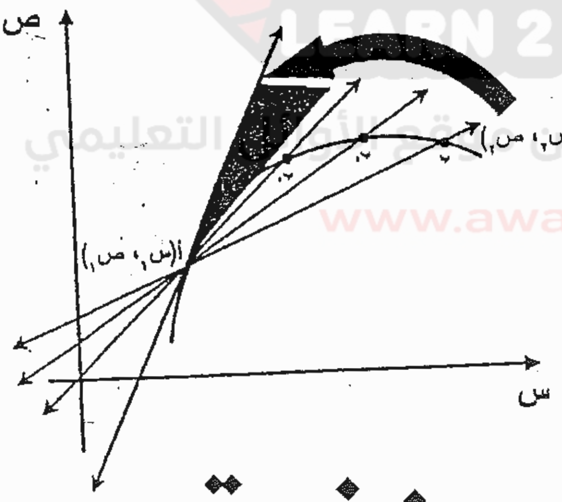
"وقل رب زدني علما"

مدارس جوهرة عمان

مدارس لؤلؤة طارق

أوراق عمل في

التفاضل



$$\text{قَ(س)} = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

0795562444

2020-2019

معدل التغير

اذا تغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$ فان

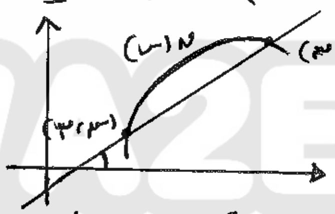
① التغير في س : $\Delta س = س_2 - س_1$

② التغير في الاقتران : $\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$

③ معدل التغير في الاقتران ق : $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

* اذا قطع مستقيم منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$ كما في الشكل المجاور فان :



ميل القاطع = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

= ظاهـ : هـ مع الاتجاه الموجب لمحور س

او = − ظاهـ : هـ مع الاتجاه السالب لمحور س

* اذا كان : ١) ق(س) = جـ (ثابت) فان $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = صفر دائماً .

٢) ق(س) = أس + ب فان $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = أ دائماً

اذا كان : $ق(س) = ٢س^3 - س^2 + ٥$ وتغيرت س من −١ الى ٢ جد

① التغير في س ② التغير في الاقتران ق(س)

الحل :

① $\Delta س = ٢ - -١ = ٣$

② $\Delta ص = ق(٢) - ق(-١)$

$= ١٧ - ٢ = ١٥$

① اذا كان $ق(س) = \frac{٣س}{س - ١}$ ، س ≠ ١ وتغيرت س من ٤ الى ٢ جد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٢) - ق(٤)}{٢ - ٤} = \frac{٦ - ٤}{-٢} = -١$$

② $ق(س) = \frac{١}{\sqrt[3]{٣س + ١}}$

جد معدل تغير ق(س) في الفترة [−٣ ، ٠]

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٠) - ق(-٣)}{٠ + ٣} = \frac{١ + \frac{١}{٢}}{٣} = \frac{١}{٢}$

③ اذا كان معدل تغير ق(س) يساوي ٦ عندما $س_1 = ٢$ ، $\Delta س = ٣$ وكان ق(٢) = ٤ جد ق(٥)

الحل : نجد $س_2$ ← $٣ = س_2 - ٢$ ← $س_2 = ٥$

$٦ = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣}$ ← $١٨ = ق(٥) - ٤$

∴ ق(٥) = ٢٢

④ اذا كان $ق(س) = س^2 + س$ وكان معدل تغير ق يساوي ٧ عندما تغيرت س من أ الى ٤ جد الثابت أ .

الحل :

$٧ = \frac{ق(٤) - ق(أ)}{٤ - أ}$ ← $٧ = \frac{٢٠ - أ^2 - أ}{٤ - أ} \times -$

$٧ = \frac{أ^2 + أ - ٢٠}{أ - ٤}$ ← $٧ = \frac{(\cancel{أ - ٤})(أ + ٥)}{\cancel{أ - ٤}}$

∴ أ + ٥ = ٧ ← أ = ٢

⑤ اذا كان معدل تغير ق(س) في [أ ، أ + ١] يساوي −٤ وكان $ق(س) = س^2 - ٣س$ جد الثابت أ

الحل : $-٤ = \frac{ق(أ+١) - ق(أ)}{\cancel{أ} + ١ - \cancel{أ}}$

$-٤ = (أ+١)^2 - ٣(أ+١) - (أ^2 - ٣أ)$

$-٤ = \cancel{أ^2} + ٢أ + ١ - \cancel{٣أ} - ٣ - \cancel{أ^2} + \cancel{٣أ}$

٢أ − ٢ = −٤ ← أ = −١

تدريب : اذا كان $ق(س) = ٢س^3 + ٥$ ، وعندما تغيرت س من −٣ الى أ كانت معدل تغير ق = ١٤ جد الثابت أ .

٦) اذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س} + \text{ب}}$ وكان معدل تغير الاقتران ق في الفترة [٠، ٣] يساوي $\frac{1}{3}$ جد قيمة الثابت ب.

الحل:

$\frac{1}{\cancel{3}} = \frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(٠)}}{\cancel{3}}$ ← ١ = $\sqrt{\text{٣+ب}} - \sqrt{\text{ب}}$

١ + $\sqrt{\text{ب}}$ = $\sqrt{\text{٣+ب}}$ (بالتربيع)

١ + ٢$\sqrt{\text{ب}}$ + $\cancel{\text{ب}}$ = ٣ + $\cancel{\text{ب}}$ ← ٢$\sqrt{\text{ب}}$ = ٢

$\sqrt{\text{ب}}$ = ١ ← ب = ١

تدريب ١

١) اذا كان ق(س) = س² + ٣هـ(س) − ٥ وكان معدل تغير ق(س) في [−١، ٢] يساوي ١٠. جد معدل تغير هـ(س) في نفس الفترة.

٢) اذا كان هـ(س) = س ق(س) + ٣ معدل تغير ق(س) في [٢، ٥] يساوي ٣ ومعدل تغير هـ(س) في نفس الفترة يساوي ٣ جد قيمة هـ(٥)

٧) اذا كان هـ(س) = ٣س − ٥ + ٢ق(س) وكان معدل تغير ق(س) في [−١، ٣] يساوي ٤ جد معدل تغير هـ(س) في نفس الفترة.

الحل:

$٤ = \frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(−١)}}{٤}$ ← $\boxed{\text{ق(٣)} - \text{ق(−١)} = ١٦}$

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ(٣)} - \text{هـ(−١)}}{٤}$

$= \frac{٩ + ٢\text{ق(٣)} - (−٣ + ٢\text{ق(−١)})}{٤}$

$= \frac{١٢ + ٢(\text{ق(٣)} - \text{ق(−١)})}{٤}$

$= \frac{١٢ + ٢ \times ١٦}{٤} = \frac{٤٤}{٤} = ١١$

٩) اذا كان معدل تغير ق(س) في [١، ٤] يساوي ٧ ومعدل تغير ق(س) في [١، ٦] يساوي ٩ جد معدل تغير ق(س) في [٤، ٦]

الحل:

$٧ = \frac{\text{ق(٤)} - \text{ق(١)}}{٣}$ ← $\boxed{\text{ق(٤)} - \text{ق(١)} = ٢١}$

$٩ = \frac{\text{ق(٦)} - \text{ق(١)}}{٥}$ ← $\boxed{\text{ق(٦)} - \text{ق(١)} = ٤٥}$

(بحذف ق(١))

∴ ق(٦) − ق(٤) = ٢٤

∴ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(٦)} - \text{ق(٤)}}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$

٨) اذا كان هـ(س) = ق²(س) وكان معدل تغير ق(س) في [٢، ٥] يساوي ٦ جد معدل تغير هـ(س) في نفس الفترة علماً بأن ق(٢) + ق(٥) = ١٢

الحل:

$٦ = \frac{\text{ق(٥)} - \text{ق(٢)}}{٣}$ ← $\boxed{\text{ق(٥)} - \text{ق(٢)} = ١٨}$

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ(٥)} - \text{هـ(٢)}}{٣} = \frac{\text{ق}^2\text{(٥)} - \text{ق}^2\text{(٢)}}{٣}$

$= \frac{(\text{ق(٥)} + \text{ق(٢)})(\text{ق(٥)} - \text{ق(٢)})}{٣}$

$= \frac{١٢ \times ١٨}{٣} = ٧٢$

١٠) اذا كان القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١، ٧)، (٣، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه السالب لمحور السينات جد ق(٣)

الحل: $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = -\text{ظا}\frac{\pi}{4} = -١$

∴ $-١ = \frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(١)}}{٢}$

$-١ = \frac{\text{ق(٣)} - ٧}{٢}$

−٢ = ق(٣) − ٧ ← ق(٣) = ٥

(11) اذا كان $ه(س) = \frac{8}{ق(س)}$
وكان القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين $(-1، ق(-1))$ ، $(5، 2)$ يصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
جد: معدل تغير ه(س) في $[-1، 5]$
الحل:

ق(س)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ظا \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\therefore -1 = \frac{ق(5) - ق(-1)}{6}$$

$$-6 = 2 - ق(-1) \longrightarrow ق(-1) = 8$$

ه(س)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(5) - ه(-1)}{6} = \frac{\frac{8}{ق(5)} - \frac{8}{ق(-1)}}{6} = \frac{\frac{8}{2} - \frac{8}{8}}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

تمرين (1)

1) اذا كان $ق(س) = س^2 + ه(س)$

$$ه(س) = \begin{cases} س^3 + 1 & ، 1 \le س < 5 \\ 10 & ، 5 \le س < 7 \end{cases}$$

جد معدل تغير ق(س) في الفترة $[1، 5]$

2) اذا كان $ق(س) = \frac{4}{س}$ حيث $س \ne 0$
وكان معدل تغير ق(س) عندما تغيرت س من أ الى 6 يساوي $-\frac{1}{3}$ جد أ

3) اذا كان $ه(س) = \frac{12}{ق(س)}$ وكان معدل تغير ق(س) في الفترة $[2، 4]$ يساوي 5 جد معدل تغير ه(س) في نفس الفترة علماً بأن $ق(2) \times ق(4) = 15$

4) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} 3س + 4 & ، س \ge 1 \\ س^2 & ، س < 1 \end{cases}$$

وكان معدل تغير ق(س) يساوي 3 عندما زادت س من 1+هـ الى 1
ما قيمة الثابت أ .

5) اذا كان التغير في الاقتران ق(س) يساوي $(\Delta س)^2 - 5(\Delta س)$ جد ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في الفترة $[1، 3]$

6) اذا كان
$ه(س) = س^2 - ق(2س + 3)$
وكان معدل تغير ق(س) في $[-1، 5]$ يساوي 4 جد معدل تغير ه(س) في $[-2، 1]$

7) اذا كان
$ه(س) = 4س - 3ق(س) + 7$
وكان التغير في الاقتران ق في $[1، 5]$ يساوي 8
جد معدل التغير في الاقتران ه(س) في نفس الفترة

8) اذا كان $ل(س) = 2س ق(س)$ وكان معدل تغير ق(س) في $[-1، 2]$ يساوي 4 ومعدل تغير ل(س) في نفس الفترة يساوي 2
جد قيمة ق(-1)

9) اذا كان معدل تغير الاقتران ق(س) في $[2، 5]$ يساوي 6 جد معدل تغير الاقتران $ه(س) = س^2 ق(س) - 3س$ في نفس الفترة علماً بأن ه(س) يمر بالنقطة $(2، -16)$

المشتقة الأولى للاقتران

اذا كان:

ص = ق(س) اقترانا فان:

المشتقة الأولى للاقتران ق : هي اقتران جديد يمكن الحصول عليه بإحدى الطرق التالية:

① قانون تعريف المشتقة

② قواعد الاشتقاق.

ويرمز لها بإحدى الرموز التالية: $\text{ق}'(\text{س})$ ، $\text{ص}'$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

قانون تعريف المشتقة:

$$\boxed{\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}}$$

أشكال أخرى للقانون:

① $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

② $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

حيث $\text{هـ} = \Delta\text{س}$

اذا كان

① $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + 5$

جد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\text{ع}^2 + \cancel{5} - 2\text{س}^2 - \cancel{5}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 2 \times 2\text{س} = 4\text{س}.$$

② $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 - \text{س} - 3$

جد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2 - \text{ع} - \cancel{3} - \text{س}^2 + \text{س} + \cancel{3}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2 - \text{س}^2}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\overset{-1}{\cancel{\text{س} - \text{ع}}}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع}+\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + -1$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س} - 1$$

③ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}^3 + 1}$ ، $\text{س} \neq -1$

جد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{1}{\text{ع}^3+1} - \frac{1}{\text{س}^3+1}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^3 + \cancel{1} - \text{ع}^3 - \cancel{1}}{(\text{ع}^3+1)(\text{س}^3+1)} \times \frac{1}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{س}^2 + \text{س}\text{ع} + \text{ع}^2)\overset{-1}{\cancel{(\text{س} - \text{ع})}}}{(\text{ع}^3+1)(\text{س}^3+1)} \times \frac{1}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-3\text{س}^2}{(\text{س}^3+1)^2}$$

تدريب: جد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة

① $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^3 + \text{س} - 7$

② $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{1 - \text{س}}$ ، $\text{س} \neq 1$

④ $ق(س) = \sqrt{س^2 + ٦س}$

جد $ق'(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$ق'(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{ق(ع) - ق(٢)}{ع - ٢}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{\sqrt{ع^2+٦ع} - ٤}{ع - ٢} \times \frac{\sqrt{ع^2+٦ع} + ٤}{\sqrt{ع^2+٦ع} + ٤}$$

٨

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{ع^2 + ٦ع - ١٦}{٨(ع - ٢)}$$

$$ق'(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع+٨)\cancel{(ع-٢)}}{٨\cancel{(ع-٢)}} = \frac{٥}{٤}$$

⑤ $ق(س) = \frac{١}{\sqrt[3]{س}}$ ، $س \neq ٠$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{\sqrt[3]{ع}} - \frac{١}{\sqrt[3]{س}}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt[3]{س} - \sqrt[3]{ع}}{\sqrt[3]{ع س}} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt[3]{س} - \sqrt[3]{ع}}{\sqrt[3]{ع س}} \times \frac{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س ع} + \sqrt[3]{ع^2}}{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س ع} + \sqrt[3]{ع^2}} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{س - ع}^{\,-١}}{\sqrt[3]{ع س} \times ٣\sqrt[3]{س^2}} \times \frac{١}{\cancel{ع - س}}$$

$$\therefore ق'(س) = \frac{-١}{\sqrt[3]{س^2} \times ٣\sqrt[3]{س^2}}$$

$$ق'(س) = \frac{-١}{٣\sqrt[3]{س^4}}$$

تدريب:

باستخدام تعريف المشتقة جد:

① $ق'(س)$ للاقتران $ق(س) = \sqrt[3]{س^2}$

② $ق'(١)$ للاقتران $ق(س) = (\sqrt{س} - ٥)^3$

⑥ $ق(س) = \sqrt{٢س} - س^2$ جد $ق'(س)$

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع} - ع^2 - \sqrt{٢س} + س^2}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع} - \sqrt{٢س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}}{\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}} + \lim_{ع \to س} \frac{س^2 - ع^2}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢\cancel{(ع-س)}}{\cancel{(ع-س)}\,\underbrace{(\sqrt{٢ع}+\sqrt{٢س})}_{٢\sqrt{٢س}}} + \lim_{ع \to س} \frac{(س+ع)\overset{-١}{\cancel{(س-ع)}}}{\cancel{ع-س}}$$

$$ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{٢س}} + -٢س$$

⑦ $ق(س) = (س+٢)^2 \sqrt{س}$

جد $ق'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$ق'(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(ع+٢)^2\sqrt{ع} - ٩}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{(ع+٢)^2\sqrt{ع} - ٩\sqrt{ع}}{ع - ١} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩\sqrt{ع} - ٩}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\sqrt{ع}\left((ع+٢)^2 - ٩\right)}{ع - ١} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩(\sqrt{ع} - ١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\sqrt{ع}(ع+٢-٣)(ع+٢+٣)}{ع - ١} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩(\sqrt{ع} - ١)}{ع - ١} \times \frac{\sqrt{ع}+١}{\sqrt{ع}+١}$$

٣

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\sqrt{ع}\cancel{(ع-١)}(ع+٥)}{\cancel{ع-١}} + \lim_{ع \to ١} \frac{٩\cancel{(ع-١)}}{٢\cancel{(ع-١)}}$$

$$\therefore ق'(١) = ٦ + \frac{٩}{٢} = \frac{٢١}{٢}$$

تدريب:

اذا كان $د(س) = \frac{1}{٢س - \sqrt{س}}$

جد $د'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑧ اذا كان $ل(س) = (س - أ)\, د(س)$

حيث $د(س)$ متصل عند $س = أ$

باستخدام تعريف المشتقة أثبت أن:

$د(أ) = ل'(أ)$

البرهان:

$$ل'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{ل(ع) - ل(أ)}{ع - أ}$$

$$ل'(أ) = \lim_{ع \to أ} \frac{\cancel{(ع-أ)}\, د(ع) - ٠}{\cancel{ع - أ}}$$

$$\therefore ل'(أ) = \lim_{ع \to أ} د(ع) = د(أ)$$

⑨ اذا كان التغير في الاقتران $ص = د(س)$

هو $\Delta ص = ٤س هـ + ٣هـ - ٢هـ^٣$

وذلك عندما تغيرت $س$ بمقدار $هـ$.

جد $د'(٢)$

الحل:

$$د'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤س هـ + ٣هـ - ٢هـ^٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{هـ}(٤س + ٣ - ٢هـ^٢)}{\cancel{هـ}}$$

$$د'(س) = ٤س + ٣$$

$$د'(٢) = ٨ + ٣ = ١١$$

⑩ اذا تغيرت $س$ بمقدار $هـ$ وكان

$د(س+هـ) = س^٢هـ + د(س) - ٣جا٢هـ$

جد $د'(٤)$

الحل:

$$د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٢هـ + \cancel{د(س)} - ٣جا٢هـ - \cancel{د(س)}}{هـ}$$

$$د'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٢\cancel{هـ}}{\cancel{هـ}} - \frac{٣جا٢هـ}{هـ}$$

$$د'(س) = س^٢ - ٦$$

$$د'(٤) = ١٦ - ٦ = ١٠$$

⑪ اذا كان $د(س) = جاس$

جد $د'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{جاع - جاس}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢جتا\frac{1}{2}(ع+س)\, جا\frac{1}{2}(ع-س)}{ع - س}$$

$$= ٢جتاس \times \lim_{ع \to س} \frac{جا\frac{1}{2}(ع-س)}{ع - س}$$

$$د'(س) = ٢جتاس \times \frac{1}{2} = جتاس$$

⑫ $د(س) = ٢ + جتا^٢ ٣س$

جد $د'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{٢} + جتا^٢ ٣ع - \cancel{٢} - جتا^٢ ٣س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(جتا٣ع - جتا٣س)(جتا٣ع + جتا٣س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢جا\frac{1}{2}(٣ع+٣س)\, جا\frac{1}{2}(٣ع-٣س)}{ع - س} \times ٢جتا٣س$$

←

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-2\,\text{جا}\frac{3}{2}(\text{ع}-\text{س})\,\text{جا}\frac{3}{2}(\text{ع}+\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} \times 2\,\text{جتا}3\text{س}$$

$$= -2 \times \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\frac{3}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} \times \text{جا}3\text{س} \times 2\,\text{جتا}3\text{س}$$

$$= -2 \times \frac{3}{2} \times 2\,\text{جا}3\text{س}\,\text{جتا}3\text{س}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = -6\,\text{جا}3\text{س}\,\text{جتا}3\text{س} .$$

(١٣) $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س} - \text{ظا}\text{س}$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\text{ع} - \text{ظا}\text{ع} - 2\text{س} + \text{ظا}\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}\text{س} - \text{ظا}\text{ع}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= 2 + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}(\text{س}-\text{ع})(1+\text{ظا}\text{س}\,\text{ظا}\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= 2 + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}(\text{س}-\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}} \times (1+\text{ظا}^2\text{س})$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 2 - \text{قا}^2\text{س} .$$

(١٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{قتا}2\text{س}$

جد $\text{ق}'(\frac{\pi}{6})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{قتا}2\text{ع} - \text{قتا}2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{1}{\text{جا}2\text{ع}} - \frac{1}{\text{جا}2\text{س}}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}2\text{س} - \text{جا}2\text{ع}}{\text{جا}2\text{ع}\,\text{جا}2\text{س}} \times \frac{1}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\,\text{جتا}(\text{س}+\text{ع})\,\text{جا}(\text{س}-\text{ع})}{\text{جا}2\text{ع}\,\text{جا}2\text{س}} \times \frac{1}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2\,\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^2 2\text{س}} \times \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}(\text{س}-\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-2\,\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^2 2\text{س}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\frac{\pi}{6}) = -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{-4}{3}$$

تدريب:

(١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

(٢) $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س} - \text{ظتا}\text{س}$

جد $\text{ق}'(\frac{\pi}{4})$ باستخدام تعريف المشتقة

(١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{جا}2\text{س}$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{جا}2\text{ع} - \text{س}\,\text{جا}2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{جا}2\text{ع} - \text{س}\,\text{جا}2\text{ع}}{\text{ع}-\text{س}} + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}\,\text{جا}2\text{ع} - \text{س}\,\text{جا}2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}2\text{ع}\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}(\text{جا}2\text{ع} - \text{جا}2\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{جا}2\text{س} + \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س} \times 2\,\text{جتا}(\text{ع}+\text{س})\,\text{جا}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \text{جا}2\text{س} + 2\text{س}\,\text{جتا}2\text{س} \times \text{نها}_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \text{جا}2\text{س} + 2\text{س}\,\text{جتا}2\text{س}$$

تدريب:

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{ظا}\text{س}$

جد $\text{ق}'(\frac{\pi}{4})$ باستخدام تعريف المشتقة

تدريب [٢]

١) اذا كان $ق(س) = \frac{1}{س^2}$ ، $س \neq ٠$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

٢) اذا كان $ق(س) = \sqrt{٢س^٣+١}$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

٣) اذا كان $ق(س) = س^2 + \sqrt[3]{س}$

جد $ق'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة

٤) اذا كان $ق(س) = ٣جاس - جتا٢س$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

٥) اذا كان $ق(س) = \sqrt{٣+ظاس}$

جد $ق'(\frac{\pi}{4})$ باستخدام تعريف المشتقة

٦) اذا كان $ق(س) = ١ + س^{\frac{3}{2}}$ ، $س \geq ٠$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

٧) اذا تغيرت س بمقدار هـ وكان

التغير في الاقتران ق = $٢س^2هـ - جا٥هـ$

جد $ق'(٢)$

٨) اذا كان $ق(س) = \frac{1}{١+جا^2س}$

جد $ق'(٠)$ باستخدام تعريف المشتقة

٩) اذا كان $ق(س) = س^2 جتاس$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

١٠) اذا كان :

$ق(س) = \frac{1}{\sqrt{٢س-١}}$ ، $س > \frac{1}{2}$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة .

١١) اذا كان $ق(س) = ظتا^2س$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

١٢) اذا كان $ق(س) = جاس^2$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

١٣) اذا كان :

$ق(س) = س^3 - ٢س^2 + ٤س + ٧$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة .

١٤) اذا كان :

$ق(س) = س^2\sqrt{س-٢}$

جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

قواعد الاشتقاق

قاعدة $\boxed{١}$:

مشتقة الاقتران الثابت = صفر .

مثال : ١) $ق(س) = ٧ \leftarrow ق'(س) = صفر$

٢) $ص = \sqrt{٣} \leftarrow ص' = صفر$

٣) $ص = ٥\pi \leftarrow \frac{دص}{دس} = صفر$

٤) $ق(س) = جا\frac{\pi}{٩} \leftarrow ق'(س) = صفر$

قاعدة $\boxed{٢}$:

مشتقة $أس = أ$

مثال : ١) $ق(س) = ٤س \leftarrow ق'(س) = ٤$

٢) $ص = \frac{٢}{٣}س \leftarrow ص' = \frac{٢}{٣}$

٣) $ص = س \leftarrow \frac{دص}{دس} = ١$

قاعدة $\boxed{٣}$:

مشتقة $أس^{ن} = أ \times ن س^{ن-١}$

مثال : ١) $ق(س) = ٢س^{٤} \leftarrow ق'(س) = ٨س^{٣}$

٢) $ص = س^{٥} \leftarrow ص' = ٥س^{٤}$

٣) $ص = \frac{٢}{٣}س^{٦} \leftarrow \frac{دص}{دس} = ٤س^{٥}$

٤) $ق(س) = ٤س^{-٢} \leftarrow ق'(س) = -٨س^{-٣}$

٥) $ص = ٦س^{\frac{٤}{٣}} \leftarrow ص' = ٨س^{\frac{١}{٣}}$

٦) $ق(س) = ١٠س^{\frac{١}{٥}} \leftarrow ق'(س) = ٢س^{\frac{-٤}{٥}}$

مثال : اذا كان $ق(س) = ١٢س^{\frac{-١}{٣}}$ جد $ق'(٨)$

الحل :

$$ق'(س) = -٤س^{\frac{-٤}{٣}} = \frac{-٤}{\sqrt[٣]{س^{٤}}}$$

$$ق'(٨) = \frac{-٤}{\sqrt[٣]{(٨)^{٤}}} = \frac{-٤}{(٢)^{٤}} = \frac{-١}{٤}$$

قاعدة $\boxed{٤}$:

مشتقة $(م(س) \mp ه(س)) =$ مشتقة $م(س) \mp$ مشتقة $ه(س)$

$= م'(س) \mp ه'(س)$

مثال : ١) $ق(س) = ٣س^{٣} + س^{٢}$

$ق'(س) = ٩س^{٢} + ٢س$.

