الماهر في الرياضيات

المستوى الأول الفرع العلمي

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

اعداد الأستاذ

ماهر ضمرة

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

نهاية إقتران عند نقطة

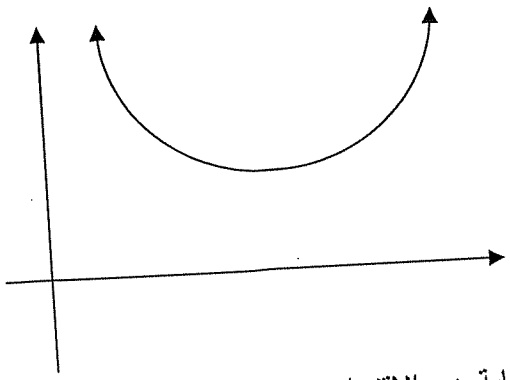
أولا :تعريف النهاية:

تعرف النهاية على أنها **الإقتراب**

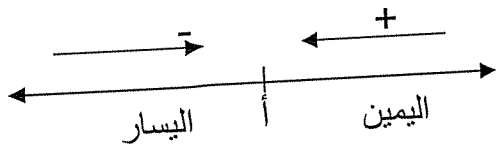
أي للاقتران ق(س) النهاية ل عندما س تقترب من العدد أ (دراسة سلوك ق(س) عندما س تقترب من أ) ويعبر عن النهاية بالرمز $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$

أي كلما اقتربت س من العدد أ اقتربت قيمة ق(س) من ل (حيث ل عدد حقيقي)

توضيح هندسي



إذاً: النهاية هي الاقتراب، والاقتراب يكون إما من اليمين أو من اليسار



تكون $\lim_{س \to أ} ق(س)$ **موجودة** إذا كانت

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س)$

"أي النهاية من اليمين = النهاية من اليسار"

و أن ل ∈ ح

- **وتكون النهاية غير موجودة** اذا كان

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) \neq \lim_{س \to أ^-} ق(س)$

أو الجواب لا ينتمي للاعداد الحقيقية

كأن يكون الجواب ∞ أو - ∞ أو جذر(زوجي) سالب

مثلا

* $\lim_{س \to 8^+} ق(س) = ٩$ ، $\lim_{س \to 8^-} ق(س) = ٩$

فإن النهاية موجودة و تساوي ٩ و تكتب

$\lim_{س \to 8} ق(س) = ٩$

* $\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \infty$ ، $\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \infty$

فإن $\lim_{س \to 1} ق(س) = \infty$ (النهاية غير موجودة)

لأن الجواب لا ينتمي للأعداد الحقيقية .

ثانيا: النهاية من الجداول

١) إذا كان ق(س) = { س + ١ ، س ≤ ٢ ؛ س + ٤ ، س > ٢

بإستخدام الجدول جد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

الحل:

س	٢	٢,٠٠٠١	٢,٠٠٠٠١	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩٩٩
ق(س)	٣	٤,٠٠٠١	٤,٠٠٠٠١	٥,٩٩٩٩	٥,٩٩٩٩٩

اليمين ← ٢ → اليسار

يتضح من الجدول أن $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٣$

وأن $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٦$

إذاً النهاية غير موجودة $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

٢) من الجدول التالي جد قيمة نهـــا ق(س)
س ← ١
إن وجدت

الحـل:

س	١٫٠٠١	١٫٠٠١	١٫٠٠٠١	١	٠٫٩٩٩٩	٠٫٩٩٩	٠٫٩٩
ق(س)	١٫٠٠١	١٫٠٠١	١٫٠٠٠١	٣	٢٫٩٩٩٩	٢٫٩٩٩	٢٫٩٩

نهـــا ق(س) = ١ ، نهـــا ق(س) = ٣
س ← ١+ ، س ← ١-

إذاً: النهاية غير موجودة

٣) اذا علمت أن ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

جد قيمة نهـــا ق(س) باستخدام طريقة الجدول
س ← ٣

الحـل: نبسط الإقتران ق(س) = $\frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

ق(س) = س + ٣ و نكون الجدول

س	٣٫٠٠١	٣٫٠٠١	٣٫٠٠٠١	٣	٢٫٩٩٩٩	٢٫٩٩٩	٢٫٩
ق(س)	٦٫٠٠١	٦٫٠٠١	٦٫٠٠٠١		٥٫٩٩٩٩	٥٫٩٩٩	٥٫٩

يتضح من الجدول أن نهـــا ق(س) = ٦
س ← ٣+

وأن نهـــا ق(س) = ٦
س ← ٣-

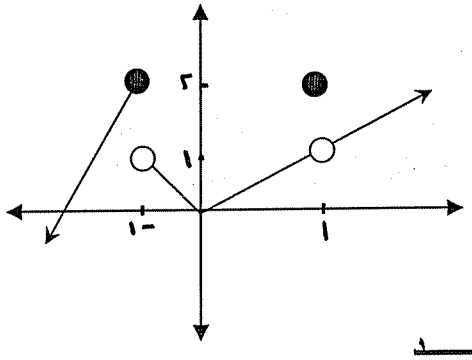
إذاً النهاية موجودة نهـــا ق(س) = ٦
س ← ٣

ثالثا : إيجاد النهاية عن طريق الرسم البياني

[١] ايجاد النهاية من الرسم مباشرة

أمثلة:

١) من الشكل التالي لمنحنى ق(س)



جـــد

نهـــا ق(س) =
س ← -١+

نهـــا ق(س) =
س ← -١-

نهـــا ق(س) =
س ← -١

نهـــا ق(س) =
س ← ١+

نهـــا ق(س) =
س ← ١-

نهـــا ق(س) =
س ← ١

نهـــا ق(س) =
س ← ٠+

نهـــا ق(س) =
س ← ٠-

نهـــا ق(س) =
س ← ٠

نهـــا ق(-٣ + س) =
س ← ٢+

ق(-١) = ق(١) =

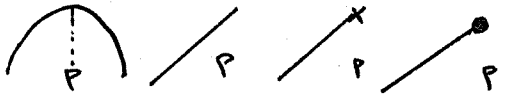
النهـــايات والإتصـــال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمـــرة

ملاحظات

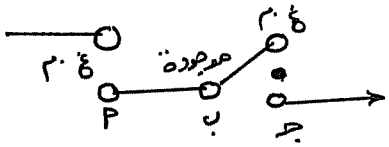
١) الحلقات لاتؤثر على النهايات فقط تأثيرها على الصور .

٢) تؤخذ الصور من الحلقات الملونة .

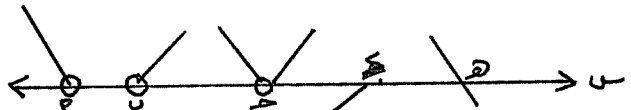


٣) اذا كانت الحلقات المقابلة للنقطة أ مفتوحة (غير ملونة) تكون الصورة غير معرفة

٤) اذا كان منحنى ق(س) غير موصول(قفزة) مقابل نقطة الاقتراب تكون النهاية العامة غير موجودة .

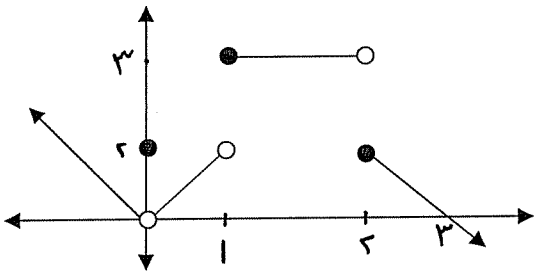


٥) عند تقاطع الاقتران مع محور السينات تكون النهاية تساوي صفر



٦) عند الفرض اذا كان معامل س سالب يقلب الاتجاه

٢) من الشكل التالي لمنحنى ق(س) جـد



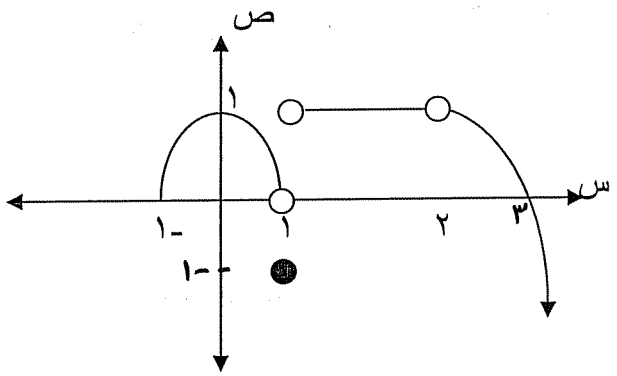
نهـــا ق(س) = نهـــا ق(س) =
س ← ١+ س ← ١-

نهـــا ق(س) ق(١) =
س ← ١

نهـــا ق(س) = نهـــا ق(س) =
س ← ٢+ س ← ٢-

نهـــا ق(-٢ - س) = ق(٢) =
س ← -١ /

تدريب صفي) من الشكل التالي لمنحنى ق(س) جـد



نهـــا ق(س) = نهـــا ق(س) =
س ← ١+ س ← ١-

نهـــا ق(س) ق(١) =
س ← ١

نهـــا ق(س) = نهـــا ق(س) =
س ← ٢+ س ← ٢-

نهـــا ق(-٢ - س) = ق(٢) =
س ← -١ /

نهـــا ق(س) = نهـــا ق(س) =
س ← ٢+ س ← ٢-

نهـــا ق(س) نهـــا ق(س) =
س ← ٢ س ← ٠

[٢] ايجاد قيم نقطة الاقتراب التي تجعل النهاية غير موجودة

☺ تكون النهاية العامة غير موجودة عند

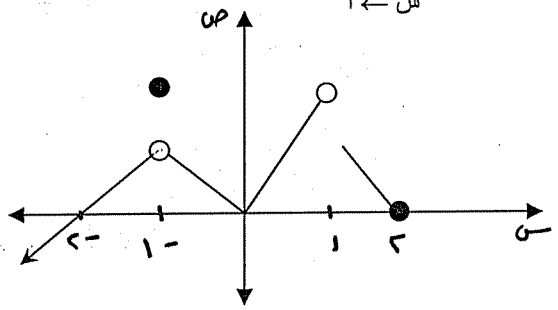
أ) أطراف الفترات

ب) نقاط الانقطاع (القفزات)

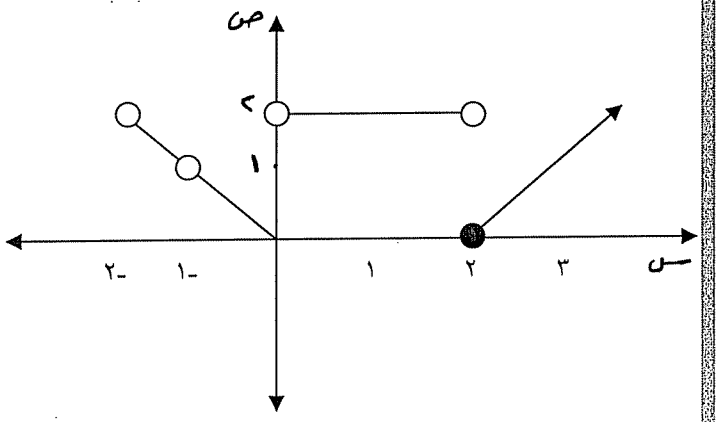
النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٣) من الشكل التالي لمنحنى هـ(س) جد قيم أ التي تنتمي للمجال
و تكون عندها نهـــــاهـ(س) غير موجودة ، ح ∈ ؟
س ← أ



تدريب صفي) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س) جد قيم أ التي تنتمي { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }
و التي يكون عندها نهـــــا ق(س) غير موجودة
س ← أ



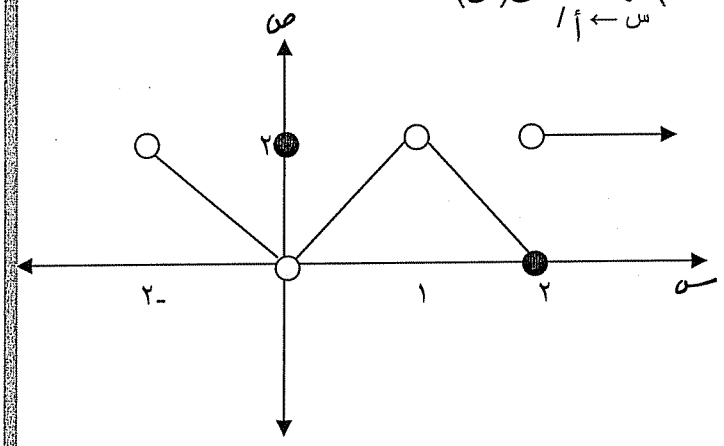
[٣] ايجاد قيم نقطة الاقتراب التي تجعل النهاية = عدد (جواب النهاية معلوم و نقطة(نقط) الاقتراب مجهولة)

٤) من الشكل التالي لمنحنى ق(س) جد قيم أ التي تجعل

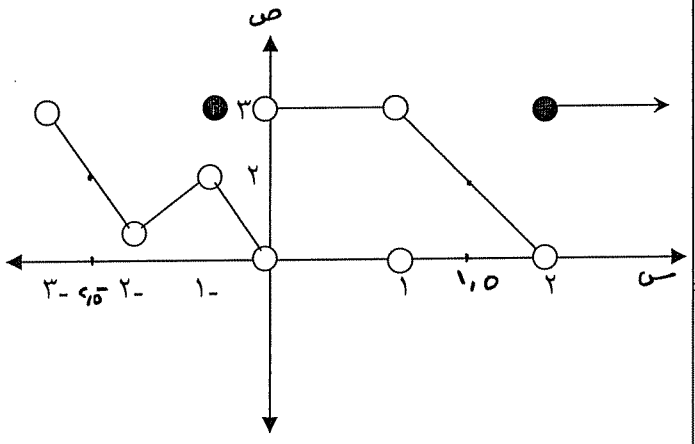
١) نهـــا ق(س) = ٢
س ← أ

٢) نهـــا ق(س) = ٢
س ← أ+

٣) نهـــا ق(س) = ٢
س ← أ-



٥) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س) جد قيم أ التي تجعل



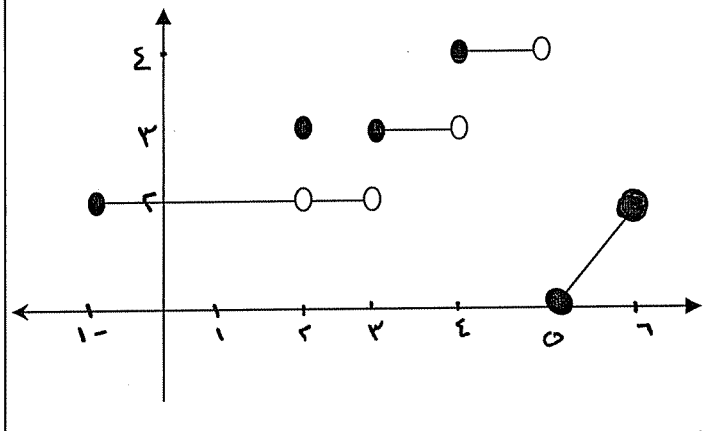
١) نهـــا ق(س) = ٣
س ← أ

٢) نهـــا ق(س) = ٣
س ← أ+

٣) نهـــا ق(٢أ – س) = ٢
س ← أ+

٤) نهـــا ق(س) = صفر
س ← أ-

٦) اعتمادا على الشكل التالي الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرّف على الفترة [-١ ، ٦] ، جد كلا من:



أ) مجموعة قيم أ حيث نهـــا ق(س) غير موجودة
س← أ

ب) مجموعة قيم أ حيث نهـــا ق(س) = ٣
س← أ+

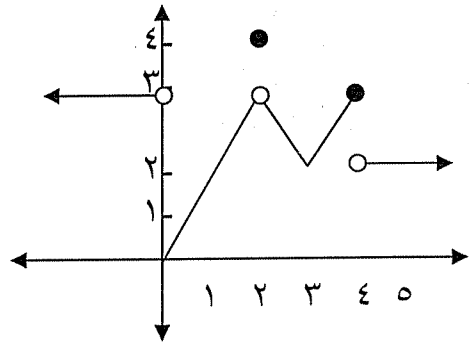
ج) مجموعة قيم أ حيث نهـــا ق(س) = ٢
س← أ/

د) مجموعة قيم أ حيث نهـــا ق(س) = صفر
س← أ/

تدريبات صفية

(٢٠٠٩)

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرَف على ح فإن مجموعة قيم أ حيث نهـــا ق(س) = ٣ هي:
س ← ا

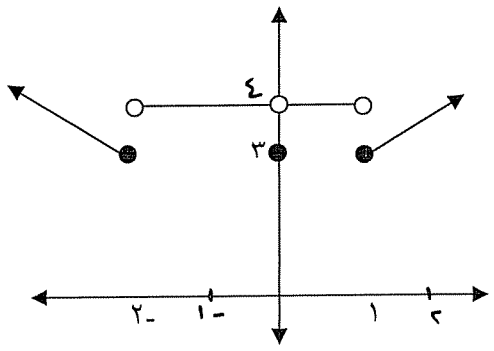


أ) (- ∞ ، ٠] ∪ {٢} ب) (- ∞ ، ٠) ∪ {٢}

ج) (- ∞، ٠) ∪ {٢ ،٤} د) (- ∞، ٠] ∪ {٢ ، ٤}

(٢٠١٠)

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرَف على ح، فإن مجموعة قيم أ بحيث تكون نهـا ق(س) = ٣ هي:
س ← أ+



أ) { ١ } ب) { ١ ، ٢ }

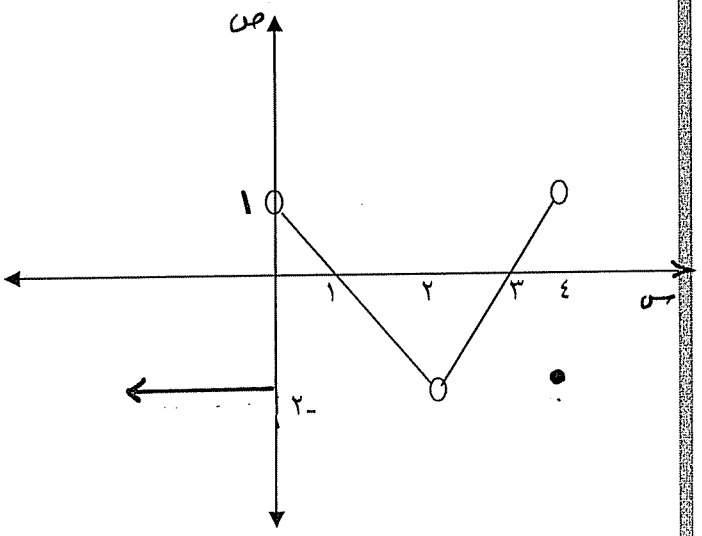
ج) { ٠ ، ١} د) { ١ ، ٠ ، ٢ }

٧) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س) جد قيم أ التي تجعل

١) نهـــا ق(س) = - ٢
س ← أ

٢) نهـــا ق(س) = - ٢
س ← أ

٣) نهـــا ق(س) = صفر
س ← أ



نظريات في النهايات

نظرية(١)

