س^٢ + ل(س)}{م(س)}$

$ع'(س) = \frac{م(س)\,(٢س + ل'(س)) - (س^٢ + ل(س))\, م'(س)}{(م(س))^٢}$

$ع'(١) = \frac{٣(٢ + ٤) - (١ + ٢) \times ٢}{(٣)^٢} = \frac{٤}{٣}$

جـ) $ع(س) = س\, م^٢(س) - ٣ل(س)$

الحل:

$ع'(س) = س \times ٢م(س)\, م'(س) + م^٢(س) \times ١ - ٣ل'(س)$

$ع'(١) = ٢ \times ٣ \times ٢ + ٩ - ٣ \times ٤$

$= ١٢ + ٩ - ١٢ = ٩$

د) $ع(س) = \sqrt{٢س\, ل(س)} - \frac{٦}{م(س)}$

$ع'(س) = \frac{٢س\, ل'(س) + ل(س) \times ٢}{٢\sqrt{٢س\, ل(س)}} + \frac{٦\, م'(س)}{(م(س))^٢}$

$ع'(١) = \frac{٢ \times ٤ + ٢ \times ٢}{٢ \times \sqrt{٤}} + \frac{٦ \times ٢}{٩} = \frac{١٣}{٣}$

هـ) $ع(س) = \frac{م(س) \times ل(س)}{\sqrt{س}}$

$ع'(س) = \frac{\sqrt{س}\,(م(س)\, ل'(س) + ل(س)\, م'(س)) - م(س)\, ل(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}}{س}$

$ع'(١) = \frac{١ \times (٣ \times ٤ + ٢ \times ٢) - ٣ \times ٢ \times \frac{١}{٢}}{١}$

$= ١٦ - ٣ = ١٣$

تدريب:

في المثال السابق:

١) $ع(س) = \sqrt{س^٢ - ٢س + ٦}\; م(س) + \frac{ل(س)}{٤}$

٢) $ع(س) = \frac{٢س\, ل(س)}{م(س) - ١}$

٣) $ع(س) = \frac{ل^٢(س)}{م(س) - س}$

تمرين $\boxed{٣}$

① أ) إذا كان $م(س) = ٢س^٣ - س^٢ + ٧$

جد $م'(-١)$

ب) إذا كان $م(س) = \frac{٥}{هـ(س)}$ ، $هـ'(٣) = ٤$ ، $م(٣) = ١$

جد $م'(٣)$

جـ) إذا كان $م(س) = \frac{هـ(س)}{س^٢ - ٣}$

$م'(٢) = -٨$ ، $هـ'(٢) = ٤$ ، جد $م(٢)$

د) إذا كان $م(س) \times هـ(س) = ١٢$ ، $م(س) \neq ٠$

$هـ(-١) = ٦$ جد $\frac{هـ'(-١)}{م'(-١)}$

هـ) $ص = \frac{٦س^٢ - هـ(٢)}{٨}$ ، $هـ'(٢) = ٤$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢}$

و) $م(س) = \frac{٣}{٢}س^٤ - \frac{أ}{س - ١}$ ، $م'(-١) = -٧$ جد $م'(٣)$

② جد $\frac{دص}{دس}$ فيما يلي :

أ) $ص = \left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٥}$

ب) $ص = \frac{٦}{(٢س+١)^{٣}}$

ج) $ص = س^{٢}(٥-٢س)^{٤}$

د) $ص = \frac{\sqrt{س^{٢}+١}}{س}$

③ اذا كان $ع(س) = هـ(س) \times م(س)$

حيث هـ(س) ، م(س) قابلين للاشتقاق عند س = أ

ع(أ) ≠ صفر ، اثبت أن :

$\frac{عَ(أ)}{ع(أ)} = \frac{هـَ(أ)}{هـ(أ)} + \frac{مَ(أ)}{م(أ)}$

④ اذا كان $ع(س) = س\sqrt[٣]{(س^{٣}-٩)^{٢}}$ فجد عَ(١)

⑤ اذا كان $ع(س) = \frac{س+أ}{س-أ}$ ، س ≠ أ

عَ(٣) = −٢ ، جد قيمة الثابت أ

⑥ جد أصفار عَ(س) اذا كان :

أ) $ع(س) = س\sqrt{٢-س^{٢}}$

ب) $ع(س) = \frac{(س+١)^{٣}}{(س-١)^{٢}}$

⑦ اذا كان ع(−٢) = ٣ ، عَ(−٢) = −٤

جد : أ) $\left(\frac{ع}{٢} - \frac{٦}{ع}\right)'(-٢)$

ب) $\left(س^{٢}ع(س)\right)'(-٢)$

ج) $\left(س\sqrt{ع(س)+١}\right)'(-٢)$

د) $\left(\frac{ع(س)}{٢س+ع(س)}\right)'(-٢)$

⑧ اذا كان $ل(س) = \frac{ع^{٢}(س)}{س}$ ، س ≠ ٠

لَ(أ) = صفر

ع(أ) = ١٢ ، عَ(أ) = ٣ ، جد قيمة أ

⑨ اذا كان $ع(س) = \sqrt[٤]{٣س+ب}$

$عَ(٥) = \frac{٣}{٣٢}$ جد قيمة ب

⑩ اذا كان :

ع(٢) = ٢ ، عَ(٢) = ٤

هـ(٢) = −١ ، هـَ(٢) = ٣

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢

أ) $ص = \frac{هـ(٢)}{ع(س)}$

ب) $ص = هـ^{٢}(س) + ع(س) - ٣س$

ج) $ص = ٣س\,هـ^{٣}(س)$

د) $ص = \frac{س^{٢}+٢}{\sqrt{٣ع(س)}}$

هـ) $ص = \frac{س^{٢}ع(س)}{٣+هـ(س)}$

و) $ص = \frac{س^{٢}+س}{هـ^{٢}(س)}$

ز) $ص = ٦\sqrt[٣]{٤-س}\;هـ(س)$

⑪ اذا كان :

ع ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق

وكان : هـَ(س) = ع(س)

عَ(س) = −هـ(س)

$ل(س) = هـ^{٢}(س) + ع^{٢}(س)$

فجد لَ(س)

قاعدة [9]

مشتقة الاقترانات الدائرية :

ق(س)	ق'(س)
جاس	جتاس
جتاس	- جاس
ظاس	قا²س
ظتاس	- قتا²س
قاس	قاس ظاس
قتاس	- قتاس ظتاس

$\boxed{\text{ملاحظة ١}}$

إذا كانت : ص = جا ق(س) فإن

دص / دس = ق'(س) × جتا ق(س)

= مشتقة الزاوية × مشتقة الاقتران الدائري

وتطبق هذه القاعدة على بقية الاقترانات الدائرية

أمثلة :

① جد دص / دس فيما يلي :

١) ص = ٢س² + جتاس - ٥ جاس

دص / دس = ٤س - جاس - ٥ جتاس

٢) ص = جا٣س - ظتاس + ٥

دص / دس = ٣ جتا٣س - قتا²س

٣) ص = قا٧س - ٣ ظتاس

دص / دس = ٧ قا٧س ظا٧س + ٣ قتا²س

٤) ص = جتاس³ + قتا٢س + ١

دص / دس = -٣س² جاس³ - ٢ قتا٢س ظتا٢س

٥) ص = س² جا٣س

دص / دس = س² × ٣ جتا٣س + جا٣س × ٢س

= ٣س² جتا٣س + ٢س جا٣س

٦) ص = قا√س - ٥ ظتا س²

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}\ \text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}} + \text{١٠س قتا}^2\text{س}^2$$

٧)
$$\text{ص} = \frac{\text{٣}}{\text{٤س} - \text{ظاس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٣}(\text{٤} - \text{قا}^2\text{س})}{(\text{٤س} - \text{ظاس})^2}$$

٨)
$$\text{ص} = \frac{\text{جتا٥س}}{\text{٢} - \text{ظتاس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{٢} - \text{ظتاس}) \times -\text{٥ جا٥س} - \text{جتا٥س} \times \text{قتا}^2\text{س}}{(\text{٢} - \text{ظتاس})^2}$$

٩) ص = جا(ظا٣س)

دص / دس = ٣ قا²٣س × جتا(ظا٣س)

١٠) ص = قا³٥س = (قا٥س)³

دص / دس = ٣(قا٥س)² × ٥ × قا٥س ظا٥س

= ١٥ قا³٥س ظا٥س

١١) ص = جا⁴س + √ظتاس

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤جا}^3\text{س} \times \text{جتاس} + \frac{-\text{قتا}^2\text{س}}{\text{٢}\sqrt{\text{ظتاس}}}$$

$$= \text{٤جا}^3\text{س جتاس} - \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{\text{٢}\sqrt{\text{ظتاس}}}$$

١٢) ص = جتا⁵(جاس) = (جتا(جاس))⁵

دص / دس = ٥(جتا(جاس))⁴ × جتاس × - جا(جاس)

= -٥ جتا⁴(جاس) جتاس جا(جاس)

١٣) ص = جا³س جتا²س = (جاس)³ (جتاس)²

دص / دس = (جاس)³ × ٢(جتاس) × -جاس + (جتاس)² × ٣(جاس)² × جتاس

= -٢جا⁴س جتاس + ٣جتا³س جا²س

١٤) ص = √(١ + قتا²س)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{٢قتاس} \times \text{قتاس ظتاس}}{\text{٢}\sqrt{\text{١} + \text{قتا}^2\text{س}}} = \frac{-\text{قتا}^2\text{س ظتاس}}{\sqrt{\text{١} + \text{قتا}^2\text{س}}}$$

(٢) اذا كان :

١) $\text{ص} = \frac{\text{١} + \text{جاس}}{\text{١} - \text{جتاس}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\text{ط}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{١} - \text{جتاس})\,\text{جتاس} - (\text{١} + \text{جاس}) \times \text{جاس}}{(\text{١} - \text{جتاس})^{\text{٢}}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\text{ط}} = \frac{\text{٢} \times \text{١-} - \text{١} \times \text{٠}}{(\text{٢})^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢-}}{\text{٤}} = \frac{\text{١-}}{\text{٢}}$

٢) $\text{ص} = \sqrt[\text{٣}]{\text{٩} - \text{ظا٢س}}$ عندما $\text{س} = \frac{\text{ط}}{\text{٨}}$

الحل : تحول الى قوة ← $\text{ص} = (\text{٩} - \text{ظا٢س})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} (\text{٩} - \text{ظا٢س})^{\frac{\text{٢-}}{\text{٣}}} \times \text{٢-}\,\text{قا}^{\text{٢}}\text{٢س}$

$= \frac{\text{٢-}}{\text{٣}} \times \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{٢س}}{\sqrt[\text{٣}]{(\text{٩} - \text{ظا٢س})^{\text{٢}}}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{٨}}} = \frac{\text{٢-}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٢}}{\sqrt[\text{٣}]{(\text{٨})^{\text{٢}}}} = \frac{\text{٢-}}{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{١-}}{\text{٣}}$

٣) $\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{٦}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١-} \times \text{٢-}\,\text{ظتاس} \times \text{-قتا}^{\text{٢}}\text{س}}{(\text{١} - \text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س})^{\text{٢}}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{٦}}} = \frac{\text{٢-} \times \sqrt{\text{٣}} \times \text{٤}}{(\text{١} - \text{٣})^{\text{٢}}} = \text{٢-}\sqrt{\text{٣}}$

٤) $\text{ص} = \text{قا}^{\text{٣}}\frac{\text{ط}}{\text{س}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\text{٣}}$

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ط-}}{\text{س}^{\text{٢}}} \times \text{٣}\,\text{قا}^{\text{٢}}\frac{\text{ط}}{\text{س}} \times \text{قا}\frac{\text{ط}}{\text{س}}\,\text{ظا}\frac{\text{ط}}{\text{س}}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\text{٣}} = \frac{\text{ط-}}{\text{٩}} \times \text{٣} \times \text{قا}^{\text{٣}}\frac{\text{ط}}{\text{٣}}\,\text{ظا}\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$

$= \frac{\text{ط-}}{\text{٣}} \times \text{٨} \times \sqrt{\text{٣}} = \frac{\text{٨ط-}}{\sqrt{\text{٣}}}$

٥) $\text{ص} = \frac{\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{س}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{٣}}}$

الحل : $\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{جا}^{\text{٣}}\text{س}} = \text{قتا}^{\text{٣}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣-}\,\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} \times \text{قتاس ظتاس}$

$= \text{٣-} \times \left(\frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٣}}}\right)^{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}} = \frac{\text{٨-}}{\text{٣}}$

٦) $\text{ص} = (\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س})^{\text{٣}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{١٢}}}$

الحل : متطابقة

$\text{ص} = (\text{جتا٢س})^{\text{٣}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣}(\text{جتا٢س})^{\text{٢}} \times \text{٢-}\,\text{جا٢س}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{١٢}}} = \text{٦-} \times \left(\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٩-}}{\text{٤}}$

٧) $\text{ص} = (\text{جاس} + \text{جتاس})^{\text{٢}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{١٢}}}$

الحل : تربيع أولاً :

$\text{ص} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \overbrace{\text{٢جاس جتاس}}^{\text{جا٢س}} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{ص} = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جا٢س}$

$\text{ص} = \text{١} + \text{جا٢س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢جتا٢س}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\text{ط}}{\text{١٢}}} = \text{٢جتا}\frac{\text{ط}}{\text{٦}} = \text{٢} \times \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} = \sqrt{\text{٣}}$

(٣) جد قيم $\text{س} \in [\text{٢ط-} ، \text{٢ط}]$ التي تحقق المعادلة :

$\text{هـَ(س)} = \text{صفر}$

أ) $\text{هـ(س)} = \text{س} + \text{جتاس}$

الحل : $\text{هـَ(س)} = \text{١} - \text{جاس} = \text{٠}$

$\text{جاس} = \text{١}$

$\text{س} = \left\{\frac{\text{ط}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٣ط-}}{\text{٢}}\right\}$

ب) $\text{هـ(س)} = \text{قاس}$

الحل : $\text{هـَ(س)} = \text{قاس ظاس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\therefore \text{هـَ(س)} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore \text{جاس} = \text{٠}$

$\text{س} = \{\text{٠} ، \text{ط} ، \text{ط-}\}$

جـ)

تدريب : $\text{هـ(س)} = \text{قتاس}$

تمارين $\boxed{٤}$

① جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي :

١) ص = $\frac{\text{١ + قاس}}{\text{جتاس}}$ عند س = $\frac{\pi}{٣}$

٢) ص = ٢ ظا^{٣}س عند س = $\frac{\pi}{٦}$

٣) ص = جتا٢س قا٣س عند س = $\frac{\pi}{٣}$

٤) ص = $\sqrt{\text{½ + جتا}^{٢}\text{س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٤}$

٥) ص = $\frac{\text{ظتا}^{٢}\text{س − قتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جاس}}$ عند س = π

② اذا كان ق(س) = $\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٣}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}$ جد ق$'$($\frac{\pi}{٣}$)

③ اذا كان ص = س^{٢} ظا$\frac{١}{\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = $\frac{١}{\pi}$

④ اذا كان ق(س) = جاس × $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (قتاس) جد ق$'$($\frac{\pi}{٦}$)

⑤ اذا كان ق(س) = $\frac{\text{١ − ٣جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا٣س}}$ جد ق$'$($\frac{\pi}{٨}$)

⑥ اذا كان ل(س) = $\sqrt[٥]{\text{جتا٣س − ١}}$
ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٥ ، ق$'$($\frac{\pi}{٤}$) = −٣
هـ(س) = ق^{٢}(س) × ل(س)
جد هـ$'$($\frac{\pi}{٤}$)

مشتقة الاقتران المتشعب

عند اشتقاق هذا الاقتران :

١) نشتق كل قاعدة حسب قواعد الاشتقاق

٢) نلغي جميع اشارات المساواة من الفترات .

٣) عند الاطراف ← المشتقة غير موجودة .

٤) عند نقط التحول ← يجب البحث في اتصال

الاقتران ق(س)

- غير متصل ← المشتقة غير موجودة
- متصل ← نجد ق$'_{+}$ ، ق$'_{-}$

وتكون المشتقة موجودة عندها ق$'_{+}$ = ق$'_{-}$

① اذا كان :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢}+١ & \text{، س} \le ٤ \\ \text{٣س} - ١ & \text{، س} > ٤ \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٤ ← تحول.

الحل: الاتصال :

ق(٤) = ١٧ ، $\lim_{\text{س}\to ٤^{+}}$ (٣س − ١) = ١١

$\lim_{\text{س}\to ٤^{-}}$ (س^{٢} + ١) = ١٧

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٤

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٤

② اذا كان :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{٥}{\text{س}} - ٢ & \text{، س} > ١ \\ \text{س} + ٢ & \text{، س} = ١ \\ \text{٤س} - ١ & \text{، س} < ١ \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ١ ← تحول.

الاتصال : ق(١) = ٣

$\lim_{\text{س}\to ١^{+}}$ $\frac{٥}{\text{س}}$ − ٢ = ٣ ، $\lim_{\text{س}\to ١^{-}}$ ٤س − ١ = ٣

ق(س) متصل عند س = ٣

$$\text{ق}'\text{(س)} = \begin{cases} \frac{-٥}{\text{س}^{٢}} & \text{، س} > ١ \\ ٤ & \text{، س} < ١ \end{cases} \qquad \text{ق}'_{+}(١) = -٥ \quad \text{ق}'_{-}(١) = ٤$$

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

③ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2+2س+4 ، & س \neq 2 \\ 5س+2 ، & س = 2 \end{cases}$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $س = 2$

الاتصال :

$ق(2) = 12$ ، $\lim_{س \to 2} (س^2+2س+4) = 12$

ق(س) متصل عند $س = 2$

$ق'(س) = 2س + 2$

$ق'(2) = 6$

---

④ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^3 - 2س ، & -1 \le س < 2 \\ س^2+6س-12 ، & 2 \le س \le 4 \end{cases}$

جد $ق'(س)$.

الحل : الاتصال عند $س = 2$

$ق(2) = 4$

$\lim_{س \to 2^+} (س^2+6س-12) = 4$ ، $\lim_{س \to 2^-} (س^3-2س) = 4$

ق(س) متصل عند $س = 2$

$ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 - 2 ، & -1 < س < 2 \\ 2س + 6 ، & 2 \le س < 4 \\ \text{غير موجودة} ، & س = -1 ، 4 \end{cases}$

$ق'_+(2) = 10$ ، $ق'_-(2) = 10$ ، $\therefore ق'(2) = 10$

---

⑤ $ق(س) = \begin{cases} 3 + جا\pi س ، & س \le 1 \\ \sqrt{س^2+3} ، & س > 1 \end{cases}$

جد $ق'(س)$.

الاتصال : عند $س = 1$

$ق(1) = 3 + . = 3$

$\lim_{س \to 1^+} \sqrt{س^2+3} = 2$ ، $\lim_{س \to 1^-} (3 + جا\pi س) = 3$

ق(س) غير متصل عند $س = 1$

$ق'(س) = \begin{cases} \pi جتا\pi س ، & س < 1 \\ \dfrac{س}{\sqrt{س^2+3}} ، & س > 1 \\ \text{غير موجودة} ، & س = 1 \end{cases}$

مشتقة اقتران القيمة المطلقة

- عند نقطة ← تتبع الإشارة
- لـ س ← نعيد تعريف

① اذا كان $ق(س) = |4 - س^2|$ جد $ق'(-3)$

الحل : التعويض داخلي $= -5$ (سالب)

$ق(س) = س^2 - 4$

$ق'(س) = 2س \leftarrow ق'(-3) = -6$

---

② $ق(س) = 5|2س| - 8\sqrt{س+3}$ جد $ق'(1)$

الحل : التعويض داخلي $= 2$ (موجب)

$ق(س) = 10س - 8\sqrt{س+3}$

$ق'(س) = 10 - 8 \times \dfrac{1}{2\sqrt{س+3}} = 10 - \dfrac{4}{\sqrt{س+3}}$

$ق'(1) = 10 - \dfrac{4}{2} = 8$

---

③ $ق(س) = \dfrac{س + |س-3|}{2س-7}$ جد $ق'(2)$

الحل : التعويض داخلي $= -1$ (سالب)

$ق(س) = \dfrac{س+3-س}{2س-7} = \dfrac{3}{2س-7}$

$ق'(س) = \dfrac{-3 \times 2}{(2س-7)^2} \leftarrow ق'(2) = \dfrac{-6}{9} = \dfrac{-2}{3}$

---

④ $ق(س) = 3س|س-2|$ ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $س = 2$

الحل : التعويض داخلي = صفر ← اعادة تعريف

$س-2$: $-$ ، $+$ (حول 2)

$ق(س) = \begin{cases} 6س - 3س^2 ، & س < 2 \\ 3س^2 - 6س ، & س \ge 2 \end{cases}$

الاتصال : ق(2) = صفر

$\lim_{س \to 2^+} (3س^2-6س) =$ صفر ، $\lim_{س \to 2^-} (6س-3س^2) =$ صفر

∴ ق(س) متصل عند $س = 2$

$ق'(س) = \begin{cases} 6 - 6س ، & س < 2 \\ 6س - 6 ، & س > 2 \end{cases}$

$ق'_+(2) = 6$ ، $ق'_-(2) = -6$ ← ق'(2) غير موجودة .

