"وقل رب زدني علما"

مدارس جوهرة عمان

مدارس لؤلؤة طارق

أوراق عمل في

النهايات والاتصال

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

0795562444

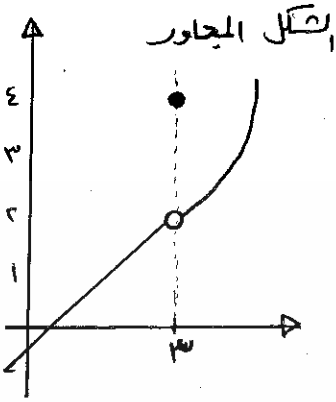
2020-2019

نهــايـة الاقتران عند نقطة

اذا كان

ق(س) ممثلا كما في الشكل المجاور

نلاحظ أنه :



① عندما س = ٣

فإن ق(س) = ٤

ونعبر عن ذلك بالرمز :

ق(٣) = ٤

② عندما س ← ٣+ فإن ق(س) ← ٢

ونعبر عن ذلك بالرمز :

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

③ عندما س ← ٣- فإن ق(س) ← ٢

ونعبر عن ذلك بالرمز :

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

وفي هذه الحالة تكون :

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

وإذا كانت :

$\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ غير موجودة .

وإذا كانت :

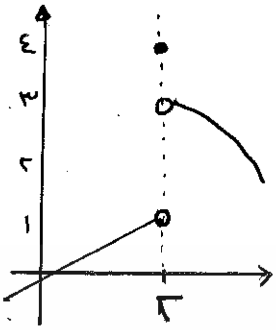
$\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ل$

ل : عدد حقيقي

فإن :

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ل$.

* من الشكل المرسوم لمنحنى ق(س) في كل مما يلي جد :



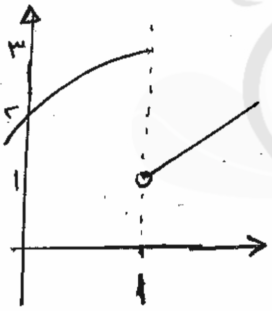
① $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ١$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ غير موجودة .

لاحظ أن ق(٢) = ٤



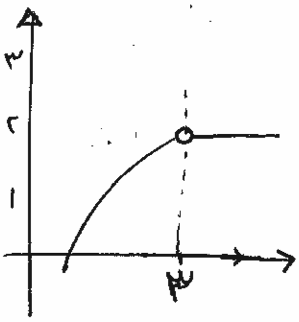
② $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ١$

$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ غير موجودة .

لاحظ أن : ق(١) = ٣



③ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

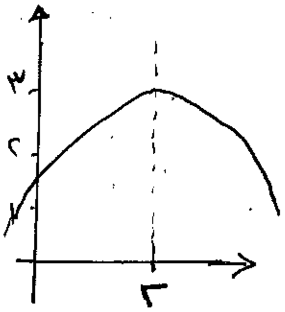
$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

∴ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢$

لاحظ أن :

ق(٣) غير معرف



④ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

لاحظ أن ق(٢) = ٣

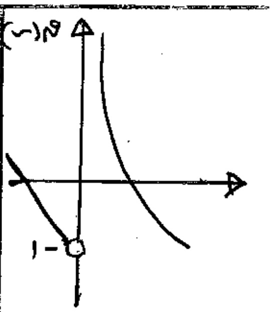
⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م (∞)

→ $\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -١

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

لاحظ أن ق(٠) غير معرف .



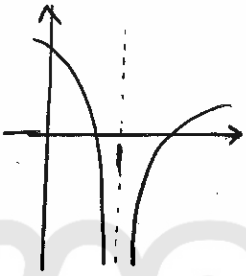
⑥ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م (-∞)

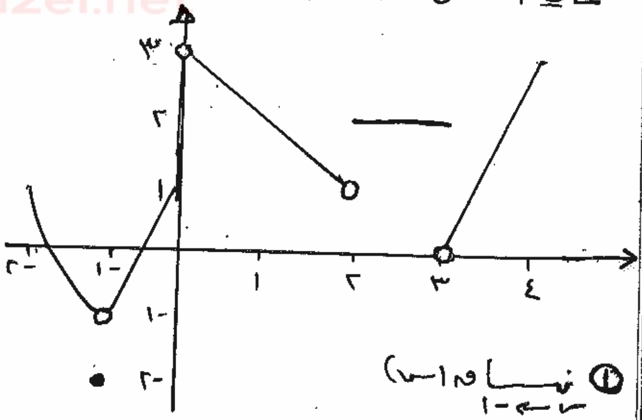
→ $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م (-∞)

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

لاحظ أن ق(١) غير معرف .



[١] إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [-٢، ٤] كالشكل المرسوم . أوجد :



① $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to -١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -١

→ $\underset{س \to -١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -١

∴ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = -١

② $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

③ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

→ $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة .

④ $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = صفر

⑤ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢

→ $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

→ $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

⑦ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س)

→ $\underset{س \to ٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

→ $\underset{س \to ٤^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

∴ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

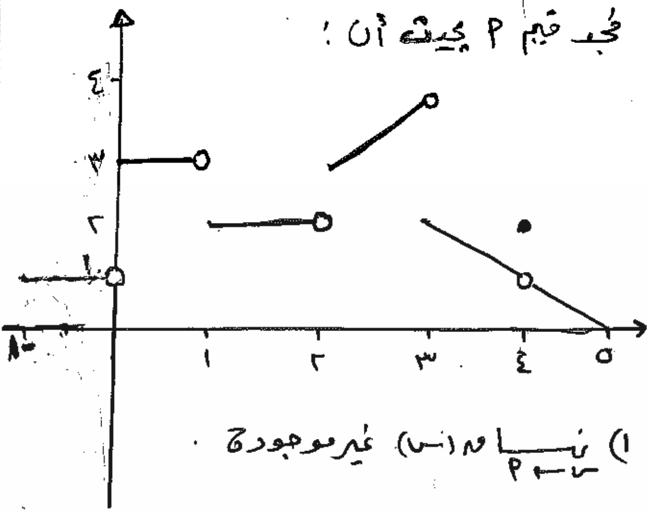
⑧ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

لأن : $\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

$\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غ٠م

$\boxed{٢}$ اذا كان ق(س) معرفا على الفترة [-١، ٥] كما في الشكل المرسوم

جد قيم م بحيث أن:



١) نهـا$_{س \to م}$ ق(س) غير موجودة.

الحل: م = {-١، ٠، ١، ٢، ٣، ٥}

٢) نهـا$_{س \to م^{+}}$ ق(س) = ٣

الحل: م = [٠، ١) ∪ {٢}

٣) نهـا$_{س \to م^{-}}$ ق(س) = ٢

الحل: م = (١، ٢]

٤) نهـا$_{س \to م}$ ق(س) = ١

الحل: م = {٤} ∪ (-١، ٠)

٥) نهـا$_{س \to م^{-}}$ ق(س) = ٤

الحل: م = {٣}

تدريب ①: في الشكل المرسوم أعلاه:

ما قيم م بحيث أن:

١) نهـا$_{س \to م^{+}}$ ق(س) = ٣

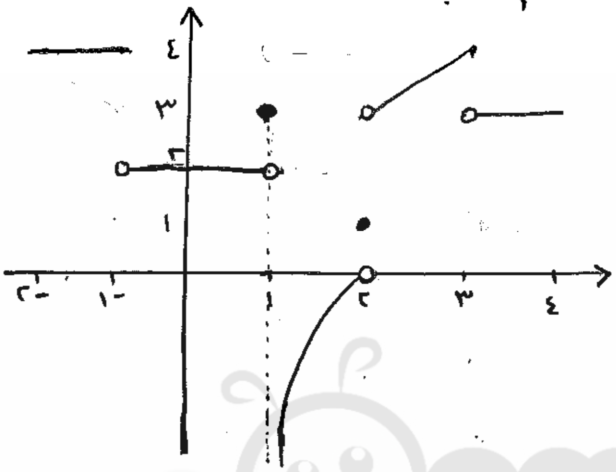
٢) نهـا$_{س \to م}$ ق(س) = ٣

٣) نهـا$_{س \to م^{-}}$ ق(س) غ.م

تدريب ②:

اذا كان ق(س) معرفا على الفترة [-٢، ٤] كما في الشكل المرسوم.

جد قيم م بحيث أن:



١) نهـا$_{س \to م}$ ق(س) غير موجودة.

٢) نهـا$_{س \to م^{+}}$ ق(س) غير موجودة

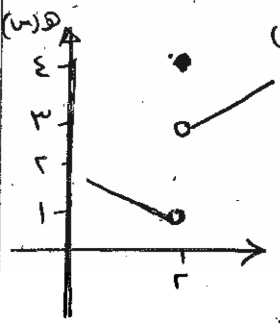
٣) نهـا$_{س \to م^{-}}$ ق(س) = ٤

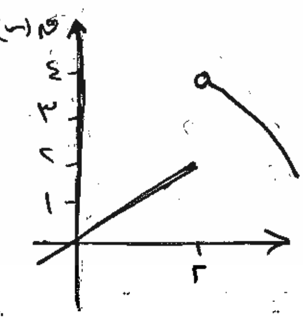
٤) نهـا$_{س \to م^{+}}$ ق(س) = ٢

٥) نهـا$_{س \to م}$ ق(س) = ٣

$\boxed{٣}$ اذا كان ق(س)، هـ(س) كما في الشكل.

جد:





١) نهـا$_{س \to ٢}$ (ق(س) − هـ(س))

نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ (ق(س) − هـ(س)) = ٤ − ٣ = ١

نهـا$_{س \to ٢^{-}}$ (ق(س) − هـ(س)) = ٢ − ١ = ١

∴ نهـا$_{س \to ٢}$ (ق(س) − هـ(س)) = $\boxed{١}$

٢) نهـا$_{س \to ٢}$ (ق(س) × هـ(س))

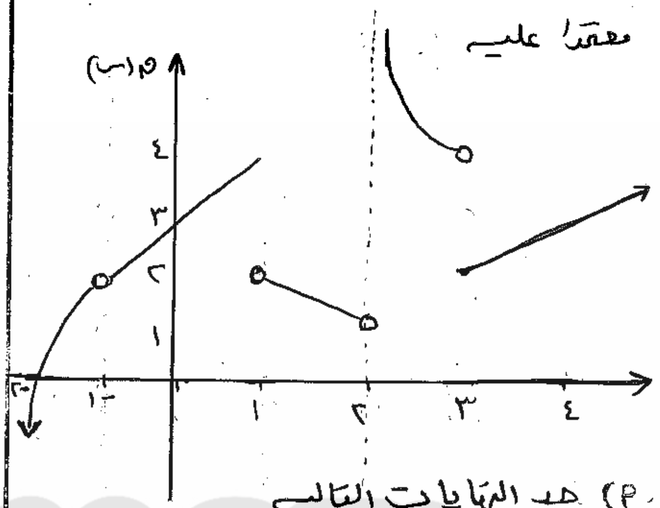
نهـا$_{س \to ٢^{+}}$ (ق(س) × هـ(س)) = ٤ × ٣ = ١٢

∴ غ.م

نهـا (ق(س) × هـ(س)) = ٢ × ١ = ٢

تمرين $\boxed{١}$

$\boxed{١}$ الشكل المرسوم يمثل منحنى الاقتران ق(س) معتمداً عليه



أ) جد النهايات التالية

١) $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) ٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

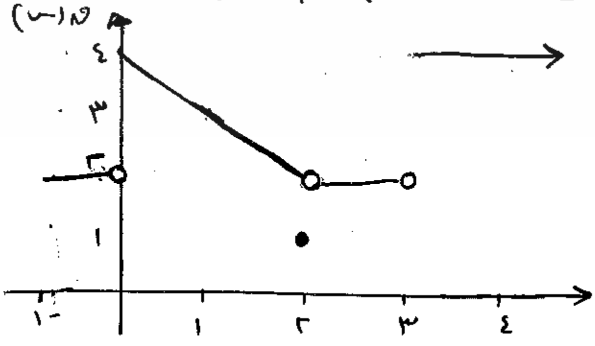
٣) $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) ٤) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ب) جد قيم أ بحيث أن :

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة .

٢) $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢

$\boxed{٢}$ إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [-١، ∞) كما في الشكل ، جد قيم أ بحيث أن :



١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢ ٢) $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٤

٣) $\underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

إيجاد نهاية الاقتران من قاعدته :

↳ بالتعويض المباشر

وإذا كان الناتج = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⟵ يجب الاختصار

بإحدى الطرق التالية :

أولاً : التحليل إلى العوامل .

إخراج العامل المشترك

فتح قوسين

١) فرق بين مربعين

٢) فرق بين مكعبين

٣) مجموع مكعبين

٤) العبارة التربيعية

أس² + ب س + جـ

٥) العبارات من الدرجة الثالثة

تذكر أن : $أ^٣ \mp ب^٣ = (أ \mp ب)(أ^٢ \pm أب + ب^٢)$

تماماً دائماً ⊕

مربع الأول عكس الإشارة الأول × الثاني لم مربع الثاني

٦) حدين لهما نفس الأس

① إذا كان ق(س) = س³ + ٣س − ٥

فإن : $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٨ + ٦ − ٥ = ٩

② إذا كان :

$$\text{ق(س)} = \frac{س^٢ + س - ٦}{س + ١}$$

فإن :

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \frac{١ + ١ - ٦}{١ + ١} = -٢$$

③ $$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٥س + ١} - ٧}{٨ - س} = \frac{٤ - ٧}{٨ - ٣} = \frac{-٣}{٥}$$

④ $$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س + ١)^٢ + ٨}{٢س^٢ - س + ٣} = \frac{١ + ٨}{٣ + ٣} = \frac{٣}{٢}$$

⑤ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - س - ٦}{١ - ٢س} = \frac{\text{صفر}}{٥} = \text{صفر}$

⑥ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٤}{س^٣ + ٤س - ٥} = \frac{٥}{\text{صفر}} = \infty$

(غير موجودة)

⑦ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٣س}{٢س - ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س\overset{١}{\cancel{(س - ٣)}}}{٢\cancel{(س - ٣)}} = \frac{٣}{٢}$

⑧ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٢س^٢}{٤ - س^٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢\overset{-١}{\cancel{(س - ٢)}}}{(٢ + س)\cancel{(٢ - س)}} = \frac{-٤}{٤} = -١$

⑧ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س + ١)^٢ - ٩}{٣س - ٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\left((٢س + ١) - ٣\right)\left((٢س + ١) + ٣\right)}{٣(س - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س - ٢)(٢س + ٤)}{٣(س - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢\cancel{(س - ١)}(٢س + ٤)}{٣\cancel{(س - ١)}} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

⑨ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ + ٨}{س^٤ - ١٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}{(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٤)}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س + ٢)}(س^٢ - ٢س + ٤)}{\cancel{(س + ٢)}(س - ٢)(س^٢ + ٤)} = \frac{-٣}{٨}$

⑩ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)^٣ - ٢٧}{٣٢ - ٢س^٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\left((س - ١) - ٣\right)\left((س - ١)^٢ + ٣(س - ١) + ٩\right)}{٢(١٦ - س^٢)}$

$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(س - ٤)}}\left((س - ١)^٢ + ٣(س - ١) + ٩\right)}{٢\cancel{(٤ - س)}(٤ + س)} = \frac{-٢٧}{١٦}$

⑪ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٤ - ٢٤س}{\frac{س}{٢} - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٣س(س^٣ - ٨)}{\frac{س}{٢} - ١}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢ \times ٣س(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٢ \times (\frac{س}{٢} - ١)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٦س\cancel{(س - ٢)}(س^٢ + ٢س + ٤)}{\cancel{س - ٢}} = ١٤٤$

⑫ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٢ - ٥س - ١٢}{س^٢ - س - ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ٣)}(٣س + ٤)}{\cancel{(س - ٣)}(س + ٢)} = \frac{١٣}{٥}$

⑬ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ + ٣س^٢ + ٢س}{(س^٢ + ٣)^٣ - ٦٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س(س^٢ + ٣س + ٢)}{\left((س^٢ + ٣) - ٤\right)\left((س^٢ + ٣)^٢ + ٤(س^٢ + ٣) + ١٦\right)}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س\cancel{(س + ١)}(س + ٢)}{(س - ١)\cancel{(س + ١)}\left((س^٢ + ٣)^٢ + ٤(س^٢ + ٣) + ١٦\right)}$

$= \frac{-١ \times ١}{-٢ \times ١٦ \times ٣} = \frac{١}{٩٦}$

⑭ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢س^٣ - ٥س + ٣}{(٣س - ١)^٢ - ٤س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ؟

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(٢س^٢ + ٢س - ٣)}{٩س^٢ - ٦س + ١ - ٤س}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(٢س^٢ + ٢س - ٣)}{٩س^٢ - ١٠س + ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ١)}(٢س^٢ + ٢س - ٣)}{\cancel{(س - ١)}(٩س - ١)} = \frac{١}{٨}$

س³	س²	س	ث
٢	٠	-٥	٣
①	٢	٢	-٣
٢	٢	-٣	٠

⑮ $\lim\limits_{س\to ٢}\frac{س^{٤}+٢س^{٢}-٩س-٦}{٨س-س^{٢}-١٢}=\frac{صفر}{صفر}$ ؟

$=\lim\limits_{س\to ٢}\frac{(\cancel{س-٢})(س^{٣}+٢س^{٢}+٦س+٣)}{(\cancel{س-٢})(-س+٦)}$

$=\frac{٣١}{٤}$

	$س^{٤}$	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	C
	١	٠	٢	−٩	−٦
②		٢	٤	١٢	٦
	١	٢	٦	٣	٠

⑯ $\lim\limits_{س\to ١}\frac{٣س^{٢}-٢س^{٣}-١}{(س^{٢}+٣س-٤)^{٢}}=\frac{صفر}{صفر}$ ؟

$=\lim\limits_{س\to ١}\frac{-٢س^{٣}+٣س^{٢}-١}{((س-١)(س+٤))^{٢}}$

$=\lim\limits_{س\to ١}\frac{(\cancel{س-١})(-٢س^{٢}+س+١)}{(س-١)^{\cancel{٢}}(س+٤)^{٢}}=\frac{صفر}{صفر}$ ؟

$=\lim\limits_{س\to ١}\frac{(\cancel{س-١})(-٢س-١)}{(\cancel{س-١})(س+٤)^{٢}}=\frac{-٣}{٢٥}$

⑰ $\lim\limits_{س\to ٢}\frac{س^{٦}-٦٤}{س^{٢}+٤س-١٢}=\frac{صفر}{صفر}$ ؟

$=\lim\limits_{س\to ٢}\frac{س^{٦}-٢^{٦}}{س^{٢}+٤س-١٢}$

$=\lim\limits_{س\to ٢}\frac{(\cancel{س-٢})(س^{٥}\times ٢^{٠}+س^{٤}\times ٢^{١}+\cdots+س^{٠}\times ٢^{٥})}{(\cancel{س-٢})(س+٦)}$

$=\lim\limits_{س\to ٢}\frac{س^{٥}+٢س^{٤}+\cdots\cdots+٣٢}{س+٦}$

$=\frac{٦\times\overset{٤}{\cancel{٣٢}}}{\underset{١}{\cancel{٨}}}=٢٤$

ملاحظة:

يمكن تحليل البسط بطريقة أخرى.

⑱ $\lim\limits_{س\to ١}\frac{(٢-س)^{٥}-س^{٥}}{س-١}=\frac{صفر}{صفر}$ ؟

$=\lim\limits_{س\to ١}\frac{((٢-س)-س)((٢-س)^{٤}س^{٠}+\cdots+(٢-س)^{٠}س^{٤})}{س-١}$

$=\lim\limits_{س\to ١}\frac{(\overset{-٢}{\cancel{٢-٢س}})((٢-س)^{٤}+(٢-س)^{٣}س+\cdots+س^{٤})}{\cancel{س-١}}$

$=-٢\times ١\times ٥$

$=-١٠$

تدريب: جد النهايات التالية.

١) $\lim\limits_{س\to -٢}\frac{٣س^{٣}+٢٤}{س^{٢}-٨س-٢٠}$

٢) $\lim\limits_{س\to ٣}\frac{س^{٣}-٩س}{٢(س-١)^{٢}-٨}$

٣) $\lim\limits_{س\to ٢}\frac{٢٧-(٢س-١)^{٣}}{٤س^{٢}-س^{٤}}$

٤) $\lim\limits_{س\to ١}\frac{س(٧-س^{٢})-٦}{٣س^{٢}+٥س-٨}$

٥) $\lim\limits_{س\to ٠}\frac{(١-س)^{٥}-(١+س)^{٥}}{٣س}$

تمارين $\boxed{٢}$

جد النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{س\to ٠}\frac{٦س^{٤}+١٨س^{٢}}{٢س^{٢}-٣س^{٣}}$

٢) $\lim\limits_{س\to ٣}\frac{(س-١)^{٢}-(٥-س)^{٢}}{س^{٢}-٣س}$

٣) $\lim\limits_{س\to \frac{١}{٢}}\frac{٨س^{٣}-١}{٢س-٤س^{٢}}$

٤) $\lim\limits_{س\to -٢}\frac{س^{٤}-٥س^{٢}+٤}{٢س^{٥}+١٦س^{٢}}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)^٢ + ٣س - ٤}{٢٧س - س^٤}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٧ - س^٢}{٣س^٢ + ٥س - ٨}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١)^٣ - ١٢٥}{٢ + س^٢(س-٢) - س}$

٨) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٥ - ٤س + ٣}{(س+١)(٣-س) - ٤}$

٩) $\lim_{س \to -١} \frac{(س^٢-٢س)^٣ - (س+٤)^٣}{س(س+٥) - س + ٣}$

١٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢-٢س)^٢}{س^٣ - ٣س^٢ + ٤}$

١١) $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٢)^٣ - س^٢ + ٢س}{٤س + ٣س^٢ - س^٣}$

ثانيا : توحيد المقامات

في حالة جمع وطرح الكسور

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{س^٢-٢س} - \frac{١}{٨}}{٤ - س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٨ - (س^٢-٢س)}{٨(س^٢-٢س)} \times \frac{١}{٤-س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{-س^٢ + ٢س + ٨}{٨(س^٢-٢س)(٤-س)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{\overset{-١}{\cancel{(س-٤)}}(-س-٢)}{٨(س^٢-٢س)\cancel{(٤-س)}} = \frac{٦}{٨ \times ٨} = \frac{٣}{٣٢}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\frac{٢}{س^٢-١} - \frac{س}{٣}}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\frac{٦ - (س^٣ - س)}{٣(س^٢-١)}}$

$= \lim_{س \to ٢} (س-٢) \times \frac{٣(س^٢-١)}{-س^٣ + س + ٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \cancel{(س-٢)} \times \frac{٣(س^٢-١)}{\cancel{(س-٢)}(-س^٢-٢س-٣)} = \frac{-٩}{١١}$

٣) $\lim_{ر \to ١} \frac{٨}{ر^٢-٣ر+٢}\left(\frac{٤}{(٣-ر)^٢} - ١\right)$

$= \lim_{ر \to ١} \frac{٨}{ر^٢-٣ر+٢} \times \frac{٤ - (٣-ر)^٢}{(٣-ر)^٢}$

$= \lim_{ر \to ١} \frac{٨}{(ر-١)(ر-٢)} \times \frac{(٢-(٣-ر))(٢+(٣-ر))}{(٣-ر)^٢}$

$= \lim_{ر \to ١} \frac{٨}{\cancel{(ر-١)}(ر-٢)} \times \frac{\cancel{(ر-١)}(٥-ر)}{(٣-ر)^٢}$

$= \frac{٨}{-١} \times \frac{٤}{٤} = -٨$

٤) $\lim_{ر \to ٢} \left(\frac{٣ر^٢}{ر^٢+٢ر-٨} - \frac{٢}{ر-٢}\right)$

$= \lim_{ر \to ٢} \left(\frac{٣ر^٢}{(ر-٢)(ر+٤)} - \frac{٢(ر+٤)}{(ر-٢)(ر+٤)}\right)$

$= \lim_{ر \to ٢} \frac{٣ر^٢ - ٢ر - ٨}{(ر-٢)(ر+٤)}$

$= \lim_{ر \to ٢} \frac{\cancel{(ر-٢)}(٣ر+٤)}{\cancel{(ر-٢)}(ر+٤)}$

$= \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

⑤ $\underset{س\to١}{\text{نها}}\left(\frac{٤-س}{س^٢+س-٢}-\frac{٢س}{س^٢-١}\right)$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\left(\frac{٤-س}{(س-١)(س+٢)}-\frac{٢}{(س-١)(س+١)}\right)$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{(س+١)(٤-س)-٢س(س+٢)}{(س-١)(س+٢)(س+١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{\cancel{٤س}-س^٢+٤-س-٢س^٢-\cancel{٤س}}{(س-١)(س+٢)(س+١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{-٣س^٢-س+٤}{(س-١)(س+٢)(س+١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{\cancel{(س-١)}(-٣س-٤)}{\cancel{(س-١)}(س+٢)(س+١)}=\frac{-٧}{٦}$

تدريب : جد النهايات التالية :

١) $\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{\frac{١}{س^٣+١}-\frac{١}{٢س}}{س-١}$

٢) $\underset{س\to٣}{\text{نها}}\left(\frac{س^٢+٢٧}{س^٢-٩}-\frac{س+٣}{س-٣}\right)$

٣) $\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{١}{س-٣}\left(\frac{٤}{(س-١)^٣}-\frac{١}{٢}\right)$

٤) $\underset{س\to-٢}{\text{نها}}\left(\frac{٦-س}{س-٢}-\frac{س^٢-س-٦}{س^٢+٢س}\right)$

تمرين $\boxed{٣}$

جد النهايات التالية :

١) $\underset{س\to-٢}{\text{نها}}\frac{١}{٣س^٢-س-١٤}\left(\frac{١}{س+١}+\frac{١}{٢س+٥}\right)$

٢) $\underset{س\to٣}{\text{نها}}\frac{٣س^{-٣}-٣^{-٢}}{س-٣}$

٣) $\underset{س\to٢}{\text{نها}}\left(\frac{س^٢}{س^٢-٤}-\frac{٢}{س^٢-٢س}\right)$

ثالثاً : الضرب بالمرافق

لم يستخدم للتخلص من الجذور :

$\sqrt{\ }$ ، $\sqrt[٤]{\ }$ ، $\sqrt[٣]{\ }$

بشرط : لدينا مربع .

جد النهايات التالية :

١) $\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{\sqrt{٢س+١}-٣}{س-٤}\times\frac{\sqrt{٢س+١}+٣}{\sqrt{٢س+١}+٣}$ ⑥

$=\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{٢س+١-٩}{٦(س-٤)}$

$=\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{٢س-٨}{٦(س-٤)}=\underset{س\to٤}{\text{نها}}\frac{٢\cancel{(س-٤)}}{٦\cancel{(س-٤)}}=\frac{١}{٣}$

٢) $\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{\sqrt{٣س+٢}-\sqrt{س^٢+٤}}{س-١}\times\frac{\sqrt{٣س+٢}+\sqrt{س^٢+٤}}{\sqrt{٣س+٢}+\sqrt{س^٢+٤}}$ $\left(٢\sqrt{٥}\right)$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{٣س+٢-س^٢-٤}{٢\sqrt{٥}(س-١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{-س^٢+٣س-٢}{٢\sqrt{٥}(س-١)}$

$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\frac{\cancel{(س-١)}(-س+٢)}{٢\sqrt{٥}\cancel{(س-١)}}=\frac{١}{٢\sqrt{٥}}$

٣) $\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{س+١}{٢+س\sqrt{٣-س}}\times\frac{٢-س\sqrt{٣-س}}{٢-س\sqrt{٣-س}}$ ④

$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{٤(س+١)}{٤-س^٢(٣-س)}$

$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{٤(س+١)}{س^٣-٣س^٢+٤}$

$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\frac{٤\cancel{(س+١)}}{\cancel{(س+١)}(س^٢-٤س+٤)}$

$=\frac{٤}{٩}$

$س^٣$	$س^٢$	$س$	ث
١	−٣	٠	٤
	−١	٤	−٤
١	−٤	٤	٠

(−١)

$$\text{٤) } \lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt[٤]{س^٢-٦س}-٢}{س+٢} \times \frac{\sqrt[٤]{س^٢-٦س}+٢}{\sqrt[٤]{س^٢-٦س}+٢}$$

④

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt{س^٢-٦س}-٤}{٤(س+٢)} \times \frac{\sqrt{س^٢-٦س}+٤}{\sqrt{س^٢-٦س}+٤}$$

⑧

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^٢-٦س-١٦}{٣٢(س+٢)}$$

$$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س-٨)\cancel{(س+٢)}}{٣٢\cancel{(س+٢)}} = \frac{-٥}{١٦}$$

⑥

$$\text{٥) } \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^٢+س-٥}-١}{٣-\sqrt{س^٣+١}} \times \frac{\sqrt{س^٢+س-٥}+١}{\sqrt{س^٢+س-٥}+١} \times \frac{٣+\sqrt{س^٣+١}}{٣+\sqrt{س^٣+١}}$$

②

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\overset{٣}{\cancel{٦}} \times (س^٢+س-٥-١)}{\cancel{٢} \times (٩-س^٣-١)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣ \times (س^٢+س-٦)}{٨-س^٣}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣ \times (س+٣)\overset{-١}{\cancel{(س-٢)}}}{\cancel{(٢-س)}(٤+٢س+س^٢)} = \frac{-٥}{٤}$$

$$\text{٦) } \lim_{س \to ١} \frac{٦}{س^٢-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٢س+١}}-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{٦}{س^٢-١} \times \frac{\sqrt{٣}-\sqrt{٢س+١}}{\sqrt{٢س+١}\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}+\sqrt{٢س+١}}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢س+١}}$$

$٢\sqrt{٣}$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{٦}{س^٢-١} \times \frac{٣-٢س-١}{٦\sqrt{٢س+١}}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{(س+١)\cancel{(س-١)}} \times \frac{٢\overset{-١}{\cancel{(١-س)}}}{\sqrt{٢س+١}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$$

تدريب : جد النهايات التالية.

$$\text{١) } \lim_{س \to ٣} \frac{س-\sqrt{س^٣-٦س}}{س^٢+٢س-١٥}$$

$$\text{٢) } \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧+\sqrt{٣س+١}}-٣}{س-١}$$

$$\text{٣) } \lim_{س \to ٣} \frac{(س+١)^{\frac{٣}{٢}}-٨}{٣-س}$$

$$\text{٤) } \lim_{س \to ٢} \frac{١}{س-٢}\left(\frac{١}{س}-\frac{١}{\sqrt{س^٣-٤}}\right)$$

$$\text{٧) } \lim_{س \to ٢} \frac{٣س-\sqrt{س+٢}-٤}{س-٢}$$

طريقة ① : التجميع

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(٣س-٤)-\sqrt{س+٢}}{س-٢} \times \frac{(٣س-٤)+\sqrt{س+٢}}{(٣س-٤)+\sqrt{س+٢}}$$

④

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٣س-٤)^٢-س-٢}{٤(س-٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٩س^٢-٢٤س+١٦-س-٢}{٤(س-٢)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٩س^٢-٢٥س+١٤}{٤(س-٢)} = \lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س-٢)}(٩س-٧)}{٤\cancel{(س-٢)}} = \frac{١١}{٤}$$

طريقة ② : الفصل : للبسط فقط ويجب تصفير البسط.

$$\lim_{س \to ٢} \frac{٣س-٤-٢}{س-٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{٢-\sqrt{س+٢}}{س-٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣\cancel{(س-٢)}}{\cancel{س-٢}} + \lim_{س \to ٢} \frac{٢-\sqrt{س+٢}}{س-٢} \times \frac{٢+\sqrt{س+٢}}{٢+\sqrt{س+٢}}$$

④

$$= ٣ + \lim_{س \to ٢} \frac{\overset{-١}{\cancel{٤-س-٢}}}{٤\cancel{(س-٢)}} = \frac{١١}{٤}$$

$$\text{٨) } \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)^٢-\frac{٤}{س^٢-٥}}{س-٣} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)^٢-١}{س-٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{١-\frac{٤}{س^٢-٥}}{س-٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س-٢-١)}(س-٢+١)}{\cancel{س-٣}} + \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢-٩}{س^٢-٥} \times \frac{١}{س-٣}$$

$$= ٢ + \lim_{س \to ٣} \frac{(س+٣)\cancel{(س-٣)}}{\cancel{(س-٣)}(س^٢-٥)} = \frac{٧}{٢}$$

تدريب : جد النهايات التالية.

$$\text{١) } \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢-\sqrt{س+١}-٧}{س-٣}$$

$$\text{٢) } \lim_{س \to -٢} \frac{(س+١)^٣+\sqrt{س^٢-٣}}{س+٢}$$

$$٩)\ \underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt[٣]{س^٢-١}-٢}{س-٣}\times\frac{\sqrt[٣]{(س^٢-١)^٢}+٢\sqrt[٣]{س^٢-١}+٤}{\sqrt[٣]{(س^٢-١)^٢}+٢\sqrt[٣]{س^٢-١}+٤}$$