١) نهـــا جـ = جـ (أ ، جـ ∈ ح)
س ← أ

"نهاية الثابت = نفس الثابت"

٢) إذا كان ق(س) = س^{ن}

فإن نهـــا ق(س) = أ^{ن}
س ← أ

(أ عدد حقيقي ، ن عدد صحيح)

أمثلة:

١) نهـــا ٩ =
س ← ١

٢) نهـــا س^{٣} =
س ← ٣

٣) نهـــا م^{٢} =
س ← ٤

(ح∈ ر)

٤) نهـــا (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) =
س ← ٩

٥) نهـــا (س^{٢} قا^{٢}س – س^{٢} ظا^{٢} س) =
س ← -٢

نظرية(٢) إذا كان أ ، ل ، ك أعداد حقيقية و كان
$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = ك$ فإن

١) $\lim_{س \to أ} (ق(س) \pm هـ(س)) =$

$\lim_{س \to أ} ق(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \pm ك$

٢) $\lim_{س \to أ} (ق(س) \times هـ(س)) =$

$\lim_{س \to أ} ق(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل \times ك$

٣) $\lim_{س \to أ} جـ ق(س) = جـ \lim_{س \to أ} ق(س)$

٤) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$

بشرط ك ≠ صفر

٥) $\lim_{س \to أ} ق^{ن}(س) = (\lim_{س \to أ} ق(س))^{ن} = ل^{ن}$

(لكل ن عدد طبيعي)

٦) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)}$

$= \sqrt[ن]{ل}$ ← ن زوجي ⇐ ل > .
← ن فردي ⇐ ل ∈ ح

شرط التوزيع أن تكون نهاية كل اقتران على حدا موجودة

أمثلة

٦) $\lim_{س \to ١} (٣س^{٢} - ٢س + ١)$

الحل نستخدم النظريات

$= ٣ \lim_{س \to ١} س^{٢} - ٢ \lim_{س \to ١} س + \lim_{س \to ١} ١$

$= ٣(١)^{٢} - ٢(١) + ١ = ٢$

تعميم : إذا كان ق(س) كثير حدود فإن النهاية تساوي الصورة نقطة الاقتراب

$\lim_{س \to أ} ق(س) = ق (أ)$

٧) $\lim_{س \to -٢} (٤ - ٣س)(س^{٣} + ٤)$

الحل نعوض مباشرة لأنه كثير حدود

$= (٤ - ٣(-٢))((-٢)^{٣} + ٤) = ١٠ \times -٤$

$= -٤٠$

---

٨) إذا علمت أن
$\lim_{س \to ٣} (أس^{٢} + ٤س) = ٥$ جد قيمة أ

الحل : نعوض س

$أ(٣)^{٢} + ٤(٣) = ٥ \Leftarrow ٩أ + ١٢ = ٥$

$٩أ = -٧ \Leftarrow أ = -\frac{٧}{٩}$

---

٩) ق(س) كثير حدود من الدرجة الأولى حيث
$\lim_{س \to ١} اق(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ٢} اق(س) = -٥$

جد صيغة ق(س)

الحل $ق(س) = أس + ب$ $أ ، ب \in ح$

١) $\lim_{س \to ١} (أس + ب) = ٤ \Leftarrow أ + ب = ٤$ ..... ①

٢) $\lim_{س \to ٢} (أس + ب) = -٥ \Leftarrow ٢أ + ب = -٥$ .... ②

بالطرح $-أ = ٩ \Leftarrow أ = -٩$

نعوض في ① $\Leftarrow ب = ١٣$

$\therefore ق(س) = -٩س + ١٣$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

١٠) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) +١) = ٣ وأن

$\lim_{س \to ٢}$ (٢هـ(س) + س) = -٢ فجد:

أ) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + هـ (س))

ب) $\lim_{س \to ٢}$ (٣ هـ(س) – ٢ ق(س))

ج) $\lim_{س \to ٢}$ ق^{٣} (س)

د) $\lim_{س \to ٢}$ $\sqrt{ق(س)+٢}$

هـ) $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{هـ^{٢}(س)}{٣ + ق(س)}$

١٢) إذا علمت أن $\lim_{س \to -١}$ (٢ ق(س) – س) = ٥

و كان ق(-١) = ٩

هـ(س) كثير حدود يمر بالنقطة (-١ ، ٣)

فجد $\lim_{س \to -١}$ (ق^{٢} (س) +هـ(س) + ١)

١٣) إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣}$ (ق^{٣} (س) – ١) = ٧

وكان $\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) – ٢ هـ(س) + ١) = ٩

فجد $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س)

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر عمرة

١٤) إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة ن
و كان باقي قسمة ق(س) على (س – ٢) يساوي ٤ جد
قيمة أ حيث نهـــا (أق^{٢}(س) + ٢س – ٣) = ٣٣
س ← ٢

الحل ∵ باقي قسمة م(س) على (س – ٢) = ٤

∴ م(٢) = ٤ = نهـــا م(س) (لأن م(س) كثير حدود)
س ← ٢

نهـــا (أ (م(س))^{٢} + نهـــا (٢س – ٣)) = ٣٣
س ← ٢ س ← ٢

أ (م(٢))^{٢} + ١ = ٣٣ ← أ ١٦ = ٣٢

∴ أ = ٢

ملاحظة:
إذا كان ما داخل قوس الاقتران ق أو هـ أكثر من المتغير س(تركيب س) يتم فرض ما داخل القوس ص، وبغير نقطة الاقتراب
مثل نهـــا ق(٢س + ١)
س ← ١

نفرض ص = ٢س + ١
عندما س = ١ ⇐ ص = (٢×١) + ١ = ٣
نهـــا ق(ص) ولا تتغير قيمة النهاية
ص ← ٣

و لا يستفاد من الصورة الا اذا ذكر السؤال أن الاقتران متصل (ما سيتم شرحه لا حقا)

١٥) إذا علمت أن نهـــا (ق(س + ٥) + ٣) = ٦
س ← ٣

و أن ق(٨) = ١ فجد

نهـــا (ق^{٢} (س) + ٢ق(س))
س ← ٨

الحل لا يستفاد من الصورة لأنه لم يذكر أن م(س) متصل

نجزئ المعطى نهـــا م(س + ٥) = ٦ – ٣
س ← ٣

نفرض ص = س + ٥ س ← ٣
ص ← ٨

∴ نهـــا م(ص) = ٣
ص ← ٨

المطلوب (نهـــا م(س))^{٢} + ٢ نهـــا م(س) = ٩ + ٦ = ١٥
س ← ٨ س ← ٨

فكر :
إذا علمت أن نهـــا ق(س) موجودة
س ← ١

و أن نهـــا ق(س) > ٠ ، جد نهـــا ق(س)
س ← ١ س ← ١

حيث نهـــا (ق^{٢}(س) – ٢ق(س)) = ٣
س ← ١

١٦) إذا علمت أن نهـــا ق(س) / س^{٢} = ٢-
س ← ٠

فجد نهـــا ق(س) / س
س ← ٠

الحل : اذا كان تعويض المقام صفر فاذن حصل المطلوب على شكل المعطى

المطلوب نهـــا ق(س)/س × س/س
س ← ٠

= نهـــا ق(س)/س^{٢} × س = نهـــا ق(س)/س × نهـــا س
س ← ٠ س ← ٠ س ← ٠

= ٢- × ٠ = ٠

تدريب :

إذا علمت أن نهـــا ق(س) / س^{٢} – ٤ = ٥
س ← ٢

فجد نهـــا ق(س) / س – ٢
س ← ٢

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر حمدة

نهاية الجذور الزوجية

إن $\lim_{س \to P} \sqrt[ن]{ق(س)}$ حيث ن عدد زوجي

نعوض مباشرة

- داخل الجذر عدد موجب ويكون هو الجواب
- داخل الجذر عدد سالب وتكون النهاية غير موجودة
- صفر يتم ايجاد المجال ومقارنة الإقتراب بالنسبة للمجال (خط أعداد)
  - ضمن المجال (صفر)
  - خارج المجال (غير موجودة)

أمثلة:

١٧) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س + ٧}$

الحل: تعويض مباشر

$= \sqrt{٩} = ٣$

١٨) $\lim_{س \to ١^+} \sqrt{١٠ - س}$

الحل: تعويض مباشر $= \sqrt{٩} = ٣$

لا نحتاج لا يؤثر على التعويض المباشر

١٩) $\lim_{س \to ١} \sqrt{س - ٧}$

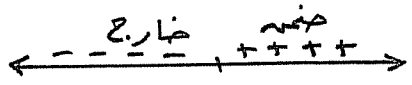
الحل: تعويض مباشر

$= \sqrt{-٦}$ النهاية غير موجودة

٢٠) $\lim_{س \to ١} \sqrt{س - ١}$

الحل: نعوض $= \sqrt{٠}$ نحتاج الى التأكد من المجال

$س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$



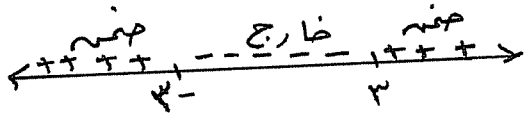
$\lim_{س \to ١^+}$ مجال $(س)$ = صفر (لأن منطقة اليمين ضمنه المجال)

$\lim_{س \to ١^-}$ مجال $(س)$ غير موجودة (خارج المجال)

$\therefore \lim_{س \to ١}$ مجال $(س)$ غير موجودة

٢١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt[٤]{س^٢ - ٩}$

الحل: نعوض $\sqrt[٤]{٠}$ نحتاج المجال



$\lim_{س \to ٣^+} \sqrt[٤]{س^٢ - ٩}$ = صفر

$\lim_{س \to ٣^-} \sqrt[٤]{س^٢ - ٩}$ غير موجودة

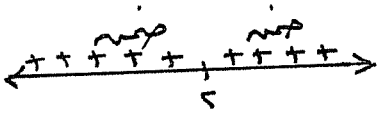
$\lim_{س \to ٣} \sqrt[٤]{س^٢ - ٩}$ غير موجودة

٢٢) $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$

الحل: نعوض $= \sqrt{٠}$ نحتاج المجال

$س^٢ - ٤س + ٤ = ٠ \leftarrow (س - ٢)^٢ = ٠$

$س = ٢$



$\lim_{س \to ٢^+} \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$ = صفر

$\therefore$ النهاية موجودة

$\lim_{س \to ٢^-} \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$ = صفر = صفر

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

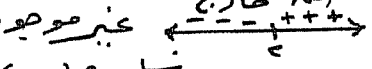
٢٣) $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{س + ٣} + ٢س}{س + ٥}$

الحل: تعويض مباشر

$= \frac{\sqrt{٤} + ٢}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٢٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س - ٢} + س^{٢}}{س + ١}$

الحل: $\frac{\sqrt{٠} + ٤}{٣}$ نحتاج للمجال

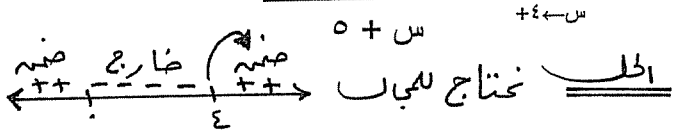


غير موجودة لأن

$\lim_{س \to ٢^{+}} ص(س)$ غير موجودة

٢٥) $\lim_{س \to ٤^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٤س} + س}{س + ٥}$

الحل: نحتاج للمجال



$\lim_{س \to ٤^{+}} \frac{\sqrt{٠} + ٤}{٩} = \frac{٤}{٩}$ طالما موجودة من اليمين

ملاحظة:

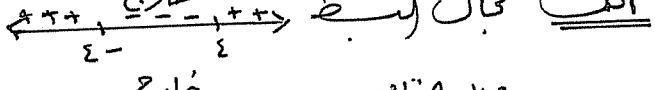
$\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ بشرط $أ \geq ٠ ، ب > ٠$

لذا إذا كان الجذر على البسط كامل و على المقام كامل نفحص مجال كلا البسط و المقام

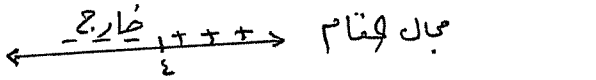
- كلاهما ضمن المجال: نسحب الجذر و نحلل و نعوض
- إذا كان أحدهما أو كلاهما خارج المجال فإن النهاية غير موجودة

٢٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}} = \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$

الحل: مجال البسط



مجال المقام



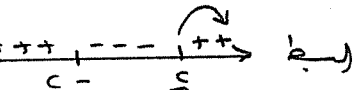
نلاحظ أن كلا البسط والمقام من يسار ٤ تئول لما لا نهاية غير موجودة

إذاً $\lim_{س \to ٤^{-}} ص(س)$ غير موجودة

٢٧) $\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٤}}{\sqrt{س - ٢}} = \frac{\sqrt{٠}}{\sqrt{٠}}$

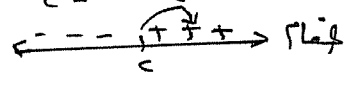
الحل: نحتاج لبحث المجال لكلا البسط والمقام

البسط



كلا البسط والمقام

المقام



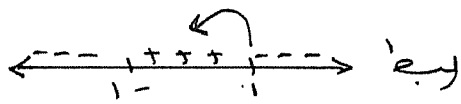
يعرف عما يمينه ٢

$\therefore \lim_{س \to ٢^{+}} \sqrt{\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}} = \sqrt{٤} = ٢$

٢٨) $\lim_{س \to -١} \frac{\sqrt{١ - س^{٢}}}{\sqrt{-س^{٢} - ٢س + ٣}}$

الحل: نحتاج لبحث المجال لكلا البسط والمقام

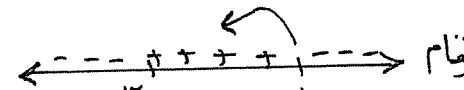
البسط



أصفار المقام $-(س^{٢} + ٢س - ٣) = ٠$

$-(س + ٣)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = ١ ، -٣$

المقام



نلاحظ أن كلا البسط والمقام يعرف عما يسار ١

$\therefore \lim_{س \to ١^{-}} \sqrt{\frac{(١ - س)(١ + س)}{-(س + ٣)(س - ١)}} = \sqrt{\frac{٢}{٤}} = \frac{١}{٢}$

٢٩) نهـا $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

الحل

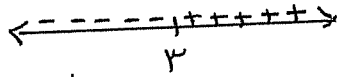
$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{(س-٣)} = ٦$$

لأن المقدار محصور حول (٣)

٣٠) جد قيم أ التي تجعل نهـا $\lim_{س \to أ} ٢س - ٦$ موجودة ثم جد قيم أ التي تجعل النهاية غير موجودة

الحل

$٢س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ٣$



تكون النهاية موجودة إذا كان أ لا تنتمي لمجال الاقتران ضمنياً

$أ \in (-\infty, ٣)$ ∪ $(٣, \infty)$ "نترة مفتوحة لأن ٣ من اليسار وغير موجودة"

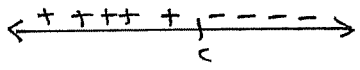
تكون النهاية غير موجودة ضمنياً فترة

$[٣, \infty -)$

٣١) جد قيم أ التي تجعل نهـا $\lim_{س \to أ} ٨ - ٤س$ موجودة

الحل

$٨ - ٤س = ٠ \leftarrow س = ٢$



$أ \in (-\infty, ٢]$

مغلقة لأن $\lim_{س \to ٢} ٨ - ٤س = ٠$

تدريب) إذا كانت نهـا $\lim_{س \to أ} س^٢ - ٤$ موجودة جد قيم أ

نهاية الاقتران المتشعب

كما تم توضيح النهاية من اليمين واليسار عن طريق الرسم فإن

نهـا ق(س) نعوض في قاعدة س > أ
$_{س \to أ^+}$

نهـا ق(س) نعوض في قاعدة س < أ
$_{س \to أ^-}$

وتكون النهاية موجودة إذا كانت
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

٣٢) إذا كان ق(س) =
- $٢ + س^٢$; $١ \leq س < ٢$
- $٨ - س$; $٢ \leq س < ٤$
- ٨ ; $٤ \leq س < ١٠$

فجد

نهـا ق(س) $_{س \to ٢^+}$ = نهـا ق(س) $_{س \to ٢^-}$

نهـا ق(س) $_{س \to ٢}$ =

نهـا ق(س) $_{س \to ٤^+}$ = نهـا ق(س) $_{س \to ٤^-}$

نهـا ق(س) $_{س \to ٤}$ =

نهـا ق(س) $_{س \to ١٠^+}$ = نهـا ق(س) $_{س \to ١٠^-}$

نهـا ق(س) $_{س \to ١٠}$ =

نهـا ق(س) $_{س \to ٣^+}$ = نهـا ق(س) $_{س \to ٣^-}$

نهـا ق(س) $_{س \to ٣}$ =

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٣٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 1}{س - 1} & س \neq 1 \\ 15 & س = 1 \end{cases}$

فجد نهـــا ق(س)
س ← ١+

$= \lim_{س \to 1^+} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1} = 2$

نهـــا ق(س) = نفس اليمين = ٢
س ← ١-

نهـــا ق(س) = $\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 1}{س - 1} = \frac{3}{1} = 3$
س ← ٢

ق(١) = ١٥

ق(٣) = $\frac{8}{2} = 4$

٣٤) ق(س) = $\begin{cases} أس^2 + 3س & ، س \in ص \\ أ س - س^2 & ، س \notin ص \end{cases}$

و كان نهـــاق(س) = ٢ ، جد ق(١)
س ← ٢

٣٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{س}}{س+1} & س < 1 \\ \frac{3}{س+2} & س \geq 1 \end{cases}$

وكان هـ(س) = ق(س) − $\frac{1}{س+1}$

فجد نهـــا هـ(س)
س ← ١

الحل نجد هـ(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{س}-1}{س+1} & ، س < 1 \\ \frac{2}{س+2} - \frac{1}{س+1} & ، س \geq 1 \end{cases}$

$\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = \lim_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{س}-1}{س+1} = \frac{0}{2} = 0$

$\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = \lim_{س \to 1^-} \left(\frac{2}{س+2} - \frac{1}{س+1}\right) = 0$

$\therefore \lim_{س \to 1} هـ(س) =$ صفر

٣٦) ق(س) = $\begin{cases} \left(\frac{1}{س} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{س+2}\right) & 1 \leq س < 2 \\ \frac{س - 2}{8 + 2س^2} & 2 \leq س < 6 \end{cases}$

فجد
نهـــا ق(٢س − ٤)
س ← ٣+

الحل نفرض ص = س − ٤ ، س ← ٣+ ، ص ← ٢+

$\lim_{ص \to 2^+} هـ(ص) = \lim_{ص \to 2^+} \frac{ص - 2}{8 + 2ص^2} =$ صفر

نهـــا ق(٣ − س)
س ← ١+

الحل ص = ٣ − س ، س ← ١+ ، ص ← ٢−

$\lim_{ص \to 2^-} هـ(ص) = \lim_{ص \to 2^-} \left(\frac{1}{ص}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{ص+2}\right)$