⑤ إذا كان ق(س) = |س² − س| + س ، س ∈ [٠، ٣]
جد ق′(س) .

الحل : نعيد تعريف : س² − س = ٠
س(س − ١) = ٠
س = ٠ ، س = ١

ق(س) = { س − س² + س ، ٠ ≤ س < ١
　　　　{ س² − س + س ، ١ ≤ س ≤ ٣

ق(س) = { ٢س − س² ، ٠ ≤ س < ١
　　　　{ س² ، ١ ≤ س ≤ ٣

الاتصال : عند س = ١ ⟵ ق(س) متصل .

ق′(س) = { ٢ − ٢س ، ٠ < س < ١
　　　　{ ٢س ، ١ < س < ٣
　　　　{ غير موجودة ، س = ٠، ١، ٣

ق′₊(١) = ٢
ق′₋(١) = ٠
∴ ق′(١) غ.م

⑥ ق(س) = |س² − ٤س + ٣| / س(س − ١) ، س ∈ (١، ٤]
جد ق′(س) .

الحل : نعيد تعريف : س² − ٤س + ٣ = ٠
(س − ٣)(س − ١) = ٠
س = ٣ ، س = ١

ق(س) = { −(س − ٣)(س − ١) / س(س − ١) ، ١ < س < ٣
　　　　{ (س − ٣)(س − ١) / س(س − ١) ، ٣ ≤ س ≤ ٤

ق(س) = { ٣/س − ١ ، ١ < س < ٣
　　　　{ ١ − ٣/س ، ٣ ≤ س ≤ ٤

الاتصال : عند س = ٣ ⟵ ق(س) متصل .

ق′(س) = { −٣/س² ، ١ < س < ٣
　　　　{ ٣/س² ، ٣ < س < ٤
　　　　{ غير موجودة ، س = ٣، ٤

ق′₊(٣) = ١/٣
ق′₋(٣) = −١/٣
∴ ق′(٣) غ.م

تدريب :
ق(س) = ٥س − |ظاس| ، س ∈ [٠، π]
جد ق′(π/٢)

⑦ إذا كان ق(س) = |س + ٢| − ٣|س|
جد ق′(س) .

الحل : نعيد تعريف : س + ٢ = ٠ ، س = ٠
س = −٢

−س − ٢ + ٣س　　س + ٢ + ٣س　　س + ٢ − ٣س

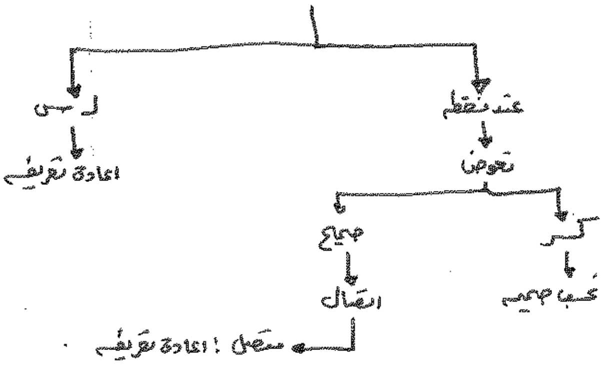
ق(س) = { ٢س − ٢ ، س < −٢
　　　　{ ٤س + ٢ ، −٢ ≤ س < ٠
　　　　{ ٢ − ٢س ، س ≥ ٠

الاتصال : عند س = −٢ ، س = ٠ ق(س) متصل .

ق′(س) = { ٢ ، س < −٢
　　　　{ ٤ ، −٢ < س < ٠
　　　　{ −٢ ، س > ٠
　　　　{ غير موجودة ، س = −٢، ٠ .

ق′₊(−٢) = ٤
ق′₋(−٢) = ٢
∴ ق′(−٢) غ.م
ق′₊(٠) = −٢
ق′₋(٠) = ٤
∴ ق′(٠) غ.م

مشتقة الاقتران الصحيح



① إذا كان ق(س) = ٢س² − [س + ١/٢] جد ق′(١)
الحل : ق(س) = ٢س² − [١,٥]
ق(س) = ٢س² − ١
ق′(س) = ٤س ⟵ ق′(١) = ٤

② ق(س) = [٥ − س/٣] × س　　جد ق′(٣)
الحل : التعويض داخل = ٤ (صحيح)
الاتصال : ق(٣) = ٤ × ٣ = ١٢
نهـا (س ← ٣⁺) [٥ − س/٣] × س = ٣ × ٣ = ٩
نهـا (س ← ٣⁻) [٥ − س/٣] × س = ٤ × ٣ = ١٢
∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣ ⟵ ق′(٣) غير موجودة

③ اذا كان ق(س) = [س+١] / |س-٣| جد ق'(٢,٥)

الحل:

ق(س) = [٢,٥] / (٣-س) = ٣ / (٣-س)

ق'(س) = (-٣×-١) / (٣-س)^٢ ← ق'(٢,٥) = ٣ / (١/٢)^٢ = ١٢

---

④ ق(س) = |٣س| - س[س] + ٥   جد ق'(٢,٥)

الحل: ق(س) = ٣س - س[٢,٥] + ٥

ق(س) = ٣س - ٣س + ٥

∴ ق(س) = ٥ ← ق'(س) = صفر

ق'(٢,٥) = صفر

---

⑤ اذا كان ق(س) = س^٢[س+٢]   جد ق'(٠)

الحل: التعويض داخلي = ٢ (صحيح)

الاتصال: ق(٠) = ٠ × ٢ = ٠

نها (س←٠+) س^٢[س+٢] = ٠ × ٢ = ٠

نها (س←٠-) س^٢[س+٢] = ٠ × ١ = ٠

← ق متصل عند س = ٠

ل = ١

ق(س) = { س^٢ ، -١ ≤ س < ٠
        { ٢س^٢ ، ٠ ≤ س < ١

ق'(س) = { ٢س ، -١ < س < ٠
         { ٤س ، ٠ < س < ١

ق'+(٠) = ٤ × ٠ = ٠

ق'-(٠) = ٢ × ٠ = ٠ ← ق'(٠) = ٠

---

⑥ اذا كان ق(س) = [س+٣] + س^٢ - [س]

جد ق'(٥)

الحل: ق(س) = ~~[س]~~ + ٣ + س^٢ - ~~[س]~~

ق(س) = ٣ + س^٢

ق'(س) = ٢س

ق'(٥) = ١٠

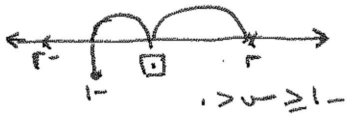
---

⑦ اذا كان:

ق(س) = ٣س + [س/٢ + ٢] ، س ∈ [-١، ٢]

جد ق'(س)   ل = ٢

الحل: نعيد تعريف



ق(س) = { ٣س + ١ ، -١ ≤ س < ٠
        { ٣س + ٢ ، ٠ ≤ س < ٢
        { ٩ ، س = ٢

الاتصال: عند س = ٠

ق(٠) = ٢   نها (س←٠+) (٣س+٢) = ٢

نها (س←٠-) (٣س+١) = ١

ق(س) غير متصل عند س = ٠

ق'(س) = { ٣ ، -١ < س < ٠
         { ٣ ، ٠ < س < ٢
         { غير موجودة ، س = -١، ٠، ٢

---

⑧ اذا كان:

ق(س) = { [٣-س] ، ١ < س < ٢
        { |س-٣| ، ٢ ≤ س ≤ ٤

جد ق'(س)

ل = ١

الحل: نعيد تعريف

ق(س) = { ١ ، ١ < س < ٢
        { ٣-س ، ٢ ≤ س ≤ ٣
        { س-٣ ، ٣ < س ≤ ٤

س-٣ = ٠

س = ٣

الاتصال: عند س = ٢ ، س = ٣

ق(س) متصل

ق'(س) = { صفر ، ١ < س < ٢
         { -١ ، ٢ < س < ٣
         { ١ ، ٣ < س < ٤
         { غير موجودة ، س = ٢، ٣، ٤

ق'+(٢) = -١

ق'-(٢) = ٠

∴ ق'(٢) غ.م

ق'+(٣) = ١

ق'-(٣) = -١

∴ ق'(٣) غ.م

⑨ اذا كانت:

ق(س) = { س^٣ − ١ ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ؛ س^٢ + ٤س − ٥ ، ٢ < س ≤ ٥ }

ابحث قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = ٢ باستخدام تعريف المشتقة

الحل: س = ٢ ← تحول

ق'₊(٢) = نهـا (ع ← ٢⁺) [ق(ع) − ق(٢)] / (ع − ٢)

= نهـا (ع ← ٢⁺) (ع^٢ + ٤ع − ٥ − ٧) / (ع − ٢)

= نهـا (ع ← ٢⁺) (ع − ٢)(ع + ٦) / (ع − ٢) = ٨

ق'₋(٢) = نهـا (ع ← ٢⁻) [ق(ع) − ق(٢)] / (ع − ٢) = نهـا (ع ← ٢⁻) (ع^٣ − ١ − ٧) / (ع − ٢)

= نهـا (ع ← ٢⁻) (ع − ٢)(ع^٢ + ٢ع + ٤) / (ع − ٢) = ١٢

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ لأن ق'₊(٢) ≠ ق'₋(٢)

---

⑩ اذا كان ق(س) = ٢ / |س^٣| ، س ≠ ٠

جد ق'(−١) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

التعويض داخل = −١ (سالب)

ق(س) = −٢ / س^٣

ق'(−١) = نهـا (ع ← −١) (−٢/ع^٣ − ٢) / (ع + ١) = نهـا (ع ← −١) (−٢ − ٢ع^٣) / (ع^٣(ع + ١))

= نهـا (ع ← −١) −٢(١ + ع)(١ − ع + ع^٢) / (ع^٣(١ + ع)) = −٦ / −١ = ٦

---

⑪ اذا كان ق(س) = |س| [س]

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٠.

الحل: نعيد تعريف الصحيح

تذكر أن: |س|^٢ = س^٢

ق(س) = { −س^٢ ، −١ ≤ س < ٠ ؛ صفر ، ٠ ≤ س < ١ }

ق'₊(٠) = نهـا (ع ← ٠⁺) [ق(ع) − ق(٠)] / ع = نهـا (ع ← ٠⁺) صفر / ع = صفر

ق'₋(٠) = نهـا (ع ← ٠⁻) [ق(ع) − ق(٠)] / ع = نهـا (ع ← ٠⁻) −ع^٢ / ع = صفر

∴ ق'(٠) = صفر

---

⑫ اذا كان:

ق(س) = س^٢ |س − ٣|

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٣ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل: التعويض داخل = صفر ← نعيد تعريف

س = ٣

ق(س) = { ٣س^٢ − س^٣ ، س < ٣ ؛ س^٣ − ٣س^٢ ، س ≥ ٣ }

ق'₊(٣) = نهـا (ع ← ٣⁺) [ق(ع) − ق(٣)] / (ع − ٣)

= نهـا (ع ← ٣⁺) (ع^٣ − ٣ع^٢ − ٠) / (ع − ٣) = نهـا (ع ← ٣⁺) ع^٢(ع − ٣) / (ع − ٣) = ٩

ق'₋(٣) = نهـا (ع ← ٣⁻) [ق(ع) − ق(٣)] / (ع − ٣)

= نهـا (ع ← ٣⁻) (٣ع^٢ − ع^٣) / (ع − ٣) = نهـا (ع ← ٣⁻) ع^٢(٣ − ع) / (ع − ٣) = −٩

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٣ لأن ق'₊(٣) ≠ ق'₋(٣)

تدريب:

١) ق(س) = |٢ − ٢ − س| + √(٧ − س)

جد ق'(١) باستخدام تعريف المشتقة.

٢) ق(س) = |٢جتاس − ١|

س ∈ [٠ ، π/٢]

جد ق'(π/٣) باستخدام تعريف المشتقة

٣) ق(س) = ٢س^٣ − [٣ − س] س ، جد ق'(١/٢) باستخدام التعريف

تمرين ٥

① اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، س \le ١ \\ ٣س^{٢} - ٣س + ١ & ، س > ١ \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $س = ١$

② اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & ، -٢ \le س < ١ \\ |س^{٢} - ٤| + ٣ & ، س \ge ١ \end{cases}$$

جد $قَ(س)$.

③ اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} |١ - س^{٢}| + ١٤س & ، س < ١ \\ س\,هـ^{٢}(س) + ١٠ & ، س \ge ١ \end{cases}$$

وكان $هـ(١) = هـ'_{+}(١) = ٢$

ابحث قابلية ق(س) للاشتقاق عند $س = ١$

④ أ) اذا كان $ق(س) = \frac{٤}{|س^{٢} - ١٧|}$ جد $قَ(٣)$

ب) اذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س - |س|}$ جد $قَ(-٤)$

جـ) اذا كان $ق(س) = س + [س + ٠,٢] - |س|$ جد $قَ(-١)$

د) اذا كان $ق(س) = (س - [س])^{٣}$ جد $قَ(٢,٥)$

هـ) اذا كان $ق(س) = |س - ٣|$ جد $(ق^{٢})'(١)$

⑤ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٤س + ١} & ، س \ne ٢ \\ س^{٢} - ١ & ، س = ٢ \end{cases}$

جد $قَ(س)$.

⑥ أ) اذا كان $ق(س) = |ظاس - ٣|$ جد $قَ(\frac{\pi}{٤})$

ب) اذا كان $ق(س) = \frac{س - [٢ - س]}{٣ - س}$ ، $س \ne ٣$

جد $قَ(١,٦)$

⑦ اذا كان $ق(س) = س|جاس|$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

ابحث قابلية ق(س) للاشتقاق عند $س = \pi$

⑧ اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} |٢ - ٢س| & ، ٠ \le س < ٢ \\ [\frac{١}{٢}س - ٣] & ، ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

جد $قَ(س)$

⑨ اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} + س & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س^{٢} + ٢ & ، ٢ \le س < ٥ \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $س = ٢$

باستخدام تعريف المشتقة

⑩ اذا كان :

$$ق(س) = \frac{س^{٢}}{[س + ٢]}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند $س = ٠$

باستخدام تعريف المشتقة

⑪ اذا كان $ق(س) = \frac{[\frac{س}{٢}] + س}{س + ٣}$

جد $قَ(-١)$ باستخدام تعريف المشتقة .

⑫ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \ne ٩ \\ ٦ & ، س = ٩ \end{cases}$

جد $قَ(٩)$

الاتصال والاشتقاق

نظرية:

اذا كان ق(س) قابلا للاشتقاق عند س = أ

فإن ق(س) متصل عند س = أ

أي أن:

اذا كانت ق'(أ) موجودة فإن ق(أ) = $\lim_{\text{س}\to\text{أ}}$ ق(س)

① اذا كان ق'(١) = ٥ ، ق(١) = ٣

جد $\lim_{\text{س}\to 1}$ (٦س − ق²(س) + ١)

الحل:

بما أن ق'(١) = ٥ (موجودة) ← ق متصل عند س = ١

∴ $\lim_{\text{س}\to 1}$ ق(س) = ق(١) = ٣

∴ $\lim_{\text{س}\to 1}$ (٦س − ق²(س) + ١) = ٦ − (٣)² + ١ = −٢

---

② اذا كانت ق'(س) = $\begin{cases} \text{٢س}^2 + \text{أ} ، & 1 < \text{س} < 3 \\ \text{٥س} + 4 ، & \text{س} > 3 \end{cases}$

وكانت ق''(٣) موجودة ، فاحسب الثابت أ

الحل:

ق'$_+$(٣) = ق'$_-$(٣)

١٩ = ١٨ + أ ← أ = ١

---

③ إذا كان:

ق(س) = $\begin{cases} \text{٣س}^2 ، & \text{س} \leq 1 \\ \text{أس} + \text{ب} ، & \text{س} > 1 \end{cases}$

قابلا للاشتقاق عند س = ١ ، جد كلا من أ ، ب

الحل: ق'(س) = $\begin{cases} \text{٦س} ، & \text{س} < 1 \\ \text{أ} ، & \text{س} > 1 \end{cases}$

س = ١ ← تحول

ق'$_+$(١) = ق'$_-$(١) ← أ = ٦

ق(س) متصل عند س = ١

ق(١) = $\lim_{\text{س}\to 1^+}$ (أس + ب) = $\lim_{\text{س}\to 1^-}$ ٣س²

٣ = أ + ب = ٣

٦ + ب = ٣ ← ب = −٣

---

④ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أس}^3 + \text{ب س} ، & \text{س} < 2 \\ \text{أس}^2 + \text{٩ب س} - 12 ، & \text{س} \geq 2 \end{cases}$

جد أ ، ب التي تجعل ق'(٢) موجودة.