٢) $ص = ٢س^{٥} - ٣س^{٢} + ٨$

$ص' = ١٠س^{٤} - ٦س$

٣) $ص = ٦س^{\frac{٢}{٣}} - ٣س^{-١} + ٢س - ٩$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{\frac{-١}{٣}} + ٣س^{-٢} + ٢$

مثال : $ق(س) = أس^{٣} + ٨س^{-٢} + ٥$ ، $ق'(٢) = ١٠$

الحل : جد قيمة الثابت أ

$ق'(س) = ٣أس^{٢} - ١٦س^{-٣}$

$= ٣أس^{٢} - \frac{١٦}{س^{٣}}$

$ق'(٢) = ١٢أ - ٢ \Leftarrow ١٠ = ١٢أ - ٢ \leftarrow أ = ١$

قاعدة $\boxed{٥}$:

مشتقة الجذور :

أ) مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

ب) الجذور الأخرى ← تحول الى قوة : $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

مثال : ١) $ق(س) = \sqrt{٢س+١} \leftarrow ق'(س) = \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢س+١}}$

$\therefore ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{٢س+١}}$

٢) $ص = ٦\sqrt[٣]{س^{٤}} = ٦س^{\frac{٤}{٣}}$

$\frac{دص}{دس} = ٨س^{\frac{١}{٣}}$

٣) $ق(س) = ٢س^{٢} + \sqrt[٥]{س} - \sqrt{٤س}$

الحل : نحول الى قوة :

$ق(س) = ٢س^{٢} + س^{\frac{١}{٥}} - \sqrt{٤س}$

$ق'(س) = ٤س + \frac{١}{٥}س^{\frac{-٤}{٥}} - \frac{٤}{٢\sqrt{٤س}}$

$= ٤س + \frac{١}{٥}س^{\frac{-٤}{٥}} - \frac{٢}{\sqrt{٤س}}$

مثال: $\text{ص} = \frac{1}{3}\text{س}^3 - \sqrt{3\text{س}^2+4} + 5$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 - \frac{6\text{س}}{2\sqrt{3\text{س}^2+4}} = \text{س}^2 - \frac{3\text{س}}{\sqrt{3\text{س}^2+4}}$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2} = 4 - \frac{6}{4} = \frac{5}{2}$$

قاعدة $\boxed{6}$:

مشتقة الضرب:

أ) مشتقة (ثابت × اقتران) = الثابت × مشتقة الاقتران

مثال: 1) $\text{ق}(\text{س}) = 6\sqrt{9-4\text{س}}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = 6 \times \frac{-4}{2\sqrt{9-4\text{س}}} = \frac{-12}{\sqrt{9-4\text{س}}}$$

2) $\text{ق}(\text{س}) = 3\text{س}^2 + 5\text{هـ}(\text{س}) - 8$

$\text{هـ}'(-2) = 3$ ، جد $\text{ق}'(-2)$

$\text{ق}'(\text{س}) = 6\text{س} + 5\text{هـ}'(\text{س})$

$\text{ق}'(-2) = -12 + 5 \times 3 = 3$

ب) مشتقة (اقتران × اقتران)

= الأول × م الثاني + الثاني × م الأول

مثال: 1) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^2+3\text{س})(\text{س}^3-5)$

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^2+3\text{س})(3\text{س}^2) + (\text{س}^3-5)(2\text{س}+3)$

2) $\text{ص} = (3\text{س}-5)(\text{س}^3-2\text{س}^2-1)$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (3\text{س}-5)(3\text{س}^2-4\text{س}) + (\text{س}^3-2\text{س}^2-1) \times 2$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=3} = 1 \times 15 + 8 \times 2 = 31$

3) $\text{ق}(\text{س}) = (2\text{س}^2+1)\text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(1) = 3$

$\text{هـ}'(1) = -4$

جد $\text{ق}'(1)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = (2\text{س}^2+1)\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \times 4\text{س}$

$\text{ق}'(1) = 3 \times -4 + 3 \times 4 = -4$

4) $\text{ص} = (\text{س}^2 - \text{س})\sqrt{2-3\text{س}}$ جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-1}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^2-\text{س}) \times \frac{-\cancel{3}\,1}{\cancel{2}\sqrt{2-3\text{س}}} + \sqrt{2-3\text{س}} \times (2\text{س}-1)$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=-1} = 2 \times \frac{-1}{2} + 2 \times -3 = -7$$

ج) مشتقة ضرب 3 اقترانات ← نشتق بالترتيب

$\text{ص} = \text{م}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{م}'(\text{س})\text{هـ}(\text{س})\text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س})\text{ل}(\text{س}) + \text{م}(\text{س})\text{هـ}(\text{س})\text{ل}'(\text{س})$$

مثال: اذا كان $\text{ص} = \text{س}^2\sqrt{6-\text{س}}\,\text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}'(2) = -1$
$\text{هـ}(2) = 3$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2}$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}\sqrt{6-\text{س}}\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{6-\text{س}}}\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^2\sqrt{6-\text{س}}\,\text{هـ}'(\text{س})$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2} = 4 \times 2 \times 3 + 4 \times \frac{-1}{4} \times 3 + 4 \times 2 \times -1$$

$$= 24 - 3 - 8 = 13$$

مثال: اذا كان:

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) \neq 0$ ،

وكان $\text{ل}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ قابلين للاشتقاق عند $\text{س} = \text{أ}$

$\text{ق}'(\text{أ}) = \text{صفر}$ ، أثبت أن $\text{ق}(\text{أ}) = \frac{\text{ل}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})}$

البرهان:

بالضرب التبادلي:

$\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

نشتق الطرفين ← $\text{ق}(\text{س})\text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\text{ق}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{س})$

$\text{ق}(\text{أ})\text{هـ}'(\text{أ}) + \text{هـ}(\text{أ})\text{ق}'(\text{أ}) = \text{ل}'(\text{أ})$

لكن $\text{ق}'(\text{أ}) = 0$

$\therefore \text{ق}(\text{أ})\text{هـ}'(\text{أ}) = \text{ل}'(\text{أ})$

$\therefore \text{ق}(\text{أ}) = \frac{\text{ل}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})}$

تدريب: $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^3 - 2\text{س})\,\text{هـ}(\text{س})$

$\text{هـ}'(2) = -1$ ، $\text{ق}(2) = 12$ جد $\text{ق}'(2)$

قاعدة $\boxed{7}$:

مشتقة القسمة :

أ) مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}\right) = \frac{\text{المقام} \times \text{م البسط} - \text{البسط} \times \text{م المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال : 1) $ق(س) = \frac{3س+1}{س^2-4}$

$ق'(س) = \frac{(س^2-4)\times 3 - (3س+1)\times 2س}{(س^2-4)^2}$

2) $ص = \frac{س^2+س-4}{س^2-س+4}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=2}$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = \frac{(س^2-س+4)(2س+1) - (س^2+س-4)(2س-1)}{(س^2-س+4)^2}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=2} = \frac{6\times 5 - 2\times 3}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

3) $ق(س) = \frac{4س-2}{\sqrt{س}}$ جد $ق'(4)$

الحل :

$ق'(س) = \frac{\sqrt{س}\times 4 - (4س-2)\times \frac{1}{2\sqrt{س}}}{س}$

$ق'(4) = \frac{2\times 4 - 14\times \frac{1}{4}}{4} = \frac{8-\frac{7}{2}}{4} = \frac{9}{8}$

4) $ص = (س^2-5)\left(س + \frac{2س-1}{س-4}\right)$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=3}$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = (س^2-5)\left(1 + \frac{(س-4)\times 2 - (2س-1)}{(س-4)^2}\right) + \left(س + \frac{2س-1}{س-4}\right)\times 2س$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=3} = 4\left(1 + \frac{-2-5}{1}\right) + \left(3 + \frac{5}{-1}\right)\times 6$

$= -24 - 12 = -36$

5) $هـ(س) = \frac{س^3-5}{ق(س)}$ ، $ق(2) = -3$ ، $ق'(2) = \text{صفر}$ جد $هـ'(2)$

الحل :

$هـ(س) = \frac{س^3-5}{ق(س)}$

$هـ'(س) = \frac{ق(س)\times 3س^2 - (س^3-5)\times ق'(س)}{(ق(س))^2}$

$هـ'(2) = \frac{-3\times 12 - 3\times \text{صفر}}{9} = \frac{-36}{9} = -4$

ب) مشتقة $\left(\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}\right) = \frac{\text{م الاقتران}}{\text{الثابت نفسه}}$

مثال : $ص = \frac{7س - س^2 + 3}{5} \longrightarrow ص' = \frac{7-2س}{5}$

جـ) مشتقة $\left(\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\right) = \frac{-\text{الثابت}\times \text{م المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال : 1) $ق(س) = \frac{-2}{3س^2-5}$ جد $ق'(1)$

$ق'(س) = \frac{2\times 6س}{(3س^2-5)^2} \longrightarrow ق'(1) = \frac{12}{4} = 3$

2) $ق(س) = \frac{1}{س^3-10} + \frac{س^2}{4} - 5س$ جد $ق'(2)$

الحل :

$ق'(س) = \frac{-1\times 3س^2}{(س^3-10)^2} + \frac{2س}{4} - 5$

$ق'(2) = \frac{-12}{4} + \frac{4}{4} - 5 = -7$

3) $ص = \frac{6}{\sqrt{3س+1}}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=4}$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = \frac{-6\times \frac{3}{2\sqrt{3س+1}}}{3س+1} = \frac{-6}{(3س+1)2\sqrt{3س+1}}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=4} = \frac{-6}{9\times 3} = \frac{-2}{9}$

4) $ق(س) = \sqrt{س - \frac{2}{س-1}}$ جد $ق'(3)$

الحل :

$ق'(س) = \frac{1 - \frac{-2\times 1}{(1-س)^2}}{2\sqrt{س-\frac{2}{س-1}}}$

$ق'(3) = \frac{1-\frac{2}{4}}{2\times 2} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$

5) إذا كان $ق(س) = \frac{1}{3+أس}$ ، $ق'(1) = 2$ ، جد أ

الحل :

$ق'(س) = \frac{-1\times أ}{(3+أس)^2} \longrightarrow ق'(1) = \frac{-أ}{(3+أ)^2} = 2$

$\therefore 2(9+6أ+أ^2) = -أ \longrightarrow 2أ^2 + 13أ + 18 = 0$

$(2أ+9)(أ+2) = 0 \longrightarrow أ = \frac{-9}{2} ، -2$

قاعدة [8] :

مشتقة القوس المرفوع لقوة :

$ص = (هـ(س))^{ن}$

$\frac{دص}{دس} = ن \times (القوس\ نفسه)^{ن-1} \times مشتقة\ ما\ داخل\ القوس$

$= ن\,(هـ(س))^{ن-1} \times هـَ(س)$.

مثال 1) $هـ(س) = (س^2 + 5س)^4$

$هـَ(س) = 4(س^2+5س)^3 (2س+5)$

$= (8س+20)(س^2+5س)^3$

2) $ص = 3(9-2س)^{-2}$

$\frac{دص}{دس} = -6(9-2س)^{-3} \times -2$

$= 12\,(9-2س)^{-3}$

3) $هـ(س) = \sqrt[4]{(س^3+4س)^5}$ جد $هـَ(2)$

الحل : نحول لقوة ← $هـ(س) = (س^3+4س)^{\frac{5}{4}}$

$هـَ(س) = \frac{5}{4}(س^3+4س)^{\frac{1}{4}}(3س^2+4)$

$= \frac{5}{4}\sqrt[4]{س^3+4س}\,(3س^2+4)$

$هـَ(2) = \frac{5}{4} \times 2 \times 16 = 40$

4) $ص = \left(\frac{س^2-1}{س^2+1}\right)^6$ جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = 6\left(\frac{س^2-1}{س^2+1}\right)^5 \times \frac{(س^2+1)\times 2س - (س^2-1)\times 2س}{(س^2+1)^2}$

5) $هـ(س) = \left(س + \sqrt{1-س^3}\right)^4$ جد $هـَ(-1)$

الحل :

$هـَ(س) = 4\left(س+\sqrt{1-س^3}\right)^3 \left(1 + \frac{-3س^2}{2\sqrt{1-س^3}}\right)$

$هـَ(-1) = 4(-1+2)^3\left(1 - \frac{12}{6}\right)$

$= 4 \times 1 \times -1 = -4$.

تدريب : $ص = (س\,هـ(س) - 7)^3$

$هـَ(3) = -1$ ، $هـ(3) = 2$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = 3$

6) $ص = س\sqrt[3]{3س-1}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=3}$

الحل : نحول الى قوة :

$ص = س\,(3س-1)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{دص}{دس} = س \times \frac{1}{3}(3س-1)^{-\frac{2}{3}} \times 3 + (3س-1)^{\frac{1}{3}} \times 1$

$= \frac{س}{\sqrt[3]{(3س-1)^2}} + \sqrt[3]{3س-1}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=3} = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$

7) $هـ(س) = \frac{(س^2+3)^3}{2س-1}$ جد $هـَ(1)$

الحل :

$هـَ(س) = \frac{(2س-1)\times 3(س^2+3)^2 \times 2س - (س^2+3)^3 \times 2}{(2س-1)^2}$

مثال : اذا كان $ق(2) = -1$ ، $قَ(2) = 3$ ، $هـ(2) = 3$ ، $هـَ(2) = 4$ جد :

1) $(ق+هـ)َ(2) = قَ(س) + هـَ(س)$

$= قَ(2) + هـَ(2) = 3 + 4 = 7$

2) $(3ق - 2هـ)َ(2)$

$= 3قَ(س) - 2هـَ(س) = 3قَ(2) - 2هـَ(2)$

$= 9 - 8 = 1$

3) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)َ(2)$

$= \frac{هـ(2)\times قَ(2) - ق(2)\,هـَ(2)}{(هـ(2))^2} = \frac{2\times3 + 1\times4}{4}$

$= \frac{5}{2}$

4) $((ق\times هـ)(2))َ$ = صفر لأنه ثابت .

مشتقة

5) $\left.\frac{د}{دس}\left(س^2\,ق(س)\,هـ(س)\right)\right|_{س=2}$

$= 2س\,ق(2)\,هـ(2) + س^2\,قَ(2)\,هـ(2) + س^2\,ق(2)\,هـَ(2)$

$= 4 \times -1 \times 2 + 4 \times 3 \times 2 + 4 \times -1 \times 4 =$ صفر

6) $(ق^3)َ(2) = \left((ق(س))^3\right)َ(2)$

$= 3(ق(2))^2 \times قَ(2) = 3 \times (-1)^2 \times 3$

$= 9$

مثال: اذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + 1}{2 - \text{س}}$

$\text{ق}'(1) = 2$ ، $\text{ق}(1) = 3$

جد $\text{ع}'(1)$ في الحالات التالية:

أ) $\text{ع}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) - 4\text{س}$

الحل:

$\text{ع}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) - 4$

$\text{ل}(1) = \dfrac{1+1}{2-1} = 2$

$\text{ل}'(\text{س}) = \dfrac{(2-\text{س}) \times 2\text{س} - (\text{س}^2+1) \times -1}{(2-\text{س})^2}$

$\text{ل}'(1) = \dfrac{1 \times 2 + 2}{(1)^2}$

$\text{ل}'(1) = 4$

$\text{ع}'(1) = 3 \times 4 + 2 \times 2 - 4$

$= 12 + 4 - 4$

$\therefore \text{ع}'(1) = 12$

ب) $\text{ع}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^2 + \text{ل}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}$

$\text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{\text{ق}(\text{س})\left(2\text{س} + \text{ل}'(\text{س})\right) - \left(\text{س}^2 + \text{ل}(\text{س})\right)\text{ق}'(\text{س})}{\left(\text{ق}(\text{س})\right)^2}$

$\text{ع}'(1) = \dfrac{3(2+4) - (1+2) \times 2}{(3)^2} = \dfrac{4}{3}$

جـ) $\text{ع}(\text{س}) = \text{س}\,\text{ق}^2(\text{س}) - 3\text{ل}(\text{س})$

الحل:

$\text{ع}'(\text{س}) = \text{س} \times 2\text{ق}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}^2(\text{س}) \times 1 - 3\text{ل}'(\text{س})$

$\text{ع}'(1) = 2 \times 3 \times 2 + 9 - 3 \times 4$

$= 12 + 9 - 12 = 9$

د) $\text{ع}(\text{س}) = \sqrt{2\text{س}\,\text{ل}(\text{س})} - \dfrac{6}{\text{ق}(\text{س})}$

$\text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س}\,\text{ل}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س}) \times 2}{2\sqrt{2\text{س}\,\text{ل}(\text{س})}} + \dfrac{6\,\text{ق}'(\text{س})}{\left(\text{ق}(\text{س})\right)^2}$

$\text{ع}'(1) = \dfrac{2 \times 4 + 2 \times 2}{2 \times \sqrt{4}} + \dfrac{6 \times 2}{9} = \dfrac{13}{3}$

هـ) $\text{ع}(\text{س}) = \dfrac{\text{ق}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س})}{\sqrt{\text{س}}}$

$\text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{\sqrt{\text{س}}\left(\text{ق}(\text{س})\,\text{ل}'(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س})\right) - \text{ق}(\text{س})\,\text{ل}(\text{س}) \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}}$

$\text{ع}'(1) = \dfrac{1 \times (3 \times 4 + 2 \times 2) - 3 \times 2 \times \frac{1}{2}}{1}$

$= 16 - 3 = 13$

تدريب:

في المثال السابق:

1) $\text{ع}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 6}\;\text{ق}(\text{س}) + \dfrac{\text{ل}(\text{س})}{4}$

2) $\text{ع}(\text{س}) = \dfrac{2\text{س}\,\text{ل}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س}) - 1}$

3) $\text{ع}(\text{س}) = \dfrac{\text{ل}^2(\text{س})}{\text{ق}(\text{س}) - \text{س}}$

تمرين $\boxed{3}$

1) أ) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^3 - \text{س}^2 + 7$ ، جد $\text{ق}'(-1)$

ب) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{5}{\text{ه}(\text{س})}$ ، $\text{ه}'(3) = 4$ ، $\text{ق}(3) = 1$

جد $\text{ق}'(3)$

جـ) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ه}(\text{س})}{\text{س}^2 - 3}$

$\text{ق}'(2) = -8$ ، $\text{ه}'(2) = 4$ ، جد $\text{ق}(2)$

د) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) \times \text{ه}(\text{س}) = 12$ ، $\text{ق}(\text{س}) \neq 0$

$\text{ه}(-1) = 6$ جد $\dfrac{\text{ه}'(-1)}{\text{ق}'(-1)}$

هـ) $\text{ص} = \dfrac{6\text{س}^2 - \text{ه}(2)}{8}$ ، $\text{ه}'(2) = 4$ جد $\left.\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=2}$

و) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{3}{2}\text{س}^4 - \dfrac{\text{أ}}{\text{س}-1}$ ، $\text{ق}'(-1) = -7$ جد $\text{ق}'(3)$

② جد $\frac{دص}{دس}$ فيما يلي:

أ) $ص = (س^2 - \frac{1}{س})^5$

ب) $ص = \frac{6}{(2س+1)^3}$

جـ) $ص = س^3 (5 - 2س)^4$

د) $ص = \frac{\sqrt{س^2+1}}{س}$

③ اذا كان $ق(س) = هـ(س) \times م(س)$
حيث هـ(س) ، م(س) قابلين للاشتقاق عند س = أ
ق(أ) ≠ صفر ، أثبت أن:

$$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{هـ'(أ)}{هـ(أ)} + \frac{م'(أ)}{م(أ)}$$

④ اذا كان $ق(س) = س \sqrt[3]{(س^2-9)^2}$ جد ق'(١)

⑤ اذا كان $ق(س) = \frac{س+أ}{س-أ}$ ، س ≠ أ
ق'(٣) = −٢ ، جد قيمة الثابت أ

⑥ جد أصفار ق'(س) اذا كان:

أ) $ق(س) = س \sqrt{2 - س^2}$

ب) $ق(س) = \frac{(س+1)^3}{(س-1)^2}$

⑦ اذا كان ق(−٢) = ٣ ، ق'(−٢) = −٤

جد: أ) $(\frac{ق}{2} - \frac{6}{ق})'(-2)$

ب) $(س^2 ق(س))'(-2)$

جـ) $(س \sqrt{ق(س)+1})'(-2)$

د) $(\frac{ق(س)}{2س+ق(س)})'(-2)$

⑧ اذا كان $ل(س) = \frac{ق^2(س)}{س}$ ، س ≠ ٠ .
ل'(أ) = صفر
ق(أ) = ١٢ ، ق'(أ) = ٣ ، جد قيمة أ

⑨ اذا كان $ق(س) = \sqrt[4]{3س + ب}$
$ق'(5) = \frac{3}{32}$ جد قيمة ب .

⑩ اذا كان:
ق(٢) = ٢ ، ق'(٢) = ٤
هـ(٢) = −١ ، هـ'(٢) = ٣
جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢

أ) $ص = \frac{هـ(2)}{ق(س)}$

ب) $ص = هـ^2(س) + ق(س) - 3س$

جـ) $ص = 3س\, هـ^3(س)$

د) $ص = \frac{س^2+2}{\sqrt{3ق(س)}}$

هـ) $ص = \frac{س^2 ق(س)}{3 + هـ(س)}$

و) $ص = \frac{س^2+س}{هـ^2(س)}$

ز) $ص = 6\sqrt[3]{4س}\; هـ(س)$

⑪ اذا كان:
ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق
وكان: هـ'(س) = ق(س)
ق'(س) = −هـ(س)
$ل(س) = هـ^2(س) + ق^2(س)$
جد ل'(س)

قاعدة $\boxed{9}$

مشتقة الاقترانات الدائرية :

$\text{ق}(\text{س})$	$\text{ق}'(\text{س})$
جا س	جتا س
جتا س	− جا س
ظا س	$\text{قا}^2\,\text{س}$
ظتا س	$-\text{قتا}^2\,\text{س}$
قا س	قا س ظا س
قتا س	− قتا س ظتا س

ملاحظة ١

إذا كان :

$\text{ص} = \text{جا}\,\text{ه}(\text{س})$ فإن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ه}'(\text{س}) \times \text{جتا}\,\text{ه}(\text{س})$

= مشتقة الزاوية × مشتقة الاقتران الدائري

وتطبق هذه القاعدة على بقية الاقترانات الدائرية

أمثلة :

① جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي :

1) $\text{ص} = 2\text{س}^2 + \text{جتا س} - 5\,\text{جا س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س} - \text{جا س} - 5\,\text{جتا س}$

2) $\text{ص} = \text{جا}\,3\text{س} - \text{ظتا س} + 5$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\,\text{جتا}\,3\text{س} - \text{قتا}^2\text{س}$

3) $\text{ص} = \text{قا}\,7\text{س} - 3\,\text{ظتا س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 7\,\text{قا}\,7\text{س}\,\text{ظا}\,7\text{س} + 3\,\text{قتا}^2\text{س}$

4) $\text{ص} = \text{جتا}\,\text{س}^3 + \text{قتا}\,2\text{س} + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -3\text{س}^2\,\text{جا}\,\text{س}^3 - 2\,\text{قتا}\,2\text{س}\,\text{ظتا}\,2\text{س}$

5) $\text{ص} = \text{س}^2\,\text{جا}\,3\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2 \times 3\,\text{جتا}\,3\text{س} + \text{جا}\,3\text{س} \times 2\text{س}$

$= 3\text{س}^2\,\text{جتا}\,3\text{س} + 2\text{س}\,\text{جا}\,3\text{س}$

6) $\text{ص} = \text{قا}\sqrt{\text{س}} - 5\,\text{ظتا}\,\text{س}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\,\text{قا}\sqrt{\text{س}}\,\text{ظا}\sqrt{\text{س}} + 10\text{س}\,\text{قتا}^2\,\text{س}^2$

7) $\text{ص} = \frac{3}{4\text{س} - \text{ظا س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-3(4 - \text{قا}^2\text{س})}{(4\text{س} - \text{ظا س})^2}$

8) $\text{ص} = \frac{\text{جتا}\,5\text{س}}{2 - \text{ظتا س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(2 - \text{ظتا س}) \times -5\,\text{جا}\,5\text{س} - \text{جتا}\,5\text{س} \times \text{قتا}^2\text{س}}{(2 - \text{ظتا س})^2}$

9) $\text{ص} = \text{جا}(\text{ظا}\,3\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\,\text{قا}^2 3\text{س} \times \text{جتا}(\text{ظا}\,3\text{س})$

10) $\text{ص} = \text{قا}^3 5\text{س} = (\text{قا}\,5\text{س})^3$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3(\text{قا}\,5\text{س})^2 \times 5 \times \text{قا}\,5\text{س}\,\text{ظا}\,5\text{س}$

$= 15\,\text{قا}^3 5\text{س}\,\text{ظا}\,5\text{س}$

11) $\text{ص} = \text{جا}^4\text{س} + \sqrt{\text{ظتا س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\,\text{جا}^3\text{س} \times \text{جتا س} + \frac{-\text{قتا}^2\text{س}}{2\sqrt{\text{ظتا س}}}$

$= 4\,\text{جا}^3\text{س}\,\text{جتا س} - \frac{\text{قتا}^2\text{س}}{2\sqrt{\text{ظتا س}}}$

12) $\text{ص} = \text{جتا}^5(\text{جا س}) = \left(\text{جتا}(\text{جا س})\right)^5$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 5\left(\text{جتا}(\text{جا س})\right)^4 \times \text{جتا س} \times -\text{جا}(\text{جا س})$

$= -5\,\text{جتا}^4(\text{جا س})\,\text{جتا س}\,\text{جا}(\text{جا س})$

13) $\text{ص} = \text{جا}^3\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س} = (\text{جا س})^3(\text{جتا س})^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{جا س})^3 \times 2(\text{جتا س}) \times -\text{جا س} + (\text{جتا س})^2 \times 3(\text{جا س})^2 \times \text{جتا س}$

$= -2\,\text{جا}^4\text{س}\,\text{جتا س} + 3\,\text{جتا}^3\text{س}\,\text{جا}^2\text{س}$