$= 0 \times \frac{1}{4} =$ صفر

٣٦) إذا كان ق(س) = { ٢س + ١٠ ، س ≤ أ ; س٢ − س ، س > أ }

جد قيمة أ حيث نهـا ق(س) موجودة أ ∈ ح+
س←أ

الحل ∵ نهـا موجودة عندما س = ٢
∴ نهـا+ ق(س) = نهـا− ق(س)
٢← ٢←

نهـا+ (٢س + ١٠) = نهـا− (س٢ − س)
٢← ٢←

٢م + ١٠ = م٢ − م ⇐ م٢ − ٣م − ١٠ = ٠

(م − ٥)(م + ٢) = ٠

∴ م = ٥ ، م = −٢ مرفوض ∵ م ∈ ح+

∴ م = ٥

٣٧) إذا كان ق(س) = { أ س٣ + ٢ب س − ١ ، س ≤ ٢ ; ٣ب س٢ − ٧ ، س > ٢ }

جد قيمة أ ، ب حيث نهـا ق(س) = ١٧
س←٢

الحل نهـا+ ق(س) = نهـا− ق(س) = ١٧
٢← ٢←

١) نهـا− ق(س) = نهـا (٣ب س٢ − ٧) = ١٧
٢← ٢←

١٢ب = ٢٤ ⟵ ب = ٢

٢) نهـا+ ق(س) = نهـا (م س٣ + ٤ س − ١) = ١٧
٢← ٢←

٨م + ٧ = ١٧ ⟵ ٨م = ١٠

م = ٥/٤

نهاية تحتوي على مطلق

لإعادة تعريف المطلق بطريقة سهلة
نعوض الاقتراب داخل المطلق
أ) إذا كان ناتج تعويض الاقتراب في المطلق موجب، نلغي المطلق ونكمل (القاعدة الموجبة)

ب) إذا ناتج التعويض في المطلق سالب
نضرب الاقتران داخل المطلق بسالب و نلغي المطلق (القاعدة السالبة)

ج) إذا كان ناتج التعويض في المطلق صفر، نعيد التعريف ونأخذ النهاية من اليمين ومن اليسار

ملاحظة: الاتجاه لا يؤثر الا على مطلق الصفر

٣٨) جد نهـا | ٥ − ٢س |
س←٢

الحل نهـا (٥ − ٢س) = ١
٢←

٣٩) جد نهـا | س٢ − ٤ |
س←٢/

الحل

	−	+
٢−		٢

= نهـا (٤ − س٢) = صفر
٢←

٤٠) نهـا | ٥ − س | − ١ / | س٢ − ٢٥ | − ٩
س←٦

الحل نهـا (٥ − س − ١) / (س٢ − ٢٥ − ٩) = ٠/٢ = صفر
٦←

٤١) نهـا س − |س٢| / س
س←٠

الحل من خصائص المطلق

	−	+
٠		

نهـا (س − (−س)) / س = صفر
٠←

نهـا (س − س) / س = ٠/٠ ⟵ نهـا (س − (−س)) / س
٠← ٠←

نهـا (س − س) / س = ٢
٠←

غير موجودة

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٤٢) نهـا $\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س - ١}$ ، $س \to ١$

الحل من خصائص الطلعه

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س-١)^٢}{س-١} = \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{|س-١|}{س-١}$$

$$\text{نهـا}^{+}_{س \to ١} \frac{س-١}{س-١} = ١$$

$س - ١ \geq ٠$ عندما $س \geq ١$

$$\text{نهـا}^{-}_{س \to ١} \frac{١-س}{س-١} = -١$$

$\therefore$ نهـا$_{س \to ١}$ $\frac{س^٢ - ٢س + ١}{س-١}$ غير موجودة

٤٣) ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{٢ + س} & |س| \geq ١ \\ \sqrt{س^٢ - ٢س + ١} & |س| < ١ \end{cases}$

جد نهـا$_{س \to ١}$ ق(س) ، نهـا$_{س \to -١}$ ق(س)

الحل نلاحظ $\because$ خصائص للطلعه

$$ه(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ١}{٢ + س} & ، -١ \geq س \geq ١ \\ |س - ١| & ، س > ١ ، س < -١ \end{cases}$$

نهـا$^{+}_{س \to ١}$ $|س - ١|$ = نهـا$^{+}_{س \to ١}$ $(س - ١)$ = صفر

نهـا$^{-}_{س \to ١}$ $\frac{س^٢ - ١}{٢ + س}$ = صفر

$\therefore$ نهـا$_{س \to ١}$ ه(س) = صفر

كذلك نهـا$^{+}_{س \to -١}$ $\frac{س^٢ - ١}{٢ + س}$ = صفر

نهـا$^{-}_{س \to -١}$ $|س - ١|$ = نهـا$^{-}_{س \to -١}$ $(١ - س)$ = ٢

$\therefore$ نهـا$_{س \to -١}$ ه(س) غير موجودة

٤٤) جد نهـا$_{س \to ٢}$ $|٤ - س^٢|$

الحل ٧٠ نحتاج اختبار إشارة كل خط الاعداد موجب من الطلعه

$\therefore$ نهـا$_{س \to ٢}$ $\sqrt{٤ - س^٤}$ = صفر

٤٥) ق(س) = $\begin{cases} \frac{-٤ - ٢س}{|س + ٢|} & س > -٢ \\ أ س^٢ - ٣س & س < -٢ \end{cases}$

وكانت نهـا$_{س \to -٢}$ ق(س) موجودة جد قيمة أ

الحل $\because$ النهايه موجودة

$\therefore$ نهـا$^{+}_{س \to -٢}$ ه(س) = نهـا$^{-}_{س \to -٢}$ ه(س)

نهـا$^{+}_{س \to -٢}$ $\frac{-٤ - ٢س}{|س + ٢|}$ = نهـا$^{-}_{س \to -٢}$ $(أ س^٢ - ٣س)$

$\Leftarrow$ نهـا$^{+}_{س \to -٢}$ $\frac{-٢(س + ٢)}{(س + ٢)}$ = ٤أ + ٦

٤أ + ٦ = -٢ $\Leftarrow$ ٤أ = -٨

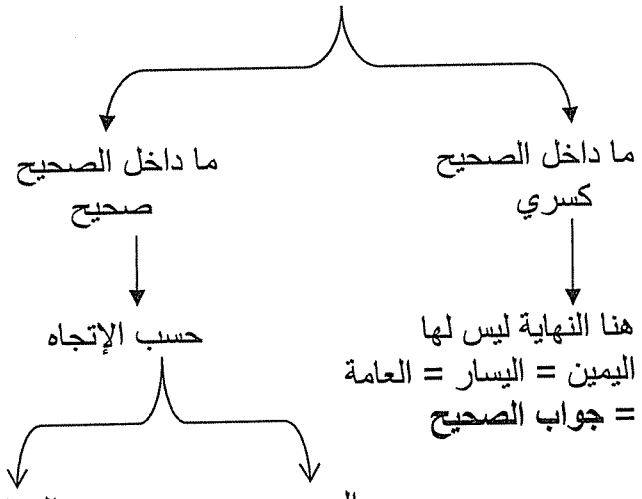
أ = -٢

نهاية تحوى اقتران أكبر عدد صحيح

إما نعيد التعريف أو نستخدم القاعدة التالية

لاعادة تعريف الصحيح

نعوض داخل الصحيح



ملاحظة : يجب مراعاة إشارة معامل س

إذا كانت إشارة معامل س (+) نحافظ على الاتجاه

إذا كانت إشارة معامل س (-) نعكس الإتجاه

أمثلة

٤٦) جد نهـا [س]
س ← ١

الحل : نهـا [س] = [١]$^{+}$ = ١
س ← ١

نهـا [س] = حمف
س ← ١

∴ نهـا [س] غير موجودة
س ← ١

٤٧) جد نهـا [$\frac{١}{٢}$ س − ٣]
س ← ١

الحل : نهـا [$\frac{١}{٢}$ س − ٣] = نهـا [$\frac{١}{٢}$ س − ٣]
س ← ١$^{+}$ س ← ١

= نهـا [$\frac{١}{٢}$ س − ٣] = − ٣
س ← ١

٤٨) نهـا [٢س]
س ← −٣

الحل

نهـا [٢س] = [−٦]$^{-}$ = ٥
س ← −٣

٤٩) نهـا [١ − ٣س]
س ← +٦

٥٠) نهـا $\left[\frac{-س}{٤}\right]$
س ← −٨

٥١) نهـا س^{٢} [س − ١]
س ← ١

الحل

نهـا س^{٢} [٠]$^{+}$ = حمف
س ← ١$^{+}$

نهـا س^{٢} [٠] = نهـا (س^{٢}) = − ١
س ← ١$^{-}$ س ← ١

نهـا س^{٢} [س − ١] غير موجودة
س ← ١

٥٢) نهـا (س − ٢)^{٣} [س]
س ← ٢

٥٣) $\lim_{س \to ٣} |س - ٣| [س - ٣]$

الحل

$\lim^{+}_{س \to ٣} |س - ٣| [س - ٣]$

$= \lim^{+}_{س \to ٣} (س - ٣)(٠) =$ صفر

$\lim^{-}_{س \to ٣} |س - ٣| [س - ٣] = \lim^{-}_{س \to ٣} (٣ - س)(-١)$

$=$ صفر $\Leftarrow \lim_{س \to ٣} |س - ٣| [س - ٣] =$ صفر

٥٤) $\lim_{س \to ٢} ([س - ١] - [س + ٣])$

الحل : من خصائص الصحيح

$\lim_{س \to ٢} ([س] - ١ - [س] - ٣) = -٤$

٥٥) $\lim_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س])$

الحل :

$\lim^{+}_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س]) = [٦] + [٣] = ٨$

$\lim^{-}_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س]) = [٦] + [٣] = ٨$

$\therefore \lim_{س \to ١} ([س + ٥] + [٤ - س]) = ٨$

كتاب

٥٦)

$$ق(س) = \begin{cases} |س - ٢| & ، س \leq ٢ \\ [٦ - س] & ، س > ٢ \end{cases}$$

فجد $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

الحل : $\lim^{+}_{س \to ٢} |س - ٢| = \lim^{+}_{س \to ٢} (س - ٢) =$ صفر

$\lim^{-}_{س \to ٢} [٦ - س] = [٤] = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجودة

٥٧) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} [س + أ] & س \leq ٢ \\ ٥ - [س] & س > ٢ \end{cases}$$

وأن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة جد قيمة أ حيث أ ∈ ص

الحل : $\because$ النهاية موجودة

$\therefore \lim^{+}_{س \to ٢} [س + ٢] = \lim^{-}_{س \to ٢} ٥ - [س]$

$\lim^{-}_{س \to ٢} [س] + ٢ = \lim^{-}_{س \to ٢} ٥ - [س]$ (خصائص الصحيح)

$[٢] + ٢ = ٥ - [٢]$

$٢ + ٢ = ٥ - ١ \Leftarrow ٢ = ٢$

٥٨) إذا علمت ان

$$ق(س) = \begin{cases} [س - ٩] & س \leq أ \\ ٧ - [س] & س > أ \end{cases}$$

وأن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة جد قيمة أ حيث أ ∉ ص

كتاب

٥٩) ما مجموعة قيم جـ التي تجعل
١) نهـا [٢ - س] = - ١
س ← جـ

٢) نهـا [٢ - س] غير موجودة
س ← جـ

الحل

١) نهـا [٢ - س] = -١ ← [٢ - جـ] = -١
س ← جـ

-١ ≤ ٢ - جـ < ٠ (خصائص الصحيح)

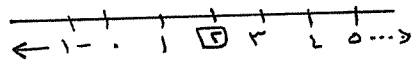
كلمة تحذف الأداة لأن السؤال
الهام عند الأطراف غير موجودة

(-٢) للأطراف ← -٣ < -جـ < -٢

(-١) للأطراف ← ٣ < جـ < ٣

∴ جـ ∈ (٣ ، ٣)

٢) غير موجودة عند نقاط التحول



جـ ∈ ص { الأعداد الصحيحة }

ورقة عمل (١)

١) إذا علمت أن نهـا (٢ق(س) + ١) = ١١
س ← ١

وكان ق(١) = ٧ ،
جد نهـا (٥س ق(س) + ق٢(س) - ١)
س ← ١

٢) إذا علمت أن نهـا ∛(هـ(س)) = ٢ وكان
س ← ٢

نهـا (٢هـ(س) - ٣ق(س) + ٥) = ٢٤
س ← ٢

جد نهـا ق٢ (س) .
س ← ٢

٣) إذا علمت أن نهـا ق(س) / س = ٣
س ← ١

جد نهـا ق٢(س) / س٢
س ← ١

٤) إذا علمت أن نهـا ق(س) / (س٣ - ٢٧) = ٢
س ← ٣

جد نهـا ق(س) / (س٢ - ٩)
س ← ٣

٥) إن قيمة نهـا (√(س - ١) + ٣) / (س + ٥)
س ← ١

٦) جد نهـا (√(س٢ - ٥ س + ٦)) / (√(س٢ - ٩))
س ← ٣+

٧) جد قيم أ التي تجعل نهـا √(س٢ - ١٦)
س ← أ
موجودة.

٨) جد قيم أ التي تجعل نهـا √(س٢ - ٤)
س ← أ+
غير موجودة

٩) نهـا [أ س + ١] = ٧ ، جد قيمة أ .
س ← ٢+

١٠) نهـا √(| س |)
س ← ٠

١١) نهـا [س + أ] = ٥ جد قيمة (قيم) أ
س ← -١/

١٢) إذا علمت أن
نهـا [٥ - ٢س] = نهـا - ١ / |س + ١|
س ← ٣/ ، س ← ١

جد قيمة (قيم) أ

(٢٠٠٥)

١٣)

$$ق(س) = \begin{cases} |٢س + ١| & س > ٣ \\ [١٠ - ٢س] & س \leq ٣ \end{cases}$$

فإن نهـا ق(س)
س←٣

أ) -٥ ب) ٧ جـ) ٤ د) ٦

١٤) إذا علمت أن نهـا (٢ ق(س) + ٣س) = ١٠
س←٢

وأن نهـا $\sqrt[٣]{هـ(س) - ١}$ = ١ جد
س←٢

نهـا $\left[\frac{ق(س)}{هـ(س)} + ق^{٢}(س)\right]$
س←٢

١٥) إذا علمت أن نهـا (ل(٢س – ٦) + ٣س) = ٨
س←٢

فجد قيمة أ حيث نهـا (ل^{٢}(س) + (أ س)^{٣}) = ٦٨
س←-٢

١٦) إذا علمت أن نهـا (ق(٢س + ٧) – ٣س) = ١
س←-١

وكان ق(٥) = ٢، فجد نهـا (ق^{٣}(س) + ٢س)
س←٥

تجيز

١٧) إذا علمت أن

نهـا (٢ق(س) + س) = نهـا (٢هـ (س) – ٣)
س←٣ س←٣

فجـد:

أ) نهـا (ق^{٢}(س)+هـ^{٢}(س)-٢ق(س)هـ(س)+٧س)
س←٣

ب) نهـا س^{٢} (ق(س) – هـ(س))^{٣}
س←٣

١٨) إذا كانت نهـا ق(س) موجودة
س←٣

وأن نهـا ق(س) > ٣ فجد قيمة نهـا ق(س)
س←٣ س←٣

حيث نهـا ق^{٢}(س) = نهـا ٩ق(س) - ١٤
س←٣ س←٣

١٩) إذا علمت أن ق(س) اقتران كثير الحدود من الدرجة الأولى حيث أن

نهـا ق(س) = ١ ، نهـا ق(س) = ١٦
س←-٢ س←٣

جد قاعدة الاقتران ق(س)

٢٠) إذا علمت أن

نهـا (٢ – أ س) (٣س^{٢} + ٢) = ٢٨ ، جد قيمة أ
س←٢

٢١) جد قيم أ فيما يلي التي تجعل النهاية موجودة

أ) نهـا $\sqrt[٣]{\frac{س - ١}{س + ٥}}$
س←أ

ب) نهـا $\sqrt{(س - ١)(٢ - س)}$
س←أ

ج) نهـا $\frac{س}{جاس - ٢}$
س←π

د) نهـا $\sqrt[٤]{\frac{٩ - س^{٢}}{س^{٢} - ٤}}$
س←أ

٢٢) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} [٦ - ٢س] & س \leq ١ \\ |س - ١| & س > ١ \end{cases}$$

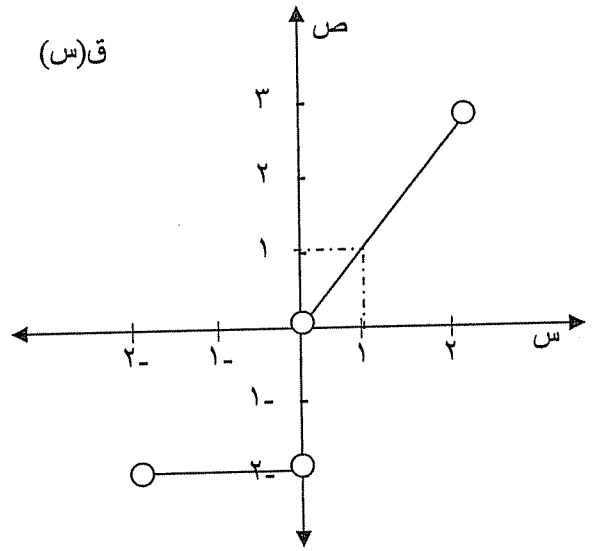
جد نهـا ق(س)
س←١

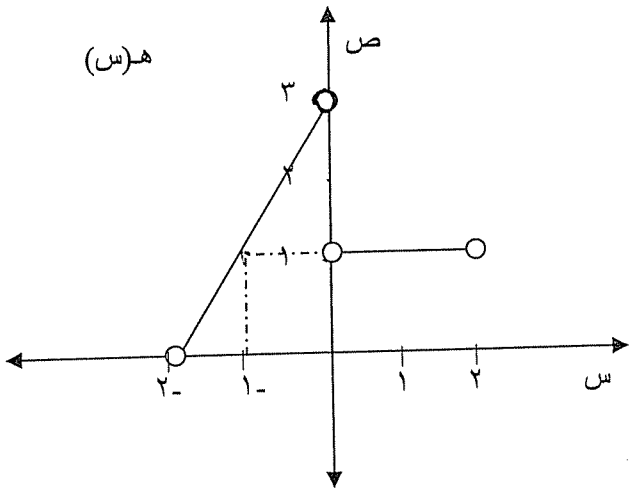
٢٣) ق(س) = $\begin{cases} أ\,س^{٢} + [٥+ س] & س > ١ \\ [٦ - ٢س] & س \leq ١ \end{cases}$

جد أ حيث $\lim_{س \to ١}$ ق(س) موجودة

تمرين

٢٤) معتمداً على الأشكال التالية التي تمثل ق(س) ، هـ(س) أجب عن الفروع (أ – هـ)





أ) نهـــا $_{س \to ٠+}$ (٢ق(س) + ٣هـ(س) + س^{٢})

ب) نهـــا $_{س \to ٢}$ (٣ق(س) - ٢هـ(س) + ٣س)

ج) جد قيم أ حيث نهـــا $_{س \to أ+}$ هـ(س) = ١

د) في القيم أ ∈ { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢}
أياً منها تحقق نهـــا $_{س \to أ}$ (ق(س) + هـ(س)) موجودة

هـ) نهـــا $_{س \to ٢+}$ (ق(٣ - س) + هـ(٢- س) + س^{٢})

٢٥) إذا كان ق ، هـ كثيرا حدود وكان باقي قسمة ق على(س – ٣)يساوي ٤ بينما (س – ٣) أحد عوامل هـ(س) وكان

نهـــا $_{س \to ٣+}$ (ق^{٢}(س) + هـ^{٣}(س) + أ س^{٢}) = ٢٥

جد أ .