الحل: ق'(س) = $\begin{cases} \text{٣أس}^2 + \text{ب} ، & \text{س} < 2 \\ \text{٢أس} + \text{٩ب} ، & \text{س} > 2 \end{cases}$

س = ٢ ← تحول

ق'$_+$(٢) = ق'$_-$(٢)

٤أ + ٩ب = ١٢أ + ب ← ٨أ − ٨ب = ٠ /٨

أ − ب = ٠ .... ①

ق(س) متصل عند س = ٢

ق(٢) = $\lim_{\text{س}\to 2^+}$ أس² + ٩ب س − ١٢ = $\lim_{\text{س}\to 2^-}$ أس³ + ب س

٤أ + ١٨ب − ١٢ = ٤أ + ١٨ب − ١٢ = ٨أ + ٢ب

← ٤أ − ١٦ب = −١٢ /٤

$\cancel{\text{أ}}$ − ٤ب = −٣ .... ②

$\cancel{-\text{أ}}$ + ب = ٠

−٣ب = −٣ ← ب = ١

∴ أ − ١ = ٠ ← أ = ١

تدريب:

اذا كان:

١) ق(س) = $\begin{cases} \text{أس}^2 + \text{ب} ، & \text{س} < 3 \\ \text{أ س} ، & \text{س} = 3 \\ \text{س}^2 + \text{٣أس} + \text{٢ب} ، & \text{س} > 3 \end{cases}$

قابلا للاشتقاق على ح

جد أ ، ب ، جـ

٢) ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - \text{أس} + 5 ، & \text{س} \geq -1 \\ \frac{\text{أ}}{\text{س}} - \text{ب س} ، & \text{س} < -1 \end{cases}$

وكانت ق'(−١) موجودة

جد كلا من أ ، ب

قاعدة السلسلة

إذا كان ص = د(ع) ، ع = هـ(س)

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

① إذا كان: ص = ع² + ٣ ، ع = س² + س − ٥

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٢ع$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س + ١$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٢ع \times (٢س+١) = ٢(س^٢+س-٥)(٢س+١)$

② إذا كان: $ل = \frac{٤س}{٢س+١}$ ، ص = ل² + ١

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل:

$\frac{دل}{دس} = \frac{(٢س+١)\times٤ - ٤س\times٢}{(٢س+١)^٢} = \frac{\cancel{٨س} + ٤ - \cancel{٨س}}{(٢س+١)^٢}$

$\frac{دص}{دل} = ٢ل$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس}$

$= \frac{٤}{(٢س+١)^٢} \times ٢ل = \frac{٨}{(٢س+١)^٢} \times \frac{٤س}{٢س+١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣٢س}{(٢س+١)^٣}$

③ إذا كان: $ص = \frac{٣}{ع^٢+١}$ ، $س = \frac{١}{٣}ع^٣ + ع - ٢$

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل: $\frac{دص}{دع} = \frac{-٣\times٢ع}{(ع^٢+١)^٢}$ ، $\frac{دس}{دع} = ع^٢ + ١$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{-٦ع}{(ع^٢+١)^٢} \times \frac{١}{ع^٢+١}$

$= \frac{-٦ع}{(ع^٢+١)^٣}$

④ إذا كان: $ص = \frac{١}{\sqrt{٤ع^٢+٣}}$ ، ع = جا ط س

جد $\frac{دص}{دس}$ | $_{س = \frac{١}{٦}}$

عندما $س = \frac{١}{٦}$ ، $ع = جا \frac{ط}{٦}$ ، $ع = \frac{١}{٢}$

الحل:

$\frac{دص}{دع} = \frac{-١ \times \frac{٨ع}{٢\sqrt{٤ع^٢+٣}}}{٤ع^٢+٣} = \frac{-٤ع}{\sqrt{٤ع^٢+٣}\,(٤ع^٢+٣)}$

$\frac{دص}{دع} = \frac{-٤\times\frac{١}{٢}}{٢\times٤} = -\frac{١}{٤}$

$\frac{دع}{دس} = ط\,جتا\,ط\,س \longrightarrow \frac{دع}{دس} = ط\,جتا\frac{ط}{٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}ط$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = -\frac{١}{٤} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}ط = -\frac{\sqrt{٣}}{٨}ط$

⑤ إذا كان: $ص = \sqrt{٢ن^٢+١}$ ، $س = |٣ - ن^٢|$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ن = ٢

الحل:

$\frac{دص}{دن} = \frac{٤ن}{٢\sqrt{٢ن^٢+١}} = \frac{٨}{٢\times٣} = \frac{٤}{٣}$

$\xrightarrow[\text{التعويض سالب}]{\text{حول ن = ٢}}$ س = ن² − ٣

$\frac{دس}{دن} = ٢ن = ٤$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٣}$

⑥ إذا كان: ص = ٣جتا٢ن ، س = ٢جا ن ، ن ∈ [٠، $\frac{ط}{٢}$[

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١

عندما س = ١: ١ = ٢جا ن ، جا ن = $\frac{١}{٢}$ ، ن = $\frac{ط}{٦}$

$\frac{دص}{دن} = -٦جا٢ن = -٦ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= -٣\sqrt{٣}$

$\frac{دس}{دن} = ٢جتا ن = ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= -\cancel{٣\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{٣}}} = -٣$

تدريب:

ص = قتا ن ، س = ظا² ن ، ن ∈]٠، $\frac{ط}{٢}$[

جد $\frac{دس}{دص}$ عندما س = ٣

⑦ اذا كانت:

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢\text{ظان} + ١$ ، $\text{س} = \text{ظان}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٢}$

عندما س = ٢
ظان = ٢
قا²ن = ١ + ظا²ن
قا²ن = ١ + ٤
قا²ن = ٥

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{قا}^{٢}\text{ن} = ٥$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = ٥ \times \frac{١}{٥} = ١$

تدريب:

ص = جا⁴ن ، س = $\sqrt{٣}$ قتان

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ١

⑧ $\text{ص} = \frac{١}{\text{ل}} - ٢$ ، ل ≠ ٠ ، $\text{س} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}-١}$ ، ل ≠ ١

أثبت أن: $\frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{س}^{٢}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دل}} = \frac{-١}{\text{ل}^{٢}}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دل}} = \frac{(\text{ل}-١)\times ١ - \text{ل} \times ١}{(\text{ل}-١)^{٢}} = \frac{-١}{(\text{ل}-١)^{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{\text{دس}}{\text{دل}} \times \frac{\text{دل}}{\text{دص}}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{-١}{(\text{ل}-١)^{٢}} \times -\text{ل}^{٢} = \frac{\text{ل}^{٢}}{(\text{ل}-١)^{٢}} = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ل}-١}\right)^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{س}^{٢}$$

⑨ اذا كانت:

ص = ع³ + س ، ع = ظاس

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = $\frac{\pi}{٣}$

الحل:

ص = (ظاس)³ + س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(\text{ظاس})^{٢} \times \text{قا}^{٢}\text{س} + ١$

$= ٣(\sqrt{٣})^{٢} \times (٢)^{٢} + ١$

$= ٩ \times ٤ + ١ = ٣٧$

تمارين ٦

① اذا كانت:

$\text{ص} = \frac{١}{١٢}\text{ع}^{٣} + \text{ع}$ ، $\text{ع} = (٢\text{س}+١)^{٤}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

② اذا كانت:

$\text{ص} = \frac{٢\text{ن}}{٣\text{ن}-٤}$ ، $\text{س} = \text{ن}^{٢} - \frac{٨}{\text{ن}}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=٠}$

③ اذا كانت:

$\text{ص} = \sqrt[٣]{(\text{ع}^{٢} - ١٠\text{ع} + ١)^{٢}}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٣} + ١$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٢

④ اذا كانت:

$\frac{\text{دع}}{\text{دم}} = \sqrt{٦\text{جام} + ١}$ ، $\text{م} = \frac{\pi}{\text{س}+٤}$

جد $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}\Big|_{\text{م}=\frac{\pi}{٦}}$

⑤ اذا كانت:

ص = ظان ، س = ظا$\frac{\text{ن}}{٢}$ ، $٠ < \text{ن} < \frac{\pi}{٢}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = $\sqrt{٣}$

⑥ اذا كانت:

$\text{ص} = ٣\sqrt{\text{ع}}$ ، $\text{س} = \text{ع}\sqrt{\text{ع}}$

أثبت أن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٩}{\text{ص}^{٢}}$

⑦ اذا كانت:

ص = ن + قا²ن ، س = ظان

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٣

مشتقة الاقتران المركب

إذا كان ص $= (ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س))$

فإن :

$$\frac{دص}{دس} = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$$

مشتقة الخارجي × مشتقة الداخلي .

① اذا كان : $ق(س) = س^2 - س$ ، $هـ(س) = س^2$

جد $(ق \circ هـ)'(س)$

الحل : $ق'(س) = ٢س - ١$ ، $هـ'(س) = ٢س$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ق'(س^2) \times ٢س = (٢س^2 - ١) \times ٢س$

$= ٤س^3 - ٢س$.

② اذا كان : $ق(س) = س^3 + ٢$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$

جد :

أ) $(ق \circ هـ)'(٤)$ ب) $(هـ \circ ق)'(-١)$

جـ) $(ق \circ ق)'(١)$

الحل : $ق'(س) = ٣س^2$ ، $هـ'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

أ) $(ق \circ هـ)'(٤) = ق'(هـ(٤)) \times هـ'(٤)$

$= ق'(٢) \times هـ'(٤)$

$= ١٢ \times \frac{١}{٤} = ٣$

ب) $(هـ \circ ق)'(-١) = هـ'(ق(-١)) \times ق'(-١)$

$= هـ'(١) \times ق'(-١)$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$

جـ) $(ق \circ ق)'(١) = ق'(ق(١)) \times ق'(١)$

$= ق'(٣) \times ق'(١)$

$= ٢٧ \times ٣ = ٨١$

③ اذا كان : $هـ(س) = \frac{١}{\sqrt{٢س+٣}}$ ، $ق(س) = جتا^2 س$

جد $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٤})$

الحل : $هـ'(س) = \frac{-١ \times \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢س+٣}}}{٢س+٣} = \frac{-١}{(٢س+٣)\sqrt{٢س+٣}}$

$ق'(س) = -٢ جتاس جاس$.

$(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٤}) = هـ'(ق(\frac{\pi}{٤})) \times ق'(\frac{\pi}{٤})$

$= هـ'(\frac{١}{٢}) \times ق'(\frac{\pi}{٤})$

$= \frac{-١}{٨} \times -١ = \frac{١}{٨}$

④ اذا كان $ق(س) = أ قاس$

$هـ(س) = \frac{٢س}{س+١}$

وكانت $(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٣}) = -٤\sqrt{٣}$

جد قيمة أ .

الحل :

$ق'(س) = أ قاس ظاس$.

$هـ'(س) = \frac{(س+١) \times ٢ - ٢س \times ١}{(س+١)^2} = \frac{٢}{(س+١)^2}$

$(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{٣}) = هـ'(ق(\frac{\pi}{٣})) \times ق'(\frac{\pi}{٣}) = -٤\sqrt{٣}$

$هـ'(٢أ) \times ٢أ\cancel{\sqrt{٣}} = -٤\cancel{\sqrt{٣}}$

$\frac{٢}{(٢أ+١)^2} \times ٢أ = -٤ \Leftarrow \frac{أ}{(٢أ+١)^2} = -١$

$٤أ^2 + ٤أ + ١ = -أ \Leftarrow ٤أ^2 + ٥أ + ١ = ٠$.

$(٤أ+١)(أ+١) = ٠$. $\Leftarrow أ = -\frac{١}{٤}$ ، -١

⑤ اذا كان : $ق(س) = (٣س - ١)^4$

$هـ'(٣) = \frac{١}{٢}$ ، $(ق \circ هـ)'(٣) = ٤٨$

جد قيمة $هـ(٣)$

الحل : $ق'(س) = ٤(٣س - ١)^3 \times ٣ = ١٢(٣س - ١)^3$

$(ق \circ هـ)'(٣) = ق'(هـ(٣)) \times هـ'(٣) = ٤٨$

$\cancel{١٢}^{٦}(٣هـ(٣) - ١)^3 \times \frac{١}{\cancel{٢}} = ٤٨ \Leftarrow هـ(٣) = ١$.

(٦) اذا كانت :
ق′(٢) = −٢ ، هـ(س) = س^٢ + س
ق(٢) = ١
هـ′(س) = ٢س + ١
جد دص/دس :

١) ص = √((ق∘هـ)(س)) عندما س = ١

دص/دس | (س=١) = ق′(هـ(١)) × هـ′(١) / ٢√(ق(هـ(١))) = ق′(٢) × هـ′(١) / ٢√(ق(٢))
= −٢ × ٣ / (٢ × ١) = −٣

٢) ص = س^٢ × (هـ∘ق)(س) عندما س = ٢
دص/دس = س^٢ × هـ′(ق(س)) × ق′(س) + هـ(ق(س)) × ٢س
دص/دس | (س=٢) = ٤ × هـ′(١) × ق′(٢) + هـ(١) × ٤
= ٤ × ٣ × −٢ + ٢ × ٤ = −١٦

٣) ص = (ق^٣∘هـ)(س) عندما س = ١
الحل : ص = ((ق∘هـ)(س))^٣
دص/دس = ٣((ق∘هـ)(س))^٢ × ق′(هـ(س)) × هـ′(س)
= ٣(ق(هـ(١)))^٢ × ق′(هـ(١)) × هـ′(١)
= ٣ × [ق(٢)]^٢ × ق′(٢) × هـ′(١)
= ٣ × ١ × −٢ × ٣ = −١٨

تدريب : اذا كان :
ق(س) = ∛(س + أ) ، هـ(س) = س^٢
(ق∘هـ)′(٢) = ١/٣
جد الثابت أ

(٨) اذا كانت ص = ق(س^٢ + ١) ، ق′(٢) = ٤
جد دص/دس | (س=−١)
الحل :
دص/دس = ق′(س^٢ + ١) × ٢س
دص/دس | (س=−١) = ق′(٢) × −٢ = ٤ × −٢ = −٨

(٩) اذا كان
ص = ق(ظا س/٤) ، ق′(١) = ٣
جد دص/دس | (س = π)
الحل :
دص/دس = ق′(ظا س/٤) × ١/٤ قا^٢ س/٤
= ق′(١) × ١/٤ × ٤ = ٣ × ١ = ٣

(١٠) اذا كان :
ص = ق^٢(جتا س) ، ق(٠) = ٢ ، ق′(٠) = −٤
جد دص/دس عندما س = π/٢
الحل :
ص = (ق(جتا س))^٢
دص/دس = ٢(ق(جتا س)) × ق′(جتا س) × −جا س
دص/دس | (س = π/٢) = ٢(ق(٠)) × ق′(٠) × −١
= ٢ × ٢ × −٤ × −١ = ١٦

(١١) اذا كان :
ق(س^٢ − س + ٣) = س^٣ + ١ ، س > ٠
جد ق′(٥)
ق′(س^٢ − س + ٣) × (٢س − ١) = ٣س^٢
نعوض س = ٢
ق′(٥) × ٣ = ١٢ ⟵ ق′(٥) = ٤

س^٢ − س + ٣ = ٥
س^٢ − س − ٢ = ٠
(س − ٢)(س + ١) = ٠
$\boxed{\text{س} = ٢}$ ، س = −١ ✗

(١٢) اذا كان ق(جا س) = ظا^٢ س ، س ∈ (٠ ، π/٢)
جد ق′(١/٢)
الحل :
ق′(جا س) × جتا س = ٢ظا س قا^٢ س
نعوض س = π/٦

جا س = ١/٢
س = π/٦

ق′(١/٢) × √٣/٢ = ٢ × ١/√٣ × ٤/٣
ق′(١/٢) = ٨/(٣√٣) × ٢/√٣
= ١٦/٩

تمرين [٧]

① اذا كان ق(س) = ١ / √٢س ، س > ٠

هـ(س) = (س - ١)^٣

جد (ق ∘ هـ)′(٣)

② اذا كان : ق(س) = س^٣

هـ(س) = أ / س ، س ≠ ٠

(ق ∘ هـ)′(٣) = -٨ / ٢٧

جد قيمة الثابت أ .

③ اذا كان ق(ص) = ص^٢ - ص

هـ(س) = √(٥ - ظتا ٢س)

جد : (ق ∘ هـ)′(π / ٨)

④ اذا كان ق(س) = ∛(٥ - ٣س)

هـ(س) = جا πس

جد (هـ ∘ ق)′(٢)

⑤ اذا كان : ق(س) = قا^٢ س

هـ(س) = أ / √(٢س - ٣)

(هـ ∘ ق)′(π / ٤) = ١٠

جد قيمة الثابت أ

⑥ اذا كان : ص = هـ(٥س - س^٢) / √(٤س + ٥)

وكان هـ(٤) = -٩ ، هـ′(٤) = ٧

جد دص / دس | س = ١

⑦ اذا كان : ق′(س) = (٢س - ٣)^٥ + ٣

ص = |٣ - س| ق(س^٢ - ٣) ، ق(١) = -١

جد دص / دس | س = -٢

⑧ اذا كان :

ق(جا٢س) = ٦س^٢ + ٧ ، س ∈ [٠ ، π / ٤]

جد ق′(١ / ٢)

⑨ اذا كان :

ق(جتا س) = جا^٤ س ، س ∈ (٠ ، π)

جد ق′(-١ / ٢)

⑩ اذا كان : ق(٤) = ٩ ، ق′(٢) = -٣

ق′(٤) = ٦

جد قيمة مايلي عند س = -١

أ) د / دس (√(ق(س^٢ + ٣)))

ب) د / دس (ق(√(س^٢ + ٣)))

⑪ ق(س) = ٤ / (٣ - س)

هـ(٢) = ٥

(ق ∘ هـ)(س) = (س^٢ - ١)^٣ + ٤

جد هـ′(٢)

الاشتقاق الضمني

هو اشتقاق متغير بالنسبة لمتغير آخر

مثال: $\frac{d}{dس}(ص^٣) = ٣ص^٢ \times \frac{dص}{dس}$

لكن $\frac{d}{dس}(س^٣) = ٣س^٢$

ويستخدم الاشتقاق علاقة ضمنية مثل:
$س ص^٢ + س^٣ = ١$ ، $جاص = ٢س - ٥$

تذكر أن: ص = بدلالة س فقط
تسمى علاقة صريحة
وبغير ذلك تكون العلاقة ضمنية ويتم اشتقاقها بالاشتقاق الطرفين.

① اذا كانت $٤ص^٢ + ٧ص + ٣س^٢ = ٤٥$
جد $\frac{dص}{dس}$

الحل:

$٨ص ص' + ٧ص' + ٦س = ٠$

$٨ص ص' + ٧ص' = -٦س$

$ص'(٨ص + ٧) = -٦س \rightarrow ص' = \frac{-٦س}{٨ص + ٧}$

② اذا كانت:
$س^٣ + ص^٣ = ٣س ص$ جد $\frac{dص}{dس}$

الحل:

$٣س^٢ + ٣ص^٢ ص' = ٣س ص' + ص \times ٣ \quad /٣$

$س^٢ + ص^٢ ص' = س ص' + ص$

$ص^٢ ص' - س ص' = ص - س^٢$

$ص'(ص^٢ - س) = ص - س^٢$

$\therefore ص' = \frac{ص - س^٢}{ص^٢ - س}$

تدريب:
$س^٢ ص^٢ - ٤س = ٣ص + ٧$ جد $\frac{dص}{dس}$

③ اذا كان:
$س^٣ = س ص^٢ - ٢ص$ جد $\frac{dص}{dس}$

الحل:

$٣س = س \times ٢ص ص' + ص^٢ \times ١ - ٢ص'$

$٣س = ٢س ص ص' + ص^٢ - ٢ص'$

$٣س - ص^٢ = ص'(٢س ص - ٢)$

$\therefore ص' = \frac{٣س - ص^٢}{٢س ص - ٢}$

④ اذا كانت:
$٢ص^٢ + جاص = س^٢ ص$ جد $\frac{dص}{dس}$

الحل:

$٤ص ص' + ص' جتاص = س^٢ ص' + ص \times ٢س$

$٤ص ص' + ص' جتاص - س^٢ ص' = ٢ص س$

$ص'(٤ص + جتاص - س^٢) = ٢ص س$

$\therefore ص' = \frac{٢ص س}{٤ص + جتاص - س^٢}$

⑤ اذا كانت:
$\frac{٢}{ص} + \frac{ص}{س} = ٣س$ جد $\frac{dص}{dس}$

الحل:

$\frac{-٢ص'}{ص^٢} + \frac{س ص' - ص \times ١}{س^٢} = ٣$

$\frac{-٢ص'}{ص^٢} + \frac{س ص' - ص}{س^٢} = ٣$

$\frac{-٢س^٢ ص' + س ص^٢ ص' - ص^٣}{س^٢ ص^٢} = ٣$

$-٢س^٢ ص' + س ص^٢ ص' = ٣س^٢ ص^٢ + ص^٣$

$ص'(-٢س^٢ + س ص^٢) = ٣س^٢ ص^٢ + ص^٣$

$ص' = \frac{٣س^٢ ص^٢ + ص^٣}{س ص^٢ - ٢س^٢}$

⑥ جد النقطة على منحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$
والتي تحقق المعادلة $ص' = -٢$

الحل: $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠ \rightarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{-ص'}{٢\sqrt{ص}}$

$\frac{١}{\sqrt{س}} = \frac{٢}{\sqrt{ص}} \rightarrow \boxed{\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}} \rightarrow$ نعوض في العلاقة الأصلية

$\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣$

$٣\sqrt{س} = ٣ \longrightarrow \sqrt{س} = ١$

∴ $س = ١$

$\sqrt{١} + \sqrt{ص} = ٣ \longrightarrow \sqrt{ص} = ٢$

$ص = ٤$

∴ احداثيات النقطة هي (١ ، ٤)

---

(٧) اذا كانت:

$٣ص^٢ - ٢س ص = ١٦$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (١ ، -٢)

الحل:

$٦ص ص' - ٢س × ص' + ص × -٢ = ٠$

$٦ص ص' - ٢س ص' - ٢ص = ٠$

عند (١ ، -٢) $\longrightarrow -١٢ص' - ٢ص' + ٤ = ٠$

$١٤ص' = ٤ \longrightarrow ص' = \frac{٢}{٧}$

---

(٨) $س + ص = جا(س ص)$ جد $\frac{دص}{دس}$

$١ + ص' = (ص + س ص')\, جتا(س ص)$

$١ + ص' = ص\, جتا(س ص) + س ص'\, جتا(س ص)$

$ص' - س ص'\, جتا(س ص) = ص\, جتا(س ص) - ١$

$ص'\left(١ - س\, جتا(س ص)\right) = ص\, جتا(س ص) - ١$

$ص' = \frac{ص\, جتا(س ص) - ١}{١ - س\, جتا(س ص)}$

---

(٩) اذا كان:

$ص^٣ = ق(-٣س + ٤)$ ، $ق(١) = ق'(١) = ٨$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -١$