(١٢)

$$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{س^٢-١-٨}{١٢(س-٣)}=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{س^٢-٩}{١٢(س-٣)}$$

$$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{(\cancel{س-٣})(س+٣)}{١٢(\cancel{س-٣})}=\frac{١}{٢}$$

(٣)

$$١٠)\ \underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{٢-٢س}{١+\sqrt[٣]{س^٣-٢س}}\times\frac{١-\sqrt[٣]{س^٣-٢س}+\sqrt[٣]{(س^٣-٢س)^٢}}{١-\sqrt[٣]{س^٣-٢س}+\sqrt[٣]{(س^٣-٢س)^٢}}$$

$$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{٣(٢-٢س)}{١+س^٣-٢س}$$

	س³	س²	س	ن
	١	٠	٢-	١
①		١	١	١-
	١	١	١-	٠

$$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{٦\overset{-١}{(\cancel{١-س})}}{(\cancel{س-١})(س^٢+س-١)}$$

$$=-٦$$

$$١١)\ \underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\frac{١}{\sqrt[٣]{٣س-٨}}+\frac{١}{٢}}{٢س}$$

$$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{٢+\sqrt[٣]{٣س-٨}}{٢\sqrt[٣]{٣س-٨}}\times\frac{١}{٢س}$$

$$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{٢+\sqrt[٣]{٣س-٨}}{٢\sqrt[٣]{٣س-٨}}\times\frac{١}{٢س}\times\frac{٤+٢\sqrt[٣]{٣س-٨}+(\sqrt[٣]{٣س-٨})^٢}{٤+٢\sqrt[٣]{٣س-٨}+(\sqrt[٣]{٣س-٨})^٢}$$

(١٢)

$$=\underset{س\to٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{٨}+٣س-\cancel{٨}}{٢\sqrt[٣]{٣س-٨}\times٢٤س}=\frac{-١}{٣٢}$$

$$١٢)\ \underset{س\to-١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٨-س}-٣}{\sqrt[٣]{س+٢}-١}$$

(٣)

$$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٨-س}-٣}{\sqrt[٣]{س+٢}-١}\times\frac{\sqrt{٨-س}+٣}{\sqrt{٨-س}+٣}\times\frac{\sqrt[٣]{(س+٢)^٢}+\sqrt[٣]{س+٢}+١}{\sqrt[٣]{(س+٢)^٢}+\sqrt[٣]{س+٢}+١}$$

(٦)

$$=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{٣}(٨-س-٩)}{\cancel{٦}_٢(١-س-٢)}=\underset{س\to-١}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{-س-١}}{٢(\cancel{-س-١})}$$

$$=\frac{١}{٢}$$

تدريب : جد النهايات التالية :

$$①\ \underset{س\to٢}{\text{نها}}\ \frac{٢-س}{س-\sqrt[٣]{س^٢+٤}}$$

$$②\ \underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{١}{\sqrt[٣]{س-٩}+٢}\left(س-\frac{٢}{س+١}\right)$$

$$③\ \underset{س\to-١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٨-\sqrt[٣]{س}}-٣}{س+١}$$

$$١٣)\ \underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{س^٢+\sqrt[٣]{س}-٧س+٥}{س-١}$$

$$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{س^٢-٧س+٥+١}{س-١}+\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt[٣]{س}-١}{س-١}$$

$$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{س^٢-٧س+٦}{س-١}+\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt[٣]{س}-١}{س-١}\times\frac{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١}{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+١}$$

(٣)

$$=\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\overset{١}{(\cancel{س-١})}(س-٦)}{\cancel{س-١}}+\underset{س\to١}{\text{نها}}\ \frac{\overset{١}{\cancel{س-١}}}{٣(\cancel{س-١})}$$

$$=-٥+\frac{١}{٣}=\frac{-١٤}{٣}$$

$$١٤)\ \underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٧-س}-\sqrt[٣]{س+٥}}{س-٣}$$

$$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٧-س}-٢}{س-٣}+\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{٢-\sqrt[٣]{س+٥}}{س-٣}$$

$$\downarrow$$

$$\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٧-س}-٢}{س-٣}\times\frac{\sqrt{٧-س}+٢}{\sqrt{٧-س}+٢}$$

(٤)

$$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{\overset{-١}{\cancel{٧-س-٤}}}{٤(\cancel{س-٣})}=\frac{-١}{٤}$$

$$\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{٢-\sqrt[٣]{س+٥}}{س-٣}\times\frac{٤+\sqrt[٣]{س+٥}+\sqrt[٣]{(س+٥)^٢}}{٤+\sqrt[٣]{س+٥}+\sqrt[٣]{(س+٥)^٢}}$$

(١٢)

$$=\underset{س\to٣}{\text{نها}}\ \frac{\overset{-١}{\cancel{٨-س-٥}}}{١٢(\cancel{س-٣})}=\frac{-١}{١٢}$$

$$\therefore\ \text{النهاية}=\frac{-١}{٤}-\frac{١}{١٢}=\frac{-١}{٣}$$

تدريب : جد النهايات التالية :

١) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \sqrt[٣]{٨\text{س}+١١} + ١}{\text{س} - ٢}$

٢) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٥\text{س}+٣} - \dfrac{٤}{\text{س}^٢+١}}{١ - \text{س}}$

تمارين $\boxed{٤}$

جد النهايات التالية :

١) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt{٣\text{س}+١} - \sqrt{\text{س}^٢+٣}}{\text{س} - ١}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٣ - ٣\text{س} + ٢}{\sqrt[٣]{\text{س}+٦} - ٢}$

٣) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٥}\sqrt{\text{س}} - ٦}{٤ - \text{س}}$

٤) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \left(\text{س} + \dfrac{١}{\text{س}-٣}\right)\left(\sqrt{\text{س}+١} - ٢\right)$

٥) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١)^٢ - \sqrt{٣-\text{س}}}{\text{س} - ٢}$

٦) $\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١)^{\frac{٢}{٣}} - ٤}{\text{س} - ٩}$

٧) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^٢-١} - \sqrt[٣]{\text{س}+٥}}{\text{س} - ٣}$

٨) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣-\text{س}} - ٢}{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}$

٩) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١}{\sqrt{\text{س}+١}} - \dfrac{١}{\sqrt{١-\text{س}}}\right)$

١٠) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\sqrt{\text{س}} - ٦}{٤ - \text{س}}$

١١) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{٢ - \sqrt{\text{س}+٤}} + ١}{٥ - \text{س}}$

١٢) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}+١} \left(\dfrac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}} + ١\right)$

١٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}-٩} + ٧\text{س} - ٥}{\text{س} - ١}$

١٤) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{(\sqrt{\text{س}} - ٥)^٣ + ٢٧}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}$

١٥) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{س}}{\text{س}^٢ + \sqrt[٣]{٢-\text{س}} - ٢}$

رابعاً : الاستبدال :

لـ يستخدم للتخلص من :

الجذور بأنواعها

و الاقترانات الأسية والمركبة .

١) $\lim_{س \to ٨} \frac{(٥-\sqrt[٣]{س})^{٢}-٩}{\frac{س}{٢}-٤}$

$ص = \sqrt[٣]{س}$

$ص^{٣} = س$

$س \to ٨$

$ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(٥-ص)^{٢}-٩}{\frac{ص^{٣}}{٢}-٤}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{٢(٥-ص-٣)(٥-ص+٣)}{ص^{٣}-٨}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{٢(٨-ص)\overset{-١}{\cancel{(٢-ص)}}}{\cancel{(ص-٢)}(ص^{٢}+٢ص+٤)} = \frac{-١٢}{١٢} = -١$

---

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{٢-\sqrt{س+٣}}{٣س+\sqrt{س+٣}-٥}$

$ص = \sqrt{س+٣}$

$ص^{٢} = س+٣$

$س = ص^{٢}-٣$

$س \to ١$

$ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{٢-ص}{٣(ص^{٢}-٣)+ص-٥}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{٢-ص}{٣ص^{٢}+ص-١٤}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{\overset{-١}{\cancel{٢-ص}}}{\cancel{(ص-٢)}(٣ص+٧)} = \frac{-١}{١٣}$

---

٣) $\lim_{س \to -١} \frac{٤س+\sqrt{س+٢}+٣}{س^{٢}-٥س-٦}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٤س+\sqrt{س+٢}+٣}{(س+١)(س-٦)}$

$ص = \sqrt{س+٢}$

$ص^{٢} = س+٢$

$س = ص^{٢}-٢$

$س \to -١$

$ص \to ١$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{٤(ص^{٢}-٢)+ص+٣}{(ص^{٢}-١)(ص^{٢}-٨)}$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{٤ص^{٢}+ص-٥}{(ص^{٢}-١)(ص^{٢}-٨)}$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{\cancel{(ص-١)}(٤ص+٥)}{\cancel{(ص-١)}(ص+١)(ص^{٢}-٨)} = \frac{-٩}{١٤}$

---

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٥]{س^{٢}-٨}-١}{س^{٢}-٩}$

$ص = \sqrt[٥]{س^{٢}-٨}$

$ص^{٥} = س^{٢}-٨$

$س^{٢} = ص^{٥}+٨$

$س \to ٣$

$ص \to ١$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص-١}{ص^{٥}+٨-٩}$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص-١}{ص^{٥}-١}$

$= \lim_{ص \to ١} \frac{\overset{١}{\cancel{ص-١}}}{\cancel{(ص-١)}(ص^{٤}+ص^{٣}+ص^{٢}+ص+١)} = \frac{١}{٥}$

تدريب : جد النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س-١}\left(\frac{٢}{\sqrt[٣]{س}+س}-١\right)$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س+١}-٢}{س\sqrt{س+١}-٤س+٦}$

٣) $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-\sqrt{س})^{٣}-٨}{٤-س}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-٣-س}{س-\sqrt{س+١}-١}$

---

④

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٥]{س-٢}+١}{\sqrt{س+٣}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٣}+٢}{\sqrt{س+٣}+٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٤(\sqrt[٥]{س-٢}+١)}{س+٣-٤}$

$ص = \sqrt[٥]{س-٢}$

$ص^{٥}+٢ = س$

$س \to ١$

$ص \to -١$

$= \lim_{ص \to -١} \frac{٤(ص+١)}{ص^{٥}+١}$

$= \lim_{ص \to -١} \frac{٤\overset{١}{\cancel{(ص+١)}}}{\cancel{(ص+١)}(ص^{٤}-ص^{٣}+ص^{٢}-ص+١)}$

$= \frac{٤}{٥}$

٦) $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٢\times ٩^{\text{س}}-١٨}{٢٧^{\text{س}}-٣\times ٩^{\text{س}}}$$

$$=\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{٢\times ٣^{٢\text{س}}-١٨}{٣^{٣\text{س}}-٣\times ٣^{٢\text{س}}}$$

$\text{ص}=٣^{\text{س}}$

$\text{س}\to ١$

$\text{ص}\to ٣$

$$=\underset{\text{ص}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{٢\text{ص}^{٢}-١٨}{\text{ص}^{٣}-٣\text{ص}^{٢}}$$

$$=\underset{\text{ص}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{٢\cancel{(\text{ص}-٣)}(\text{ص}+٣)}{\text{ص}^{٢}\cancel{(\text{ص}-٣)}}=\frac{٢\times ٦}{٩}=\frac{٤}{٣}$$

٧) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٨^{\text{س}}+٥\times ٤^{\text{س}}-٦}{٢^{\text{س}+٣}-٨}$$

$$=\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢^{٣\text{س}}+٥\times ٢^{٢\text{س}}-٦}{٢^{\text{س}}\times ٢^{٣}-٨}$$

$\text{ص}=٢^{\text{س}}$

$\text{س}\to ٠$

$\text{ص}\to ١$

$$=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}^{٣}+٥\text{ص}^{٢}-٦}{٨\text{ص}-٨}$$

$$=\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{ص}-١)}(\text{ص}^{٢}+٦\text{ص}+٦)}{٨\cancel{(\text{ص}-١)}}$$

	ص³	ص²	ص	ث
	١	٥	٠	−٦
①		١	٦	٦
	١	٦	٦	٠

$$=\frac{١٣}{٨}$$

٨) $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٣^{٢\text{س}}-٥}-٢}{٢\times ٩^{\text{س}}-٣^{\text{س}}-١٥}$$

$$=\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٣^{٢\text{س}}-٥}-٢}{٢\times ٣^{٢\text{س}}-٣^{\text{س}}-١٥}$$

$\text{ص}=٣^{\text{س}}$

$\text{س}\to ١$

$\text{ص}\to ٣$

$$=\underset{\text{ص}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{\text{ص}^{٢}-٥}-٢}{٢\text{ص}^{٢}-\text{ص}-١٥}\times\frac{\sqrt{\text{ص}^{٢}-٥}+٢}{\sqrt{\text{ص}^{٢}-٥}+٢}$$

④

$$=\underset{\text{ص}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}^{٢}-٥-٤}{٤(٢\text{ص}^{٢}-\text{ص}-١٥)}$$

$$=\underset{\text{ص}\to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{ص}-٣)}(\text{ص}+٣)}{٤\cancel{(\text{ص}-٣)}(٢\text{ص}+٥)}=\frac{٣}{٢٢}$$

٩) $$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س}-٣)^{٥}+٤\text{س}-٧}{\text{س}-٢}$$

$\text{ص}=\text{س}-٣$

$\text{س}=\text{ص}+٣$

$\text{س}\to ٢$

$\text{ص}\to -١$

$$=\underset{\text{ص}\to -١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}^{٥}+٤(\text{ص}+٣)-٧}{\text{ص}+٣-٢}$$

$$=\underset{\text{ص}\to -١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}^{٥}+٤\text{ص}+٥}{\text{ص}+١}$$

	ص⁵	ص⁴	ص³	ص²	ص	ث
	١	٠	٠	٠	٤	+٥
(−١)		−١	١	−١	١	−٥
	١	−١	١	−١	٥	٠

$$=\underset{\text{ص}\to -١}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{ص}+١)}(\text{ص}^{٤}-\text{ص}^{٣}+\text{ص}^{٢}-\text{ص}+٥)}{\cancel{\text{ص}+١}}$$

$$=٩$$

١٠) حل ١

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٢}+\text{س}-٦}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+\text{س}-٥}-١}$$

نفرض $\text{ص}=\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+\text{س}-٥}$

$\text{ص}^{٥}=\text{س}^{٢}+\text{س}-٥ \leftarrow \text{س}^{٢}+\text{س}=\text{ص}^{٥}+٥$

وعندما $\text{س}\to ٢$ فان $\text{ص}\to ١$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{ص}^{٥}-١}{\text{ص}-١}=$$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{ص}-١)}(\text{ص}^{٤}+\text{ص}^{٣}+\cdots\cdots+١)}{\cancel{\text{ص}-١}}=٥$$

تدريب : جد النهايات التالية :

١) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٥^{٣\text{س}}+٢\times ٢٥^{\text{س}}-٣}{(٥^{\text{س}}-٣)^{٢}-٤}$$

٢) $$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٧}-١}{(\text{س}+١)^{٢}-٩}$$

٣) $$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{(\text{س}-٢)^{٤}+٥\text{س}-٦}{١-\text{س}^{٢}}$$

تمرين $\boxed{٥}$

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $$\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س} - \frac{٤}{\sqrt[٣]{س}}}{س - ٨}$$

٢) $$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٩^{س} + ٣^{س} - ٢}{٢٧^{س} - ٩^{س}}$$

٣) $$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{٢ - ٢س}{س\sqrt{س} + ٣\sqrt{س} - ٤}$$

٤) $$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨^{٢س}} - ٤}{٢^{٣س} - ٨}$$

٥) $$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ١}$$

$\boxed{٢}$ اذا كانت :

$$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[ن]{س^{٣} + ٢} - ١}{٢ + ٢س^{٣}} = \frac{١}{٤}$$

جد قيمة الثابت ن .

نهايات تحوي ضرب اقترانين

١) $$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}\sqrt{٨ - س} + ٣}{س + ١}$$

$$= \underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}\sqrt{٨ - س} - ٣س^{٣}}{س + ١} + \underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{٣ + ٣س^{٣}}{س + ١}$$

$$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}(\sqrt{٨ - س} - ٣)}{س + ١} \times \frac{\sqrt{٨ - س} + ٣}{\underset{⑥}{\sqrt{٨ - س} + ٣}}$$

$$= \underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}(\overset{-١}{\cancel{٨ - س - ٩}})}{٦\cancel{(س + ١)}} = \boxed{\frac{١}{٦}}$$

$$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{٣(١ + س^{٣})}{س + ١} = \underset{س \leftarrow -١}{\text{نها}} \frac{٣\cancel{(١ + س)}(١ - س + س^{٢})}{\cancel{س + ١}}$$

$$= ⑨$$

$$\therefore \text{مجموع النهايتين} = \frac{١}{٦} + ٩ = \frac{٥٥}{٦}$$

---

٢) $$\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{(س - ٥)^{٢}\sqrt[٣]{س} - ١٨}{س - ٨}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{(س - ٥)^{٢}\sqrt[٣]{س} - ٩\sqrt[٣]{س}}{س - ٨} + \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{٩\sqrt[٣]{س} - ١٨}{س - ٨}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س}\left((س - ٥)^{٢} - ٩\right)}{س - ٨}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س}\,\cancel{(س - ٥ - ٣)}(س - ٥ + ٣)}{\cancel{س - ٨}} = ⑫$$

$$\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{٩(\sqrt[٣]{س} - ٢)}{س - ٨} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{\underset{⑫}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{٩\cancel{(س - ٨)}}{١٢\cancel{(س - ٨)}} = \boxed{\frac{٣}{٤}}$$

$$\therefore \text{مجموع النهايتين} = ١٢ + \frac{٣}{٤} = \frac{٥١}{٤}$$

تدريب : جد النهايات التالية :

١) $$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{(س + ١)^{٣}\sqrt{س} - ٨}{س - ١}$$

٢) $$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{س^{٢}\sqrt[٣]{س - ٣} - س + ٦}{س - ٢}$$

إيجاد ثوابت
من نهاية الاقتران الكسري

١) اذا كانت :

$$\text{٢} = \frac{\text{٨} - \text{س} + {}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{٣} - \text{س}} \underset{\text{أ} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

فجد الثابت أ

الحل : نعوض

$$\text{٢} = \frac{\text{٨} - \text{أ} + {}^{\text{٢}}\text{أ}}{\text{٣} - \text{أ}}$$

$$\text{٠} = \text{٢} - \text{أ} - {}^{\text{٢}}\text{أ} \leftarrow \text{٦} - \text{أ}\text{٢} = \text{٨} - \text{أ} + {}^{\text{٢}}\text{أ}$$

$$\text{١}- \text{ ، } \text{٢} = \text{أ} \leftarrow \text{٠} = (\text{١}+\text{أ})(\text{٢}-\text{أ})$$

٢) اذا كانت :

$$\text{٧} = \frac{\text{٢} - \text{س} + {}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١} - \text{س}} \underset{\text{أ} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

جد الثابت أ

$$\text{٧} = \frac{(\text{٢} + \text{س})\cancel{(\text{١} - \text{س})}}{\cancel{\text{١} - \text{س}}} \underset{\text{أ} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} =$$

$$\text{٥} = \text{أ} \leftarrow \text{٧} = \text{٢} + \text{أ}$$

٣) اذا كانت :

$$\text{٦}- = \frac{\text{٨} - \text{س}\text{٢} - {}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{أ} - \text{س}} \underset{\text{أ} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

جد الثابت أ

الحل : نعوض

$$\frac{\text{٨} - \text{أ}\text{٢} - {}^{\text{٢}}\text{أ}}{\text{صفر}} \leftarrow$$

$$\text{٠} = \text{٨} - \text{أ}\text{٢} - {}^{\text{٢}}\text{أ} \quad \therefore$$

$$\text{٠} = (\text{٢} + \text{أ})(\text{٤} - \text{أ})$$

$$\text{٢}- = \text{أ} \qquad \text{أو} \qquad \text{٤} = \text{أ}$$

$$\frac{(\text{٤} - \text{س})\cancel{(\text{٢} + \text{س})}}{\cancel{\text{٢} + \text{س}}} \underset{\text{٢}- \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} \text{ ، } \quad \text{٦} = \frac{(\text{٢} + \text{س})\cancel{(\text{٤} - \text{س})}}{\cancel{\text{٤} - \text{س}}} \underset{\text{٤} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

$$\text{٦}- =$$

مرفوض

$$\boxed{\text{٢}- = \text{أ}} \quad \therefore$$

٤) اذا كانت :

$$\frac{\frac{\text{١}}{\text{س}} - \frac{\text{أ}}{\text{س} + {}^{\text{٢}}\text{س}}}{\text{٢} - \text{س}} \underset{\text{٢} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

موجودة .

١) جد الثابت أ

٢) جد قيمة النهاية .

الحل : نعوض

$$\frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{أ}}{\text{٦}}}{\text{صفر}} \leftarrow$$

$$\text{٣} = \text{أ} \longleftarrow \text{٠} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{أ}}{\text{٦}} \quad \therefore$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}-\text{س}} \times \left(\frac{\text{١}}{\text{س}} - \frac{\text{٣}}{(\text{١}+\text{س})\text{س}}\right) \underset{\text{٢} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}-\text{س}} \times \frac{(\text{١}+\text{س}) - \text{٣}}{(\text{١}+\text{س})\text{س}} \underset{\text{٢} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} =$$

$$\frac{\text{١}-}{\text{٦}} = \frac{\text{١}}{\cancel{\text{٢}-\text{س}}} \times \frac{\overset{\text{١}-}{\cancel{\text{س}-\text{٢}}}}{(\text{١}+\text{س})\text{س}} \underset{\text{٢} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}} =$$

٥) اذا كانت :

$$\text{٦٠}- = \frac{\text{أ}\text{٥} - \text{س}\text{٥}}{\text{٣} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س} - \text{١٠}}} \underset{\text{أ} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـا}}$$

جد الثابت أ

الحل : نعوض

$$\text{٠} = \text{٢} - \sqrt[\text{٣}]{\text{أ}-\text{١٠}} \leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{٢} - \sqrt[\text{٣}]{\text{أ}-\text{١٠}}} \leftarrow$$

$$\text{٢} = \text{أ} \leftarrow \text{٨} = \text{أ} - \text{١٠} \leftarrow \text{٢} = \sqrt[\text{٣}]{\text{أ}-\text{١٠}}$$

٦) اذا كانت :

$$\text{٥} = \frac{\text{أ}\text{٤} + \text{س}(\text{٨}+\text{أ}) - {}^{\text{٢}}\text{س}\text{٢}}{\text{٤} - \text{س}} \underset{\text{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}$$

جد الثابت أ

الحل : نعوض

$$? \ \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{أ}\text{٤} + \text{٣٢} - \text{أ}\text{٤} - \text{٣٢}}{\text{٤} - \text{٤}} \leftarrow$$

$$\text{٥} = \frac{\text{أ}\text{٤} + \text{س}\text{٨} - \text{س}\text{أ} - {}^{\text{٢}}\text{س}\text{٢}}{\text{٤}-\text{س}} \underset{\text{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}$$

$$\text{٥} = \frac{\text{س}\text{أ} - \text{أ}\text{٤}}{\text{٤}-\text{س}}\underset{\text{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} + \frac{\text{س}\text{٨} - {}^{\text{٢}}\text{س}\text{٢}}{\text{٤}-\text{س}}\underset{\text{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}$$

$$\text{٥} = \frac{\overset{\text{١}-}{\cancel{(\text{س}-\text{٤})}}\text{أ}}{\cancel{\text{٤}-\text{س}}}\underset{\text{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} + \frac{\cancel{(\text{٤}-\text{س})}\text{س}\text{٢}}{\cancel{\text{٤}-\text{س}}}\underset{\text{٤}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}}$$

$$\text{٣} = \text{أ} \leftarrow \text{٥} = \text{أ} - \text{٨}$$

٧) جد الثوابت أ ، ب اذا كانت :

$$١) \quad \text{نها}_{س \to ١} \frac{أس^{٢} + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$$

الحل : نعوض ← $\frac{أ + ٢ب + ٢}{\text{صفر}}$

$$\therefore \boxed{أ = -٢ب - ٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(-٢ب - ٢)س^{٢} + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{-٢ب س^{٢} - ٢س^{٢} + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$$

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{٢ب س \overset{-١}{(\cancel{١ - س})}}{\cancel{س - ١}} + \text{نها}_{س \to ١} \frac{٢(١ - س^{٢})}{س - ١} = ١$$

$$-٢ب + \text{نها}_{س \to ١} \frac{٢\overset{-١}{(\cancel{١ - س})}(١ + س)}{\cancel{س - ١}} = ١$$

$$\therefore -٢ب - ٤ = ١ \leftarrow ب = -\frac{٥}{٢}$$

$$\therefore أ = ٣$$

طريقة أخرى :

$$\text{نها}_{س \to ١} \frac{(\cancel{س - ١})(أس - ٢)}{\cancel{س - ١}} = ١$$

$$\therefore أ - ٢ = ١ \leftarrow أ = ٣$$

$$\therefore ٣ = -٢ب - ٢ \leftarrow ب = -\frac{٥}{٢}$$

$$٢) \quad \text{نها}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{أ + س} - ب}{س - ٣} = \frac{١}{٤}$$

الحل : نعوض ← $\frac{\sqrt{أ + ٣} - ب}{\text{صفر}}$

$$\therefore \sqrt{أ + ٣} - ب = ٠ \leftarrow \boxed{ب = \sqrt{أ + ٣}}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{أ + س} - \sqrt{أ + ٣}}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{أ + س} + \sqrt{أ + ٣}}{\sqrt{أ + س} + \sqrt{أ + ٣}} = \frac{١}{٤}$$

$$\textcircled{٢\sqrt{أ + ٣}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣} \frac{\cancel{أ} + س - \cancel{أ} - ٣}{(س - ٣)\, ٢\sqrt{أ + ٣}} = \frac{١}{٤}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{\overset{١}{\cancel{س - ٣}}}{(\cancel{س - ٣})\, ٢\sqrt{أ + ٣}} = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore ٢\sqrt{أ + ٣} = ٤ \leftarrow أ = ١ \quad \therefore ب = ٢$$

$$٣) \quad \text{نها}_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^{٣} + أس - ب}{س + ١} = ٥$$

الحل : نعوض :

$$\frac{(١)^{٣} - أ - ب}{\text{صفر}} \leftarrow \boxed{ب = ١ - أ}$$

$$\text{نها}_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^{٣} + أس - ١ + أ}{س + ١} = ٥$$

$$\text{نها}_{س \to -١} \frac{(س + ٢)^{٣} - ١}{س + ١} + \text{نها}_{س \to -١} \frac{أس + أ}{س + ١} = ٥$$

$$\text{نها}_{س \to -١} \frac{(\cancel{(س + ٢) - ١})((س + ٢)^{٢} + (س + ٢) + ١)}{\cancel{س + ١}} + \text{نها}_{س \to -١} \frac{أ(\cancel{س + ١})}{\cancel{س + ١}} = ٥$$

$$٣ + أ = ٥ \leftarrow أ = ٢$$

$$\therefore ب = -١$$

$$٤) \quad \text{نها}_{س \to ٢} \left(\frac{أ}{س - ٢} - \frac{ب}{س^{٢} + ٢س - ٨} \right) = -\frac{١}{٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \left(\frac{أ}{س - ٢} - \frac{ب}{(س - ٢)(س + ٤)} \right) = -\frac{١}{٢}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{أ(س + ٤) - ب}{(س - ٢)(س + ٤)} = -\frac{١}{٢}$$

نعوض

$$\frac{٦أ - ب}{\text{صفر}} \leftarrow ٦أ - ب = ٠ \leftarrow \boxed{ب = ٦أ}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{أ(س + ٤) - ٦أ}{(س - ٢)(س + ٤)} = -\frac{١}{٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{أس + ٤أ - ٦أ}{(س - ٢)(س + ٤)} = -\frac{١}{٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{أس - ٢أ}{(س - ٢)(س + ٤)} = -\frac{١}{٢}$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{أ(\cancel{س - ٢})}{(\cancel{س - ٢})(س + ٤)} = -\frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{أ}{٦} = -\frac{١}{٢} \leftarrow أ = -٣$$

$$\therefore ب = -١٨$$

تدريب !

① جد الثابت أ اذا كانت !

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - (أ + س)س + أ} = ٢$$

② جد الثوابت أ ، ب اذا كانت !

١) $\lim_{س\to ٢} \frac{أس^{٣} - بس + ١٢}{س - ٢} = -١٤$

٢) $\lim_{س\to ١} \frac{س - ١}{\sqrt{أس + ب} - ٢} = \frac{٤}{٣}$

٣) $\lim_{س\to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} + أس + ب}{س - ٣} = \frac{٥}{٤}$

① جد قيمة الثابت أ اذا كانت :

١) $\lim_{س\to ٣} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + أس - ٦}$ غير موجودة

الحل : نعوض

$\rightarrow \frac{٥}{٩ + ٣أ - ٦} \rightarrow \frac{٥}{٣ + ٣أ}$

∴ نصفر المقام $\rightarrow ٣ + ٣أ = ٠ \rightarrow أ = -١$

٢) $\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ غير موجودة .

الحل !

نعوض $\rightarrow \frac{أ^{٢} + ٥}{أ^{٢} - ٥أ + ٦}$

∴ نصفر المقام $\rightarrow أ^{٢} - ٥أ + ٦ = ٠$

$(أ - ٣)(أ - ٢) = ٠$

$أ = ٣$ ، $أ = ٢$

٣) $\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} + س - ٢}$ غير موجودة .

الحل : $\lim_{س\to أ} \frac{(س - ٢)\cancel{(س + ٢)}}{\cancel{(س + ٢)}(س - ١)}$ غير موجودة

∴ $\frac{أ - ٢}{أ - ١} \rightarrow أ - ١ = ٠$

∴ $أ = ١$

③ جد الثوابت أ ، ب اذا كانت !

$\lim_{س\to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} + أس - ٢ب}$ غير موجودة .

الحل !

نعوض $\rightarrow \frac{صفر}{٤ + ٢أ - ٢ب}$

∴ $٤ + ٢أ - ٢ب = ٠ \rightarrow \boxed{ب = ٢ + أ}$

$\lim_{س\to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} + أس - ٤ - ٢أ}$ غ.م

$\lim_{س\to ٢} \frac{س - ٢}{(س^{٢} - ٤) + (أس - ٢أ)}$ غ.م

$\lim_{س\to ٢} \frac{\cancel{س - ٢}^{\,١}}{\cancel{(س - ٢)}(س + ٢) + أ\cancel{(س - ٢)}}$ غ م

∴ $\frac{١}{٤ + أ} \rightarrow ٤ + أ = ٠$

∴ $أ = -٤$ ، $ب = -٢$

تدريب :

جد الثابت أ

١) $\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٦س + ٩}$ غير موجودة .

٢) $\lim_{س\to ٢} \frac{س - ٢}{أ^{٢} + أس - ٢س^{٢}}$ غير موجودة

تمرين $\boxed{٦}$

$\boxed{١}$ جد الثابت أ اذا كانت :

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^٣ - (أ+١)س^٢ + أ}{س - ١} = ٧$

٢) $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{٣س^٢ + ٥س - ٨}{٤س - س^٢ - ٣} = \frac{٥}{٤}$

$\boxed{٢}$ جد الثوابت أ ، ب اذا كانت :

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{أ(س^٢ - س) - ب}{س - ٢} = ٣$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢ + (أ+س)س - ب}{س - ٣} = ٧$

٣) $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{س+٢} \left(\frac{أ}{\sqrt{ب - س}} - ١ \right) = \frac{١}{٢}$

٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ١}{٢س^٢ - أس + ب} = -٢$

٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٥س + أ} - ٤}{س - ٣} = ب$
حيث ب $\in$ ح

٦) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س - ٣}{ب - أس + س^٢}$ غير موجودة

٧) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س + ٣}{\sqrt[٣]{أس + ب} + ٢} = ٤$

نهاية اقتران الجذر الزوجي

↓

حسب التعويض داخله

فإذا كان :

١) موجبا : نأخذ جذره .

٢) سالبا : تكون نهايته غير موجودة .

٣) صفرا : نبحث إشارة ما داخل الجذر على خط الاعداد حول النقطة

⊕ النهاية موجودة

⊖ النهاية غير موجودة .

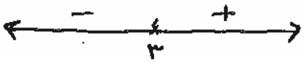
$\boxed{١}$ جد النهايات التالية

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} (٣س^٢ + \sqrt{٤س + ٥} - ٢)$
$= ٣ + \sqrt{٩} - ٢ = ٤$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{١ - \sqrt{س - ٣}}{س + ٢} = \frac{١ - \sqrt{-١}}{٤}$
غير موجودة .

٣) $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٣س + ١}}{س + ٧} = \frac{\sqrt[٣]{-٨}}{٤}$
$= \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt{٢س - ٦} = \sqrt{\text{صفر}}$ ؟ .



$\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}} \sqrt{٢س - ٦} = \text{صفر}$

$\underset{س \to ٣^-}{\text{نها}} \sqrt{٢س - ٦}$ غير موجودة .