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

نهايات اقترانات كسرية

$$\text{نهـا}_{س \to ا} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$$

بالتعويض المباشر ينتج

- $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ غير موجود
- $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}} = \text{الناتج}$
- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = يتم اتباع أحد الأساليب التالية

أولاً: التحليل
- تربيعي
- تكعيبي
- قسمة تركيبية
- عامل مشترك

ثانياً: توحيد المقامات

ثالثاً: الضرب بالمرافق
- تربيعي
- تكعيبي

رابعاً: الاستبدال

ملاحظة:
في النهايات النسبية نبدأ دائماً بالتعويض المباشر فإذا نتج
صفر نتبع أحد الأساليب السابقة
صفر

أولاً: التحليل

- $أ^2 - ب^2 = (أ - ب)(أ + ب)$
- $أ^3 - ب^3 = (أ - ب)(أ^2 + أ ب + ب^2)$
- $أ^3 + ب^3 = (أ + ب)(أ^2 - أ ب + ب^2)$

أمثلة: جد النهايات التالية:

١) $\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س - 3} = \frac{0}{0}$

الحل: $\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+3)}{س-3}$

$= \text{نهـا}_{س \to 3} (س + 3) = 6$

٢) $\text{نهـا}_{س \to -1} \frac{س^3 + 1}{س + 1} = \frac{0}{0}$

الحل

$\text{نهـا}_{س \to -1} \frac{(س+1)(س^2-س+1)}{س+1} = 3$

٣) $\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^2 + 4س - 12}{2 - س} = \frac{0}{0}$

الحل

$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س-2)(س+6)}{-(س-2)} = -8$

٤) $\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{|س^2 - 6س + 9|}{س^2 - 9} = \frac{0}{0}$

الحل: من خصائص القيمة المطلقة

$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{|(س-3)^2|}{(س-3)(س+3)}$

$= \text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س-3)^2}{(س-3)(س+3)} = \frac{0}{6} = \text{صفر}$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٥) نهـا $\frac{|س^2 + ٦س + ٥|}{|س^2 - ٣س - ٤|}$ = ÷
س ← -١

الحل: من خصائص المطلقة

$= |\frac{(س+١)(س+٥)}{(س+١)(س-٤)}| = |\frac{٤}{٥}| = \frac{٤}{٥}$

---

٦) نهـا $\frac{٨س^3 - ٦٤}{٤ - س^2}$ = ÷
س ← ٢

الحل $= \frac{٨(س^3 - ٨)}{٤ - س^2}$
س ← ٢

$= \frac{٨(س-٢)(س^2 + ٢س + ٤)}{(٢-س)(٢+س)}$
س ← ٢

$= -٨ \times \frac{١٢}{٤} = -٢٤$

---

٧) نهـا $\frac{(س^2 + س - ٢)^٥}{(س^2 - ٤)^٥}$ = ÷
س ← -٢

الحل

$= \left(\frac{س^2 + س - ٢}{س^2 - ٤}\right)^٥$
س ← -٢

$= \left(\frac{(س+٢)(س-١)}{(س-٢)(س+٢)}\right)^٥ = \left(\frac{-٣}{-٤}\right)^٥$
س ← -٢

$= \left(\frac{٣}{٤}\right)^٥$

---

٨) نهـا $\frac{(س^2 - ٩)^٨}{(س^2 - ٦س + ٩)^٤}$ = ÷
س ← ٣

الحل

$= \frac{((س-٣)(س+٣))^٨}{((س-٣)^2)^٤}$
س ← ٣

$= \frac{(س-٣)^٨ (س+٣)^٨}{(س-٣)^٨} = (٦)^٨$
س ← ٣

كتاب

٩) نهـا $\frac{٤٩^س - ٧^س}{١ - ٧^س}$ = ÷
س ← ٠

الحل $= \frac{٧^{٢س} - ٧^س}{١ - ٧^س}$ $= \frac{٧^س(٧^س - ١)}{١ - ٧^س}$
س ← ٠ س ← ٠

$= -٧^٠ = -١$

---

١٠) نهـا $\frac{هـ^{٢س} - ١}{هـ^س - ١}$ = ÷
س ← ٠

الحل $= \frac{(هـ^س)^٢ - ١}{هـ^س - ١}$
س ← ٠

$= \frac{(هـ^س - ١)(هـ^س + ١)}{هـ^س - ١}$
س ← ٠

$= هـ^٠ + ١$

$= ٢$

---

١١) نهـا $\frac{س^2 - ٢س - ٨}{\frac{١}{٤}س - ١}$ = ÷
س ← ٤

ملاحظة: $\frac{أ}{ب}س + جـ = \frac{أ}{ب}(س + جـ \times \frac{ب}{أ})$

مثلاً $\frac{٢}{٣}س + ٦ = \frac{٢}{٣}(س + ٦ \times \frac{٣}{٢}) = \frac{٢}{٣}(س+٩)$

الحل $= \frac{(س-٤)(س+٢)}{\frac{١}{٤}(س-٤)}$
س ← ٤

$= \frac{٦}{\frac{١}{٤}} = ٢٤$

---

١٢) نهـا $\frac{س^2 - |٢س|}{س - ٢}$ = ÷
س ← ٢

الحل $= \frac{س^2 - ٢س}{س - ٢}$
س ← ٢

$= \frac{س(س-٢)}{س-٢} = ٢$
س ← ٢

---

* انتبه قاعدة التكامل للنوني *

$س^ن - ص^ن$ ، $س^ن + ص^ن$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

١٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٥ - ٤س^٣ + ٢س^٢ + ١}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

الحل باستخدام نظرية العوامل والقسمة التركيبية ∴ أحد العوامل $(س - ١)$

	$س^٥$	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٠	٤-	٢	٠	١
١		١	١	٣-	١-	١-
	١	١	٣-	١-	١-	٠

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٤ + س^٣ - ٣س^٢ - س - ١)}{س - ١} = -٣$$

١٤) $\lim_{س \to -١} \frac{س^٣ + ٤س + ٥}{س^٣ + ١} = \frac{٠}{٠}$

الحل

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٠	٤	٥
١-		١-	١	٥-
	١	١-	٥	صفر

$$\text{نهـا}_{س \to -١} \frac{(س+١)(س^٢ - س + ٥)}{(س+١)(س^٢ - س + ١)} = \frac{٧}{٣}$$

تدريب) $\lim_{س \to -١} \frac{٤س^٣ + |٣س - ١|}{س + ١}$

الحل

١٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)^٢ - ١٦}{٤ - س^٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{((س+٢)-٤)((س+٢)+٤)}{(٢-س)(٢+س)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٦)}{(٢-س)(٢+س)} = \frac{-٨}{٤} = -٢$$

١٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٤ - ١}{س}$

الحل

١٧) $\lim_{س \to ١} \frac{س(س + ١)^٢ - ٤}{١ - س^٣} = \frac{٠}{٠}$

الحل نفك $(س + ١)^٢$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س(س^٢ + ٢س + ١) - ٤}{١٠ - س^٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^٣ + ٢س^٢ + س - ٤}{١ - س^٣} \quad \text{(قسمة تركيبية)}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢ + ٣س + ٤)}{(١-س)(١+س+س^٢)}$$

$$= \frac{-٨}{٣}$$

تدريب صفي :

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(2س + 1)^3 - 125}{2 + س^2 (س - 2) - س}$$

---

١٨) إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to 1} \frac{أ س^2 - 4س + 1}{س - 1}$ موجودة

جد قيمة أ

الحل : ∵ النهاية موجودة والمقام تعويضه = صفر ⇐ البسط تعويضه = صفر

$أ(1)^2 - 4(1) + 1 = صفر \Leftarrow أ = 3$

---

١٨) إذا علمت أن

$$\text{نهـا}_{س \to 4} \frac{س^2 - (4 + م)س + 4م}{س - 4} = 8$$ جد قيمة م

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 4} \frac{(س - 4)(س - م)}{س - 4} = 8$$

$4 - م = 8 \Leftarrow م = -4$

او باستخدام القسمة التركيبية أو التحليل

---

١٩) إذا علمت ان

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{س^2 - (3 + م)س + 3م}{س^2 - 9} = \frac{3}{4}$$ جد قيمة م

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{(س - 3)(س - م)}{(س - 3)(س + 3)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3 - م}{6} = \frac{3}{4} \Leftarrow 3 - م = 9$$

$م = -6$

---

٢٠) $\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{أ س^2 + 2ب س + 20}{س - 2} = 12$

جد قيمة أ ، ب

الحل ∵ النهاية موجودة والتعويض المقام = صفر

∴ (س - 2) أحد عوامل البسط والتعويض س = 2 = صفر

$4أ + 4ب + 20 = 0 \Leftarrow ب = -5 - أ$

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{أ س^2 + 2(-5-أ)س + 20}{س - 2} = 12$$

$$\text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س - 2)(أ س - 10)}{س - 2} = 12$$

$2أ - 10 = 12 \Leftarrow أ = 11 \Leftarrow ب = -16$

تدريب صفي:

$$\text{نهـا}_{س \to -1} \frac{أ س^3 + ب س + 10}{س^3 + 1} = \frac{14}{3}$$

جد أ ، ب

---

٢١) إذا علمت نهـا $\frac{ق(س) - 1}{س - 1} = 6$

$س \to 1$

جد نهـا $(ق^2(س) - 3ق(س) + 5)$

$س \to 1$

الحل :- ∵ النهاية موجودة والمقام كثير حدود

تعويضه = صفر ⇐ نهـا البسط = صفر

$س \to 1$

∴ نهـا ق(س) = 1

$س \to 1$

المطلوب

نهـا $(نهـا ق(س))^2 - 3$ نهـا ق(س) + 5

$س \to 1$ $س \to 1$

$= (1)^2 - 3(1) + 5 = 3$

٢٢) إذا علمت نهـا $\frac{ق(س)+٤}{س-٣}$ = ٢
$س \to ٣$

جد نهـا $\frac{ق(س)+٤}{س^{٣}+٣س-٣٦}$
$س \to ٣$

الحل نحلل مقام المطلوب
ونعادل لنتوصل لشكل المعطى

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	$ق(س)$
	١	٠	٣	-٣٦
٣		٣	٩	٢٦
	١	٣	١٢	∴

$$\text{نهـا} \to ٣ \frac{ق(س)+٤}{س-٣} \times \frac{١}{س^{٢}+٣س+١٢} = \frac{١}{٣٠} \times ٢ = \frac{١}{١٥}$$

ثانياً: توحيد المقامات

٢٣) نهـا $\frac{\frac{١}{س+٣} - \frac{١}{٦}}{س-٣}$ = ÷
$س \to ٣$

الحل:

$$\text{نهـا} \to ٣ \frac{٦-(س+٣)}{(٦)(س+٣)(س-٣)}$$

$$= \text{نهـا} \to ٣ \frac{-١}{(س+٣)(٦)} \times \frac{١}{س-٣} = \frac{-١}{٣٦}$$

٢٤) نهـا $\left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{س-٢}\right)$ = ÷
$س \to ٢$

الحل:

$$\text{نهـا} \to ٢ \left(\frac{-١}{٢س}\right)\left(\frac{١}{س-٢}\right)$$

$$= \frac{-١}{٤}$$

٢٥) نهـا $\frac{\frac{س}{س+٤} - \frac{س+٣}{س^{٢}+٥}}{س-٣}$ = ÷
$س \to ٣$

الحل:

$$\text{نهـا} \to ٣ \frac{س(س^{٢}+٥) - (س+٣)(س+٤)}{(س+٤)(س^{٢}+٥)} \times \frac{١}{س-٣}$$

$$= \text{نهـا} \to ٣ \frac{س^{٣}-س^{٢}-٢س-١٢}{(س+٤)(س^{٢}+٥)} \times \frac{١}{س-٣}$$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	-١	-٣	-١٢
٣		٣	٦	١٢
	١	٢	٤	∴

$$= \text{نهـا} \to ٣ \frac{(س-٣)(س^{٢}+س+٤)}{(س+٤)(س^{٢}+٥)} \times \frac{١}{س-٣} = \frac{١٩}{٩٨}$$

٢٦) نهـا $\frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س+١)^{٢}} - ١\right)$ = ÷
$س \to ٠$

الحل

$$\text{نهـا} \to ٠ \frac{١}{س}\left(\frac{١-(س+١)^{٢}}{(س+١)^{٢}}\right)$$

$$= \text{نهـا} \to ٠ \frac{١}{س}\left(\frac{(١-(س+١))(١+(س+١))}{(س+١)^{٢}}\right)$$

$$= \text{نهـا} \to ٠ \frac{١}{س}\left(\frac{-س(س+٢)}{(س+١)^{٢}}\right) = -٢$$

تدريب صفي:

نهـا $\frac{١}{س}\left(\frac{١}{(س+١)^{٣}} - ١\right)$
$س \to ٠$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر حمرة

٢٧) نهـا $\left(\frac{٤}{س^{٢}-٤}-\frac{١}{س-٢}\right)$ ، س ← ٢

الحل:

$$\text{نهـا}_{س\to٢}\left(\frac{٤}{(س-٢)(س+٢)}-\frac{١(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{٤-س-٢}{(س-٢)(س+٢)}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{-(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}=\frac{-١}{٤}$$

٢٨) نهـا $\left(\frac{١}{س-٢}-\frac{س+١٠}{س^{٣}-٨}\right)$ ، س ← ٢

الحل:

$$\text{نهـا}_{س\to٢}\left(\frac{س^{٢}+٢س+٤}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}-\frac{س+١٠}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\left(\frac{س^{٢}+س-٦}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{(س-٢)(س+٣)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}=\frac{٥}{١٢}$$

٢٩) نهـا $\left(\frac{١}{س^{٢}-٣س}-\frac{١}{٣س-٩}\right)$ ، س ← ٣

الحل

$$\text{نهـا}_{س\to٣}\left(\frac{١}{س(س-٣)}-\frac{١}{٣(س-٣)}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٣}\frac{٣-س}{٣س(س-٣)}=\frac{-١}{٩}$$

٣٠) نهـا $\left(\frac{١}{س-٢}-\frac{٧س-٤}{س^{٣}-٢س-٤}\right)$ ، س ← ٢

الحل

المقام التكعيبي يحلل لأن تعويض ٢ = صفر

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	٠	-٢	-٤
٢		٢	٤	٤
∴	١	٢	٤	٠

$$\text{نهـا}_{س\to٢}\left(\frac{١}{س-٢}-\frac{٧س-٤}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}\right)$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{س^{٢}+٢س+٤-٧س+٤}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{س^{٢}-٥س+٦}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{(س-٢)(س-٣)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}=\frac{-١}{١٠}$$

٣١) نهـا $\left(\frac{٣}{٢س+١٠}-\frac{١}{٣س+١}\right)\left(\frac{١}{٣س^{٢}-٥س+٢}\right)$ ، س ← ١ للطالب واجب

الحل:

$$=\text{نهـا}_{س\to١}\frac{٩س+٣-٢س-١٠}{(٢س+١٠)(٣س+١)}\times\frac{١}{(س-١)(٣س-٢)}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to١}\frac{٧س-٧}{(٢س+١٠)(٣س+١)}\times\frac{١}{(س-١)(٣س-٢)}$$

$$=\text{نهـا}_{س\to١}\frac{٧(س-١)}{(٢س+١٠)(٣س+١)}\times\frac{١}{(س-١)(٣س-٢)}$$

$$=\frac{٧}{٤\times١٢}\times\frac{١}{١}=\frac{٧}{٤٨}$$

كتاب تدريب) نهـا $\left(\frac{س}{٩-س^{٢}}+\frac{٣س}{س^{٣}-٩س}\right)$ ، س ← ٣ واجب

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر خميرة

٣٢) نهـا $\lim_{س \to 1} \frac{\frac{1}{س+3} - \frac{1}{4}}{|س-1|} = \frac{0}{0}$ خط أعداد

الحل

$$= \lim_{س \to 1} \frac{4 - (س+3)}{(س+3)(4)} \times \frac{1}{1-س}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{4-س-3}{(س+3)(4)} \times \frac{1}{1-س}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{1-س}{(س+3)(4)} \times \frac{1}{1-س} = \frac{1}{16}$$

٣٤) نهـا $\lim_{س \to 1} \frac{1-س}{\sqrt{3س+1} - 2} = \frac{0}{0}$

الحل

$$= \lim_{س \to 1} \frac{1-س}{\sqrt{3س+1} - 2} \times \frac{\sqrt{3س+1} + 2}{\sqrt{3س+1} + 2}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(1-س)(\sqrt{3س+1} + 2)}{3س+1-4}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(1-س)(\sqrt{3س+1} + 2)}{3(س-1)} = \frac{-4}{3}$$

ثالثاً: الضرب بالمرافق

تستخدم طريقة الضرب بالمرافق إذا احتوى البسط أو المقام أو كليهما على جذر تربيعي أو تكعيبي وكان ناتج التعويض المباشر $\frac{صفر}{صفر}$

أولا المرافق التربيعي المباشر

نضرب بالمرافق مباشرة في الحالات

- جذر – عدد (او العكس)
- جذر – جذر
- جذر – حد واحد (مثل $\sqrt{س} - س$)

الشروط: ١) التعويض مباشر ٢) داخل الجذر ≥ 0

٣٣) نهـا $\lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س} - 2}{س - 4} = \frac{0}{0}$

الحل

$$= \lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س} - 2}{س-4} \times \frac{\sqrt{س} + 2}{\sqrt{س} + 2}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{س-4}{(س-4)(\sqrt{س}+2)} = \frac{1}{4}$$

يمكن استخدام تحليل

$$= \lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س}-2}{(\sqrt{س}-2)(\sqrt{س}+2)} = \frac{1}{4}$$

٣٥) نهـا $\lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س+2} - 2}{\sqrt{س+7} - 3} = \frac{0}{0}$

الحل مرافقين

$$= \lim_{س \to 2} \frac{\sqrt{س+2} - 2}{\sqrt{س+7} - 3} \times \frac{\sqrt{س+2} + 2}{\sqrt{س+2} + 2} \times \frac{\sqrt{س+7} + 3}{\sqrt{س+7} + 3}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{س+2-4}{س+7-9} \times \frac{\sqrt{س+7} + 3}{\sqrt{س+2} + 2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{س-2}{س-2} \times \frac{\sqrt{س+7} + 3}{\sqrt{س+2} + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