الحل:

$\cancel{٣}ص^٢ ص' = ق'(-٣س + ٤) × \cancel{-٣}$

$٤ص' = ق'(١) = ٨ \longrightarrow ص' = ٢$

عندما $س = -١$

$ص^٣ = ق(١)$

$ص^٣ = ٨$

$ص = ٢$

تدريب:

$س^٢ص - ٢س = ٣\sqrt{ص}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ١$

---

(١٠) اذا كان:

$ق(ص^٢) = \frac{-٣س + ٥}{س + ١}$

$ق(٩) = ٤$ ، $ق'(٩) = \frac{١}{٤}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ٣$

الحل:

$٢ص ص' × ق'(ص^٢) = \frac{(س+١) × -٣ - (-٣س + ٥)}{(س+١)^٢}$

$٦ص' × ق'(٩) = \frac{٢ × -٣ - ٨}{٤}$

$٦ص' × \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{٢}ص' = -\frac{١}{٢} \longrightarrow ص' = -\frac{١}{٣}$

عندما $ص = ٣$

$ق(٩) = \frac{-٣س + ٥}{س + ١}$

$٤ = \frac{-٣س + ٥}{س + ١}$

$٤س + ٤ = -٣س + ٥$

$س = ١$

---

(١١) اذا كانت:

$٢جا ص = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = \frac{\pi}{٦}$

الحل:

$٢ص'\, جتا ص = \frac{(س - ١) × ٢ - (٢س - ٣)}{(س - ١)^٢}$

عند النقطة $(٢ ، \frac{\pi}{٦})$

$٢ص' × \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١ × ٢ - ١}{(١)^٢}$

$\sqrt{٣}ص' = ١ \longrightarrow ص' = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

عندما $ص = \frac{\pi}{٦}$

$٢ × \frac{١}{٢} = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$

$٢س - ٣ = س - ١$

$س = ٢$

تدريب:

اذا كانت:

١) $ص = \sqrt{-س ص + ٦}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (-١ ، ٢)

٢) $س ص^٢ + س^٢ ص = ١٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة (١ ، ٣)

٣) $جا٢ص = جتا^٢ص + ٥س$ جد $\frac{دص}{دس}$

٤) $ص = ظا(س + ص)$ جد $\frac{دص}{دس}$

تمرين [٨]

① جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي:

١) $٢س^٣ - س^٢ص = ١ - ص^٣$

٢) $\frac{س}{ص^٢} = س + ص$

٣) $ص = جا(س - ص)$

٤) $\sqrt{س + ٢ص} = س ص^٢$ عند $(٢،١)$

٥) $جتا^٢ص = س ص$

٦) $ص = جا(س ص)$ عند $(\frac{\pi}{٢}، ١)$

٧) $(س+ص)^٤ = ٤س + ص^٢ + ٣$ عند $(١، -٣)$

٨) $س = ظا ص$ عندما $س = ٣$

٩) $٣س ص + ص^٢ = س - ٧$ عند $ص = -١$

② اذا كان: $ق^٣(ص) = ٣س^٢ + ٥$ ، $ق'(٣) = \frac{١}{٤}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة $(-١،٣)$

③ اذا كان: $ص^٣ = \frac{١}{٢٧} قا ه(س)$ ، $ه(٢) = \frac{\pi}{٤}$ ، $ه'(٢) = ١٢$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = ٢$

المشتقات العليا

المشتقة الثانية: $ق''(س)$ ، $ق^{(٢)}(س)$ ، $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

المشتقة الثالثة: $ق'''(س)$ ، $ق^{(٣)}(س)$ ، $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$

المشتقة الرابعة: $ق^{(٤)}(س)$ ، $\frac{د^٤ص}{دس^٤}$

ويمكن إيجادها عن طريق إيجاد المشتقة الأولى ثم متابعة الاشتقاق باستخدام قواعد الاشتقاق.

① اذا كان $ق(س) = \frac{س^٥}{٢٠} - س^٣ + ١$ جد $ق^{(٤)}(١)$

الحل:

$ق'(س) = \frac{٥س^٤}{٢٠} - ٣س^٢$

$ق''(س) = \frac{٤س^٣}{٤} - ٦س$

$ق'''(س) = ٣س^٢ - ٦$

$ق^{(٤)}(س) = ٦س \leftarrow ق^{(٤)}(١) = ٦$

② اذا كان: $ق(س) = \frac{س+٣}{س-١}$ جد $ق''(-٢)$

الحل:

$ق'(س) = \frac{(س-١)\times١ - (س+٣)\times١}{(س-١)^٢}$

$ق'(س) = \frac{-٤}{(س-١)^٢}$

$ق''(س) = \frac{٤\times٢(س-١)}{(س-١)^٤} = \frac{٨}{(س-١)^٣}$

$\therefore ق''(-٢) = -\frac{٨}{٢٧}$

③ اذا كان $ق(س) = \frac{١}{٦}س^ن$ ، $ق^{(٤)}(س) = أس^٣$ جد قيمة أ ، ن

الحل:

$ق'(س) = \frac{١}{٦}ن س^{ن-١}$ ، $ق''(س) = \frac{١}{٦}ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ق^{(٣)}(س) = \frac{١}{٦}ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$ق^{(٤)}(س) = \frac{١}{٦}ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)س^{ن-٤} = أس^٣$

$\therefore ن - ٤ = ٣ \leftarrow ن = ٧$ ، $أ = \frac{١}{\cancel{٦}}\times٧\times\cancel{٦}\times٥\times٤ = ١٤٠$

(٤) جد $ه^{(٤)}(٠)$ اذا كان:

$$ه(س) = \begin{cases} ١ - س^٣ ، & س < ٠ \\ س^٣ + ١ ، & س \geq ٠ \end{cases}$$

ه(س) متصل عند س = ٠

$$ه'(س) = \begin{cases} -٣س^٢ ، & س < ٠ \\ ٣س^٢ ، & س > ٠ \end{cases}$$

$ه'_-(٠) = ٠$ ، $ه'_+(٠) = ٠$ ، $\therefore ه'(٠) = ٠$

$$ه''(س) = \begin{cases} -٦س ، & س < ٠ \\ ٦س ، & س > ٠ \end{cases}$$

$ه''_-(٠) = ٠$ ، $ه''_+(٠) = ٠$ ، $\therefore ه''(٠) = ٠$

$$ه'''(س) = \begin{cases} -٦ ، & س < ٠ \\ ٦ ، & س > ٠ \end{cases}$$

$ه'''_-(٠) = -٦$ ، $ه'''_+(٠) = ٦$

$\therefore ه'''(٠)$ غير موجودة

$\therefore ه^{(٤)}(٠)$ غير موجودة .

(٥) اذا كان ص = قتا س جد $\left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{س=\frac{\pi}{٦}}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = -$ قتا س ظتا س .

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = -$قتا س × $-$قتا² س + ظتا س × قتا س ظتا س

= قتا³ س + قتا س ظتا² س

$\left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{س=\frac{\pi}{٦}} = (٢)^٣ + ٢ \times ٣ = ١٤$

(٦) اذا كان ص = ظا² س

جد: $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

الحل:

$\frac{دص}{دس}$ = ٢ ظا س × قا² س .

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ٢ ظا س × ٢ قا س × قا س ظا س + قا² س × ٢ قا² س

= ٤ ظا² س قا² س + ٢ قا⁴ س

$\left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}} = ٤ \times ١ \times ٢ + ٢ \times ٤$

$= ٨ + ٨ = ١٦$

تدريب:

١) اذا كان ص = $(س^٣ + ١)^٣$ فجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما س = -٢

٢) اذا كان ص = جا³ س فجد $\left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{س=\frac{\pi}{٦}}$

٣) ص = س جتا س جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما س = π

(٧) اذا كان ه(س) = $س^٣ - ٣$

ق(١) = -٣ ، ق'(١) = ٢ ، ق''(١) = ٤

جد: | ه'(س) = ٣س² ، ه''(س) = ٦س

١) $(ه' \times ق)'(١)$

= ه''(١) ق(١) + ه'(١) × ق'(١)

= ٣ × ٢ + -٣ × ٦ = -١٢

٢) $\left(\frac{ه'}{ق'}\right)'(١)$

$= \frac{ق'(١) ه''(١) - ه'(١) ق''(١)}{(ق'(١))^٢} = \frac{٢ \times ٦ - ٣ \times ٤}{٤} = ٠$

٣) $(ه' \circ ق)'(١)$

= ه''(ق(١)) × ق'(١) = ه''(-٣) × ق'(١)

= -١٨ × ٢ = -٣٦

٤) $\left(\frac{٦}{ق}\right)''(١)$

الحل:

$\left(\frac{٦}{ق(س)}\right)' = \frac{-٦ \times ق'(س)}{(ق(س))^٢}$

$\left(\frac{٦}{ق}\right)''(١) = \frac{(ق(١))^٢ \times -٦ق''(١) + ٦ق'(١) \times ٢ق(١)ق'(١)}{(ق(١))^٤}$

$= \frac{٩ \times -٦ \times ٤ + ١٢ \times ٤ \times -٣}{(-٣)^٤} = -\frac{٤٠}{٩}$

٥) $(ه \circ ق)''(١)$

$(ه \circ ق)'(س)$ = ه'(ق(س)) × ق'(س)

$(ه \circ ق)''(١)$ = ه'(ق(١)) × ق''(١) + ق'(١) × ه''(ق(١)) × ق'(١)

= ٢٧ × ٤ + ٢ × -١٨ × ٢ = ٣٦

⑦ اذا كان : $د(س^٣) = س^٢ + ٨س$

جد $د''(٨)$

الحل :

$٣س^٢ \, د'(س^٣) = ٢س + ٨$ | $س^٣ = ٨$ ، $س = ٢$

$١٢ \, د'(٨) = ١٢ \longrightarrow د'(٨) = ١$

نشتق مرة أخرى :

$٣س^٢ \times د''(س^٣) \times ٣س^٢ + د'(س^٣) \times ٦س = ٢$

$١٤٤ \, د''(٨) + د'(٨) \times ١٢ = ٢$

$١٤٤ \, د''(٨) + ١٢ = ٢ \longrightarrow د''(٨) = \frac{-٥}{٧٢}$

---

⑧ اذا كان :

$س - جاص = \frac{١}{٢}$ جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عند النقطة $(١ ، \frac{\pi}{٦})$

الحل :

$١ - ص' \, جتاص = صفر$

$ص' = \frac{١}{جتاص} = قاص$

عند $(١ ، \frac{\pi}{٦}) \longrightarrow ص' = قا\frac{\pi}{٦} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

نشتق مرة أخرى :

$ص'' = ص' \, قاص \, ظاص$

عند $(١ ، \frac{\pi}{٦})$

$ص'' = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$= \frac{٤}{٣\sqrt{٣}}$

---

⑧ اذا كان :

$ص = ٢ن^٤ + ١$ ، $س = ٢ن - ١$

جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما $ن = -١$

الحل :

$\frac{دص}{دن} = ٨ن^٣$ ، $\frac{دس}{دن} = ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= ٨ن^٣ \times \frac{١}{٢} = ٤ن^٣$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ١٢ن^٢ \times \frac{دن}{دس} = ١٢ \times \frac{١}{٢} \times ١ = ٦$

تدريب :

$ص = ن^٣ - ٤ن$ ، $س = ن^٢ + ن$

جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما $ن = ١$

---

⑨ اذا كان :

$ص = جا٢ن$ ، $س = جتا٢ن$

جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٤}$

الحل :

$\frac{دص}{دن} = ٢جتا٢ن$ ، $\frac{دس}{دن} = -٢جا٢ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= ٢جتا٢ن \times \frac{١}{-٢جا٢ن}$

$\frac{دص}{دس} = -ظتا٢ن$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٢ \times \frac{دن}{دس} \times قتا^٢٢ن$

$= ٢ \times \frac{١}{-٢جا٢ن} \times قتا^٢٢ن$

$= -١ \times ١ \times ١ = -١$

---

⑩ اذا كان :

$ص = قان$ ، $س = ظان$

فأثبت أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = جتا^٣ن$

الحل :

$\frac{دص}{دن} = قان \, ظان$ ، $\frac{دس}{دن} = قا^٢ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= قان \, ظان \times \frac{١}{قا^٢ن} = \frac{ظان}{قان}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{جان}{\cancel{جتان}} \times \cancel{جتان}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = جتان \times \frac{دن}{دس} = جتان \times \frac{١}{قا^٢ن}$

$= جتا^٢ن \times جتان = جتا^٣ن$

---

⑪ اذا كان :

$\frac{دس}{دص} = ص^٢$ ، جد ١) $\left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{ص=٢}$

٢) $\left.\frac{د^٢س}{دص^٢}\right|_{ص=٢}$

الحل :

١) $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{ص^٢}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{-١ \times ٢ص \frac{دص}{دس}}{ص^٤} = \frac{-٢ \times \frac{١}{ص^٢}}{ص^٣}$

$= -٢ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٨} = \frac{-١}{١٦}$

٢) $\frac{د^٢س}{دص^٢} = ٢ص$

$= ٢ \times ٢ = ٤$

تمرين [٩]

① اذا كان: $ص = \sqrt{٢س^{٢}+١}$

جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عندما $س = ٢$

② اذا كان: $د(س) = (س^{٢}+٣س)\,|س|$ جد $د^{(٣)}(-٢)$

③ اذا كان:

$د(س) = س^{ن}$ ، ن عدد طبيعي

$د'''(س) = ٢١٠\,س^{ن-٣}$ فما قيمة ن ؟

④ اذا كان:

$د(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣}$ ، $هـ(١) = -٣$

$هـ'(١) = ٢$ ، $هـ''(١) = -١$

جد: أ) $(د \times هـ)''(١)$

ب) $(هـ^{٣})''(١)$

جـ) $(د' \circ هـ)''(١)$

⑤ اذا كان: $ص = س^{ن}$

جد قيم ن اذا كان:

$س^{٢}ص'' + ٤س\,ص' - ١٨ص = ٠$

⑥ اذا كان: $ص = \frac{ع^{٢}}{ع^{٢}+١}$

$ع = \sqrt{٢س+١}$ جد $\left.\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right|_{س=٠}$

⑦ اذا كان: $د(س) = جا\,هـ(س)$

$هـ(١) = \frac{\pi}{٣}$ ، $هـ'(١) = ٠$ ، $هـ''(١) = ٣$

جد $د''(١)$

⑧ اذا كان:

$س^{٣} + ص^{٣} - ٤س\,ص = ٦٤$

جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عند النقطة (٤،٠)

⑨ اذا كان:

$ص = -٨\,قتا\,ن$ ، $س = ٢\,جا\,ن$

جد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٣}$

⑩ اذا كان:

$$د(س) = \begin{cases} س^{٣} - أ & ، س \le ١ \\ جـ س^{٢} + ب س & ، س > ١ \end{cases}$$

$د''(١)$ موجودة .

جد قيم: أ، ب، جـ

⑪ اذا كان:

$ص = ن^{٣} + ٢ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٤ن$

جد $\left.\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right|_{ن=١}$

⑫ اذا كان:

$ص = جتا^{٢}\,٢ن$ ، $س = جا^{٢}ن$

بيّن أن $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٨$

⑬ أثبت أن:

$\frac{د}{دس}\left(ل(س)\,هـ'(س) - ل'(س)\,هـ(س)\right)$

$= ل(س)\,هـ''(س) - ل''(س)\,هـ(س)$

⑭ اذا كان: $هـ(س) = ل(س) \times م(س)$

$ل'(س) \times م'(س) = جـ$ ، جـ ثابت

أثبت أن: $هـ''(س) = ل(س)\,م''(س) + م(س)\,ل''(س)$

أسئلة الإثبات

1) نشتق حسب قواعد الاشتقاق
2) نستعين بالعلاقات الأصلية أو المتطابقات للتوصل الى المطلوب .

① اذا كان :
$\text{ص} = (\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}}$ ، ن : عدد صحيح موجب

أثبت أن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن ص قاس}$

البرهان :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}\,(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-1}\,(\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س})$

$= \text{ن}\,(\text{قاس}+\text{ظاس})^{\text{ن}-1} \times \text{قاس}\,(\text{قاس}+\text{ظاس})$

$= \text{ن قاس}\,(\text{قاس}+\text{ظاس})^{\text{ن}-\cancel{1}+\cancel{1}}$

$= \text{ن قاس} \times \text{ص}$.

② اذا كان :
$\text{ص} = 2\,\text{جتا}3\text{ن}$ ، $\text{س} = \text{جا}^2 3\text{ن}$

أثبت أن $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = \frac{1}{1-\text{س}}$

البرهان :

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -6\,\text{جا}3\text{ن}$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2\,\text{جا}3\text{ن جتا}3\text{ن} \times 3$
$= 6\,\text{جا}3\text{ن جتا}3\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= -6\,\cancel{\text{جا}3\text{ن}} \times \frac{1}{\cancel{6\,\text{جا}3\text{ن}}\,\text{جتا}3\text{ن}} = \frac{-1}{\text{جتا}3\text{ن}}$

$\therefore \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = \frac{1}{\text{جتا}^2 3\text{ن}} = \frac{1}{1-\text{جا}^2 3\text{ن}} = \frac{1}{1-\text{س}}$

③ اذا كان : $\text{ص}^2 = \frac{\text{س}}{1+\text{س}}$ ، $\text{س} \neq -1$

أثبت أن : $\text{ص}' = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

البرهان :

$2\text{ص ص}' = \frac{\cancel{1+\text{س}} - \cancel{\text{س}}}{(1+\text{س})^2} \leftarrow \text{ص}' = \frac{1}{2\text{ص}(1+\text{س})^2}$

لكن $1+\text{س} = \frac{\text{س}}{\text{ص}^2}$ (من العلاقة الأصلية)

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{2\text{ص} \times \frac{\text{س}^2}{\text{ص}^4}} = \frac{1}{2 \times \frac{\text{س}^2}{\text{ص}^3}} = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

④ اذا كان :
$\text{س} = \text{جاص}$ ، $|\text{س}| < 1$
$0 < \text{ص} < \frac{\pi}{2}$

أثبت أن :
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$

البرهان :

$1 = \text{ص}'\,\text{جتاص}$

$\text{ص}' = \frac{1}{\text{جتاص}}$ لكن $\text{جتا}^2\text{ص} = 1 - \text{جا}^2\text{ص}$

$\text{جتا}^2\text{ص} = 1 - \text{س}^2$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}} \longleftarrow \text{جتاص} = \sqrt{1-\text{س}^2}$

⑤ اذا كان :
$\text{ص} = \text{ظا}(\text{س ص})$

أثبت أن : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص} + \text{ص}^3}{1 - \text{س}(1+\text{ص}^2)}$

البرهان :

$\text{ص}' = (\text{س ص}' + \text{ص})\,\text{قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}' = \text{س ص}'\,\text{قا}^2(\text{س ص}) + \text{ص قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}' - \text{س ص}'\,\text{قا}^2(\text{س ص}) = \text{ص قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}'\left(1 - \text{س قا}^2(\text{س ص})\right) = \text{ص قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}' = \frac{\text{ص قا}^2(\text{س ص})}{1 - \text{س قا}^2(\text{س ص})}$ لكن $\text{ص}^2 = \text{ظا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}^2 = \text{قا}^2(\text{س ص}) - 1$

$\text{قا}^2(\text{س ص}) = \text{ص}^2 + 1 \longleftarrow$

$\text{ص}' = \frac{\text{ص}(\text{ص}^2+1)}{1 - \text{س}(\text{ص}^2+1)}$

⑥ اذا كان :
$\text{ص} = \text{س ظاس}$.