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \sqrt{٢س - ٦}$ غ.م .

٥) $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \left(٤س + \sqrt{٤ - س^{٢}}\right) = ٨ + \sqrt{٠}$ ؟

∴ $\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \left(٤س + \sqrt{٤ - س^{٢}}\right) = ٨ + ٠ = ٨$

٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(٣س^{٢} - \sqrt{س^{٢} - س}\right)$

$= ٣ - \sqrt{٠}$ ؟ .

$س^{٢} - س = ٠ \leftarrow س(س - ١) = ٠$

$س = ٠ \ ، \ س = ١$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(٣س^{٢} - \sqrt{س^{٢} - س}\right) = ٣ - ٠ = ٣$

$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \left(٣س^{٢} - \sqrt{س^{٢} - س}\right)$ غ.م .

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(٣س^{٢} - \sqrt{س^{٢} - س}\right)$ غ.م .

٧) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \left(س + \sqrt[٣]{س^{٢} + س} + ١\right)$

$= -١ + \sqrt[٣]{٠} + ١ =$ صفر

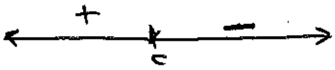
٨) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{س^{٢} + ٤س + ٤} = \sqrt[٤]{٠}$ ؟ .

$س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س + ٢) = ٠ \leftarrow س = -٢$

∴ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{س^{٢} + ٤س + ٤} =$ صفر .

٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤ - ٢س} - س}{س - ٤} = \dfrac{\sqrt{٠} - ٢}{-٢}$ ؟

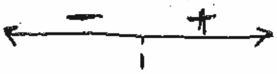


$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤ - ٢س} - س}{س - ٤}$ غ.م

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤ - ٢س} - س}{س - ٤} = \dfrac{٠ - ٢}{-٢} = ١$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٤ - ٢س} - س}{س - ٤}$ غ.م .

١٠) $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(٢س + \dfrac{س - ١}{\sqrt{س - ١}}\right) = ٢ + \dfrac{\text{صفر}}{\sqrt{\text{صفر}}}$ ؟



$= \underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \left(٢س + \dfrac{\sqrt{س - ١} \times \cancel{\sqrt{س - ١}}}{\cancel{\sqrt{س - ١}}}\right) = ٢ + ٠$

$= ٢$

١١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}} = \sqrt{\dfrac{-٨}{-٢}} = \sqrt{٤} = ٢$

١٢) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س^{٢} - ٤}{س + ٢}} = \sqrt{\dfrac{-٣}{١}} = \sqrt{-٣}$ غ م

١٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١}} = \sqrt{\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}}$ ؟

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{(س + ١)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}}} = \sqrt{٢}$.

١٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س - ٢}{س + ١}} = \sqrt{\text{صفر}}$ ؟ .

$س - ٢ = ٠ \ ، \ س + ١ = ٠$

$س = ٢ \qquad س = -١$

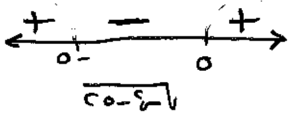
$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س - ٢}{س + ١}} =$ صفر

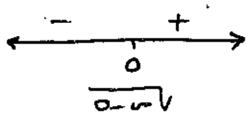
$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س - ٢}{س + ١}}$ غ.م

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س - ٢}{س + ١}}$ غ م

تدريب : جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٦س - \sqrt{س^{٢} - ٩}}{\sqrt{س + ١}}$

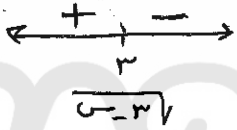
١٥) $\underset{س \leftarrow ٥^{+}}{نها} \frac{\sqrt{س^{٢}-٢٥}}{\sqrt{س-٥}} = \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ ؟؟





$= \underset{س \leftarrow ٥^{+}}{نها} \sqrt{\frac{(س+٥)\cancel{(س-٥)}}{\cancel{س-٥}}} = \sqrt{١٠}$

١٦) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها} \frac{\sqrt{٩-س^{٢}}}{\sqrt{٣-س}} = \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ ؟؟



$\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{نها} \frac{\sqrt{٩-س^{٢}}}{\sqrt{٣-س}}$ غ.م

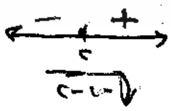
$\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{نها} \sqrt{\frac{(٣+س)\cancel{(٣-س)}}{\cancel{٣-س}}} = \sqrt{٦}$

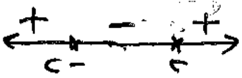
$\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{نها} \frac{\sqrt{٩-س^{٢}}}{\sqrt{٣-س}}$ غ.م

١٧) $\underset{س \leftarrow ٤}{نها} \frac{\sqrt[٣]{س-٤}}{\sqrt[٣]{س^{٢}-١٦}} = \frac{٠}{٠}$ ؟

$= \underset{س \leftarrow ٤}{نها} \sqrt[٣]{\frac{\overset{١}{\cancel{س-٤}}}{(س+٤)\cancel{(س-٤)}}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٨}} = \frac{١}{٢}$

١٨) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها} \frac{\sqrt{س^{٢}-٤} - ٣\sqrt{س-٢}}{\sqrt{س-٢}} = \frac{\sqrt{٠}-\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ ؟؟





$= \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها} \frac{\sqrt{س^{٢}-٤}}{\sqrt{س-٢}} - \frac{٣\cancel{\sqrt{س-٢}}}{\cancel{\sqrt{س-٢}}}$

$= \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها} \sqrt{\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}} - ٣$

$= \underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها} \sqrt{\frac{(س+٢)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{س-٢}}} - ٣$

$= \sqrt{٤} - ٣$

$= ٢ - ٣ = -١$

$\boxed{٣}$ جد قيم P التي تجعل :

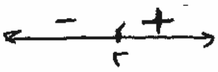
١) $\underset{س \leftarrow P^{-}}{نها} \sqrt{٦-س}$ غير موجودة.

الحل: $٦-س = ٠ \leftarrow س = ٦$

$\therefore P = (\infty ، ٦)$

٢) $\underset{س \leftarrow P^{+}}{نها} \sqrt{٢س-٤}$ موجودة.

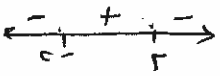
الحل: $٢س-٤ = ٠ \leftarrow س = ٢$



$\therefore P = (\infty ، ٢]$

٣) $\underset{س \leftarrow P^{-}}{نها} \sqrt{٤-س^{٢}}$ موجودة.

الحل: $٤-س^{٢} = ٠ \leftarrow س = \pm ٢$



$\therefore P = [٢ ، ٢-)$.

٤) $\underset{س \leftarrow P^{+}}{نها} \sqrt{\frac{س-١}{س-٣}}$ غير موجودة

الحل: نبحث اشارة ما داخل الجذر

$\therefore P = [٣ ، ١]$

تدريب : جد قيم P بحيث أن :

١) $\underset{س \leftarrow P}{نها} \sqrt{\frac{س^{٢}-٤}{س-٢}}$ غير موجودة

٢) $\underset{س \leftarrow P^{-}}{نها} \sqrt{٢س-س^{٢}}$ موجودة .

تمرين $\boxed{٧}$

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \left(\sqrt{س^٢ - ٦س + ٨} + \sqrt{٣ - س} \right)$

٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س - ٥} - ٢}{س - ٩}$

٣) $\underset{س \to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{٢س - ٦}{\sqrt{٣ - س}}$

٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{س^٢ - ٤س + ٣}{س - ١}}$

٥) $\underset{س \to ١^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ١}}{\sqrt{٨س - س^٢ - ٧}}$

٦) $\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٢س^٢ - ٤س} + \sqrt{س^٢ - ٤}}{\sqrt{س - ٢}}$

$\boxed{٢}$ جد قيم أ بحيث أن :

١) $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \sqrt{٣ - ٢س}$ غير موجودة .

٢) $\underset{س \to أ^-}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{س - ٣}{١٠ - ٢س}}$ موجودة .

٣) $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \sqrt{\dfrac{٤ - س^٢}{٢ - س}}$ غير موجودة

$\boxed{٣}$ جد $\underset{س \to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٩ - س^٢} + \sqrt{٣} - \sqrt{س}}{\sqrt{٣ - س}}$

نظريات النهايات .

① $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ جـ = جـ$ حيث جـ : ثابت

② اذا كانت كلا من :

$\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)$ ، $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ هـ(س)$ موجودة ، فإن :

$\underset{س \to أ}{\text{نها}} \left(ق(س) \underset{\times}{\pm} هـ(س) \right) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) \underset{\times}{\pm} \underset{س \to أ}{\text{نها}}\ هـ(س)$

③ اذا كانت : $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ هـ(س) \neq ٠$ فإن :

$$\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)}{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ هـ(س)}$$

④ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \left(ق(س) \right)^{ن} = \left(\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) \right)^{ن}$

⑤ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)}$

بشرط $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) > ٠$ عندما ن زوجي .

⑥ اذا كانت ق(س) كثير حدود فإن

$\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س) = ق(أ)$

---

① اذا كان :

$ق(س) = س^٢ - س - ٦$ ، $هـ(س) = س^٢ - ٢س - ٣$

جد :

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(ق(س) + هـ(س) \right)$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(س^٢ - س - ٦ + س^٢ - ٢س - ٣ \right)$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \left(٢س^٢ - ٣س - ٩ \right) = -١٠$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ هـ^{٣}(س) = \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ (هـ(س))^{٣}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ (س^{٢} - ٢س - ٣)^{٣} = (-٣)^{٣} = -٢٧$

---

٣) $\underset{س \to -١}{\text{نها}}\ \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \underset{س \to -١}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} - ٢س - ٣}$

$= \frac{١ + ١ - ٦}{١ + ٢ - ٣} = \frac{-٤}{٠}$

غير موجودة.

---

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \frac{هـ(س)}{ق(س)} = \underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س^{٢} - س - ٦} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ١)}{\cancel{(س - ٣)}(س + ٢)} = \frac{٤}{٥}$

---

③ إذا كانت:

$\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س) = ٢$ ، $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ هـ(س) = ٤$

جد:

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ (ق(س) \times هـ(س) + ٥س)$

$= ٢ \times ٤ + ١٥ = ٢٣$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ (ق^{٣}(س) - \sqrt{هـ(س)} + ٧)$

$= (٢)^{٣} - \sqrt{٤} + ٧ = ١٣$

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \left(س^{٢} ق(س) - \frac{هـ(س)}{ق(س)}\right)$

$= ٩ \times ٢ - \frac{٤}{٢} = ١٦$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{٥س + ١} - ق(س)}{هـ(س) - ٦}$

$= \frac{٤ - ٢}{٤ - ٦} = \frac{٢}{-٢} = -١$

---

③ اذا كان ق(١) = ٣

$\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ (٧س - ٢ق(س)) = ١١$

جد: $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \left(ق^{٢}(س) - \frac{٦}{ق(س)}\right)$

الحل:

$٧ - ٢\underset{س \to ١}{\text{نها}}\ ق(س) = ١١ \leftarrow \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ ق(س) = -٢$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نها}}\ \left(ق^{٢}(س) - \frac{٦}{ق(س)}\right) = (-٢)^{٢} - \frac{٦}{-٢} = ٧$

---

④ اذا كانت:

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢} + ق(س) + ٥}{ق(س) + ١} = ٣$

جد: $\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ (س^{٣} - ٢ق(س) + ٤)$

الحل:

$\frac{٤ + \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) + ٥}{\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) + ١} = ٣$

$٩ + \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) = ٣\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) + ٣$

$\therefore ٦ = ٢\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) \leftarrow \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ق(س) = ٣$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ (س^{٣} - ٢ق(س) + ٤) = ٨ - ٢ \times ٣ + ٤ = ٦$

---

⑤ اذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣، ٤)

وكانت:

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}}\ (س - ل(س)) = -١٠$

جد $\underset{س \to -٣}{\text{نها}}\ (ق^{٢}(س) - ٢ل(س))$

الحل:

ق(−٣) = ٤ ، $-٣ - \underset{س \to -٣}{\text{نها}}\ ل(س) = -١٠$

$\underset{س \to -٣}{\text{نها}}\ ل(س) = ٧$

$\therefore \underset{س \to -٣}{\text{نها}}\ (ق^{٢}(س) - ٢ل(س))$

$= (٤)^{٢} - ٢ \times ٧$

$= ١٦ - ١٤ = ٢$

⑥ اذا كان ع(س) كثير حدود باقي قسمته على (س−٢) يساوي ٥ جد:

نهـا(س←٢) (٣ع(س) + ٤س^{٢})

الحل:

باقي القسمة = ع(٢) = ٥

نهـا(س←٢) (٣ع(س) + ٤س^{٢}) = ٣ع(٢) + ١٦

= ٣×٥ + ١٦ = ٣١

⑦ اذا كانت:

نهـا(س←٣) ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦

جد: نهـا(س←١) (س^{٢} + ق(٢س+١) − ٢)

الحل: = ١ + نهـا(س←١) ق(٢س+١) − ٢

نفرض ص = ٢س+١ ، س←١ ، ص←٣

= −١ + نهـا(ص←٣) ق(ص)

= −١ + ٤ = ٣

⑧ اذا كانت:

نهـا(س←٥+) ق(س) = ٣ ، نهـا(س←٥−) ق(س) = ٨

ق(٥) = ٤

جد ا) نهـا(س←٢+) (ق(٧−س) + س^{٢} − ٢)

الحل:

= نهـا(س←٢+) ق(٧−س) + ٤ − ٢

= نهـا(س←٢+) ق(٧−س) + ٢

ص = ٧−س ، س←٢+ ، ص←٥−

= نهـا(ص←٥−) ق(ص) + ٢

= ٨ + ٢ = ١٠

٢) نهـا(س←١−) (٣س + ق($\frac{٥}{س}$) + ١)

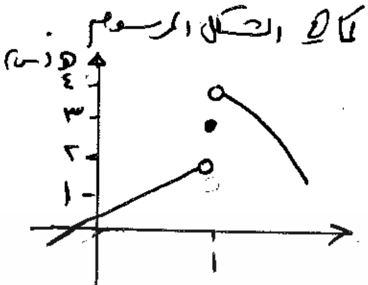
الحل: = ٣ + نهـا(س←١−) ق($\frac{٥}{س}$) + ١ | ص = $\frac{٥}{س}$

= ٤ + نهـا(ص←٥+) ق(ص) = ٤ + ٣ | س←١− ، ص←٥+

= ٧

⑨ اذا كانت: نهـا(س←٢) ق(س) = ٩

وكان هـ(س) كما في الشكل المرسوم



جد:

نهـا(س←٢−) (ق(س) − ٣هـ^{٢}(٥−٢س))

= نهـا(س←٢−) ق(س) − ٣ × نهـا(س←٢−) هـ^{٢}(٥−٢س)

ص = ٥−٢س ، س←٢− ، ص←١+

= ٩ − ٣ × نهـا(ص←١+) هـ^{٢}(ص)

= ٩ − ٣×١٦ = −٣٩

⑩ اذا كان:

ق(٣س−١) = $\frac{٢س^{٢} + س − ١٠}{س − ٢}$

جد نهـا(س←٥) ق(س)

الحل: ٣س−١ = ٥ ← ٣س = ٦

∴ س = ٢

نهـا(س←٢) ق(٣س−١) = نهـا(س←٢) $\frac{٢س^{٢}+س−١٠}{س−٢}$ = $\frac{٠}{٠}$

ص = ٣س−١

س←٢

ص←٥

نهـا(ص←٥) ق(ص) = نهـا(س←٢) $\frac{(٢س+٥)\cancel{(س−٢)}}{\cancel{س−٢}}$ = ٩

تدريب ① اذا كانت:

نهـا(س←١) (ق(س) + ٣ق(٣س−٢)) = ١٢

جد نهـا(س←١) (٣س ق(س) − ٥)

تدريب ②: اذا كانت: نهـا(س←٤) (س + ق(س−١)) = ٩

جد نهـا(س←١−) (ق(١−٢س) − $\frac{٣}{س}$)

⑪ اذا كانت :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س - ٢} = ٦$$

فجد :

١) $\lim_{س \to ٢} \left(٣ق^{٢}(س) - ٥س \right)$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س^{٢} + ٢س - ٨}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٣س - ٦)\, ق(س)}{٤ - ق(س)}$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق^{٢}(س) - ق(س) - ١٢}{س^{٢} - ٤}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) + س^{٢} - ٨}{٢ - س}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١٢}{ق(س)} - ٣}{س^{٢} + س - ٦}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} ق(س) - ٣٢}{٢س - س^{٢}}$

الحل :

في النهاية المعطاة ← $\frac{\lim_{س \to ٢} ق(س) - ٤}{صفر} = ٦$

$$\therefore \boxed{\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٤}$$

$① = ٣ \times (٤)^{٢} - ٥ \times ٢ = ٣٨ .$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{(س - ٢)(س + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س - ٢} \times \frac{١}{٦}$

$= ٦ \times \frac{١}{٦} = ١$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣(س - ٢)\, ق(س)}{٤ - ق(س)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{٤ - ق(س)} \times ٣ \times ٤$

$= -\frac{١}{٦} \times ١٢ = -٢ .$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{(ق(س) - ٤)(ق(س) + ٣)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{س - ٢} \times \frac{٤ + ٣}{٤}$

$= ٦ \times \frac{٧}{٤} = \frac{٢١}{٢}$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{٢ - س} + \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٨ + ٤}{٢ - س}$

$= -٦ + \lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)\overset{-١}{\cancel{(س - ٢)}}}{\cancel{٢ - س}} = -١٠$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{١٢ - ٣ق(س)}{ق(س)} \times \frac{١}{(س - ٢)(س + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - ق(س)}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{٣}{(س + ٣)\, ق(س)}$

$= -٦ \times \frac{٣}{٥ \times ٤} = \frac{-٩}{١٠}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} ق(س) - ٨ق(س)}{س(٢ - س)} + \lim_{س \to ٢} \frac{٨ق(س) - ٣٢}{س(٢ - س)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)(س^{٣} - ٨)}{س(٢ - س)} + \lim_{س \to ٢} \frac{٨(ق(س) - ٤)}{س(٢ - س)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)\overset{-١}{\cancel{(س - ٢)}}(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س\cancel{(٢ - س)}} + \frac{٨}{٢} \times \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٤}{٢ - س}$

$= \frac{-٤ \times ١٢}{٢} + ٤ \times -٦$

$= -٢٤ - ٢٤ = -٤٨ .$

⑫ اذا كان ق كثير حدود وكانت :

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)+٥}{س-٣} = ٤$$

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left(ق(س) - ٢س + ٣ب\right) = ٧$$

جد الثابت ب .

الحل :

في النهاية الاولى ← $\frac{ق(٣)+٥}{\text{صفر}} = ٤$

$∴ \boxed{ق(٣) = -٥}$

في النهاية الثانية :

$ق(٣) - ٦ + ٣ب = ٧$

$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ١٨ \longrightarrow ب = ٦$

تدريب :

① اذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-٢}{س-٣} = ٤$

جد : أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢-ق(س)}{\sqrt{س^{٢}-٨}-١}$

ب) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^{٢}-س-٦}{ق(س)-٢} + ٤ق(س)\right)$

جـ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س - \frac{٦}{ق(س)}}{٣-س}$

② اذا كان ق كثير حدود وكانت

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)}{س} = ٣$ جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق^{٢}(س)}{س}$

③ اذا كانت :

$$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-٣}{س-٤} = ٦$$

جد $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-٢س+٥}{س-٤}$

تمرين $\boxed{٨}$

$\boxed{١}$ اذا كانت : $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} ق(س) = ٣$ ، $ق(-١) = ٥$

$$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \left(ق^{٣}(س) + ٢هـ(س) - \frac{٢}{س}\right) = ١٩$$

جد $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \left(٣س\,هـ(س) + ٧\right)$

$\boxed{٢}$ اذا كانت : $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} ق(س) = ٣$ ، $ق(٥) = ٢$

جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \left(ق(٢س+١) - س + ٥\right)$

$\boxed{٣}$ اذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(س^{٢} + ٣ق(٤س-١)\right) = ٧$

جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-٢س}{س^{٢}-١}$

$\boxed{٤}$ اذا كان ق(س) كثير حدود وكانت

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)+٥}{س} = \frac{١}{٢}$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(ق(س) - ٥ + ٣جـ\right) = ٢$$

جد الثابت جـ .

$\boxed{٥}$ اذا كانت : $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-٢}{١-س} = ٣$

جد أ) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - \sqrt{س^{٢}+٣}}{س-١}$

ب) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٢س+١)^{٢}ق(س) - ١٨}{١-س}$

$\boxed{٦}$ اذا كانت $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق(٥-س) - ٨}{س-٢} = ٤$

جد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ٨}{س^{٢}-٩}$

نهاية الاقتران المتشعب

لإيجاد نهاية هذا الاقتران عند نقطة

تحدد نوعها : فإذا كانت :

١) نقطة تحول : نجد النهاية عن اليمين واليسار

٢) نقطة عادية : نعوض مباشرة في قاعدتها

٣) طرف فترة : النهاية غير موجودة لكنها موجودة من احدى الجهات .

① اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س + ٤ & ، \quad س = ١ \\ س^٣ - ٨ & ، \quad ١ < س < ٣ \\ ٢س^٢ & ، \quad ٣ \le س < ٤ \end{cases}$$

جد :

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} (س^٣ - ٨) = \text{صفر}$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} ق(س)$ غ.م

٣) $\underset{س \to ١^+}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ١^+}{\text{نها}} (س^٣ - ٨) = -٧$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} ق(س)$

$\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}} ٢س^٢ = ١٨$ ، $\underset{س \to ٣^-}{\text{نها}} (س^٣ - ٨) = ١٩$

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نها}} ق(س)$ غ.م

٥) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} ق(س)$ غ.م

٦) $\underset{س \to ٤^-}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٤^-}{\text{نها}} ٢س^٢ = ٣٢$.

٧) $\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}} (٥س - ق(س) + ٢)$

$= ١٥ - ١٨ + ٢ = -١$

② اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤}{\sqrt{٢س} - ٢} & ، \quad س > ٢ \\ \dfrac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢} & ، \quad -١ < س < ٢ \end{cases}$$

جد :

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢} = ٦$

٢) $\underset{س \to -١^+}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to -١^+}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢} = ٥$

٣) $\underset{س \to ٨}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٨}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٤}{\sqrt{٢س} - ٢} = \dfrac{٦٠}{٢} = ٣٠$

٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س)$

$$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - ٤}{\sqrt{٢س} - ٢} \times \dfrac{\overset{④}{\sqrt{٢س} + ٢}}{\sqrt{٢س} + ٢}$$

$$= \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{٤(س^٢ - ٤)}{٢س - ٤} = \underset{س \to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{٤\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{٢\cancel{(س - ٢)}}$$

$= ٨$

$$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ + ٤س - ١٢}{س - ٢} = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س - ٢)}(س + ٦)}{\cancel{س - ٢}}$$

$= ٨$

$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) = ٨$

③ اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ + ٣س - ٤}{س - ١} & ، \quad س \ne ١ \\ س^٢ + ٣ & ، \quad س = ١ \end{cases}$$

جد :

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ + ٣س - ٤}{س - ١} = ٤$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ + ٣س - ٤}{س - ١} = ١٠$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} ق(س) = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^٣ + ٣س - ٤}{س - ١} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ٤)}{\cancel{س - ١}}$

$= ٦$

تدريب :

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{(٣س+١)^٣ - ٢٧}{س - ١} , & -٢ \leq س < ١ \\[2ex] \dfrac{١ - س}{٢ - \sqrt{س^٢ + ٣}} , & س \geq ١ \end{cases}$$

جد :

١) $\lim\limits_{س \to ٠} ق(س)$ ٢) $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(٢س - ٥)$

$$٥ = \lim_{س \to ١^-} \frac{٢س^٢ - أس - ٢ + أ}{س - ١}$$

$$٥ = \lim_{س \to ١^-} \frac{٢س^٢ - ٢}{س - ١} + \lim_{س \to ١^-} \frac{أ - أس}{س - ١}$$

$$٥ = \lim_{س \to ١^-} \frac{٢\cancel{(١-س)}(١+س)}{\cancel{١-س}} + \lim_{س \to ١^-} \frac{أ\overset{-١}{\cancel{(١-س)}}}{\cancel{س-١}}$$

$٥ = ٤ - أ \leftarrow أ = -١$

$\therefore ب = ٣$.

④ إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ - ٢٧}{٢س^٢ + ٦س + ١٨} , & س \geq أ \\[2ex] س + ٥ , & س < أ \end{cases}$$

جد قيمة الثابت أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ موجودة

الحل :

$$\lim_{س \to أ^+} \frac{س^٣ - ٢٧}{٢س^٢ + ٦س + ١٨} = \lim_{س \to أ^-} (س + ٥)$$

$$\frac{(أ - ٣)\cancel{(أ^٢ + ٣أ + ٩)}}{٢\cancel{(أ^٢ + ٣أ + ٩)}} = أ + ٥$$

$\dfrac{أ - ٣}{٢} = أ + ٥ \leftarrow ٢أ + ١٠ = أ - ٣$

$\therefore أ = -١٣$

⑤ إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢س^٢ - أس - ب}{س - ١} , & س < ١ \\[2ex] ٨ - ٣س , & س > ١ \end{cases}$$

وكانت $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ موجودة ، جد أ ، ب

الحل :

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ١^+} (٨ - ٣س) = \lim_{س \to ١^-} \frac{٢س^٢ - أس - ب}{س - ١}$$

$\hookrightarrow \dfrac{٢ - أ - ب}{صفر}$

$\therefore ٢ - أ - ب = ٠ \leftarrow \boxed{ب = ٢ - أ}$

تدريب :

① إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٣ - أس + ٤}{س - ١} , & س < ١ \\[2ex] ب س - ٣ , & س \geq ١ \end{cases}$$

جد قيم أ ، ب التي تجعل $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ موجودة

② إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{أس^٢ - ٣س + ب}{س - ٢} , & س < ٢ \\[2ex] ب س + جـ , & س > ٢ \end{cases}$$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٥$

جد قيم أ ، ب ، جـ .

③
$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ - س , & ٠ \leq س < ٣ \\ ٤س - ١ , & س > ٣ \end{cases}$$

وكانت :

$$\lim_{س \to -٢} \left(٤ق(س) - ق(٥ - س) + ٢أ \right) = ١٩$$

جد قيمة الثابت أ .

نهاية اقتران القيمة المطلقة

← يجب التخلص من رمز ٥

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \left(٤\text{س} + |\text{س} - \text{س}^٢| + ٥\right)$

$= -٨ + |-٦| + ٥ = ٣$

٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{|٢\text{س} - ١| - ٤}{\text{س}^٢ - ٥\text{س}} = \dfrac{٥ - ٤}{٩ - ١٥}$

$= -\dfrac{١}{٦}$

⊖

٣) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{|٩ - \text{س}^٢| - ٧}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩ - ٧}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢٠}$

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٤})(\text{س} + ٤)}{(\cancel{\text{س} - ٤})(\text{س} + ٥)} = \dfrac{٨}{٩}$

⊖ ⊕

٤) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{|٣\text{س} + ١| - |\text{س}^٢ - ١١|}{٨ - \text{س}^٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س} + ١ - (١١ - \text{س}^٢)}{٨ - \text{س}^٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠}{٨ - \text{س}^٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\overset{-١}{(\cancel{\text{س} - ٢})}(\text{س} + ٥)}{(\cancel{٢ - \text{س}})(٤ + ٢\text{س} + \text{س}^٢)} = \dfrac{-٧}{١٢}$

⊖

٥) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\left|٥\text{س} - |\text{س}^٢ - ٣|\right| - ٤}{\text{س} - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

⊕

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{|٥\text{س} + \text{س}^٢ - ٣| - ٤}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٦}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ١})(\text{س} + ٦)}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٧$

⓪

٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + |٦ - ٢\text{س}| - ٩}{\text{س} - ٣} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$٦ - ٢\text{س} = ٠$

$\text{س} = ٣$

٦-٢س ٢س-٦

\+ −

←——|——→

٣

$\underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٦ - ٩}{\text{س} - ٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ٥)}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ٨$

$\underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + ٦ - ٢\text{س} - ٩}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٣}{\text{س} - ٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٣})(\text{س} + ١)}{\cancel{\text{س} - ٣}} = ٤$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ + |٦ - ٢\text{س}| - ٩}{\text{س} - ٣}$ غ.م .

٧) إذا كان :

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٣ - ٢\text{س} & ،\ \text{س} \le ٢ \\ \dfrac{|٤ - \text{س}^٢|}{٥\text{س} - \text{س}^٢ - ٦} & ،\ \text{س} > ٢ \end{cases}$

جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{ق(س)}$

الحل : ⓪

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{|٤ - \text{س}^٢|}{٥\text{س} - \text{س}^٢ - ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$٤ - \text{س}^٢ = ٠$

$\text{س} = \pm ٢$

٤-س² ٤-س² ٤-س²

− + −

←——|——|——→

-٢ ٢

$= \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{-\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٦}$

$= \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نها}} \dfrac{(\cancel{\text{س} - ٢})(\text{س} + ٢)}{(\cancel{\text{س} - ٢})(-\text{س} + ٣)} = ٤$

$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نها}} (\text{س}^٣ - ٢\text{س}) = ٨ - ٤ = ٤$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{ق(س)} = ٤$.

٨) جد الثابت أ اذا كانت :

١) $\text{نها}_{س \to أ} \frac{|٢س - ١| - ٣}{٢س - ٢أ} = -١$

الحل :

تعوض ← $\frac{|٢أ - ١| - ٣}{\text{صفر}}$

$\therefore |٢أ - ١| - ٣ = ٠ \leftarrow |٢أ - ١| = ٣$

إما $٢أ - ١ = ٣$ أو $٢أ - ١ = -٣$

$أ = ٢$ أو $٢أ = -٢$

$أ = -١$ ✓

$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{\overset{\oplus}{|٢س - ١|} - ٣}{٢س - ٤} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{\cancel{٢س - ١ - ٣}}{\cancel{٢س - ٤}} = ١$

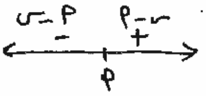
$\therefore أ = ٢$ مرفوض ← $\boxed{أ = -١}$
X

٢) $\text{نها}_{س \to أ} ق(س)$ موجودة .

$$حيث\ ق(س) = \begin{cases} \frac{|س - أ|}{س - أ} & ، س < أ \\ ٣س + ٨ & ، س > أ \end{cases}$$

الحل :

$\text{نها}_{س \to أ^+} (٣س + ٨) = \text{نها}_{س \to أ^-} \frac{\overset{\odot}{|س - أ|}}{س - أ}$



$٣أ + ٨ = \text{نها}_{س \to أ^-} \frac{\overset{-١}{\cancel{أ - س}}}{\cancel{س - أ}}$

$٣أ = -٩ \leftarrow أ = -٣$.

تدريب :

١ جد النهايات التالية :

١) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{١}{س - ٣} \left(\frac{٦}{|س - س^٢|} - ١ \right)$

٢) $\text{نها}_{س \to -١} \frac{\sqrt{س + ٥} - |٣ - س|}{س + ١}$

٣) $\text{نها}_{س \to ٤^+} \frac{|٨ - ٢س| - س^٢ + ١٦}{٣ - |س - ١|}$

٤) $\text{نها}_{س \to ١} ق(س)$

$$حيث\ ق(س) = \begin{cases} \frac{|س - |س - ٢||}{س - ١} & ، س < ١ \\ س^٢ + ١ & ، س \geq ١ \end{cases}$$

$\boxed{٣}$ جد قيمة الثابت جـ اذا كانت :

$\text{نها}_{س \to ٣} ق(س)$ موجودة

$$حيث\ ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{|س - ٣|} & ، س \geq ٣ \\ جـس^٢ - ٤ & ، س < ٣ \end{cases}$$

٩) جد النهايات التالية :

١) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{|س^٢ - ٥س + ٦|}{|٣ - س|} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

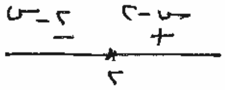
$= \text{نها}_{س \to ٣} \left| \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{٣ - س} \right|$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \left| \frac{\overset{-١}{\cancel{(س - ٣)}}(س - ٢)}{\cancel{٣ - س}} \right| = |-١| = ١$

٢) $\text{نها}_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{\sqrt{(س - ٢)(س - ٢)}} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{\sqrt{(س - ٢)^٢}}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{\underset{\odot}{|س - ٢|}}$



$\text{نها}_{س \to ٢^+} \frac{\overset{-١}{\cancel{(٢ - س)}}(٢ + س)}{\cancel{س - ٢}} = -٤$

$\text{نها}_{س \to ٢^-} \frac{\overset{١}{\cancel{(٢ - س)}}(٢ + س)}{\cancel{٢ - س}} = ٤$

$\therefore \text{نها}_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢}{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}}$ غير موجودة

٣) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{|س^٢ - س^٣|}{٢س^٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⓪

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{|س^٢(١ - س)|}{٢س^٢}$

$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{|س^٢||١ - س|}{٢س^٢}$

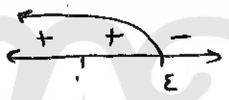
$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{\cancel{س^٢}|١ - س|}{٢\cancel{س^٢}} = \frac{١}{٢}$.