٣٦) نهـا $\lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{3س} - \sqrt{س+6}}{س^2 - 9} = \frac{0}{0}$

الحل

$$= \lim_{س \to 3} \frac{\sqrt{3س} - \sqrt{س+6}}{(س-3)(س+3)} \times \frac{\sqrt{3س} + \sqrt{س+6}}{\sqrt{3س} + \sqrt{س+6}}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{3س - س - 6}{(س-3)(س+3)} \times \frac{1}{\sqrt{3س} + \sqrt{س+6}}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{2(س-3)}{(س-3)(س+3)} \times \frac{1}{\sqrt{3س} + \sqrt{س+6}} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر حمدة

٣٧) نهـا $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - س}{س^٣ + ٢س - ١٢}$

الحل:

المقام يحتاج لتحليل باستخدام القسمة

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٠	٢	-١٢
٢		٢	٤	١٢
	١	٢	٦	٠

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - س}{(س - ٢)(س^٢ + ٤س + ٦)} \times \frac{\sqrt{٣س - ٢} + س}{\sqrt{٣س - ٢} + س}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣س - ٢ - س^٢}{(س - ٢)(س^٢ + ٤س + ٦)} \times \frac{١}{\sqrt{٣س - ٢} + س}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(-س + ١)}{(س - ٢)(س^٢ + ٤س + ٦)(\sqrt{٣س - ٢} + س)}$$

$$= \frac{-١}{٤ \times ١٤} = \frac{-١}{٥٦}$$

٣٩) نهـا $\lim_{س \to ٦} \frac{\sqrt{س - ٢} - \frac{١}{٢}س + ١}{س - ٦}$

٤٠) نهـا $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{\sqrt{س + س - ٦}}$

الحل نقسم البسط والمقام على $س - ٤$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}}{\frac{\sqrt{س + س - ٦}}{س - ٤}} \quad \text{---- (١)} \quad \text{---- (٢)}$$

(١) $= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = ٨$

(٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤} \oplus \frac{٢ + س - ٦}{س - ٤}$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س + ٢}}{\sqrt{س + ٢}} \oplus \frac{س - ٤}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س + ٢})} + ١ = \frac{٥}{٤}$$

الجواب الكلي $\frac{٨}{\frac{٥}{٤}} = \frac{٣٢}{٥}$

المرافق التربيعي غير المباشر

أمثلة

٣٨) نهـا $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س + ٥} - ٢س + ٥}{س^٢ - ١٦}$

الحل نبسط المسألة بفصل الكسر

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س + ٥} - ٣}{س^٢ - ١٦} \oplus \frac{-س^٢ + ٥س - ٣}{س^٢ - ١٦}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س + ٥} - ٣}{(س - ٤)(س + ٤)} \times \frac{\sqrt{س + ٥} + ٣}{\sqrt{س + ٥} + ٣} \oplus \frac{(-١)(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(س + ٤)(\sqrt{س + ٥} + ٣)} \oplus \frac{-١}{٨}$$

$$= \frac{١}{٦ \times ٨} \oplus \frac{-١}{٤} = \frac{-١ - ١٤}{٤٨}$$

$$= \frac{-١١}{٤٨}$$

(يوجد طرق أخرى)

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٤١) نهـا $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س(س+١)^{٢} - ٩س}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل نفصل المقام للتبسيط نضرب الأقواس

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٢س(س+١)^{٢} - ٢(س+١)^{٢}}{س-٢} + \frac{٢(س+١)^{٢} - ٩س}{س-٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س+١)^{٢}(\sqrt{٢س}-٢)}{س-٢} \times \frac{\sqrt{٢س}+٢}{\sqrt{٢س}+٢} + \frac{٢س^{٢}-٥س+٢}{س-٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س+١)^{٢}(٢س-٤)}{(س-٢)(\sqrt{٢س}+٢)} + \frac{(س-٢)(٢س-١)}{(س-٢)}$

$= \frac{١٨}{٤} + ٣ = \frac{٣٠}{٤} = \frac{١٥}{٢}$

عند الفصل اما نفوض المجد الاول دون الثاني او العكس نفوض الثاني ونترك الأول

٤٢) نهـا $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

الحل $= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س-١} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{(س-١)(\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١)} = \frac{١}{٣}$

٤٣) نهـا $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٦} - ٢}{٨ - س^{٣}} = \frac{٠}{٠}$

الحل $= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٦} - ٢}{٨ - س^{٣}} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+٦)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}{\sqrt[٣]{(س+٦)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س+٦-٨}{(٢-س)(٤+٢س+س^{٢})} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{(س+٦)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}$

$= \frac{-١}{١٢ \times ١٢} = \frac{-١}{١٤٤}$

٤٤) نهـا $\lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt[٣]{٥س+٢} - ٢س - ٢}{س + ٢} = \frac{٠}{٠}$

الحل $= \lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt[٣]{٥س+٢} + ٢}{س+٢} + \frac{-٢-٢س-٢}{س+٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt[٣]{٥س+٢} + ٢}{س+٢} \times \frac{\sqrt[٣]{(٥س+٢)^{٢}} - ٢\sqrt[٣]{٥س+٢} + ٤}{\sqrt[٣]{(٥س+٢)^{٢}} - ٢\sqrt[٣]{٥س+٢} + ٤} - ٢$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{٥س+٨+٢}{(س+٢)(\sqrt[٣]{(٥س+٢)^{٢}} - ٢\sqrt[٣]{٥س+٢} + ٤)} - ٢$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{٥(س+٢)}{(س+٢)(\sqrt[٣]{(٥س+٢)^{٢}} - ٢\sqrt[٣]{٥س+٢} + ٤)} - ٢$

$= \frac{٥}{١٢} - ٢ = \frac{-١٩}{١٢}$

- **المرافق التكعيبي**

$أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢})$

مرافق تكعيبي

$أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})$

مرافق تكعيبي

٤٥)

$$\text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{٣س - ١} - ٢}{\sqrt{س^٢ - ٣س + ٣}} = \frac{٠}{٠}$$

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{٣س - ١} - ٢}{\sqrt{س^٢ - ٣س + ٣}} \times \frac{\sqrt[٣]{(٣س-١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{٣س-١} + ٤}{\sqrt[٣]{(٣س-١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{٣س-١} + ٤} \times \frac{\sqrt{س^٢+٣} + ٣}{\sqrt{س^٢+٣} + ٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٣س - ١ - ٨}{س^٢ - ٣س + ٣ - ٩} \times \frac{\sqrt{س^٢+٣} + ٣}{\sqrt[٣]{(٣س-١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{٣س-١} + ٤}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٣} \frac{٣(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٢)} \times \frac{\sqrt{س^٢+٣} + ٣}{\sqrt[٣]{(٣س-١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{٣س-١} + ٤}$$

$$= \frac{٣}{٢} \times \frac{٦}{١٢} = \frac{٣}{٤}$$

---

٤٦) $\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{٣س + ٦} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٧} = \frac{٠}{٠}$

الحل

نفصل الكسر

$$= \text{نهـا}_{س \to ٧} \left(\frac{\sqrt[٣]{٣س + ٦} - ٣}{س - ٧} + \frac{٣ - \sqrt{س+٢}}{س - ٧} \right)$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٣]{٣س+٦} - ٣}{س - ٧} \times \frac{\sqrt[٣]{(٣س+٦)^٢} + ٣\sqrt[٣]{٣س+٦} + ٩}{\sqrt[٣]{(٣س+٦)^٢} + ٣\sqrt[٣]{٣س+٦} + ٩}$$

$$\oplus \quad \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣ - \sqrt{س+٢}}{س - ٧} \times \frac{٣ + \sqrt{س+٢}}{٣ + \sqrt{س+٢}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣س + ٦ - ٢٧}{(س - ٧)(\sqrt[٣]{(٣س+٦)^٢} + ٣\sqrt[٣]{٣س+٦} + ٩)}$$

$$\oplus \quad \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٩ - س - ٢}{(س - ٧)(٣ + \sqrt{س+٢})}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{٣(س - ٧)}{(س - ٧)(\sqrt[٣]{(٣س+٦)^٢} + ٣\sqrt[٣]{٣س+٦} + ٩)(٣ + \sqrt{س+٢})}$$

$$\oplus \quad \text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{-١}{(س - ٧)(٣ + \sqrt{س+٢})}$$

$$= \frac{٣}{٢٧} - \frac{١}{٦} = \frac{-١}{١٨}$$

تدريب صفي:

$$\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{\sqrt[٣]{س + ٧} - ٢}$$

---

٤٧) $\text{نهـا}_{س \to م} \frac{\sqrt[٣]{م^٢} - \sqrt[٣]{س^٢}}{م^٢ - س^٢} = \frac{٠}{٠}$ م ≠ ٠

الحل

$$= \text{نهـا}_{س \to م} \frac{\sqrt[٣]{م^٢} - \sqrt[٣]{س^٢}}{م^٢ - س^٢} \times \frac{\sqrt[٣]{م^٤} + \sqrt[٣]{م^٢ س^٢} + \sqrt[٣]{س^٤}}{\sqrt[٣]{م^٤} + \sqrt[٣]{م^٢ س^٢} + \sqrt[٣]{س^٤}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to م} \frac{م^٢ - س^٢}{(م^٢ - س^٢)(\sqrt[٣]{م^٤} + \sqrt[٣]{م^٢ س^٢} + \sqrt[٣]{س^٤})}$$

$$= \frac{١}{٣\sqrt[٣]{م^٤}}$$

٤٨) $\lim_{س \to -١} \frac{\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - [٢س + \frac{٣}{٤}]}{س + ١}$

الحل نعيد تعريف الصحيح $= -١$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} + ١}{س + ١} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{١ + \sqrt[٣]{س}}{(س+١)\sqrt[٣]{س}} \times \frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{(١ + س)}{(س+١)(\sqrt[٣]{س})(\sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س} + ١)}$$

$$= \frac{-١}{٣}$$

٤٩) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س+٧} - ١ - ١}{س - ١}$

الحل

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س+٧} - ١ - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+٧)^{٢}} + \sqrt[٣]{س+٧} + ١}{\sqrt[٣]{(س+٧)^{٢}} + \sqrt[٣]{س+٧} + ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س + ٧ - ٢}{(س - ١)(\sqrt[٣]{(س+٧)^{٢}} + \sqrt[٣]{س+٧} + ١)} \times \lim_{س \to ١} \frac{١}{\sqrt[٣]{س+٧} - ١ + ١}$$

$$= \frac{١}{٢} \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt[٣]{(س+٧)^{٢}} + \sqrt[٣]{س+٧} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{٢٤}$$

* او باستخدام الاستبدال ثم المرافق *

٥٠) إذا علمت أن $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ١}{س - ١} = ٣$ جد

أ) $\lim_{س \to ١} (ق^{٢}(س) + ٣ق(س) - ٥س)$

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + س^{٣}}{س - ١}$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ١}{س^{٣} + س - ٢}$

د) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٥س - ٦}{ق(س) + ١}$

هـ) $\lim_{س \to ١} \frac{س\, ق(س) + ١}{س - ١}$

الحل

أ) $\because$ النهاية موجودة $\lim_{س \to ١}$ للمقام $=$ صفر

$$\therefore \lim_{س \to ١} ق(س) + ١ = ٠ \Rightarrow \lim_{س \to ١} ق(س) = -١$$

$$\lim_{س \to ١} (ق(س))^{٢} + ٣ \lim_{س \to ١} ق(س) - \lim_{س \to ١} ٥س$$

$$= ١ - ٣ - ٥ = -٧$$

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ١}{س - ١} + \frac{-١ + س^{٣}}{س - ١}$ (تحليل)

$$= ٣ + ٣ = ٦$$

ج) لإقام قسمة تركيبية

$$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ١}{(س-١)(س^{٢}+س+٢)} = \lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ١}{س - ١} \times \frac{١}{س^{٢}+س+٢}$$

$$= ٣ \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

د) نقسم بسط ومقام على $(س - ١)$

$$\lim_{س \to ١} \frac{\frac{(س-١)(س+٦)}{س-١}}{\frac{ق(س) + ١}{س - ١}} = \frac{٧}{٣}$$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

تمارين (واجب)

١) $\lim_{س \to ١} \left[\frac{١}{س - ١} - \frac{١}{س^{٢}} \right]$ $\left(-\frac{١}{٢}\right)$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} \sqrt{س} - ١}{س - ١}$ $\left(\frac{٥}{٢}\right)$

٣) $\lim_{ص \to ١} \frac{ص - ٤ \sqrt{ص} + ٣}{ص^{٢} - ١}$ $\left(-\frac{١}{٢}\right)$

٤) $\lim_{س \to ٨} \frac{س \sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨}$ $\left(\frac{٨}{٣}\right)$

٥) $\lim_{س \to ١^{+}} \frac{\sqrt{س + [٥ - س]} - |٢س|}{|س - ١|}$ $\left(-\frac{٧}{٤}\right)$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} (س + ١)^{٢} - ٨}{س - ١}$

(الجواب = ٩)

رابعاً: الاستبدال

تستخدم طريقة الاستبدال للنهايات النسبية التي تحوي

١) جذر اكبر من تكعيبي
٢) الاقترانات الاسية (عدد أس متغير)
٣) الجذور ± مقدار جبري

٥١) $\lim_{س \to ١} \frac{٢ - \sqrt[٤]{س + ١٥}}{س - ١}$

الحل نفرض ص $= \sqrt[٤]{س + ١٥} \Leftarrow$ ص$^{٤} = س + ١٥$

$س = ص^{٤} - ١٥$ $\quad س \to ١ \Rightarrow ص \to ٢$

$$\lim_{ص \to ٢} \frac{٢ - ص}{ص^{٤} - ١٥ - ١} = \lim_{ص \to ٢} \frac{٢ - ص}{(ص^{٢} - ٤)(ص^{٢} + ٤)}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{٢ - ص}{(ص - ٢)(ص + ٢)(ص^{٢} + ٤)} = \frac{-١}{٣٢}$$

٥٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{\sqrt[٣]{س - ٣} - ١}$

الحل

نفرض ص $= \sqrt[٣]{س - ٣} \Leftarrow$ ص$^{٣} = س - ٣$

$\sqrt{س} = ٣ - ص^{٣}$ $\quad س \to ٤ \Rightarrow ص \to ١$

$$\lim_{ص \to ١} \frac{٣ - ص^{٣} - ٢}{ص - ١}$$

$$= - \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{٣} - ١}{ص - ١}$$

$$= - \lim_{ص \to ١} \frac{(ص - ١)(ص^{٤} + ص^{٣} + ص^{٢} + ص + ١)}{ص - ١}$$

$= ٥$

٥٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{\frac{١}{٣}س} - ١}{هـ^{\frac{١}{٣}س} - ١}$

الحل

$$\lim_{س \to ٠} \frac{(هـ^{س})^{\frac{١}{٣}} - ١}{(هـ^{س})^{\frac{١}{٣}} - ١}$$

ص $= هـ^{س}$

$س \to ٠ \Rightarrow ص \to ١$

$$\lim_{ص \to ١} \frac{\sqrt[٣]{ص} - ١}{\sqrt{ص} - ١} \times \frac{\sqrt{ص} + ١}{\sqrt[٣]{ص} + ١} \times \frac{\sqrt[٣]{ص^{٢}} + \sqrt[٣]{ص} + ١}{\sqrt[٣]{ص^{٢}} + \sqrt[٣]{ص} + ١}$$

$$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص - ١}{ص - ١} \times \frac{\sqrt[٣]{ص^{٢}} + \sqrt[٣]{ص} + ١}{\sqrt{ص} + ١} = \frac{٣}{٢}$$

٥٤) $\lim_{س \to ١} \frac{٨^{س} - ٣(٢)^{س} - ٢}{٢ - ٢^{س}}$

الحل نوحد الاساسات

$$\lim_{س \to ١} \frac{(٢^{س})^{٣} - ٣(٢^{س}) - ٢}{٢ - (٢^{س})}$$

ص $= ٢^{س}$ $\quad س \to ١ \Rightarrow ص \to ٢$

$$\lim_{ص \to ٢} \frac{ص^{٣} - ٣ص - ٢}{٢ - ص}$$ بالقسمة التركيبية

$= ٩ -$

٥٥) نهـا $\frac{٩س - ٣س^{٣} + ٣س^{٣} + ١٥}{٣س^{٤} - ٨١}$
س ← ١

الحل : توحيد الأساس

نهـا $\frac{(٣س)^{٢} - (٣س)^{٣} + (٣س) + ١٥}{(٣س)^{٤} - ٨١}$
س ← ١

ص = ٣س س ← ١ ص ← ٣

= نهـا $\frac{ص^{٢} - ص^{٣} + ص + ١٥}{ص^{٤} - ٨١}$ قسمة تركيبية
ص ← ٣

= نهـا $\frac{(ص - ٣)(-ص^{٢} - ٢ص - ٥)}{(ص - ٣)(ص + ٣)(ص^{٢} + ٩)}$
ص ← ٣

$= \frac{-٥٠}{١٠٨} = \frac{-٥}{١٢}$

ورقة عمل (٢)

١) نهـا $\frac{\sqrt{س - ١} - ١}{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٢}$
س ← ٢

٢) نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٥س + ٣} - ٣}{س^{٣} + س^{٢} - ٣٦}$
س ← ٣

٣) نهـا $\frac{(س+١)^{٢}\sqrt{س} - ٥٠}{س - ٤}$
س ← ٤

٤) نهـا $\frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{\frac{١}{س} - ١}$
س ← ١

٥) نهـا $\frac{س^{٢} - ١}{\sqrt{س + ٣} + س - ٣}$
س ← ١

٦) نهـا $\frac{٨س^{٣} - ١}{س - \frac{١}{٢}}$
س ← $\frac{١}{٢}$

٧) نهـا $\frac{(٢س + ١)^{٢} - ٢٥}{س - ٢}$
س ← ٢

٨) نهـا $\frac{(٢س+١)^{٣} - ١٢٥}{٢ + س^{٣}(س-٢) - س}$
س ← ٢

٩) نهـا $\frac{\sqrt[٣]{س+٧} - ١ - ١}{س - ١}$
س ← ١

١٠) نهـا $\frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{س^{٢}}}{س - ١}$
س ← ١

١١) نهـا $\frac{\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{١}{\sqrt{س}}}{س - ١}$
س ← ١

١٢) نهـا $\frac{(س + ٥)^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٤}}{س + ١}$
س ← -١

١٣) إذا علمت أن
نهـا $\frac{أ س^{٢} + ٢س - ١}{س - ١}$ غير موجودة
س ← ١
فجد قيمة أ .

١٤) نهـا $\frac{أ س^{٢} + ٢ب س + ٨}{س - ٢} = ٩$
س ← ٢
جد قيمة أ ، ب .