أثبت أن : $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(1+\text{ص})$

البرهان :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{قا}^2\text{س} + \text{ظاس}$

$= \text{س}\,(\text{قاس})^2 + \text{ظاس}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{س} \times 2\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} + (\text{قاس})^2 + \text{قا}^2\text{س}$

$= 2\text{س قا}^2\text{س ظاس} + 2\,\text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{س ظاس} + 1) = 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{ص}+1)$

تدريب : $\text{س ص} = (\text{س}+\text{ص})^4$ أثبت أن $\text{ص}' = \frac{\text{ص}(3\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - 3\text{ص})}$

(٧) إذا كان:

ص = جاس − $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س

أثبت أن: ص'' + ٩ص = ٦ جاس

البرهان:

ص' = جتاس − جا^{٢}س × جتاس

= جتاس (١ − جا^{٢}س) = جتا^{٣}س

ص'' = ٣ جتا^{٢}س × −جاس

= −٣ جتا^{٢}س جاس

∴ ص'' + ٩ص = −٣ جتا^{٢}س جاس + ٩ جاس − ٣ جا^{٣}س

= ٣ جاس (−جتا^{٢}س + ٣ − جا^{٢}س)

= ٣ جاس (−١ + ٣) = ٦ جاس

(٨) إذا كانت:

س^{٢} + ص^{٢} = ١

أثبت أن: ص^{٣} ص'' + ١ = صفر

البرهان:

~~٢س + ٢ص ص'~~ = ٠ ÷ ٢

س + ص ص' = ٠

١ + ص ص'' + ص' × ص' = ٠

١ + ص ص'' + ص'^{٢} = ٠ لكن ص' = $\frac{-س}{ص}$

ص ص'' = −ص'^{٢} − ١

ص ص'' = −$\frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$ − ١ × ص^{٢}

ص^{٣} ص'' = −س^{٢} − ص^{٢} = −(س^{٢} + ص^{٢})

ص^{٣} ص'' = −١ ⟵ ص^{٣} ص'' + ١ = ٠

(٩) إذا كان: جاص = ظاس أثبت أن:

ظاص = $\frac{ص''}{٢ قا^{٢}س + ص'^{٢}}$

البرهان:

ص' جتاص = قا^{٢}س

ص' × −جاص ص' + ص'' جتاص = ٢ قاس × قاس ظاس

−ص'^{٢} جاص + ص'' جتاص = ٢ قا^{٢}س ظاس ÷ جاص

−ص'^{٢} + ص'' ظتاص = ٢ قا^{٢}س

ص'' ظتاص = ٢ قا^{٢}س + ص'^{٢}

∴ ظتاص = $\frac{٢ قا^{٢}س + ص'^{٢}}{ص''}$ ⟵ ظاص = $\frac{ص''}{٢ قا^{٢}س + ص'^{٢}}$

(١٠) إذا كان:

ص − س = جتاص

أثبت أن: ص'^{٢} = −ص'' (قاص + ظاص)

البرهان:

ص' − ١ = −ص' جاص

ص'' = −ص' × ص' جتاص + جاص × −ص''

ص'' = −ص'^{٢} جتاص − ص'' جاص

ص'' (١ + جاص) = −ص'^{٢} جتاص ÷ جتاص

ص'' ($\frac{١}{جتاص}$ + $\frac{جاص}{جتاص}$) = −ص'^{٢}

ص'' (قاص + ظاص) = −ص'^{٢}

(١١) إذا كان:

جاص = ٢ جاس

أثبت أن: ص'^{٢} − ص'' ظتاص = ١

البرهان:

ص' جتاص = ٢ جتاس

ص' × −ص' جاص + جتاص × ص'' = −٢ جاس

−ص'^{٢} جاص + ص'' جتاص = −٢ جاس

لكن ٢ جاس = جاص

−ص'^{٢} جاص + ص'' جتاص = −جاص ÷ جاص

−ص'^{٢} + ص'' ظتاص = −١ × −

ص'^{٢} − ص'' ظتاص = ١

(١٢) إذا كان:

س = ظتا ٢ص

أثبت أن: ص'' = −ص' جا ٤ص

البرهان:

١ = −٢ ص' قتا^{٢} ٢ص

ص' = $\frac{-١}{٢ قتا^{٢} ٢ص}$ = −$\frac{١}{٢}$ جا^{٢} ٢ص

ص'' = −٢ ص' جا٢ص جتا٢ص

= −ص' جا ٤ص

(١٣) اذا كان :

ص = جاس / س ، س ≠ ٠

أثبت أن : س ص'' + ٢ص' + س ص = ٠

البرهان : نحول العلاقة الى ضمنية بالضرب التبادلي .

س ص = جاس

س ص' + ص = جتاس

س ص'' + ص' + ص' = −جاس

س ص'' + ٢ص' = −س ص   (جاس = س ص)

س ص'' + ٢ص' + س ص = ٠ .

(١٤) اذا كان : ص = √(٣جاس + ٤)

أثبت أن : ٢ص ص'' + ٢ص'² + ص² = ٤

البرهان :

نحول العلاقة الى ضمنية بتربيع الطرفين

ص² = ٣جاس + ٤

٢ص ص' = ٣جتاس

٢ص × ص'' + ص' × ٢ص' = −٣جاس

٢ص ص'' + ٢ص'² = ٤ − ص²

٢ص ص'' + ٢ص'² + ص² = ٤

تدريب :

١) اذا كان ص = √(١ + جا²س)

أثبت أن : ص ص'' + (ص')² + ٢ص² = ٣

٢) اذا كان ص = √(س + ص)

أثبت أن : ص'' = −٢(ص')³

٣) ص − س ص = جاس

أثبت أن ص'' + ص = ٢ص' / (١ − س)

٤) جاص = قاس

أثبت أن ص'' ظتاص − ص'² + ١ = ٢جاص

تمرين [١٠]

(١) اذا كان : ص = ⅓ ظا³س + ظاس

أثبت أن : دص/دس = قا⁴س

(٢) اذا كان : ص = جا⁴س + جتا⁴س

أثبت أن دص/دس = −جا٤س

(٣) اذا كان : (ص+١)² = س ص

أثبت أن : دص/دس = ص² / (ص² − ١)

(٤) اذا كان : س = √(١ + قتاص) ، ٠ < ص < π/٢

أثبت أن : دص/دس = −٢ / √(٢ − س²)

(٥) اذا كان : ص = ظا²س

أثبت أن : ص'' = ٢(ص+١)(٣ص+١)

(٦) اذا كان : ص = جاس + جتاس

أثبت أن : ص ص'' + ١ = −جا٢س

(٧) اذا كان ص = ⅓ قا³س

أثبت أن : ص'' + ٩ص = ٤ قا⁵س

(٨) اذا كان س = جاص .

أثبت أن : ص'' = ظاص + ظا³ص

(٩) اذا كان : ص² + ٣س² − ٢س = ٠ .

أثبت أن : ص ص'' + ص'² + ٣ = ٠ .

(١٠) اذا كان ص = (جاس + جتاس)⁴

أثبت أن : ص'' + ٤ص = ١٢ جتا²٢س

(١١) ص = (قاس + ظاس)³ أثبت أن ص'' = ص' (٣قاس + ظاس)

نهايات خاصة

① $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(\text{س}+\text{ه}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ه}} = \text{د}'(\text{س})$

② $\lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{د}'(\text{س})$

③ $\lim\limits_{\text{س}\to \text{أ}} \dfrac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \text{د}'(\text{أ})$

① اذا كان : $\text{د}'(\text{س}) = \text{س}^3 + 2$ ، جد :

١) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(1+\text{ه}) - \text{د}(1)}{3\text{ه}} = \frac{1}{3} \times \text{د}'(1)$

$= \frac{1}{3} \times 3 = 1$

٢) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{5\text{ه}}{\text{د}(2+\text{ه}) - \text{د}(2)} = 5 \times \dfrac{1}{\text{د}'(2)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

٣) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(1+3\text{ه}) - \text{د}(1)}{2\text{ه}}$

نفرض $\text{و} = 3\text{ه}$

$\text{ه} = \frac{1}{3}\text{و}$

$\text{ه} \to 0$

$\text{و} \to 0$

$= \lim\limits_{\text{و}\to 0} \dfrac{\text{د}(1+\text{و}) - \text{د}(1)}{2 \times \frac{1}{3}\text{و}}$

$= \frac{3}{2} \times \text{د}'(1) = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$

٤) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(2+5\text{ه}) - \text{د}(2-\text{ه})}{4\text{ه}}$

$= \lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(2+5\text{ه}) - \text{د}(2)}{4\text{ه}} + \lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(2) - \text{د}(2-\text{ه})}{4\text{ه}}$

$\text{و} = 5\text{ه}$ ، $\text{و} = -\text{ه}$

$= \lim\limits_{\text{و}\to 0} \dfrac{\text{د}(2+\text{و}) - \text{د}(2)}{4 \times \frac{1}{5}\text{و}} + \lim\limits_{\text{و}\to 0} \dfrac{-(\text{د}(2+\text{و}) - \text{د}(2))}{-4\text{و}}$

$= \frac{5}{4}\text{د}'(2) + \frac{1}{4}\text{د}'(2) = \frac{3}{2}\text{د}'(2) = 15$

⑤ اذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^2 - 2\text{س}$

$\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(3+5\text{ه}) - \text{د}(3)}{2\text{ه}} = 25$ جد قيمة أ

الحل :

$\frac{5}{2}\text{د}'(3) = 25$

$\text{د}'(\text{س}) = 2\text{أ}\text{س} - 2$

$\text{د}'(3) = 6\text{أ} - 2$

$\text{د}'(3) = 10 \Leftarrow 6\text{أ} - 2 = 10 \Leftarrow \text{أ} = 2$

تدريب :

اذا كان $\text{د}'(2) = 3$ ، $\text{د}''(2) = 4$

$\text{د}(2) = 1$

جد :

١) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}(2) - \text{د}(2-3\text{ه})}{\text{ه}}$

٢) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}'(2+\text{ه}) - \text{د}'(2)}{\text{د}(2) - \text{د}(2+\text{ه})}$

٣) $\lim\limits_{\text{ه}\to 0} \dfrac{\text{د}^2(2+\text{ه}) - \text{د}^2(2)}{3\text{ه}}$

④ أثبت أن :

$\lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{ع}\,\text{د}(\text{س}) - \text{س}\,\text{د}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{د}(\text{س}) - \text{س}\,\text{د}'(\text{س})$

البرهان

$= \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{ع}\,\text{د}(\text{س}) - \text{س}\,\text{د}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{س}\,\text{د}(\text{س}) - \text{س}\,\text{د}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{د}(\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{س}\,(\text{د}(\text{س}) - \text{د}(\text{ع}))}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{د}(\text{س}) + \text{س} \times -\text{د}'(\text{س})$

⑤ اذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 + \text{د}(\text{س})}$

جد $\text{هـ}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

$\text{هـ}'(\text{س}) = \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\sqrt{\text{ع}^2+\text{د}(\text{ع})} - \sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}}{\text{ع} - \text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ع}^2+\text{د}(\text{ع})} + \sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}}{\sqrt{\text{ع}^2+\text{د}(\text{ع})} + \sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}}$

$= \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{ع}^2 + \text{د}(\text{ع}) - \text{س}^2 - \text{د}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}}$

$= \left(\lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim\limits_{\text{ع}\to \text{س}} \dfrac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} \right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}}$

$= \left(2\text{س} + \text{د}'(\text{س})\right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}} = \dfrac{2\text{س} + \text{د}'(\text{س})}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{د}(\text{س})}}$

⑥ اذا كان:

$\text{ر}'(١) = -٦$ ، $\text{ق}'(١) = ٤$ ، $\text{ق}'(٣) = ٨$ ، $\text{ر}(١) = ٤$

جد النهايات التالية:

١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(١) - \text{ر}(س)}{س - ١} = -\text{ر}'(١) = ٦$

---

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{س^٢ + ٣س - ٤} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{(س-١)(س+٤)}$

$= \text{ر}'(١) \times \dfrac{١}{٥} = -\dfrac{٦}{٥}$

---

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{س - ١}}{\frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}}$

$= \dfrac{\text{ر}'(١)}{\text{ق}'(١)} = -\dfrac{٦}{٤} = -\dfrac{٣}{٢}$

---

٤) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - ٤س}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - ٤}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - ٤س}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\cancel{(١-س)}^{-١}}{\cancel{س-١}}$

$= \text{ر}'(١) - ٤ = -١٠$

---

٥) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س\,\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س\,\text{ر}(س) - \text{ر}(س)}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س)\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}} + \text{ر}'(١) = \text{ر}(١) + \text{ر}'(١)$

$= ٤ - ٦ = -٢$

---

٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{\sqrt{س+٣} - ٢} \times \dfrac{\sqrt{س+٣} + ٢}{\sqrt{س+٣} + ٢}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س) - \text{ر}(١)}{س + ٣ - ٤} \times ٤$

$= \text{ر}'(١) \times ٤ = -٦ \times ٤ = -٢٤$

---

٧) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(س^٢ + ١) - \text{ر}(٢)}{س - ١}$

تمارين (١١)

① اذا كان $\text{ق}'(٤) = ٢$ ، $\text{ر}(٤) = ٣$

جد:

١) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(٤ + هـ) - \text{ر}(٤)}{هـ^٢ + ٣هـ}$

٢) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢ - س - ١٢}{\text{ر}(س) - \text{ر}(٤)}$

٣) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(٤) - \text{ر}(٤ - ٢هـ)}{٣هـ}$

٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ر}(\frac{٨}{س}) - \text{ر}(٤)}{س - ٢}$

③ اذا كان $\text{ر}(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(س + ٢هـ) - \text{جاس}}{٣هـ}$

جد $\text{ق}'(\pi)$

④ اذا كان $\text{هـ}(س) = \dfrac{١}{٣ + ٢\text{ر}(س)}$

جد $\text{هـ}'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑤ اثبت أن:

$\underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{ع\,\text{ر}(ع) - س\,\text{ر}(س)}{ع - س} = \text{ر}(س) + س\,\text{ق}'(س)$

⑥ اذا كان $\text{ق}'(٣) = ١$ ، $\text{ر}(٣) = ٢$

جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^٢\,\text{ر}(س) - ١٨}{س - ٣}$

⑦ اذا كان $\text{ر}(س + هـ) = \text{ر}(س) \times \text{ر}(هـ)$

$\text{ق}'(٠) = \text{ر}(٠) = ١$

أثبت باستخدام تعريف المشتقة أن $\text{ق}'(س) = \text{ر}(س)$

نظرية (١) :

اذا كان الاقتران $ق(س)$ قابلا للاشتقاق عند $س = س_1$ فأثبت أنه يكون متصلا عند $س = س_1$

المعطيات : $ق'(س_1)$ موجودة .

المطلوب : اثبات أن : $ق(س_1) = \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س)$

البرهان :

$ق(س) - ق(س_1) = ق(س) - ق(س_1)$ (متطابقة)

بقسمة وضرب الطرف الأيسر بـ $(س - س_1)$

$\therefore ق(س) - ق(س_1) = \dfrac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times (س - س_1)$

نأخذ نهاية للطرفين

$\underset{س \to س_1}{\text{نهـا}} \left(ق(س) - ق(س_1)\right) = \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}} (س - س_1)$

$\underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س) - ق(س_1) = ق'(س_1) \times \text{صفر} = \text{صفر}$

$\therefore \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س) = ق(س_1)$

$\therefore ق(س)$ متصل عند $س = س_1$

نظرية (٢) :

اذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، ن : عدد صحيح موجب

فأثبت أن : $ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

البرهان : باستخدام تعريف المشتقة .

$ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(ع - س)}(ع^{ن-1} + ع^{ن-2}س + ع^{ن-3}س^2 + \cdots + س^{ن-1})}{\cancel{ع - س}}$

$= س^{ن-1} + س^{ن-2} \times س + س^{ن-3} \times س^2 + \cdots + س^{ن-1}$

$= \underbrace{س^{ن-1} + س^{ن-1} + س^{ن-1} + \cdots + س^{ن-1}}_{\text{ن من المرات}}$

$\therefore ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

نظرية (٣) :

اذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، ن : عدد صحيح سالب

فأثبت أن : $ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

البرهان :

نفرض $ن = -م$ ، م : عدد صحيح موجب

$ق(س) = س^{-م} = \dfrac{1}{س^{م}}$

$\therefore ق'(س) = \dfrac{-1 \times م\, س^{م-1}}{(س^{م})^2} = -م\, س^{م-1} \times س^{-2م}$

$= -م\, س^{-م-1}$ لكن $-م = ن$

$\therefore ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

نظرية (٤) :

اذا كان $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي

فأثبت أن $\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{م}{ن}\, س^{\frac{م}{ن} - 1}$

البرهان :

نرفع الطرفين للأس ن

$ص^{ن} = (س^{\frac{م}{ن}})^{ن} \longrightarrow ص^{ن} = س^{م}$

$ن\, ص^{ن-1} \times ص' = م\, س^{م-1}$

$\therefore ص' = \dfrac{م}{ن} \times \dfrac{س^{م-1}}{ص^{ن-1}}$ لكن $ص = س^{\frac{م}{ن}}$

$ص' = \dfrac{م}{ن} \times \dfrac{س^{م-1}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-1}} = \dfrac{م}{ن} \times \dfrac{س^{م-1}}{س^{م - \frac{م}{ن}}}$

$= \dfrac{م}{ن} \times س^{م-1} \times س^{-م + \frac{م}{ن}}$

$= \dfrac{م}{ن}\, س^{\cancel{م} - 1 + \frac{م}{ن} \cancel{- م}} = \dfrac{م}{ن}\, س^{\frac{م}{ن} - 1}$

نظرية (٥)

اذا كان $ص = (هـ(س))^{ن}$ فاثبت أن $ص' = ن\,(هـ(س))^{ن-1}\, هـ'(س)$

البرهان :

نفرض $ع = هـ(س)$ ، $ص = ع^{ن}$ ثم نشتق

$\therefore \dfrac{دع}{دس} = هـ'(س)$ $\qquad \dfrac{دص}{دع} = ن\, ع^{ن-1}$

$\therefore \dfrac{دص}{دس} = \dfrac{دص}{دع} \times \dfrac{دع}{دس}$

$= ن\, ع^{ن-1} \times هـ'(س)$

$= ن\,(هـ(س))^{ن-1} \times هـ'(س)$

حل التمارين

تمرين ①

1) $\frac{Δص}{Δس} = \frac{د(٥) - د(١)}{٤} = \frac{٢٥ + ٢ه(٥) - ١ - ه(١)}{٤}$

$= \frac{٢٤ + ١٠ - ٢}{٤} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

2) $-\frac{١}{٣} = \frac{د(٦) - د(م)}{٦ - م}$

$-\frac{١}{٣} = \frac{\frac{٢}{٣} - \frac{٤}{م}}{٦ - م} \leftarrow -\frac{١}{٣} = \frac{٢م - ١٢}{٣م(٦ - م)}$

$-\frac{١}{٣} = \frac{٢\cancel{(م - ٦)}^{-١}}{٣م\cancel{(٦ - م)}} \leftarrow \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣م} \leftarrow م = ٢$

3) د(س)

$٥ = \frac{د(٤) - د(٢)}{٢} \leftarrow د(٤) - د(٢) = ١٠$

ه(س)

$\frac{Δص}{Δس} = \frac{ه(٤) - ه(٢)}{٢} = \frac{\frac{١٢}{د(٤)} - \frac{١٢}{د(٢)}}{٢}$

$= \frac{\cancel{١٢}^{٦}(د(٢) - د(٤))}{\cancel{٢}د(٤)د(٢)} = \frac{٦ \times -١٠}{١٥} = -٤$

4) $٣ = \frac{د(١) - د(١ + ل)}{١ - (١ + ل)}$

$٣ = \frac{٧ - (١ + ل)^٢}{-ل}$ ل سالبة لأن س زادت

$-٣ل = ٧ - (١ + ٢ل + ل^٢)$

$-٣ل = ٦ - ٢ل - ل^٢ \leftarrow ل^٢ - ل - ٦ = ٠$

$(ل - ٣)(ل + ٢) = ٠ \leftarrow ل = ٣$ ✗ ، $\boxed{ل = -٢}$

5) ميل القاطع $= \frac{Δص}{Δس}$

$Δس = ٣ - ١ = ٢$

$Δص = (٣)^٢ - ٥ \times ٢$

$= ٤ - ١٠ = -٦$

∴ ميل القاطع $= \frac{-٦}{٢} = -٣$

6) د(س) في $[-١ ، ٥]$

$٤ = \frac{د(٥) - د(-١)}{٦} \leftarrow د(٥) - د(-١) = ٢٤$

ه(س) في $[-٢ ، ١]$

$\frac{Δص}{Δس} = \frac{ه(١) - ه(-٢)}{٣} = \frac{١ - د(٥) - ٤ + د(-١)}{٣}$

$= \frac{-٣ - ٢٤}{٣} = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

7) د(س)