٤) $\text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{\sqrt{٤س^٢ - س^٣}}{س} = \frac{\sqrt{\text{صفر}}}{\text{صفر}}$ ؟

$٤س^٢ - س^٣ = ٠$

$س^٢(٤ - س) = ٠$

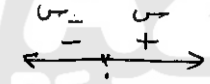
$س = ٠ \text{ ، } س = ٤$



$= \text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{\sqrt{س^٢(٤ - س)}}{س}$

$= \text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{|س|\sqrt{٤ - س}}{س}$ ⓪

$= \text{نها}_{س \to ٠^-} \frac{-\cancel{س}\sqrt{٤ - س}}{\cancel{س}} = -٢$



تدريب : جد النهايات التالية :

١) $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}}{|س^٢ - ٨س + ١٥|}$

٢) $\text{نها}_{س \to ٠^-} س\sqrt{\frac{٩}{س^٢} - ١}$

تمرين $\boxed{٩}$

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $\text{نها}_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٣} - ٢|س|}{٢س^٢ - ٥س - ١٢}$

٢) $\text{نها}_{س \to ٢^+} \frac{|٤ - ٢س| س^٢}{٢س^٢ - ٨}$

٣) $\text{نها}_{س \to ١^-} \frac{\left|\frac{١}{س + ٣}\right| - \frac{١}{٤}}{|س - ١|}$

٤) $\text{نها}_{س \to ٠^+} ٣س \sqrt{\frac{٩}{س^٢} - \frac{٤}{س}}$

$\boxed{٢}$ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{\frac{١}{٤}س^٢ - ١}{س - ٢} & \text{، } ٠ < س < ٢ \\ ٧ - ٣س & \text{، } س \geq ٢ \end{cases}$

جد ١) $\text{نها}_{س \to ١} ق(س)$ ٢) $\text{نها}_{س \to ٢} ق(س)$

$\boxed{٣}$ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{|٢ - ٢س^٢|}{س - ١} & \text{، } س > ١ \\ ٢س|س - ٢| & \text{، } س \leq ١ \end{cases}$

جد $\text{نها}_{س \to ١} ق(س)$

$\boxed{٤}$ اذا كانت $\text{نها}_{س \to ٣} \frac{٢ - |س + أ|}{س - ٣} = ١$

جد الثابت أ .

$\boxed{5}$ إذا كان:

$$\text{هـ}(\text{س})=\begin{cases}\text{س}^2-3 & ،\ \text{س}>1\\ 2-\text{أ}\text{س} & ،\ \text{س}\le 1\end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\left(2\text{س}-3\,\text{هـ}(\text{س})\right)=5$

جد الثابت أ

$\boxed{6}$ إذا كانت: $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ق}(\text{س})-4}{\text{س}-2}=12$

(أ) جد النهايات التالية:

1) $\underset{\text{س}\to 2^+}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ق}(\text{س})-4}{|4-\text{س}^2|}$

2) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ق}(\text{س})-|2\text{س}|}{2-\text{س}}$

(ب) إذا كانت:

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\left(3\,\text{هـ}^2(\text{س})-\text{ب}\,|\text{س}-4|\right)=30$

جد الثابت ب.

$\boxed{7}$ إذا كان:

$$\text{ق}(\text{س})=\begin{cases}\sqrt{3\text{س}+\text{أ}} & ،\ \text{س}<2\\ \text{أ} & ،\ \text{س}\ge 2\end{cases}$$

وكانت $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\text{ق}(\text{س})$ موجودة

جد الثابت أ.

نهاية الاقتران الصحيح

↓

يجب التخلص من رمزه فورا

فإذا كان:

التعويض داخله:

- كسر: نحسب صحيحه.
- صحيح: نستخدم القاعدة التالية:

نقارن اشارة معامل س مع الجهة فإذا كانت

1) متشابهة: نأخذ التعويض نفسه
2) مختلفة: التعويض − 1

$\boxed{1}$ جد النهايات التالية:

1) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\left(3\text{س}+[2\text{س}+0.7]\right)$ ‏2.7

$=\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\left(3\text{س}+2\right)=5$

2) $\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}\dfrac{4\text{س}^2-[2-\text{س}]}{\text{س}-\frac{1}{2}}$ ‏1.5

$=\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}\dfrac{4\text{س}^2-1}{\text{س}-\frac{1}{2}}=\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}\dfrac{(2\text{س}-1)(2\text{س}+1)}{\text{س}-\frac{1}{2}}$

$=\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}}\dfrac{2\cancel{(\text{س}-\frac{1}{2})}(2\text{س}+1)}{\cancel{\text{س}-\frac{1}{2}}}=2\times 2=4$

3) $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نهـا}}\dfrac{[\frac{\text{س}}{2}-1]-2\text{س}}{|\text{س}^2-\text{س}|-2}$ ‏−1.5

⊕ ←

$=\underset{\text{س}\to -1}{\text{نهـا}}\dfrac{-2-2\text{س}}{\text{س}^2-\text{س}-2}$

$=\underset{\text{س}\to -1}{\text{نهـا}}\dfrac{-2\cancel{(1+\text{س})}}{\cancel{(\text{س}+1)}(\text{س}-2)}=\dfrac{2}{3}$

تدريب:

جد $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{س}[\text{س}+2.5]-\text{س}^2-4}{|2\text{س}-5|-1}$

٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \left(س^٢ + \left[\frac{س}{٢} + ٣ \right] \right)$ ④

$\lim\limits_{س \to ٢^+} (س^٢ + ٤) = ٨$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} (س^٢ + ٣) = ٧$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢} \left(س^٢ + \left[\frac{س}{٢} + ٣ \right] \right)$ غ.م

٥) $\lim\limits_{س \to ١} (س^٢ + ٣س - ٤) [س + ٥]$ ⑥

$\lim\limits_{س \to ١^+} (س^٢ + ٣س - ٤) \times ٦ = صفر \times ٦ = صفر$

$\lim\limits_{س \to ١^-} (س^٢ + ٣س - ٤) \times ٥ = صفر \times ٥ = صفر$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} (س^٢ + ٣س - ٤) [س + ٥] = صفر$

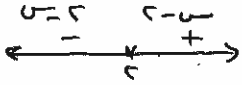
٦) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س + [٥ - س]}{س - ١}$ ②

$\lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{س - ١}{س - ١} = ١$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} \frac{س - ٢}{س - ١} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س - [٥ - س]}{س - ١}$ غ.م

٧) $\lim\limits_{س \to ٢} [س + |س - ٢|]$ ⓪



$\lim\limits_{س \to ٢^+} [س + س - ٢]$

$= \lim\limits_{س \to ٢^+} [٢س - ٢] = ٢$ ②

$\lim\limits_{س \to ٢^-} [\cancel{س} + ٢ - \cancel{س}] = ٢$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢} [س + |س - ٢|] = ٢$

تدريب :

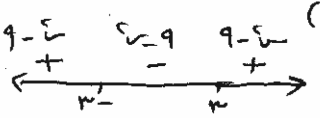
① $\lim\limits_{س \to} [س[س + ٣] - ١]$

③ $\lim\limits_{س \to ٢^-} \frac{[س - ٤] + ٢س + ١}{|س^٢ - ٢س|}$

⑧ إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س + \left[٤ - \frac{١}{٣}س\right] & ، س \le ٣ \\ \frac{|س^٢ - ٩|}{س - ٣} & ، س > ٣ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$



$\lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{|س^٢ - ٩|}{س - ٣}$

$= \lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \lim\limits_{س \to ٣^+} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{\cancel{س - ٣}} = ٦$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} \left(س + \left[٤ - \frac{١}{٣}س\right] \right)$ ③

$= \lim\limits_{س \to ٣^-} (س + ٣) = ٦$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٦$

⑨ إذا كان :

$ق(س) = [س + ٥]$ ، $هـ(س) = [٤ - س]$

جد $\lim\limits_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$

$= \lim\limits_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س])$ ⑥ ③

$\lim\limits_{س \to ١^+} (٦ + ٢) = ٨$

$\lim\limits_{س \to ١^-} (٥ + ٣) = ٨$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س)) = ٨$

تدريب :

$$ق(س) = \begin{cases} ٤س + \left[\frac{س}{٢}\right] & ، س \le ٢ \\ \frac{|٨ - ٤س|}{٣ - س} & ، س > ٢ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

$\boxed{٢}$ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - ٤أ &، س \geq ٣ \\ [٦ - س] &، س < ٣ \end{cases}$$

وكانت $\underset{س \to ٣}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة . جد الثابت أ

الحل :

$$\underset{س \to ٣^+}{\text{نها}} (س^2 - ٤أ) = \underset{س \to ٣^-}{\text{نها}} [٦ - س] ③$$

$$٩ - ٤أ = ٣ \longrightarrow أ = \frac{٣}{٢} .$$

$\boxed{٣}$ جد قيمة (قيم) الثابت أ

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} [٢س + أ] = ٥$

حيث أ عدد غير صحيح

الحل :

$$[٢ + أ] = ٥ \longrightarrow [أ] = ٣$$

$$\therefore ٣ < أ < ٤$$

٢) $\underset{س \to أ}{\text{نها}} [\frac{١}{٣}س + ١] = ٣$

أ عدد غير صحيح

الحل !

$$[\frac{١}{٣}أ + ١] = ٣ \longrightarrow [\frac{١}{٣}أ] = ٢$$

$$٢ < \frac{١}{٣}أ < ٣ \longrightarrow ٦ < أ < ٩$$

$$\therefore أ = (٦ ، ٩) - \{٧ ، ٨\}$$

٣) $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة .

$$ق(س) = \begin{cases} ٦ - [س] &، س \geq أ \\ [س - ٢] &، س < أ \end{cases}$$

أ : عدد غير صحيح

الحل :

$$\underset{س \to أ^+}{\text{نها}} (٦ - [س]) = \underset{س \to أ^-}{\text{نها}} ([س] - ٢)$$

$$٦ - [أ] = [أ] - ٢$$

$$٢[أ] = ٨$$

$$[أ] = ٤$$

$$\therefore ٤ < أ < ٥$$

٤) $\underset{س \to أ^-}{\text{نها}} [٤س - ١] = ١٠$

أ : عدد صحيح .

الحل :

$$\underset{س \to أ^-}{\text{نها}} [٤س] = ١١$$

$$٤أ - ١ = ١١$$

$$٤أ = ١٢ \longrightarrow أ = ٣ .$$

٥) $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة .

$$ق(س) = \begin{cases} [س + ٢] &، س < أ \\ ٥ - [س] &، س > أ \end{cases}$$

أ : عدد صحيح

الحل :

$$\underset{س \to أ^+}{\text{نها}} (٥ - [س]) = \underset{س \to أ^-}{\text{نها}} ([س] + ٢)$$

$$٥ - أ = أ - ١ + ٢$$

$$٥ - أ = أ + ١ \longrightarrow ٢أ = ٤ \longrightarrow أ = ٢$$

تدريب :

جد الثابت أ :

١) $\underset{س \to أ}{\text{نها}} [٧ - س] = ٩$

أ : عدد غير صحيح

٢) $\underset{س \to أ^-}{\text{نها}} [\frac{س}{٢} + ٣] = ٥$

أ : عدد صحيح زوجي

٣) $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\ ق(س)$ موجودة

$$ق(س) = \begin{cases} [أ - \frac{س}{٢}] &، س < أ \\ ٤ &، س \geq أ \end{cases}$$

حيث أ : عدد غير صحيح

٦) نهـا س←أ+ [٣س - ٥] = ٧

الحل: نهـا س←أ+ [٣س] = ١٢

التعويض = كسر

[٣أ] = ١٢ ← ١٢ < ٣أ < ١٣

أو ٤ < أ < ١٣/٣ .

التعويض = صحيح

٣أ = ١٢ ← أ = ٤

∴ أ = [٤ ، ١٣/٣) .

---

٧) نهـا س←٢- [٥س + أ] = ١٦

التعويض = كسر

[١٠ + أ] = ١٦ ← [أ] = ٦

أو ٦ < أ < ٧

التعويض = صحيح

١٠ + أ - ١ = ١٦ ← أ = ٧

∴ أ = (٦ ، ٧] .

---

٤ إذا كان ق(س) = [٢ + س]

١) ما قيم أ بحيث أن نهـا س←أ ق(س) = ٥

٢) ما قيم أ بحيث أن نهـا س←جـ ق(س) غ.م

الحل :

١) نهـا س←أ [٢ + س] = ٥

نهـا س←أ [س] = ٣

التعويض = كسر فقط .

[أ] = ٣ ← ٣ < أ < ٤

٢) نهـا س←أ [٢ + س] غ م

∴ التعويض = صحيح ← أ = ص

---

٥ ما قيم أ بحيث أن :

نهـا س←أ ٢ / [س - ٣] غير موجودة .

الحل : نهـا س←أ ٢ / ([س] - ٣) غ.م

التعويض = صحيح ← أ = ص

و المقام = ٠ ← [أ] - ٣ = ٠

[أ] = ٣ ← ٣ < أ < ٤

∴ أ = ص ∪ (٣ ، ٤) .

تدريب :

① جد قيم الثابت أ بحيث أن

نهـا س←٢+ [أ - ٤س] = ١

② جد قيم الثابت جـ بحيث أن

نهـا س←جـ [٢,٠ س] = -١

③ جد قيم الثابت أ بحيث أن

١) نهـا س←أ [س/٢ + ٣] غير موجودة .

٢) نهـا س←أ- [٧ - س] = ١٠

تمرين $\boxed{١٠}$

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{[\frac{\text{س}}{٢} - ١] + \text{س}}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{[٥ - \text{س}] - \text{س} - ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{[\text{س} - \frac{١}{٢}]}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نها}} \dfrac{\left|[\text{س}] - \text{س}^٢\right|}{\text{س} - ١}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - [٢ - \text{س}]^٢ + ١٦}{٣ - \text{س}}$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{ق(س)}$ حيث

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |١١ - ٣\text{س}| & ، \text{س} < ٢ \\ [\frac{\text{س}}{٢}] + ٤ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

٧) جد قيم الثابت أ :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}^+}{\text{نها}} [٥ - ٢\text{س}] = ٩$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}} [٣\text{س} - ٥]$ غ.م

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}} [\frac{١}{٢}\text{س} + ١] = ٤$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}} [\frac{١}{٥}\text{س} + ٣]$ موجودة .

نهاية الاقترانات المثلثية .

بالتعويض المباشر

وإذا كان الناتج = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نستخدم النظريات التالية :

① $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

② $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$

مثال :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ٥س}}{٢\text{س}} = \dfrac{٥}{٢}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ٣س}}{٢\text{س}} = \dfrac{\text{جا } ٣\frac{\pi}{٢}}{٢ \times \frac{\pi}{٢}} = \dfrac{-١}{\pi}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا ٤س}}{٧\text{س}} = \dfrac{٤}{٧}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ٣س}^٢}{٨\text{س}^٢} = \dfrac{٣}{٨}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا (س} - \pi)}{٤(\text{س} - \pi)} = \dfrac{١}{٤}$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا (س} + \frac{\pi}{٢})}{٣(\text{س} + \frac{\pi}{٢})} = \dfrac{\text{جا } \frac{\pi}{٢}}{٣\frac{\pi}{٢}} = \dfrac{٢}{٣\pi}$

٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{٦\text{س}}{\text{جا ٩س}} = \dfrac{٦}{٩} = \dfrac{٢}{٣}$

٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ٣س}}{\text{جا ٧س}} = \dfrac{٣}{٧}$

٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا ٥س}}{\text{جا ٨س}} = \dfrac{٥}{٨}$

١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا ٥(س} - \frac{\pi}{٤})}{\text{ظا ٢}(\frac{\pi}{٤} - \text{س})} = -\dfrac{٥}{٢}$.

تذكر أن :

$\boxed{١}$ $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$ ، $\text{قتاس} = \frac{١}{\text{جاس}}$

$\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{١}{\text{ظاس}}$

$\boxed{٢}$ المتطابقات المثلثية :

(أ) $\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$

$١ + \text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س}$

$١ + \text{ظتا}^٢\text{س} = \text{قتا}^٢\text{س}$

(ب) $\text{جا٢س} = ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$

$\text{جتا٢س} = \begin{cases} \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س} \\ ١ - ٢\,\text{جا}^٢\text{س} \\ ٢\,\text{جتا}^٢\text{س} - ١ \end{cases}$

(جـ) $\text{جاأ} - \text{جاب} = ٢\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}(\text{أ}+\text{ب})\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{أ}-\text{ب})$

$\text{جتاأ} - \text{جتاب} = -٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{أ}+\text{ب})\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}(\text{أ}-\text{ب})$

$\text{ظاأ} - \text{ظاب} = \text{ظا}(\text{أ}-\text{ب})\left(١ + \text{ظاأ}\,\text{ظاب}\right)$

$\boxed{٣}$ $\text{جا}-\text{س} = -\text{جاس}$

$\text{ظا}-\text{س} = -\text{ظاس}$

$\text{جتا}-\text{س} = \text{جتاس}$.

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٥س}\,\text{جتا٣س}}{\text{٤س}}$

$= \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٥س}}{\text{٤س}} \times \text{جتا٣س} = \frac{٥}{٤} \times ١$

$= \frac{٥}{٤}$

٢) $\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٣س}\,\text{ظا٢س}^٢}{\text{س}^٣}$

$= \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٣س}\,\text{ظا٢ر}^٢}{\text{س} \times \text{س}^٢}$

$= \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٣س}}{\text{س}} \times \frac{\text{ظا٢س}^٢}{\text{س}^٢} = ٣ \times ٢ = ٦$

٣) $\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا}^٢\text{٤س}}{\text{٥س}^٢}$

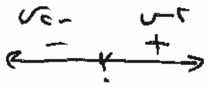
$= \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٤س}}{\text{٥س}} \times \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}} = \frac{٤}{٥} \times ٤ = \frac{١٦}{٥}$

٤) $\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٥س}\,\text{ظا}^٢\text{٣س}}{\text{٢س}^٣}$

$= \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا٥س}\,\text{ظا٣س}\,\text{ظا٣س}}{\text{٢س} \times \text{س} \times \text{س}}$

$= \frac{٥}{٢} \times ٣ \times ٣ = \frac{٤٥}{٢}$

٥) $\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا}|\text{٢س}|}{\text{٣س}}$



$\lim_{\text{س}\to٠^+} \frac{\text{جا٢س}}{\text{٣س}} = \frac{٢}{٣}$.

$\lim_{\text{س}\to٠^-} \frac{\text{جا}-\text{٢س}}{\text{٣س}} = -\frac{٢}{٣}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جا}|\text{٢س}|}{\text{٣س}}$ غ م .

٦) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{|جا س|}}{\text{٢س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{٢س}} = \frac{١}{٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{-جا س}}{\text{٢س}} = -\frac{١}{٢}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{|جا س|}}{\text{٢س}} \ \text{غ م .}$$

٧) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٩س − ٣جا٥س + ظا٤س}}{\text{٧س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٩\cancel{\text{س}}}{٧\cancel{\text{س}}} - \frac{\text{٣جا٥س}}{\text{٧س}} + \frac{\text{ظا٤س}}{\text{٧س}}$$

$$= \frac{٩}{٧} - \frac{١٥}{٧} + \frac{٤}{٧} = \frac{-٢}{٧}$$

٨) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٦س − ٢ظا٣س}}{\text{جا٤س − ٥س}}$$

الحل : نقسم البسط والمقام على س .
ونوزع النهايات .

$$= \frac{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٦س}}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢ظا٣س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا٤س}}{\text{س}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}}}$$

$$= \frac{٦ - ٤}{٤ - ٥} = -٢$$

٩) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س جا٣س + ظا}^{٢}\text{س}}{\text{٧س}^{٢} - \text{جا}^{٣}\text{س}}$$

الحل : نقسم على $\text{س}^{٢}$.

$$= \frac{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\text{س}}\text{جا٣س}}{\text{س}\cancel{^{٢}}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس ظاس}}{\text{س × س}}}{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٧\cancel{\text{س}^{٢}}}{\cancel{\text{س}^{٢}}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س جاس}}{\text{س}^{٢}}}$$

$$= \frac{٣ + ١ × ١}{٧ - ١ × ٠} = \frac{٤}{٧}$$

١٠) إذا كانت :

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أس}}{\text{٢س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا أس}}{\text{ب س − س}} = ٦$$

جد الثابتين أ ، ب .

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا أس}}{\text{٢س}} = ٦ \leftarrow \frac{\text{أ}}{٢} = ٦$$

$$\therefore \boxed{\text{أ} = ١٢}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا أس}}{\text{س(ب − ١)}} = ٦$$

$$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب − ١}} = ٦ \leftarrow \frac{١٢}{\text{ب − ١}} = ٦$$

$$\text{ب − ١} = ٢ \leftarrow \boxed{\text{ب} = ٣}$$

١١) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{٧س}^{٣} \text{ ظتا}^{٢}\text{٣س قتا٥س}\right)$$

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{٧س}^{٣} × \frac{١}{\text{ظا}^{٢}\text{٣س}} × \frac{١}{\text{جا٥س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٧س}}{\text{ظا٣س}} × \frac{\text{س}}{\text{ظا٣س}} × \frac{\text{س}}{\text{جا٥س}}$$

$$= \frac{٧}{٣} × \frac{١}{٣} × \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٤٥}$$

تدريب $\boxed{١}$ جد النهايات التالية

١) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٢س}^{٢} + \text{س ظا٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}$$

٢) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٥س − جا٤س + ظا٣س}}{\text{٢س − جا}^{٢}\text{س}}$$

٣) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{٣س} \left(\text{ظتا٢س + قتا٧س}\right)$$

$\boxed{٣}$ $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{٤س}^{٢} - \text{جا ب س}}{\text{ب س − ظا٤س}} = \frac{١}{٤}$$

جد الثابت ب .

١٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})}{٣\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} \times \text{جا}^{٢}\text{س}}{٣\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} \times \text{جاس} \times \text{جاس}}{٣\text{س} \times \text{س}}$

$= ١ \times \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{١}{٣}$.

١٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتاس}}{٤\text{س}^{٢}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$ ②

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{٨\text{س}^{٢}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{٨\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} \times \text{جاس}}{٨\text{س} \times \text{س}}$

$= \frac{١}{٨} \times ١ = \frac{١}{٨}$

١٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س جا}٣\text{س}}{\text{قا}٢\text{س} - ١} \times \frac{\text{قا}٢\text{س} + ١}{\text{قا}٢\text{س} + ١}$ ②

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٠\text{س جا}٣\text{س}}{\text{قا}^{٢}٢\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٠\text{س جا}٣\text{س}}{\text{ظا}^{٢}٢\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٠\text{س جا}٣\text{س}}{\text{ظا}٢\text{س ظا}٢\text{س}} = \frac{١٠}{٢} \times \frac{٣}{٢}$

$= \frac{١٥}{٢}$

١٥) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣\text{س ظا}٤\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جتاس})(١ + \text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{٣\text{س ظا}٤\text{س}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$ ②

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}) \times ٣}{٦\text{س ظا}٤\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس} \times \text{جاس} \times ٣}{٦\text{س} \times \text{ظا}٤\text{س}}$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٤} \times ٣ = \frac{١}{٨}$

١٦) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}٦\text{س}}{\text{جتا}٨\text{س} - ١} \times \frac{١ + \text{جتا}٦\text{س}}{١ + \text{جتا}٦\text{س}} \times \frac{\text{جتا}٨\text{س} + ١}{\text{جتا}٨\text{س} + ١}$ ② ②

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}^{٢}٦\text{س}}{\text{جتا}^{٢}٨\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^{٢}٦\text{س}}{-\text{جا}^{٢}٨\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٦\text{س جا}٦\text{س}}{-\text{جا}٨\text{س جا}٨\text{س}} = \frac{-٦}{٨} \times \frac{٦}{٨}$

$= \frac{-٩}{١٦}$

١٧) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}٥\text{س}}{١ - \text{جتا}٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢\text{جا}٣\text{س جا} -٢\text{س}}{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س})}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{٢}\text{جا}٣\text{س جا}٢\text{س}}{\cancel{٢}\text{جاس} \times \text{جاس}}$

$= ٣ \times ٢ = ٦$

١٨) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٢\text{س} - ٢\text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جاس جتاس} - ٢\text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جاس}(\text{جتاس} - ١)}{\text{س}^{٣}} \times \frac{\text{جتاس} + ١}{\text{جتاس} + ١}$ ②

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جاس}(\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١)}{٢\text{س}^{٣}}$

$= \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{٢}\text{جاس} \times - \text{جاس} \times \text{جاس}}{\cancel{٢}\text{س} \times \text{س} \times \text{س}} = ١ \times -١ \times ١$

$= -١$

١٩) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{ظا س} - \text{جا}٢\text{س}}{\text{س}^٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{ظا س} - ٢\text{جا س جتا س}}{\text{س}^٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{جا س} \left(\frac{١}{\text{جتا س}} - \text{جتا س} \right)}{\text{س}^٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} ٢\text{جا س} \times \dfrac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جتا س}} \times \dfrac{١}{\text{س}^٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{جا س} \times \text{جا س} \times \text{جا س}}{\text{جتا س} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{س}}$

$= ٢ \times ١ \times ١ \times ١ = ٢$

٢٠) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا}٢\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢\text{س})}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{٢\text{جا}^٢\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{٢}\,|\text{جا س}|}$ ⓪ ←

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{٢}\,\text{جا س}} = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}}{\sqrt{٢}\,\text{جا س}} - \dfrac{\text{جا س}}{\sqrt{٢}\,\text{جا س}}$

$= \dfrac{٢}{\sqrt{٢}} - \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = \dfrac{١}{\sqrt{٢}}$

$\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{-\sqrt{٢}\,\text{جا س}} = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}}{-\sqrt{٢}\,\text{جا س}} + \dfrac{\text{جا س}}{\sqrt{٢}\,\text{جا س}}$

$= -\dfrac{٢}{\sqrt{٢}} + \dfrac{١}{\sqrt{٢}} = \dfrac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا}٢\text{س}}}$ غ٠م

٢١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\sqrt{٢}\,\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{١ + \text{جتا س}}}{\sqrt{١ + \text{جتا س}}}$

$\sqrt{٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}}{٢\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{|\text{جا س}|}{٢\text{س}}$

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س}}{٢\text{س}} = \dfrac{١}{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{-\text{جا س}}{٢\text{س}} = -\dfrac{١}{٢}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\sqrt{٢}\,\text{س}}$ غ٠م

تدريب : جد النهايات التالية .

١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \text{س جتا}٣\text{س}}{\text{جا}^٣\text{س}}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \sqrt{\text{جتا س}}}{٢\text{س جا}٣\text{س}}$

٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{جا س جتا}٥\text{س} - \text{جا}٢\text{س}}{\text{س}^٣}$

٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا س} - \text{جا س}}{\text{س}^٣}$

٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{\text{قا}٧\text{س} - ١}$

٦) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{قا س} - ١}}$

٢٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \text{جا}^٢ ٣\text{س} - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}{\text{س}^٢} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^٢} \times \underset{\textcircled{\text{٢}}}{\frac{١ + \text{جتا}\,\text{س}}{١ + \text{جتا}\,\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣\text{س} \times \text{جا}٣\text{س}}{\text{س} \times \text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢}$

$= ٣ \times ٣ + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\text{س} \times \text{جا}\,\text{س}}{٢\text{س} \times \text{س}}$

$= ٩ + \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١٩}{٢}$

٢٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - \text{جتا}٣\text{س} - ٤\text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٥ - \text{جتا}٣\text{س} - ٤}{٢\text{س}^٢} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤ - ٤\text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{٢\text{س}^٢} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤(١ - \text{جتا}^٢\text{س})}{٢\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{٢\text{س}^٢} \times \underset{\textcircled{\text{٢}}}{\frac{١ + \text{جتا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\overset{٢}{\cancel{٤}}\,\text{جا}^٢\text{س}}{\cancel{٢}\text{س}^٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣\text{س}\,\text{جا}٣\text{س}}{٤\text{س} \times \text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}\,\text{س}\,\text{جا}\,\text{س}}{\text{س} \times \text{س}}$

$= \frac{٣}{٤} \times ٣ + ٢ \times ١ \times ١ = \frac{١٧}{٤}$

٢٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س}^٣ - ١}{\text{جا}(٢\text{س} - ٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\text{جا}٢(\text{س} - ١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ١}{\text{جا}٢(\text{س} - ١)} \times (\text{س}^٢ + \text{س} + ١)$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$

٢٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{س} - ٤\,\text{جا}(\text{س}^٢ - \text{س})}{٢\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{س}}{٢\text{س}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\overset{٢}{\cancel{٤}}\,\text{جا}\,\text{س}(\text{س} - ١)}{\cancel{٢}\text{س}} \times \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١}$

$= \frac{٣}{٢} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}\,\text{س}(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} - ١)} \times (\text{س} - ١)$

$= \frac{٣}{٢} - ٢ \times -١ = \frac{٧}{٢}$

٢٦) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا}\,\text{س})}{٣\text{س}^٢}$

اكل: زاويه دائريه

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا}\,\text{س})}{٣\text{س}^٢} \times \frac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{١ - \text{جتا}\,\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا}\,\text{س})}{١ - \text{جتا}\,\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{٣\text{س}^٢}$

$= ١ \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,\text{س}}{٣\text{س}^٢} \times \underset{\textcircled{\text{٢}}}{\frac{١ + \text{جتا}\,\text{س}}{١ + \text{جتا}\,\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\text{س} \times \text{جا}\,\text{س}}{٦\text{س} \times \text{س}} = \frac{١}{٦} \times ١ = \frac{١}{٦}$

٢٧) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\overset{\textcircled{\pi}}{\pi\text{س}}}{٢\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}(\pi\text{س} - \pi)}{٢\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}\,\pi(\text{س} - ١)}{٢(\text{س} - ١)} = -\frac{\pi}{٢}$

٢٨) $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \frac{\pi - \text{س}}{\text{جا}\,\underset{\textcircled{٢\pi}}{٢\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \frac{\pi - \text{س}}{\text{جا}(٢\text{س} - ٢\pi)}$

$= \underset{\text{س}\to \pi}{\text{نها}} \frac{\pi - \text{س}}{\text{جا}٢(\text{س} - \pi)} = -\frac{١}{٢}$

(٢π)

٢٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}(٢\pi - ٣س)}{٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}(\cancel{٢\pi} - ٣س - \cancel{٢\pi})}{٥س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا} -٣س}{٥س} = \frac{-٣}{٥}$

٣٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{\text{ظا}\,\pi س}$

(π)

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{\text{ظا}(\pi س - \pi)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{\text{ظا}\,\pi(س - ١)} \times (س + ٣)$

$= \frac{١}{\pi} \times ٤ = \frac{٤}{\pi}$

٣١) $\lim_{س \to ١} \frac{س\,\text{جا}\frac{\pi}{س}}{س - ١}$ ← (π)

$= \lim_{س \to ١} \frac{-س\,\text{جا}(\frac{\pi}{س} - \pi)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-\cancel{س}\,\text{جا}\,\pi(\frac{١}{س} - ١)}{\cancel{س}(\frac{١}{س} - ١)} = \pi$

٣٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{١ + \text{جتا}\,س}{(س - \pi)^٢} \times \frac{١ - \text{جتا}\,س}{١ - \text{جتا}\,س}$

②

$= \lim_{س \to \pi} \frac{١ - \text{جتا}^٢ س}{٢(س - \pi)^٢}$

(π) $= \lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}^٢ س}{٢(س - \pi)^٢}$

$= \lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}^٢(س - \pi)}{٢(س - \pi)^٢}$

$= \lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}(س - \pi)\,\text{جا}(س - \pi)}{٢(س - \pi)\,(س - \pi)}$

$= \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

($\frac{\pi}{٢}$)

٣٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}\,س}{٢س - \pi}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(س - \frac{\pi}{٢})} = -\frac{١}{٢}$

($\frac{\pi}{٢}$)

٣٤) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}س}{س^٢ - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}س)}{(س - ١)(س + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - س)}{س - ١} \times \frac{١}{س + ١}$

$= -\frac{\pi}{٢} \times \frac{١}{٢} = -\frac{\pi}{٤}$

($\frac{\pi}{٢}$)

٣٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتا}\,س}{\pi^٢ - ٤س^٢}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{(\pi - ٢س)(\pi + ٢س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)} \times \frac{١}{\pi + ٢س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢\pi} = \frac{١}{٤\pi}$

تدريب : جد النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}\,س}{\frac{س}{٣} - \pi}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٣\,\text{جا}\,\pi س - ٤}{٢ - س}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٧س + \text{جتا}(٣س + \frac{\pi}{٢})}{٢س}$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا}\,س}{(٢س - \pi)^٢}$