١٥) إذا علمت أن
نهـا $\frac{س^{٣} - (م+١)س + م}{س - ١} = ٥$ ، جد قيمة م .
س ← ١

١٦) $\text{نهـا}_{س\to أ} \dfrac{\frac{١}{س} - \frac{١}{أ}}{س - أ} = \text{نهـا}_{س\to ٢} \dfrac{٢ - س}{س^{٢} - ٤}$

١٧) إذا علمت أن

$\text{نهـا}_{س\to ١} \dfrac{ق(س) + ٧}{\sqrt[٣]{س - ١}} = ٩$

فجد

أ) $\text{نهـا}_{س\to ١} \dfrac{ق(س) + س^{٣} + ٦س}{س^{٣} + ٥س - ٦}$

ب) $\text{نهـا}_{س\to ١} \dfrac{ق(س) + ٧س}{\sqrt[٣]{س - ١}}$

جـ) إذا علمت أن

$\text{نهـا}_{س\to ١} \dfrac{س^{٣} + ٥س - ٦}{ق(س) + س + ٦} + أ س = ١$

فجد أ

١٨) إذا علمت أن

$\text{نهـا}_{س\to ٢} \dfrac{س - ٢}{أ س^{٢} + ب س + ٤}$ غير موجودة جد أ،ب

١٩) $\text{نهـا}_{س\to -٣} \dfrac{س^{٢} - ٢|س| - ٣}{|س| - ٣}$

٢٠) $\text{نهـا}_{س\to ٣} \dfrac{س^{٢} - [٤س - ٢,٥]}{س - |٤س - ٩|}$

نهايات اقترانات مثلثية

متطابقات مساعدة للحل

١) جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ ← جا^{٢}س = ١ – جتا^{٢}س ، جتا^{٢}س = ١ – جا^{٢}س

٢) قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢} س ⇐ ظا^{٢}س = قا^{٢}س – ١

٣) قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س ⇐ ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س – ١

٤) جا٢س = ٢ جا س جتا س

٥) جتا ٢س = جتا^{٢}س – جا^{٢}س

٦) **جتا٢س**

جتا^{٢}س – جا^{٢}س ، ١ – ٢جا^{٢}س ، ٢جتا^{٢}س - ١

٧) جا (س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص

٨) جتا (س ± ص) = جتاس حتاص ∓ جاس جاص

☺ **قوانين المتممة (المتممة = $\frac{\pi}{٢}$ - س)**

جا س= جتا ($\frac{\pi}{٢}$ – س) ، - جا س= جتا ($\frac{\pi}{٢}$ + س)

جتا س = جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) ، جتاس = جا ($\frac{\pi}{٢}$ + س)

ظا س = ظتا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) ،- ظا س = ظتا ($\frac{\pi}{٢}$ +س)

☺ **قوانين المكملة (المكملة = π – س)**

جا س = جا (π - س) ، - جا س = جا (π + س)

جتا س = - جتا (π – س) ، جتا س = - جتا (π +س)

ظا س = - ظا (π - س) ، ظا س = ظا (π + س)

١٠) ظا (س ± ص) = $\frac{\text{ظا س ± ظا ص}}{\text{١ ∓ ظاس ظاص}}$

١١) جاس + جاص= ٢جا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$) جتا($\frac{\text{س-ص}}{٢}$)

جاس - جاص= ٢جتا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$) جا ($\frac{\text{س-ص}}{٢}$)

جتاس + جتاص= ٢جتا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$) جتا($\frac{\text{س-ص}}{٢}$)

جتاس - جتاص= -٢جا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$) جا ($\frac{\text{س-ص}}{٢}$)

~~أساس أي نهاية التعويض المباشر~~

مثلا

نهـــا جاس = جا أ أ∈ح
س ← أ

نهـــا جتاس = جتا أ أ∈ح
س ← أ

نهـــا ظا س = ظا أ أ∈ح - { $\frac{\text{ن π}}{٢}$ ، ن فردي}
س ← أ

لكن إذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

فإننا نحتاج للنظرية التالية

نـظريـــــة

نهـــا $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ = ١ حيث س زاوية مقاسة بالراديان
س ← ٠

نهـــا $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$ = ١ حيث س زاوية مقاسة بالراديان
س ← ٠

شروط النظرية

-
-
-
-

سؤال إن قيمة نهـــا $\frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$ تساوي
س ← ٠

أ) ١ ب) صفر جـ) -١ د) غ.م

سؤال (٢٠٠٥)

اذا كانت س مقاسة بالدرجات فإن قيمة نهـــا $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$
س ← ٠

أ) $\frac{١}{\pi}$ ب) $\frac{١٨٠}{\pi}$ ج) $\frac{\pi}{١٨٠}$ د) ١

سنقسم هذا الدرس لعدة أفكار

١. التطبيق المباشر

أمثلة:

١) بإستخدام النظرية اثبت أن

نهـــا $\frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}$ = ٣
س ← ٠

الحل: نفرض ص = ٣س ⬅ س = $\frac{\text{ص}}{٣}$

عندما س ← ٠ ⬅ ص ← ٠

نهـــا $\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$ × ٣ = نهـــا $\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$
ص ← ٠ / $\frac{\text{ص}}{٣}$ ، ص ← ٠

= ٣ × ١ = ٣

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٢) بإستخدام النظرية اثبت أن

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{٤ س}} = \frac{٥}{٤}$$

الحل: نفرض أن ص = ٥س ⇐ س = $\frac{ص}{٥}$

عندما س ← ٠ ⇐ ص ← ٠

$$\text{نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{ظا ص}}{\frac{٤ ص}{٥}} = \frac{٥}{٤} \text{ نهـا}_{ص \to 0} \frac{\text{ظا ص}}{ص} = \frac{٥}{٤}$$

نتائج:

١) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{أ}{ب}$

٢) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{أ}{ب}$

٣) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ب س}}{\text{جا أ س}} = \frac{ب}{أ}$

٤) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ب س}}{\text{ظا أ س}} = \frac{ب}{أ}$

٥) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{أ}{ب}$

٦) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{أ}{ب}$

٧) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{ظا ب س}} = \frac{أ}{ب}$

٨) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{جا ب س}} = \frac{أ}{ب}$

تذكير:

الأساس في أي نهاية التعويض المباشر، فإذا كانت النهاية = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نستخدم النظرية ونتائجها

٣) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا ٧س}}{\text{ظا ٤س}}$ نقسم البسط والمقام على س

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\frac{\text{جا ٧س}}{س}}{\frac{\text{ظا ٤س}}{س}} = \frac{٧}{٤}$$

٤) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢ ٦س}{٤س^٢}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا ٦س} \times \text{جا ٦س}}{٤س \times ٤س} = ٩ = ٣ \times ٣$$

٥) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{٢ظا}^٢ ٩س}{\text{٥س جا ٣س}}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{٢ \text{ظا ٩س}}{س} \times \frac{٩}{٥} \times \frac{٩}{٣} = \frac{٥٤}{٥}$$

٦) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{س قتا}^٢ ٣س}{\text{ظتا ٢س}}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س \times \frac{١}{\text{جا}^٢ ٣س}}{\frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا ٢س}}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س}{\text{جا ٣س} \times \text{جا ٣س}} \times \frac{\text{جا ٢س}}{\text{جتا ٢س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س \text{ جا ٢س}}{\text{جا ٣س} \times \text{جا ٣س}} \times \frac{١}{\text{جتا ٢س}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{١} = \frac{٢}{٩}$$

٧) $\text{نهـا}_{س \to 0} \text{ س}^٢ \text{ظتا ٢س قتا ٢س}$

الحل

$$\text{نهـا}_{س \to 0} س^٢ \times \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا ٢س}} \times \frac{١}{\text{جا ٢س}}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to 0} \frac{س \times س}{\text{جا ٢س} \times \text{جا ٢س}} \times \frac{\text{جتا ٢س}}{١} = ١ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

تمرين) $\text{نهـا}_{س \to 0}$ س(ظتا٣س + قتا٢س) $(\frac{٥}{٢})$

٨) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{ظا ٧س + جتاس جا ٥س + ٤س}^٢}{\text{٨س}}$

الحل: نوزع البسط على المقام

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \left(\frac{\text{ظا ٧س}}{\text{٨س}} + \frac{\text{جتاس جا ٥س}}{\text{٨س}} + \frac{\text{٤س}^٢}{\text{٨س}} \right)$$

$$= \frac{٧}{٨} + \text{نهـا}_{س \to 0} \text{جتاس} \times \frac{\text{جا ٥س}}{\text{٨س}} + \frac{س}{٣}$$

$$= \frac{٧}{٨} + ١ \times \frac{٥}{٨} + ٠ = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

٩) $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا |س|}}{س}$

الحل: نجد النهايات

$$\text{نهـا}_{س \to 0^+} \frac{\text{جاس}}{س} = ١ \quad \text{نهـا}_{س \to 0^-} \frac{\text{جاس}}{س} = -١$$

∴ $\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\text{جا |س|}}{س}$ غير موجودة

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

تدريب) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - جتا^{٢}س}}{س}$

متطابقة (١)

٣. إذا لم تكن زاوية الإقتران الدائري (عناصر النظرية) خطية.

٢. البسط و المقام جمع(أو طرح) عناصر النظرية

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٧س - ظا ٣س}{٢س - جا ٤س}$

الحل: نقسم البسط والمقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا٧س}{س} - \frac{ظا٣س}{س}}{\frac{٢س}{س} - \frac{جا٤س}{س}} = \frac{٧ - ٣}{٢ - ٤} = -٢$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} ٨س - س ظا ٣س + س^{٣}}{٥س^{٢} - جا ٩س ظا٢س}$

الحل: نقسم البسط والمقام على $س^{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا٨س جا٨س}{س \times س} - \frac{س ظا٣س}{س \times س} + \frac{س \times س \times س}{س \times س}}{\frac{٥س \times س}{س \times س} - \frac{جا٩س \times ظا٢س}{س \times س}}$

$= \frac{٦٤ - ٣ + ٠}{١٨ - ٥}$

$= \frac{٦١}{-١٣} = \frac{-٦١}{١٣}$

١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا(ظا٢س)}{س}$

الحل: نقسم ونضرب بالزاوية

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا(ظا٢س)}{ظا٢س} \times \frac{ظا٢س}{س}$ نفصل النهاية ونفرض

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا(ظا٢س)}{ظا٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س}$

ص = ظا٢س س ← ٠

ص ← ٠

$\lim_{ص \to 0} \frac{ظاص}{ص} \times ٢ = ٢$

١٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{س^{٣} - ٨}$

الحل: نقسم ونضرب بالزاوية

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٤} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٣} - ٨}$

ص = $س^{٢}$ - ٤ س ← ٢

ص ← ٠

$\lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{ص} \times \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$

$= ١ \times \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

١٤) $\lim_{س \to 1} \frac{جا(س^{٢}-١)}{ظا(س^{٣}-١)}$

الحل

$= \lim_{س \to 1} \frac{جا(س^{٢}-١)}{س^{٢}-١} \times \lim_{س \to 1} \frac{س^{٣}-١}{ظا(س^{٣}-١)} \times \lim_{س \to 1} \frac{س^{٢}-١}{س^{٣}-١}$

نفرض ص $= س^{٢}-١$ ، م $= س^{٣}-١$

$س \to 1 \Rightarrow ص \to 0$ ، $س \to 1 \Rightarrow م \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جا ص}{ص} \times \lim_{م \to 0} \frac{م}{ظا م} \times \lim_{س \to 1} \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(س^{٢}+س+١)}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

٤.الضرب بالمرافق.

متطابقة (٢)

١٥) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{١-جتاس}{س^{٢}} \times \frac{١+جتاس}{١+جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١-جتا^{٢}س}{س^{٢}} \times \frac{١}{١+جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١+جتاس}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{س ظاس}{١ - جتاس}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{س ظاس}{١-جتاس} \times \frac{١+جتاس}{١+جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س ظاس}{جا^{٢}س} \times \lim_{س \to 0} (١+جتاس)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{جاس} \times \frac{\frac{ظاس}{س}}{س} \times \lim_{س \to 0} (١+جتاس)$

$= ١ \times ١ \times ٢ = ٢$

١٧) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا(ظاس)}{ظا^{٢}س}$

الحل

نفرض ص $= ظاس$

$س \to 0 \Rightarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{١-جتاص}{ص^{٢}} \times \frac{١+جتاص}{١+جتاص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{١-جتا^{٢}ص}{ص^{٢}} \times \lim_{ص \to 0} \frac{١}{١+جتاص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جاص \, جاص}{ص \times ص} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

تمرين ١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٤س}{١ - جتا٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٤-٣جتاس-جتا٤س}{س^{٢}}$

(٢٠١٠)

١٨) $\lim_{س \to 0} \frac{قا٢س - ١}{س^{٢}}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^{٢}س-١}{س^{٢}} \times \frac{قا^{٢}س+١}{قا^{٢}س+١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^{٢}س-١}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا^{٢}س+١}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^{٢}س}{س \times س} \times \frac{١}{٢} = ٢ \times ٢ \times \frac{١}{٢}$

$= ٢$

(٢٠١٠)

١٩) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س - جا س}{س^3}$

الحل

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س} - جا س}{س^3}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (\frac{1}{جتا س} - 1)}{س \times س^2}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{قا س - 1}{س^2} \times \frac{قا س + 1}{قا س + 1}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^2 س - 1}{س^2} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{قا س + 1}$$ (نعوض)

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س}{س^2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

---

٢٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا س}}{س} \times \frac{\sqrt{1 + جتا س}}{\sqrt{1 + جتا س}}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا^2 س}}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + جتا س}}$$ (نعوض)

$$= \lim_{س \to 0} \frac{|جا س|}{س} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lim_{س \to 0^+} \frac{جا س}{\sqrt{2} س} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\lim_{س \to 0^-} \frac{جا س}{\sqrt{2} س} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{|جا س|}{\sqrt{2} س}$ غير موجودة

(١٩٩٩) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1 - جتا 2س}}{\sqrt{2} س}$ تساوي

أ) ١ ب) -١ ج) صفر د) غير موجودة

٥.الإستبدال (المتممة و المكملة) .

إذا كانت زاوية الاقتران خطية و نقطة الاقتراب ليست صفر

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

متطابقة (٣)

جا (س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص

متطابقة(٤)

جتا (س ± ص) = جتاس حتاص ∓ جاس جاص

متطابقة (٥)

$$\text{ظا}(س \pm ص) = \frac{\text{ظا س} \pm \text{ظا ص}}{1 \mp \text{ظاس ظاص}}$$

٢١) $\lim_{س \to 1} \frac{\text{جا}^2(س-1)}{س^2 - 2س + 1}$

الحل

$$\lim_{س \to 1} \frac{\text{جا}^2(س-1)}{(س-1)^2}$$

ص = س − ١ ، س → ١ ، ص → ٠

$$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}^2 ص}{ص^2} = 1$$

٢٢) $\lim_{س \to 1} \frac{\text{جا}(س-1)}{\sqrt[3]{س} - 1}$

الحل

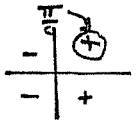
$$\lim_{س \to 1} \frac{\text{جا}(س-1)}{س-1} \times \frac{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س} + 1}{\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س} + 1}$$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{\text{جا}(س-1)}{س-1} \times \lim_{س \to 1} (\sqrt[3]{س^2} + \sqrt[3]{س} + 1)$$

ص = س − ١ ، س → ١ ، ص → ٠

$$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{ص} \times 3 = 3$$

٢٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{\frac{\pi}{2} - س}$



الحل

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\frac{\pi}{2} - س}$$

ص = π/2 − س ، س → π/2 ، ص → ٠

$$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{ص} = 1$$

٢٤) $\lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\text{جتا } \pi س}{\frac{1}{4} - س^2}$

الحل

$$\lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\text{جتا } \pi س}{(\frac{1}{2} - س)(\frac{1}{2} + س)}$$

$$= \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\text{جتا } \pi س}{\frac{1}{2} - س} \times \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2} + س}$$

$$= \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \pi س)}{\frac{1}{2} - س} \times 1$$

ص = π/2 − π س ، س → 1/2 ، ص → ٠

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{\frac{ص}{\pi}} = \pi$$

تدريب) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جتا } \frac{3}{4} س}{\text{جتا } \frac{1}{4} س}$

٢٥) $\lim_{س \to 2} \frac{\text{جتا } \frac{\pi}{س}}{س - 2}$

الحل

$$\lim_{س \to 2} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{س})}{س - 2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{س})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{س}} \times \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{س}}{س - 2}$$

ص = π/2 − π/س ، س → 2 ، ص → ٠

$$\lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا ص}}{ص} \times \lim_{س \to 2} \frac{\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{س})}{س - 2}$$ (نوحد المقامات)

$$= \lim_{س \to 2} \frac{س - 2}{س} \times \frac{1}{س - 2} \times \pi \times 1$$

$$= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

٢٦) $\lim_{س \to ١} \frac{جا \pi س}{س - ١}$

الحل

	+	
π	+	
	−	−

$$= \lim_{س \to ١} \frac{جا(\pi - \pi س)}{س - ١}$$

ص = ١ − س

س ← ١ ⇒ ص ← ٠

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \pi ص}{-ص} = -\pi$$

(٢٠١٤)

تدريب) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{ظا(\pi س)}$

٢٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ + جتا ٣س}{(\pi - ٣س)^{٢}}$

الحل

	+	
π	+	
	−	+

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{١ - جتا(\pi - ٣س)}{(\pi - ٣س)^{٢}}$$

نفرض ص = π − ٣س

س ← $\frac{\pi}{٣}$ ⇒ ص ← ٠

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{١ - جتا ص}{(-ص)^{٢}} \times \frac{١ + جتا ص}{١ + جتا ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جا^{٢} ص}{ص^{٢}} \times \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

٢٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا س - \sqrt{٣} جا س}{\pi - ٦س}$

الحل

نفرض ص = س − $\frac{\pi}{٢}$ ⇒ س = ص + $\frac{\pi}{٢}$

س ← $\frac{\pi}{٢}$ ⇒ ص ← ٠

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{جتا(ص + \frac{\pi}{٢}) - \sqrt{٣} جا(ص + \frac{\pi}{٣})}{٦ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{-جا ص - \frac{\sqrt{٣}}{٢} جتا ص - \sqrt{٣}(\frac{\sqrt{٣}}{٢} جتا ص + \frac{١}{٢} جا ص)}{٦ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{-\frac{٤}{٢} جا ص}{٦ص} = \frac{١}{٣}$$

٢٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢جا س - \sqrt{٣}}{\frac{\pi}{٣} - س}$

الحل

نفرض ص = س − $\frac{\pi}{٣}$ ⇒ س = ص + $\frac{\pi}{٣}$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{٢جا(ص + \frac{\pi}{٣}) - \sqrt{٣}}{ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{٢(\frac{١}{٢} جا ص + \frac{\sqrt{٣}}{٢} جتا ص) - \sqrt{٣}}{ص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص} + \sqrt{٣} \lim_{ص \to ٠} \frac{جتا ص - ١}{ص} \times \frac{جتا ص + ١}{جتا ص + ١}$$

$$= ١ + \sqrt{٣} \lim_{ص \to ٠} \frac{جتا^{٢} ص - ١}{ص} \times \frac{١}{جتا ص + ١}$$

$$= ١ + \sqrt{٣} \lim_{ص \to ٠} \frac{-جا ص جا ص}{ص} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ١ + \sqrt{٣} \times -١ \times ٠ \times \frac{١}{٢} = ١$$