$Δص = د(٥) - د(١)$

∴ $د(٥) - د(١) = ٨$

ه(س)

$\frac{Δص}{Δس} = \frac{ه(٥) - ه(١)}{٤}$

$= \frac{-٢٠ - ٣د(٥) + ٧ - (-٤ - ٣د(١) + ٧)}{٤}$

$= \frac{-١٦ - ٣د(٥) + ٣د(١)}{٤}$

$= \frac{-١٦ - ٣(د(٥) - د(١))}{٤} = \frac{-١٦ - ٣ \times ٨}{٤}$

$= \frac{-٨}{٤} = -٢$

8) د(س)

$٤ = \frac{د(٢) - د(-١)}{٣} \leftarrow د(٢) - د(-١) = ١٢$ ①

ل(س)

$٢ = \frac{ل(٢) - ل(-١)}{٣} \leftarrow ٦ = ٤د(٢) + ٢د(-١)$ ÷ ٢

$٣ = ٢د(٢) + د(-١)$ ②

بجمع المعادلتين ← $٣د(٢) = ١٥$

$د(٢) = ٥$

∴ $٥ - د(-١) = ١٢$

∴ $د(-١) = -٧$

تمرين (٤)

١) $\bar{ق}(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{1}{ع^{2}} - \frac{1}{س^{2}}}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{2} - ع^{2}}{(ع - س)\, ع^{2} س^{2}} = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\overset{-1}{\cancel{(س - ع)}}(س + ع)}{\cancel{(ع - س)}\, ع^{2} س^{2}}$

$\therefore \bar{ق}(س) = \dfrac{-2س}{س^{4}} = \dfrac{-2}{س^{3}}$

٢) $\bar{ق}(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{2ع^{3}+1} - \sqrt{2س^{3}+1}}{ع - س} \times \dfrac{\sqrt{2ع^{3}+1} + \sqrt{2س^{3}+1}}{\sqrt{2ع^{3}+1} + \sqrt{2س^{3}+1}}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{2ع^{3} + \cancel{1} - 2س^{3} - \cancel{1}}{ع - س} \times \dfrac{1}{2\sqrt{2س^{3}+1}}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{2\cancel{(ع - س)}(ع^{2} + ع س + س^{2})}{\cancel{ع - س}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{2س^{3}+1}}$

$\therefore \bar{ق}(س) = \dfrac{6س^{2}}{2\sqrt{2س^{3}+1}} = \dfrac{3س^{2}}{\sqrt{2س^{3}+1}}$

٣) $\bar{ق}(1) = \underset{ع \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{ع^{2} + \sqrt[3]{ع} - 2}{ع - 1}$

$= \underset{ع \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{ع^{2} - 1}{ع - 1} + \underset{ع \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[3]{ع} - 2 + 1}{ع - 1}$

$= \underset{ع \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(ع - 1)}(ع + 1)}{\cancel{ع - 1}} + \underset{ع \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[3]{ع} - 1}{ع - 1} \times \dfrac{\sqrt[3]{ع^{2}} + \sqrt[3]{ع} + 1}{\sqrt[3]{ع^{2}} + \sqrt[3]{ع} + 1}$

$\bar{ق}(1) = 2 + \underset{ع \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{ع - 1}}{\cancel{ع - 1}} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$

٤) $\bar{ق}(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{3\,\text{جا}ع - \text{جتا}2ع - 3\,\text{جا}س + \text{جتا}2س}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{3(\text{جا}ع - \text{جا}س)}{ع - س} + \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}2س - \text{جتا}2ع}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{6\,\text{جتا}\frac{1}{2}(ع + س)\,\text{جا}\frac{1}{2}(ع - س)}{ع - س} + \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{-2\,\text{جا}(س + ع)\,\text{جا}(س - ع)}{ع - س}$

$= 6\,\text{جتا}س \times \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{1}{2}ص}{ص} + -2\,\text{جا}2س \times \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}ص}{-ص}$

$ص = ع - س \qquad ص = س - ع$

$= 6\,\text{جتا}س \times \dfrac{1}{2} + 2\,\text{جا}2س \times 1 = 3\,\text{جتا}س + 2\,\text{جا}2س$

٥) $\bar{ق}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underset{ع \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{3 + \text{ظا}ع} - 2}{ع - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\sqrt{3 + \text{ظا}ع} + 2}{\sqrt{3 + \text{ظا}ع} + 2}$

$= \underset{ع \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{3 + \text{ظا}ع - 4}{ع - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{1}{4} = \underset{ع \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}ع - 1}{ع - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{1}{4}$

$= \underset{ع \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}ع - \text{ظا}\frac{\pi}{4}}{ع - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{1}{4} = \underset{ع \to \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}(ع - \frac{\pi}{4})(1 + \text{ظا}ع\,\text{ظا}\frac{\pi}{4})}{ع - \frac{\pi}{4}} \times \dfrac{1}{4}$

$ص = ع - \frac{\pi}{4}$

$= \underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}ص}{ص} \times (1 + 1 \times 1) \times \dfrac{1}{4}$

$= 1 \times 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

٦) $ق(س) = 1 + \sqrt{س^{3}}$

$\bar{ق}(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{1} + \sqrt{ع^{3}} - \cancel{1} - \sqrt{س^{3}}}{ع - س}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{ع^{3}} - \sqrt{س^{3}}}{ع - س} \times \dfrac{\sqrt{ع^{3}} + \sqrt{س^{3}}}{\sqrt{ع^{3}} + \sqrt{س^{3}}}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{ع^{3} - س^{3}}{ع - س} \times \dfrac{1}{2\sqrt{س^{3}}}$

$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(ع - س)}(ع^{2} + ع س + س^{2})}{\cancel{ع - س}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{س^{3}}} = \dfrac{3س^{2}}{2\sqrt{س^{3}}}$

٧) $\Delta ص = 2س^{2}هـ - \text{جا}5هـ$

$\bar{ق}(س) = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\Delta ص}{هـ} = \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2س^{2}هـ - \text{جا}5هـ}{هـ}$

$= \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2س^{2}\cancel{هـ}}{\cancel{هـ}} - \underset{هـ \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}5هـ}{هـ}$

$\therefore \bar{ق}(س) = 2س^{2} - 5 \Leftarrow \bar{ق}(2) = 3$

٨) $\bar{ق}(0) = \underset{ع \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{1}{1 + \text{جا}2ع} - 1}{ع}$

$= \underset{ع \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - 1 - \text{جا}2ع}{ع(1 + \text{جا}2ع)}$

$= \underset{ع \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}2ع}{ع(1 + \text{جا}2ع)} = \underset{ع \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}2ع}{ع} \times \dfrac{1}{1}$

$\bar{ق}(0) = -2$

(9) $$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\,\text{جتاع} - \text{س}^2\,\text{جتاس}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\,\text{جتاع} - \text{س}^2\,\text{جتاع}}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2\,\text{جتاع} - \text{س}^2\,\text{جتاس}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاع}(\text{ع}^2-\text{س}^2)}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2(\text{جتاع} - \text{جتاس})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاع}(\text{ع}+\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2 \times -2\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$\text{ص} = \text{ع}-\text{س}$

$$= 2\text{س}\,\text{جتاس} - 2\text{س}^2 \times \text{جاس} \times \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جا}\tfrac{1}{2}\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$= 2\text{س}\,\text{جتاس} - 2\text{س}^2\,\text{جاس} \times \tfrac{1}{2}$$

$$= 2\text{س}\,\text{جتاس} - \text{س}^2\,\text{جاس}$$

---

(10) $$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\text{ع}-1}} - \frac{1}{\sqrt{2\text{س}-1}}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{2\text{س}-1} - \sqrt{2\text{ع}-1}}{(\text{ع}-\text{س})\sqrt{2\text{ع}-1}\sqrt{2\text{س}-1}} \times \frac{\sqrt{2\text{س}-1} + \sqrt{2\text{ع}-1}}{\sqrt{2\text{س}-1} + \sqrt{2\text{ع}-1}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\text{س}-1-2\text{ع}+1}{(\text{ع}-\text{س})\sqrt{2\text{ع}-1}\sqrt{2\text{س}-1}} \times \frac{1}{2\sqrt{2\text{س}-1}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{2}\overset{-1}{\cancel{(\text{س}-\text{ع})}}}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\sqrt{2\text{ع}-1}\sqrt{2\text{س}-1}} \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\text{س}-1}} = \frac{-1}{(2\text{س}-1)\sqrt{2\text{س}-1}}$$

---

(11) $$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظتا}^2\text{ع} - \text{ظتا}^2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ظتاع} - \text{ظتاس})(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\left(\frac{1}{\text{ظاع}} - \frac{1}{\text{ظاس}}\right)(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ظاس} - \text{ظاع})(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{(\text{ع}-\text{س})\,\text{ظاع}\,\text{ظاس}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}(\text{س}-\text{ع})(1+\text{ظاس}\,\text{ظاع})(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{(\text{ع}-\text{س})\,\text{ظاع}\,\text{ظاس}}$$

$\text{ص} = \text{ع}-\text{س}$

$$= \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{ظا}-\text{ص}}{\text{ص}} \times \frac{(1+\text{ظا}^2\text{س})(2\,\text{ظتاس})}{\text{ظا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{-2\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظتاس}}{\text{ظا}^2\text{س}}$$

---

(12) $$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جاع}^2 - \text{جاس}^2}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\,\text{جتا}\tfrac{1}{2}(\text{ع}^2+\text{س}^2)\,\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ع}^2-\text{س}^2)}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= 2\,\text{جتاس}^2 \times \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})}{\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})}$$

$$= 2\,\text{جتاس}^2 \times \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})}{\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})} \times \text{س}$$

$\text{ص} = \tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})$

$$= 2\,\text{جتاس}^2 \times \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \times \text{س}$$

$$= (2\,\text{جتاس}^2) \times 1 \times \text{س} = 2\text{س}\,\text{جتاس}^2$$

---

(13) $$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^3 - 2\text{ع}^2 + 4\text{ع} + \cancel{7} - \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 4\text{س} - \cancel{7}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع}^3-\text{س}^3) + 2(\text{س}^2-\text{ع}^2) + 4(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}^2+\text{ع}\text{س}+\text{س}^2) + 2\overset{-1}{\cancel{(\text{س}-\text{ع})}}(\text{س}+\text{ع}) + 4\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 4\text{س} + 4$$

---

(14) $$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\sqrt{\text{ع}-2} - \text{س}^2\sqrt{\text{س}-2}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underbrace{\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\sqrt{\text{ع}-2} - \text{س}^2\sqrt{\text{ع}-2}}{\text{ع}-\text{س}}}_{(1)} + \underbrace{\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2\sqrt{\text{ع}-2} - \text{س}^2\sqrt{\text{س}-2}}{\text{ع}-\text{س}}}_{(2)}$$

(1) $$\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}-2}\,\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} = 2\text{س}\sqrt{\text{س}-2}$$

(2) $$\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2(\sqrt{\text{ع}-2} - \sqrt{\text{س}-2})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}-2} + \sqrt{\text{س}-2}}{\sqrt{\text{ع}-2} + \sqrt{\text{س}-2}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2(\text{ع}-\cancel{2}-\text{س}+\cancel{2})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}-2}}$$

$$= \frac{\text{س}^2}{2\sqrt{\text{س}-2}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}\sqrt{\text{س}-2} + \frac{\text{س}^2}{2\sqrt{\text{س}-2}}$$

تمرين ٣

أ) $ق'(س) = ٦س^{٢} + ٢س^{-٣}$

$= ٦س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}}$

$\therefore ق'(-١) = ٦ - ٢ = ٤$

ب) $ق'(س) = \frac{-٥ه'(س)}{(ه(س))^{٢}}$

$ق'(٣) = \frac{-٥ \times ٤}{٢٥} = \frac{-٤}{٥}$

$ق(٣) = \frac{٥}{ه(٣)}$

$١ = \frac{٥}{ه(٣)}$

$ه(٣) = ٥$

جـ) $ه(س) = (س^{٢} - ٣)\, ق(س)$

$ه'(س) = (س^{٢} - ٣)\, ق'(س) + ق(س) \times ٢س$

$ه'(٢) = ١ \times ق'(٢) + ق(٢) \times ٤$

$٤ = -٨ + ٤ق(٢) \longrightarrow ق(٢) = ٣$

د) $ق(س) = \frac{١٢}{ه(س)}$

$ق'(س) = \frac{-١٢ه'(س)}{(ه(س))^{٢}}$

$ق'(-١) = \frac{-١٢ه'(-١)}{(٦)^{٢}} \longleftarrow \frac{ه'(-١)}{ق'(-١)} = \frac{٣٦}{-١٢} = -٣$

هـ) $\frac{دص}{دس} = \frac{١٢س - ٠}{٨}$ ⟵ ه(٢) ثابت

$= \frac{١٢ \times ٢}{٨} = ٣$

و) $ق'(س) = ٦س^{٣} - \frac{-أ \times -١}{(١-س)^{٢}}$

$ق'(-١) = -٦ - \frac{أ}{٤}$

$-٧ = -٦ - \frac{أ}{٤} \longleftarrow \frac{أ}{٤} = ١ \longleftarrow أ = ٤$

$\therefore ق'(٣) = ٦ \times ٢٧ - \frac{٤}{٤} = ١٦١$

---

(٢)

أ) $\frac{دص}{دس} = ٥\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٤}\left(٢س + \frac{١}{س^{٢}}\right)$

ب) $\frac{دص}{دس} = \frac{-٦ \times ٣(٢س+١)^{٢} \times ٢}{(٢س+١)^{٦}} = \frac{-٣٦}{(٢س+١)^{٤}}$

جـ) $\frac{دص}{دس} = س^{٢} \times ٤(٥-٢س)^{٣} \times -٢ + (٥-٢س)^{٤} \times ٢س$

د) $\frac{دص}{دس} = \frac{س \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+١}} - \sqrt{س^{٢}+١} \times ١}{س^{٢}}$

---

(٣) $ق'(س) = ه(س) \times م'(س) + م(س) \times ه'(س)$

$ق'(أ) = ه(أ)م'(أ) + م(أ)ه'(أ)$ ⁄ ق(أ)

$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{ه(أ)م'(أ)}{ق(أ)} + \frac{م(أ)ه'(أ)}{ق(أ)}$

لكن $ق(أ) = ه(أ)م(أ)$

$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{\cancel{ه(أ)}م'(أ)}{م(أ)\cancel{ه(أ)}} + \frac{\cancel{م(أ)}ه'(أ)}{\cancel{م(أ)}ه(أ)}$

$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{م'(أ)}{م(أ)} + \frac{ه'(أ)}{ه(أ)}$

---

(٤) $ق(س) = س\,(س^{٣} - ٩)^{\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = س \times \frac{٢}{٣}(س^{٣}-٩)^{-\frac{١}{٣}} \times ٣س^{٢} + (س^{٣}-٩)^{\frac{٢}{٣}} \times ١$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣}س \times \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٣}-٩}} \times ٣س^{٢} + \sqrt[٣]{(س^{٣}-٩)^{٢}}$

$\therefore ق'(١) = \frac{٢}{\cancel{٣}} \times \frac{١}{-٢} \times \cancel{٣} + ٤ = -١ + ٤ = ٣$

---

(٥) $ق'(س) = \frac{(س-أ) \times ١ - (س+أ) \times ١}{(س-أ)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{-٢أ}{(س-أ)^{٢}}$

$ق'(٢) = \frac{-\cancel{٢}أ}{(٢-أ)^{٢}} = -\overset{١}{\cancel{٢}}$

$٤ - ٤أ + أ^{٢} = أ$

$أ^{٢} - ٥أ + ٤ = ٠ \Longleftarrow (أ-٤)(أ-١) = ٠$

$\therefore أ = ٤ \quad ، \quad أ = ١$

⑥ أ) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \times \frac{-2\text{س}}{2\sqrt{2-\text{س}^2}} + \sqrt{2-\text{س}^2} \times 1$

$= \frac{-\text{س}^2}{\sqrt{2-\text{س}^2}} + \sqrt{2-\text{س}^2}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{س}^2 + 2 - \text{س}^2}{\sqrt{2-\text{س}^2}} = \frac{2 - 2\text{س}^2}{\sqrt{2-\text{س}^2}} = 0$

$\therefore 2 - 2\text{س}^2 = 0 \Rightarrow \text{س}^2 = 1 \Rightarrow \text{س} = \pm 1$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)^2 \times 3(\text{س}+1)^2 - (\text{س}+1)^3 \times 2(\text{س}-1)}{(\text{س}-1)^4}$

$= \frac{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}+1)^2\left(3(\text{س}-1) - 2(\text{س}+1)\right)}{(\text{س}-1)^{\cancel{4}\,3}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}+1)^2(\text{س}-5)}{(\text{س}-1)^3} = 0$

$\therefore (\text{س}+1)^2(\text{س}-5) = 0 \Rightarrow \text{س} = -1 \text{ ، } 5$

⑦ أ) $\frac{\text{ق}'(-2)}{2} - \frac{-6 \times \text{ق}'(-2)}{(\text{ق}(-2))^2}$

$= \frac{-4}{2} + \frac{6 \times -4}{9} = -2 - \frac{8}{3} = \frac{-14}{3}$

ب) $2\text{س} \times \text{ق}(-2)$

$= 2 \times -2 \times 3 = -12$

ج) $\text{س} \times \frac{\text{ق}'(\text{س})}{2\sqrt{\text{ق}(\text{س})+1}} + \sqrt{\text{ق}(\text{س})+1} \times 1$

$= -2 \times \frac{-4}{4} + 2 = 4$

د) $\frac{(2\text{س} + \text{ق}(\text{س}))\,\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\,(2 + \text{ق}'(\text{س}))}{(2\text{س} + \text{ق}(\text{س}))^2}$

$= \frac{(-4+3) \times -4 - 3(2 + -4)}{(-4+3)^2}$

$= \frac{4 + 6}{1} = 10$

⑧ $\text{ل}'(\text{س}) = \frac{\text{س} \times 2\text{ق}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) - \text{ق}^2(\text{س}) \times 1}{\text{س}^2}$

$\text{ل}'(\text{أ}) = \frac{2\text{أ} \times 12 \times 3 - 144}{\text{أ}^2} = \frac{72\text{أ} - 144}{\text{أ}^2} = 0$

$\therefore 72\text{أ} = 144 \Rightarrow \text{أ} = 2$

⑨ $\text{ق}(\text{س}) = (3\text{س} + \text{ب})^{\frac{1}{4}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{4}(3\text{س} + \text{ب})^{\frac{-3}{4}} \times 3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt[4]{(3\text{س}+\text{ب})^3}}$

$\text{ق}'(5) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_1} \times \frac{1}{\sqrt[4]{(15+\text{ب})^3}} = \frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{32}_{\,8}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[4]{15+\text{ب}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{15+\text{ب}} = \frac{1}{16} \Rightarrow \text{ب} = 1$

⑩ أ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{هـ}(2) \times \text{ق}'(2)}{(\text{ق}(2))^2} = \frac{+1 \times 4}{4} = 1$

ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{هـ}(2)\,\text{هـ}'(2) + \text{ق}'(2) - 3$

$= 2 \times -1 \times 3 + 4 - 3 = -5$

ج) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س} \times 3\text{هـ}^2(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}^3(\text{س}) \times 3$

$= 3 \times 2 \times 3 \times 1 \times 3 + -1 \times 3$

$= 54 - 3 = 51$

د) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{2\text{ق}(\text{س})} \times 2\text{س} - (\text{س}^2 + 2) \times \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\sqrt{2\text{ق}(\text{س})}}}{2\text{ق}(\text{س})}$

$= \frac{2 \times 4 - 6 \times \frac{4}{2}}{2 \times 2} = \frac{-4}{4} = -1$

هـ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(3 + \text{هـ}(\text{س}))\left(\text{س}^2\,\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) \times 2\text{س}\right) - \text{س}^2\,\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})}{(3 + \text{هـ}(\text{س}))^2}$

$= \frac{2 \times (4 \times 4 + 2 \times 4) - 4 \times 2 \times 3}{(3-1)^2}$

$= \frac{48 - 24}{4} = \frac{24}{4} = 6$

و) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^2(\text{س})\,(2\text{س} + 1) - (\text{س}^2 + \text{س}) \times 2\text{هـ}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^4}$

$= \frac{1 \times 5 - 6 \times 2 \times -1 \times 3}{(-1)^4} = 41$

تمرين (٤)