٣٦) $$\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{1-\sqrt{2}\,\text{جا}\,س}{4س-\pi}\times\frac{1+\sqrt{2}\,\text{جا}\,س}{\underset{\textcircled{2}}{1+\sqrt{2}\,\text{جا}\,س}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{1-2\,\text{جا}^2س}{2(4س-\pi)}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\overset{\frac{\pi}{2}}{\text{جتا}}\,2س}{2(4س-\pi)}=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}-2س\right)}{2(4س-\pi)}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,2\left(\frac{\pi}{4}-س\right)}{8\left(س-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{4}$$

طريقة أخرى :

$$\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\text{جا}\,س\right)}{4س-\pi}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{2}\left(\text{جا}\,\frac{\pi}{4}-\text{جا}\,س\right)}{4\left(س-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{2}\times2\,\text{جتا}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+س\right)\text{جا}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-س\right)}{4\left(س-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\times\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-س\right)}{4\left(س-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=2\times-\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$$

٣٧) $$\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نها}}\ \frac{2\,\text{جتا}\,س-1}{س-\frac{\pi}{3}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نها}}\ \frac{2\left(\text{جتا}\,س-\frac{1}{2}\right)}{س-\frac{\pi}{3}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نها}}\ \frac{2\left(\text{جتا}\,س-\text{جتا}\,\frac{\pi}{3}\right)}{س-\frac{\pi}{3}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نها}}\ \frac{2\times-2\,\text{جا}\,\frac{1}{2}\left(س+\frac{\pi}{3}\right)\text{جا}\,\frac{1}{2}\left(س-\frac{\pi}{3}\right)}{س-\frac{\pi}{3}}$$

$$=-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\underset{س\to\frac{\pi}{3}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,\frac{1}{2}\left(س-\frac{\pi}{3}\right)}{س-\frac{\pi}{3}}$$

$$=-2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=-\sqrt{3}\ .$$

٣٨) $$\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{3\,\text{ظا}\,س-3}{س-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{3(\text{ظا}\,س-1)}{س-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{3\left(\text{ظا}\,س-\text{ظا}\,\frac{\pi}{4}\right)}{س-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{3\,\text{ظا}\left(س-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\text{ظا}\,س\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{4}\right)}{س-\frac{\pi}{4}}$$

$$=3\times\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\left(س-\frac{\pi}{4}\right)}{س-\frac{\pi}{4}}\times(1+1)$$

$$=3\times1\times2=4$$

٣٩) $$\underset{س\to\frac{\pi}{6}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا}\,س-\sqrt{3}\,\text{جا}\,س}{6س-\pi}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{6}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{3}\,\text{جتا}\,س\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\text{ظا}\,س\right)}{6س-\pi}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{6}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{3}\,\text{جتا}\,س\left(\text{ظا}\,\frac{\pi}{6}-\text{ظا}\,س\right)}{6س-\pi}$$

$$=\underset{س\to\frac{\pi}{6}}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{3}\,\text{جتا}\,س\,\text{ظا}\left(\frac{\pi}{6}-س\right)\left(1+\text{ظا}\,\frac{\pi}{6}\,\text{ظا}\,س\right)}{6\left(س-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\underset{س\to\frac{\pi}{6}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{6}-س\right)}{6\left(س-\frac{\pi}{6}\right)}\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\cancel{3}}{2}\times-\frac{1}{6}\times\frac{4}{\cancel{3}}=-\frac{1}{3}$$

تدريب : جد النهايات التالية ،

١) $$\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\,س-\text{جتا}\,س}{س-\frac{\pi}{4}}$$

٢) $$\underset{س\to\frac{\pi}{6}}{\text{نها}}\ \frac{2\,\text{جتا}\,س-\sqrt{3}}{\pi-6س}$$

٣) $$\underset{س\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظتا}\,س-\text{ظا}\,س}{4س-\pi}$$

$$٤٠)\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}}\ \frac{٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} - ٣}{١ - ٢\,\text{جتا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}}\ \frac{٤\,(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}) - ٣}{١ - ٢\,\text{جتا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}}\ \frac{٤ - ٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س} - ٣}{١ - ٢\,\text{جتا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}}\ \frac{١ - ٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}{١ - ٢\,\text{جتا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(١ - ٢\,\text{جتا س})}\,(١ + ٢\,\text{جتا س})}{\cancel{١ - ٢\,\text{جتا س}}}$$

$$= ١ + ٢ \times \frac{١}{٢} = ٢$$

$$٤١)\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{١ + \text{جتا ٢س}}{\text{جا س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{١ + ١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{٢ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س} - ١}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{٢\,\overset{-١}{\cancel{(١ - \text{جا س})}}\,(١ + \text{جا س})}{\cancel{\text{جا س} - ١}}$$

$$= -٢ \times ٢ = -٤$$

$$٤٢)\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا ٢س}}{١ - \text{ظا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا ٢س}}{١ - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا ٢س}}{\frac{\text{جتا س} - \text{جا س}}{\text{جتا س}}} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتا ٢س جتا س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{جتا س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(\text{جتا س} - \text{جا س})}\,(\text{جتا س} + \text{جا س})\,\text{جتا س}}{\cancel{\text{جتا س} - \text{جا س}}} = ١$$

$$٤٣)\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا ٢س} - ٢\,\text{جتا س}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{٢\,\text{جا س جتا س} - ٢\,\text{جتا س}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{٢\,\cancel{\text{جتا س}}\,(\text{جا س} - ١)}{\text{جتا}^{\cancel{٣}\,٢}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{٢\,(\text{جا س} - ١)}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{٢\,\overset{-١}{\cancel{(\text{جا س} - ١)}}}{\cancel{(١ - \text{جا س})}\,(١ + \text{جا س})} = \frac{-٢}{٢} = -١$$

$$\boxed{٢\sqrt{٣}}$$

$$٤٤)\ \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{٢\,\text{جا س} - ١}{٢\,\text{جتا س} - \sqrt{٣}} \times \frac{٢\,\text{جتا س} + \sqrt{٣}}{٢\,\text{جتا س} + \sqrt{٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{٢\sqrt{٣}\,(٢\,\text{جا س} - ١)}{٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س} - ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{٢\sqrt{٣}\,(٢\,\text{جا س} - ١)}{٤\,(١ - \text{جا}^{٢}\text{س}) - ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{٢\sqrt{٣}\,(٢\,\text{جا س} - ١)}{١ - ٤\,\text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \frac{٢\sqrt{٣}\,\overset{-١}{\cancel{(٢\,\text{جا س} - ١)}}}{\cancel{(١ - ٢\,\text{جا س})}\,(١ + ٢\,\text{جا س})}$$

$$= \frac{-٢\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$$

تمرين $\boxed{١١}$

$\boxed{١}$ جد النهايات التالية :

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - \text{جا}٣\text{س} + \text{ظا}٥\text{س}}{٢\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{٢\text{س ظاس}}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٢}\text{جاس}}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + ٤\text{س جا}٢\text{س} - \text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}٣\text{س}}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}٣\text{س} - \text{جتا}٨\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا}\pi\text{س}}{١ - ٢\text{س}}$

٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جتاس} - ١}{٣\text{س}^{٢}}$

٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\pi\text{س}^{٢}}{\text{س} - ٣}$

٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}٣\text{س ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$

١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ - \sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}}{\text{جتا}٧\text{س} - \text{جتاس}}$

١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٢\pi\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}$

١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + \text{جتا}٢\text{س}}{(٢\text{س} + \pi)^{٢}}$

١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس} + \text{جتا}٢\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جا}٢\text{س}}{٢\text{س} - \pi}$

١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{ظاس} + ٣\text{س})^{٢}}{١ - \text{جتا}٤\text{س}}$

١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣} - ٢\text{جاس}}{٣\text{س} - \pi}$

١٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - ٢}$

١٨) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٢\text{س} - \text{جتا}٢\text{س} - ١}{٤\text{س} - \pi}$

١٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{جا}٢\text{س} \sqrt{\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١}$

٢٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (١ - \text{س}) \text{ ظا} \frac{\pi}{٢}\text{س}$.

٢١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٢}{\text{جاس جا٢س}} - \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \right)$

٢٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١ + \text{جاس}} - \text{جتا٣س}}{٢س}$

٢٣) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣}{\pi - ٣س}$

٢٤) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{\text{جا٢س} - \sqrt{٢}\,\text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}}$

٢٥) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{جتا٤س}}{س^{٢}}$

$\boxed{٣}$ اذا كانت:

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\pi\text{س}}{١ - س} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{أ}(س^{٢} - ٤)}{\text{جا}\pi\text{س}}$$

جد الثابت أ.

$\boxed{٣}$ اذا كانت

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا٢س} + \text{أ جا}^{٢}\text{س} + \text{ب جتاس}}{س^{٢}} = \frac{١}{٢}$$

جد الثابتين أ ، ب.

$\boxed{٤}$ اذا كان ،

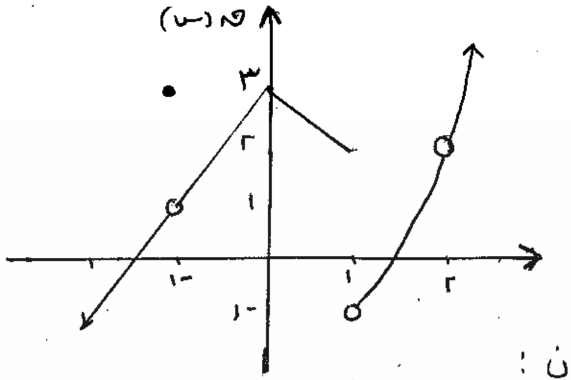
$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{ظا٢س}|}{س} ، & -\frac{\pi}{٢} < س < ٠ \\ \text{أ جتا}\pi\text{س} + ٣ ، & ٠ \leq س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ د(س) موجودة.

جد الثابت أ.

الاتصال عند نقطة

اذا كان منحنى ق(س) ممثلا كما في الشكل



فان :

ق(س) غير متصل عند الحلقات والقفزات .

أي أن :

ق(س) غير متصل عند :

① $س = -١$ لأن : $ق(-١) \neq \underset{س \to -١}{\text{نها}}\, ق(س)$

② $س = ١$ لأن : $\underset{س \to ١}{\text{نها}}\, ق(س)$ غ.م

③ $س = ٢$ لأن : ق(س) غير معرف عند $س = ٢$

لكن :

ق(س) متصل عند $س = ٠$ لأن :

$ق(٠) = \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\, ق(س) = ٣$.

قواعد الاتصال عند نقطة :

$\boxed{١}$ ق(س) متصل عند $س = أ$ اذا تحققت الشروط التالية مجتمعة :

١) ق(أ) معرفة أو تساوي عدد حقيقي

٢) $\underset{س \to أ}{\text{نها}}\, ق(س)$ موجودة .

٣) $ق(أ) = \underset{س \to أ}{\text{نها}}\, ق(س)$

$\boxed{٢}$ كثير الحدود متصل عند $س = أ$ ∈ مجاله.

$\boxed{٣}$ الجيب وجيب التمام متصلان عند $س = أ$ ∈ ح

$\boxed{٤}$ الاقتران النسبي $= \dfrac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$

- متصل عند $س = أ$ اذا كان : مقام $\neq$ صفر عند هذه النقطة
- غير متصل عند $س = أ$ اذا كان : مقام $=$ صفر عند هذه النقطة

تذكر أنه :

اذا كان ق(س) متصلا عند نقطة التحول ($س = أ$)

فان :

$ق(أ) = \underset{س \to أ^+}{\text{نها}}\, ق(س) = \underset{س \to أ^-}{\text{نها}}\, ق(س)$

$\boxed{١}$ ابحث في اتصال كل من الاقترانات التالية عند النقط المعطاة :

١) $ق(س) = ٢س^٥ - س^٢ + ٣$ عند $س = ١$

الحل :

ق(س) متصل عند $س = ١$ لانه كثير حدود .

---

٢) $ق(س) = جا٣س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل :

ق(س) متصل عند $س = \frac{\pi}{٢}$ لانه اقتران جيب

---

٣) $ق(س) = \dfrac{س^٢ + ٢س - ٥}{س - ٣}$ عند $س = ٢$

$\longrightarrow ٢ - ٣ \neq ٠$

الحل :

ق(س) متصل عند $س = ٢$ لانه اقتران نسبي

مقام $\neq ٠$ عند $س = ٢$

---

٤) $ق(س) = \dfrac{٤س - ١}{س^٢ - ٩}$ عند $س = ٣$

الحل :

$\longrightarrow ٩ - ٩ = ٠$

ق(س) غير متصل عند $س = ٣$ لانه اقتران نسبي

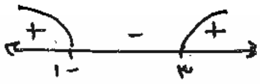
مقام $= ٠$ عند $س = ٣$.

٥) $ق(س) = \sqrt{\frac{س-٣}{س+١}}$ عند $س = ٣$

الحل :

$ق(٣) = \sqrt{\frac{٠}{٤}} = \sqrt{٠} = ٠$

$\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{\frac{س-٣}{س+١}} = \sqrt{٠}$ ؟



$\lim\limits_{س \to ٣^+} \sqrt{\frac{س-٣}{س+١}} =$ صفر

$\lim\limits_{س \to ٣^-} \sqrt{\frac{س-٣}{س+١}}$ غ.م

∴ ق(س) غير متصل عند $س = ٣$ لأنه $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$ غ.م

---

٦) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + س &، س < ٢ \\ [س+٤] &، س = ٢ \\ \sqrt{س^٢+٥} + \frac{٦}{س} &، س > ٢ \end{cases}$

عند $س = ٢$

الحل :

$ق(٢) = [٢+٤] = ٦$

$\lim\limits_{س \to ٢^+} \left(\sqrt{س^٢+٥} + \frac{٦}{س}\right) = \sqrt{٩} + ٣ = ٦$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} (س^٢ + س) = ٤ + ٢ = ٦$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٦$

ق(س) متصل عند $س = ٢$ لأنه $ق(٢) = \lim\limits_{س \to ٢} ق(س)$

---

٧) $ق(س) = \begin{cases} ٣س - |١ - س| &، س < ١ \\ ٢ - جتا \pi س &، س \geq ١ \end{cases}$

عند $س = ١$

الحل :

$ق(١) = ٢ - جتا \pi = ٣$

$\lim\limits_{س \to ١^+} (٢ - جتا \pi س) = ٣$

$\lim\limits_{س \to ١^-} (٣س - |١ - س|) = ٣ - |١ - ١| = ٢$

∴ ق(س) غير متصل عند $س = ١$

لأنه $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ غ.م

---

٨) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{|جا٢س|} &، س < ٠ \\ ٢ - س &، س = ٠ \\ \frac{س^٢ + ٣س - ١}{س+١} &، س > ٠ \end{cases}$

عند $س = ٠$

الحل :

$ق(٠) = ٢$

$\lim\limits_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + ٣س - ١}{س+١} = \frac{-١}{١} = -١$

$\lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{س^٢ + ٢س}{|جا٢س|} = \lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{س(س+٢)}{-جا٢س}$

$= -\frac{١}{٢} \times ٢ = -١$

∴ ق(س) غير متصل عند $س = ٠$

لأن $ق(٠) \neq \lim\limits_{س \to ٠} ق(س)$

---

٩) $ق(س) = \begin{cases} ٢س[٥ - س] &، س > ٣ \\ |س - س^٢| &، س \leq ٣ \end{cases}$

عند $س = ٣$

الحل :

$ق(٣) = |٣ - ٩| = ٦$

$\lim\limits_{س \to ٣^+} ٢س\overset{②}{[٥ - س]} = \lim\limits_{س \to ٣^+} ٢س \times ١ = ٦$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} |س - س^٢| = |١ - ٦| = ٦$

∴ ق(س) متصل عند $س = ٣$

لأنه $ق(٣) = \lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$

تدريب : ابحث اتصال :

$ق(س) = \begin{cases} س^٣ + ٦س &، ٠ \leq س < ٢ \\ |س - ١٢| &، س = ٢ \\ \frac{(٢س+١)^٢ - ٢٥}{س - ٢} &، س > ٢ \end{cases}$

عند $س = ٢$

١٠) $ق(س) = \begin{cases} س^3 - 4\left[\frac{س}{2}\right] ، & س \le 2 \\ \frac{|4 - س^2|}{5س - س^2 - 6} ، & س > 2 \end{cases}$

الحل: عند س = ٢

$ق(2) = 8 - 4 \times [1] = 4$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{|4 - س^2|}{5س - س^2 - 6}$

$= \lim_{س \to 2^+} \frac{س^2 - 4}{-س^2 + 5س - 6} = \lim_{س \to 2^+} \frac{(س+2)\cancel{(س-2)}}{(-س+3)\cancel{(س-2)}} = 4$ ①

$\lim_{س \to 2^-} \left(س^3 - 4\left[\frac{س}{2}\right]\right) = \lim_{س \to 2^-} (س^3 - 0)$

$= 8$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

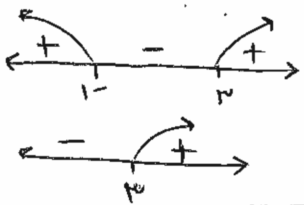
لأن $\lim_{س \to 2} ق(س)$ غ.م

١١) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 + 5}{س - 1} ، & 1 < س \le 3 \\ \frac{\sqrt{س^2 - 2س - 3}}{\sqrt{س - 3}} ، & 3 < س < 5 \end{cases}$

الحل: عند س = ٣

$ق(3) = \frac{9 - 5}{3 - 1} = 2$

$\lim_{س \to 3^+} \frac{\sqrt{س^2 - 2س - 3}}{\sqrt{س - 3}} = \frac{\sqrt{0}}{\sqrt{0}}$ ؟ ؟



$= \lim_{س \to 3^+} \sqrt{\frac{(س+1)\cancel{(س-3)}}{\cancel{س-3}}} = \sqrt{4} = 2$

$\lim_{س \to 3^-} \frac{س^2 - 5}{س - 1} = \frac{4}{2} = 2$

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

لأن $ق(3) = \lim_{س \to 3} ق(س)$

١٢) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^3 + س^2 + 2س - 4}{س - 1} ، & س \notin ص \\ 2س + 5 ، & س \in ص \end{cases}$

حيث ص: مجموعة الأعداد الصحيحة

الحل: عند س = ١

$ق(1) = 2 \times 1 + 5 = 7$

$\lim_{س \to 1} \frac{س^3 + س^2 + 2س - 4}{س - 1} = \frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{\cancel{(س-1)}(س^2 + 2س + 4)}{\cancel{س-1}} = 7$

	$س^3$	$س^2$	$س$	ن
	١	١	٢	٤−
①		١	٢	٤
	١	٢	٤	٠

ق(س) متصل عند س = ١

لأن $ق(1) = \lim_{س \to 1} ق(س)$

تدريب: ابحث اتصال:

① $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س^2 - 4|}{4 - 2س} ، & س \ne 2 \\ جا \frac{3\pi}{س} ، & س = 2 \end{cases}$

عند س = ٢

② $ق(س) = \begin{cases} \left|\frac{س}{2} - 1\right| ، & -1 \le س < 3 \\ \left[\frac{1}{2}س + 3\right] ، & 3 \le س < 4 \end{cases}$

عند س = ٣

③ $ق(س) = \begin{cases} \frac{9س^2 - 1}{\sqrt{1 - 6س + 9س^2}} ، & -\frac{1}{3} < س < \frac{1}{3} \\ -2 ، & س = \frac{1}{3} \\ -6س - [س] ، & \frac{1}{3} < س < \frac{4}{3} \end{cases}$

عند $س = \frac{1}{3}$

③ اذا كانت

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ١}{\text{س} - ١} , & \text{س} > ١ \\ \text{ب} , & \text{س} = ١ \\ ٢\text{أس} , & \text{س} < ١ \end{cases}$$

متصلا عند س = ١ فجد الثابتين أ ، ب

الحل:

$$\text{ق}(١) = \text{نها}_{\text{س}\to ١^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{س}\to ١^{-}} \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{ق}(١) = \text{ب}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٣}} - ١}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٣}} + ١}{\underset{②}{\sqrt{\text{س}^{٣}} + ١}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{٢(\text{س} - ١)} = \text{نها}_{\text{س}\to ١^{+}} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}{٢\cancel{(\text{س} - ١)}}$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ١^{-}} ٢\text{أس} = ٢\text{أ}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{٣}{٢} \quad , \quad ٢\text{أ} = \frac{٣}{٢} \Rightarrow \text{أ} = \frac{٣}{٤}$$

③ اذا كان:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{ب س} + ٧ , & \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} + ٣ , & \text{س} = ٢ \\ \text{س}^{٢} - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + ١ , & \text{س} > ٢ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٢ ، جد أ ، ب

الحل: $\text{ق}(٢) = \text{نها}_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س})$

$$\text{ق}(٢) = ٧$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٢^{+}} \left(\text{س}^{٢} - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + ١\right) = ٥ - ٢\text{أ} - ٢\text{ب}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٢^{-}} \left(\text{أس}^{٢} + \text{ب س} + ٧\right) = ٤\text{أ} + ٢\text{ب} + ٧$$

$$\therefore ٥ - ٢\text{أ} - ٢\text{ب} = ٧ \quad , \quad ٤\text{أ} + ٢\text{ب} + ٧ = ٧$$

$$-٢\text{أ} - ٢\text{ب} = ٢ \qquad ٤\text{أ} + ٢\text{ب} = ٠$$

$$\therefore ٢\text{أ} = ٢ \qquad \therefore ٤ + ٢\text{ب} = ٠$$

$$\text{أ} = ١ \qquad \text{ب} = -٢$$

④ اذا كانت

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ} + \text{جتا ب س}}{\text{س}^{٢}} , & \text{س} \neq ٠ \\ -٨ , & \text{س} = ٠ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٠

فجد الثابتين أ ، ب

الحل:

$$\text{ق}(٠) = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \text{ق}(\text{س})$$

$$-٨ = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{أ} + \text{جتا ب س}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\Rightarrow \text{أ} + \text{جتا} ٠ = ٠$$

$$\boxed{\text{أ} = -١}$$

$$-٨ = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتا ب س} - ١}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{جتا ب س} + ١}{\underset{②}{\text{جتا ب س} + ١}}$$

$$-٨ = \text{نها}_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جتا}^{٢} \text{ب س} - ١}{٢\text{س}^{٢}}$$

$$\text{نها}_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^{٢} \text{ب س}}{٢\text{س}^{٢}} = ٨ \Rightarrow \frac{\text{ب}}{٢} \times \text{ب} = ٨$$

$$\text{ب}^{٢} = ١٦ \Rightarrow \text{ب} = \pm ٤$$

تدريب: جد الثوابت أ ، ب .

① $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{ب} , & \text{س} < ٣ \\ ٦ , & \text{س} = ٣ \\ \text{أس} - ٢\text{ب} , & \text{س} > ٣ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٣

② $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{س}^{٢} , & ٠ < \text{س} \leq ٢ \\ [\text{س}] + ٣ , & ٢ < \text{س} < ٣ \\ ٧ , & \text{س} = ٣ \end{cases}$$

متصلا عند س = ٢

③ $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{أس}^{٢} + \text{ب س} - ٤}{\text{س} - ١} , & \text{س} \neq ١ \\ ٥\text{س} + ٢ , & \text{س} = ١ \end{cases}$$

متصلا عند س = ١

تمرين ١٢

١ ابحث في اتصال الاقترانات التالية عند النقط المعطاة :

① $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{|٣\text{س}^٢ - ٣|}{١ - \text{س}} & ، \text{س} < ١ \\ [٥ - \text{س}] & ، \text{س} > ١ \\ \text{س} + ٢ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$

عند $\text{س} = ١$

② $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{ظاس}|}{\text{س}} & ، \text{س} < ٠ \\ ١ - \text{جتاس} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

عند $\text{س} = ٠$

③ $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^٣ + \text{س} - ١٠}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} < ٢ \\ ١٣ & ، \text{س} = ٢ \\ \left[\frac{\text{س} + ٧}{٢}\right] + ١٠ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

عند $\text{س} = ٢$

④ $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\pi - ٤\text{س}}{\text{جتا}٢\text{س}} & ، \text{س} < \frac{\pi}{٤} \\ ٢ - \text{ظاس} & ، \text{س} \geq \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

⑥ $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤ - \text{س}^٢}}{\sqrt{٢ - \text{س}}} & ، \text{س} < ٢ \\ \frac{\text{س} + |١ - \text{س}| - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ \frac{١}{٢}\text{س} + ٣ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

عند $\text{س} = ٢$

٢ اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أس} + ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \\ [\text{س}] - \text{أ} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

متصلا عند $\text{س} = ٢$
جد الثابت أ

٣ اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^٢ - (٣ - ٢\text{جـ})\text{س} - ٦\text{جـ}}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \neq ٣ \\ ٤\text{س} - ١ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$

متصلا عند $\text{س} = ٣$ جد الثابت جـ

٤ جد الثابتين أ ، ب

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{أس}^٢ - ٢\text{س} - \text{ب}}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} < ٢ \\ ٤\text{س} + \text{أ} - ١ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

متصلا عند $\text{س} = ٢$

٥ اذا كان ، $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س} + ٤] & ، \text{س} > \text{أ} \\ |١ - ٢\text{س}| & ، \text{س} \leq \text{أ} \end{cases}$

متصلا عند $\text{س} = \text{أ}$ جد الثابت أ
حيث $\text{أ} \in \text{ص}$

٦ اذا كان ، $\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{\text{جا ب س} - \text{س}^٢}{\text{س جا}٢\text{س}} & ، -\frac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ ٢ & ، \text{س} = ٠ \\ \frac{\text{س}^٢ + (١ - \text{أ})\text{س}}{\text{أس}} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

متصلا عند $\text{س} = ٠$
جد الثابتين أ ، ب

نظريات الاتصال .

اذا كان ق(س) ، هـ(س) كلاهما متصل عند س = أ فإن :

الاقترانات التالية متصلة عند س = أ

١) $ق(س) \mp هـ(س)$

٢) $ق(س) \times هـ(س)$

٣) $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ بشرط هـ(أ) ≠ .

تذكر أن :

اذا كان أحد الاقترانين ق(س) ، هـ(س) أو كلاهما غير متصل عند س = أ

تفشل هذه النظريات في البحث عن الاتصال ونلجأ في هذه الحالة الى الاتصال عند نقطة باعتبارهما اقتران واحد .

---

١) اذا كان :

$ق(س) = س^{٣} + ٤س - ٧$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + س & ، \quad س < ١ \\ ٣ - س & ، \quad س = ١ \\ \frac{س^{٢} + ٣س + ٤}{س + ٣} & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال ق(س) + هـ(س) عند س = ١

الحل :

ق(س) متصل عند س = ١ لأنه كثير حدود

<u>هـ(س)</u>

هـ(١) = ٢

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٣س + ٤}{س + ٣} = \frac{٨}{٤} = ٢$

$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}} (س^{٢} + س) = ٢$ ∴ هـ(س) متصل عند س = ١

∴ ق(س) + هـ(س) متصل عند س = ١

لأنه مجموع متصلين .

---

٢) ق(س) = جتا٣س

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{٢س^{٢} + س - ١٠}{س - ٢} & ، \quad س < ٢ \\ س^{٢} + ٥ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث اتصال : $ق(س) \times هـ(س) - س^{٣}$ عند س = ٢

الحل :

ق(س) متصل عند س = ٢ لأنه اقتران جيب تمام

<u>هـ(س)</u> $س^{٣}$ متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود .

هـ(٢) = ٩

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٥) = ٩$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} + س - ١٠}{س - ٢} = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ٢)} (٢س + ٥)}{\cancel{س - ٢}} = ٩$

هـ(س) متصل عند س = ٢

∴ $ق(س) \times هـ(س) - س^{٣}$ متصل عند س = ٢

لأنه ضرب وطرح اقترانات متصلة

---

٣)

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|س^{٢} - ٩|}{٣ - س} & ، \quad س < ٣ \\ ٢س & ، \quad س = ٣ \\ س + [٧ - س] & ، \quad ٣ < س < ٥ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٤س - ٧ & ، \quad س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٤ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$$

ابحث اتصال : $ق(س) + \frac{هـ(س)}{س - ١}$ عند س = ٣

الحل :

ق(٣) = ٦ ④

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} (س + [٧ - س]) = \underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} (س + ٣) = ٦$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{|س^{٢} - ١٩|}{٣ - س} = \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)\cancel{(٣ - س)}}{\cancel{٣ - س}} = ٦$

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

هـ(٣) = ٥ ، $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ٤) = ٥$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} (٤س - ٧) = ٥$

هـ(س) متصل عند س = ٣ ، س − ١ متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

∴ $ق(س) + \frac{هـ(س)}{س - ١}$ متصل عند س = ٣

تدريب :

اذا كان :

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٣}{٢\text{س} + ١}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣}{\text{جا}(٢\text{س} - ٢)} & ، \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} = ١ \\ ٣ + \text{جتا}\,\pi\,\text{س} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$$

١) بيّن أن ق(س) متصل عند س = ١

٢) ابحث اتصال $\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{هـ}(\text{س})$ عند س = ١

---

٤) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - ١)^{٢}$

$\text{هـ}(\text{س}) = [٤ - \text{س}]$

ابحث اتصال : (ق × هـ)(س) عند س = ١

الحل :

هـ(س) غير متصل عند س = ١

لانه التعويض = صحيح

نفرض $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$

$\text{ل}(\text{س}) = (\text{س} - ١)^{٢}\,[٤ - \text{س}]$

ل(١) = صفر × ٣ = صفر

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \text{ل}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ (\text{س} - ١)^{٢}\,\overset{③}{[٤ - \text{س}]}$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}\ (\text{س} - ١)^{٢} \times ٢ = \text{صفر} \times ٢ = \text{صفر}$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}}\ (\text{س} - ١)^{٢} \times ٣ = \text{صفر} \times ٣ = \text{صفر}$$

∴ ل(س) متصل عند س = ١

لانه $\text{ل}(١) = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \text{ل}(\text{س})$

تدريب : في المثال أعلاه

ابحث اتصال ق(س) × هـ(س)

عند س = ٣

---

٥) اذا كان :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} - ٥ & ، \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث اتصال (ق − هـ)(س) عند س = ٢

الحل :

ق(س) غير متصل عند س = ٢

∴ نفرض $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})$

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - (\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥) & ، \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س} + ١ - ٢\text{س} & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ - \text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

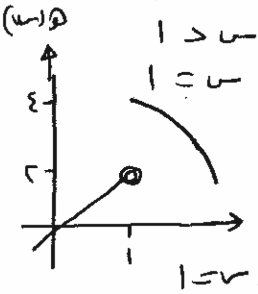
ل(٢) = ٣

$$\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}}(\text{س} + ١) = ٣ \ ، \ \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}}(٥ - \text{س}) = ٣$$

∴ ل(س) متصل عند س = ٢

---

٦) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \text{س} > ١ \\ \text{س}^{٢} + ٣ & ، \text{س} < ١ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} = ١ \end{cases}$$



هـ(س) ممثلا كما في الشكل

ابحث اتصال :

$\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢}$ عند س = ١

الحل : نفرض $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢}$

$$\text{ل}(١) = \text{ق}(١)\,\text{هـ}(١) + (١)^{٢} = ٢ \times ٤ + ١ = ٩$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}(\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢})$$

$$= \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}(٢\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢}) = ٢ \times ٤ + ١ = ٩$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}}(\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢})$$

$$= \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}}((\text{س}^{٢} + ٣)\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢}) = ٤ \times ٢ + ١ = ٩$$

∴ ل(س) متصل عند س = ١

٧) ق(س) = { ٥س − جا٢س ، س < ٠
ـــــــــــــ { ٢س + ٣ ، س ≥ ٠

هـ(س) = { ١ − |س| ، س < ٠
ـــــــــــــ { س^٢ + ١ ، س > ٠
ـــــــــــــ { ١ − س ، س = ٠

ابحث اتصال ق(س) / هـ(س) عند س = ٠

الحل:

ق(س) غير متصل عند س = ٠

∴ نفرض ل(س) = ق(س) / هـ(س)

ل(س) = { (٥س − جا٢س) / (١ − |س|) ، س < ٠
ـــــــــــــ { (٢س + ٣) / (س^٢ + ١) ، س > ٠
ـــــــــــــ { (٢س + ٣) / (١ − س) ، س = ٠

ل(٠) = ٣ / ١ = ٣

نها س←٠+ (٢س + ٣) / (س^٢ + ١) = ٣ / ١ = ٣

نها س←٠− (٥س − جا٢س) / (١ − |س|)

= نها س←٠− (٥س − جا٢س) / −س

= نها س←٠− ٥س / −س + جا٢س / س = −٥ + ٢
= −٣

∴ ل(س) غير متصل عند س = ٠

لأن نها س←٠ ل(س) غير موجودة.