14) $\text{ص} = \sqrt{1 + \text{قتا}^2\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-2\,\text{قتا س} \times \text{قتا س}\,\text{ظتا س}}{2\sqrt{1 + \text{قتا}^2\text{س}}} = \frac{-\text{قتا}^2\text{س}\,\text{ظتا س}}{\sqrt{1 + \text{قتا}^2\text{س}}}$

② إذا كان :

1) $ص = \frac{1+جاس}{1-جتاس}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\pi}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(1-جتاس)\,جتاس - (1+جاس) \times جاس}{(1-جتاس)^2}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\pi} = \frac{2 \times -1 - 1 \times 0}{(2)^2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

2) $ص = \sqrt[3]{9 - ظا2س}$ عندما $س = \frac{\pi}{8}$

الحل : تحول إلى قوة ← $ص = (9 - ظا2س)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{3}(9 - ظا2س)^{\frac{-2}{3}} \times -2\,قا^2 2س$

$= \frac{-2}{3} \times \frac{قا^2 2س}{\sqrt[3]{(9-ظا2س)^2}}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{8}} = \frac{-2}{3} \times \frac{2}{\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{-2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{-1}{3}$

3) $ص = \frac{1}{1 - ظتا^2 س}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{6}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1 \times -2ظتاس \times -قتا^2 س}{(1 - ظتا^2 س)^2}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{6}} = \frac{-2 \times \sqrt{3} \times 4}{(1-3)^2} = -2\sqrt{3}$

4) $ص = قا^3 \frac{\pi}{س}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=3}$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = \frac{-\pi}{س^2} \times 3\,قا^2\frac{\pi}{س} \times قا\frac{\pi}{س}\,ظا\frac{\pi}{س}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=3} = \frac{-\pi}{9} \times 3 \times قا^3\frac{\pi}{3}\,ظا\frac{\pi}{3}$

$= \frac{-\pi}{3} \times 8 \times \sqrt{3} = \frac{-8\pi}{\sqrt{3}}$

5) $ص = \frac{قا^2 س - ظا^2 س}{جا^3 س}$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{3}}$

الحل : $ص = \frac{1}{جا^3 س} = قتا^3 س$

$\frac{دص}{دس} = -3\,قتا^2 س \times قتاس\,ظتاس$

$= -3 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-8}{3}$

6) $ص = (جتا^2 س - جا^2 س)^3$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{12}}$

الحل : متطابقة

$ص = (جتا2س)^3$

$\frac{دص}{دس} = 3(جتا2س)^2 \times -2\,جا2س$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{12}} = -6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{-9}{4}$

7) $ص = (جاس + جتاس)^2$ جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{12}}$

الحل : تربيع أولاً :

$ص = جا^2 س + \underbrace{2جاس\,جتاس}_{جا2س} + جتا^2 س$

$ص = جا^2 س + جتا^2 س + جا2س$

$ص = 1 + جا2س$

$\frac{دص}{دس} = 2\,جتا2س$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{12}} = 2\,جتا\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

③ جد قيم $س \in [-2\pi, 2\pi]$ التي تحقق المعادلة :

$ق'(س) = صفر$

أ) $ق(س) = س + جتاس$

الحل : $ق'(س) = 1 - جاس = 0$

$جاس = 1$

$س = \left\{\frac{\pi}{2} ، \frac{-3\pi}{2}\right\}$

ب) $ق(س) = قاس$

الحل : $ق'(س) = قاس\,ظاس$

$= \frac{1}{جتاس} \times \frac{جاس}{جتاس}$

$\therefore ق'(س) = \frac{جاس}{جتا^2 س} = صفر$

$\therefore جاس = 0$

$س = \{0 ، \pi ، -\pi\}$

جـ) تدريب : $ق(س) = قتاس$

تمارين [٤]

① جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فيما يلي :

١) ص = $\frac{1 + \text{قاس}}{\text{ظتاس}}$ عند س = $\frac{\pi}{3}$

٢) ص = $2\,\text{ظا}^{3}\text{س}$ عند س = $\frac{\pi}{6}$

٣) ص = جتا٢س قا٣س عند س = $\frac{\pi}{3}$

٤) ص = $\sqrt{\frac{1}{2} + \text{جتا}^{2}\text{س}}$ عند س = $\frac{\pi}{4}$

٥) ص = $\frac{\text{ظتا}^{2}\text{س} - \text{قتا}^{2}\text{س}}{1 - \text{جاس}}$ عند س = π

② اذا كان ق(س) = $\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{3}}{\text{جا}^{3}\text{س}}$ جد $\bar{\text{ق}}(\frac{\pi}{3})$

③ اذا كان ص = $\text{س}^{2}\,\text{ظا}\frac{1}{\text{س}}$

جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = $\frac{1}{\pi}$

④ اذا كان ق(س) = جاس × $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (قتاس)

جد $\bar{\text{ق}}(\frac{\pi}{6})$

⑤ اذا كان ق(س) = $\frac{1 - 2\,\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا٢س}}$

جد $\bar{\text{ق}}(\frac{\pi}{8})$

⑥ اذا كان ل(س) = $\sqrt[5]{\text{جتا٣س} - 1}$

ق$(\frac{\pi}{4})$ = ٥ ، $\bar{\text{ق}}(\frac{\pi}{4})$ = -٣

هـ(س) = ق^{2}(س) × ل(س)

جد $\bar{\text{هـ}}(\frac{\pi}{4})$

مشتقة الاقتران المتشعب

عند اشتقاق هذا الاقتران :

١) نشتق كل قاعدة حسب قواعد الاشتقاق

٢) نلغي جميع اشارات المساواة من الفترات

٣) عند الأطراف ← المشتقة غير موجودة .

٤) عند نقطة التحول ← يجب البحث في اتصال

الاقتران ق(س)

غير متصل ← المشتقة غير موجودة

متصل ← نجد $\bar{\text{ق}}_{+}$ ، $\bar{\text{ق}}_{-}$ وتكون المشتقة موجودة عندها $\bar{\text{ق}}_{+} = \bar{\text{ق}}_{-}$

① اذا كان :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{2}+1 & ، \ \text{س} \le 4 \\ 3\text{س}-1 & ، \ \text{س} > 4 \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٤ ← تحول.

الحل :

الاتصال :

ق(٤) = ١٧ ، $\lim_{\text{س}\to 4^{+}}$ (٣س-١) = ١١

$\lim_{\text{س}\to 4^{-}}$ (س²+١) = ١٧

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٤

ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٤

---

② اذا كان :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{5}{\text{س}} - 2 & ، \ \text{س} > 1 \\ \text{س} + 2 & ، \ \text{س} = 1 \\ 4\text{س} - 1 & ، \ \text{س} < 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ١ ← تحول.

الاتصال : ق(١) = ٣

$\lim_{\text{س}\to 1^{+}}$ $\frac{5}{\text{س}}$ - ٢ = ٣ ، $\lim_{\text{س}\to 1^{-}}$ ٤س-١ = ٣

ق(س) متصل عند س = ٣

$$\bar{\text{ق}}\text{(س)} = \begin{cases} \frac{-5}{\text{س}^{2}} & ، \ \text{س} > 1 \\ 4 & ، \ \text{س} < 1 \end{cases}$$

$\bar{\text{ق}}_{+}(1)$ = -٥

$\bar{\text{ق}}_{-}(1)$ = ٤

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١

③ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س + ٤ & ، س \neq ٢ \\ ٥س + ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٢

الاتصال :

$ق(٢) = ١٢$ ، $\lim_{س \to ٢} (س^٢ + ٢س + ٤) = ١٢$

ق(س) متصل عند س = ٢

$قَ(س) = ٢س + ٢$

$قَ(٢) = ٦$

---

④ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٢س & ، -١ \leq س < ٢ \\ س^٢ + ٦س - ١٢ & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

جد قَ(س)

الحل : الاتصال عند س = ٢

$ق(٢) = ٤$

$\lim_{س \to ٢^+} (س^٢ + ٦س - ١٢) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢^-} (س^٣ - ٢س) = ٤$

ق(س) متصل عند س = ٢

$قَ(س) = \begin{cases} ٣س^٢ - ٢ & ، -١ < س < ٢ \\ ٢س + ٦ & ، ٢ \leq س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ، س = -١ ، ٤ \end{cases}$ | $قَ_{+}(٢) = ١٠$ ، $قَ_{-}(٢) = ١٠$ ، $\therefore قَ(٢) = ١٠$

---

⑤ $ق(س) = \begin{cases} ٣ + جا \pi س & ، س \leq ١ \\ \sqrt{س^٢ + ٣} & ، س > ١ \end{cases}$

جد قَ(س)

الاتصال : عند س = ١

$ق(١) = ٣ + ٠ = ٣$

$\lim_{س \to ١^+} \sqrt{س^٢ + ٣} = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} (٣ + جا \pi س) = ٣$

ق(س) غير متصل عند س = ١

$قَ(س) = \begin{cases} \pi جتا \pi س & ، س < ١ \\ \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٣}} & ، س > ١ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ١ \end{cases}$

مشتقة اقتران القيمة المطلقة

- عند نقطة ← تتبع الإشارة
- لـ س ← نعيد تعريف

① إذا كان $ق(س) = |٤ - س^٢|$ جد $قَ(-٣)$

الحل : التعويض داخل = -٥ (سالب)

$ق(س) = س^٢ - ٤$

$قَ(س) = ٢س \Leftarrow قَ(-٣) = -٦$

---

② $ق(س) = ٥|٢ - س| - ٨\sqrt{س + ٣}$ جد $قَ(١)$

الحل : التعويض داخل = ١ (موجب)

$ق(س) = ١٠ - ٥س - ٨\sqrt{س + ٣}$

$قَ(س) = -٥ - ٨ \times \frac{١}{٢\sqrt{س + ٣}} = -٥ - \frac{٤}{\sqrt{س + ٣}}$

$قَ(١) = -٥ - \frac{٤}{٢} = -٧$

---

③ $ق(س) = \frac{س + |س - ٣|}{٢س - ٧}$ جد $قَ(٢)$

الحل : التعويض داخل = -١ (سالب)

$ق(س) = \frac{س + ٣ - س}{٢س - ٧} = \frac{٣}{٢س - ٧}$

$قَ(س) = \frac{-٣ \times ٢}{(٢س - ٧)^٢} \Leftarrow قَ(٢) = \frac{-٦}{٩} = \frac{-٢}{٣}$

---

④ $ق(س) = ٣س |٢ - س|$ ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = ٢

الحل : التعويض داخل = صفر ← إعادة تعريف

$\overset{٢ - س}{+} \quad \underset{٢}{|} \quad \overset{س - ٢}{-}$

$ق(س) = \begin{cases} ٦س - ٣س^٢ & ، س < ٢ \\ ٣س^٢ - ٦س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

الاتصال : ق(٢) = صفر

$\lim_{س \to ٢^+} (٣س^٢ - ٦س) = صفر$ ، $\lim_{س \to ٢^-} (٦س - ٣س^٢) = صفر$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = ٢

$قَ(س) = \begin{cases} ٦ - ٦س & ، س < ٢ \\ ٦س - ٦ & ، س > ٢ \end{cases}$

$قَ_{+}(٢) = ٦$ ، $قَ_{-}(٢) = -٦$ $\Leftarrow$ قَ(٢) غير موجودة

⑤ اذا كان ق(س) = |س² − س| + س ، س ∈ [٠، ٣]
جد ق'(س) .

الحل : نعيد تعريف : س² − س = ٠
س(س − ١) = ٠
س = ٠ ، س = ١

ق(س) = { س − س² + س ، ٠ ≤ س < ١
س² − س + س ، ١ ≤ س ≤ ٣

ق(س) = { ٢س − س² ، ٠ ≤ س < ١
س² ، ١ ≤ س ≤ ٣

الاتصال : عند س = ١ ⟵ ق(س) متصل .

ق'(س) = { ٢ − ٢س ، ٠ < س < ١
٢س ، ١ < س < ٣
غير موجودة ، س = ٠، ١، ٣

ق'₊(١) = ٢
ق'₋(١) = ٠
∴ ق'(١) غ.م

⑥ ق(س) = |س² − ٤س + ٣| / (س(س − ١)) ، س ∈ (١، ٤]
جد ق'(س) .

الحل : نعيد تعريف : س² − ٤س + ٣ = ٠
(س − ٣)(س − ١) = ٠
س = ٣ ، س = ١

ق(س) = { −(س − ٣)(~~س − ١~~) / (س(~~س − ١~~)) ، ١ < س < ٣
(س − ٣)(~~س − ١~~) / (س(~~س − ١~~)) ، ٣ ≤ س ≤ ٤

ق(س) = { ٣/س − ١ ، ١ < س < ٣
١ − ٣/س ، ٣ ≤ س ≤ ٤

الاتصال : عند س = ٣ ⟵ ق(س) متصل .

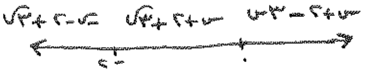
ق'(س) = { −٣/س² ، ١ < س < ٣
٣/س² ، ٣ < س < ٤
غير موجودة ، س = ٣، ٤

ق'₊(٣) = ١/٣
ق'₋(٣) = −١/٣
∴ ق'(٣) غ.م

تدريب :
ق(س) = ٥س − |جاس| ، س ∈ [٠، π]
جد ق'(π/٢)

⑦ اذا كان ق(س) = |س + ٢| − ٣|س|
جد ق'(س) .

الحل : نعيد تعريف : س + ٢ = ٠ ، س = ٠ .
س = −٢



ق(س) = { ٢س − ٢ ، س < −٢
٤س + ٢ ، −٢ ≤ س < ٠
٢ − ٢س ، س ≥ ٠

الاتصال : عند س = −٢ ، س = ٠ ، ق(س) متصل .

ق'(س) = { ٢ ، س < −٢
٤ ، −٢ < س < ٠
−٢ ، س > ٠
غير موجودة ، س = −٢، ٠ .

ق'₊(−٢) = ٤
ق'₋(−٢) = ٢
∴ ق'(−٢) غ.م
ق'₊(٠) = −٢
ق'₋(٠) = ٤
∴ ق'(٠) غ.م

مشتقة الاقتران الصحيح
- لـ س ⟵ اعادة تعريف .
- عند نقطة ⟵ تعويض
  - كسر ⟵ يحسب صحيح
  - صحيح ⟵ اتصال ⟵ متصل : اعادة تعريف .

① اذا كان ق(س) = ٢س² − [س + ١/٢] جد ق'(١)
الحل : ق(س) = ٢س² − [١٫٥]
ق(س) = ٢س² − ١
ق'(س) = ٤س ⟵ ق'(١) = ٤

② ق(س) = [٥ − س/٣] × س جد ق'(٣)
الحل : التعويض داخلي = ٤ (صحيح)
الاتصال : ق(٣) = ٤ × ٣ = ١٢
نهـا(س ← ٣⁺) [٥ − س/٣] × س = ٣ × ٣ = ٩
نهـا(س ← ٣⁻) [٥ − س/٣] × س = ٤ × ٣ = ١٢
∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣ ⟵ ق'(٣) غير موجودة

③ اذا كان $ق(س) = \frac{[س+1]}{|س-3|}$ جد $ق'(2,5)$

الحل:

$ق(س) = \frac{[2,5]}{3-س} = \frac{3}{3-س}$

$ق'(س) = \frac{-3 \times -1}{(3-س)^2} \longrightarrow ق'(2,5) = \frac{3}{(\frac{1}{2})^2} = 12$

④ $ق(س) = |3س| - س[س] + 5$ جد $ق'(3,5)$

الحل: $ق(س) = 3س - س[3,5] + 5$

$ق(س) = 3س - 3س + 5$

$= ق(س) = 5 \longrightarrow ق'(س) = صفر$

$ق'(3,5) = صفر$

⑤ اذا كان $ق(س) = س^2[س+2]$ جد $ق'(0)$

الحل: التعويض داخلي = 2 (صحيح)

الاتصال: $ق(0) = 0 \times 2 = 0$

$\lim_{س \to 0^+} س^2[س+2] = 0 \times 2 = 0$

$\longrightarrow$ ق متصل عند س = 0

$\lim_{س \to 0^-} س^2[س+2] = 0 \times 1 = 0$

ل = 1

$ق(س) = \begin{cases} س^2 , & -1 \le س < 0 \\ 2س^2 , & 0 \le س < 1 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س , & -1 < س < 0 \\ 4س , & 0 < س < 1 \end{cases}$

$ق'_+(0) = 4 \times 0 = 0$

$ق'_-(0) = 2 \times 0 = 0 \longrightarrow ق'(0) = 0$

⑥ اذا كان $ق(س) = [س+3] + س^2 - [س]$ جد $ق'(5)$

الحل: $ق(س) = \cancel{[س]} + 3 + س^2 - \cancel{[س]}$

$ق(س) = 3 + س^2$

$ق'(س) = 2س$

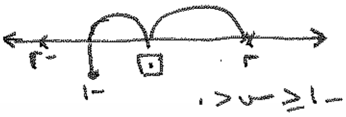
$ق'(5) = 10$

⑦ اذا كان:

$ق(س) = 3س + [\frac{س}{2} + 2]$ ، $س \in [-1, 2]$

جد $ق'(س)$ ل = 2

الحل: نعيد تعريف



$ق(س) = \begin{cases} 3س + 1 , & -1 \le س < 0 \\ 3س + 2 , & 0 \le س < 2 \\ 9 , & س = 2 \end{cases}$

الاتصال: عند س = 0

$ق(0) = 2$ $\lim_{س \to 0^+}(3س+2) = 2$

$\lim_{س \to 0^-}(3س+1) = 1$

ق(س) غير متصل عند س = 0

$ق'(س) = \begin{cases} 3 , & -1 < س < 0 \\ 3 , & 0 < س < 2 \\ \text{غير موجودة} , & س = -1 , 0 , 2 \end{cases}$

⑧ اذا كان:

$ق(س) = \begin{cases} [3-س] , & 1 < س < 2 \\ |س-3| , & 2 \le س \le 4 \end{cases}$

جد $ق'(س)$

ل = 1

الحل: نعيد تعريف

$ق(س) = \begin{cases} 1 , & 1 < س < 2 \\ 3 - س , & 2 \le س \le 3 \\ س - 3 , & 3 < س \le 4 \end{cases}$

$س - 3 = 0$

$س = 3$

الاتصال: عند س = 2 ، س = 3

ق(س) متصل.

$ق'(س) = \begin{cases} صفر , & 1 < س < 2 \\ -1 , & 2 < س < 3 \\ 1 , & 3 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} , & س = 2 , 3 , 4 \end{cases}$

$ق'_+(2) = -1$

$ق'_-(2) = 0$

$\therefore ق'(2)$ غ.م

$ق'_+(3) = 1$

$ق'_-(3) = -1$

$\therefore ق'(3)$ غ.م

⑨ اذا كانت:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^3 - 1 & ،\ 0 \le \text{س} \le 2 \\ \text{س}^2 + 4\text{س} - 5 & ،\ 2 < \text{س} \le 5 \end{cases}$$

ابحث قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = 2 باستخدام تعريف المشتقة

الحل: س = 2 ← تحول

$$\text{ق}'_+(2) = \text{نها}_{\text{ع}\to 2^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع} - 2}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to 2^+} \frac{\text{ع}^2 + 4\text{ع} - 5 - 7}{\text{ع} - 2}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to 2^+} \frac{\cancel{(\text{ع} - 2)}(\text{ع} + 6)}{\cancel{\text{ع} - 2}} = 8$$

$$\text{ق}'_-(2) = \text{نها}_{\text{ع}\to 2^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع} - 2} = \text{نها}_{\text{ع}\to 2^-} \frac{\text{ع}^3 - 1 - 7}{\text{ع} - 2}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to 2^-} \frac{\cancel{(\text{ع} - 2)}(\text{ع}^2 + 2\text{ع} + 4)}{\cancel{\text{ع} - 2}} = 12$$

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = 2 لأن $\text{ق}'_+(2) \ne \text{ق}'_-(2)$

---

⑩ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{2}{|\text{س}^3|}$ ، س ≠ 0

جد ق'(−1) باستخدام تعريف المشتقة

الحل:

التعويض داخل = −1 (سالب)

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{-2}{\text{س}^3}$$

$$\text{ق}'(-1) = \text{نها}_{\text{ع}\to -1} \frac{\frac{-2}{\text{ع}^3} - 2}{\text{ع} + 1} = \text{نها}_{\text{ع}\to -1} \frac{-2 - 2\text{ع}^3}{\text{ع}^3(\text{ع} + 1)}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to -1} \frac{-2\cancel{(1+\text{ع})}(1 - \text{ع} + \text{ع}^2)}{\text{ع}^3\cancel{(1+\text{ع})}} = \frac{-6}{-1} = 6$$

---

⑪ اذا كان ق(س) = |س| [س]

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = 0

الحل: نعيد تعريف الصيغ

تذكر أن: $|\text{س}|^2 = \text{س}^2$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}^2 & ،\ -1 \le \text{س} < 0 \\ \text{صفر} & ،\ 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

$$\text{ق}'_+(0) = \text{نها}_{\text{ع}\to 0^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(0)}{\text{ع}} = \text{نها}_{\text{ع}\to 0^+} \frac{\text{صفر}}{\text{ع}} = \text{صفر}$$

$$\text{ق}'_-(0) = \text{نها}_{\text{ع}\to 0^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(0)}{\text{ع}} = \text{نها}_{\text{ع}\to 0^-} \frac{-\cancel{\text{ع}}^2}{\cancel{\text{ع}}} = \text{صفر}$$

∴ ق'(0) = صفر

---

⑫ اذا كان:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2\,|\text{س} - 3|$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = 3

باستخدام تعريف المشتقة

الحل: التعويض داخل = صفر ← نعيد تعريف

س = 3

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س}^2 - \text{س}^3 & ،\ \text{س} < 3 \\ \text{س}^3 - 3\text{س}^2 & ،\ \text{س} \ge 3 \end{cases}$$

$$\text{ق}'_+(3) = \text{نها}_{\text{ع}\to 3^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(3)}{\text{ع} - 3}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to 3^+} \frac{\text{ع}^3 - 3\text{ع}^2 - 0}{\text{ع} - 3} = \text{نها}_{\text{ع}\to 3^+} \frac{\text{ع}^2\cancel{(\text{ع} - 3)}}{\cancel{\text{ع} - 3}} = 9$$

$$\text{ق}'_-(3) = \text{نها}_{\text{ع}\to 3^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(3)}{\text{ع} - 3}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\to 3^-} \frac{3\text{ع}^2 - \text{ع}^3}{\text{ع} - 3} = \text{نها}_{\text{ع}\to 3^-} \frac{\text{ع}^2\cancel{(3 - \text{ع})}}{\cancel{\text{ع} - 3}} = -9$$

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = 3 لأن $\text{ق}'_+(3) \ne \text{ق}'_-(3)$

تدريب:

1) $\text{ق}(\text{س}) = |2 - 2\text{س}| + \sqrt{7\text{س}}$

جد ق'(1) باستخدام تعريف المشتقة

2) $\text{ق}(\text{س}) = |2\,\text{جتاس} - 1|$

$\text{س} \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$

جد $\text{ق}'(\frac{\pi}{3})$ باستخدام تعريف المشتقة

3) $\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}^3 - [2 - \text{س}]\,\text{س}$ جد $\text{ق}'(\frac{1}{2})$ باستخدام التعريف

تمرين [5]

(1) اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س^3 &، س \le 1 \\ 3س^2 - 3س + 1 &، س > 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = 1

(2) اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} 4س + 1 &، -2 \le س < 1 \\ |س^2 - 4| + 3 &، س \ge 1 \end{cases}$$

جد ق'(س) .

(3) اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} |1 - س^2| + 4س &، س < 1 \\ س\,هـ^2(س) + 10 &، س \ge 1 \end{cases}$$

وكان هـ(1) = هـ'(1) = 2

ابحث قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = 1

(4) أ) اذا كان ق(س) = $\frac{4}{|س^2 - 17|}$ جد ق'(3)

ب) اذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{س - |س - 1|}$ جد ق'(−4)

جـ) اذا كان ق(س) = س + [س + 0.2] − |س − 1| جد ق'(−1)

د) اذا كان ق(س) = $(س - [س])^3$ جد ق'(2.5)

هـ) اذا كان ق(س) = |س − 3| جد $(ق^2)'(1)$

(5) اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{4س + 1} &، س \ne 2 \\ س^2 - 1 &، س = 2 \end{cases}$$

جد ق'(س) .

(6) أ) اذا كان ق(س) = |قتا س − 3| جد ق'($\frac{\pi}{2}$)

ب) اذا كان ق(س) = $\frac{س - [3 - س]}{3 - س}$ ، س ≠ 3

جد ق'(1.6)

(7) اذا كان ق(س) = س|جا س| ، س ∈ [0 ، 2π]

ابحث قابلية ق(س) للاشتقاق عند س = π

(8) اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} |2 - 2س| &، 0 \le س < 2 \\ [\frac{1}{2}س - 3] &، 2 \le س < 3 \end{cases}$$

جد ق'(س)

(9) اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} س^3 + س &، 0 < س < 2 \\ 2س^2 + 2 &، 2 \le س < 5 \end{cases}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = 2

باستخدام تعريف المشتقة

(10) اذا كان :

$$ق(س) = \frac{س^2}{[س + 2]}$$

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = 0

باستخدام تعريف المشتقة

(11) اذا كان ق(س) = $\frac{[\frac{س}{2}] + س}{س + 3}$

جد ق'(−1) باستخدام تعريف المشتقة .