(١) $$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} - (\text{١} + \text{قاس}) \times -\text{جاس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٢} \times ٢ \times \sqrt{٣} - (١+٢) \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٤}}$$

$$= (\sqrt{٣} + \tfrac{٣}{٢}\sqrt{٣}) \times ٤ = ١٠\sqrt{٣}$$

(٢) $$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\,\text{ظا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س} = ٦ \times \frac{١}{٣} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

(٣) $$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا٢س} \times ٣\,\text{قا٣س ظا٣س} + \text{قا٣س} \times -٢\,\text{جا٢س}$$

$$= -\frac{١}{٢} \times ٣ \times -١ \times ٠ + ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$$

(٤) $$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\,\text{جتاس جاس}}{٢\sqrt{\frac{١}{٢} + \text{جتا}^{٢}\text{س}}}$$

$$= \frac{-٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{٢ \times \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}}} = \frac{-١}{٢}$$

(٥) $$\text{ص} = \frac{-١}{١ - \text{جاس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١ \times -\text{جتاس}}{(١ - \text{جاس})^{٢}} = \frac{١}{(١)^{٢}} = ١$$

(٣) $$\text{د(س)} = \frac{\frac{١}{٢}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{-\frac{١}{٢} \times ٣\,\text{جا}^{٢}\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٦}\text{س}} = \frac{-\frac{٣}{٢}\,\text{جتاس}}{\text{جا}^{٤}\text{س}}$$

$$\text{د}'(\tfrac{\text{ط}}{٣}) = \frac{-\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٢}}{\frac{٩}{١٦}} = -\frac{٣}{٤} \times \frac{١٦}{٩} = -\frac{٤}{٣}$$

(٣) $$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \cancel{\text{س}^{٢}} \times \frac{-١}{\cancel{\text{س}^{٢}}}\,\text{قا}^{٢}\frac{١}{\text{س}} + \text{ظا}\frac{١}{\text{س}} \times ٢\text{س}$$

$$= -١ \times (-١)^{٢} + \text{صفر} \times \frac{٢}{\text{ط}}$$

$$= -١$$

(٤) $$\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{قتاس}) = -\text{قتاس ظتاس}$$

$$\therefore \text{م(س)} = \text{جاس} \times -\text{قتاس ظتاس}$$

$$\text{م(س)} = -\text{ظتاس}$$

$$\text{م}'(\text{س}) = \text{قتا}^{٢}\text{س} \rightarrow \text{م}'(\tfrac{\text{ط}}{٦}) = ٤$$

(٥) $$\text{م(س)} = \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا٢س}} = \text{ظتا٢س}$$

$$\text{م}'(\text{س}) = -٢\,\text{قتا}^{٢}\text{٢س}$$

$$\text{م}'(\tfrac{\text{ط}}{٨}) = -٢ \times ٢ = -٤$$

(٦) $$\text{ل(س)} = \sqrt[٥]{١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س} - ١} = \sqrt[٥]{-٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= (-٢\,\text{جا}^{٢}\text{س})^{\frac{١}{٥}}$$

$$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{١}{٥}(-٢\,\text{جا}^{٢}\text{س})^{\frac{-٤}{٥}} \times -٤\,\text{جاس جتاس}$$

$$= \frac{-٤}{٥} \times \frac{١}{\sqrt[٥]{(-٢\,\text{جا}^{٢}\text{س})^{٤}}} \times \text{جاس جتاس}$$

$$\text{ل}'(\tfrac{\text{ط}}{٤}) = \frac{-٤}{٥} \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{-٢}{٥}$$

$$\text{ل}(\tfrac{\text{ط}}{٤}) = \sqrt[٥]{-١} = -١$$

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{م}^{٢}(\text{س})\,\text{ل}'(\text{س}) + \text{ل(س)} \times ٢\,\text{م(س)}\,\text{م}'(\text{س})$$

$$\text{هـ}'(\tfrac{\text{ط}}{٤}) = ٢٥ \times \frac{-٢}{٥} + -١ \times ٢ \times ٥ \times -٣$$

$$= -١٠ + ٣٠ = ٢٠$$

تمرين ٥

① عند س = ١ ← تحول

الاتصال : $ق(١) = ١$

$\underset{س \to ١^+}{نهـا} (س^٣ - ٣س^٢ + ٣س) = ١$ ، $\underset{س \to ١^-}{نهـا} س^٣ = ١$

ق(س) متصل عند س = ١

$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س < ١ \\ ٦س - ٣ & ، س > ١ \end{cases}$

$ق'_+(١) = ٣$ ، $ق'_-(١) = ٣$

$\therefore ق'(١) = ٣$

②

$ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & ، -٢ \le س < ١ \\ ٧ - س^٢ & ، ١ \le س < ٢ \\ س^٢ - ١ & ، س \ge ٢ \end{cases}$

$ق(١) = ٦$

$\underset{س \to ١^+}{نهـا} (٧ - س^٢) = ٦$

$\underset{س \to ١^-}{نهـا} (٤س + ١) = ٥$

ق غير متصل عند س = ١

ق متصل عند س = ٢

$ق'_+(٢) = ٤$

$ق'_-(٢) = -٤$

ق'(٢) غ.م

$ق'(س) = \begin{cases} ٤ & ، -٢ < س < ١ \\ -٢س & ، ١ < س < ٢ \\ ٢س & ، س > ٢ \\ غ.م & ، س = -٢ ، ١ ، ٢ \end{cases}$

③

$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ + ١٤س & ، س < -١ \\ ١ - س^٢ + ١٤س & ، -١ \le س < ١ \\ س ه^٢(س) + ١٠ & ، س \ge ١ \end{cases}$

$ق(١) = ١ \times ه^٢(١) + ١٠ = ١٤$

$\underset{س \to ١^+}{نهـا} س ه^٢(س) + ١٠ = ١٤$

$\underset{س \to ١^-}{نهـا} (١ - س^٢ + ١٤س) = ١٤$

ق(س) متصل عند س = ١

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س + ١٤ & ، س < -١ \\ ١٤ - ٢س & ، -١ < س < ١ \\ س \times ٢ه(س) ه'(س) + ه^٢(س) & ، س > ١ \end{cases}$

$ق'_-(١) = ١٤ - ٢ = ١٢$

$ق'_+(١) = ١ \times ٢ \times ٢ \times ٢ + ٤ = ١٢$

$\therefore ق'(١) = ١٢$

④ أ) $ق(س) = \frac{٤}{س^٢ - ٧}$

$ق'(س) = \frac{-٤ \times ٢س}{(س^٢ - ٧)^٢} \longrightarrow ق'(٣) = \frac{-٢٤}{٤} = -٦$

ب) $ق(س) = \sqrt[٣]{س - (-س)} = (٢س)^{\frac{1}{3}}$

$ق'(س) = \frac{1}{3}(٢س)^{-\frac{2}{3}} \times ٢ = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[٣]{٤س^٢}}$

$\therefore ق'(-٤) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

جـ) $ق(س) = س - ١ + س = ٢س - ١$

$ق'(س) = ٢ \longrightarrow ق'(-١) = ٢$

د) $ق(س) = (س - ٢)^٣$

$ق'(س) = ٣(س - ٢)^٢ \times ١$

$ق'(٢.٥) = ٣(\frac{1}{2})^٢ = \frac{3}{4}$

هـ) $ق^٢(س) = (|٣ - س|)^٢ = (٣ - س)^٢$

$\therefore (ق^٢)'(س) = ٢(٣ - س) \times -١$

$(ق^٢)'(١) = ٢ \times ٢ \times -١ = -٤$

⑤ نبحث اتصال عند س = ٢

$ق(٢) = ٣$

$\underset{س \to ٢^+}{نهـا} \sqrt{٤س + ١} = ٣$

ق(س) متصل عند س = ٢

$ق'(س) = \frac{٤}{٢\sqrt{٤س + ١}} = \frac{٢}{\sqrt{٤س + ١}}$

⑥ أ) $ق(س) = ٣ - جتا س$

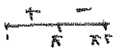
$ق'(س) = جا س \longrightarrow ق'(\frac{\pi}{2}) = ١$

ب) $ق(س) = \frac{٣ - س}{س - ٣} = -١$

$ق'(س) = صفر \longrightarrow ق'(١.٦) = صفر$

(٧)

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س جا س} ، & ٠ \le \text{س} < \text{ط} \\ -\text{س جا س} ، & \text{ط} \le \text{س} \le ٢\text{ط} \end{cases}$$



عند $\text{س} = \text{ط}$ (تحول)

$\text{د}(\text{ط}) = -\text{ط جا ط} = ٠$

$\underset{\text{س}\to\text{ط}^+}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٠$ ، $\underset{\text{س}\to\text{ط}^-}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٠$

د متصل عند $\text{س} = \text{ط}$

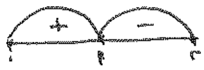
$$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{س جتا س} + \text{جا س} ، & ٠ < \text{س} < \text{ط} \\ -\text{س جتا س} - \text{جا س} ، & \text{ط} < \text{س} < ٢\text{ط} \end{cases}$$

$\text{د}'_+(\text{ط}) = -\text{ط} \times -١ - ٠ = \text{ط}$

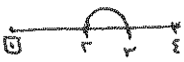
$\text{د}'_-(\text{ط}) = \text{ط} \times -١ + ٠ = -\text{ط}$ $\leftarrow$ $\text{د}'(\text{ط})$ غ.م

(٨)

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢-٢\text{س} ، & ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}-٢ ، & ١ \le \text{س} < ٢ \\ -٢ ، & ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$



$\text{ل} = ٢$



$$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} -٢ ، & ٠ < \text{س} < ١ \\ ٢ ، & ١ < \text{س} < ٢ \\ \text{صفر} ، & ٢ < \text{س} < ٣ \\ \text{غ.م} ، & \text{س} = ٠، ١، ٢ \end{cases}$$

د(س) متصل عند $\text{س} = ١$

$\text{د}(٢) = -٢$

$\underset{\text{س}\to٢^+}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = -٢$

$\underset{\text{س}\to٢^-}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٢$

د غير متصل عند $\text{س} = ٢$

$\text{د}'_+(١) = ٢$ ، $\text{د}'_-(١) = -٢$

$\text{د}'(١)$ غ.م

(٩)

$$\text{د}'_+(٢) = \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(٢)}{\text{ع}-٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ع}^٢ + ٢ - ١٠}{\text{ع}-٢} = \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نهـا}} \frac{٢(\text{ع}^٢-٤)}{\text{ع}-٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٢^+}{\text{نهـا}} \frac{٢\cancel{(\text{ع}-٢)}(\text{ع}+٢)}{\cancel{\text{ع}-٢}} = ٨$$

$$\text{د}'_-(٢) = \underset{\text{ع}\to٢^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(٢)}{\text{ع}-٢} = \underset{\text{ع}\to٢^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^٣ + \text{ع} - ١٠}{\text{ع}-٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٢^-}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ع}-٢)}(\text{ع}^٢ + ٢\text{ع} + ٥)}{\cancel{\text{ع}-٢}} = ١٣$$

$\therefore$ د(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

لأن $\text{د}'_+(٢) \ne \text{د}'_-(٢)$

(١٠)

$\text{ل} = ١$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ ، & -١ \le \text{س} < ٠ \\ \frac{\text{س}^٢}{٢} ، & ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

$$\text{د}'_+(٠) = \underset{\text{ع}\to٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(٠)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}^{\cancel{٢}}}{٢} - ٠}{\cancel{\text{ع}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}}{٢} = \text{صفر}$$

$$\text{د}'_-(٠) = \underset{\text{ع}\to٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(٠)}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{\cancel{٢}} - ٠}{\cancel{\text{ع}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to٠^-}{\text{نهـا}}\ \text{ع} = \text{صفر}$$

$\therefore \text{د}'(٠) = \text{صفر}$

(١١)

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{-١+\text{س}}{\text{س}+٣} = \frac{\text{س}-١}{\text{س}+٣}$$

$$\text{د}'(-١) = \underset{\text{ع}\to-١}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{ع}) - \text{د}(-١)}{\text{ع}+١}$$

$$= \underset{\text{ع}\to-١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{ع}-١}{\text{ع}+٣} + ١}{\text{ع}+١} = \underset{\text{ع}\to-١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}-١+\text{ع}+٣}{(\text{ع}+١)(\text{ع}+٣)}$$

$$= \underset{\text{ع}\to-١}{\text{نهـا}} \frac{٢\cancel{(\text{ع}+١)}}{(\text{ع}+٣)\cancel{(\text{ع}+١)}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

تمرين $\boxed{6}$

(١) $\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{1}{4}\text{ع}^2 + 1$ ، $\frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = 4(2\text{س}+1)^3 \times 2$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}}$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \left(\frac{1}{4}\text{ع}^2 + 1\right) \times 8(2\text{س}+1)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4}(2\text{س}+1)^8 + 1\right) \times 8(2\text{س}+1)^3$$

(٢) عندما $\text{س} = 0 \leftarrow 0 = \text{ن}^2 - \frac{8}{\text{ن}} \leftarrow \text{ن}^2 = \frac{8}{\text{ن}}$

$\text{ن}^3 = 8 \leftarrow \text{ن} = 2$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = \frac{(3\text{ن}-4)\times 2 - 2\text{ن}\times 3}{(3\text{ن}-4)^2} = \frac{4-12}{4} = -2$$

$$\frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 2\text{ن} + \frac{8}{\text{ن}^2} = 4 + \frac{8}{4} = 6$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \times \frac{d\text{ن}}{d\text{س}} = -2 \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

(٣) عندما $\text{س} = 2 \leftarrow \text{ع} = 8 + 1 \leftarrow \text{ع} = 9$

$$\text{ص} = (\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{2}{3}(\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 1)^{-\frac{1}{3}}(2\text{ع} - 10)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 1}} \times (2\text{ع} - 10)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{-2} \times 8 = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = 3\text{س}^2 = 12$$

$$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = -\frac{8}{3} \times 12 = -32$$

(٤) عندما $\text{م} = \frac{\pi}{6} \leftarrow \frac{\cancel{\pi}}{6} = \frac{\cancel{\pi}}{\text{س}+4} \leftarrow \text{س} = 2$

$$\frac{d\text{ع}}{d\text{م}} = \sqrt{6 \times \frac{1}{2} + 1} = 2$$

$$\frac{d\text{م}}{d\text{س}} = \frac{-\pi}{(\text{س}+4)^2} = \frac{-\pi}{36}$$

$$\frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ع}}{d\text{م}} \times \frac{d\text{م}}{d\text{س}} = 2 \times \frac{-\pi}{36} = \frac{-\pi}{18}$$

(٥) عندما $\text{س} = \sqrt{3}$

$\text{ظا}\frac{\text{ن}}{2} = \sqrt{3} \leftarrow \frac{\text{ن}}{2} = \frac{\pi}{3} \leftarrow \text{ن} = \frac{2\pi}{3}$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = \text{قا}^2\text{ن} = 4$$

$$\frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = \frac{1}{2} \times -\text{قا}^2\frac{\text{ن}}{2} = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \times \frac{d\text{ن}}{d\text{س}} = 4 \times \frac{1}{-2} = -2$$

(٦) $\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{\text{ع}}} = \frac{3}{2\sqrt{\text{ع}}}$

$$\frac{d\text{س}}{d\text{ع}} = \text{ع} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{ع}}} + \sqrt{\text{ع}} = \frac{3\text{ع}}{2\sqrt{\text{ع}}}$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2\sqrt{\text{ع}}}} \times \frac{\cancel{2\sqrt{\text{ع}}}}{\cancel{3}\text{ع}} = \frac{1}{\text{ع}}$$

لكن :

$\text{ص} = 3\sqrt{\text{ع}} \leftarrow \frac{\text{ص}}{3} = \sqrt{\text{ع}} \leftarrow \text{ع} = \frac{\text{ص}^2}{9}$

$$\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{1}{\frac{\text{ص}^2}{9}} = \frac{9}{\text{ص}^2}$$

(٧) $\frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 1 + 2\,\text{قا}\,\text{ن} \times \text{قا}\,\text{ن}\,\text{ظا}\,\text{ن}$

$$= 1 + 2\,\text{قا}^2\text{ن}\,\text{ظا}\,\text{ن}$$

$$= 1 + 2 \times 10 \times 3 = 61$$

عندما $\text{س} = 3$

$\text{ظا}\,\text{ن} = 3$

$1 + (3)^2 = \text{قا}^2\text{ن}$

$\text{قا}^2\text{ن} = 10$

$$\frac{d\text{س}}{d\text{ن}} = \text{قا}^2\text{ن} = 10$$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \times \frac{d\text{ن}}{d\text{س}} = 61 \times \frac{1}{10} = \frac{61}{10}$$

تمرين ٧

① قَ(س) = (−١ × ١/(٢√٢س)) ÷ (٢−س) = −١ / ((٢−س)√٢س)

هَ(س) = ٣(س−١)^٢

(ق ∘ ه)َ(٣) = قَ(ه(٣)) × هَ(٣)

= قَ(٨) × هَ(٣) = −١/٦٤ × ١٢ = −٣/١٦

② قَ(س) = ٣س^٢ ، هَ(س) = −أ/س^٢

(ق ∘ ه)َ(٣) = قَ(ه(٣)) × هَ(٣)

−٨/٢٧ = قَ(أ/٣) × −أ/٩

−٨/٢٧ = أ^٢/٣ × −أ/٩ ← أ^٣ = ٨ ← أ = ٢

③ قَ(ص) = ٢ص − ١

هَ(س) = ٢قتا٢س / (٢√(٥−قتا^٢س))

(ق ∘ ه)َ(π/٨) = قَ(ه(π/٨)) × هَ(π/٨)

= قَ(٢) × هَ(π/٨)

= ٣ × ٢/٢ = ٣

④ ق(س) = (٥−٣س)^(١/٣)

قَ(س) = ١/٣ (٥−٣س)^(−٢/٣) × −٣ = −١ / ∛((٥−٣س)^٢)

هَ(س) = π جا π س

(ه ∘ ق)َ(٢) = هَ(ق(٢)) × قَ(٢)

= هَ(−١) × قَ(٢)

= −π × −١/١ = π

⑤ قَ(س) = ٢قاس × قاس ظاس = ٢قا^٢س ظاس

هَ(س) = (−أ × ١/(٢√(٢س−٣))) / (٢س−٣) = −أ / ((٢س−٣)√(٢س−٣))

(ه ∘ ق)َ(π/٤) = هَ(ق(π/٤)) × قَ(π/٤)

١٠ = هَ(٢) × قَ(π/٤)

١٠ = −أ/(١×١) × ٢ × ٢ × ١ ← أ = −٥/٢

⑥ دص/دس = [√(٤س+٥) × قَ(٥س−س^٢) × (٥−٢س) − ق(٥س−س^٢) × ٤/(٢√(٤س+٥))] / (٤س+٥)

= (٣ × ٧ × ٣ + ٩ × ٢/٣) / ٩ = ٦٩/٦

⑦ ص = −٢س ق(س^٢−٣)

دص/دس = −٢س × قَ(س^٢−٣) × ٢س + ق(س^٢−٣) × −٢

= ٤ × قَ(١) × −٤ + ق(١) × −٢ | قَ(١) = −١+٣

= ٤ × ٢ × −٤ + −١ × −٢ | ق(١) = ٢

= −٣٢ + ٢ = −٣٠

⑧ قَ(جا٢س) × ٢جتا٢س = ١٢س

نعوض س = π/١٢ | جا٢س = ١/٢

قَ(١/٢) × ٢ × √٣/٢ = π | ٢س = π/٦

قَ(١/٢) = π/√٣ | س = π/١٢

⑨ قَ(جتاس) × −جاس = ٤ جا^٣س جتاس

−قَ(جتاس) = ٤جا^٢س جتاس | جتاس = −١/٢

نعوض س = ٢π/٣ | س = ٢π/٣

−قَ(−١/٢) = ٤ × ٣/٤ × −١/٢

قَ(−١/٢) = ٣/٢

⑩ أ) قَ(س^٢+٣) × ٢س / (٢√ق(س^٢+٣)) = قَ(٤) × −٢ / (٢√ق(٤))

= (٦ × −٢)/(٢ × ٣) = −٢

ب) قَ(√(س^٢+٣)) × س/√(س^٢+٣)