كتاب

٣٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا س - جتا س}{س - \frac{\pi}{٤}}$

الحل:

$ص = س - \frac{\pi}{٤} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{٤}$

$س \to \frac{\pi}{٤} \quad ص \to ٠$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جا(ص + \frac{\pi}{٤}) - جتا(ص + \frac{\pi}{٤})}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}} جاص + \frac{١}{\sqrt{٢}} جتاص - \frac{١}{\sqrt{٢}} جتاص + \frac{١}{\sqrt{٢}} جاص}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{\frac{٢}{\sqrt{٢}} جاص}{ص} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

٣١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٢س - جتا ٤س}{س^٢}$ متطابقة

الحل:

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا ٣س جا(-س)}{س \times س}$

$= -٢ \times ٣ \times -١ = ٦$

٣٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٥س - جتا ٣س}{جتا ٣س - جتا س}$ متطابقة

الحل

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا ٤س جا(-س)}{-٢ جا ٢س جا(-س)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٤س}{س}}{\frac{جا ٢س}{س}} = \frac{٤}{٢} = ٢$

اضافي $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس + جتا ٣س}{٢ س - \pi}$

٣٣) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جا(س + هـ) - جا س}{هـ}$

الحل: $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٢ جتا(\frac{٢س + هـ}{٢}) جا(\frac{هـ}{٢})}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} ٢ جتا(\frac{٢س + هـ}{٢}) \lim_{هـ \to ٠} \frac{جا \frac{هـ}{٢}}{هـ}$

$= ٢ جتاس \times \frac{١}{٢}$

$= جتاس$

٦. مسائل تحتاج الى متطابقات

متطابقة (٦)

جا٢س = ٢جاس جتاس

متطابقة(٧)

جتا٢س

جتا^{٢}س – جا^{٢}س | ١ – ٢جا^{٢}س | ٢جتا^{٢}س - ١

مجموعة متطابقات

جاس + جاص = ٢جا $(\frac{س+ص}{٢})$ جتا$(\frac{س-ص}{٢})$

جاس - جاص = ٢جتا $(\frac{س+ص}{٢})$ جا $(\frac{س-ص}{٢})$

جتاس + جتاص = ٢جتا $(\frac{س+ص}{٢})$ جتا$(\frac{س-ص}{٢})$

جتاس - جتاص = -٢جا $(\frac{س+ص}{٢})$ جا $(\frac{س-ص}{٢})$

٣٤) $\lim_{س \to أ} \frac{جاس - جاأ}{س^3 - أ^3}$

الحل $\lim_{س \to ب} \frac{٢ جتا(\frac{س+ب}{٢}) جا(\frac{س-ب}{٢})}{(س-ب)(س^2+ب^2+س ب)}$

$= \lim_{س \to ب} \frac{٢ جتا(\frac{س+ب}{٢})}{س^2+ب^2+س ب} \times \lim_{س \to ب} \frac{جا(\frac{س-ب}{٢})}{س-ب}$ (نفرض)

نفرض ص $= س - ب$

$س \to ب \quad ص \to ٠$

$= \frac{٢ جتا ب}{٣ ب^2} \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \frac{ص}{٢}}{ص}$

$= \frac{٢ جتا ب}{٣ ب^2} \times \frac{١}{٢} = \frac{جتا ب}{٣ ب^2}$

٣٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^2 ٢س - جتا ٢س + ١}{س^2}$

الحل نوزع لنبطل المقام

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^2 س}{س^2} + \frac{١ - جتا^2 س}{س^2}$ (استطاقبه او مرافقه)

$= ٤ + \lim_{س \to ٠} \frac{٢ جا^2 س}{س^2}$

$= ٤ + ٢ = ٦$

(٢٠٠٥)

٣٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س - ٢ جاس}{س^3}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ جاس جتاس - ٢ جاس}{س^3}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ جاس (جتاس - ١)}{س \times س^2}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ جاس}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جتاس - ١}{س^2} \times \frac{جتاس + ١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جتا^2 س - ١}{س^2} \times \frac{١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{-جا^2 س}{س^2} \times \frac{١}{٢} = -١$

كتاب قديم

٣٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + جا٤س - جتا^2(٢س)}{س}$

الحل

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^2 ٤س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^2 ٢س}{س}$

$= ٤ + \lim_{س \to ٠} \frac{جا^2 ٢س}{س}$

$= ٤ + ٢ \times$ صفر $= ٤$

٣٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + جاس} - جتاس}{س} \times \frac{\sqrt{١+جاس} + جتاس}{\sqrt{١+جاس} + جتاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ + جاس - جتا^2 س}{س} \times \frac{١}{\sqrt{١+جاس} + جتاس}$ (نفرض)

$= \frac{١}{٢} \left(\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} + \frac{١ - جتا^2 س}{س} \right)$

$= \frac{١}{٢} (١ + \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} جاس)$ (نفرض) $= \frac{١}{٢}$

٣٩) $\lim_{س \to 0} \frac{(جاس + جتاس)^2 - 1}{ظا ٣س}$

الحل: نفك الأقواس

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س + 2 جاس جتاس + جتا^2 س - 1}{ظا ٣س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 + جا ٢س - 1}{ظا^2 ٣س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا ٢س}{\frac{ظا ٣س}{س}}$

$= \frac{2}{3}$

كتاب

٤٠) $\lim_{س \to 0} \frac{1 + جتا ٤س - 2 جتا^2 س}{س^2}$

واجب جد $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا ٢س جتاس}{س^2}$

٧. مسائل لا تحتاج الى نظرية (تحليل)

٤١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - جاس}{جتا ٢س}$

الحل: مضاعف للمقام

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - جاس}{جتا^2 س - جا^2 س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - جاس}{(جتاس - جاس)(جتاس + جاس)}$

$= \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

٤٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 جاس - 1}{4 جتا^2 س - 3}$

الحل مضاعف للمقام

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 جاس - 1}{4(1 - جا^2 س) - 3}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 جاس - 1}{1 - 4 جا^2 س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 جاس - 1}{(1 - 2 جاس)(1 + 2 جاس)}$

$= \frac{-1}{3}$

كتاب

٤٣) $\lim_{س \to 0} \frac{جا أس}{٦ س} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٥ س}{ب س - س} = 2$

فما قيمة أ، ب؟

الحل

$\lim_{س \to 0} \frac{جا أس}{٦ س} = 2 \Leftarrow \frac{أ}{6} = 2 \Leftarrow أ = 12$

$\lim_{س \to 0} \frac{ظا ٥س}{(ب - 1)س} = 2 \Leftarrow \frac{5}{ب - 1} = 2$

$2ب - 2 = 5 \Leftarrow 2ب = 7$

$ب = \frac{7}{2}$

ورقة عمل (٣)

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س \, جا ٨س + س \, ظاس - ظا^{٢}س}{س^{٢}}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} + ٢س - ٨)}{\sqrt{س + ٢} - ٢}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣} \, ظتاس}{١ - جتاس}$

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{س \times جا\left(\frac{\pi}{س}\right)}{س - ١}$

٥) $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{س^{٢} - \pi س}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{جا س}$

٧) $\lim_{س \to ١} \frac{جا \pi س}{١ - س^{٢}}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٢س}{جتا٢س - جتا٨س}$

٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٢س - جا٢س}{س^{٣}}$

١٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٢س + ظا^{٢}س}{س \, جاس}$

١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{(\pi - ٢س)^{٢}}$

١٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - ظتاس}{قتاس}$

١٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{٢جتا س - ١}{س - \frac{\pi}{٣}}$

١٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢} \, جاس - ١}{\sqrt{٢} \, جتاس - ١}$

١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٦س - ٢جا^{٢}س}{٥ س^{٢}}$

١٦) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{٢} - قاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا^{٢}س - جا^{٢}س - \sqrt{جتا٢س}}{س \, ظا٢س}$

١٨) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\sqrt{جاس} - \sqrt{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}}$

١٩) $\lim_{س \to -أ} \frac{جاس + جا أ}{س + أ}$

٢٠) $\lim_{س \to -\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس + ١}{(س + \frac{\pi}{٢})^{٢}}$

أسئلة تميز

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{قتا ٢س - ظتا٢س}{س}$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - ظاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣جاس - جا٣س}{س^{٣}}$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جا٢س - جاس}{\pi - ٢س}$

الإتصال

سيتم بحث الاتصال على

نقطة — فترة أو على الأعداد الحقيقية

أولاً:- الاتصال عند نقطة

تعريف: يقال لـ ق(س) أنه متصل عند س = أ إذا تحققت الشروط التالية

١) ق(أ) موجودة أو ق(س) معرَف عند س = أ

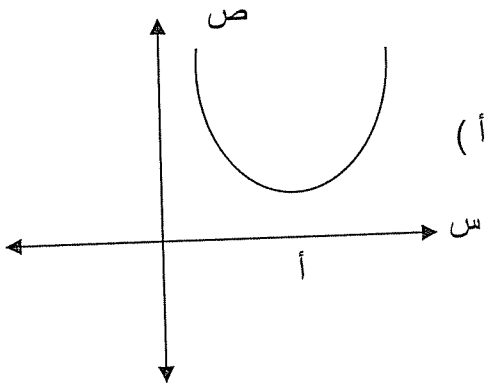
٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

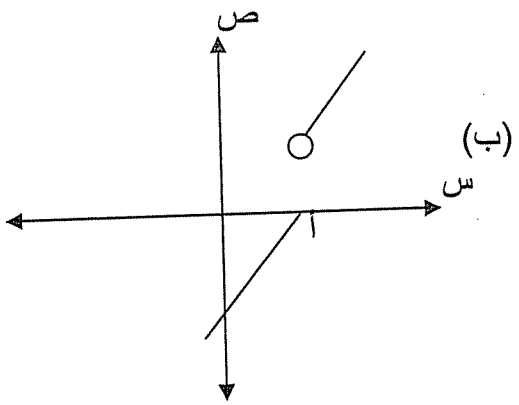
أمثلة:

١) في الأشكال التالية حدد أياً منها متصل عند س = أ مبيناً السبب

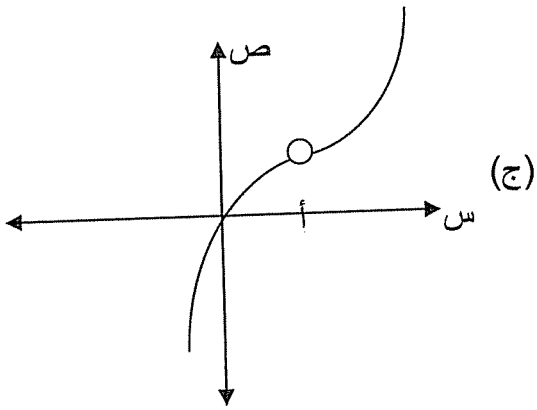
(أ)



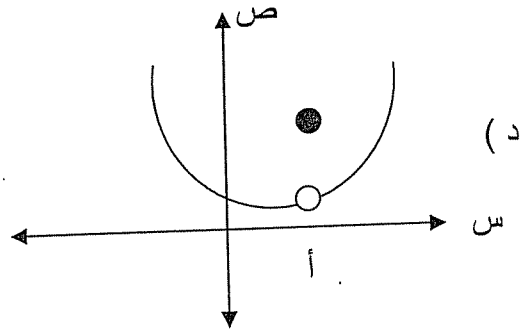
(ب)



(ج)



(د)



● نتائج

١) اقترانات كثيرات الحدود دائماً متصلة لكل س ∈ ح

٢) الاقترانان الدائريان جاس ، جتاس متصلان لكل س ∈ ح

٣) الاقترنات النسبية متصلة لكل س ∈ ح باستثناء اصفار المقام.. مثل ظاس، ظتاس، فاس، قتاس غير متصلة عند أصفار المقام

٤) القيمة المطلقة متصلاً بشرط ماداخله متصل

أمثلة:

٢) ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٦س & س = ٢ \end{cases}$

ابحث في الاتصال عند س = ٢

الحل

١) ق(٢) = ٦(٢) = ١٢ معرف

٢) $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$ = ÷

= $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{س-٢}$ = ١٢

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ١٢

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

٣) ابحث في اتصال ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$

عند س = ٢

الحل ق(س) = $\sqrt{(س-٢)^٢}$ = |س - ٢|

ق(س) = $\begin{cases} ٢ - س & ، س < ٢ \\ س - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

١) ق(٢) = ٠ معرف

٢) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٠ موجودة

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ق(٢) = ٠

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

٤) ابحث في اتصال ق(س) = (س − ٣)^٣ [س]

عند س = ٣ ، عند س = ١

الحل نجد التعريف

ق(س) = $\begin{cases} ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ (س-٣)^٣ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢(س-٣)^٣ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ ٣(س-٣)^٣ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

عند س = ١	عند س = ٣
غير متصل لأن	١) ق(٣) = صفر معرف
$\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = −٨	٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = صفر
$\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ٠	٣) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ق(٣) = ٠
$\lim_{س \to ١}$ ق(س) غير موجودة	∴ ق(س) متصل عند س = ٣

٥) ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠

ق(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{|س|} & ، س < ٠ \\ \frac{س - س^٢}{س} & ، س > ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

الحل : نجد التعريف

ق(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{س} & ، س < ٠ \\ \frac{س - س^٢}{س} & ، س > ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

١) ق(٠) = ١ معرف

٢) $\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ١

$\lim_{س \to ٠^-}$ $\frac{كـ(١-س)}{كـ}$ = ١

∴ $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ١

٣) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س) = ق(٠) = ١

متصل عند س = ٠

كتاب قديم

٦) ك(س) = { جا √س² ، س ≠ ٠ ; ١ ، س = ٠ }

ابحث في اتصال ك(س) عند س = ٠

الحل

ك(س) = { جا|س| ، س ≠ ٠ ; ١ ، س = ٠ }

ك(س) = { جاس ، س > ٠ ; جاس ، س < ٠ ; ١ ، س = ٠ }

ك(٠) = ١ معرف

$\lim_{س \to ٠^+}$ ك(س) = ٠

$\lim_{س \to ٠^-}$ ك(س) = ٠ ⇐ $\lim_{س \to ٠}$ ك(س) = ٠

لكن $\lim_{س \to ٠}$ ك(س) ≠ ك(٠)

∴ ك(س) غير متصل عند س = ٠

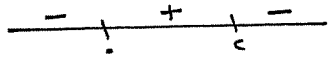
كتاب قديم

٨) إذا كان ك(س) = { √(س − ٢) ، س > ٢ ; |٢س − س²| ، س ≤ ٢ }

فابحث في اتصال الاقتران ك عند كل من

س = ٠ ، س = ٢

الحل



ك(س) = { √(س − ٢) ، س > ٢ ; س² − ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ; ٢س − س² ، س < ٠ }

عند س = ٠	عند س = ٢
ك(٠) = ٠	ك(٢) = ٠
$\lim_{س \to ٠^+}$ ك(س) = ٠	$\lim_{س \to ٢^+}$ √(س − ٢) = √٠ = ٠
$\lim_{س \to ٠^-}$ ك(س) = ٠	$\lim_{س \to ٢^-}$ (٢س − س²) = ٠
$\lim_{س \to ٠}$ ك(س) = ٠	$\lim_{س \to ٢}$ ك(س) = ك(٢)
منفصل	منفصل عند س = ٢

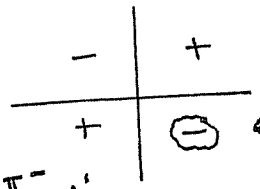
تدريب) ابحث في اتصال ق(س) = √(٧ − س) عند س = ٧

كتاب جديد

٧) ق(س) = { |ظاس| / س ، س < ٠ ; ١ − ٢جتاس ، س ≥ ٠ }

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠

الحل



هـ(س) = { −ظاس / س ، س < ٠ أي في الربع الثالث ; ١ − ٢جتاس ، س ≥ ٠ أي في الربع الأول }

$\lim_{س \to ٠^+}$ هـ(س) = ١ − ٢جتا٠ = −١

$\lim_{س \to ٠^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ −ظاس / س = −١

∴ $\lim_{س \to ٠}$ هـ(س) = −١

هـ(٠) = ١ − ٢جتا٠ = −١

$\lim_{س \to ٠^+}$ هـ(س) = هـ(٠) = −١

∴ هـ(س) متصل عند س = ٠

تدريب)

ابحث في اتصال ق(س) = { (٩ − س²) / (س − ٣) ، |س| ≤ ٣ ; ٣س ، |س| > ٣ }

عند س = ٣ ، −٣

٨)

ق(س) = { ٣س + جتاس + ١ ، س ∈ ص ; س + س² + ٢ ، س ∉ ص }

ابحث في إتصال ق(س) عند س = ٠

الحل

١) هـ(٠) = ٣(٠) + جتا٠ + ١ = ٣ معرف

٢) $\lim_{س \to ٠}$ هـ(س) = (٠) + (٠)² + ٢ = ٢ موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠}$ هـ(س) = هـ(٠) = ٢

∴ هـ(س) متصل عند س = ٠

٩) كتاب/٢٠١٦ شتوي

إذا ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٩س^{٢}-١}{\sqrt{١-٦س+٩س^{٢}}} & ، -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & ، س = \frac{١}{٣} \\ -٦س-[س] & ، \frac{١}{٣} < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\frac{١}{٣}$

الحل

$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{٩س^{٢}-١}{\sqrt{(١-٣س)^{٢}}} & ، -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & ، س = \frac{١}{٣} \\ -٦س-[س] & ، \frac{١}{٣} < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{٩س^{٢}-١}{|١-٣س|} & ، -\frac{١}{٣} < س < \frac{١}{٣} \\ -٢ & ، س = \frac{١}{٣} \\ -٦س-[س] & ، \frac{١}{٣} < س < \frac{٤}{٣} \end{cases}$

١) $هـ(\frac{١}{٣}) = -٢$

٢) $\lim_{س \to \frac{١}{٣}^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٣}} -٦س-[س] = -٢$

$\lim_{س \to \frac{١}{٣}^{-}} هـ(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٣}} \dfrac{٩س^{٢}-١}{١-٣س}$

$= \lim_{س \to \frac{١}{٣}} \dfrac{(٣س-١)(٣س+١)}{(١-٣س)} = -٢$

$\therefore \lim_{س \to \frac{١}{٣}} هـ(س) = -٢$

٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٣}} هـ(س) = هـ(\frac{١}{٣}) = -٢$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = \frac{١}{٣}$

١٠) ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{(٥-س^{٢})-[٢س+٣]}{١-س} & ، ٠ < س < ١ \\ |٢س-|١-س^{٢}|| & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ١

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

١١) ابحث في اتصال ق(س)