(12) $$ق(س) = \begin{cases} \frac{س - 9}{\sqrt{س} - 3} &، س \ne 9 \\ 6 &، س = 9 \end{cases}$$

جد ق'(9)

الاتصال والاشتقاق

نظرية:

اذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = أ

فإن ق(س) متصل عند س = أ

أي أن:

اذا كانت قَ(أ) موجودة فإن ق(أ) = نهـا (س ← أ) ق(س)

① اذا كان قَ(١) = ٥ ، ق(١) = ٣

جد نهـا (س ← ١) (٦س − ق²(س) + ١)

الحل:

بما أن قَ(١) = ٥ (موجودة) ← ق متصل عند س = ١

∴ نهـا (س ← ١) ق(س) = ق(١) = ٣

∴ نهـا (س ← ١) (٦س − ق²(س) + ١) = ٦ − (٣)² + ١ = −٢

② اذا كان قَ(س) = { ٢س² + أ ، ١ < س < ٣ ؛ ٥س + ٤ ، س > ٣ }

وكانت قً(٣) موجودة ، فاحسب الثابت أ

الحل:

قً₊(٣) = قً₋(٣)

١٩ = ١٨ + أ ← أ = ١

③ إذا كان:

ق(س) = { ٣س² ، س ≤ ١ ؛ أس + ب ، س > ١ }

قابلاً للاشتقاق عند س = ١ ، جد كلاً من أ ، ب

الحل: قَ(س) = { ٦س ، س < ١ ؛ أ ، س > ١ }

س = ١ ← تحول

قَ₊(١) = قَ₋(١) ← أ = ٦

ق(س) متصل عند س = ١

ق(١) = نهـا (س ← ١⁺) (أس + ب) = نهـا (س ← ١⁻) ٣س²

٣ = أ + ب = ٣

٦ + ب = ٣ ← ب = −٣

④ اذا كان ق(س) = { أس³ + ب س ، س < ٢ ؛ أس² + ٩ب س − ١٢ ، س ≥ ٢ }

جد أ ، ب التي تجعل قَ(٢) موجودة.

الحل: قَ(س) = { ٣أس² + ب ، س < ٢ ؛ ٢أس + ٩ب ، س > ٢ }

س = ٢ ← تحول

قَ₊(٢) = قَ₋(٢)

٤أ + ٩ب = ١٢أ + ب ← ٨أ − ٨ب = ٠ ÷٨

أ − ب = ٠ ......①

ق(س) متصل عند س = ٢

ق(٢) = نهـا (س ← ٢⁺) (أس² + ٩ب س − ١٢) = نهـا (س ← ٢⁻) (أس³ + ب س)

٤أ + ١٨ب − ١٢ = ٤أ + ١٨ب − ١٢ = ٨أ + ٢ب

← ٤أ − ١٦ب = −١٢ ÷٤

$\cancel{أ}$ − ٤ب = −٣ ......②

−$\cancel{أ}$ + ب = ٠

−٣ب = −٣ ← ب = ١

∴ أ − ١ = ٠ ← أ = ١

تدريب:

اذا كان:

١) ق(س) = { أس² + ب ، س < ٣ ؛ جـ س ، س = ٣ ؛ س² + ٣أس + ٢ب ، س > ٣ }

قابلاً للاشتقاق على ح

جد أ ، ب ، جـ

٢) ق(س) = { س² − أس + ٥ ، س ≥ −١ ؛ أ/س − ب س ، س < −١ }

وكانت قَ(−١) موجودة

جد كلاً من أ ، ب

قاعدة السلسلة

اذا كان ص = د(ع) ، ع = هـ(س)

فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

① اذا كان :

ص = ع² + ٣ ، ع = س² + س − ٥

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$\frac{دص}{دع}$ = ٢ع ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢س + ١

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ع × (٢س + ١) = ٢(س² + س − ٥)(٢س + ١)

② اذا كان :

ل = $\frac{٤س}{٢س + ١}$ ، ص = ل² + ١

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$\frac{دل}{دس} = \frac{(٢س+١) \times ٤ - ٤س \times ٢}{(٢س+١)^2} = \frac{\cancel{٨س} + ٤ - \cancel{٨س}}{(٢س+١)^2}$

$\frac{دص}{دل}$ = ٢ل

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دل} \times \frac{دل}{دس}$

= $\frac{٤}{(٢س+١)^2}$ × ٢ل = $\frac{٨}{(٢س+١)^2} \times \frac{٤س}{٢س+١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣٢س}{(٢س+١)^3}$

③ اذا كان :

ص = $\frac{٣}{ع^2 + ١}$ ، س = $\frac{١}{٣}$ع³ + ع − ٢

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$\frac{دص}{دع} = \frac{-٣ \times ٢ع}{(ع^2+١)^2}$ ، $\frac{دس}{دع}$ = ع² + ١

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{-٦ع}{(ع^2+١)^2} \times \frac{١}{ع^2+١}$

= $\frac{-٦ع}{(ع^2+١)^3}$

④ اذا كان :

ص = $\frac{١}{\sqrt{٤ع^2+٣}}$ ، ع = جا π س

جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س = \frac{١}{٦}}$

عندما س = $\frac{١}{٦}$

ع = جا $\frac{\pi}{٦}$

ع = $\frac{١}{٢}$

الحل :

$\frac{دص}{دع} = \frac{-١ \times \frac{٨ع}{٢\sqrt{٤ع^2+٣}}}{٤ع^2+٣} = \frac{-٤ع}{\sqrt{٤ع^2+٣}\,(٤ع^2+٣)}$

$\frac{دص}{دع} = \frac{-٤ \times \frac{١}{٢}}{٢ \times ٤} = -\frac{١}{٤}$

$\frac{دع}{دس}$ = π جتا π س ⟵ $\frac{دع}{دس}$ = π جتا $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$π

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = -\frac{١}{٤} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\pi = \frac{\sqrt{٣}}{٨}\pi$

⑤ اذا كان :

ص = $\sqrt{٢ن^2 + ١}$ ، س = |٣ − ن²|

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ن = ٢

الحل :

$\frac{دص}{دن} = \frac{٤ن}{٢\sqrt{٢ن^2+١}} = \frac{٨}{٢ \times ٣} = \frac{٤}{٣}$

حول ن = ٢ $\xrightarrow{\text{التعويض سالب}}$ س = ن² − ٣

$\frac{دس}{دن}$ = ٢ن = ٤

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٣}$

⑥ اذا كان :

ص = ٣جتا٢ن ، س = ٢جا ن ، ن ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١

عندما س = ١

١ = ٢جا ن

جا ن = $\frac{١}{٢}$

ن = $\frac{\pi}{٦}$

$\frac{دص}{دن}$ = −٦جا٢ن = −٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= −٣$\sqrt{٣}$

$\frac{دس}{دن}$ = ٢جتا ن = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

= −٣$\cancel{\sqrt{٣}}$ × $\frac{١}{\cancel{\sqrt{٣}}}$ = −٣

تدريب :

ص = قا ن ، س = ظا² ن ، ن ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

جد $\frac{دس}{دص}$ عندما س = ٣

⑦ اذا كانت:

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 2\,\text{ظان} + 1$ ، $\text{س} = \text{ظان}$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=2}$

عندما س = ٢
ظان = ٢
قا²ن = ١ + ظا²ن
قا²ن = ١ + ٤
قا²ن = ٥

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 2\times 2 + 1 = 5$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{قا}^2\text{ن} = 5$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

تدريب:

$\text{ص} = \text{جا}^4\text{ن}$ ، $\text{س} = \sqrt{3}\,\text{ظان}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ١

⑧ $\text{ص} = \frac{1}{\text{ل}} - 2$ ، ل $\neq 0$ ،

$\text{س} = \frac{\text{ل}}{\text{ل}-1}$ ، ل $\neq 1$

أثبت أن: $\frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{س}^2$

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دل}} = \frac{-1}{\text{ل}^2}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دل}} = \frac{(\text{ل}-1)\times 1 - \text{ل}\times 1}{(\text{ل}-1)^2} = \frac{-1}{(\text{ل}-1)^2}$$

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{\text{دس}}{\text{دل}} \times \frac{\text{دل}}{\text{دص}}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{-1}{(\text{ل}-1)^2} \times -\text{ل}^2 = \frac{\text{ل}^2}{(\text{ل}-1)^2} = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ل}-1}\right)^2$$

$$\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{س}^2$$

⑨ اذا كانت:

$\text{ص} = \text{ع}^3 + \text{س}$ ، $\text{ع} = \text{ظاس}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{3}$

الحل:

$$\text{ص} = (\text{ظاس})^3 + \text{س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3(\text{ظاس})^2 \times \text{قا}^2\text{س} + 1$$

$$= 3(\sqrt{3})^2 \times (2)^2 + 1$$

$$= 9 \times 4 + 1 = 37$$

تمارين $\boxed{6}$

① اذا كان:

$\text{ص} = \frac{1}{12}\text{ع}^3 + \text{ع}$ ، $\text{ع} = (2\text{س}+1)^4$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

② اذا كانت:

$\text{ص} = \frac{2\text{ن}}{3\text{ن}-4}$ ، $\text{س} = \text{ن}^2 - \frac{8}{\text{ن}}$

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=0}$

③ اذا كان:

$\text{ص} = \sqrt[3]{(\text{ع}^2 - 10\text{ع} + 1)^2}$ ، $\text{ع} = \text{س}^3 + 1$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٢

④ اذا كان:

$\frac{\text{دع}}{\text{دم}} = \sqrt{16\,\text{جام} + 1}$ ، $\text{م} = \frac{\pi}{\text{س}+4}$

جد $\left.\frac{\text{دع}}{\text{دس}}\right|_{\text{م}=\frac{\pi}{6}}$

⑤ اذا كان:

$\text{ص} = \text{ظان}$ ، $\text{س} = \text{ظا}\frac{\text{ن}}{2}$ ، $0 < \text{ن} < \frac{\pi}{2}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = \sqrt{3}$

⑥ اذا كانت:

$\text{ص} = 3\sqrt{\text{ع}}$ ، $\text{س} = \text{ع}\sqrt{\text{ع}}$

أثبت أن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{9}{\text{ص}^2}$

⑦ اذا كان:

$\text{ص} = \text{ن} + \text{قا}^2\text{ن}$ ، $\text{س} = \text{ظان}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٣

مشتقة الاقتران المركب

إذا كان $\text{ص} = (\text{ق}\circ\text{هـ})(\text{س}) = \text{ق}(\text{هـ}(\text{س}))$

فإن:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قَ}(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هَ}(\text{س})$$

مشتقة الخارجي × مشتقة الداخلي

① إذا كان: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ - \text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^٢$

جد $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س})$

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س} - ١$ ، $\text{هَ}(\text{س}) = ٢\text{س}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(\text{س}) = \text{قَ}(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هَ}(\text{س})$

$= \text{قَ}(\text{س}^٢) \times ٢\text{س} = (٢\text{س}^٢ - ١) \times ٢\text{س}$

$= ٤\text{س}^٣ - ٢\text{س}$

② إذا كان: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٢$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$

جد:

أ) $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(٤)$ ب) $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(-١)$

جـ) $(\text{ق}\circ\text{ق})'(١)$

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢$ ، $\text{هَ}(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

أ) $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(٤) = \text{قَ}(\text{هـ}(٤)) \times \text{هَ}(٤)$

$= \text{قَ}(٢) \times \text{هَ}(٤)$

$= ١٢ \times \frac{١}{٤} = ٣$

ب) $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(-١) = \text{هَ}(\text{ق}(-١)) \times \text{قَ}(-١)$

$= \text{هَ}(١) \times \text{قَ}(-١)$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$

جـ) $(\text{ق}\circ\text{ق})'(١) = \text{قَ}(\text{ق}(١)) \times \text{قَ}(١)$

$= \text{قَ}(٣) \times \text{قَ}(١)$

$= ٢٧ \times ٣ = ٨١$

③ إذا كان: $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}^٢\text{س}$

جد $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\frac{\pi}{٤})$

الحل:

$$\text{هَ}(\text{س}) = \frac{-١ \times \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢\text{س}+٣}}}{٢\text{س}+٣} = \frac{-١}{(٢\text{س}+٣)\sqrt{٢\text{س}+٣}}$$

$\text{قَ}(\text{س}) = -٢\text{جتاس جاس}$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\frac{\pi}{٤}) = \text{هَ}(\text{ق}(\frac{\pi}{٤})) \times \text{قَ}(\frac{\pi}{٤})$

$= \text{هَ}(\frac{١}{٢}) \times \text{قَ}(\frac{\pi}{٤})$

$= \frac{-١}{٨} \times -١ = \frac{١}{٨}$

④ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ قاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}+١}$

وكان $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\frac{\pi}{٣}) = -٤\sqrt{٣}$

جد قيمة أ.

الحل:

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{أ قاس ظاس}$

$$\text{هَ}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+١)\times ٢ - ٢\text{س}\times ١}{(\text{س}+١)^٢} = \frac{٢}{(\text{س}+١)^٢}$$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\frac{\pi}{٣}) = \text{هَ}(\text{ق}(\frac{\pi}{٣})) \times \text{قَ}(\frac{\pi}{٣}) = -٤\sqrt{٣}$

$\text{هَ}(٢\text{أ}) \times ٢\text{أ}\cancel{\sqrt{٣}} = -٤\cancel{\sqrt{٣}}$

$\frac{٢}{(٢\text{أ}+١)^٢} \times ٢\text{أ} = -٤ \longleftarrow \frac{\text{أ}}{(٢\text{أ}+١)^٢} = -١$

$٤\text{أ}^٢ + ٤\text{أ} + ١ = -\text{أ} \longleftarrow ٤\text{أ}^٢ + ٥\text{أ} + ١ = ٠$

$(٤\text{أ}+١)(\text{أ}+١) = ٠ \longleftarrow \text{أ} = \frac{-١}{٤}$ ، -١

⑤ إذا كان: $\text{ق}(\text{س}) = (٣\text{س}-١)^٤$

$\text{هَ}(٢) = \frac{١}{٢}$ ، $(\text{ق}\circ\text{هـ})'(٢) = ٤٨$

جد قيمة $\text{هـ}(٢)$

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = ٤(٣\text{س}-١)^٣ \times ٣ = ١٢(٣\text{س}-١)^٣$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(٢) = \text{قَ}(\text{هـ}(٢)) \times \text{هَ}(٢) = ٤٨$

$\overset{٦}{\cancel{١٢}}(٣\text{هـ}(٢)-١)^٣ \times \frac{١}{\cancel{٢}} = ٤٨ \longleftarrow \text{هـ}(٢) = ١$

⑥ اذا كان :

قَ(٢) = −٢ ، هـ(س) = س^2 + س

ق(٢) = ١ ، هَ(س) = ٢س + ١

جد $\frac{دص}{دس}$:

١) ص = $\sqrt{(ق \circ هـ)(س)}$ عندما س = ١

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = \frac{قَ(هـ(١)) \times هَ(١)}{٢\sqrt{ق(هـ(١))}} = \frac{قَ(٢) \times هَ(١)}{٢\sqrt{ق(٢)}}$

$= \frac{-٢ \times ٣}{٢ \times ١} = -٣$

٢) ص = س^2 × (هـ ∘ ق)(س) عندما س = ٢

$\frac{دص}{دس}$ = س^2 × هَ(ق(س)) × قَ(س) + هـ(ق(س)) × ٢س

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = ٤ × هَ(١) × قَ(٢) + هـ(١) × ٤

= ٤ × ٣ × −٢ + ٢ × ٤ = −١٦

٣) ص = (ق^3 ∘ هـ)(س) عندما س = ١

الحل : ص = ((ق ∘ هـ)(س))^3

$\frac{دص}{دس}$ = ٣((ق ∘ هـ)(س))^2 × قَ(هـ(س)) × هَ(س)

= ٣(ق(هـ(١)))^2 × قَ(هـ(١)) × هَ(١)

= ٣ × [ق(٢)]^2 × قَ(٢) × هَ(١)

= ٣ × ١ × −٢ × ٣ = −١٨

تدريب : اذا كان :

ق(س) = $\sqrt[3]{س + أ}$ ، هـ(س) = س^2

(ق ∘ هـ)َ(٢) = $\frac{١}{٣}$

جد الثابت أ

⑧ اذا كان ص = ق(س^2 + ١) ، قَ(٢) = ٤

جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١}$

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = قَ(س^2 + ١) × ٢س

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١}$ = قَ(٢) × −٢ = ٤ × −٢ = −٨

⑨ اذا كان

ص = ق(ظا $\frac{س}{٢}$) ، قَ(١) = ٣

جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٢}}$

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = قَ(ظا $\frac{س}{٢}$) × $\frac{١}{٢}$ قا^2 $\frac{س}{٢}$

= قَ(١) × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ٣ × ١ = ٣

⑩ اذا كان :

ص = ق^2(جتا س) ، ق(٠) = ٢ ، قَ(٠) = −٤

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$

الحل :

ص = (ق(جتا س))^2

$\frac{دص}{دس}$ = ٢(ق(جتا س)) × قَ(جتا س) × −جا س

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٢}}$ = ٢(ق(٠)) × قَ(٠) × −١

= ٢ × ٢ × −٤ × −١ = ١٦

⑪ اذا كان :

ق(س^2 − س + ٣) = س^3 + ١ ، س > ٠

جد قَ(٥)

قَ(س^2 − س + ٣) × (٢س − ١) = ٣س^2

نعوض س = ٢

قَ(٥) × ٣ = ١٢ ⟵ قَ(٥) = ٤

س^2 − س + ٣ = ٥

س^2 − س − ٢ = ٠

(س − ٢)(س + ١) = ٠

$\boxed{س = ٢}$ ، س = −١ ×

⑫ اذا كان ق(جا س) = ظا^2 س ، س ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$)

جد قَ($\frac{١}{٢}$)

جا س = $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{\pi}{٦}$

الحل :

قَ(جا س) × جتا س = ٢ظا س قا^2 س

نعوض س = $\frac{\pi}{٦}$

قَ($\frac{١}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{٤}{٣}$

قَ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٨}{٣\sqrt{٣}}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

= $\frac{١٦}{٩}$

تمرين [7]

① اذا كان $ق(س) = \frac{1}{\sqrt{2س}}$ ، $س > 0$

$هـ(س) = (س - 1)^3$

جد $(ق \circ هـ)'(3)$

② اذا كان : $ق(س) = س^3$

$هـ(س) = \frac{أ}{س}$ ، $س \neq 0$

$(ق \circ هـ)'(3) = \frac{-8}{27}$

جد قيمة الثابت أ .

③ اذا كان $ق(ص) = ص^2 - ص$

$هـ(س) = \sqrt{5 - ظتا س}$

جد : $(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{8})$

④ اذا كان $ق(س) = \sqrt[3]{5 - 3س}$

$هـ(س) = جا \pi س$

جد $(هـ \circ ق)'(2)$

⑤ اذا كان : $ق(س) = قا^2 س$

$هـ(س) = \frac{أ}{\sqrt{2س - 3}}$

$(هـ \circ ق)'(\frac{\pi}{4}) = 10$

جد قيمة الثابت أ

⑥ اذا كان : $ص = \frac{هـ(5س - س^2)}{\sqrt{4س + 5}}$

وكان $هـ(4) = -9$ ، $هـ'(4) = 7$

جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=1}$

⑦ اذا كان : $ق'(س) = (2س - 3)^5 + 3$

$ص = |3 - س|\, ق(س^2 - 3)$ ، $ق(1) = -1$

جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=-2}$

⑧ اذا كان :

$ق(جا 2س) = 6س^2 + 7$ ، $س \in [0, \frac{\pi}{4}]$

جد $ق'(\frac{1}{2})$

⑨ اذا كان :

$ق(جتا س) = جا^4 س$ ، $س \in (0, \pi)$

جد $ق'(-\frac{1}{2})$

⑩ اذا كان : $ق(4) = 9$ ، $ق'(2) = -3$

$ق'(4) = 6$

جد قيمة مايلي عند $س = -1$

أ) $\frac{د}{دس}\left(\sqrt{ق(س^2 + 3)}\right)$

ب) $\frac{د}{دس}\left(ق(\sqrt{س^2 + 3})\right)$

⑪ $ق(س) = \frac{4}{3 - س}$

$هـ(2) = 5$

$(ق \circ هـ)(س) = (س^2 - 1)^3 + 4$

جد $هـ'(2)$

الاشتقاق الضمني

هو اشتقاق متغير بالنسبة لمتغير آخر .

مثال : $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ص}^{٣}) = ٣\text{ص}^{٢} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

لكن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٣}) = ٣\text{س}^{٢}$

ويستخدم الاشتقاق علاقة ضمنية مثل :

$\text{س ص}^{٢} + \text{س}^{٣} = ١$ ، $\text{جاص} = ٢\text{س} - ٥$

تذكر أن : ص = بدلالة س فقط

تسمى علاقة صريحة

وبغير ذلك تكون العلاقة ضمنية ويتم اشتقاقها بالاشتقاق الطرفين .

(١) اذا كانت $٤\text{ص}^{٢} + ٧\text{ص} + ٣\text{س}^{٢} = ٤٥$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$٨\text{ص صَ} + ٧\text{صَ} + ٦\text{س} = ٠$

$٨\text{ص صَ} + ٧\text{صَ} = -٦\text{س}$

$\text{صَ}(٨\text{ص} + ٧) = -٦\text{س} \longrightarrow \text{صَ} = \frac{-٦\text{س}}{٨\text{ص} + ٧}$

(٢) اذا كانت :

$\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} = ٣\text{س ص}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢}\text{صَ} = ٣\text{س صَ} + \text{ص} \times ٣ \quad ÷ ٣$

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}\text{صَ} = \text{س صَ} + \text{ص}$

$\text{ص}^{٢}\text{صَ} - \text{س صَ} = \text{ص} - \text{س}^{٢}$

$\text{صَ}(\text{ص}^{٢} - \text{س}) = \text{ص} - \text{س}^{٢}$

$\therefore \text{صَ} = \frac{\text{ص} - \text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - \text{س}}$

تدريب :

$\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} - ٤\text{س} = ٣\text{ص} + ٧$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

(٣) اذا كانت :

$\text{س}^{٣} = \text{س ص}^{٢} - ٢\text{ص}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

$٣\text{س}^{٢} = \text{س} \times ٢\text{ص صَ} + \text{ص}^{٢} \times ١ - ٢\text{صَ}$

$٣\text{س}^{٢} = ٢\text{س ص صَ} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{صَ}$

$٣\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = \text{صَ}(٢\text{س ص} - ٢)$

$\therefore \text{صَ} = \frac{٣\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{٢\text{س ص} - ٢}$

(٤) اذا كانت :

$٢\text{ص}^{٢} + \text{جاص} = \text{س}^{٢}\text{ص}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$٤\text{ص صَ} + \text{صَ جتاص} = \text{س}^{٢}\text{صَ} + \text{ص} \times ٢\text{س}$

$٤\text{ص صَ} + \text{صَ جتاص} - \text{س}^{٢}\text{صَ} = ٢\text{ص س}$

$\text{صَ}(٤\text{ص} + \text{جتاص} - \text{س}^{٢}) = ٢\text{ص س}$

$\therefore \text{صَ} = \frac{٢\text{ص س}}{٤\text{ص} + \text{جتاص} - \text{س}^{٢}}$

(٥) اذا كانت :

$\frac{٢}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٣\text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$\frac{-٢\text{صَ}}{\text{ص}^{٢}} + \frac{\text{س صَ} - \text{ص} \times ١}{\text{س}^{٢}} = ٣$

$\frac{-٢\text{صَ}}{\text{ص}^{٢}} + \frac{\text{س صَ} - \text{ص}}{\text{س}^{٢}} = ٣$

$\frac{-٢\text{س}^{٢}\text{صَ} + \text{س ص}^{٢}\text{صَ} - \text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢}} = ٣$

$-٢\text{س}^{٢}\text{صَ} + \text{س ص}^{٢}\text{صَ} = ٣\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٣}$

$\text{صَ}(-٢\text{س}^{٢} + \text{س ص}^{٢}) = ٣\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٣}$

$\text{صَ} = \frac{٣\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٣}}{\text{س ص}^{٢} - ٢\text{س}^{٢}}$

(٦) جد النقطة على منحنى $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٣$

والتي تحقق المعادلة $\text{صَ} = -٢$

الحل : $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{صَ}}{٢\sqrt{\text{ص}}} = ٠ \longleftarrow \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{-\text{صَ}}{٢\sqrt{\text{ص}}}$

$\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{ص}}} \longleftarrow \boxed{\sqrt{\text{ص}} = ٢\sqrt{\text{س}}} \longleftarrow$ نعوض في العلاقة الأصلية

$\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣$

$٣\sqrt{س} = ٣ \longrightarrow \sqrt{س} = ١$

$\therefore س = ١$

$\sqrt{١} + \sqrt{ص} = ٣ \longrightarrow \sqrt{ص} = ٢$

$ص = ٤$

∴ احداثيات النقطة هي $(١ ، ٤)$

(٧) اذا كانت:

$٣ص^٢ - ٢س ص = ١٦$

جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة $(١ ، -٢)$

الحل:

$٦ص ص' - ٢س \times ص' + ص \times -٢ = ٠$

$٦ص ص' - ٢س ص' - ٢ص = ٠$

عند $(١ ، -٢) \longrightarrow -١٢ص' - ٢ص' + ٤ = ٠$

$١٤ص' = ٤ \longrightarrow ص' = \frac{٢}{٧}$

(٨) $س + ص = جا(س ص)$ جد $\frac{دص}{دس}$

$١ + ص' = (ص + س ص') جتا(س ص)$

$١ + ص' = ص جتا(س ص) + س ص' جتا(س ص)$

$ص' - س ص' جتا(س ص) = ص جتا(س ص) - ١$

$ص' (١ - س جتا(س ص)) = ص جتا(س ص) - ١$

$$ص' = \frac{ص جتا(س ص) - ١}{١ - س جتا(س ص)}$$

(٩) اذا كان:

$ص^٣ = ق(٣س + ٤)$ ، $ق(١) = ق'(١) = ٨$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = -١$

عندما $س = -١$

$ص^٣ = ق(١)$

$ص^٣ = ٨$

$ص = ٢$

الحل:

$\cancel{٣}ص^٢ ص' = ق'(٣س + ٤) \times \cancel{٣}$

$٤ص' = ق'(١) = ٨ \longrightarrow ص' = ٢$

تدريب:

$س^٢ ص - ٢س = ٣\sqrt{ص}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ١$

(١٠) اذا كان:

$$ق(ص^٢) = \frac{٣س + ٥}{س + ١}$$

$ق(٩) = ٤$ ، $ق'(٩) = \frac{١}{٤}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ٣$

الحل:

$$٢ص ص' \times ق'(ص^٢) = \frac{٣(س + ١) - (٣س + ٥)}{(س + ١)^٢}$$

$$٦ص' \times ق'(٩) = \frac{٣ \times ٢ - ٨}{٤}$$

$٦ص' \times \frac{١}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\frac{٣}{٢}ص' = \frac{-١}{٢} \longrightarrow ص' = \frac{-١}{٣}$

عندما $ص = ٣$

$ق(٩) = \frac{٣س + ٥}{س + ١}$

$٤ = \frac{٣س + ٥}{س + ١}$

$٣س + ٥ = ٤س + ٤$

$س = ١$

(١١) اذا كان:

$٢جا ص = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = \frac{\pi}{٦}$

الحل:

$$٢ص' جتا ص = \frac{٢(س - ١) - (٢س - ٣)}{(س - ١)^٢}$$

عند النقطة $(٢ ، \frac{\pi}{٦})$

$$٢ص' \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٢ \times ١ - ١}{(١)^٢}$$

$\sqrt{٣}ص' = ١ \longrightarrow ص' = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

عندما $ص = \frac{\pi}{٦}$

$٢ \times \frac{١}{٢} = \frac{٢س - ٣}{س - ١}$

$س - ١ = ٢س - ٣$

$س = ٢$

تدريب:

اذا كان:

١) $ص = \sqrt{س ص + ٦}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة $(-١ ، ٢)$

٢) $س ص^٢ + س^٢ ص = ١٢$ جد $\frac{دص}{دس}$ عند النقطة $(١ ، ٣)$

٣) $جا ٢ص = جتا ٢ص + ٥س$ جد $\frac{دص}{دس}$

٤) $ص = ظا(س + ص)$ جد $\frac{دص}{دس}$

تمرين 8

① جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يلي :

1) $2\text{س}^3 - \text{س}^2\text{ص} = 1 - \text{ص}^3$

2) $\frac{\text{س}}{\text{ص}^2} = \text{س} + \text{ص}$

3) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س} - \text{ص})$

4) $\sqrt{\text{س} + 2\text{ص}} = \text{س ص}^2$ عند $(1، 2)$

5) $\text{جتا}^2\text{ص} = \text{س ص}$

6) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س ص})$ عند $(\frac{\pi}{2}، 1)$

7) $(\text{س} + \text{ص})^4 = 4\text{س} + \text{ص}^2 + 3$ عند $(1، -3)$

8) $\text{س} = \text{ظا ص}$ عندما $\text{س} = 3$

9) $3\text{س ص} + \text{ص}^2 = \text{س} - 7$ عند $\text{ص} = -1$

② إذا كان :

$\text{ق}^3(\text{ص}) = 3\text{س}^2 + 5$ ، $\text{ق}'(3) = \frac{1}{4}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند النقطة $(-1، 3)$

③ إذا كان :

$\text{ص}^3 = \frac{1}{37}\,\text{قا هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(2) = \frac{\pi}{4}$

$\text{هـ}'(2) = 12$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = 2$

المشتقات العليا

المشتقة الثانية : $\text{ق}''(\text{س})$ ، $\text{ق}^{(2)}(\text{س})$ ، $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$

المشتقة الثالثة : $\text{ق}'''(\text{س})$ ، $\text{ق}^{(3)}(\text{س})$ ، $\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3}$

المشتقة الرابعة : $\text{ق}^{(4)}(\text{س})$ ، $\frac{\text{د}^4\text{ص}}{\text{دس}^4}$

ويمكن إيجادها عن طريق إيجاد المشتقة الأولى ثم متابعة الاشتقاق باستخدام قواعد الاشتقاق.

① إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^5}{20} - \text{س}^3 + 1$ جد $\text{ق}^{(4)}(1)$

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{5\text{س}^4}{20} - 3\text{س}^2$

$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{4\text{س}^3}{4} - 6\text{س}$

$\text{ق}'''(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 6$

$\text{ق}^{(4)}(\text{س}) = 6\text{س} \longrightarrow \text{ق}^{(4)}(1) = 6$

② إذا كان : $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} + 3}{\text{س} - 1}$ جد $\text{ق}''(-2)$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س} - 1) \times 1 - (\text{س} + 3) \times 1}{(\text{س} - 1)^2}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-4}{(\text{س} - 1)^2}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{4 \times 2(\text{س} - 1)}{(\text{س} - 1)^4} = \frac{8}{(\text{س} - 1)^3}$$

$\therefore \text{ق}''(-2) = -\frac{8}{27}$

③ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{6}\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ق}^{(4)}(\text{س}) = \text{P}\,\text{س}^3$ جد قيمة P ، ن

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{6}\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{1}{6}\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{س}^{\text{ن}-2}$

$\text{ق}^{(3)}(\text{س}) = \frac{1}{6}\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\,\text{س}^{\text{ن}-3}$

$\text{ق}^{(4)}(\text{س}) = \frac{1}{6}\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)\,\text{س}^{\text{ن}-4} = \text{P}\,\text{س}^3$

$\therefore \text{ن} - 4 = 3 \leftarrow \text{ن} = 7$ ، $\text{P} = \frac{1}{6} \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 140$

④ جد $ق^{(4)}(0)$

إذا كان:

$ق(س) = \begin{cases} 1 - س^3 ، & س < 0 \\ س^3 + 1 ، & س \geq 0 \end{cases}$

ق(س) متصل عند س = ٠

$ق'(س) = \begin{cases} -3س^2 ، & س < 0 \\ 3س^2 ، & س > 0 \end{cases}$ $ق'_-(0) = 0$ ، $ق'_+(0) = 0$ ∴ $ق'(0) = 0$

$ق''(س) = \begin{cases} -6س ، & س < 0 \\ 6س ، & س > 0 \end{cases}$ $ق''_-(0) = 0$ ، $ق''_+(0) = 0$ ∴ $ق''(0) = 0$

$ق'''(س) = \begin{cases} -6 ، & س < 0 \\ 6 ، & س > 0 \end{cases}$ $ق'''_-(0) = -6$ ، $ق'''_+(0) = 6$ ∴ $ق'''(0)$ غير موجودة

∴ $ق^{(4)}(0)$ غير موجودة .

⑤ إذا كان ص = قتا س جد $\left.\frac{د^2ص}{دس^2}\right|_{س=\frac{\pi}{6}}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = -$ قتا س ظتا س

$\frac{د^2ص}{دس^2} = -$ قتا س × $-$ قتا² س + ظتا س × قتا س ظتا س

= قتا³ س + قتا س ظتا² س

$\left.\frac{د^2ص}{دس^2}\right|_{س=\frac{\pi}{6}} = (2)^3 + 2 \times 3 = 14$

⑥ إذا كان ص = ظا² س

جد: $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عندما س = $\frac{\pi}{4}$

الحل:

$\frac{دص}{دس} = 2$ ظا س × قا² س

$\frac{د^2ص}{دس^2} = 2$ ظا س × 2 قا س × قا س ظا س + قا² س × 2 قا² س

= 4 ظا² س قا² س + 2 قا⁴ س

$\left.\frac{د^2ص}{دس^2}\right|_{س=\frac{\pi}{4}} = 4 \times 1 \times 2 + 2 \times 4$

$= 8 + 8 = 16$

تدريب:

1) إذا كان ص = $(س^3 + 1)^3$ جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عندما س = -2

2) إذا كان ص = جا³ س جد $\left.\frac{د^2ص}{دس^2}\right|_{س=\frac{\pi}{6}}$

3) ص = س جتا² س جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ عندما س = π

⑦ إذا كان ق(س) = س³ − ٣

ه(1) = −3 ، ه'(1) = 2 ، ه''(1) = 4

ق'(س) = 3س²

ق''(س) = 6س

جد:

1) $(ق' \times ه)'(1)$

$= ق''(1)ه(1) + ق'(1) \times ه'(1)$

$= 3 \times 2 + -3 \times 6 = -12$

2) $\left(\frac{ق'}{ه}\right)'(1)$

$= \frac{ه(1)ق''(1) - ق'(1)ه'(1)}{(ه(1))^2} = \frac{2 \times 6 - 3 \times 4}{4} = 0$

3) $(ق \circ ه)'(1)$

$= ق'(ه(1)) \times ه'(1) = ق'(-3) \times ه'(1)$

$= -18 \times 2 = -36$

4) $\left(\frac{6}{ه}\right)''(1)$

الحل:

$\left(\frac{6}{ه(س)}\right)' = \frac{-6 \times ه'(س)}{(ه(س))^2}$

$\left(\frac{6}{ه}\right)''(1) = \frac{-(ه(1))^2 \times 6ه''(1) + 6ه'(1) \times 2ه(1)ه'(1)}{(ه(1))^4}$

$= \frac{9 \times -6 \times 4 + 12 \times 4 \times -3}{(-3)^4} = -\frac{40}{9}$

5) $(ق \circ ه)''(1)$

$(ق \circ ه)'(س) = ق'(ه(س)) \times ه'(س)$

$(ق \circ ه)''(1) = ق''(ه(1)) \times ه'(1) \times ه'(1) + ق'(ه(1)) \times ه''(1)$

$= 27 \times 4 + 2 \times -18 \times 3 = 36$

⑦ اذا كان : $\text{ق}(\text{س}^3) = \text{س}^2 + 8\text{س}$

جد $\text{قً}(8)$

الحل :

$3\text{س}^2\ \text{قَ}(\text{س}^3) = 2\text{س} + 8$ | $\text{س}^3 = 8$

$12\ \text{قَ}(8) = 12 \longrightarrow \text{قَ}(8) = 1$ | $\text{س} = 2$

نشتق مرة أخرى :

$3\text{س}^2 \times \text{قً}(\text{س}^3) \times 3\text{س}^2 + \text{قَ}(\text{س}^3) \times 6\text{س} = 2$

$144\ \text{قً}(8) + \text{قَ}(8) \times 12 = 2$

$144\ \text{قً}(8) + 12 = 2 \longrightarrow \text{قً}(8) = \frac{-5}{72}$

⑧ اذا كانت : $\text{س} - \text{جاص} = \frac{1}{2}$ جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند النقطة $(1 ، \frac{\pi}{6})$

الحل :

$1 - \text{صَ}\ \text{جتاص} = \text{صفر}$

$\text{صَ} = \frac{1}{\text{جتاص}} = \text{قاص}$

عند $(1 ، \frac{\pi}{6}) \longrightarrow \text{صَ} = \text{قا}\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

نشتق مرة أخرى :

$\text{صً} = \text{صَ}\ \text{قاص}\ \text{ظاص}$

عند $(1 ، \frac{\pi}{6})$

$\text{صً} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{4}{3\sqrt{3}}$

⑧ اذا كان : $\text{ص} = 2\text{ن}^4 + 1$ ، $\text{س} = 2\text{ن} - 1$

جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عندما $\text{ن} = -1$

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 8\text{ن}^3$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= 8\text{ن}^3 \times \frac{1}{2} = 4\text{ن}^3$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 12\text{ن}^2 \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = 12 \times \frac{1}{2} \times 1 = 6$

تدريب : $\text{ص} = \text{ن}^3 - 4\text{ن}$ ، $\text{س} = \text{ن}^2 + \text{ن}$ جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عندما $\text{ن} = 1$

⑨ اذا كان :

$\text{ص} = \text{جا}2\text{ن}$ ، $\text{س} = \text{جتا}2\text{ن}$

جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عندما $\text{ن} = \frac{\pi}{4}$

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 2\text{جتا}2\text{ن}$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -2\text{جا}2\text{ن}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= 2\text{جتا}2\text{ن} \times \frac{1}{-2\text{جا}2\text{ن}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ظتا}2\text{ن}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2 \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} \times \text{قتا}^2 2\text{ن}$

$= 2 \times \frac{1}{-2\text{جا}2\text{ن}} \times \text{قتا}^2 2\text{ن}$

$= -1 \times 1 \times 1 = -1$

⑩ اذا كان :

$\text{ص} = \text{قان}$ ، $\text{س} = \text{ظان}$

فأثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{جتا}^3\text{ن}$

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \text{قان ظان}$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{قا}^2\text{ن}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= \text{قان ظان} \times \frac{1}{\text{قا}^2\text{ن}} = \frac{\text{ظان}}{\text{قان}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جان}}{\cancel{\text{جتان}}} \times \cancel{\text{جتان}}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{جتان} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}} = \text{جتان} \times \frac{1}{\text{قا}^2\text{ن}}$

$= \text{جتان} \times \text{جتا}^2\text{ن} = \text{جتا}^3\text{ن}$

⑪ اذا كان :

$\frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{ص}^2$ جد ١) $\left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right|_{\text{ص}=2}$ ٢) $\left.\frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{دص}^2}\right|_{\text{ص}=2}$

الحل :

١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{ص}^2}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{-1 \times \cancel{2\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{ص}^{\cancel{4}}} = -2 \times \frac{\frac{1}{\text{ص}^2}}{\text{ص}^3}$

$= -2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{-1}{16}$

٢) $\frac{\text{د}^2\text{س}}{\text{دص}^2} = 2\text{ص}$

$= 2 \times 2 = 4$

تمارين 9

① اذا كان: $ص = \sqrt{٢س^{٢}+١}$

جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عندما $س = ٢$

② اذا كان:

$ق(س) = (س^{٢}+٣س)|س|$ جد $ق^{(٣)}(-٢)$

③ اذا كان:

$ق(س) = س^{ن}$ ، ن عدد طبيعي

$ق'''(س) = ٢١٠\,س^{ن-٣}$ فما قيمة ن ؟

④ اذا كان:

$ق(س) = \frac{٢}{٣}س^{٣}$ ، $هـ(١) = -٣$

$هـ'(١) = ٢$ ، $هـ''(١) = -١$

جد: أ) $(ق \times هـ)''(١)$

ب) $(هـ^{٣})''(١)$

جـ) $(ق \circ هـ)''(١)$

⑤ اذا كان: $ص = س^{ن}$

جد قيم ن اذا كان:

$س^{٢}ص'' + ٤س\,ص' - ١٨ص = ٠$

⑥ اذا كان: $ص = \frac{ع^{٢}}{ع^{٢}+١}$

$ع = \sqrt{٢س+١}$

جد $\left.\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right|_{س=٠}$

⑦ اذا كان: $ق(س) = جا\,هـ(س)$

$هـ(١) = \frac{\pi}{٢}$ ، $هـ'(١) = ٠$ ، $هـ''(١) = ٣$

جد $ق''(١)$

⑧ اذا كان:

$س^{٣} + ص^{٣} - ٤س\,ص = ٦٤$

جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عند النقطة $(٤،٠)$

⑨ اذا كان:

$ص = -٨\,جتا\,ن$ ، $س = ٢\,جا\,ن$

جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عندما $ن = \frac{\pi}{٣}$

⑩ اذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - أ &، س \leq ١ \\ جـ س^{٢} + ب س &، س > ١ \end{cases}$$

$ق''(١)$ موجودة

جد قيم: أ ، ب ، جـ

⑪ اذا كان:

$ص = ن^{٣} + ٢ن$ ، $\frac{ءس}{ءن} = ٤ن$

جد $\left.\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right|_{ن=١}$

⑫ اذا كان:

$ص = جتا^{٢}\,٢ن$ ، $س = جا^{٢}ن$

بيّن أن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٨$

⑬ أثبت أن:

$\frac{ء}{ءس}\left(ل(س)\,هـ'(س) - ل'(س)\,هـ(س)\right)$

$= ل(س)\,هـ''(س) - ل''(س)\,هـ(س)$

⑭ اذا كان: $هـ(س) = ل(س) \times ق(س)$

$ل'(س) \times ق'(س) = جـ$ ، جـ ثابت

أثبت أن: $هـ'''(س) = ل(س)\,ق'''(س) + ق(س)\,ل'''(س)$

أسئلة الإثبات

١) نشتق حسب قواعد الاشتقاق
٢) نستعين بالعلاقة الأصلية أو المتطابقات للتوصل الى المطلوب.

① اذا كان: $\text{ص} = (\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}}$ ، ن: عدد صحيح موجب

أثبت أن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن ص قاس}$

البرهان:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}\,(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-1}\,(\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س})$

$= \text{ن}\,(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-1} \times \text{قاس}\,(\text{قاس} + \text{ظاس})$

$= \text{ن قاس}\,(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-1+1}$

$= \text{ن قاس} \times \text{ص}$

② اذا كان: $\text{ص} = 2\,\text{جتا}3\text{ن}$ ، $\text{س} = \text{جا}^2 3\text{ن}$

أثبت أن $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = \frac{1}{1-\text{س}}$

البرهان:

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -6\,\text{جا}3\text{ن}$ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2\,\text{جا}3\text{ن جتا}3\text{ن} \times 3$

$= 6\,\text{جا}3\text{ن جتا}3\text{ن}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= -6\,\cancel{\text{جا}3\text{ن}} \times \frac{1}{6\,\cancel{\text{جا}3\text{ن}}\,\text{جتا}3\text{ن}} = \frac{-1}{\text{جتا}3\text{ن}}$

$\therefore \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = \frac{1}{\text{جتا}^2 3\text{ن}} = \frac{1}{1-\text{جا}^2 3\text{ن}} = \frac{1}{1-\text{س}}$

③ اذا كان: $\text{ص}^2 = \frac{\text{س}}{\text{س}+1}$ ، $\text{س} \neq -1$

أثبت أن: $\text{ص}' = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

البرهان:

$2\text{ص ص}' = \frac{\cancel{\text{س}}+1-\cancel{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2} \leftarrow \text{ص}' = \frac{1}{2\text{ص}(\text{س}+1)^2}$

لكن $\text{س}+1 = \frac{\text{س}}{\text{ص}^2}$ (من العلاقة الأصلية)

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{2\text{ص} \times \frac{\text{س}^2}{\text{ص}^4}} = \frac{1}{2 \times \frac{\text{س}^2}{\text{ص}^3}} = \frac{\text{ص}^3}{2\text{س}^2}$

④ اذا كان:

$\text{س} = \text{جاص}$ ، $|\text{س}| < 1$ ، $0 < \text{ص} < \frac{\pi}{2}$

أثبت أن:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$

البرهان:

$1 = \text{ص}'\,\text{جتاص}$

$\text{ص}' = \frac{1}{\text{جتاص}}$ لكن $\text{جتا}^2\text{ص} = 1 - \text{جا}^2\text{ص}$

$\text{جتا}^2\text{ص} = 1 - \text{س}^2$

$\therefore \text{ص}' = \frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}} \longleftarrow \text{جتاص} = \sqrt{1-\text{س}^2}$

⑤ اذا كان:

$\text{ص} = \text{ظا}(\text{س ص})$

أثبت أن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص} + \text{ص}^3}{1 - \text{س}(1+\text{ص}^2)}$

البرهان:

$\text{ص}' = (\text{س ص}' + \text{ص})\,\text{قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}' = \text{س ص}'\,\text{قا}^2(\text{س ص}) + \text{ص قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}' - \text{س ص}'\,\text{قا}^2(\text{س ص}) = \text{ص قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}'\left(1 - \text{س قا}^2(\text{س ص})\right) = \text{ص قا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}' = \frac{\text{ص قا}^2(\text{س ص})}{1 - \text{س قا}^2(\text{س ص})}$ لكن $\text{ص}^2 = \text{ظا}^2(\text{س ص})$

$\text{ص}^2 = \text{قا}^2(\text{س ص}) - 1$

$\text{قا}^2(\text{س ص}) = \text{ص}^2 + 1 \longleftarrow$

$\text{ص}' = \frac{\text{ص}(\text{ص}^2+1)}{1 - \text{س}(\text{ص}^2+1)}$

⑥ اذا كان:

$\text{ص} = \text{س ظاس}$

أثبت أن: $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(1+\text{ص})$

البرهان:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{قا}^2\text{س} + \text{ظاس}$

$= \text{س}\,(\text{قاس})^2 + \text{ظاس}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \text{س} \times 2\,\text{قاس} \times \text{قاس ظاس} + (\text{قاس})^2 + \text{قا}^2\text{س}$

$= 2\text{س قا}^2\text{س ظاس} + 2\,\text{قا}^2\text{س}$

$= 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{س ظاس} + 1) = 2\,\text{قا}^2\text{س}\,(\text{ص}+1)$

تدريب: $\text{س ص} = (\text{س} + \text{ص})^4$ أثبت أن $\text{ص}' = \frac{\text{ص}(3\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - 3\text{ص})}$

(٧) اذا كان :

$ص = جاس - \frac{1}{3} جا^3 س$

أثبت أن : $ص'' + ٩ص = ٦ جاس$

البرهان :

$ص' = جتاس - جا^2 س \times جتاس$

$= جتاس (١ - جا^2 س) = جتا^3 س$

$ص'' = ٣ جتا^2 س \times - جاس$

$= -٣ جتا^2 س \, جاس$

$\therefore ص'' + ٩ص = -٣ جتا^2 س \, جاس + ٩ جاس - ٣ جا^3 س$

$= ٣ جاس (- جتا^2 س + ٣ - جا^2 س)$

$= ٣ جاس (-١ + ٣) = ٦ جاس$

(٨) اذا كان :

$س^2 + ص^2 = ١$

أثبت أن : $ص^3 ص'' + ١ = صفر$

البرهان :

$٢س + ٢ص ص' = ٠ \quad ÷٢$

$س + ص ص' = ٠$

$١ + ص ص'' + ص' \times ص' = ٠$

$١ + ص ص'' + ص'^2 = ٠$ لكن $ص' = \frac{-س}{ص}$

$ص ص'' = - ص'^2 - ١$

$ص ص'' = - \frac{س^2}{ص^2} - ١ \quad \times ص^2$

$ص^3 ص'' = - س^2 - ص^2 = -(س^2 + ص^2)$

$ص^3 ص'' = -١ \leftarrow ص^3 ص'' + ١ = ٠$

(٩) اذا كان : $جاص = ظاس$ أثبت أن :

$ظاص = \frac{ص''}{٢ قا^2 س + ص'^2}$

البرهان :

$ص' جتاص = قا^2 س$

$ص' \times - ص' جاص + ص'' جتاص = ٢ قاس \times قاس ظاس$

$- ص'^2 جاص + ص'' جتاص = ٢ قا^2 س \, ظاس \quad / جاص$

$- ص'^2 + ص'' ظتاص = ٢ قا^2 س$

$ص'' ظتاص = ٢ قا^2 س + ص'^2$

$\therefore ظتاص = \frac{٢ قا^2 س + ص'^2}{ص''} \leftarrow ظاص = \frac{ص''}{٢ قا^2 س + ص'^2}$

(١٠) اذا كان :

$ص - س = جتاص$

أثبت أن : $ص'^2 = - ص'' (قاص + ظاص)$

البرهان :

$ص' - ١ = - ص' جاص$

$ص'' = - ص' \times ص' جتاص + جاص \times - ص''$

$ص'' = - ص'^2 جتاص - ص'' جاص$

$ص'' (١ + جاص) = - ص'^2 جتاص \quad / جتاص$

$ص'' \left(\frac{١}{جتاص} + \frac{جاص}{جتاص} \right) = - ص'^2$

$ص'' (قاص + ظاص) = - ص'^2$

(١١) اذا كان :

$جاص = ٢ جاس$

أثبت أن : $ص'^2 - ص'' ظتاص = ١$

البرهان :

$ص' جتاص = ٢ جتاس$

$ص' \times - ص' جاص + جتاص \times ص'' = -٢ جاس$

$- ص'^2 جاص + ص'' جتاص = -٢ جاس$

لكن $٢ جاس = جاص$

$- ص'^2 جاص + ص'' جتاص = - جاص \quad / جاص$

$- ص'^2 + ص'' ظتاص = -١ \quad \times -$

$ص'^2 - ص'' ظتاص = ١$

(١٢) اذا كان :

$س = ظتا ٢ص$

أثبت أن : $ص'' = - ص' جا ٤ص$

البرهان :

$١ = -٢ ص' قتا^2 ٢ص$

$ص' = \frac{-١}{٢ قتا^2 ٢ص} = - \frac{1}{2} جا^2 ٢ص$

$ص'' = -٢ ص' جا ٢ص \, جتا ٢ص$

$= - ص' جا ٤ص$

(١٣) اذا كان :

ص = جا س / س ، س ≠ ٠

أثبت أن : س ص'' + ٢ص' + س ص = ٠

البرهان : تحول العلاقة الى ضمنية بالضرب التبادلي .

س ص = جا س

س ص' + ص = جتا س

س ص'' + ص' + ص' = − جا س

س ص'' + ٢ص' = − س ص (جا س = س ص)

س ص'' + ٢ص' + س ص = ٠

(١٤) اذا كان : ص = √(٣جا س + ٤)

أثبت أن : ٢ص ص'' + ٢ص'^{2} + ص^{2} = ٤

البرهان :

تحول العلاقة الى ضمنية بتربيع الطرفين

ص^{2} = ٣جا س + ٤

٢ص ص' = ٣جتا س

٢ص × ص'' + ص' × ٢ص' = −٣جا س

٢ص ص'' + ٢ص'^{2} = ٤ − ص^{2}

٢ص ص'' + ٢ص'^{2} + ص^{2} = ٤

تدريب :

١) اذا كان ص = √(١ + جا س)

أثبت أن : ص ص'' + (ص')^{2} + ٢ص^{2} = ٣

٢) اذا كان ص = √(س + ص)

أثبت أن : ص'' = −٢(ص')^{3}

٣) ص − س ص = جا س

أثبت أن ص'' + ص = ٢ص' / (١ − س)

٤) جا ص = قا س

أثبت أن ص'' ظتا ص − ص'^{2} + ١ = ٢جا^{2}ص

تمرين [١٠]

(١) اذا كان : ص = $\frac{1}{3}$ ظا^{3} س + ظا س

أثبت أن : دص / دس = قا^{4} س

(٢) اذا كان : ص = جا^{4} س + جتا^{4} س

أثبت أن دص / دس = − جا ٤س

(٣) اذا كان : (ص + ١)^{2} = س ص

أثبت أن : دص / دس = ص^{2} / (ص^{2} − ١)

(٤) اذا كان : س = √(١ + جتا ص) ، ٠ < ص < $\frac{\pi}{2}$

أثبت أن : دص / دس = −٢ / √(٢ − س^{2})

(٥) اذا كان : ص = ظا^{2} س

أثبت أن : ص'' = ٢(ص + ١)(٣ص + ١)

(٦) اذا كان : ص = جا س + جتا س

أثبت أن : ص ص'' + ١ = − جا ٢س

(٧) اذا كان ص = $\frac{1}{3}$ قا^{3} س

أثبت أن : ص'' + ٩ص = ٤ قا^{5} س

(٨) اذا كان س = جا ص .