تدريب: ①

ق(س) = [١/٢ س + ١]

هـ(س) = { (س^٢ − ٤) / (س − ٢) ، س < ٢
ـــــــــــــ { س^٣ − ٥ ، س ≥ ٢

ابحث اتصال: ٣س ق(س) + هـ(س)
عند س = ٢

تدريب: ②

ق(س) = { س^٢ + س ، س < ٣
ـــــــــــــ { ٢س − ١ ، س ≥ ٣

هـ(س) = { س + ٢ ، س > ١
ـــــــــــــ { ٥ − س ، س ≤ ١

ابحث اتصال: ق(س) + ٢هـ(س)
عند س = ١

تمارين ١٣

① اذا كان: ق(س) = { س^٢ ، س < ٢
ـــــــــــــ { ٣س − ٢ ، س ≥ ٢

هـ(س) = س^٣ − ١

ابحث اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٢

② اذا كان ق(س) = { ٥ − ٣س^٢ ، س < −١
ـــــــــــــ { ٢س + ١ ، س ≥ −١

هـ(س) = { ٤س + ٣ ، س < −١
ـــــــــــــ { س^٢ + ١ ، س ≥ −١

ابحث اتصال ق(س) + هـ(س) عند س = −١

③ اذا كان ق(س) = { س^٢ − س − ٦ ، س < ٣
ـــــــــــــ { ٣س − ٤ ، س ≥ ٣

هـ(س) = { ١ / (س − ٣) ، س < ٣
ـــــــــــــ { ٧ − س ، س = ٣
ـــــــــــــ { س^٢ − ٥ ، س > ٣

ابحث اتصال ق(س) × هـ(س) عند س = ٣

④ اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{جا}\, \frac{\pi}{٢}\, \text{س}$$

ابحث اتصال $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ عند $\text{س} = ١$

⑤ اذا كان :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٨}\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ٢} & ، \text{س} > -٢ \\ \dfrac{٣}{٢} & ، \text{س} \leq -٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{جتا}\, \frac{\pi}{٤}\, \text{س}}{\text{س}}$$

ابحث اتصال : $(\text{ق} + \text{هـ})(\text{س})$

عند $\text{س} = -٢$

⑥ اذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢\text{س} & ، \text{س} < ٣ \\ ٤\text{س} + \dfrac{٣}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \left[\frac{\text{س}}{٢} + ٥\right]$$

ابحث اتصال :

$$\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})$$

عند $\text{س} = ٣$.

⑦ اذا كان :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + \left[\frac{\text{س}}{٢}\right] & ، \text{س} < ٢ \\ |١ - \text{س}^{٢}| & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٦ - \text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - ١ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث اتصال $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ عند $\text{س} = ٢$

اتصال الاقتران على فترة

١ الاقترانات التالية متصلة على الفترة المعطاة

(أ) كثير الحدود

(ب) الجيب وجيب التمام

(ج) الجذر الفردي ← بداخله كثير حدود

٢ الاقتران النسبي : متصل على الفترة المعطاة عدا أصفار مقامه .

٣ بقية الاقترانات الدائرية (قا، قتا، ظا، ظتا) متصلة على الفترة المعطاة عدا أصفار مقامها

٤ اقتران الجذر الزوجي : متصل على الفترة المعطاة إذا كان ما بداخله ≥ ٠ .

* يجب البحث في إشارة ما بداخله

٥ اقتراني القيمة المطلقة والصحيح، يجب إعادة تعريفهما عند البحث في الاتصال على فترة .

٦ الاقتران المتشعب :

نبحث اتصال :

(أ) الفترات الجزئية المفتوحة

(ب) نقط التساوي :

- التحول
- الأطراف : من جهة واحدة فقط .

* إذا كان الاقتران متصلا على فترة معطاة يمكن الاستفادة من نقط التساوي لإيجاد ثوابت مطلوبة .

① ابحث اتصال :

١) $ق(س) = ٢س^{٣} - ٥س + ١$ في (١، ٤)

الحل :

ق(س) متصل على (١، ٤) لأنه كثير حدود

٢) ق(س) = جاس + جتا٣س في [٠، ٢π]

الحل :

ق(س) متصل على [٠، ٢π] لأنه مجموع متصلين

٣) $ق(س) = س^{٢} \sqrt[٣]{س+١}$ في (−٢، ∞)

الحل :

ق(س) متصل على (−٢، ∞) لأنه ضرب متصلين

٤) $ق(س) = \frac{٢س+٥}{س^{٢}-٧س+١٠}$ في [١، ٣]

الحل :

نجد أصفار المقام : $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$

(س − ٥)(س − ٢) = ٠ ← س = ٥ ، س = ٢

$\cancel{٥} \notin [١، ٣]$

∴ ق(س) متصل على [١، ٣] − {٢}

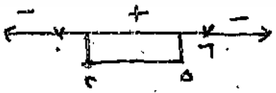
لأنه قسمة متصلين .

٥) $ق(س) = \sqrt{٦س - س^{٢}}$ في [٢، ٥]

الحل : نبحث إشارة ما داخل الجذر : ٦س − س^{٢} = ٠

س(٦ − س) = ٠

س = ٠ ، س = ٦



ق(س) متصل على [٢، ٥]

لأن ٦س − س^{٢} ≥ ٠ .

٦) ق(س) = قتاس في [٠، π]

الحل :

نجد أصفار المقام : جاس = ٠

س = ٠، π

∴ ق(س) متصل على (٠، π)

لأنه قسمة متصلين

② ابحث اتصال :

$$ق(س) = \begin{cases} س + \sqrt[٣]{س} ، & -١ \le س < ١ \\ ٥س - س^٢ ، & ١ \le س < ٣ \\ |س - ١٠| ، & س = ٣ \end{cases}$$

في الفترة $[-١، ٣]$

الفترات الجزئية :

$-١ < س < ١$ ق(س) متصل لأنه مجموع متصلين

$١ < س < ٣$ ق(س) متصل لأنه كثير حدود

نقط المساواة :

$س = -١$ (طرف يمين)

$ق(-١) = \underset{س \to -١^+}{نها} (س + \sqrt[٣]{س}) = -٢$

ق(س) متصل عند $س = -١$

$س = ١$ (تحول)

$ق(١) = ٤$

$\underset{س \to ١^+}{نها} (٥س - س^٢) = ٤$ ، $\underset{س \to ١^-}{نها} (س + \sqrt[٣]{س}) = ٢$

∴ ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ١}$

$س = ٣$ (طرف يسار)

$ق(٣) = |-٧| = ٧$

$\underset{س \to ٣^-}{نها} (٥س - س^٢) = ٦$

∴ ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٣}$

∴ ق(س) متصل على $[-١، ٣) - \{١\}$

③ $$ق(س) = \begin{cases} \frac{٦}{س + ١} ، & ٠ < س < ٢ \\ س^٣ - ٣س ، & س \ge ٢ \end{cases}$$

على مجاله .

الحل : مجال ق(س) = $(٠، \infty)$

الفترات الجزئية :

$٠ < س < ٢$ ق(س) متصل لأنه قسمة متصلين

لاحظ أن صفر المقام $-١ \notin (٠، ٢)$

$س > ٢$ ق(س) متصل لأنه كثير حدود

نقط المساواة :

$س = ٢$ (تحول)

$ق(٢) = ٨ - ٦ = ٢$

$\underset{س \to ٢^+}{نها} (س^٣ - ٣س) = ٢$ ، $\underset{س \to ٢^-}{نها} \frac{٦}{س + ١} = ٢$

ق(س) متصل عند $س = ٢$

∴ ق(س) متصل على $(٠، \infty)$

④ $$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س - ٣} ، & ١ < س < ٣ \\ ٢س + ١ ، & س = ١ \\ \sqrt{س + ١} ، & س \ge ٣ \end{cases}$$

في $[١، \infty)$

الفترات الجزئية :

$١ < س < ٣$ ق(س) متصل لأنه قسمة متصلين

$س > ٣$ ق(س) متصل لأن $س + ١ \ge ٠$

نقط المساواة :

$س = ١$ (طرف يمين)

$ق(١) = ٣$

$\underset{س \to ١^+}{نها} \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س - ٣} = \frac{-٤}{-٢} = ٢$

∴ ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ١}$

$س = ٣$ (تحول)

$ق(٣) = \sqrt{٤} = ٢$

$\underset{س \to ٣^+}{نها} \sqrt{س + ١} = ٢$

$\underset{س \to ٣^-}{نها} \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س - ٣} = \underset{س \to ٣^-}{نها} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ١)}{\cancel{س - ٣}} = ٤$

∴ ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٣}$

∴ ق(س) متصل على $(١، \infty) - \{٣\}$.

⑤ ق(س) = { قا π س ، ٠ ≤ س ≤ ١
٢س − ٣ ، ١ < س < ٢
√(٦ − س) ، س = ٢

ح [٠ ، ٢]

الفترات الجزئية :

٠ < س < ١ ق(س) متصل عدا $\boxed{س = \frac{١}{٢}}$
لأنه قسمة متصلين

لاحظ أن : المقام = جتا π س = ٠

π س = $\frac{π}{٢}$ ، $\frac{٣π}{٢}$

س = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$
✗

١ < س < ٢ ق(س) متصل لأنه كثير حدود .

نقط المساواة :

س = ٠ ق(س) متصل لأن

(طرف يمين) ق(٠) = $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}}$ ق(س) = ١

س = ١ (تحول)

ق(١) = قا π = −١

$\underset{س \to ١^+}{\text{نها}}$ (٢س − ٣) = −١ ، $\underset{س \to ١^-}{\text{نها}}$ قا π س = −١

ق(س) متصل عند س = ١

س = ٢ (طرف يسار)

ق(٢) = √٤ = ٢

$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}$ (٢س − ٣) = ١

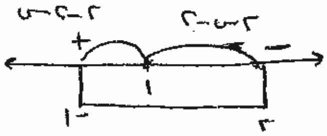
ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٢}$

∴ ق(س) متصل على [٠ ، ٢) − {$\frac{١}{٢}$} .

⑥ ق(س) = { |٢ − ٢س| ، −١ ≤ س ≤ ٢
√(٤س − س²) ، ٢ ≤ س < ٤

ح [−١ ، ٤)

الحل : نعيد تعريف القيمة المطلقة : ٢ − ٢س = ٠
س = ١



ق(س) = { ٢ − ٢س ، −١ ≤ س < ١
٢س − ٢ ، ١ ≤ س ≤ ٢
√(٤س − س²) ، ٢ < س < ٤

الفترات الجزئية :

−١ < س < ١
١ < س < ٢ } ق(س) متصل لأنه كثير حدود .

٢ < س < ٤ ق(س) متصل لانه ٤س − س² ≥ ٠ .

نقط المساواة :

س = −١ (طرف يمين)

ق(−١) = $\underset{س \to −١^+}{\text{نها}}$ ق(س) = ٤

ق(س) متصل عند س = −١

س = ١ (تحول)

ق(١) = صفر

$\underset{س \to ١^+}{\text{نها}}$ (٢س − ٢) = صفر ∴ ق(س) متصل عند س = ١

$\underset{س \to ١^-}{\text{نها}}$ (٢ − ٢س) = صفر

س ≠ ٢ (تحول)

ق(٢) = ٢

$\underset{س \to ٢^+}{\text{نها}}$ √(٤س − س²) = ٢

$\underset{س \to ٢^-}{\text{نها}}$ (٢س − ٢) = ٢

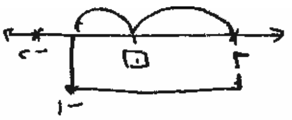
ق(س) متصل عند س = ٢

∴ ق(س) متصل على [−١ ، ٤)

⑦ ق(س) = { [س/٢ + ١] ، -١ ≤ س ≤ ٢
جتا π س ، س > ٢ }

ع [-١ ، ∞)

الحل: نعيد تعريف الصحيح: ل = ٢



ق(س) = { صفر ، -١ ≤ س < ٠
١ ، ٠ ≤ س < ٢
جتا π س ، س > ٢
٢ ، س = ٢ }

الفترات الجزئية:

-١ < س < ٠
٠ < س < ٢ } ق(س) متصل لأنه ثابت

س > ٢ ق(س) متصل لأنه اقتران جيب تمام

نقط المساواة:

س = -١ (طرف يمين)

ق(س) متصل عند س = -١

لأن ق(-١) = نها س←-١+ ق(س) = صفر

س = ٠ (تحول)

ق(٠) = ١

نها س←٠+ ق(س) = ١ ، نها س←٠- ق(س) = صفر

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٠}$

س = ٢ (تحول)

ق(٢) = ٢

نها س←٢+ جتا π س = ١ ، نها س←٢- ١ = ١

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س ≠ ٢}$

∴ ق(س) متصل على [-١ ، ∞) - {٠ ، ٢}

---

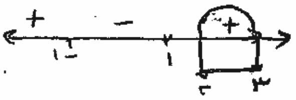
⑧ ق(س) = { ٣س + [-س] ، ١ ≤ س ≤ ٢
|س² - ١| ، ٢ < س ≤ ٣ }

ع [١ ، ٣]

الحل: نعيد تعريف الصحيح ونلغي المطلق.

ل = ١

س² - ١ = ٠
س = ±١



ق(س) = { ٣س - ٢ ، ١ < س ≤ ٢
٣س - ١ ، س = ١
س² - ١ ، ٢ < س ≤ ٣ }

الفترات الجزئية:

١ < س < ٢
٢ < س < ٣ } ق(س) متصل لأنه كثير حدود .

نقط المساواة:

س = ١ (طرف يمين)

ق(١) = ٢

نها س←١+ (٣س - ٢) = ١

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ١}$

س = ٢ (تحول)

ق(٢) = ٤

نها س←٢+ (س² - ١) = ٣ ، نها س←٢- (٣س - ٢) = ٤

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٢}$

س = ٣ (طرف يسار)

ق(٣) = نها س←٣- ق(س) = ٨

ق(س) متصل عند س = ٣

∴ ق(س) متصل على (١ ، ٣] - {٢} .

⑨ اذا كان :

ق(س) = { $\frac{\text{جا أس}}{\text{٣س}}$ ، -١ ≤ س < ٠ .
٢ ، س = ٠ .
ب(س+٢) ، ٠ < س ≤ ١ }

متصلا على [-١، ١] جد أ، ب

الحل :

نستفيد من نقطة التحول : س = ٠ .

ق(٠) = ٢

نها$_{\text{س} \to ٠^+}$ ب(س+٢) = ٢ب

نها$_{\text{س} \to ٠^-}$ $\frac{\text{جا أس}}{\text{٣س}}$ = $\frac{\text{أ}}{٣}$

لكن ق(٠) = نها$_{\text{س} \to ٠^+}$ ق(س) = نها$_{\text{س} \to ٠^-}$ ق(س)

∴ ٢ = ٢ب ← ب = ١

٢ = $\frac{\text{أ}}{٣}$ ← أ = ٦

⑩ اذا كان :

ق(س) = { أس² - ٣ب ، س < -١
بس - ٢أ ، -١ ≤ س < ٣
ب - س ، س = ٣ }

متصلا على مجاله ، جد أ ، ب

الحل : نستفيد من نقط التحول :

س = -١ (تحول)

ق(-١) = نها$_{\text{س} \to -١^+}$ ق(س) = نها$_{\text{س} \to -١^-}$ ق(س)

ق(-١) = -ب - ٢أ .

نها$_{\text{س} \to -١^+}$ (بس - ٢أ) = -ب - ٢أ

نها$_{\text{س} \to -١^-}$ (أس² - ٣ب) = أ - ٣ب

∴ -ب - ٢أ = أ - ٣ب .

∴ ٣أ - ٢ب = ٠ ← ①

س = ٣ (طرف يسار)

ق(٣) = نها$_{\text{س} \to ٣^-}$ ق(س)

ق(٣) = ب - ٣

نها$_{\text{س} \to ٣^-}$ (بس - ٢أ) = ٣ب - ٢أ

∴ ب - ٣ = ٣ب - ٢أ

٢أ - ٢ب = ٣ ← ②

بحل المعادلتين ١ ، ٢

-٣أ + ~~٢ب~~ = ٠
٢أ - ~~٢ب~~ = ٣

-أ = ٣ ← أ = -٣

∴ -٩ - ٢ب = ٠ ← ب = -$\frac{٩}{٢}$.

⑪ اذا كان :

ق(س) = $\frac{\text{٢س} + ٣}{\text{س}^٢ - \text{أس} + \text{أ}}$ متصل على ح
جد قيم أ .

الحل : ق(س) متصل على ح

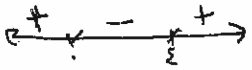
عندما المقام ≠ صفر

المميز < ٠

ب² - ٤أجـ < ٠

أ² - ٤×١×أ < ٠

أ² - ٤أ < ٠



∴ أ = (٠، ٤)

⑫ اذا كان :

أ) ق(س) = $\frac{٣}{\text{س}^٢ - \text{أس} - \text{ب}}$

متصلة على ع - {-١، ٢}

جد أ ، ب .

ب) ق(س) = $\frac{٥ - \text{س}}{\text{س}^٢ - \text{أس} + \text{ب}}$

متصلة على ع - {٣} جد أ، ب

تمرين ١٤

① ابحث اتصال:

١) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{٨}{\text{س} - ١} & ، \; ٠ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٥ & ، \; ٣ \le \text{س} < ٥ \end{cases}$$

في الفترة $(٠ ، ٥)$

٢) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتا}\,\pi\,\text{س} + \sqrt{\text{س} + ١} & ، \; -١ \le \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٣} + ٢ & ، \; \text{س} \ge ٠ \end{cases}$$

على مجاله $[-١ ، \infty)$.

٣) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} [\text{س} + ٢] & ، \; \text{س} = \frac{١}{٢} \\ ٤\text{س} & ، \; \frac{١}{٢} < \text{س} < ١ \\ ٦\text{س} - ٢ & ، \; \text{س} = ١ \end{cases}$$

في الفترة $[\frac{١}{٢} ، ١]$

٤) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ & ، \; \text{س} < ٠ \\ [\text{س} + ٢] & ، \; ٠ \le \text{س} < ٢ \\ \sqrt{\text{س} + ٧} + \frac{٤}{\text{س}} & ، \; \text{س} \geqslant ٢ \end{cases}$$

لجميع قيم س الحقيقية = ح

٥) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{-\text{س}} + |٢\text{س}| & ، \; -١ < \text{س} < ٠ \\ \dfrac{٦}{\text{س} + ١} & ، \; ٠ \le \text{س} < ٢ \\ [\text{س} - ٤] & ، \; \text{س} = ٢ \end{cases}$$

في $(-١ ، ٢]$

٦) $$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٤ - \text{س}^{٢}| & ، \; \text{س} < ٢ \\ \frac{٢}{\text{س}} - \text{جا}\,\pi\,\text{س} & ، \; \text{س} \geqslant ٢ \end{cases}$$

على ح

② إذا كان:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} & ، \; \text{س} < ٢ \\ ٣\text{ب} & ، \; \text{س} = ٢ \\ \text{أس} + \text{ب} + ١٢ & ، \; \text{س} > ٢ \end{cases}$$

متصلاً على ح ، جد أ ، ب

③ جد قيم جـ التي تجعل الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + \text{جـ}}$$

متصلاً على ح .

④ إذا كان:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أ} + ١ & ، \; \text{س} < ٢ \\ ٣\text{س} + \text{ب} & ، \; ٢ \le \text{س} < \text{ب} \\ |\text{س} + ١٠| + ٢ & ، \; \text{س} \geqslant \text{ب} \end{cases}$$

متصلاً على مجاله ، جد أ ، ب

⑤ إذا كان:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س} - ١ & ، \; ٠ < \text{س} < ١ \\ ٢\text{س}^{٢} + ١ & ، \; ١ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س} + ٣ & ، \; \text{س} = ٠ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = ٣\text{س} - [\text{س} + ٢]$$

ابحث اتصال: ق(س) + هـ(س)
في الفترة $[٠ ، ٢)$

⑥ جد قيم الثابت أ التي تجعل

$$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{أس} + ٩}$$

متصلاً على ح .

حل تمرين $\boxed{١}$:

$\boxed{١}$ ١) ١ ٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\, د(س)$ $\begin{cases} + \to ٢ \\ - \to ٤ \end{cases}$

غ م

ⓐ

٣) ٢ ٤) ٢

ⓑ ١) أ = {١ ، ٢ ، ٣}

٢) أ = {−١ ، ١ ، ٣}

$\boxed{٣}$ ١) أ = $(-١ ، ٠) \cup [٢ ، ٣)$

٢) أ = $[٣ ، \infty) \cup \{٠\}$

٣) أ = {١}

حل تمرين $\boxed{٣}$:

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦\cancel{س^٢}(س^٢+٣)}{\cancel{س^٢}(٢-٣س)} = \frac{٦ \times ٣}{٢-٠} = ٩$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\big((س-١)-(٥-س)\big)\big((س-١)+(٥-س)\big)}{س(س-٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س-١-٥+س)(\cancel{س}-١+٥-\cancel{س})}{س(س-٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٢س-٦) \times ٤}{س(س-٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢\cancel{(س-٣)} \times ٤}{س\cancel{(س-٣)}} = \frac{٨}{٣}$

٣) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(٢س-١)}}(٤س^٢+٢س+١)}{٢س\cancel{(١-٢س)}}$

$= \frac{-١ \times ٣}{٢ \times \frac{١}{٢}} = -٣$

٤) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^٢-٤)(س^٢-١)}{٢س^٢(س^٣+٨)}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س-٢)\cancel{(س+٢)}(س^٢-١)}{٢س^٢\cancel{(س+٢)}(س^٢-٢س+٤)}$

$= \frac{-٤ \times ٣}{٨ \times ١٢} = \frac{-١}{٨}$

* يمكن تحليل البسط باستخدام القسمة التركيبية

٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢-٤س+\cancel{٤}+س-\cancel{٤}}{س(٢٧-س^٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^٢-٣س}{س(٢٧-س^٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{س}\overset{-١}{\cancel{(س-٣)}}}{\cancel{س}\cancel{(٣-س)}(٩+٣س+س^٢)} = \frac{-١}{٢٧}$

٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢(س^٥-١)}{(س-١)(٣س+٨)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢\cancel{(س-١)}(س^٤+س^٣+س^٢+س+١)}{\cancel{(س-١)}(٣س+٨)}$

$= \frac{١ \times ٥}{٣+٨} = \frac{٥}{١١}$

٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\big((٢س+١)-٥\big)\big((٢س+١)^٢+٥(٢س+١)+٢٥\big)}{(٢-س)+س^٢(س-٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(٢س-٤)\big((٢س+١)^٢+٥(٢س+١)+٢٥\big)}{(س-٢)(-١+س^٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\cancel{(س-٢)} \times ٢٥ \times ٣}{\cancel{(س-٢)}(-١+س^٢)}$

$= \frac{٢ \times ٢٥ \times \cancel{٣}}{\cancel{٣}} = ٥٠$

* عليه فك الأقواس في المقام ثم تحليله باستخدام القسمة التركيبية .

٨) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{س^٥ - ٤س + ٣}{٣س - س^٢ + ٣ - س - ٤}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{س^٥ - ٤س + ٣}{-س^٢ + ٢س - ١}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س - ١)}(س^٤ + س^٣ + س^٢ + س - ٣)}{\cancel{(س - ١)}(-س + ١)}$

$= \frac{١}{٠}$ غ م .

٩) $\underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{(س^٢ - ٢س)^٣ - (س + ٤)^٣}{س^٢ + ٥س - س + ٣}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{\left((س^٢ - ٢س) - (س + ٤)\right)\left((س^٢ - ٢س)^٢ + (س^٢ - ٢س)(س + ٤) + (س + ٤)^٢\right)}{س^٢ + ٤س + ٣}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{(س^٢ - ٣س - ٤) \times ٩ \times ٣}{(س + ١)(س + ٣)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س + ١)}(س - ٤) \times ٩ \times ٣}{\cancel{(س + ١)}(س + ٣)} = \frac{-١٣٥}{٢}$

١٠) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{\left(س(س - ٢)\right)^٢}{(س - ٢)(س^٢ - س - ٢)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢(س - ٢)^{\cancel{٢}}}{\cancel{(س - ٢)}(س^٢ - س - ٢)} = \frac{صفر}{صفر}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{(س - ٢)}(س + ١)} = \frac{٤}{٣}$

١١) $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(س - ٢)^٣ - س(س - ٢)}{س(-س^٢ + ٣س + ٤)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(س - ٢)\left((س - ٢)^٢ - س\right)}{س(س - ٤)(-س - ١)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(س - ٢)(س^٢ - ٤س + ٤ - س)}{س(س - ٤)(-س - ١)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(س - ٢)(س^٢ - ٥س + ٤)}{س(س - ٤)(-س - ١)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(س - ٢)\cancel{(س - ٤)}(س - ١)}{س\cancel{(س - ٤)}(-س - ١)} = \frac{-٣}{١٠}$

حل تمرين $\boxed{٣}$:

١) $\underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{٣س^٢ - س - ١٤} \times \frac{٢س + ٥ + س + ١}{(س + ١)(٢س + ٥)}$

$= \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{٣س^٢ - س - ١٤} \times \frac{٣س + ٦}{(س + ١)(٢س + ٥)}$

$= \underset{س\to -٢}{\text{نها}} \frac{١}{\cancel{(س + ٢)}(٣س - ٧)} \times \frac{٣\cancel{(س + ٢)}}{(س + ١)(٢س + ٥)}$

$= \frac{١}{-١٣} \times \frac{٣}{-١ \times ١} = \frac{٣}{١٣}$

٢) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \left(\frac{٣}{س^٣} - \frac{١}{٩}\right) \times \frac{١}{س - ٣}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{٢٧ - س^٣}{٩س^٣} \times \frac{١}{س - ٣}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(٣ - س)}}(٩ + ٣س + س^٢)}{٩س^٣} \times \frac{١}{\cancel{س - ٣}}$

$= \frac{-٩ \times ٣}{٩ \times ٢٧} = \frac{-١}{٩}$

٣) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢}{(س - ٢)(س + ٢)} - \frac{٢}{س(س - ٢)}\right)$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٢ \times س - ٢(س + ٢)}{س(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ٢س - ٤}{س(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^٢ + ٢س + ٢)}{س\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)} = \frac{٥}{٤}$

حل تمرين $\boxed{٤}$:

١) $\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{س\sqrt{٣س+١}-\sqrt{س^٢+٣}}{س-١} \times \frac{س\sqrt{٣س+١}+\sqrt{س^٢+٣}}{س\sqrt{٣س+١}+\sqrt{س^٢+٣}}$

④

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{س^٢(٣س+١)-س^٢-٣}{٤(س-١)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{٣س^٣+\cancel{س^٢}-\cancel{س^٢}-٣}{٤(س-١)}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{٣(\cancel{س-١})(س^٢+س+١)}{٤(\cancel{س-١})} = \frac{٩}{٤}$

٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٣-٣س-٢}{\sqrt[٣]{س+٦}-٢} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+٦)^٢}+٢\sqrt[٣]{س+٦}+٤}{\sqrt[٣]{(س+٦)^٢}+٢\sqrt[٣]{س+٦}+٤}$

⑫

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{١٢(\cancel{س-٢})(س^٢+٢س+١)}{\cancel{س+٦-٨}}$

$= ١٢ \times ٩ = ١٠٨$

٣) $\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س+٥}\sqrt{س}-٦}{٤-س} \times \frac{\sqrt{س+٥}\sqrt{س}+٦}{\sqrt{س+٥}\sqrt{س}+٦}$

⑫

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{(س+٥)س-٣٦}{١٢(٤-س)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٢+٥س-٣٦}{١٢(٤-س)}$

$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{(\cancel{س-٤})}(س+٩)}{١٢(\cancel{٤-س})} = \frac{-١٣}{١٢}$

٤) $\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{س(س-٣)+١}{س-٣} \times (\sqrt{س+١}-٢)$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢-٣س+١}{س-٣} (\sqrt{س+١}-٢) \times \frac{\sqrt{س+١}+٢}{\sqrt{س+١}+٢}$

④

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(س^٢-٣س+١)(\cancel{س+١-٤})}{٤(\cancel{س-٣})}$

$= \frac{١}{٤}$

٥) نفصل حدود البسط .

$\underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{(س-١)^٢-١}{س-٢} + \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{١-\sqrt{٣-س}}{س-٢} \times \frac{١+\sqrt{٣-س}}{١+\sqrt{٣-س}}$

②

$= \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\cancel{س-١-١})(س-١+١)}{\cancel{س-٢}} + \underset{س\to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{١-٣+س}}{٢(\cancel{س-٢})}$

$= ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢}$.

٦) $\underset{س\to ٩}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{(س-١)^٢}-٤}{س-٩} \times \frac{\sqrt[٣]{(س-١)^٤}+٤\sqrt[٣]{(س-١)^٢}+١٦}{\sqrt[٣]{(س-١)^٤}+٤\sqrt[٣]{(س-١)^٢}+١٦}$

㊽

$= \underset{س\to ٩}{\text{نها}} \frac{(س-١)^٢-٦٤}{٤٨(س-٩)}$

$= \underset{س\to ٩}{\text{نها}} \frac{(\cancel{س-١-٨})(س-١+٨)}{٤٨(\cancel{س-٩})} = \frac{١}{٣}$

٧) بالضرب بمرافق البسط

$\underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س^٢-١}-\sqrt[٣]{س+٥}}{س-٣} \times \frac{\sqrt[٣]{(س^٢-١)^٢}+\sqrt[٣]{(س^٢-١)(س+٥)}+\sqrt[٣]{(س+٥)^٢}}{\sqrt[٣]{(س^٢-١)^٢}+\sqrt[٣]{(س^٢-١)(س+٥)}+\sqrt[٣]{(س+٥)^٢}}$

⑫

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢-١-س-٥}{١٢(س-٣)}$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{س^٢-س-٦}{١٢(س-٣)} = \underset{س\to ٣}{\text{نها}} \frac{(\cancel{س-٣})(س+٢)}{١٢(\cancel{س-٣})} = \frac{٥}{١٢}$

٨) بالضرب بمرافق البسط والمقام .