= قَ(٢) × −١/٢ = −٣ × −١/٢

= ٣/٢

تمرين [8]

١) $٦س^٢ - س^٢ ص' + ص \times -٢س = -٣ص^٢ ص'$

$٦س^٢ - س^٢ ص' - ٢ص س = -٣ص^٢ ص'$

$٦س^٢ - ٢ص س = س^٢ ص' - ٣ص^٢ ص'$

$ص'(س^٢ - ٣ص^٢) = ٦س^٢ - ٢ص س$

$ص' = \frac{٦س^٢ - ٢ص س}{س^٢ - ٣ص^٢}$

٢) بالضرب التبادلي :

$س ص^٢ + ص^٣ = س$

$س \times ٢ص ص' + ص^٢ \times ١ + ٣ص^٢ ص' = ١$

$٢س ص ص' + ص^٢ + ٣ص^٢ ص' = ١$

$٢س ص ص' + ٣ص^٢ ص' = ١ - ص^٢$

$ص'(٢س ص + ٣ص^٢) = ١ - ص^٢$

$ص' = \frac{١ - ص^٢}{٢س ص + ٣ص^٢}$

٣) $ص' = (١ - ص') جتا(س - ص)$

$ص' = جتا(س - ص) - ص' جتا(س - ص)$

$ص' + ص' جتا(س - ص) = جتا(س - ص)$

$ص'(١ + جتا(س - ص)) = جتا(س - ص)$

$ص' = \frac{جتا(س - ص)}{١ + جتا(س - ص)}$

٤) بتربيع الطرفين :

$س + ٢ص = س^٢ ص^٤$

$١ + ٢ص' = س^٢ \times ٤ص^٣ ص' + ص^٤ \times ٢س$

عند (١،٢)

$١ + ٢ص' = ١٦ص' + ١ \times ٤$

$-٣ = ١٤ص'$

$ص' = \frac{-٣}{١٤}$

٥) $(جتاص)^٢ = س ص$

$٢(جتاص) \times -ص' جاص = س \times ص' + ص$

$-٢ص' جتاص جاص = س ص' + ص$

$-ص = س ص' + ص' جا٢ص$

$-ص'(س + جا٢ص) = ص$

$ص' = \frac{-ص}{س + جا٢ص}$

٦) $ص' = (س ص' + ص) جتا(س ص)$

عند $(\frac{\pi}{٢}، ١)$

$ص' = (\frac{\pi}{٢} ص' + ١) جتا \frac{\pi}{٢}$

$ص' = (\frac{\pi}{٢} ص' + ١) \times$ صفر

$ص' =$ صفر

٧) $٤(س + ص)^٣ (١ + ص') = ٤ + ٢ص ص'$

عند (١، -٣)

$٤(١ - ٣)^٣ (١ + ص') = ٤ - ٦ص'$

$-٣٢ - ٣٢ص' = ٤ - ٦ص'$

$-٣٦ = ٢٦ص' \longleftarrow ص' = \frac{-١٨}{١٣}$

٨) $١ = ص' قا^٢ص$

عندما $س = ٣$

$ظاص = ٣$

لكن $١ + ظا^٢ص = قا^٢ص$

$قا^٢ص = ١٠$

$١ = ص' \times ١٠$

$ص' = \frac{١}{١٠}$

٩) عندما $ص = -١$

$-٣س + ١ = س - ٧ \longleftarrow ٤س = ٨ \longleftarrow س = ٢$

$٣س ص' + ص \times ٣ + ٢ص ص' = ١$

عند (٢، -١)

$٦ص' - ٣ - ٢ص' = ١$

$٤ص' = ٤$

$\therefore ص' = ١$

③ $3\,\text{ق}^2(\text{ص})\times \text{ق}'(\text{ص})\times \text{ص}' = 6\text{س}$

عند $(-1 , 3)$

$3\,\text{ق}^2(3)\times \text{ق}'(3)\times \text{ص}' = -6$

$3(2)^2 \times \frac{1}{4}\,\text{ص}' = -6$

$3\,\text{ص}' = -6 \longrightarrow \text{ص}' = -2$

عند $(-1 , 3)$

$\text{ق}^3(3) = 8$

$\text{ق}(3) = 2$

④ $3\,\text{ص}^2\,\text{ص}' = \frac{1}{27}\,\text{هـ}'(\text{س})\ \text{قا هـ}(\text{س})\ \text{ظا هـ}(\text{س})$

عند $\text{س} = 2$ ، $\text{ص} = 1$

$3\,\text{ص}' = \frac{1}{27}\,\text{هـ}'(2)\ \text{قا هـ}(2)\ \text{ظا هـ}(2)$

$3\,\text{ص}' = \frac{1}{\cancel{27}}\times 12 \times \cancel{27}\times 1$

$3\,\text{ص}' = 12$

$\therefore \text{ص}' = 4$

عند $\text{س} = 2$

$\text{ص}^3 = \frac{1}{27}\,\text{قا هـ}(2)$

$= \frac{1}{27}\,\text{قا}\,\frac{\pi}{4}$

$\text{ص}^3 = \frac{1}{27}\times \cancel{27}$

$\text{ص} = 1$

تمرين $\boxed{9}$

① $\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \frac{4\text{س}}{2\sqrt{2\text{س}^2+1}} = \frac{2\text{س}}{\sqrt{2\text{س}^2+1}}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د}\text{س}^2} = \dfrac{\sqrt{2\text{س}^2+1}\times 2 - 2\text{س}\times \frac{2\text{س}}{\sqrt{2\text{س}^2+1}}}{2\text{س}^2+1}$

$= \dfrac{3\times 2 - 4\times\frac{4}{3}}{9} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{2}{27}$

② $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2 + 3\text{س}) \times -\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{س}^3 - 3\text{س}^2$

$\text{ق}'(\text{س}) = -3\text{س}^2 - 6\text{س} \longrightarrow \text{ق}''(\text{س}) = -6\text{س} - 6$

$\text{ق}^{(3)}(\text{س}) = -6 \longrightarrow \text{ق}^{(3)}(-2) = -6$

③ $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{س}^{\text{ن}-2}$

$\text{ق}'''(\text{س}) = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\,\text{س}^{\text{ن}-3} = 210\,\text{س}^{\text{ن}-3}$

$\therefore \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2) = 210 = 7\times 6\times 5$

$\therefore \text{ن} = 7$

④ $\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}^2$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = 4\text{س}$

أ) $(\text{ق}\times\text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س})$

$(\text{ق}\times\text{هـ})''(1) = \text{ق}(1)\,\text{هـ}''(1) + \text{ق}'(1)\,\text{هـ}'(1)$

$+\ \text{هـ}(1)\,\text{ق}''(1) + \text{ق}'(1)\,\text{هـ}'(1)$.

$= \frac{2}{3}\times -1 + 2\times 2 + -3\times 4 + 2\times 2$

$= -\frac{2}{3} + 4 - 12 + 4 = -\frac{2}{3} - 4 = \frac{-14}{3}$

ب) $(\text{هـ}^3)'(\text{س}) = 3(\text{هـ}(\text{س}))^2 \times \text{هـ}'(\text{س})$

$(\text{هـ}^3)''(1) = 3(\text{هـ}(1))^2\,\text{هـ}''(1) + \text{هـ}'(1)\times 6\,\text{هـ}(1)\,\text{هـ}'(1)$

$= 3\times 9\times -1 + 2\times 6\times -3\times 2$

$= -27 - 72 = -99$

جـ) $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س}))\times \text{هـ}'(\text{س})$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})''(1) = \text{ق}'(\text{هـ}(1))\,\text{هـ}''(1) + \text{هـ}'(1)\times \text{ق}''(\text{هـ}(1))\times \text{هـ}'(1)$

$= \text{ق}'(-3)\,\text{هـ}''(1) + \text{هـ}'(1)\,\text{ق}''(-3)\times \text{هـ}'(1)$

$= -12\times -1 + 2\times 4\times 2$

$= 12 + 16 = 28$

⑤ $ص' = ن\,س^{ن-١}$ ، $ص'' = ن(ن-١)\,س^{ن-٢}$

$\therefore\ س^٢ \times ن(ن-١)\,س^{ن-٢} + ٤س \times ن\,س^{ن-١} - ١٨\,س^ن = ٠$

$(ن^٢ - ن)\,س^ن + ٤ن\,س^ن - ١٨\,س^ن = ٠$

$س^ن\,(ن^٢ - ن + ٤ن - ١٨) = ٠$

$س^ن\,(ن^٢ + ٣ن - ١٨) = ٠$ ، لكن $س^ن \neq ٠$

$(ن+٦)(ن-٣) = ٠ \longrightarrow ن = -٦ ، ٣$

⑥ $ص = \frac{ع^٢}{ع^٢ + ١}$ ، $ع = \sqrt{٢س+١}$

$\therefore\ ص = \frac{٢س + ١}{٢س+١ + ١} = \frac{٢س+١}{٢س+٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(٢س+٢)\times ٢ - (٢س+١)\times ٢}{(٢س+٢)^٢} = \frac{٢}{(٢س+٢)^٢}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{-٢ \times ٢(٢س+٢)\times ٢}{(٢س+٢)^٤} = \frac{-٨}{(٢س+٢)^٣}$

$\left.\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right|_{س=٠} = \frac{-٨}{٨} = -١$

⑦ $د(س) = هـ'(س)\,جتا\,هـ(س)$

$د'(س) = هـ'(س) \times هـ'(س) \times -جا\,هـ(س) + جتا\,هـ(س) \times هـ''(س)$

$د'(١) = (هـ'(١))^٢ \times -جا\,هـ(١) + هـ''(١) \times جتا\,هـ(١)$

$= صفر \times -جا\frac{\pi}{٣} + ٣ \times جتا\frac{\pi}{٣} = \frac{٣}{٢}$

⑧ $٣س^٢ + ٣ص^٢ ص' - ٤س ص' + ص \times -٤ = ٠$

$٣ص^٢ ص' - ٤س ص' = ٤ص - ٣س^٢$

$ص' = \frac{٤ص - ٣س^٢}{٣ص^٢ - ٤س}$

$\left.ص'\right|_{(٤،٠)} = \frac{٠ - ٤٨}{٠ - ١٦} = ٣$

نشتق مرة أخرى:

$ص'' = \frac{(٣ص^٢ - ٤س)(٤ص' - ٦س) - (٤ص - ٣س^٢)(٦ص ص' - ٤)}{(٣ص^٢ - ٤س)^٢}$

$\left.ص''\right|_{(٤،٠)} = \frac{-١٦(١٢ - ٢٤) + ٤٨ \times -٤}{(-١٦)^٢}$

$= \frac{١٩٢ - ١٩٢}{(-١٦)^٢} = صفر$

⑨ $\frac{دص}{دن} = ٨\,جا\,ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٢\,جتا\,ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = ٨\,جا\,ن \times \frac{١}{٢\,جتا\,ن} = ٤\,ظا\,ن$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٤ \times \frac{دن}{دس} \times قا^٢ن = ٤ \times \frac{١}{٢\,جتا\,ن} \times قا^٢ن$

$= ٢ \times ٢ \times ٤ = ١٦$

⑩ $د(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س < ١ \\ ٢جـ س + ب & ، س > ١ \end{cases}$

$د'(س) = \begin{cases} ٦س & ، س < ١ \\ ٢جـ & ، س > ١ \end{cases}$

$د'_{+}(١) = د'_{-}(١) \longrightarrow ٢جـ = ٦ \longrightarrow جـ = ٣$

$د_{+}(١) = د_{-}(١) \longrightarrow ٦ + ب = ٣ \longrightarrow ب = -٣$

$د(س)$ متصل عند $س = ١$

$\lim\limits_{س \to ١^{+}} (٣س^٢ - ٣س) = \lim\limits_{س \to ١^{-}} (س^٣ - أ)$

$٠ = ١ - أ \longrightarrow أ = ١$

⑪ $\frac{دص}{دن} = ٣ن^٢ + ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = (٣ن^٢ + ٢) \times \frac{١}{٤ن}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣ن^٢ + ٢}{٤ن}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٤ن \times ٦ن - (٣ن^٢ + ٢)\times ٤}{١٦ن^٢} \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{٢٤ - ٥ \times ٤}{١٦} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$

⑫ $\frac{دص}{دن} = ٢\,جتا\,٢ن \times -٢\,جا\,٢ن$ ، $\frac{دس}{دن} = ٢\,جا\,ن\,جتا\,ن$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = -٤\,جتا\,٢ن\,\cancel{جا\,٢ن} \times \frac{١}{\cancel{جا\,٢ن}}$

$\frac{دص}{دس} = -٤\,جتا\,٢ن$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٨\,جا\,٢ن \times \frac{دن}{دس}$

$= ٨\,\cancel{جا\,٢ن} \times \frac{١}{\cancel{جا\,٢ن}}$

$= ٨$

تمرين (١٠)

① $\frac{دص}{دس}$ = ظا^2 س قا^2 س + قا^2 س
= قا^2 س (ظا^2 س + ١)
= قا^2 س × قا^2 س = قا^4 س

② $\frac{دص}{دس}$ = ٤ جا^3 س جتا س + ٤ جتا^3 س × − جا س
= ٤ جا س جتا س (جا^2 س − جتا^2 س)
= ٢ × جا ٢س × − جتا ٢س
= −٢ جا ٢س جتا ٢س = − جا ٤س

③ ٢(ص + ١) ص' = س ص' + ص
(٢ص + ٢) ص' − س ص' = ص
ص' (٢ص + ٢ − س) = ص
ص' = $\frac{ص}{٢ص + ٢ − س}$ | لكن س = $\frac{(ص+١)^2}{ص}$ ، س = $\frac{ص^2 + ٢ص + ١}{ص}$
ص' = $\frac{ص}{٢ص + ٢ − \frac{ص^2 + ٢ص + ١}{ص}}$
ص' = $\frac{ص}{\frac{٢ص^2 + ٢ص − ص^2 − ٢ص − ١}{ص}}$ = $\frac{ص^2}{ص^2 − ١}$

⑤ ص' = ٢ ظا س قا^2 س
ص'' = ٢ ظا س × ٢ قا س قا س ظا س + قا^2 س × ٢ قا^2 س
= ٤ ظا^2 س قا^2 س + ٢ قا^4 س
= ٢ قا^2 س (٢ ظا^2 س + قا^2 س)
= ٢ (١ + ظا^2 س)(٢ ظا^2 س + ١ + ظا^2 س)
= ٢ (١ + ص)(٣ص + ١)

④ بتربيع الطرفين : س^2 = ١ + جتا ص
٢س = − ص' جا ص ← ص' = $\frac{−٢س}{جا ص}$
ص' = $\frac{−٢س}{\sqrt{١ − جتا^2 ص}}$ = $\frac{−٢س}{\sqrt{١ − (س^2 − ١)^2}}$ | جتا ص = س^2 − ١
ص' = $\frac{−٢س}{\sqrt{\cancel{١} − س^4 + ٢س^2 − \cancel{١}}}$ = $\frac{−٢\cancel{س}}{\cancel{س}\sqrt{٢ − س^2}}$ = $\frac{−٢}{\sqrt{٢ − س^2}}$

⑥ ص' = جتا س − جا س
ص'' = − جا س − جتا س
∴ ص ص'' + ١ = (جا س + جتا س) × − (جا س + جتا س) + ١
= − (جا^2 س + ٢ جا س جتا س + جتا^2 س) + ١
= − (١ + جا ٢س) + ١
= −١ − جا ٢س + ١ = − جا ٢س

⑦ ص' = قا^2 س × قا س ظا س = قا^3 س ظا س
ص'' = قا^3 س × قا^2 س + ظا س × ٣ قا^2 س × قا س ظا س
= قا^5 س + ٣ قا^3 س ظا^2 س
∴ ص'' + ٩ص = قا^5 س + ٣ قا^3 س ظا^2 س + ٣ قا^3 س
= قا^3 س (قا^2 س + ٣ ظا^2 س + ٣)
= قا^3 س (قا^2 س + ٣ قا^2 س) = ٤ قا^5 س

⑧ ١ = ص' جتا ص ← ص' = $\frac{١}{جتا ص}$ = قا ص
ص'' = ص' قا ص ظا ص
= قا ص × قا ص ظا ص = قا^2 ص ظا ص
= (١ + ظا^2 ص) ظا ص = ظا ص + ظا^3 ص

⑨ ٢ص ص' + ٦س − ٢ = ٠ ÷ ٢
ص ص' + ٣س − ١ = ٠
ص ص'' + ص' × ص' + ٣ = ٠
∴ ص ص'' + ص'^{2} + ٣ = ٠

⑩ ص' = ٤ (جا س + جتا س)^3 (جتا س − جا س)
ص'' = ٤ (جا س + جتا س)^3 (− جا س − جتا س)
+ (جتا س − جا س) × ١٢ (جا س + جتا س)^2 (جتا س − جا س)
ص'' = −٤ (جا س + جتا س)^4 + ١٢ (جتا س − جا س)^2 (جتا س + جا س)^2
= −٤ (جا س + جتا س)^4 + ١٢ (جتا^2 س − جا^2 س)^2
∴ ص'' + ٤ص =
−٤ $\cancel{(جا س + جتا س)^4}$ + ١٢ (جتا^2 س − جا^2 س)^2 + ٤ $\cancel{(جا س + جتا س)^4}$
= ١٢ جتا^2 ٢س

تمرين (١١)

① $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(٤+هـ) - ق(٤)}{هـ(هـ+٣)} = ق'(٤) \times \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{2}{3}$

② $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{(س-٤)(س+٣)}{ق(س) - ق(٤)} = \dfrac{1}{ق'(٤)} \times ٧$

$= \dfrac{٧}{٢}$

③ $\lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(٤) - ق(٤-٢هـ)}{٣هـ} = \dfrac{2}{3}\, ق'(٤)$

$= \dfrac{٤}{٣}$

④ $= ق'\left(\dfrac{٨}{س}\right) \times \dfrac{-٨}{س^2}$ عندما س = ٢

$= ق'(٤) \times \dfrac{-٨}{٤}$

$= ٢ \times -٢ = -٤$.

---

③ $ق(س) = \dfrac{2}{3} \times$ مشتقة جتاس

$ق(س) = -\dfrac{2}{3}$ جاس

$\therefore ق'(س) = -\dfrac{2}{3}$ جتاس

$ق'(\pi) = -\dfrac{2}{3} \times -1 = \dfrac{2}{3}$

---

④ $هـ'(س) = \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{\dfrac{1}{٣+٢ق(ع)} - \dfrac{1}{٣+٢ق(س)}}{ع-س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{\cancel{٣}+٢ق(س) - \cancel{٣} - ٢ق(ع)}{(ع-س)(٣+٢ق(ع))(٣+٢ق(س))}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{٢(ق(س) - ق(ع))}{ع-س} \times \dfrac{1}{(٣+٢ق(س))^2}$

$= -٢ق'(س) \times \dfrac{1}{(٣+٢ق(س))^2}$

$\therefore هـ'(س) = \dfrac{-٢ق'(س)}{(٣+٢ق(س))^2}$

---

⑤ $\lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ع\,ق(ع) - س\,ق(ع)}{ع-س} + \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{س\,ق(ع) - س\,ق(س)}{ع-س}$

$= \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{ق(ع)\cancel{(ع-س)}}{\cancel{ع-س}} + \lim\limits_{ع \to س} \dfrac{س(ق(ع) - ق(س))}{ع-س}$

$= ق(س) + س\,ق'(س)$

---

⑥ $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^2 ق(س) - ١٨}{س-٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{س^2 ق(س) - ٩ق(س)}{س-٣} + \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{٩ق(س) - ١٨}{س-٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{ق(س)(س^2-٩)}{س-٣} + \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{٩(ق(س)-٢)}{س-٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{ق(س)\cancel{(س-٣)}(س+٣)}{\cancel{س-٣}} + ٩\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{ق(س) - ق(٣)}{س-٣}$

$= ق(٣) \times ٦ + ٩ \times ق'(٣)$

$= ١٢ + ٩ = ٢١$

---

⑦ $ق'(س) = \lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(س) \times ق(هـ) - ق(س)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(س)\,(ق(هـ) - ١)}{هـ}$

$= ق(س) \times \lim\limits_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(هـ) - ق(٠)}{هـ}$

$= ق(س) \times ق'(٠)$

$= ق(س) \times ١ = ق(س)$