أثبت أن : ص'' = ظا ص + ظا^{3} ص

(٩) اذا كان : ص^{2} + ٣س^{2} − ٢س = ٠

أثبت أن : ص ص'' + ص'^{2} + ٣ = ٠

(١٠) اذا كان ص = (جا س + جتا س)^{4}

أثبت أن : ص'' + ٤ص = ١٢ جتا^{2} ٢س

(١١) ص = (قا س + ظا س)^{3} أثبت أن ص'' = ص' (٣قا س + ظا س)

نهايات خاصة

① $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{ق}'(\text{س})$

② $\displaystyle \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} = \text{ق}'(\text{س})$

③ $\displaystyle \lim_{\text{س}\to \text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{أ})}{\text{س}-\text{أ}} = \text{ق}'(\text{أ})$

① اذا كان : $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^3 + 2$ ، جد :

1) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ})-\text{ق}(1)}{3\text{هـ}} = \frac{1}{3}\times \text{ق}'(1)$

$= \frac{1}{3}\times 3 = 1$

2) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{5\text{هـ}}{\text{ق}(2+\text{هـ})-\text{ق}(2)} = 5 \times \frac{1}{\text{ق}'(2)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

3) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(1+3\text{هـ})-\text{ق}(1)}{2\text{هـ}}$

نفرض و = 3هـ ، هـ = $\frac{1}{3}$ و ، هـ ← 0 ، و ← 0

$\displaystyle = \lim_{\text{و}\to 0} \frac{\text{ق}(1+\text{و})-\text{ق}(1)}{2\times\frac{1}{3}\text{و}}$

$= \frac{3}{2}\times \text{ق}'(1) = \frac{3}{2}\times 3 = \frac{9}{2}$

4) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(2+5\text{هـ})-\text{ق}(2-\text{هـ})}{4\text{هـ}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(2+5\text{هـ})-\text{ق}(2)}{4\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(2)-\text{ق}(2-\text{هـ})}{4\text{هـ}}$

و = 5هـ ، و = −هـ

$\displaystyle = \lim_{\text{و}\to 0} \frac{\text{ق}(2+\text{و})-\text{ق}(2)}{4\times\frac{1}{5}\text{و}} + \lim_{\text{و}\to 0} \frac{-(\text{ق}(2+\text{و})-\text{ق}(2))}{-4\text{و}}$

$= \frac{5}{4}\text{ق}'(2) + \frac{1}{4}\text{ق}'(2) = \frac{3}{2}\text{ق}'(2) = 15$

⑤ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^2 - 2\text{س}$

$\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(3+5\text{هـ})-\text{ق}(3)}{2\text{هـ}} = 25$ جد قيمة أ

الحل :

$\frac{5}{2}\text{ق}'(3) = 25$

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{أ}\text{س} - 2$

$\text{ق}'(3) = 6\text{أ} - 2$

$\text{ق}'(3) = 10 \Leftarrow 6\text{أ} - 2 = 10 \Leftarrow \text{أ} = 2$

تدريب :

اذا كان $\text{ق}'(2) = 3$ ، $\text{ق}''(2) = 4$

$\text{ق}(2) = 1$

جد :

1) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}(2)-\text{ق}(2-3\text{هـ})}{\text{هـ}}$

2) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}'(2+\text{هـ})-\text{ق}'(2)}{\text{ق}(2)-\text{ق}(2+\text{هـ})}$

3) $\displaystyle \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق}^2(2+\text{هـ})-\text{ق}^2(2)}{3\text{هـ}}$

④ أثبت أن :

$\displaystyle \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س})-\text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}} = \text{ق}(\text{س}) - \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$

البرهان

$\displaystyle = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{س})-\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س})-\text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{س})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{س}\,(\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{ع}))}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \text{ق}(\text{س}) + \text{س}\times -\text{ق}'(\text{س})$

⑤ اذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ق}(\text{س})}$

جد هـ'(س) باستخدام تعريف المشتقة

$\displaystyle \text{هـ}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}^2+\text{ق}(\text{ع})}-\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}^2+\text{ق}(\text{ع})}+\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}}{\sqrt{\text{ع}^2+\text{ق}(\text{ع})}+\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}}$

$\displaystyle = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ع}^2+\text{ق}(\text{ع})-\text{س}^2-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}}$

$\displaystyle = \left(\lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}}$

$\displaystyle = \left(2\text{س}+\text{ق}'(\text{س})\right) \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}} = \frac{2\text{س}+\text{ق}'(\text{س})}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{ق}(\text{س})}}$

⑥ إذا كان:

$\text{ق}'(١) = -٦$ ، $\text{ه}'(١) = ٤$ ، $\text{ق}'(٢) = ٨$

جد النهايات التالية: ، $\text{ق}(١) = ٤$

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(١) - \text{ق}(س)}{س - ١} = -\text{ق}'(١) = ٦$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س^٢ + ٣س - ٤} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{(س - ١)(س + ٤)}$

$= \text{ق}'(١) \times \dfrac{١}{٥} = -\dfrac{٦}{٥}$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{\text{ه}(س) - \text{ه}(١)} = \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}}{\frac{\text{ه}(س) - \text{ه}(١)}{س - ١}}$

$= \dfrac{\text{ق}'(١)}{\text{ه}'(١)} = -\dfrac{٦}{٤} = -\dfrac{٣}{٢}$

٤) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - ٤س}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - ٤}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤ - ٤س}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{٤\cancel{(١ - س)}^{-١}}{\cancel{س - ١}}$

$= \text{ق}'(١) - ٤ = -١٠$

٥) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\,\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س\,\text{ق}(س) - \text{ق}(س)}{س - ١} + \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س - ١}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س)\cancel{(س - ١)}}{\cancel{س - ١}} + \text{ق}'(١) = \text{ق}(١) + \text{ق}'(١)$

$= ٤ - ٦ = -٢$

٦) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{\sqrt{س + ٣} - ٢} \times \dfrac{\sqrt{س + ٣} + ٢}{\sqrt{س + ٣} + ٢}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س) - \text{ق}(١)}{س + ٣ - ٤} \times ٤$

$= \text{ق}'(١) \times ٤ = -٦ \times ٤ = -٢٤$

٧) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س^٢ + ١) - \text{ق}(٢)}{س - ١}$

تمرين ١١

① إذا كان $\text{ق}'(٤) = ٢$ ، $\text{ق}(٤) = ٣$

جد:

١) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(٤ + هـ) - \text{ق}(٤)}{هـ^٢ + ٣هـ}$

٢) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \dfrac{س^٢ - س - ١٢}{\text{ق}(س) - \text{ق}(٤)}$

٣) $\underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤ - ٢هـ)}{٣هـ}$

٤) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\frac{٨}{س}) - \text{ق}(٤)}{س - ٢}$

③ إذا كان $\text{ق}(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}(س + ٢هـ) - \text{جا}\,س}{٣هـ}$

جد $\text{ق}'(\pi)$

④ إذا كان $\text{ه}(س) = \dfrac{١}{٣ + ٢\text{ق}(س)}$

جد $\text{ه}'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة

⑤ اثبت أن:

$\underset{ع \to س}{\text{نها}} \dfrac{ع\,\text{ق}(ع) - س\,\text{ق}(س)}{ع - س} = \text{ق}(س) + س\,\text{ق}'(س)$

⑥ إذا كان $\text{ق}'(٣) = ١$ ، $\text{ق}(٣) = ٢$

جد $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^٢\,\text{ق}(س) - ١٨}{س - ٣}$

⑦ إذا كان $\text{ق}(س + هـ) = \text{ق}(س) \times \text{ق}(هـ)$

$\text{ق}'(٠) = \text{ق}(٠) = ١$

اثبت باستخدام تعريف المشتقة أن $\text{ق}'(س) = \text{ق}(س)$

نظرية (١):

اذا كان الاقتران ق(س) قابلا للاشتقاق عند س = س١ فأثبت أنه يكون متصلا عند س = س١

المعطيات: ق'(س١) موجودة .

المطلوب: اثبات أن: $ق(س_1) = \lim_{س \to س_1} ق(س)$

البرهان:

$ق(س) - ق(س_1) = ق(س) - ق(س_1)$ (مغط)

بقسمة وضرب الطرف الايسر بـ $(س - س_1)$

$\therefore ق(س) - ق(س_1) = \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times (س - س_1)$

نأخذ نهاية للطرفين

$\lim_{س \to س_1} (ق(س) - ق(س_1)) = \lim_{س \to س_1} \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times \lim_{س \to س_1} (س - س_1)$

$\lim_{س \to س_1} ق(س) - ق(س_1) = ق'(س_1) \times صفر = صفر$

$\therefore \lim_{س \to س_1} ق(س) = ق(س_1)$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = س١

نظرية (٢):

اذا كان $ق(س) = س^ن$ ، ن: عدد صحيح موجب

فأثبت أن: $ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

البرهان: باستخدام تعريف المشتقة .

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^ن - س^ن}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{(ع-س)}(ع^{ن-1} + ع^{ن-2}س + ع^{ن-3}س^2 + \dots + ع\,س^{ن-2} + س^{ن-1})}{\cancel{ع-س}}$

$= س^{ن-1} + س^{ن-2} \times س + س^{ن-3} \times س^2 + \dots + س^{ن-1}$

$= \underbrace{س^{ن-1} + س^{ن-1} + س^{ن-1} + \dots + س^{ن-1}}_{ن\ من\ المرات}$

$\therefore ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

نظرية (٣):

اذا كان $ق(س) = س^ن$ ، ن: عدد صحيح سالب

فأثبت أن: $ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

البرهان:

نفرض ن = −م ، م: عدد صحيح موجب

$ق(س) = س^{-م} = \frac{1}{س^م}$

$\therefore ق'(س) = \frac{-1 \times م\, س^{م-1}}{(س^م)^2} = -م\, س^{م-1} \times س^{-2م}$

$= -م\, س^{-م-1}$ لكن −م = ن

$\therefore ق'(س) = ن\, س^{ن-1}$

نظرية (٤):

اذا كان $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي

فأثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - 1}$

البرهان:

نرفع الطرفين للأس ن

$ص^ن = (س^{\frac{م}{ن}})^ن \rightarrow ص^ن = س^م$

$ن\, ص^{ن-1} \times ص' = م\, س^{م-1}$

$\therefore ص' = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-1}}{ص^{ن-1}}$ لكن $ص = س^{\frac{م}{ن}}$

$ص' = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-1}}{(س^{\frac{م}{ن}})^{ن-1}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-1}}{س^{م - \frac{م}{ن}}}$

$= \frac{م}{ن} \times س^{م-1} \times س^{-م + \frac{م}{ن}}$

$= \frac{م}{ن} س^{م-1-\cancel{م}+\frac{م}{ن}+\cancel{م}} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - 1}$

نظرية (٥)

اذا كان $ص = (هـ(س))^ن$ فأثبت أن $ص' = ن (هـ(س))^{ن-1} هـ'(س)$

البرهان:

نفرض ع = هـ(س) ، $ص = ع^ن$ ثم نشتق

$\frac{دع}{دس} = هـ'(س)$ ، $\frac{دص}{دع} = ن\, ع^{ن-1}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$= ن\, ع^{ن-1} \times هـ'(س)$

$= ن (هـ(س))^{ن-1} \times هـ'(س)$

حل التمارين

تمرين ١

١) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د}(٥) - \text{د}(١)}{٤} = \frac{٢٥ + ٥\text{ه}(٥) - ١ - \text{ه}(١)}{٤}$

$= \frac{٢٤ + ١٠ - ٢}{٤} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

٢) $-\frac{١}{٣} = \frac{\text{د}(٦) - \text{د}(\text{أ})}{٦ - \text{أ}}$

$-\frac{١}{٣} = \frac{\frac{٢}{٣} - \frac{٤}{\text{أ}}}{٦ - \text{أ}} \longleftarrow -\frac{١}{٣} = \frac{٢\text{أ} - ١٢}{٣\text{أ}(٦ - \text{أ})}$

$-\frac{١}{٣} = \frac{٢\cancel{(\text{أ} - ٦)}}{٣\text{أ}\cancel{(٦ - \text{أ})}} \longleftarrow \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣\text{أ}} \longleftarrow \text{أ} = ٢$

٣) $\text{د}(\text{س})$:

$٥ = \frac{\text{د}(٤) - \text{د}(٢)}{٢} \longleftarrow \text{د}(٤) - \text{د}(٢) = ١٠$

$\text{ه}(\text{س})$:

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ه}(٤) - \text{ه}(٢)}{٢} = \frac{\frac{١٢}{\text{د}(٤)} - \frac{١٢}{\text{د}(٢)}}{٢}$

$= \frac{[\text{illegible}]}{\cancel{٢}\,\text{د}(٤)\,\text{د}(٢)} = \frac{٦ \times -١٠}{١٥} = -٤$

٤) $٣ = \frac{\text{د}(١) - \text{د}(١ + \text{ل})}{١ - (١ + \text{ل})}$

$٣ = \frac{٧ - (١ + \text{ل})^٢}{-\text{ل}}$ ل سالبة لأن س زادت

$-٣\text{ل} = ٧ - (١ + ٢\text{ل} + \text{ل}^٢)$

$-٣\text{ل} = ٦ - ٢\text{ل} - \text{ل}^٢ \longleftarrow \text{ل}^٢ - \text{ل} - ٦ = ٠$

$(\text{ل} - ٣)(\text{ل} + ٢) = ٠ \longleftarrow \text{ل} = ٣ \times$ ، $\boxed{\text{ل} = -٢}$

٥) ميل القاطع $= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$\Delta \text{س} = ٣ - ١ = ٢$

$\Delta \text{ص} = (٣)^٢ - ٥ \times ٢$

$= ٤ - ١٠ = -٦$

∴ ميل القاطع $= \frac{-٦}{٢} = -٣$

٦) $\text{د}(\text{س})$ في $[-١ ، ٥]$

$٤ = \frac{\text{د}(٥) - \text{د}(-١)}{٦} \longleftarrow \text{د}(٥) - \text{د}(-١) = ٢٤$

$\text{ه}(\text{س})$ في $[-٢ ، ١]$

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ه}(١) - \text{ه}(-٢)}{٣} = \frac{١ - \text{د}(٥) - ٤ + \text{د}(-١)}{٣}$

$= \frac{-٣ - ٢٤}{٣} = \frac{-٢٧}{٣} = -٩$

٧) $\text{د}(\text{س})$

$\Delta \text{ص} = \text{د}(٥) - \text{د}(١)$

∴ $\text{د}(٥) - \text{د}(١) = ٨$

$\text{ه}(\text{س})$

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(١)}{٤}$

$= \frac{٢٠ - ٣\text{د}(٥) + ٧ - (٤ - ٣\text{د}(١) + ٧)}{٤}$

$= \frac{١٦ - ٣\text{د}(٥) + ٣\text{د}(١)}{٤}$

$= \frac{١٦ - ٣(\text{د}(٥) - \text{د}(١))}{٤} = \frac{١٦ - ٣ \times ٨}{٤}$

$= \frac{-٨}{٤} = -٢$

٨) $\text{د}(\text{س})$

$٤ = \frac{\text{د}(٢) - \text{د}(-١)}{٣} \longleftarrow \text{د}(٢) - \text{د}(-١) = ١٢ \longleftarrow ①$

$\text{ل}(\text{س})$

$٣ = \frac{\text{ل}(٢) - \text{ل}(-١)}{٣} \longleftarrow ٦ = ٤\text{د}(٢) + ٢\text{د}(-١)$ ÷٢

$٣ = ٢\text{د}(٢) + \text{د}(-١) \longleftarrow ②$

بجمع المعادلتين $\longleftarrow ٣\text{د}(٢) = ١٥$

$\text{د}(٢) = ٥$

∴ $٥ - \text{د}(-١) = ١٢$

∴ $\text{د}(-١) = -٧$

تمرين (٣)

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\frac{1}{\text{ع}^2} - \frac{1}{\text{س}^2}}{\text{ع}-\text{س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^2-\text{ع}^2}{(\text{ع}-\text{س})\,\text{ع}^2\,\text{س}^2} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\overset{-1}{\cancel{(\text{س}-\text{ع})}}(\text{س}+\text{ع})}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\,\text{ع}^2\,\text{س}^2}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{-2\text{س}}{\text{س}^4} = \frac{-2}{\text{س}^3}$$

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{2\text{ع}^3+1}-\sqrt{2\text{س}^3+1}}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{\sqrt{2\text{ع}^3+1}+\sqrt{2\text{س}^3+1}}{\sqrt{2\text{ع}^3+1}+\sqrt{2\text{س}^3+1}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{2\text{ع}^3+\cancel{1}-2\text{س}^3-\cancel{1}}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{2\text{س}^3+1}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{2\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}^2+\text{ع}\text{س}+\text{س}^2)}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} \times \frac{1}{2\sqrt{2\text{س}^3+1}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \frac{6\text{س}^2}{2\sqrt{2\text{س}^3+1}} = \frac{3\text{س}^2}{\sqrt{2\text{س}^3+1}}$$

٣) $\text{ق}'(1) = \underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع}^2+\sqrt[3]{\text{ع}}-2}{\text{ع}-1}$

$$= \underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^2-1}{\text{ع}-1} + \underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{\text{ع}}-2+1}{\text{ع}-1}$$

$$= \underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{ع}-1)}(\text{ع}+1)}{\cancel{\text{ع}-1}} + \underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{\text{ع}}-1}{\text{ع}-1} \times \frac{\sqrt[3]{\text{ع}^2}+\sqrt[3]{\text{ع}}+1}{\sqrt[3]{\text{ع}^2}+\sqrt[3]{\text{ع}}+1}$$

$$\text{ق}'(1) = 2 + \underset{\text{ع}\to 1}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{ع}-1}}{\cancel{\text{ع}-1}} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

٤) $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{3\,\text{جا}\,\text{ع} - \text{جتا}\,2\text{ع} - 3\,\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{3(\text{جا}\,\text{ع}-\text{جا}\,\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}\,2\text{س}-\text{جتا}\,2\text{ع}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{6\,\text{جتا}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})\,\text{جا}\,\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{-2\,\text{جا}(\text{س}+\text{ع})\,\text{جا}(\text{س}-\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= 6\,\text{جتا}\,\text{س} \times \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\text{ص}}{\text{ص}} + -2\,\text{جا}\,2\text{س} \times \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\text{ص}}{-\text{ص}}$$

$\text{ص} = \text{ع}-\text{س}$ $\qquad$ $\text{ص} = \text{س}-\text{ع}$

$$= 6\,\text{جتا}\,\text{س} \times \frac{1}{2} + 2\,\text{جا}\,2\text{س} \times 1 = 3\,\text{جتا}\,\text{س} + 2\,\text{جا}\,2\text{س}$$

٥) $\text{ق}'(\tfrac{\pi}{4}) = \underset{\text{ع}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{3+\text{ظا}\,\text{ع}}-2}{\text{ع}-\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\sqrt{3+\text{ظا}\,\text{ع}}+2}{\sqrt{3+\text{ظا}\,\text{ع}}+2}$

$$= \underset{\text{ع}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{3+\text{ظا}\,\text{ع}-4}{\text{ع}-\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{4} = \underset{\text{ع}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,\text{ع}-1}{\text{ع}-\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{4}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,\text{ع}-\text{ظا}\,\frac{\pi}{4}}{\text{ع}-\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{4} = \underset{\text{ع}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(\text{ع}-\frac{\pi}{4})(1+\text{ظا}\,\text{ع}\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{4})}{\text{ع}-\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{4}$$

$\text{ص} = \text{ع}-\frac{\pi}{4}$

$$= \underset{\text{ص}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}\,\text{ص}}{\text{ص}} \times (1+1\times 1) \times \frac{1}{4}$$

$$= 1 \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = 1 + \sqrt{\text{س}^3}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{1}+\sqrt{\text{ع}^3}-\cancel{1}-\sqrt{\text{س}^3}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ع}^3}-\sqrt{\text{س}^3}}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}^3}+\sqrt{\text{س}^3}}{\sqrt{\text{ع}^3}+\sqrt{\text{س}^3}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^3-\text{س}^3}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^3}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}^2+\text{ع}\text{س}+\text{س}^2)}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}^3}} = \frac{3\text{س}^2}{2\sqrt{\text{س}^3}}$$

٧) $\Delta\text{ص} = 2\text{س}^2\text{هـ} - \text{جا}\,5\text{هـ}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{\Delta\text{ص}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{2\text{س}^2\text{هـ} - \text{جا}\,5\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{2\text{س}^2\cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}} - \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,5\text{هـ}}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}^2 - 5 \longrightarrow \text{ق}'(2) = 3$$

٨) $\text{ق}'(0) = \underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\frac{1}{1+\text{جا}\,2\text{ع}} - 1}{\text{ع}}$

$$= \underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \frac{1-1-\text{جا}\,2\text{ع}}{\text{ع}(1+\text{جا}\,2\text{ع})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}\,2\text{ع}}{\text{ع}(1+\text{جا}\,2\text{ع})} = \underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \frac{-\text{جا}\,2\text{ع}}{\text{ع}} \times \frac{1}{1}$$

$$\text{ق}'(0) = -2$$

9) $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\,\text{جتاع} - \text{س}^2\,\text{جتاس}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\,\text{جتاع} - \text{س}^2\,\text{جتاع}}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2\,\text{جتاع} - \text{س}^2\,\text{جتاس}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاع}\,(\text{ع}^2-\text{س}^2)}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2(\text{جتاع} - \text{جتاس})}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاع}\,\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2 \times -2\,\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})\,\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$\text{ص} = \text{ع}-\text{س}$

$= 2\text{س}\,\text{جتاس} - 2\text{س}^2 \times \text{جاس} \times \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جا}\frac{1}{2}\text{ص}}{\text{ص}}$

$= 2\text{س}\,\text{جتاس} - 2\text{س}^2\,\text{جاس} \times \frac{1}{2}$

$= 2\text{س}\,\text{جتاس} - \text{س}^2\,\text{جاس}$

10) $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\text{ع}-1}} - \frac{1}{\sqrt{2\text{س}-1}}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{2\text{س}-1} - \sqrt{2\text{ع}-1}}{(\text{ع}-\text{س})\sqrt{2\text{ع}-1}\,\sqrt{2\text{س}-1}} \times \frac{\sqrt{2\text{س}-1} + \sqrt{2\text{ع}-1}}{\sqrt{2\text{س}-1} + \sqrt{2\text{ع}-1}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\text{س}-\cancel{1}-2\text{ع}+\cancel{1}}{(\text{ع}-\text{س})\sqrt{2\text{ع}-1}\,\sqrt{2\text{س}-1}} \times \frac{1}{2\sqrt{2\text{س}-1}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{2}\overset{-1}{\cancel{(\text{س}-\text{ع})}}}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\sqrt{2\text{ع}-1}\,\sqrt{2\text{س}-1}} \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2\text{س}-1}} = \frac{-1}{(2\text{س}-1)\sqrt{2\text{س}-1}}$

11) $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظتا}^2\text{ع} - \text{ظتا}^2\text{س}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ظتاع} - \text{ظتاس})(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\left(\frac{1}{\text{ظاع}} - \frac{1}{\text{ظاس}}\right)(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ظاس} - \text{ظاع})(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{(\text{ع}-\text{س})\,\text{ظاع}\,\text{ظاس}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظا}(\text{س}-\text{ع})(1+\text{ظاس}\,\text{ظاع})(\text{ظتاع} + \text{ظتاس})}{(\text{ع}-\text{س})\,\text{ظاع}\,\text{ظاس}}$

$\text{ص} = \text{ع}-\text{س}$

$= \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{ظا}-\text{ص}}{\text{ص}} \times \frac{(1+\text{ظا}^2\text{س})(2\,\text{ظتاس})}{\text{ظا}^2\text{س}}$

$= \frac{-2\,\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظتاس}}{\text{ظا}^2\text{س}}$

12) $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جاع}^2 - \text{جاس}^2}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{2\,\text{جتا}\frac{1}{2}(\text{ع}^2+\text{س}^2)\,\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ع}^2-\text{س}^2)}{\text{ع}-\text{س}}$

$= 2\,\text{جتاس}^2 \times \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\frac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})}{\frac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})}$

$= 2\,\text{جتاس}^2 \times \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا}\frac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س})}{(\text{ع}+\text{س})(\text{ع}-\text{س})\frac{1}{2}} \times \text{س}$

$\text{ص} = \frac{1}{2}(\text{ع}+\text{س})(\text{ع}-\text{س})$

$= 2\,\text{جتاس}^2 \times \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \times \text{س}$

$= (2\,\text{جتاس}^2) \times 1 \times \text{س} = 2\text{س}\,\text{جتاس}^2$

13) $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^3 - 2\text{ع}^2 + 4\text{ع} + \cancel{7} - \text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 4\text{س} - \cancel{7}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع}^3-\text{س}^3) + 2(\text{س}^2-\text{ع}^2) + 4(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}^2+\text{ع}\text{س}+\text{س}^2) + 2\overset{-1}{\cancel{(\text{س}-\text{ع})}}(\text{س}+\text{ع}) + 4\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$

$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 4\text{س} + 4$

14) $\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\sqrt{\text{ع}-2} - \text{س}^2\sqrt{\text{س}-2}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^2\sqrt{\text{ع}-2} - \text{س}^2\sqrt{\text{ع}-2}}{\text{ع}-\text{س}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2\sqrt{\text{ع}-2} - \text{س}^2\sqrt{\text{س}-2}}{\text{ع}-\text{س}}$