$\underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣-س}-٢}{س\sqrt[٣]{س}-١} \times \frac{س^٢\sqrt[٣]{س^٢}+س\sqrt[٣]{س}+١}{س^٢\sqrt[٣]{س^٢}+س\sqrt[٣]{س}+١} \times \frac{\sqrt{٣-س}+٢}{\sqrt{٣-س}+٢}$

③ ④

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{٣ \times (٣-س-٤)}{٤ \times (س^٣ \times س-١)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{٣ \times (-س-١)}{٤ \times (س^٤-١)}$

$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{-٣ \times (\cancel{س+١})}{٤ \times (س-١)(\cancel{س+١})(س^٢+١)} = \frac{٣}{١٦}$

$$\text{(٩}\quad \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \frac{\sqrt{١-س}-\sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١}\sqrt{١-س}} \times \frac{\sqrt{١-س}+\sqrt{س+١}}{\sqrt{١-س}+\sqrt{س+١}}$$

②

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \frac{\cancel{١}-س-س-\cancel{١}}{٢\sqrt{س+١}\sqrt{١-س}}$$

$$= \underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{\cancel{س}} \times \frac{-\cancel{٢س}}{\cancel{٢}\sqrt{س+١}\sqrt{١-س}} = \frac{-١}{١} = -١$$

١٠) تفصل حدود البسط .

$$\underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٢-٦-١٠}{٤-س} + \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{١٠-٥\sqrt{س}}{٤-س}$$

$$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٢-١٦}{٤-س} + \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{٥(٢-\sqrt{س})}{٤-س} \times \frac{٢+\sqrt{س}}{٢+\sqrt{س}}$$

④

$$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{\cancel{(س-٤)}}(س+٤)}{\cancel{٤-س}} + \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{٥\overset{١}{\cancel{(٤-س)}}}{٤\cancel{(٤-س)}}$$

$$= -٨ + \frac{٥}{٤} = \frac{-٢٧}{٤}$$

١١) تضرب بالمرافق التكعيبي اولاً

$$\underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٢-\sqrt{س+٤}}+١}{٥-س} \times \frac{\sqrt[٣]{(٢-\sqrt{س+٤})^٢}-\sqrt[٣]{٢-\sqrt{س+٤}}+١}{\sqrt[٣]{(٢-\sqrt{س+٤})^٢}-\sqrt[٣]{٢-\sqrt{س+٤}}+١}$$

③

$$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{٢-\sqrt{س+٤}+١}{٣(٥-س)}$$

$$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{٣-\sqrt{س+٤}}{٣(٥-س)} \times \frac{٣+\sqrt{س+٤}}{٣+\sqrt{س+٤}}$$

⑥

$$= \underset{س\to ٥}{\text{نها}} \frac{\overset{١}{\cancel{٩-س-٤}}}{١٨\cancel{(٥-س)}} = \frac{١}{١٨}$$

$$\text{(١٢}\quad \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{١}{س+١} \times \frac{\sqrt[٣]{٢س+١}+١}{\sqrt[٣]{٢س+١}}$$

$$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{١}{س+١} \times \frac{\sqrt[٣]{٢س+١}+١}{\sqrt[٣]{٢س+١}} \times \frac{\sqrt[٣]{(٢س+١)^٢}-\sqrt[٣]{٢س+١}+١}{\sqrt[٣]{(٢س+١)^٢}-\sqrt[٣]{٢س+١}+١}$$

③

$$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{١}{س+١} \times \frac{٢س+١+١}{٣\sqrt[٣]{٢س+١}}$$

$$= \underset{س\to -١}{\text{نها}} \frac{١}{\cancel{س+١}} \times \frac{٢\cancel{(س+١)}}{٣\sqrt[٣]{٢س+١}} = -\frac{٢}{٣}$$

١٣) نفصل حدود البسط .

$$\underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س-٩}+٢}{س-١} + \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{٧س-٥-٢}{س-١}$$

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{س-٩}+٢}{س-١} \times \frac{\sqrt[٣]{(س-٩)^٢}-٢\sqrt[٣]{س-٩}+٤}{\sqrt[٣]{(س-٩)^٢}-٢\sqrt[٣]{س-٩}+٤} + \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{٧\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}}$$

⑫

$$= \underset{س\to ١}{\text{نها}} \frac{\overset{١}{\cancel{س-٩+٨}}}{١٢\cancel{(س-١)}} + ٧ = \frac{٨٥}{١٢}$$

$$\text{(١٤}\quad \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{((\sqrt{س}-٥)+٣)((\sqrt{س}-٥)^٢-٣(\sqrt{س}-٥)+٩)}{(س-٤)(س+١)}$$

$$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{٢٧\times(\sqrt{س}-٢)}{(س-٤)(س+١)} \times \frac{\sqrt{س}+٢}{\sqrt{س}+٢}$$

④

$$= \underset{س\to ٤}{\text{نها}} \frac{٢٧\times\cancel{(س-٤)}}{٤\cancel{(س-٤)}(س+١)} = \frac{٢٧}{٢٠}$$

حل تمرين $\boxed{٥}$:

$\boxed{١}$

١) نفرض $\sqrt[٣]{\text{س}} = \text{ص}$

$\therefore \text{س} = \text{ص}^{٣}$ ، $\text{س} \to ٨$ ، $\text{ص} \to ٢$

$$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص} - \frac{٤}{\text{ص}}}{\text{ص}^{٣} - ٨}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{٢} - ٤}{\text{ص}} \times \frac{١}{\text{ص}^{٣} - ٨}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ص} - ٢)}(\text{ص} + ٢)}{\text{ص}} \times \frac{١}{\cancel{(\text{ص} - ٢)}(\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} + ٤)}$$

$$= \frac{٤}{٢} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}} - ٢}{٣^{٣\text{س}} - ٣^{٢\text{س}}}$

نفرض $٣^{\text{س}} = \text{ص}$ ، $\text{س} \to ٠$ ، $\text{ص} \to ١$

$$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٢}{\text{ص}^{٣} - \text{ص}^{٢}}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ص} - ١)}(\text{ص} + ٢)}{\text{ص}^{٢}\cancel{(\text{ص} - ١)}} = ٣$$

٣) نفرض $\sqrt{\text{س}} = \text{ص}$ ، $\text{س} \to ١$ ، $\text{ص} \to ١$

$\therefore \text{س} = \text{ص}^{٢}$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٢\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} \times \text{ص} + ٣\text{ص} - ٤}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢(١ - \text{ص}^{٢})}{\text{ص}^{٣} + ٣\text{ص} - ٤}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢\overset{-١}{\cancel{(١ - \text{ص})}}(١ + \text{ص})}{\cancel{(\text{ص} - ١)}(\text{ص}^{٢} + \text{ص} + ٤)} = \frac{-٢}{٣}$$

٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt[٣]{٨})^{٢\text{س}} - ٤}{٢^{٣\text{س}} - ٨}$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢^{٢\text{س}} - ٤}{٢^{٣\text{س}} - ٨}$$

نفرض $٢^{\text{س}} = \text{ص}$ ، $\text{س} \to ١$ ، $\text{ص} \to ٢$

$$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{٢} - ٤}{\text{ص}^{٣} - ٨}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ص} - ٢)}(\text{ص} + ٢)}{\cancel{(\text{ص} - ٢)}(\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} + ٤)} = \frac{١}{٣}$$

٥) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt[٣]{\text{س}})^{٢} + \sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ١}$

نفرض $\sqrt[٣]{\text{س}} = \text{ص}$ ، $\text{س} \to ١$ ، $\text{ص} \to ١$

$\therefore \text{س} = \text{ص}^{٣}$

$$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٢}{\text{ص}^{٣} - ١}$$

$$= \underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ص} - ١)}(\text{ص} + ٢)}{\cancel{(\text{ص} - ١)}(\text{ص}^{٢} + \text{ص} + ١)} = ١$$

$\boxed{٢}$ نفرض $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{٣} + ٢} = \text{ص}$

$\text{س}^{٣} + ٢ = \text{ص}^{\text{ن}}$ ، $\text{س} \to -١$

$\text{س}^{٣} = \text{ص}^{\text{ن}} - ٢$ ، $\text{ص} \to ١$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص} - ١}{٢ + ٣(\text{ص}^{\text{ن}} - ٢)} = \frac{١}{٧}$$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص} - ١}{٢(١ + \text{ص}^{\text{ن}} - ٢)} = \frac{١}{٧}$$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص} - ١}{٢(\text{ص}^{\text{ن}} - ١)} = \frac{١}{٧}$$

$$\underset{\text{ص}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\overset{١}{\cancel{\text{ص} - ١}}}{٢\cancel{(\text{ص} - ١)}(\text{ص}^{\text{ن}-١} + \text{ص}^{\text{ن}-٢} + \cdots + ١)} = \frac{١}{٧}$$

$$\frac{١}{٢ \times \text{ن}} = \frac{١}{٧}$$

$$\therefore ٢\text{ن} = ٧ \Longrightarrow \text{ن} = \frac{٧}{٢}$$

حل تمرين $\boxed{٦}$

$\boxed{١}$

١) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{س^٣-أس^٢-س^٢+أ}{س-١}=٧$

$\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{س^٣-س^٢}{س-١}+\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{أ-أس^٢}{س-١}=٧$

$\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{س^٢\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}}+\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{أ\overset{-١}{\cancel{(١-س)}}(١+س)}{\cancel{س-١}}=٧$

$١+-٢أ=٧ \leftarrow أ=-٣$

٢) $\frac{٣أ^٢+٥أ-٨}{٤أ-أ^٢-٣}=\frac{٥}{٤}$

$\frac{(٣أ+٨)\overset{-١}{\cancel{(أ-١)}}}{\cancel{(-أ+١)}(أ-٣)}=\frac{٥}{٤}$

$\frac{٣أ+٨}{أ-٣}=\frac{-٥}{٤} \leftarrow ١٢أ+٣٢=-٥أ+١٥$

$١٧أ=-١٧ \leftarrow أ=-١$

$\boxed{٢}$

١) $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}\frac{أس^٢-أس-ب}{س-٢}=٣$

نعوض $\leftarrow ٤أ-٢أ-ب=٢أ-ب=٠$

$\boxed{ب=٢أ}$

$\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}\frac{أس^٢-أس-٢أ}{س-٢}=٣$

$\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}\frac{أ(س^٢-س-٢)}{س-٢}=٣$

$\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}\frac{أ\cancel{(س-٢)}(س+١)}{\cancel{س-٢}}=٣$

$٣أ=٣$

∴ $أ=١$

∴ $ب=٢\times١$

$ب=٢$

٢) $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\frac{٢س^٢+أس-ب}{س-٣}=٧$

نعوض $\leftarrow ١٨+٣أ-ب=٠$

$\boxed{ب=١٨+٣أ}$

$\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\frac{٢س^٢+أس-١٨-٣أ}{س-٣}=٧$

$\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\frac{٢س^٢-١٨}{س-٣}+\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\frac{أس-٣أ}{س-٣}=٧$

$\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\frac{٢\cancel{(س-٣)}(س+٣)}{\cancel{س-٣}}+\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\frac{أ\cancel{(س-٣)}}{\cancel{س-٣}}=٧$

$١٢+أ=٧ \leftarrow أ=-٥$

∴ $ب=٣$

٣) $\underset{س\to-٢}{\text{نهـا}}\frac{١}{س+٢}\times\frac{أ-\sqrt{ب-س}}{\sqrt{ب-س}}=\frac{١}{٢}$

نعوض $\leftarrow أ-\sqrt{ب+٢}=٠$

$\boxed{أ=\sqrt{ب+٢}}$

$\underset{س\to-٢}{\text{نهـا}}\frac{\sqrt{ب+٢}-\sqrt{ب-س}}{(س+٢)\sqrt{ب-س}}\times\frac{\sqrt{ب+٢}+\sqrt{ب-س}}{\sqrt{ب+٢}+\sqrt{ب-س}}=\frac{١}{٢}$

$٢\sqrt{ب+٢}$

$\underset{س\to-٢}{\text{نهـا}}\frac{\cancel{ب}+٢-\cancel{ب}+س}{(س+٢)\sqrt{ب-س}\times٢\sqrt{ب+٢}}=\frac{١}{٢}$

$\underset{س\to-٢}{\text{نهـا}}\frac{\overset{١}{\cancel{س+٢}}}{\cancel{(س+٢)}\sqrt{ب-س}\times٢\sqrt{ب+٢}}=\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{\sqrt{ب+٢}\times٢\sqrt{ب+٢}}=\frac{١}{٢} \leftarrow ب+٢=١$

$ب=-١ \leftarrow أ=١$

٤) نعوض $\leftarrow ٢-أ+ب=٠ \leftarrow \boxed{أ=٢+ب}$

$\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{س^٢-١}{٢س^٢-(٢+ب)س+ب}=-٢$

$\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\frac{(س+١)\cancel{(س-١)}}{\cancel{(س-١)}(٢س-ب)}=-٢$

$\frac{٢}{٢-ب}=-٢ \leftarrow ٢-ب=-١$

$ب=٣$

∴ $أ=٥$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٥س+أ}-٤}{س-٣} = ب$

نعوض ← $\sqrt{١٥+أ} - ٤ = ٠$

$\sqrt{١٥+أ} = ٤ \leftarrow ١٥ + أ = ١٦$

$\therefore أ = ١$

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٥س+١}-٤}{س-٣} \times \frac{\sqrt{٥س+١}+٤}{\sqrt{٥س+١}+٤} = ب$

⑧

$\lim_{س \to ٣} \frac{٥س+١-١٦}{٨(س-٣)} = ب$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٥\cancel{(س-٣)}}{٨\cancel{(س-٣)}} = ب \leftarrow ب = \frac{٥}{٨}$

٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{ب - أس + س^٢}$ غ.م

نعوض ← $ب - ٣أ + ٩ = ٠$

$ب = ٣أ - ٩$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{س^٢ - أس + ٣أ - ٩}$ غ.م

$\lim_{س \to ٣} \frac{س-٣}{(س^٢-٩) + (٣أ - أس)}$ غ.م

$\lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{س-٣}}{\underset{١}{\cancel{(س-٣)}}(س+٣) + أ\underset{-١}{\cancel{(٣-س)}}}$ غ.م

$\lim_{س \to ٣} \frac{١}{س+٣-أ}$ غ.م

نعوض ← $٣ + ٣ - أ = ٠$

$أ = ٦$

$\therefore ب = ٩$

٧) $\lim_{س \to -٣} \frac{س+٣}{\sqrt[٣]{أس+ب} + ٢} = ٤$

نعوض ← $\sqrt[٣]{-٣أ+ب} + ٢ = ٠$

$\sqrt[٣]{ب - ٣أ} = -٢$

$ب - ٣أ = -٨ \leftarrow \boxed{ب = ٣أ - ٨}$

$\lim_{س \to -٣} \frac{س+٣}{\sqrt[٣]{أس+٣أ-٨} + ٢} \times \text{المرافق} = ٤$

$\lim_{س \to -٣} \frac{١٢(س+٣)}{أس+٣أ\cancel{-٨}\cancel{+٨}} = ٤$

$\lim_{س \to -٣} \frac{١٢\cancel{(س+٣)}}{أ\cancel{(س+٣)}} = ٤$

$\frac{١٢}{أ} = ٤ \longrightarrow أ = ٣$

$\therefore ب = ١$

حل تمرين $\boxed{٧}$ ١

$\boxed{١}$

١) $\lim_{س\to٢^+}\left(\sqrt{س^٢-٦س+٨}+\sqrt{٣-س}\right)$

$=\sqrt{\underset{؟}{٠}}+\sqrt{١}$

$س^٢-٦س+٨=٠$

$(س-٢)(س-٤)=٠$

$س=٢$ ، $س=٤$

$\therefore \lim_{س\to٢^+}\left(\sqrt{س^٢-٦س+٨}+\sqrt{٣-س}\right)$ غ.م .

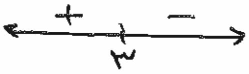
٢) $\lim_{س\to٥}\frac{\sqrt{س-٥}-٢}{س-٩}=\frac{\sqrt{\overset{؟}{٠}}-٢}{-٤}$

$\lim_{س\to٥^-}\frac{\sqrt{س-٥}-٢}{س-٩}$ غ.م

$\lim_{س\to٥^+}\frac{\sqrt{س-٥}-٢}{س-٩}=\frac{٠-٢}{-٤}=\frac{١}{٢}$

$\therefore \lim_{س\to٥}\frac{\sqrt{س-٥}-٢}{س-٩}$ غ.م

٣) $\lim_{س\to٣^-}\frac{٢س-٦}{\sqrt{٣-س}}=\frac{صفر}{\sqrt{٠}}$ ؟



$=\lim_{س\to٣^-}\frac{٢(س-٣)}{\sqrt{٣-س}}$

$=\lim_{س\to٣^-}\frac{-٢(٣-س)}{\sqrt{٣-س}}=\lim_{س\to٣^-}\frac{-٢\cancel{\sqrt{٣-س}}\sqrt{٣-س}}{\cancel{\sqrt{٣-س}}}$

$=-٢\times٠=صفر$

٤) $\lim_{س\to١}\sqrt{\frac{س^٢-٤س+٣}{س-١}}=\sqrt{\frac{صفر}{صفر}}$

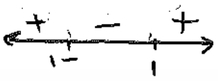
$=\lim_{س\to١}\sqrt{\frac{(س-٣)\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}}}$

$=\sqrt{-٢}$ غير موجودة .

٥) $\lim_{س\to١^+}\frac{\sqrt{س^٢-١}}{\sqrt{٨س-س^٢-٧}}=\frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ ؟ ؟

$س^٢-١=٠$

$س=\pm١$



$٨س-س^٢-٧=٠$ × −

$س^٢-٨س+٧=٠$

$(س-٧)(س-١)=٠$

$س=١$ ، $س=٧$

$=\lim_{س\to١^+}\sqrt{\frac{(س+١)\cancel{(س-١)}}{(٧-س)\cancel{(س-١)}}}=\sqrt{\frac{٢}{٦}}=\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٦) $\lim_{س\to٢^+}\frac{\sqrt{٢س^٢-٤س}+\sqrt{س^٢-٤}}{\sqrt{س-٢}}=\frac{\sqrt{٠}-\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$ ؟

$٢س^٢-٤س=٠$

$٢س(س-٢)=٠$

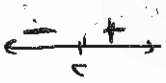
$س=٠$ ، $س=٢$

$س^٢-٤=٠$

$س=\pm٢$

$س-٢=٠$

$س=٢$



$=\lim_{س\to٢^+}\frac{\sqrt{٢س^٢-٤س}}{\sqrt{س-٢}}+\lim_{س\to٢^+}\frac{\sqrt{س^٢-٤}}{\sqrt{س-٢}}$

$=\lim_{س\to٢^+}\sqrt{\frac{٢س\cancel{(س-٢)}}{\cancel{س-٢}}}+\lim_{س\to٢^+}\sqrt{\frac{(س+٢)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{س-٢}}}$

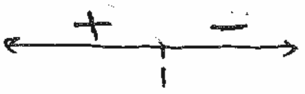
$=٢+٢=٤$.

$\boxed{٣}$

١) $\lim_{س\to أ}\sqrt{٢-٢س}$ غ.م

$٢-٢س=٠$

$س=١$



$\therefore أ=[١، \infty)$

٢) $\lim_{س\to أ^-}\sqrt{\frac{س-٣}{١٠-٢س}}$ موجودة .

$س-٣=٠$

$س=٣$

$١٠-٢س=٠$

$س=٥$

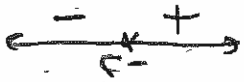
$أ=(٣، ٥)$

٣) $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{٤-\text{س}^٢}{٣-\text{س}}}$ غير موجودة

$\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\cancel{(٢-\text{س})}(٢+\text{س})}{\cancel{٢-\text{س}}}}$ غ.م

$\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نها}} \sqrt{٢+\text{س}}$ غ.م

$\text{م} = (-\infty ، -٢]$



$\boxed{٣}$ $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩-\text{س}^٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٣-\text{س}}}$

$= \frac{\sqrt{٠}+\sqrt{٣}-\sqrt{٣}}{\sqrt{٦}}$

$٩-\text{س}^٢ = ٠$

$\text{س} = \pm ٣$

$٣-\text{س} = ٠$

$\text{س} = ٣$

$\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩-\text{س}^٢}}{\sqrt{٣-\text{س}}} + \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣}-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٣-\text{س}}} \times \frac{\sqrt{٣}+\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٣}+\sqrt{\text{س}}}$

$٢\sqrt{٣}$

$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \sqrt{\frac{\cancel{(٣-\text{س})}(٣+\text{س})}{\cancel{٣-\text{س}}}} + \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{٣-\text{س}}{\sqrt{٣-\text{س}} \times ٢\sqrt{٣}}$

$= \sqrt{٦} + \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}} \frac{\cancel{\sqrt{٣-\text{س}}} \times \sqrt{٣-\text{س}}}{\cancel{\sqrt{٣-\text{س}}} \times ٢\sqrt{٣}}$

$= \sqrt{٦} + \text{صفر} = \sqrt{٦}$

حل تمرين $\boxed{٨}$

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left(\text{ق}^٣(\text{س}) + ٢\text{هـ}(\text{س}) - \frac{٢}{\text{س}}\right) = ١٩$

$(٣)^٣ + ٢\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{هـ}(\text{س}) + ٢ = ١٩$

$٢\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{هـ}(\text{س}) = -١٠ \Leftarrow \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{هـ}(\text{س}) = -٥$

$\therefore \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} (٣\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}) + ٧) = -٣ \times -٥ + ٧$

$= ٢٢$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \text{ق}^٢(٢\text{س}+١) - ٢ + ٥$

$\text{ص} = ٢\text{س}+١$

$\text{س}\to ٢ \;،\; \text{ص}\to ٥$

$= \underset{\text{ص}\to ٥}{\text{نها}} \text{ق}^٢(\text{ص}) + ٣ = (٣)^٢ + ٣ = ١٢$

٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left(\text{س}^٢ + ٣\text{ق}(٤\text{س}-١)\right) = ٧$

$١ + ٣\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{ق}(٤\text{س}-١) = ٧$

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{ق}(٤\text{س}-١) = ٢$

$\text{ص} = ٤\text{س}-١$ ، $\text{س}\to ١$

$\text{ص}\to ٣$

$\Leftarrow \underset{\text{ص}\to ٣}{\text{نها}} \text{ق}(\text{ص}) = ٢$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})-٢\text{س}}{\text{س}^٢-١} = \frac{٢-٦}{٨} = -\frac{١}{٢}$

٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})+٥}{\text{س}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{\text{ق}(٠)+٥}{\text{صفر}} \Longrightarrow \text{ق}(٠) = -٥$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \left(\text{ق}(\text{س}) - ٥ + ٣\text{جـ}\right) = ٢$

$\text{ق}(٠) - ٥ + ٣\text{جـ} = ٢$

$-٥ - ٥ + ٣\text{جـ} = ٢$

$٣\text{جـ} = ١٢$

$\text{جـ} = ٤$

٥) $\text{نها}_{س\to١}\frac{ق(س)-٢}{١-س}=٣$

$\therefore \text{نها}_{س\to١}\left(ق(س)-٢\right)=٠$

$\text{نها}_{س\to١}ق(س)=٢$

ⓐ $\text{نها}_{س\to١}\frac{ق(س)-\sqrt{س^٢+٣}}{س-١}$

$=\text{نها}_{س\to١}\frac{ق(س)-٢}{س-١}+\text{نها}_{س\to١}\frac{٢-\sqrt{س^٢+٣}}{س-١}\times\frac{٢+\sqrt{س^٢+٣}}{٢+\sqrt{س^٢+٣}}$ ④

$=-٣+\text{نها}_{س\to١}\frac{٤-س^٢-٣}{٤(س-١)}$

$=-٣+\text{نها}_{س\to١}\frac{(١+س)\overset{-١}{\cancel{(١-س)}}}{٤\cancel{(س-١)}}=\frac{-٧}{٢}$

ⓑ $\text{نها}_{س\to١}\frac{(٢س+١)^٢ق(س)-١٨}{١-س}$

$=\text{نها}_{س\to١}\frac{(٢س+١)^٢ق(س)-٩ق(س)}{١-س}+\text{نها}_{س\to١}\frac{٩ق(س)-١٨}{١-س}$

$=\text{نها}_{س\to١}\frac{ق(س)\left((٢س+١)^٢-٩\right)}{١-س^٢}+\text{نها}_{س\to١}\frac{٩(ق(س)-٢)}{١-س}$

$=\text{نها}_{س\to١}\frac{ق(س)\cancel{(٢س+١-٣)}(٢س+١+٣)}{\cancel{١-س}}+٩\times٣$

$=٢\times-٢\times٦+٢٧=٣$.

٦) نفرض $ص=٥-س$ ، $س\to٢$

$س=٥-ص$ ، $ص\to٣$

$\text{نها}_{ص\to٣}\frac{ق(ص)-٨}{٥-ص-٢}=٤$

$\text{نها}_{ص\to٣}\frac{ق(ص)-٨}{٣-ص}=٤$

$\text{نها}_{س\to٣}\frac{ق(س)-٨}{س^٢-٩}=\text{نها}_{س\to٣}\frac{ق(س)-٨}{(س-٣)(س+٣)}$

$=-٤\times\frac{١}{٦}=\frac{-٢}{٣}$.

حل تمرين $\boxed{٩}$

$\boxed{١}$

١) $\text{نها}_{س\to٤}\frac{\sqrt{س^٣}-٢س}{٢س^٢-٥س-١٢}\times\frac{\sqrt{س^٣}+٢س}{\sqrt{س^٣}+٢س}$ ⑯

$=\text{نها}_{س\to٤}\frac{س^٣-٤س^٢}{١٦(٢س^٢-٥س-١٢)}$

$=\text{نها}_{س\to٤}\frac{س^٢\cancel{(س-٤)}}{١٦\cancel{(س-٤)}(٢س+٣)}=\frac{١}{١١}$

٢) $\text{نها}_{س\to٢^+}\frac{|٤-٢س|\,س^٢}{٢س^٢-٨}=\frac{صفر}{صفر}$ ؟ $\boxed{٠}$

$٤-٢س=٠$

$س=٢$

$$٤-٢س \;\; + \quad | \quad - \;\; ٢س-٤ \qquad (٢)$$

$=\text{نها}_{س\to٢^+}\frac{(٢س-٤)\,س^٢}{٢س^٢-٨}$

$=\text{نها}_{س\to٢^+}\frac{٢\cancel{(س-٢)}\,س^٢}{٢\cancel{(س-٢)}(س+٢)}=١$

٣) $\text{نها}_{س\to-١^-}\frac{\left|\frac{١}{س+٣}\right|-\frac{١}{٤}}{|-س-١|}=\frac{صفر}{صفر}$ ⊕ $\boxed{٠}$

$س-١=٠$

$س=١$

$$١-س \;\; - \quad | \quad + \;\; س-١ \qquad (١)$$

$\text{نها}_{س\to-١^-}\frac{\frac{١}{س+٣}-\frac{١}{٤}}{١-س}$

$=\text{نها}_{س\to-١^-}\frac{٤-س-٣}{٤(س+٣)}\times\frac{١}{١-س}$

$=\text{نها}_{س\to-١^-}\frac{\cancel{١-س}}{٤(س+٣)}\times\frac{١}{\cancel{١-س}}=\frac{١}{١٦}$

٤) $\text{نها}_{س\to٠^+}٣س\times\sqrt{\frac{٩}{س^٢}-\frac{٤}{س}\times\frac{س}{س}}$

$\text{نها}_{س\to٠^+}٣س\sqrt{\frac{٩-٤س}{س^٢}}$

$$-س \;\; - \quad | \quad + \;\; س \qquad (٠)$$

$=\text{نها}_{س\to٠^+}٣س\times\frac{\sqrt{٩-٤س}}{|س|}$

$=\text{نها}_{س\to٠^+}٣\cancel{س}\times\frac{\sqrt{٩-٤س}}{\cancel{س}}$

$=٣\times٣=٩$.

٢ ١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{٤}\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\frac{١}{٤} - ١}{-١}$

$= \dfrac{٣}{٤}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} (٧ - ٣\text{س}) = ١$

$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{٤}\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ $\times ٤$

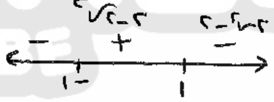
$= \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{٤(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{٤\cancel{(\text{س} - ٢)}}$

$= ١$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = ١$

٣ $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}} ٢\text{س}|\text{س} - ٢| = ٢ \times ١ \times ١ = ٢$

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} \dfrac{|٢ - ٢\text{س}^٢|}{\text{س} - ١} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$



$= \underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^٢ - ٢}{\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ١)}{\cancel{\text{س} - ١}} = ٤$

$\therefore \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س})$ غ.م

٤ نعوض ← $٢ - |٣ + \text{أ}| = \text{صفر}$

$|٣ + \text{أ}| = ٢ \leftarrow ٣ + \text{أ} = \pm ٢$

$٣ + \text{أ} = ٢$ أو $٣ + \text{أ} = -٢$

$\text{أ} = -١$ $\quad \text{أ} = -٥$

⊕

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - |\text{س} - ١|}{\text{س} - ٣}$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{٢ - \text{س} + ١}}{\cancel{\text{س} - ٣}} = -١$ $\quad\therefore$ $\boxed{\text{أ} = -٥}$

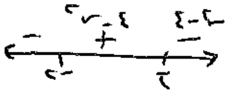
٥

$\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}} \left(٢\text{س} - ٣(٢ - \text{أ}\text{س})\right) = ٥$

$٢ - ٣(٢ - \text{أ}) = ٥$

$٢ - ٦ + ٣\text{أ} = ٥ \leftarrow \text{أ} = ٣$

٦ ١) $\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) - ٤}{|٤ - \text{س}^٢|}$



Ⓐ

$= \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) - ٤}{\text{س}^٢ - ٤} = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) - ٤}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

$= ١٢ \times \dfrac{١}{٤} = ٣$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) - ٢\text{س}}{٢ - \text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) - ٤}{٢ - \text{س}} + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٤ - ٢\text{س}}{٢ - \text{س}}$

$= -١٢ + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\cancel{(٢ - \text{س})}}{\cancel{٢ - \text{س}}} = -١٠$

Ⓑ من المعطيات ← $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = ٤$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left(٣\text{هـ}^٢(\text{س}) - \text{ب}|\text{س} - ٤|\right) = ٣٠$

$٣ \times (٤)^٢ - \text{ب} \times |-٢| = ٣٠$

$٤٨ - ٢\text{ب} = ٣٠ \leftarrow \text{ب} = ٩$

٧ $\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} \text{أ} = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \sqrt{٣\text{س} + \text{أ}}$

$\text{أ} = \sqrt{٦ + \text{أ}}$

$\text{أ}^٢ = ٦ + \text{أ} \leftarrow \text{أ}^٢ - \text{أ} - ٦ = ٠$

$(\text{أ} - ٣)(\text{أ} + ٢) = ٠$

$\boxed{\text{أ} = ٣}$ او $\text{أ} = -٢$

مرفوض

لأن

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} -٢ \neq \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \sqrt{٣\text{س} - ٢}$

$-٢ \neq ٢$

حل تمرين $\boxed{١٠}$

١) $\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\overset{-\frac{١}{٢}}{[\frac{س}{٢} - ١]} + س}{س^٢ + س - ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\cancel{-١ + س}}{\cancel{(س - ١)}(س + ٢)} = \dfrac{١}{٣}$

٢) $\text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{\overset{②}{[٥ - س]}\, س - ٦}{س^٢ - ٩}$

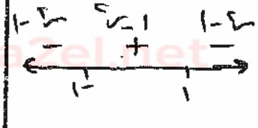
$= \text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{٢س - ٦}{س^٢ - ٩}$

$= \text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{٢\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)} = \dfrac{١}{٣}$

٣) $\text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\overset{(\frac{١}{٢})}{[س - \frac{١}{٢}]}}{س^٢ + س - ٢}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \dfrac{\text{صفر}}{س^٢ + س - ٢} = \text{صفر}$.

٤) $\text{نها}_{س \to ١^+} \dfrac{|\overset{①}{[س]} - س^٢|}{س - ١}$



$= \text{نها}_{س \to ١^+} \dfrac{|١ - س^٢|}{س - ١}$

$= \text{نها}_{س \to ١^+} \dfrac{\cancel{(س - ١)}(س + ١)}{\cancel{س - ١}} = ٢$

٥) $\text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{س^٢ - \overset{⑥}{[٢ - س]}^٢ + ١٦}{٣ - س}$

$= \text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{س^٢ - (٥)^٢ + ١٦}{٣ - س}$

$= \text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{س^٢ - ٩}{٣ - س}$

$= \text{نها}_{س \to ٣^-} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(س - ٣)}}(س + ٣)}{\cancel{٣ - س}} = -٦$

٦) $\text{نها}_{س \to ٢^+} \left(\overset{①}{[\frac{س}{٢}]} + ٤\right) = ٥$.

$\text{نها}_{س \to ٢^-} |١ - ٣س| = |-٥| = ٥$.

$\therefore \text{نها}_{س \to ٢} ق(س) = ٥$.

٧) ١) $\text{نها}_{س \to أ^+} [-٢س] = ٤$

$[-٢أ] = ٤$ أو $-٢أ - ١ = ٤$

$٤ > -٢أ > ٥$ $-٢أ = ٥$

$-٢ > أ > -\frac{٥}{٢}$ او $أ = -\frac{٥}{٢}$

$\therefore أ = (-٢ ، -\frac{٥}{٢}]$

٢) $٣أ = ص \leftarrow أ = \dfrac{ص}{٣}$.

٣) $\text{نها}_{س \to أ^+} [\frac{١}{٢} س] = ٣$

$[\frac{١}{٢} أ] = ٣$

$٣ > \frac{١}{٢} أ > ٤$

$٦ > أ > ٨$

$\therefore أ = (٦ ، ٨)$

٤) $\frac{١}{٥} أ \ne ص$

$\therefore أ \ne ٥ص$.

أ = مجموعة الأعداد الصحيحة التي لاتقبل القسمة على ٥ .