↓ ① ↓ ②

① $\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}-2}\,\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} = 2\text{س}\sqrt{\text{س}-2}$

② $\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2(\sqrt{\text{ع}-2} - \sqrt{\text{س}-2})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}-2} + \sqrt{\text{س}-2}}{\sqrt{\text{ع}-2} + \sqrt{\text{س}-2}}$

$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}^2(\text{ع}-\cancel{2}-\text{س}+\cancel{2})}{\text{ع}-\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}-2}}$

$= \frac{\text{س}^2}{2\sqrt{\text{س}-2}}$

$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س}\sqrt{\text{س}-2} + \frac{\text{س}^2}{2\sqrt{\text{س}-2}}$

تمرين ٣

أ) $ق(س) = ٦س^{٢} + ٢س^{-٣}$

$= ٦س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}}$

$∴ ق(-١) = ٦ - ٢ = ٤$

ب) $ق'(س) = \frac{-٥ هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$ق'(٣) = \frac{-٥ × ٤}{٢٥} = \frac{-٤}{٥}$

$ق(٣) = \frac{٥}{هـ(٣)}$

$١ = \frac{٥}{هـ(٣)}$

$هـ(٣) = ٥$

جـ) $هـ(س) = (س^{٢} - ٣)\, ق(س)$

$هـ'(س) = (س^{٢} - ٣)\, ق'(س) + ق(س) × ٢س$

$هـ'(٢) = ١ × ق'(٢) + ق(٢) × ٤$

$٤ = -٨ + ٤ق(٢) \Leftarrow ق(٢) = ٣$

د) $ق(س) = \frac{١٢}{هـ(س)}$

$ق'(س) = \frac{-١٢ هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$ق'(-١) = \frac{-١٢ هـ'(-١)}{(٦)^{٢}} \Leftarrow \frac{هـ'(-١)}{ق'(-١)} = \frac{٣٦}{-١٢} = -٣$

هـ) $\frac{دص}{دس} = \frac{١٢س - ٠}{٨}$ ← ق(٢) ثابت

$= \frac{١٢ × ٢}{٨} = ٣$

و) $ق'(س) = ٦س^{٣} - \frac{-أ × ١}{(س-١)^{٢}}$

$ق'(-١) = -٦ - \frac{أ}{٤}$

$-٧ = -٦ - \frac{أ}{٤} \Leftarrow \frac{أ}{٤} = ١ \Leftarrow أ = ٤$

$∴ ق'(٣) = ٦ × ٢٧ - \frac{٤}{٤} = ١٦١$

② أ) $\frac{دص}{دس} = ٥(س^{٢} - \frac{١}{س})^{٤}(٢س + \frac{١}{س^{٢}})$

ب) $\frac{دص}{دس} = \frac{-٦ × ٣(٢س+١)^{٢} × ٢}{(٢س+١)^{٦}} = \frac{-٣٦}{(٢س+١)^{٤}}$

جـ) $\frac{دص}{دس} = س^{٤} × ٤(٥-٢س)^{٣} × -٢ + (٥-٢س)^{٤} × ٤س^{٣}$

د) $\frac{دص}{دس} = \frac{س × \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+١}} - \sqrt{س^{٢}+١} × ١}{س^{٢}}$

③ $ق(س) = هـ(س) × م(س)$

$ق'(س) = هـ(س) × م'(س) + م(س) × هـ'(س)$

$ق'(أ) = هـ(أ)\, م'(أ) + م(أ)\, هـ'(أ)$ ÷ ق(أ)

$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{هـ(أ)م'(أ)}{ق(أ)} + \frac{م(أ)هـ'(أ)}{ق(أ)}$

لكن $ق(أ) = هـ(أ)\, م(أ)$

$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{\cancel{هـ(أ)}م'(أ)}{م(أ)\cancel{هـ(أ)}} + \frac{\cancel{م(أ)}هـ'(أ)}{\cancel{م(أ)}هـ(أ)}$

$\frac{ق'(أ)}{ق(أ)} = \frac{م'(أ)}{م(أ)} + \frac{هـ'(أ)}{هـ(أ)}$

④ $ق(س) = س\,(س^{٣} - ٩)^{\frac{٢}{٣}}$

$ق'(س) = س × \frac{٢}{٣}(س^{٣}-٩)^{-\frac{١}{٣}} × ٣س^{٢} + (س^{٣}-٩)^{\frac{٢}{٣}} × ١$

$ق'(س) = \frac{٢}{٣}س × \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٣}-٩}} × ٣س^{٢} + \sqrt[٣]{(س^{٣}-٩)^{٢}}$

$∴ ق'(١) = \frac{٢}{\cancel{٣}} × \frac{١}{-٢} × \cancel{٣} + ٤ = -١ + ٤ = ٣$

⑤ $ق'(س) = \frac{(س-أ) × ١ - (س+أ) × ١}{(س-أ)^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{-٢أ}{(س-أ)^{٢}}$

$ق'(٢) = \frac{-٢أ}{(٢-أ)^{٢}} = -\cancel{٢}^{١}$

$٤ - ٤أ + أ^{٢} = أ$

$أ^{٢} - ٥أ + ٤ = ٠ \Leftarrow (أ-٤)(أ-١) = ٠$

$∴ أ = ٤ ،\ أ = ١$

الرياضيات **عثمان حنفية**

٦) أ) $ق'(س) = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢-س^٢}} + \sqrt{٢-س^٢} \times ١$

$= \frac{-س^٢}{\sqrt{٢-س^٢}} + \sqrt{٢-س^٢}$

$ق'(س) = \frac{-س^٢ + ٢ - س^٢}{\sqrt{٢-س^٢}} = \frac{٢ - ٢س^٢}{\sqrt{٢-س^٢}} = ٠$

$\therefore ٢ - ٢س^٢ = ٠ \leftarrow س^٢ = ١ \leftarrow س = \pm ١$

ب) $ق'(س) = \frac{(س-١)^٢ \times ٣(س+١)^٢ - (س+١)^٣ \times ٢(س-١)}{(س-١)^٤}$

$= \frac{\cancel{(س-١)}(س+١)^٢\left(٣(س-١) - ٢(س+١)\right)}{(س-١)^{٤٣}}$

$ق'(س) = \frac{(س+١)^٢(س-٥)}{(س-١)^٣} = ٠$

$\therefore (س+١)^٢(س-٥) = ٠ \leftarrow س = -١ ، ٥$

٧) أ) $\frac{ق'(-٢)}{٢} - \frac{-٦ \times ق'(-٢)}{(ق(-٢))^٢}$

$= \frac{-٤}{٢} + \frac{٦ \times -٤}{٩} = -٢ - \frac{٨}{٣} = \frac{-١٤}{٣}$

ب) $٢س \times ق(-٢)$

$= ٢ \times -٢ \times ٣ = -١٣$

جـ) $س \times \frac{ق'(س)}{٢\sqrt{ق(س)+١}} + \sqrt{ق(س)+١} \times ١$

$= -٢ \times \frac{-٤}{٤} + ٢ = ٤$

د) $\frac{(٢س + ق(س))\,ق'(س) - ق(س)(٢ + ق'(س))}{(٢س + ق(س))^٢}$

$= \frac{(-٤+٣) \times -٤ - ٣(٢ + -٤)}{(-٤ + ٣)^٢}$

$= \frac{٤ + ٦}{١} = ١٠$

٨) $ل'(س) = \frac{س \times ٢ق(س)\,ق'(س) - ق^٢(س) \times ١}{س^٢}$

$ل'(أ) = \frac{أ٢ \times ١٢ \times ٣ - ١٤٤}{أ^٢} = \frac{٧٢أ - ١٤٤}{أ^٢} = ٠$

$\therefore ٧٢أ = ١٤٤ \leftarrow أ = ٢$

٩) $ق(س) = (٣س + ب)^{\frac{١}{٤}}$

$ق'(س) = \frac{١}{٤}(٣س + ب)^{\frac{-٣}{٤}} \times ٣ = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{\sqrt[٤]{(٣س+ب)^٣}}$

$ق'(٥) = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{\sqrt[٤]{(١٥+ب)^٣}} = \frac{٣}{٣٢}$

$\therefore \frac{١}{\sqrt[٤]{١٥+ب}} = \frac{١}{٢} \leftarrow \frac{١}{١٥+ب} = \frac{١}{١٦} \leftarrow ب = ١$

١٠) أ) $\frac{دص}{دس} = \frac{-هـ(٢) \times ق'(٢)}{(ق(٢))^٢} = \frac{+١ \times ٤}{٤} = ١$

ب) $\frac{دص}{دس} = ٢هـ(٢)\,هـ'(٢) + ق'(٢) - ٣$

$= ٢ \times -١ \times ٣ + ٤ - ٣ = -٥$

جـ) $\frac{دص}{دس} = ٣س \times ٣هـ^٢(س)\,هـ'(س) + هـ^٣(س) \times ٣$

$= ٣ \times ٢ \times ٣ \times ١ \times ٣ + -١ \times ٣$

$= ٥٤ - ٣ = ٥١$

د) $\frac{دص}{دس} = \frac{٢\sqrt{ق(س)} \times ٢س - (س^٢+٢) \times \frac{ق'(س)}{\sqrt{ق(س)}}}{٢ق(س)}$

$= \frac{٢ \times ٤ - ٦ \times \frac{٤}{٢}}{٢ \times ٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

هـ) $\frac{دص}{دس} = \frac{(٣+هـ(س))\left(س^٢ هـ'(س) + هـ(س) \times ٢س\right) - س^٢ هـ(س)\,هـ'(س)}{(٣ + هـ(س))^٢}$

$= \frac{٢ \times (٤ \times ٤ + ٢ \times ٤) - ٤ \times ٢ \times ٣}{(٣ - ١)^٢}$

$= \frac{٤٨ - ٢٤}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

و) $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^٢(س)(٢س+١) - (س^٢+س) \times ٢هـ(س)\,هـ'(س)}{(هـ(س))^٤}$

$= \frac{١ \times ٥ - ٦ \times ٢ \times -١ \times ٣}{(-١)^٤} = ٤١$

تمرين ٤

① ١) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جتاس} \times \text{قاس ظاس} - (1+\text{قاس}) \times -\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \frac{\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} - (1+2) \times -\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}}$

$= \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \times 4 = 10\sqrt{3}$

٢) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 6\,\text{ظا}^2\text{س} \times \text{قا}^2\text{س}$

$= 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

٣) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا}2\text{س} \times 3\,\text{قا}3\text{س ظا}3\text{س}$
$+ \text{قا}3\text{س} \times -2\,\text{جا}2\text{س}$

$= -\frac{1}{2} \times 3 \times -1 \times 0 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

٤) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-2\,\text{جتاس جاس}}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \text{جتا}^2\text{س}}}$

$= \frac{-2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{2}$

٥) $\text{ص} = \frac{-1}{1-\text{جاس}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1 \times -\text{جتاس}}{(1-\text{جاس})^2} = \frac{1}{(1)^2} = 1$

② $\text{د(س)} = \frac{\frac{1}{2}}{\text{جا}^3\text{س}}$

$\text{دَ(س)} = \frac{-\frac{1}{2} \times 3\,\text{جا}^2\text{س جتاس}}{\text{جا}^6\text{س}} = \frac{-\frac{3}{2}\,\text{جتاس}}{\text{جا}^4\text{س}}$

$\text{دَ}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4} \times \frac{16}{9} = -\frac{4}{3}$

③ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \cancel{\text{س}^2} \times \frac{-1}{\cancel{\text{س}^2}}\,\text{قا}^2\frac{1}{\text{س}} + \text{ظا}\frac{1}{\text{س}} \times 2\text{س}$

$= -1 \times (-1)^2 + \text{صفر} \times \frac{2}{\pi}$

$= -1$

④ $\frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{قتاس}) = -\text{قتاس ظتاس}$

$\therefore \text{د(س)} = \text{جاس} \times -\text{قتاس ظتاس}$

$\text{د(س)} = -\text{ظتاس}$

$\text{دَ(س)} = \text{قتا}^2\text{س} \longrightarrow \text{دَ}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$

⑤ $\text{د(س)} = \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}2\text{س}} = \text{ظتا}2\text{س}$

$\text{دَ(س)} = -2\,\text{قتا}^2 2\text{س}$

$\text{دَ}\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2 \times 2 = -4$

⑥ $\text{ل(س)} = \sqrt[5]{1-2\,\text{جا}^2\text{س} - 1} = \sqrt[5]{-2\,\text{جا}^2\text{س}}$

$= (-2\,\text{جا}^2\text{س})^{\frac{1}{5}}$

$\text{لَ(س)} = \frac{1}{5}(-2\,\text{جا}^2\text{س})^{-\frac{4}{5}} \times -4\,\text{جاس جتاس}$

$= -\frac{4}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{(-2\,\text{جا}^2\text{س})^4}} \times \text{جاس جتاس}$

$\text{لَ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{5} \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{2}{5}$

$\text{ل}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[5]{-1} = -1$

$\text{هـَ(س)} = \text{د}^2\text{(س) لَ(س)} + \text{ل(س)} \times 2\,\text{د(س) دَ(س)}$

$\text{هـَ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 25 \times -\frac{2}{5} + -1 \times 2 \times 5 \times -3$

$= -10 + 30 = 20$

تمرين (5)

(1) عند س = ١ ← تحول

الاتصال : ق(١) = ١

نهـا$_{س \to 1^+}$ (س³ − ٣س² + ٣س) = ١ ، نهـا$_{س \to 1^-}$ س³ = ١

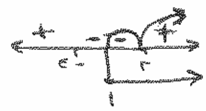
ق(س) متصل عند س = ١

ق′(س) = { ٣س² ، س < ١ ؛ ٦س − ٣ ، س > ١ }

ق′₊(١) = ٣ ، ق′₋(١) = ٣

∴ ق′(١) = ٣

(2)



ق(س) = { ٤س + ١ ، −٢ ≤ س < ١ ؛ ٧ − س² ، ١ ≤ س < ٢ ؛ س² − ١ ، س ≥ ٢ }

ق(١) = ٦

نهـا$_{س \to 1^+}$ (٧ − س²) = ٦

نهـا$_{س \to 1^-}$ (٤س + ١) = ٥

ق غير متصل عند س = ١

ق متصل عند س = ٢

ق′₊(٢) = ٤

ق′₋(٢) = −٤

ق′(٢) غ.م

ق′(س) = { ٤ ، −٢ < س < ١ ؛ −٢س ، ١ < س < ٢ ؛ ٢س ، س > ٢ ؛ غ.م ، س = ١ ، ٢ }

(3)

ق(س) = { س² − ١ + ١٤س ، س < −١ ؛ ١ − س² + ١٤س ، −١ ≤ س < ١ ؛ س هـ²(س) + ١٠ ، س ≥ ١ }

ق(١) = ١ × هـ²(١) + ١٠ = ١٤

نهـا$_{س \to 1^+}$ س هـ²(س) + ١٠ = ١٤

نهـا$_{س \to 1^-}$ (١ − س² + ١٤س) = ١٤

ق(س) متصل عند س = ١

ق′(س) = { ٢س + ١٤ ، س < −١ ؛ ١٤ − ٢س ، −١ < س < ١ ؛ س × ٢هـ(س) هـ′(س) + هـ²(س) ، س > ١ }

ق′₋(١) = ١٤ − ٢ = ١٢

ق′₊(١) = ١ × ٢ × ٢ × ٢ + ٤ = ١٢

∴ ق′(١) = ١٢

(4) أ) ق(س) = $\frac{٤}{س^2 - ٧}$

ق′(س) = $\frac{-٤ \times ٢س}{(س^2 - ٧)^2}$ ← ق′(٣) = $\frac{-٢٤}{٤}$ = −٦

ب) ق(س) = $\sqrt[3]{س - ٣س}$ = (−٢س)$^{\frac{1}{3}}$

ق′(س) = $\frac{1}{3}$(−٢س)$^{-\frac{2}{3}}$ × ٢ = $\frac{2}{3}$ × $\frac{1}{\sqrt[3]{٤س^2}}$

∴ ق′(−٤) = $\frac{2}{3}$ × $\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{6}$

ج) ق(س) = س − ١ + س = ٢س − ١

ق′(س) = ٢ ← ق′(−١) = ٢

د) ق(س) = (س − ٢)³

ق′(س) = ٣(س − ٢)² × ١

ق′(٢,٥) = ٣($\frac{1}{2}$)² = $\frac{3}{4}$

هـ) ق²(س) = (|٣ − س|)² = (٣ − س)²

∴ (ق²)′(س) = ٢(٣ − س) × −١

(ق²)′(١) = ٢ × ٢ × −١ = −٤

(5) نبحث اتصال عند س = ٢

ق(٢) = ٣

نهـا$_{س \to 2}$ $\sqrt{٤س + ١}$ = ٣

ق(س) متصل عند س = ٣

ق′(س) = $\frac{٤}{٢\sqrt{٤س + ١}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٤س + ١}}$

(6) أ) ق(س) = ٣ − جتا س

ق′(س) = جا س ← ق′($\frac{\pi}{2}$) = ١

ب) ق(س) = $\frac{س - ٣}{٣ - س}$ = −١

ق′(س) = صفر ← ق′(١,٦) = صفر

⑦

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س جاس} , & 0 \le \text{س} < \pi \\ -\text{س جاس} , & \pi \le \text{س} \le 2\pi \end{cases}$$

عند س $= \pi$ (تحول)

$\text{ق}(\pi) = -\pi \,\text{جا}\, \pi = 0$

$\lim\limits_{\text{س} \to \pi^+} \text{ق}(\text{س}) = 0$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to \pi^-} \text{ق}(\text{س}) = 0$

ق متصل عند س $= \pi$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{س جتاس} + \text{جاس} , & 0 < \text{س} < \pi \\ -\text{س جتاس} - \text{جاس} , & \pi < \text{س} < 2\pi \end{cases}$$

$\text{ق}'_+(\pi) = -\pi \times -1 - 0 = \pi$

$\text{ق}'_-(\pi) = \pi \times -1 + 0 = -\pi$ $\leftarrow$ ق'(π) غ.م

⑧

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 2 - 2\text{س} , & 0 \le \text{س} < 1 \\ 2\text{س} - 2 , & 1 \le \text{س} < 2 \\ -2 , & 2 \le \text{س} < 3 \end{cases}$$

ل = ٢

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -2 , & 0 < \text{س} < 1 \\ 2 , & 1 < \text{س} < 2 \\ \text{صفر} , & 2 < \text{س} < 3 \\ \text{غ.م} , & \text{س} = 0 , 1 , 2 \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١

ق(٢) = −٢

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{ق}(\text{س}) = -2$

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^-} \text{ق}(\text{س}) = 2$

ق غير متصل عند س = ٢

$\text{ق}'_+(1) = 2$ ، $\text{ق}'_-(1) = -2$

ق'(١) غ.م

⑨

$$\text{ق}'_+(2) = \lim_{\text{ع} \to 2^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع} - 2}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 2^+} \frac{2\text{ع}^2 + 2 - 10}{\text{ع} - 2} = \lim_{\text{ع} \to 2^+} \frac{2(\text{ع}^2 - 4)}{\text{ع} - 2}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 2^+} \frac{2\cancel{(\text{ع} - 2)}(\text{ع} + 2)}{\cancel{\text{ع} - 2}} = 8$$

$$\text{ق}'_-(2) = \lim_{\text{ع} \to 2^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(2)}{\text{ع} - 2} = \lim_{\text{ع} \to 2^-} \frac{\text{ع}^3 + \text{ع} - 10}{\text{ع} - 2}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 2^-} \frac{\cancel{(\text{ع} - 2)}(\text{ع}^2 + 3\text{ع} + 5)}{\cancel{\text{ع} - 2}} = 13$$

∴ ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

لأن $\text{ق}'_+(2) \ne \text{ق}'_-(2)$

⑩ ل = ١

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 , & -1 \le \text{س} < 0 \\ \frac{\text{س}^2}{2} , & 0 \le \text{س} < 1 \end{cases}$$

$$\text{ق}'_+(0) = \lim_{\text{ع} \to 0^+} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(0)}{\text{ع}} = \lim_{\text{ع} \to 0^+} \frac{\frac{\text{ع}^{\cancel{2}}}{2} - 0}{\cancel{\text{ع}}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 0^+} \frac{\text{ع}}{2} = \text{صفر}$$

$$\text{ق}'_-(0) = \lim_{\text{ع} \to 0^-} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(0)}{\text{ع}} = \lim_{\text{ع} \to 0^-} \frac{\text{ع}^{\cancel{2}} - 0}{\cancel{\text{ع}}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to 0^-} \text{ع} = \text{صفر}$$

∴ ق'(٠) = صفر

⑪

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{-1 + \text{س}}{\text{س} + 3} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 3}$$

$$\text{ق}'(-1) = \lim_{\text{ع} \to -1} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(-1)}{\text{ع} + 1}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to -1} \frac{\frac{\text{ع} - 1}{\text{ع} + 3} + 1}{\text{ع} + 1} = \lim_{\text{ع} \to -1} \frac{\text{ع} - 1 + \text{ع} + 3}{(\text{ع} + 1)(\text{ع} + 3)}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to -1} \frac{2\cancel{(\text{ع} + 1)}}{\cancel{(\text{ع} + 1)}(\text{ع} + 3)} = \frac{2}{2} = 1$$

تمرين (٦)

① $\frac{دص}{دع} = \frac{١}{٤}ع^{٢} + ١$ ، $\frac{دع}{دس} = ٤(٢س+١)^{٣} \times ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

$\frac{دص}{دس} = (\frac{١}{٤}ع^{٢}+١) \times ٨(٢س+١)^{٣}$

$= (\frac{١}{٤}(٢س+١)^{٨} + ١) \times ٨(٢س+١)^{٣}$

② عندما $س = ٠ \longleftarrow ن^{٢} - \frac{٨}{ن} = ٠ \longleftarrow ن^{٢} = \frac{٨}{ن}$

$ن^{٣} = ٨ \longleftarrow ن = ٢$

$\frac{دص}{دن} = \frac{(٣ن-٤) \times ٢ - ٢ن \times ٣}{(٣ن-٤)^{٢}} = \frac{٤ - ١٢}{٤} = -٢$

$\frac{دس}{دن} = ٢ن + \frac{٨}{ن^{٢}} = ٤ + \frac{٨}{٤} = ٦$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = -٢ \times \frac{١}{٦} = -\frac{١}{٣}$

③ عندما $س = ٢ \longleftarrow ع = ٨ + ١ \longleftarrow ع = ٩$

$ص = (ع^{٢} - ١٠ع + ١)^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{دص}{دع} = \frac{٢}{٣}(ع^{٢} - ١٠ع + ١)^{-\frac{١}{٣}}(٢ع - ١٠)$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{ع^{٢} - ١٠ع + ١}} \times (٢ع - ١٠)$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{-٢} \times ٨ = -\frac{٨}{٣}$

$\frac{دع}{دس} = ٣س^{٢} = ١٢$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = -\frac{٨}{٣} \times ١٢ = -٣٢$

④ عندما $م = \frac{\pi}{٦} \longleftarrow \frac{\cancel{\pi}}{٦} = \frac{\cancel{\pi}}{س+٤} \longleftarrow س = ٢$

$\frac{دع}{دم} = \sqrt{٦ \times \frac{١}{٢} + ١} = ٢$

$\frac{دم}{دس} = \frac{-\pi}{(س+٤)^{٢}} = \frac{-\pi}{٣٦}$

$\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دم} \times \frac{دم}{دس} = ٢ \times \frac{-\pi}{٣٦} = \frac{-\pi}{١٨}$

⑤ عندما $س = \sqrt{٣}$

$ظا\frac{ن}{٢} = \sqrt{٣} \longleftarrow \frac{ن}{٢} = \frac{\pi}{٣} \longleftarrow ن = \frac{٢\pi}{٣}$

$\frac{دص}{دن} = قان = ٤$

$\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢} \times -قا^{٢}\frac{ن}{٢} = -\frac{١}{٢} \times ٤ = -٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = ٤ \times \frac{١}{-٢} = -٢$

⑥ $\frac{دص}{دع} = ٣ \times \frac{١}{٢\sqrt{ع}} = \frac{٣}{٢\sqrt{ع}}$

$\frac{دس}{دع} = ع \times \frac{١}{٢\sqrt{ع}} + \sqrt{ع} = \frac{٣ع}{٢\sqrt{ع}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \frac{\cancel{٣}}{\cancel{٢\sqrt{ع}}} \times \frac{\cancel{٢\sqrt{ع}}}{\cancel{٣}ع} = \frac{١}{ع}$

لكن :

$ص = ٣\sqrt{ع} \longleftarrow \frac{ص}{٣} = \sqrt{ع} \longleftarrow ع = \frac{ص^{٢}}{٩}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١}{\frac{ص^{٢}}{٩}} = \frac{٩}{ص^{٢}}$

⑦ $\frac{دص}{دن} = ١ + ٢قان \times قان ظان$

$= ١ + ٢قا^{٢}ن ظان$

$= ١ + ٢ \times ١٠ \times ٣ = ٦١$

عندما $س = ٣$

$ظان = ٣$

$قا^{٢}ن = ١ + (٣)^{٢}$

$قا^{٢}ن = ١٠$

$\frac{دس}{دن} = قا^{٢}ن = ١٠$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = ٦١ \times \frac{١}{١٠} = \frac{٦١}{١٠}$

تمرين ٧

(١) $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-1 \times \frac{1}{\sqrt{2\text{س}}}}{2-\text{س}} = \dfrac{-1}{(2-\text{س})\sqrt{2\text{س}}}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = 3(\text{س}-1)^2$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(3) = \text{ق}'(\text{هـ}(3)) \times \text{هـ}'(3)$

$= \text{ق}'(8) \times \text{هـ}'(3) = \frac{-1}{64} \times 12 = \frac{-3}{16}$

(٢) $\text{ق}(\text{س}) = 3-\text{س}^2$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ}}{\text{س}^2}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'(3) = \text{ق}'(\text{هـ}(3)) \times \text{هـ}'(3)$

$\frac{-8}{27} = \text{ق}'\left(\frac{\text{أ}}{3}\right) \times \frac{-\text{أ}}{9}$

$\frac{-8}{27} = \frac{\text{أ}^2}{3} \times \frac{-\text{أ}}{9} \longleftarrow \text{أ}^3 = 8 \longleftarrow \text{أ} = 2$

(٣) $\text{ق}'(\text{ص}) = 2\text{ص} - 1$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \dfrac{\cancel{2}\,\text{قا}^2\, 2\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{5-\text{ظا}\, 2\text{س}}}$

$(\text{ق}\circ\text{هـ})'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \text{ق}'\left(\text{هـ}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \times \text{هـ}'\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$= \text{ق}'(2) \times \text{هـ}'\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$= 3 \times \frac{2}{2} = 3$

(٤) $\text{ق}(\text{س}) = (5-3\text{س})^{\frac{1}{3}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{3}(5-3\text{س})^{\frac{-2}{3}} \times -3 = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{(5-3\text{س})^2}}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \pi\, \text{جتا}\, \pi\, \text{س}$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'(2) = \text{هـ}'(\text{ق}(2)) \times \text{ق}'(2)$

$= \text{هـ}'(-1) \times \text{ق}'(2)$

$= -\pi \times \frac{-1}{1} = \pi$

(٥) $\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{قاس} \times \text{قاس}\,\text{ظاس} = 2\text{قا}^2\text{س}\,\text{ظاس}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{أ} \times \frac{1}{\sqrt{2\text{س}-3}}}{2\text{س}-3} = \dfrac{-\text{أ}}{(2\text{س}-3)\sqrt{2\text{س}-3}}$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{هـ}'\left(\text{ق}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \text{ق}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$10 = \text{هـ}'(2) \times \text{ق}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$10 = \frac{-\text{أ}}{1\times1} \times 2 \times 2 \times 1 \longleftarrow \text{أ} = \frac{-5}{2}$

(٦) $\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \dfrac{\sqrt{4\text{س}+5} \times \text{ق}'(5\text{س}-\text{س}^2) \times (5-2\text{س}) - \text{ق}(5\text{س}-\text{س}^2) \times \frac{4}{2\sqrt{4\text{س}+5}}}{4\text{س}+5}$

$= \dfrac{3 \times 7 \times 3 + \cancel{9}^{3} \times \frac{2}{\cancel{3}}}{9} = \dfrac{69}{6}$

(٧) $\text{ص} = -2\text{س}\,\text{ق}(\text{س}^2-3)$

$\dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = -2\text{س} \times \text{ق}'(\text{س}^2-3) \times 2\text{س} + \text{ق}(\text{س}^2-3) \times -2$

$= 4 \times \text{ق}'(1) \times -4 + \text{ق}(1) \times -2$ | $\text{ق}'(1) = -1+3$ ، $\text{ق}(1) = 2$

$= 4 \times 2 \times -4 + -1 \times -2$

$= -32 + 2 = -30$

(٨) $\text{ق}'(\text{جا}\,2\text{س}) \times 2\,\text{جتا}\,2\text{س} = 12\text{س}$

نعوض $\text{س} = \frac{\pi}{12}$ | $\text{جا}\,2\text{س} = \frac{1}{2}$ ، $2\text{س} = \frac{\pi}{6}$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{12}$

$\text{ق}'\left(\frac{1}{2}\right) \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi$

$\text{ق}'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(٩) $\text{ق}'(\text{جتاس}) \times -\cancel{\text{جاس}} = 4\,\text{جا}^3\text{س}\,\text{جتاس}$

$-\text{ق}'(\text{جتاس}) = 4\,\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتاس}$ | $\text{جتاس} = -\frac{1}{2}$ ، $\text{س} = \frac{2\pi}{3}$

نعوض $\text{س} = \frac{2\pi}{3}$

$\cancel{-}\,\text{ق}'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{3}{4} \times \cancel{-}\frac{1}{2}$

$\text{ق}'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

(١٠) أ) $\dfrac{\text{ق}'(\text{س}^2+3) \times 2\text{س}}{2\sqrt{\text{ق}(\text{س}^2+3)}} = \dfrac{\text{ق}'(4) \times -2}{2\sqrt{\text{ق}(4)}}$

$= \dfrac{6 \times -2}{2 \times 3} = -2$

ب) $\text{ق}'\left(\sqrt{\text{س}^2+3}\right) \times \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+3}}$

$= \text{ق}'(2) \times \frac{-1}{2} = -3 \times \frac{-1}{2}$

$= \frac{3}{2}$

تمرين [8]

١) $٦س^٢ - س^٢ صَ + ص \times -٢س = -٣ص^٢ صَ$

$٦س^٢ - س^٢ صَ - ٢ص س = -٣ص^٢ صَ$

$٦س^٢ - ٢ص س = س^٢ صَ - ٣ص^٢ صَ$

$صَ (س^٢ - ٣ص^٢) = ٦س^٢ - ٢ص س$

$$صَ = \frac{٦س^٢ - ٢ص س}{س^٢ - ٣ص^٢}$$

٢) بالضرب التبادلي :

$س ص^٢ + ص^٣ = س$

$س \times ٢ص صَ + ص^٢ \times ١ + ٣ص^٢ صَ = ١$

$٢س ص صَ + ص^٢ + ٣ص^٢ صَ = ١$

$٢س ص صَ + ٣ص^٢ صَ = ١ - ص^٢$

$صَ (٢س ص + ٣ص^٢) = ١ - ص^٢$

$$صَ = \frac{١ - ص^٢}{٢س ص + ٣ص^٢}$$

٣) $صَ = (١ - صَ)\ جتا(س - ص)$

$صَ = جتا(س - ص) - صَ\ جتا(س - ص)$

$صَ + صَ\ جتا(س - ص) = جتا(س - ص)$

$صَ \left(١ + جتا(س - ص)\right) = جتا(س - ص)$

$$صَ = \frac{جتا(س - ص)}{١ + جتا(س - ص)}$$

٤) بتربيع الطرفين :

$س + ٢ص = س^٢ ص^٤$

$١ + ٢صَ = س^٢ \times ٤ص^٣ صَ + ص^٤ \times ٢س$

عند (١،٢)

$١ + ٢صَ = ١٦صَ + ١ \times ٤$

$-٣ = ١٤صَ$

$$صَ = \frac{-٣}{١٤}$$

٥) $(جتا ص)^٢ = س ص$

$٢(جتا ص) \times -صَ\ جا ص = س \times صَ + ص$

$-٢صَ\ جتا ص\ جا ص = س صَ + ص$

$-ص = س صَ + صَ\ جا ٢ص$

$-صَ (س + جا ٢ص) = ص$

$$صَ = \frac{-ص}{س + جا ٢ص}$$

٦) $صَ = (س صَ + ص)\ جتا(س ص)$

عند $(\frac{\pi}{٢}، ١)$

$صَ = (\frac{\pi}{٢} صَ + ١)\ جتا \frac{\pi}{٢}$

$صَ = (\frac{\pi}{٢} صَ + ١) \times$ صفر

صَ = صفر

٧) $٤(س + ص)^٣ (١ + صَ) = ٤ + ٢ص صَ$

عند (١، −٣)

$٤(١ - ٣)^٣ (١ + صَ) = ٤ - ٦صَ$

$-٣٢ - ٣٢صَ = ٤ - ٦صَ$

$-٣٦ = ٢٦صَ \longrightarrow صَ = \frac{-١٨}{١٣}$

٨) $١ = صَ\ قا^٢ ص$

عندما س = ٣

ظا ص = ٣

لكن $١ + ظا^٢ ص = قا^٢ ص$

$قا^٢ ص = ١٠$

$١ = صَ \times ١٠$

$$صَ = \frac{١}{١٠}$$

٩) عندما ص = −١

$-٣س + ١ = -س - ٧ \longrightarrow -٤س = ٨ \longrightarrow س = ٢$

$-٣س صَ + ص \times ٣ + ٢ص صَ = ١$

عند (٢، −١)

$٦صَ - ٣ - ٢صَ = ١$

$٤صَ = ٤$

$\therefore صَ = ١$

تمرين (٩)

(١) $\frac{دص}{دس} = \frac{٤س}{٢\sqrt{٢س^٢+١}} = \frac{٢س}{\sqrt{٢س^٢+١}}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{\sqrt{٢س^٢+١} \times ٢ - ٢س \times \frac{٢س}{\sqrt{٢س^٢+١}}}{٢س^٢+١}$

$= \frac{٣\times٢ - ٤\times\frac{٤}{٣}}{٩} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٩} = \frac{٢}{٢٧}$

(٢) ق(س) = $(س^٢+٣س) \times -س$

ق(س) = $-س^٣ - ٣س^٢$

قَ(س) = $-٣س^٢ - ٦س$ ← قً(س) = $-٦س - ٦$

$ق^{(٣)}(س) = -٦$ ← $ق^{(٣)}(-٢) = -٦$

(٣) قَ(س) = $ن\,س^{ن-١}$ ، قً(س) = $ن(ن-١)\,س^{ن-٢}$

ق‴(س) = $ن(ن-١)(ن-٢)\,س^{ن-٣} = ٢١٠\,س^{ن-٣}$

∴ ن(ن-١)(ن-٢) = ٢١٠ = ٧ × ٦ × ٥

∴ ن = ٧

(٤) قَ(س) = $٢س^٢$ ، قً(س) = ٤س

أ) (ق × هـ)″(س) = ق(س) هـً(س) + هـ(س) قً(س)

(ق × هـ)″(١) = ق(١) هـً(١) + هـَ(١) قَ(١) + هـ(١) قً(١) + قَ(١) هـَ(١)

$= \frac{٢}{٣} \times -١ + ٢ \times ٢ + -٣ \times ٤ + ٢ \times ٢$

$= -\frac{٢}{٣} + ٤ - ١٢ + ٤ = -\frac{٢}{٣} - ٤ = \frac{-١٤}{٣}$

ب) $(هـ^٣)'(س) = ٣(هـ(س))^٢ \times هـَ(س)$

$(هـ^٣)''(١) = ٣(هـ(١))^٢\, هـً(١) + هـَ(١) \times ٦هـ(١)\, هـَ(١)$

= ٣ × ٩ × -١ + ٢ × ٦ × -٣ × ٢

= -٢٧ − ٧٢ = -٩٩

جـ) (ق ∘ هـ)′(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

(ق ∘ هـ)″(١) = قَ(هـ(١)) هـً(١) + هـَ(١) × قً(هـ(١)) × هـَ(١)

= قَ(-٣) هـً(١) + هـَ(١) قً(-٣) × هـَ(١)

= -١٢ × -١ + ٢ × ٤ × ٢

= ١٢ + ١٦ = ٢٨

(٢) $٣ق^٢(ص) \times قَ(ص) \times صَ = ٦س$

عند (-١ ، ٣)

$٣ق^٢(٣) \times قَ(٣) \times صَ = -٦$

$٣(٢)^٢ \times \frac{١}{٤} صَ = -٦$

٣صَ = -٦ ← صَ = -٢

عند (-١ ، ٣)

$ق^٣(٣) = ٨$

ق(٣) = ٢

(٣) $٣ص^٢ صَ = \frac{١}{٢٧}$ هـَ(س) قا(س) ظا(س)

عند س = ٢ ، ص = ١

$٣صَ = \frac{١}{٢٧}$ هـَ(٢) قا(٢) ظا(٢)

$٣صَ = \frac{١}{\cancel{٢٧}} \times ١٢ \times \cancel{٢٧} \times ١$

٣صَ = ١٢

∴ صَ = ٤

عند س = ٢

$ص^٣ = \frac{١}{٢٧}$ قا(٢)

$= \frac{١}{٢٧}$ قا $\frac{\pi}{٤}$

$ص^٣ = \frac{١}{\cancel{٢٧}} \times \cancel{٢٧}$

ص = ١

⑤ $\text{ص}' = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$ ، $\text{ص}'' = \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{س}^{\text{ن}-2}$

∴ $\text{س}^2 \times \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{س}^{\text{ن}-2} + 4\text{س} \times \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1} - 18\,\text{س}^{\text{ن}} = 0$

$(\text{ن}^2-\text{ن})\,\text{س}^{\text{ن}} + 4\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}} - 18\,\text{س}^{\text{ن}} = 0$

$\text{س}^{\text{ن}}(\text{ن}^2-\text{ن}+4\text{ن}-18) = 0$

$\text{س}^{\text{ن}}(\text{ن}^2+3\text{ن}-18) = 0$ ، لكن $\text{س}^{\text{ن}} \neq 0$

$(\text{ن}+6)(\text{ن}-3) = 0 \longrightarrow \text{ن} = -6 \text{ ، } 3$

⑥ $\text{ص} = \dfrac{\text{ع}^2}{\text{ع}^2+1}$ ، $\text{ع} = \sqrt{2\text{س}+1}$

∴ $\text{ص} = \dfrac{2\text{س}+1}{2\text{س}+1+1} = \dfrac{2\text{س}+1}{2\text{س}+2}$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \dfrac{(2\text{س}+2)\times 2-(2\text{س}+1)\times 2}{(2\text{س}+2)^2} = \dfrac{2}{(2\text{س}+2)^2}$

$\dfrac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \dfrac{-2\times 2(2\text{س}+2)\times 2}{(2\text{س}+2)^4} = \dfrac{-8}{(2\text{س}+2)^3}$

$\left.\dfrac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2}\right|_{\text{س}=0} = \dfrac{-8}{8} = -1$

⑦ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{جتا}\,\text{هـ}(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) \times -\text{جا}\,\text{هـ}(\text{س}) + \text{جتا}\,\text{هـ}(\text{س}) \times \text{هـ}''(\text{س})$

$\text{ق}'(1) = (\text{هـ}'(1))^2 \times -\text{جا}\,\text{هـ}(1) + \text{هـ}''(1) \times \text{جتا}\,\text{هـ}(1)$

$= \text{صفر} \times -\text{جا}\,\frac{\pi}{3} + 3 \times \text{جتا}\,\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$

⑧ $3\text{س}^2 + 3\text{ص}^2\,\text{ص}' - 4\text{س}\,\text{ص}' + \text{ص} \times -4 = 0$

$3\text{ص}^2\,\text{ص}' - 4\text{س}\,\text{ص}' = 4\text{ص} - 3\text{س}^2$

$\text{ص}' = \dfrac{4\text{ص}-3\text{س}^2}{3\text{ص}^2-4\text{س}}$

$\text{ص}'\big|_{(0,4)} = \dfrac{48-0}{16-0} = 3$

نشتق مرة أخرى :

$\text{ص}'' = \dfrac{(3\text{ص}^2-4\text{س})(4\text{ص}'-6\text{س}) - (4\text{ص}-3\text{س}^2)(6\text{ص}\,\text{ص}'-4)}{(3\text{ص}^2-4\text{س})^2}$

$\text{ص}''\big|_{(0,4)} = \dfrac{-16(12-24) + 48\times -4}{(-16)^2}$

$= \dfrac{192-192}{(-16)^2} = \text{صفر}$

⑨ $\dfrac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 8\,\text{جتان}$ ، $\dfrac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 2\,\text{قتان}$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \dfrac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \times \dfrac{d\text{ن}}{d\text{س}}$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 8\,\text{جتان} \times \dfrac{1}{2\,\text{قتان}} = 4\,\text{ظان}$

$\dfrac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = 4 \times \dfrac{d\text{ن}}{d\text{س}} \times \text{قا}^2\text{ن} = 4 \times \dfrac{1}{2\,\text{قتان}} \times \text{قا}^2\text{ن}$

$= 2 \times 2 \times 4 = 16$

⑩ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} 3\text{س}^2 & \text{، س} < 1 \\ 2\text{جـ}\,\text{س} + \text{ب} & \text{، س} > 1 \end{cases}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} 6\text{س} & \text{، س} < 1 \\ 2\text{جـ} & \text{، س} > 1 \end{cases}$

$\text{ق}'_{+}(1) = \text{ق}'_{-}(1) \longrightarrow 2\text{جـ} = 6 \longrightarrow \text{جـ} = 3$

$\text{ق}_{+}(1) = \text{ق}_{-}(1) \longrightarrow 6+\text{ب} = 3 \longrightarrow \text{ب} = -3$

هـ(س) متصل عند س = 1

$\lim_{\text{س}\to 1^+} (3\text{س}^2 - 3\text{س}) = \lim_{\text{س}\to 1^-} (\text{س}^3 - \text{أ})$

$0 = 1 - \text{أ} \longrightarrow \text{أ} = 1$

⑪ $\dfrac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 3\text{ن}^2 + 2$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \dfrac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \times \dfrac{d\text{ن}}{d\text{س}} = (3\text{ن}^2+2) \times \dfrac{1}{4\text{ن}}$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \dfrac{3\text{ن}^2+2}{4\text{ن}}$

$\dfrac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \dfrac{4\text{ن} \times 6\text{ن} - (3\text{ن}^2+2)\times 4}{16\text{ن}^2} \times \dfrac{d\text{ن}}{d\text{س}}$

$= \dfrac{24 - 5\times 4}{16} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$

⑫ $\dfrac{d\text{ص}}{d\text{ن}} = 2\,\text{جتا}2\text{ن} \times -2\,\text{جا}2\text{ن}$ ، $\dfrac{d\text{س}}{d\text{ن}} = 2\,\text{جان}\,\text{جتان}$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \dfrac{d\text{ص}}{d\text{ن}} \times \dfrac{d\text{ن}}{d\text{س}} = -4\,\text{جتا}2\text{ن}\,\cancel{\text{جا}2\text{ن}} \times \dfrac{1}{\cancel{\text{جا}2\text{ن}}}$

$\dfrac{d\text{ص}}{d\text{س}} = -4\,\text{جتا}2\text{ن}$

$\dfrac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = 8\,\text{جا}2\text{ن} \times \dfrac{d\text{ن}}{d\text{س}}$

$= 8\,\cancel{\text{جا}2\text{ن}} \times \dfrac{1}{\cancel{\text{جا}2\text{ن}}}$

$= 8$

تمرين ١٠

① $\frac{دص}{دس}$ = ظا^{٢}س قا^{٢}س + قا^{٢}س
= قا^{٢}س (ظا^{٢}س + ١)
= قا^{٢}س × قا^{٢}س = قا^{٤}س

② $\frac{دص}{دس}$ = ٤ جا^{٣}س جتاس + ٤ جتا^{٣}س × −جاس
= ٤ جاس جتاس (جا^{٢}س − جتا^{٢}س)
= ٢ × جا٢س × − جتا٢س
= −٢ جا٢س جتا٢س = − جا٤س

③ ٢(ص+١) ص' = س ص' + ص
(٢ص + ٢) ص' − س ص' = ص
ص' (٢ص + ٢ − س) = ص
ص' = $\frac{ص}{٢ص + ٢ − س}$ | لكن س = $\frac{(ص+١)^{٢}}{ص}$ ، س = $\frac{ص^{٢} + ٢ص + ١}{ص}$
ص' = $\frac{ص}{٢ص + ٢ − \frac{ص^{٢}+٢ص+١}{ص}}$
ص' = $\frac{ص}{\frac{٢ص^{٢} + ٢ص − ص^{٢} − ٢ص − ١}{ص}}$ = $\frac{ص^{٢}}{ص^{٢} − ١}$

⑤ ص' = ٢ظاس قا^{٢}س
ص'' = ٢ظاس × ٢قاس × قاس ظاس + قا^{٢}س × ٢قا^{٢}س
= ٤ظا^{٢}س قا^{٢}س + ٢قا^{٤}س
= ٢قا^{٢}س (٢ظا^{٢}س + قا^{٢}س)
= ٢(١+ظا^{٢}س) (٢ظا^{٢}س + ١ + ظا^{٢}س)
= ٢ (١ + ص) (٣ص + ١)

④ بتربيع الطرفين : س^{٢} = ١ + جتاص
٢س = −جاص ص' ← ص' = $\frac{−٢س}{جاص}$
ص' = $\frac{−٢س}{\sqrt{١ − جتا^{٢}ص}}$ = $\frac{−٢س}{\sqrt{١ − (س^{٢}−١)^{٢}}}$ | جتاص = س^{٢} − ١
ص' = $\frac{−٢س}{\sqrt{\cancel{١} − س^{٤} + ٢س^{٢} \cancel{− ١}}}$ = $\frac{−٢\cancel{س}}{\cancel{س}\sqrt{٢ − س^{٢}}}$ = $\frac{−٢}{\sqrt{٢ − س^{٢}}}$

⑥ ص' = جتاس − جاس
ص'' = −جاس − جتاس
∴ ص ص'' + ١ = (جاس + جتاس) × −(جاس + جتاس) + ١
= −(جا^{٢}س + ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س) + ١
= −(١ + جا٢س) + ١
= −١ − جا٢س + ١ = − جا٢س

⑦ ص' = قا^{٢}س × قاس ظاس = قا^{٣}س ظاس
ص'' = قا^{٣}س × قا^{٢}س + ظاس × ٣قا^{٢}س × قاس ظاس
= قا^{٥}س + ٣قا^{٣}س ظا^{٢}س
∴ ص'' + ٩ص = قا^{٥}س + ٣قا^{٣}س ظا^{٢}س + ٣قا^{٣}س
= قا^{٣}س (قا^{٢}س + ٣ظا^{٢}س + ٣)
= قا^{٣}س (قا^{٢}س + ٣قا^{٢}س) = ٤قا^{٥}س

⑧ ١ = ص' جتاص ← ص' = $\frac{١}{جتاص}$ = قاص
ص'' = ص' قاص ظاص
= قاص × قاص ظاص = قا^{٢}ص ظاص
= (١ + ظا^{٢}ص) ظاص = ظاص + ظا^{٣}ص

⑨ ٢ص ص' + ٦س − ٢ = ٠ ÷ ٢
ص ص' + ٣س − ١ = ٠
ص ص'' + ص' × ص' + ٣ = ٠
∴ ص ص'' + ص'^{٢} + ٣ = ٠

⑩ ص' = ٤ (جاس + جتاس)^{٣} (جتاس − جاس)
ص'' = ٤(جاس + جتاس)^{٣} (−جاس − جتاس)
+ (جتاس − جاس) × ١٢(جاس + جتاس)^{٢} (جتاس − جاس)
ص'' = −٤ (جاس + جتاس)^{٤} + ١٢ (جتاس − جاس)^{٢} (جتاس + جاس)^{٢}
= −٤ (جاس + جتاس)^{٤} + ١٢ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)^{٢}
∴ ص'' + ٤ص =
$\cancel{−٤(جاس + جتاس)^{٤}}$ + ١٢ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)^{٢} + $\cancel{٤ (جاس + جتاس)^{٤}}$
= ١٢ جتا^{٢}٢س

تمرين (١١)

① $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(4+\text{هـ})-\text{ق}(4)}{\text{هـ}(\text{هـ}+3)} = \text{ق}'(4) \times \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{2}{3}$

② $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}-4)(\text{س}+3)}{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(4)} = \dfrac{1}{\text{ق}'(4)} \times 7$

$= \dfrac{7}{2}$

③ $\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(4)-\text{ق}(4-2\text{هـ})}{3\text{هـ}} = \dfrac{2}{3}\,\text{ق}'(4)$

$= \dfrac{4}{3}$

④ $= \text{ق}'\left(\dfrac{8}{\text{س}}\right) \times \dfrac{-8}{\text{س}^2}$ عندما س = ٢

$= \text{ق}'(4) \times \dfrac{-8}{4}$

$= 2 \times -2 = -4$

③ $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{2}{3} \times$ مشتقة جتاس

$\text{ق}(\text{س}) = -\dfrac{2}{3}\,\text{جاس}$

$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = -\dfrac{2}{3}\,\text{جتاس}$

$\text{ق}'(\pi) = -\dfrac{2}{3} \times -1 = \dfrac{2}{3}$

④ $\text{هـ}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{ع})-\text{هـ}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{1}{3+2\text{ق}(\text{ع})} - \dfrac{1}{3+2\text{ق}(\text{س})}}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{3}+2\text{ق}(\text{س})-\cancel{3}-2\text{ق}(\text{ع})}{(\text{ع}-\text{س})(3+2\text{ق}(\text{ع}))(3+2\text{ق}(\text{س}))}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{2(\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(\text{ع}))}{\text{ع}-\text{س}} \times \dfrac{1}{(3+2\text{ق}(\text{س}))^2}$

$= -2\text{ق}'(\text{س}) \times \dfrac{1}{(3+2\text{ق}(\text{س}))^2}$

$\therefore \text{هـ}'(\text{س}) = \dfrac{-2\text{ق}'(\text{س})}{(3+2\text{ق}(\text{س}))^2}$

⑤ $\underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{ع})-\text{س}\,\text{ق}(\text{ع})}{\text{ع}-\text{س}} + \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\,\text{ق}(\text{ع})-\text{س}\,\text{ق}(\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع})\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}(\text{ق}(\text{ع})-\text{ق}(\text{س}))}{\text{ع}-\text{س}}$

$= \text{ق}(\text{س}) + \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})$

⑥ $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2\text{ق}(\text{س})-18}{\text{س}-3}$

$= \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2\text{ق}(\text{س})-9\text{ق}(\text{س})}{\text{س}-3} + \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{9\text{ق}(\text{س})-18}{\text{س}-3}$

$= \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})(\text{س}^2-9)}{\text{س}-3} + \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{9(\text{ق}(\text{س})-2)}{\text{س}-3}$

$= \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}+3)}{\cancel{\text{س}-3}} + 9\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(3)}{\text{س}-3}$

$= \text{ق}(3)\times 6 + 9 \times \text{ق}'(3)$

$= 12 + 9 = 21$

⑦ $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})\times\text{ق}(\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})(\text{ق}(\text{هـ})-1)}{\text{هـ}}$

$= \text{ق}(\text{س}) \times \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{هـ})-\text{ق}(0)}{\text{هـ}}$

$= \text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}'(0)$

$= \text{ق}(\text{س}) \times 1 = \text{ق}(\text{س})$