حل تمرين $\boxed{١١}$

$\boxed{١}$ أ) بالقسمة على س

$$= \frac{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \cancel{\frac{\text{س}}{\text{س}}}^{١} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٥\text{س}}{\text{س}}}{\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \cancel{\frac{٢\text{س}}{\text{س}}} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} \times \text{ظاس}}$$

$$= \frac{١ - ٣ + ٥}{٢ - ١ \times ٠} = \frac{٣}{٢}$$

٢) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٣\text{س}}{٢\text{س ظاس}} \times \frac{١ + \text{جتا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}}$$

②

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢ ٣\text{س}}{٤\text{س ظاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣\text{س} \times \text{جا}٣\text{س}}{٤\text{س} \times \text{ظاس}} = \frac{٣}{٤} \times ٣ = \frac{٩}{٤}$$

٣) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \text{جاس}}{\text{س}^٢ \text{جاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{١}{\text{س}^٢ \text{جاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{جاس}} (١ - \text{جتاس})}{\text{جتاس} \times \text{س}^٢ \cancel{\text{جاس}}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$$

②

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢ \text{جتاس}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{٢\text{س}^٢ \text{جتاس}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} \times \text{جاس}}{٢\text{س} \times \text{س} \times \text{جتاس}} = \frac{١}{٢}$$

٤) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤\text{س جا}٢\text{س}}{\text{جا}^٢ ٣\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{جا}^٢ ٣\text{س}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$$

②

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤\text{س جا}٢\text{س}}{\text{جا}٣\text{س جا}٣\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جاس} \times \text{جاس}}{٢ \text{جا}٣\text{س جا}٣\text{س}}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{٨}{٩} + \frac{١}{١٨} = \frac{١٧}{١٨}$$

٥) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^٢ ٣\text{س} - ١}{\text{س}^٢} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٨\text{س}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}٨\text{س}}{١ + \text{جتا}٨\text{س}}$$

②

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{- \text{جا}^٢ ٣\text{س}}{\text{س}^٢} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ ٨\text{س}}{٢\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{- \text{جا}٣\text{س جا}٣\text{س}}{\text{س} \times \text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٨\text{س} \times \text{جا}٨\text{س}}{٢\text{س} \times \text{س}}$$

$$= -٣ \times ٣ + \frac{٨}{٢} \times ٨ = ٢٣$$

$\frac{\pi}{٢}$

٦) $$\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{\cancel{٢\text{س} - ١}^{-١}}{\cancel{١ - ٢\text{س}}} + \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جا}\pi\text{س}}{١ - ٢\text{س}}$$

$$= -١ + \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \pi\text{س}\right)}{١ - ٢\text{س}}$$

$$= -١ + \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\frac{\pi}{٢}(١ - ٢\text{س})}{١ - ٢\text{س}} \times \text{المرافق}$$

$$= -١ + \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ \frac{\pi}{٢}(١ - ٢\text{س})}{٢(١ - ٢\text{س})}$$

$$= -١ + \underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - ٢\text{س})}{٢(١ - ٢\text{س})} \times \text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - ٢\text{س})$$

$$= -١ + \frac{\pi}{٤} \times ٠$$

$$= -١$$

٧) $$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{جتا}^٣\text{س} - \text{جتا}^٢\text{س}) + (\text{جتاس} - ١)}{٣\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}^٢\text{س} (\text{جتاس} - ١) + (\text{جتاس} - ١)}{٣\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{جتاس} - ١)(\text{جتا}^٢\text{س} + ١)}{٣\text{س}^٢} \times \frac{\text{جتاس} + ١}{\text{جتاس} + ١}$$

②

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{(\text{جتا}^٢\text{س} - ١)(\text{جتا}^٢\text{س} + ١)}{٦\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{- \text{جا}^٢\text{س} (\text{جتا}^٢\text{س} + ١)}{٦\text{س}^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{- \text{جاس} \times \text{جاس} (\text{جتا}^٢\text{س} + ١)}{٦\text{س} \times \text{س}}$$

$$= -\frac{١}{٦} \times ١ \times ٢ = -\frac{١}{٣}$$

٨) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ط س}^{٢}}{\text{س}-٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{-\text{جا}(\text{ط س}^{٢}-٩\text{ط})}{\text{س}-٣}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{-\text{جا ط}(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{\text{س}-٣} \times \dfrac{\text{ط}(\text{س}+٣)}{\text{ط}(\text{س}+٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{-\text{جا ط}(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{\text{ط}(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} \times ٦\text{ط}$

$= -١ \times ٦\text{ط} = -٦\text{ط}$

٩) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}٣\text{س} \times \dfrac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} - \text{جا س}}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \text{جا س}\left(\dfrac{\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جتا س}} - ١\right) \times \dfrac{١}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \text{جا س} \times \dfrac{\text{جتا}٣\text{س} - \text{جتا س}}{\text{جتا س}} \times \dfrac{١}{\text{س}^{٣}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س} \times -٢\text{جا}٢\text{س جا س}}{\text{س} \times \text{س} \times \text{س} \times \text{جتا س}}$

$= ١ \times -٢ \times ٢ \times ١ = -٤$

١٠) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣ - \sqrt{\text{س}^{٢}+٩}}{\text{جتا}٧\text{س} - \text{جتا س}} \times \dfrac{٣ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٩}}{٣ + \sqrt{\text{س}^{٢}+٩}}$ ⑥

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{٩} - \text{س}^{٢} - \cancel{٩}}{٦(\text{جتا}٧\text{س} - \text{جتا س})}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-\text{س}^{٢}}{٦ \times -٢\text{جا}٤\text{س جا}٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{-\text{س} \times \text{س}}{-١٢\ \text{جا}٤\text{س} \times \text{جا}٣\text{س}}$

$= \dfrac{١}{١٢} \times \dfrac{١}{٤} \times \dfrac{١}{٣}$

$= \dfrac{١}{١٤٤}$

١١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢\text{ط س}}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(٢\text{ط س} - ٢\text{ط})}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}٢\text{ط}(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٢)}$

$= ٢\text{ط} \times \dfrac{١}{٣} = \dfrac{٢\text{ط}}{٣}$

١٢) $\underset{\text{س}\to -\frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١ + \text{جتا}٢\text{س}}{(٢\text{س}+\text{ط})^{٢}} \times \dfrac{١+\text{جتا}٢\text{س}}{١+\text{جتا}٢\text{س}}$ ②

$= \underset{\text{س}\to -\frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا}^{٢}٢\text{س}}{٢(٢\text{س}+\text{ط})^{٢}}$

(−ط)

$= \underset{\text{س}\to -\frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{٢}٢\text{س}}{٢(٢\text{س}+\text{ط})^{٢}}$

$= \underset{\text{س}\to -\frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{٢}(٢\text{س}+\text{ط})}{٢(٢\text{س}+\text{ط})^{٢}} = \dfrac{١}{٢} \times ١ = \dfrac{١}{٢}$

١٣) $\underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س} + ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{-٢\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جا س} + ١}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}} \times -$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا س} - ١}{\text{جا}^{٢}\text{س} - ١}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{(٢\text{جا س}+١)\cancel{(\text{جا س}-١)}}{(\text{جا س}+١)\cancel{(\text{جا س}-١)}} = \dfrac{٣}{٢}$

(ط) $\quad (\frac{\text{ط}}{٢})$

١٤) $\underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا س} - \text{جا}٢\text{س}}{٢\text{س} - \text{ط}}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}) + \text{جا}(٢\text{س} - \text{ط})}{٢\text{س} - \text{ط}}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\text{ط}}{٢}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س})}{٢(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٢})} + \dfrac{\text{جا}(٢\text{س} - \text{ط})}{٢\text{س} - \text{ط}}$

$= -\dfrac{١}{٢} + ١ = \dfrac{١}{٢}$

١٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س} + ٦\text{س ظاس} + ٩\text{س}^{٢}}{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س})}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س} + ٦\text{س ظاس} + ٩\text{س}^{٢}}{٢\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢\text{جا}^{٢}\text{س}} + \dfrac{٦\text{س ظاس}}{٢\text{جاس جاس}} + \dfrac{٩\text{س} \times \text{س}}{٢\text{جاس جاس}}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + ٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{٩}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٨} + \frac{٣}{٤} + \frac{٩}{٨} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

١٦) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \text{جاس})}{٣(\text{س} - \frac{\pi}{٣})}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢(\text{جا}\frac{\pi}{٣} - \text{جاس})}{٣(\text{س} - \frac{\pi}{٣})}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ \times ٢\text{جتا}\frac{١}{٢}(\frac{\pi}{٣} + \text{س})\text{جا}\frac{١}{٢}(\frac{\pi}{٣} - \text{س})}{٣(\text{س} - \frac{\pi}{٣})}$

$= ٤ \times \text{جتا}\frac{\pi}{٣} \times \frac{-١}{٦} = \frac{-١}{٣}$

$\boxed{\frac{\pi}{٢}}$

١٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{\text{س}})}{\text{س} - ٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}(١ - \frac{٢}{\text{س}})}{\text{س}(١ - \frac{٢}{\text{س}})} = \frac{١}{٢} \times \frac{\pi}{٢} = \frac{\pi}{٤}$

$\boxed{\frac{\pi}{٢}}$ $\boxed{\frac{\pi}{٢}}$

١٨) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٢\text{س} - \text{جتا}٢\text{س} - ١}{٤(\text{س} - \frac{\pi}{٤})}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{س}) - \text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{س}) - ١}{٤(\text{س} - \frac{\pi}{٤})} \times -$

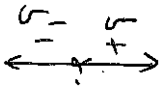
$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٢(\frac{\pi}{٤} - \text{س})}{-٤(\text{س} - \frac{\pi}{٤})} + \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{س})}{-٤(\text{س} - \frac{\pi}{٤})} \times$ [illegible]

$= \frac{٢}{٤} + \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}٢(\frac{\pi}{٤} - \text{س})}{-٨(\text{س} - \frac{\pi}{٤})} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} \times ٠$

$= \frac{١}{٢}$

١٩) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{جا}٢\text{س} \times \sqrt{\dfrac{١ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \text{جا}٢\text{س} \times \dfrac{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}{|\text{س}|}$



$\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \text{جا}٢\text{س} \times \dfrac{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}{\text{س}} = ٢ \times ١ = ٢$

$\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{جا}٢\text{س} \times \dfrac{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}{-\text{س}} = -٢ \times ١ = -٢$

∴ النهاية غ. م

$\boxed{\frac{\pi}{٢}}$

٢٠) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (١ - \text{س}) \text{ظا}\frac{\pi}{٢}\text{س}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (١ - \text{س}) \text{ظتا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} (١ - \text{س}) \times \dfrac{١}{\text{ظا}\frac{\pi}{٢}(١ - \text{س})}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{س}}{\text{ظا}\frac{\pi}{٢}(١ - \text{س})} = \dfrac{٢}{\pi}$

٢١) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١\cancel{٢}}{\text{جاس} \times \cancel{٢}\text{جاس جتاس}} - \dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س جتاس}} - \dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} \right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتاس}} \times \dfrac{١ + \text{جتاس}}{\underset{\boxed{٢}}{١ + \text{جتاس}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{جا}^{٢}\text{س}}}{٢\cancel{\text{جا}^{٢}\text{س}}\text{جتاس}} = \dfrac{١}{٢}$

٢٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١ + \text{جاس}} - \text{جتا}٣\text{س}}{٢\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{١ + \text{جاس}} + \text{جتا}٣\text{س}}{\underset{\boxed{٢}}{\sqrt{١ + \text{جاس}} + \text{جتا}٣\text{س}}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + \text{جاس} - \text{جتا}^{٢}٣\text{س}}{٤\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{٤\text{س}} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}^{٢}٣\text{س}}{٤\text{س}}$

$= \frac{١}{٤} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٣\text{س} \times \text{جا}٣\text{س}}{٤\text{س}} = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} \times ٠$

$= \frac{١}{٤}$

٢٣) $\underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}} \frac{(\text{ظا}س-\sqrt{٣})(\text{ظا}س+\sqrt{٣})}{٣(\frac{\pi}{٣}-س)}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}} \frac{(\text{ظا}س-\text{ظا}\frac{\pi}{٣})(\text{ظا}س+\sqrt{٣})}{٣(\frac{\pi}{٣}-س)}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٣}}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(س-\frac{\pi}{٣})(١+\text{ظا}س\,\text{ظا}\frac{\pi}{٣})(\text{ظا}س+\sqrt{٣})}{٣(\frac{\pi}{٣}-س)}$

$= -\frac{١}{٣} \times (١+\sqrt{٣}\times\sqrt{٣})(\sqrt{٣}+\sqrt{٣})$

$= -\frac{١}{٣} \times ٤ \times ٢\sqrt{٣} = \frac{-٨\sqrt{٣}}{٣}$

٢٤) $\underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{٢\text{جا}س\,\text{جتا}س-\sqrt{٢}\,\text{جتا}س}{س-\frac{\pi}{٤}}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{٢\text{جتا}س(\text{جا}س-\frac{١}{\sqrt{٢}})}{س-\frac{\pi}{٤}}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{٢\text{جتا}س(\text{جا}س-\text{جا}\frac{\pi}{٤})}{س-\frac{\pi}{٤}}$

$= \underset{س\to\frac{\pi}{٤}}{\text{نها}} \frac{٢\text{جتا}س\times٢\,\text{جتا}\frac{١}{٢}(س+\frac{\pi}{٤})\,\text{جا}\frac{١}{٢}(س-\frac{\pi}{٤})}{س-\frac{\pi}{٤}}$

$= ٢\times\frac{١}{\sqrt{٢}}\times٢\times\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\times\frac{١}{٢}$

$= \frac{٤}{\sqrt{٢}}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}\times\frac{١}{٢} = ١$.

٢٥) $\underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{١+\text{ظا}^٢س-\text{جتا}٤س}{س^٢}$

$= \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^٢س}{س^٢} + \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{١-\text{جتا}٤س}{س^٢} \times \frac{١+\text{جتا}٤س}{١+\text{جتا}٤س}$ ②

$= ١ + \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢٤س}{٢س^٢}$

$= ١ + \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٤س\times\text{جا}٤س}{٢س\times س}$

$= ١ + \frac{٤}{٢}\times٤ = ٩$.

$\boxed{٢}$ $\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,\pi س}{١-س} = \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{أ(س^٢-٤)}{\text{جا}\,\pi س}$ (π) (π٢)

$\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(\pi س-\pi)}{١-س} = \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{أ(س^٢-٤)}{\text{جا}(\pi س-٢\pi)}$

$\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,\pi(س-١)}{١-س} = \underset{س\to٢}{\text{نها}} \frac{أ(س-٢)(س+٢)}{\text{جا}\,\pi(س-٢)}$

$-\pi = أ\times\frac{١}{\pi}\times٤ \leftarrow أ = \frac{-\pi^٢}{٤}$

$\boxed{٣}$ $\underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{أ\,\text{جا}^٢س+\text{جتا}٢س+ب\,\text{جتا}س}{س^٢} = \frac{١}{٢}$

نعوض $\leftarrow ٠+١+ب=٠ \leftarrow ب=-١$

$\underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{أ\,\text{جا}^٢س}{س^٢} + \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}٢س-\text{جتا}س}{س^٢} = \frac{١}{٢}$

$أ + \underset{س\to٠}{\text{نها}} \frac{-٢\,\text{جا}\frac{٣}{٢}س\,\text{جا}\frac{١}{٢}س}{س\times س} = \frac{١}{٢}$

$أ + -٢\times\frac{٣}{٢}\times\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow أ=٢$

$\boxed{٤}$ $\underset{س\to٠^+}{\text{نها}} (أ\,\text{جتا}\,\pi س+٣) = \underset{س\to٠^-}{\text{نها}} \frac{|\text{ظا}٢س|}{س}$

$أ\times١+٣ = \underset{س\to٠^-}{\text{نها}} \frac{-\text{ظا}٢س}{س}$

$أ+٣ = -٢ \leftarrow أ=-٥$.

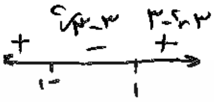
حل تمرين $\boxed{١٢}$

$\boxed{١}$

① $\text{ق}(١) = ١ + ٢ = ٣$

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهــا}} [٥ - س] = ٣$ ④

$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}} \frac{|٣ - ٣س^٢|}{١ - س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$



$= \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}} \frac{٣ - ٣س^٢}{١ - س} = \underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}} \frac{٣\cancel{(١ - س)}(١ + س)}{\cancel{١ - س}}$

$= ٦$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ١

لأن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) غ.م .

② $\text{ق}(٠) = ١ - \text{جتا}٠ = \text{صفر}$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهــا}} (١ - \text{جتا}س) = \text{صفر}$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهــا}} \frac{|\text{ظا}س|}{س} = \underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهــا}} \frac{-\text{ظا}س}{س} = -١$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٠

لأن $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س) غ.م

③ $\text{ق}(٢) = ١٣$ ← ٤,٥

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \left[\frac{س + ٧}{٢}\right] + ١٠ = ٤ + ١٠ = ١٤$

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \frac{س^٣ + س - ١٠}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^٢ + ٢س + ٥)}{\cancel{س - ٢}} = ١٣$

ق(س) غير متصل عند س = ٢

لأن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) غ.م .

④ $\text{ق}(\frac{\pi}{٤}) = ٢ - \text{ظا}\frac{\pi}{٤} = ١$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}^+}{\text{نهــا}} (٢ - \text{ظا}س) = ١$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}^-}{\text{نهــا}} \frac{\pi - ٤س}{\text{جتا}٢س} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}^-}{\text{نهــا}} \frac{\pi - ٤س}{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}$ $\circled{\frac{\pi}{٢}}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}^-}{\text{نهــا}} \frac{٤(\frac{\pi}{٤} - س)}{\text{جا}٢(\frac{\pi}{٤} - س)} = ٢$.

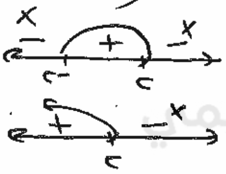
∴ ق(س) غير متصل عند س = $\frac{\pi}{٤}$

لأن $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}}$ ق(س) غ.م .

⑤ $\text{ق}(٢) = \frac{١}{٢} \times ٢ + ٣ = ٤$

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{س + |١ - س| - ٤}{س - ٢}$ ⊖

$= \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{س + س - ٤}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{٢\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}} = ٢$



$\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{٤ - س^٢}}{\sqrt{٢ - س}} = \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$

$= \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \sqrt{\frac{\cancel{(٢ - س)}(٢ + س)}{\cancel{٢ - س}}} = ٢$

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

لأن $\text{ق}(٢) \neq \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

$\boxed{٢}$ $\text{ق}(٢) = ٣أ + ٢$

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} (أس + ٢) = ٢أ + ٢$

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} [س] - أ = ١ - أ$ ①

لكن $\text{ق}(٢) = \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \text{ق}(س)$

∴ $٣أ + ٢ = ١ - أ$

$٣أ = -١$

$أ = -\frac{١}{٣}$.

٣

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ق}(٣)$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - (٣-٢\text{جـ})\text{س} - ٦\text{جـ}}{\text{س}-٣} = ٤\times٣-١$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\cancel{(\text{س}-٣)}(\text{س}+٢\text{جـ})}{\cancel{\text{س}-٣}} = ١١$

$٣+٢\text{جـ} = ١١ \longrightarrow \text{جـ} = ٤$

٤

$\text{ق}(٢) = ٨+\text{أ}-١ = ٧+\text{أ}$

$\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ (٤\text{س}+\text{أ}-١) = ٧+\text{أ}$

$\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أس}^{٢}-٢\text{س}-\text{ب}}{\text{س}-٢} = \dfrac{٤\text{أ}-٤-\text{ب}}{\text{صفر}}$

$\therefore ٤\text{أ}-٤-\text{ب} = ٠$

$\text{ب} = ٤\text{أ}-٤$

$\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أس}^{٢}-٢\text{س}-٤\text{أ}+٤}{\text{س}-٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أ}\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{\cancel{\text{س}-٢}} + \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٢\overset{-١}{\cancel{(٢-\text{س})}}}{\cancel{\text{س}-٢}}$

$= ٤\text{أ}-٢$

$\therefore ٧+\text{أ} = ٤\text{أ}-٢ \longrightarrow \text{أ} = ٣$

$\therefore \text{ب} = ٨$

٥

$\text{ق(أ)} = |١-٢\text{أ}|$

$\underset{\text{س}\to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ [\text{س}+٤] = \text{أ}+٤$

$\underset{\text{س}\to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ |١-٢\text{س}| = |١-٢\text{أ}|$

لكن $\text{ق(أ)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\therefore |١-٢\text{أ}| = \text{أ}+٤$

$١-٢\text{أ} = \text{أ}+٤$ أو $١-٢\text{أ} = -\text{أ}-٤$

$-٣ = ٣\text{أ}$ $\qquad$ $٥ = \text{أ}$

$\boxed{\text{أ} = -١}$ $\qquad$ $\boxed{\text{أ} = ٥}$

حل تمرين ١٣

① هـ(س) متصل عند $\text{س} = ٢$ لأنه كثير حدود.

<u>ق(س)</u>

$\text{ق}(٢) = ٦-٢ = ٤$

$\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ (٣\text{س}-٢) = ٤$ ، $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} = ٤$

ق(س) متصل عند $\text{س} = ٢$

$\therefore \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}$ متصل عند $\text{س} = ٢$

لأنه ضرب اقترانين متصلين

② ق(س) غير متصل عند $\text{س} = -١$ (اختبر ذلك)

نفرض

$\text{ل(س)} = \text{ق(س)} + \text{هـ(س)}$

$\text{ل(س)} = \begin{cases} ٥-٣\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣ \text{ ، } & \text{س} < -١ \\ ٢\text{س}+١+\text{س}^{٢}+١ \text{ ، } & \text{س} \geq -١ \end{cases}$

$\text{ل(س)} = \begin{cases} -٣\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٨ \text{ ، } & \text{س} < -١ \\ \text{س}^{٢}+٢\text{س}+٢ \text{ ، } & \text{س} \geq -١ \end{cases}$

$\text{ل}(-١) = ١-٢+٢ = ١$

$\underset{\text{س}\to -١^{+}}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٢) = ١$

$\underset{\text{س}\to -١^{-}}{\text{نهـا}}\ (-٣\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٨) = -٣-٤+٨ = ١$

$\therefore \text{ل(س)}$ متصل عند $\text{س} = -١$

لأنه $\text{ل}(-١) = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$

③ ق(س) غير متصل عند $\text{س} = ٣$ (اختبر ذلك)

نفرض $\text{ل(س)} = \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}$

$\text{ل(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢}-\text{س}-٦}{\text{س}-٣} \text{ ، } & \text{س} < ٣ \\ (٢\text{س}-٤)(\text{س}^{٢}-٥) \text{ ، } & \text{س} > ٣ \\ (٢\text{س}-٤)(٧-\text{س}) \text{ ، } & \text{س} = ٣ \end{cases}$

ل(٣) = ٢ × ٤ = ٨

نهـا (س←٣+) (٢س − ٤)(س² − ٥) = ٢ × ٤ = ٨

نهـا (س←٣−) (س² − س − ٦)/(س − ٣) = نهـا (س←٣−) (~~س − ٣~~)(س + ٢)/(~~س − ٣~~) = ٥

∴ ل(س) غير متصل عند س = ٣

لأنه نهـا (س←٣) ل(س) غ. م.

④ ق(س) = س²/(س − ٢) متصل عند س = ١

لأنه اقتران نسبي مقام ≠ ٠ عند س = ١

هـ(س) = جا (π/٢) س متصل عند س = ١

لأنه اقتران جيب

هـ(١) = جا (π/٢) = ١ ≠ ٠

∴ ق(س)/هـ(س) متصل عند س = ١

لأنه قسمة متصلين

⑤ هـ(س) متصل عند س = −٢ لأنه

قسمة متصلين ومقام ≠ ٠ عند س = −٢

<u>ق(س)</u>

ق(−٢) = ٣/٢

نهـا (س←−٢+) (١/٨ س³ + ١)/(س + ٢) × ٨/٨

نهـا (س←−٢+) (س³ + ٨)/(٨(س + ٢)) = نهـا (س←−٢+) (~~س + ٢~~)(س² − ٢س + ٤)/(٨(~~س + ٢~~))

= ١٢/٨ = ٣/٢

نهـا (س←−٢−) ٣/٢ = ٣/٢

ق(س) متصل عند س = −٢

∴ ق(س) + هـ(س) متصل عند س = −٢

لأنه مجموع اقترانين متصلين

⑥ هـ(س) = [س/٢ + ٥]

هـ(٣) = [١٫٥ + ٥] = ٦

نهـا (س←٣) [س/٢ + ٥] = [٦٫٥] = ٦

هـ(س) متصل عند س = ٣

<u>ق(س)</u>

ق(٣) = ١٢ + ٣ = ١٥

نهـا (س←٣+) (٤س + ٣/(س − ٢)) = ١٥

نهـا (س←٣−) (س² + ٢س) = ٩ + ٦ = ١٥

ق(س) متصل عند س = ٣

∴ ل(س) = ق(س) − هـ(س)

متصل عند س = ٣

لأنه طرح متصلين

⑦ ق(س) غير متصل عند س = ٢ (اختبر ذلك)

نفرض ل(س) = ق(س)/هـ(س)

ل(س) = { (٢س + [س/٢])/(٦ − س) ، س < ٢

         |١ − س²|/(٢س − ١) ، س ≥ ٢

ل(٢) = |١ − ٣|/٣ = ١

نهـا (س←٢+) |١ − س²|/(٢س − ١) = |١ − ٣|/٣ = ١

①

نهـا (س←٢−) (٢س + [س/٢])/(٦ − س)

= نهـا (س←٢−) (٢س + ٠)/(٦ − س) = ٤/٤ = ١

∴ ل(س) متصل عند س = ٢

لأن ل(٢) = نهـا (س←٢) ل(س)

حل تمرين $\boxed{١٤}$

① الفترات الجزئية :

$٠ < س < ٣$ ق(س) متصل عدا $\boxed{س = ١}$

لانه نسبي مقام $\neq ٠$

$٣ < س < ٥$ ق(س) متصل لانه كثير حدود.

نقط المساواة :

$س = ٣$ (تحول)

$ق(٣) = ٩ - ٥ = ٤$

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نها}(س^٢ - ٥) = ٤$ ، $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نها} \frac{٨}{س - ١} = ٤$

ق(س) متصل عند $س = ٣$.

∴ ق(س) متصل على $(٠ ، ٥) - \{١\}$.

② مجال الاقتران $= [-١ ، \infty)$

الفترات الجزئية :

$-١ < س < ٠$ ق(س) متصل لانه مجموع متصلين

$س > ٠$ ق(س) متصل لانه كثير حدود .

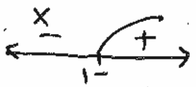
نقط المساواة :

$س = -١$ (طرف يمين)

$ق(-١) = جتا -\pi + \sqrt{٠} = -١$ ؟

$\underset{س \leftarrow -١^+}{نها}(جتا \pi س + \sqrt{س + ١}) = جتا -\pi + \sqrt{٠}$

$= -١$



ق(س) متصل عند $س = -١$ من اليمين

$س = ٠$ (تحول)

$ق(٠) = ٠ + ٢ = ٢$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نها}(س^٣ + ٢) = ٢$

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{نها}(جتا \pi س + \sqrt{س + ١}) = ١ + ١ = ٢$

ق(س) متصل عند $س = ٠$.

∴ ق(س) متصل على $[-١ ، \infty)$

③ الفترات الجزئية :

$\frac{١}{٢} < س < ١$ ق(س) متصل لانه كثير حدود

نقط المساواة :

$س = \frac{١}{٢}$ (طرف يمين)

$ق(\frac{١}{٢}) = [\frac{١}{٢} + ٢] = ٢$

$\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^+}{نها} ٤س = ٤ \times \frac{١}{٢} = ٢$

ق(س) متصل عند $س = \frac{١}{٢}$ من اليمين

$س = ١$ (طرف يسار)

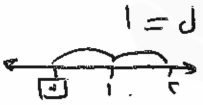
$ق(١) = ٦ - ٢ = ٤$

$\underset{س \leftarrow ١^-}{نها} ٤س = ٤ \times ١ = ٤$

ق(س) متصل عند $س = ١$ من اليسار

∴ ق(س) متصل على $[\frac{١}{٢} ، ١]$.

④ نعيد تعريف الصحيح :



$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & ، س < ٠ \\ ٢ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ٣ & ، ١ \leq س < ٢ \\ \sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س} & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

الفترات الجزئية

$$\left.\begin{array}{l} س < ٠ \\ ٠ < س < ١ \\ ١ < س < ٢ \end{array}\right\}$$ ق(س) متصل لانه كثير حدود .

$س > ٢$ ق(س) متصل لانه جمع متصلين

نقط المساواة :

$س = ٠$ (تحول) $\leftarrow$ $ق(٠) = ٢$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{نها} ٢ = ٢$ ، $\underset{س \leftarrow ٠^-}{نها}(س^٢ + ٢) = ٢$

ق(س) متصل عند $س = ٠$.

$س = ١$ تحول

$ق(١) = ٣$ ، $\underset{س \leftarrow ١^+}{نها} ٣ = ٣$ ، $\underset{س \leftarrow ١^-}{نها} ٢ = ٢$

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ١}$

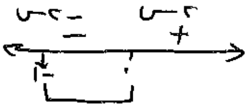
$س = ٢$ (تحول)

$ق(٢) = ٣ + ٢ = ٥$ ، $\underset{س \leftarrow ٢^+}{نها}(\sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س}) = ٥$

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{نها} ٣ = ٣$ $\leftarrow$ ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٢}$

∴ ق(س) متصل على $ح - \{١ ، ٢\}$.

⑤ نعيد تعريف المطلق



ق(س) = { √(−س) − ٢س ، −١ < س < ٠ .
٦/(س+١) ، ٠ ≤ س < ٢
[س − ٤] ، س = ٢ }

الفترات الجزئية :

−١ < س < ٠ . ق(س) متصل لانه طرح متصلين

٠ < س < ٢ . ق(س) متصل لانه نسبي مقام ≠ ٠

نقط المساواة :

س = ٠ (تحول)

ق(٠) = ٦ ، نهـا (س ← ٠+) ٦/(س+١) = ٦

نهـا (س ← ٠−) √(−س) − ٢س = √٠ − ٠ = ٠ .

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٠}$

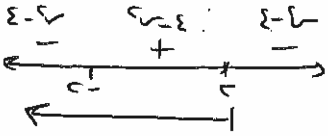
س = ٢ (طرف يسار)

ق(٢) = [−٢] = −٢ ، نهـا (س ← ٢−) ٦/(س+١) = ٢

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٢}$

∴ ق(س) متصل على (−١ ، ٢) − {٠}

⑥ نعيد تعريف المطلق



ق(س) = { س² − ٤ ، س ≤ −٢
٤ − س² ، −٢ ≤ س < ٢
٢/π − جا πس ، س ≥ ٢ }

الفترات الجزئية :

س < −٢ ، −٢ < س < ٢ } ق(س) متصل لانه كثير حدود .

س > ٢ ق(س) متصل لانه طرح متصلين

نقط المساواة :

س = −٢ (تحول)

ق(−٢) = ٠ ، نهـا (س ← −٢+) (٤ − س²) = ٠

نهـا (س ← −٢−) (س² − ٤) = ٠

ق(س) متصل عند س = −٢

س = ٢ (تحول)

ق(٢) = ١ − جا ٢π = ١

نهـا (س ← ٢+) (٢/π − جا πس) = ١ − جا ٢π = ١

نهـا (س ← ٢−) (٤ − س²) = صفر

ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٢}$

∴ ق(س) متصل على ح − {٢} .

② ق(س) متصل عند س = ٢

ق(٢) = ٣ب

نهـا (س ← ٢+) (أس + ب + ١٢) = ٢أ + ب + ١٢

نهـا (س ← ٢−) (أس² + بس) = ٤أ + ٢ب .

لكن ق(٢) = نهـا (س ← ٢+) ق(س) = نهـا (س ← ٢−) ق(س)

∴ ٢أ + ب + ١٢ = ٣ب ، ٤أ + ٢ب = ٣ب

٢أ − ٢ب = −١٢ / ٢ | $\boxed{٤أ − ب = ٠}$

$\boxed{أ − ب = −٦}$ | ×−١

−٤أ + ب = ٠

−٣أ = −٦ ← أ = ٢ ← ب = ٨

③ ق(س) متصل على ح عندما

المقام ≠ صفر

∴ المميز سالبا

ب² − ٤أجـ < ٠ .

٤ − ٤ × ١ × جـ < ٠ .

٤ < ٤جـ

∴ جـ > ١

جـ = (١ ، ∞)

④ ق(س) متصل عند س = ٢

ق(٢) = نهـا (س←+٢) ق(س) = نهـا (س←-٢) ق(س)

ق(٢) = ٦+ب

نهـا (س←+٢) (٣س+ب) = ٦+ب

نهـا (س←-٢) (٢أ+١) = ٢أ+١

∴ ٦+ب = ٢أ+١

$\boxed{٢أ - ب = ٥}$

ق(س) متصل عند س = ب

ق(ب) = نهـا (س←+ب) ق(س) = نهـا (س←-ب) ق(س)

ق(ب) = |ب+١٠| + ٢

نهـا (س←+ب) (|س+١٠|+٢) = |ب+١٠|+٢

نهـا (س←-ب) (٣س+ب) = ٤ب

∴ |ب+١٠|+٢ = ٤ب

|ب+١٠| = ٤ب−٢

ب+١٠ = ٤ب−٢ أو ب+١٠ = −٤ب+٢

١٢ = ٣ب   ٥ب = −٨

$\boxed{ب = ٤}$ ب = −$\frac{٨}{٥}$ ×

∴ ٢أ−٤ = ٥ ← أ = $\frac{٩}{٢}$

⑤ نعيد تعريف الصحيح ؛   ل = ١

هـ(س) = { ٣س−٢ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٣س−٣ ، ١ ≤ س < ٢ }

نفرض ل(س) = ق(س) + هـ(س)

ل(س) = { ١ ، س = ٠ ؛ ٨س−٣ ، ٠ < س < ١ ؛ ٢س²+٣س−٢ ، ١ ≤ س < ٢ }

الفترات الجزئية

{ ٠ < س < ١ ؛ ١ < س < ٢ }   ل(س) متصل لأنه كثير حدود.

نقط المساواة :

س = ٠ (طرف يمين)

ل(٠) = ١

نهـا (س←+٠) (٨س−٣) = −٣

ل(س) غير متصل عند $\boxed{س = ٠}$

س = ١ (تحول)

ل(١) = ٢+٣−٢ = ٣

نهـا (س←+١) (٢س²+٣س−٢) = ٣

نهـا (س←-١) (٨س−٣) = ٥

ل(س) غير متصل عند $\boxed{س = ١}$

∴ ل(س) متصل على (٠، ٢) − {١} .

⑥ ق(س) متصل على ح عندما يكون

ما داخل الجذر ≥ ٠

المميز ≤ ٠

أ² − ٤×١×٩ ≤ ٠

أ² − ٣٦ ≤ ٠

∴ أ = [−٦، ٦]