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\left|\dfrac{١}{س+٣}\right| - \dfrac{١}{٤}}{|س-١|} \times ٢٠ & ، س < ١ \\ \dfrac{\sqrt{[٢-س]+٣س} - ٢س}{س-١} & س > ١ \\ -\dfrac{٥}{٤} \text{ جتا}(س-١) & س = ١ \end{cases}$$

عند س = ١

نفيد بتعاريف

$$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{١}{س+٣} - \dfrac{١}{٤}}{س-١} \times ٢٠ & ، س \neq ١ \\ -\dfrac{٥}{٤} \text{ جتا}(س-١) & ، س = ١ \end{cases}$$

١) $هـ(١) = -\dfrac{٥}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ١^+} \dfrac{٤ - (س+٣)}{(س+٣)(٤)(س-١)} \times ٢٠$

$= \lim_{س \to ١^+} \dfrac{١ - س}{(س+٣)(٤)(س-١)} \times ٢٠ = \dfrac{-٢٠}{١٦}$

$= -\dfrac{٥}{٤}$

$= \lim_{س \to ١^+} \dfrac{\sqrt{١+٣س} - ٤س}{س-١} \times \dfrac{\sqrt{١+٣س} + ٤س}{\sqrt{١+٣س} + ٤س}$

$= \lim_{س \to ١^+} \dfrac{١+٣س-١٦س^٢}{(س-١)(\sqrt{١+٣س} + ٤س)}$

$= \lim_{س \to ١^+} \dfrac{(س-١)(-١٦س-١)}{(س-١)(\sqrt{١+٣س} + ٤س)} = -\dfrac{٥}{٤}$

$\therefore \lim_{س \to ١^+} هـ(س) = \lim_{س \to ١^-} هـ(س) = هـ(١) = -\dfrac{٥}{٤}$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ١$

١٢) جد قيم المجاهيل في الاقترانات التالية التي تجعل ق(س) متصل عند النقط المبينة

أ) $ق(س) = \begin{cases} أ\,س^٢ & س \leq ٢ \\ ٢س + أ & س > ٢ \end{cases}$

عند س = ٢ ق(س) متصل جد أ

الحل

$\because هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$

$\lim_{س \to ٢^+} ٩س^٢ = \lim_{س \to ٢^-} (٢س + ٩)$

$٣٦ = ٤ + ٩ \leftarrow ٩ = ٤ \leftarrow ٩ = \dfrac{٤}{٣}$

ب) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\,أس}{٢س} & س > ٠ \\ \dfrac{٣س}{\text{ظا}\,ب\,س} & س < ٠ \\ ٣ & س = ٠ \end{cases}$

جد أ ، ب حيث ق متصل عند س = ٠

الحل

$\because هـ(س)$ متصل عند $س = ٠ \Leftarrow$

١) $\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = هـ(٠) \Leftarrow \dfrac{أ}{٢} = ٣ \Leftarrow أ = ٦$

٢) $\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = هـ(٠) \Leftarrow \dfrac{٣}{ب} = ٣ \Leftarrow ب = ١$

ج) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{(-١)^ن \text{جا}٢س}{٣س} & س > ٠ \\ \dfrac{٢ - ٢س}{٣س^٢ - ٣} & س \leq ٠ \end{cases}$

جد ن التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٠

حيث ن عدد صحيح

الحل

$\because هـ(س)$ متصل عند $س = ٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} هـ(س)$

$\lim_{س \to ٠^+} \dfrac{(-١)^ن \text{جا}٢س}{٣س} = \lim_{س \to ٠^-} \dfrac{٢ - ٢س}{٣س^٢ - ٣}$

$(-١)^ن \times \dfrac{٢}{٣} = -\dfrac{٢}{-٣} \Leftarrow (-١)^ن = -١$

$\therefore ن$ كل الأعداد الصحيحة الفردية

د) ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - (١ - أ)س - أ}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٣ & س = ١ \end{cases}$

جد قيمة أ التي تجعل ق(س) متصل عند س = ١

الحل

∵ ق(س) متصل عند س = ١

∴ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ق(١)

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+أ)}{س-١} = ٣ \Leftarrow ١ + أ = ٣$

∴ أ = ٢

هـ) ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٣س + أ}{س - ٢} & س > ٢ \\ ب & س \leq ٢ \end{cases}$

جد قيمة أ ، ب التي تجعل ق(س) متصل عند س = ٢

الحل

∵ ق(س) متصل عند س = ٢

⇐ النظام من الجبر موجودة وناتج تعويض النظام = صفر ⇐ $\lim_{س \to ٢}$ للبسط = صفر ⇐ ٤ + ٢أ = ٠ ⇐ أ = ٢

كذلك $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س - ٢}$ = ب

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س-١)}{س-٢}$ = ب ⇐ ب = ١

كتاب

و) ل(س) = $\begin{cases} [س] + أ & س \leq ٢ \\ أس & س > ٢ \end{cases}$ (للطالب)

جد أ التي تجعل ل(س) متصل عند س = ٢

الحل

∵ متصل عند س = ٢

⇐ $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ ([س] + أ) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (أس)

٢ + أ = ٢أ ⇐ أ = ٢

كتاب

ز) ق(س) = $\begin{cases} أس^{٣} - ب س + ١ & س > ١ \\ ٥ & س = ١ \\ س^{٢} - (أ+ب)س + ٢ & س < ١ \end{cases}$ (للطالب)

جد أ ، ب التي تجعل ق(س) متصل عند س = ١

الحل

∵ ق(س) متصل عند س = ١

أ) $\lim_{س \to ١^{+}}$ س^{٢} - (أ+ب)س + ٢ = ٥

أ - ب = ٢ - - - (١)

ب) $\lim_{س \to ١^{+}}$ (أس^{٣} - ب س + ١) = ٥

أ - ب = ٤ - - - (٢)

بالجمع ⇐ -٢ب = ٦ ⇐ ب = -٣ ، أ = ١

كتاب

ح) د(س) = $\begin{cases} \frac{جا^{٢}(ب س) - س^{٢}}{س جا ٢س} & -\frac{\pi}{٤} \leq س < ٠ \\ \frac{١}{٢} & س = ٠ \\ \frac{س^{٢} + (١ - أ)س}{أس} & ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

د(س) متصلا عند س = ٠ ، فجد أ ، ب .

الحل

د(س) متصل عند س = ٠

⇐ $\lim_{س \to ٠^{+}}$ $\frac{س(س + ١ - أ)}{أ س}$ = ٢

أ = ١ - أ ⇐ أ = $\frac{١}{٣}$

كذلك $\lim_{س \to ٠^{-}}$ د(س) = د(٠)

$\lim_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{جا^{٢}ب س - س^{٢}}{س جا ٢س}$ = ٢

⇐ $\lim_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{جا^{٢}ب س}{س جا ٢س} - \frac{س^{٢}}{س جا ٢س}$ = ٢

⇐ $\frac{ب^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}$ = ٢ ⇐ ب^{٢} = ٥

ب = ± $\sqrt{٥}$

نظريات في الاتصال

إذا كان كل من الاقترانين ق(س) ، هـ(س) متصلاً عند س = أ فإن

١) ق(س) + هـ(س) متصل عند س = أ

٢) ق(س) - هـ(س) متصل عند س = أ

٣) جـ . ق(س) متصل عند س = أ ، جـ ∈ ح

٤) ق(س) . هـ(س) متصل عند س = أ

٥) $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متصل عند س = أ بشرط أ ≠ ٠

(اثبت النظريات)

ملاحظة:

إذا كان أحد الاقترانين غير متصل عند س = أ أو كلا الاقترانين فإننا نلجأ عادةً إلى التعريف ولانستخدم النظريات.

سؤال:

هل إذا كان حاصل جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة اقترانين متصل فهذا يعني أن كل من الاقترانين متصل؟؟؟

أمثلة:

١٣) إذا كان ق(س) = $س^{٢} + ١$

هـ(س) = |س - ٣|

ابحث في اتصال (ق(س)+هـ(س)) عند س = ٣

الحل: م(س) متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

$هـ(س) = \begin{cases} -(س-٣) & ، س \leq ٣ \\ س-٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

هـ(٣) = ٠ ، $\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ٠$

هـ(س) متصل عند س = ٣

حسب نظريات الاتصال

فإن م + هـ متصل عند س = ٣

كتاب

١٤) $م(س) = \begin{cases} \frac{\frac{١}{٨}س^{٣} + ١}{س + ٢} & ، س > -٢ \\ \frac{٣}{٤} & ، س \leq -٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \frac{جتا \frac{\pi س}{٤}}{س}$

ابحث في اتصال م + هـ عند س = - ٢

الحل

هـ(س) اقتران نسبي متصل عند س = -٢ لأن س = -٢ ليس أحد أصفار المقام

$م(-٢) = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to -٢^-} م(س) = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) = \lim_{س \to -٢^+} \frac{\frac{١}{٨}(س^{٣}+٨)}{س+٢}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{\frac{١}{٨}(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}{س+٢}$

$= \frac{١}{٨} \times ١٢ = \frac{٣}{٢}$

$\lim_{س \to -٢} م(س) = \lim_{س \to -٢^+} م(س) = \lim_{س \to -٢^-} م(س) = م(-٢)$

∴ م(س) متصل عند س = -٢

حسب نظريات الاتصال

فإن م + هـ متصل عند س = -٢

٢٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س^{٢} & س \leq ١ \\ ٢ + س & س > ١ \end{cases}$

هـ(س) = $\begin{cases} ٢س & س \leq ١ \\ ٣س - ٢ & س > ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق – هـ عند س = ١

الحل هـ غير متصل عند س = ١ لأن لـ هـ(س) غير موجودة

∴ نفرض ل(س) = ق – هـ = $\begin{cases} ٤س - ٢س ، س \geq ١ \\ ٤ - ٢س ، س < ١ \end{cases}$

نبحث من اتصال ل(س)

ل(١) = ٤(١)^{٢} – ٢(١) = ٢ معرفة

$\lim_{س \to ١^{+}}$ ل(س) = ٢

$\lim_{س \to ١^{-}}$ ل(س) = ٤ – ٢(١) = ٢

∴ $\lim_{س \to ١}$ ل(س) = ٢ موجودة

$\lim_{س \to ١}$ ل(س) = ل(١) = ٢

∴ ل(س) متصل عند س = ١

---

٢٠) إذا كان ق(س) اقتران متصل وكان ق(٢) = ٣

وكانت نهـا ق(٣ – س) + أ س = ٤ جد أ
س ← ١

الحل ∵ هـ(س) ⇐ النهاية = الصورة

أي نستطيع التعويض

المطلوب هـ(٢) + ٢ = ٤ ⇐ ٢ = ١

---

٢١) إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود وكانت

نهـا ق^{٣} (س + ١) – ٣س = ١٨ جد ق(٤)
س ← ٣

الحل ∵ هـ(س) كثير حدود ⇐ متصل

⇐ نعوض

هـ^{٣} (٤) – ٩ = ١٨ ⇐ هـ^{٣}(٤) = ٢٧

∴ هـ(٤) = ٣

ثانياً: الاتصال على فترة

تعريف:

يكون الاقتران ق(س) متصلاً على [أ ، ب]
إذا كان متصلاً عند كل نقطة من نقاط الفترة (أ ، ب)
وكان متصلاً من اليمين عند س = أ (بداية الفترة)
أي نهـا ق(س) = ق(أ)
س ← أ+

ومتصلاً من اليسار عند س = ب (نهاية الفترة)
أي نهـا ق(س) = ق(ب)
س ← ب-

إذاً لبحث الاتصال في اقتران متشعب على [أ ، ب]

١) نبحث في اتصال كل قاعدة على الفترة الجزئية المعرَف عليها

٢) نبحث في الاتصال عند نقاط التشعب
(الاتصال على نقطة)
(يمين و يسار و صورة)

٣) نبحث في الاتصال عند أطراف الفترة

كما بينا بداية الفترة (يمين و صورة)
نهاية الفترة (يسار و صورة)

أمثلة

١٨) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 + ١ & -١ \le س \le ٣ \\ ١٣ - س & ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$

على مجاله

الحل المجال $[-١، ٤]$

١) قواعد

$د(س)$ متصل على $(-١، ٣)$ لأنه على صورة كثير حدود

$د(س)$ متصل على $(٣، ٤)$ لأنه على صورة كثير حدود

٢) نقاط التشعب (التفرع) $س = ٣$

$د(٣) = ١٠$

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = ١٣ - ٣ = ١٠$

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = (٣)^2 + ١ = ١٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣} د(س) = ١٠ = د(٣)$

$\therefore د(س)$ متصل عند $س = ٣$

٣) نبحث في اتصال الأطراف

$س = -١$ من اليمين

$د(-١) = ٢$ ، $\lim_{س \to -١^+} د(س) = ٢$

$د(س)$ متصل من اليمين عند $س = -١$

$س = ٤$ من اليسار

$د(٤) = \lim_{س \to ٤^-} د(س)$

$\therefore د(س)$ متصل على الفترة $[-١، ٤]$

١٩) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 + ٢س}{س} & -٢ \le س < ٠ \\ ٢ & س = ٠ \\ [٢ + س] & ٠ < س \le ١ \end{cases}$$

على الفترة $[-٢، ١]$

الحل: نحيد لتعريف

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 + ٢س}{س} & ، -٢ \le س < ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ ٢ & ، ٠ < س < ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$$

١) القواعد

$د(س)$ متصل على $(-٢، ٠)$ لأنه يحوي على جميع نقاط الفترة (لأن أصفار $\notin (-٢، ٠)$)

$د(س)$ متصل على $(٠، ١)$ لأنه على صورة كثير حدود «ثابت»

٢) نقاط التشعب (التفرع) $س = ٠$

$د(٠) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٠^+} د(س) = ٢$

$\lim_{س \to ٠^-} د(س) = \lim_{س \to ٠^-} \dfrac{س(س+٢)}{س} = ٢$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = \lim_{س \to ٠^+} د(س) = د(٠)$

$\therefore د(س)$ متصل عند $س = ٠$

٣) الأطراف

$د(-٢) = ٠$ ، $\lim_{س \to -٢^+} د(س) = ٠$ ← متصل من اليمين عند $س = -٢$

$د(١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ١^-} د(س) = ٢$

غير متصل من اليمين عند $س = ١$

$\therefore د(س)$ متصل على $[-٢، ١)$

٢٠)(٢٠٠٨صيفي)

اذا كان ق(س) = $\begin{cases} [س] + س & ، -١ \leq س \leq ٠ \\ \sqrt{س} + \frac{٣}{٥} س^{٢} & ، ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

فإبحث في اتصال ق على [-١ ، ٢]

الحل: نفيد لتعريف

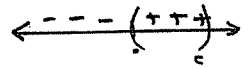
$ق(س) = \begin{cases} -١ + س & ، -١ \leq س < ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \\ \sqrt{س} + \frac{٣}{٥} س^{٢} & ، ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

لقواعد

ق(س) متصل عل [-١،٠) لأنه عل صورة كثير حدود

ق(س) متصل عل (٠،٢] لأنه جمع متصلين

(او لأنه معرف عل جمع نقاط الفترة)



نقاط التفرع س = ٠

ق(٠) = ٠

$\lim_{س \to ٠^{+}} ق(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٠^{-}} ق(س) = -١$

$\lim_{س \to ٠}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٠

الأطراف

س = -١ ⇐ ق(-١) = -٢

$\lim_{س \to -١^{+}} ق(س) = -٢$ متصل من اليمين

س = ٢ ⇐ ق(٢) = $\sqrt{٢} + \frac{١٢}{٥}$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ق(س) = \sqrt{٢} + \frac{١٢}{٥}$

ق(س) متصل من اليسار عند س = ٢

∴ ق(س) متصل عل [-١،٢] / {٠}

كتاب

٢١) إذا كان

د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{س} + ٥ & ، س \leq ١ \\ ٢س^{٢} + ٤ & ، س > ١ \end{cases}$

فإبحث في اتصال الاقتران د(س) على ح .

الحل

لقواعد

د(س) متصل عل (١،∞) لأنه معرف عل جميع نقاط الفترة (لأن أصفار المقام ∉ (١،∞))

د(س) متصل عل (-∞،١) لأنه عل صورة كثير حدود

نقاط التفرع س = ١

د(١) = ٦

$\lim_{س \to ١^{+}}$ د(س) = ٦

$\lim_{س \to ١^{-}}$ د(س) = ٦

$\lim_{س \to ١}$ د(س) = د(١) = ٦

⇐ $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٦

د(س) متصل عند س = ١

∴ د(س) متصل عل ح (جميع الأعداد الحقيقية)

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٢٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٣} - ١ & ، س < ٠ \\ \left[\frac{س}{٢}\right] & ، ٠ \leq س < ٣ \\ \sqrt{٦ + س} - ٢ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

الحل: نفيد التعريف

هـ(س) = $\begin{cases} س^{٣} - ١ & ، س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < ٣ \\ \sqrt{٦ + س} - ٢ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

القواعد

هـ(س) متصل على (-∞، ٠) لأنه على صورة كثير حدود

هـ(س) متصل على (٠، ١) لأنه على صورة كثير حدود

هـ(س) متصل على (١، ٣) لأنه على صورة كثير حدود

هـ(س) متصل على (٣، ∞) لأنه على الفترة معرف أو لأنه ضمه إلى المجال الموجب

نقاط التفرع

هـ(س) غير متصل عند س = ٠ لأن

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ هـ(س) ≠ $\lim_{س \to ٠^{-}}$ هـ(س)

كذلك عند س = ١ غير متصل لأن

$\lim_{س \to ١^{+}}$ هـ(س) ≠ $\lim_{س \to ١^{-}}$ هـ(س)

بينما عند س = ٣ متصل لأن

$\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ هـ(س) = هـ(٣) = ١

∴ هـ(س) متصل على ح / {٠، ١}

(للطالب) ٢٣) إبحث في اتصال

ق(س) = $\begin{cases} [س+١] & ، س = ٢ \\ \frac{س+١}{س-١} & ، ٢ < س \leq ٣ \\ \sqrt{س + ١} & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

على الفترة [٢، ٤] ؟

الحل: صورة

هـ(س) = $\begin{cases} ٣ & ، س = ٢ \\ \frac{س+١}{س-١} & ، ٢ < س \leq ٣ \\ \sqrt{س+١} & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

القواعد

هـ(س) متصل على (٢، ٣) لأنه معرف على جميع نقاط الفترة إلا لأن أصغار المقام ∉ (٢، ٣)

هـ(س) متصل على (٣، ٤) لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

أو لأنه معرف على المنطقة الموجبة

نقاط التفرع (التحول) س = ٣

هـ(٣) = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ معرف

$\lim_{س \to ٣^{+}}$ هـ(س) = $\sqrt{٤}$ = ٢ ، $\lim_{س \to ٣^{-}}$ هـ(س) = ٢

متصل عند س = ٣

الأطراف هـ(٢) = ٣ $\lim_{س \to ٤^{-}}$ هـ(س) = ٣

هـ(س) متصل من اليمين عند س = ٢

هـ(٤) = $\sqrt{٥}$ = $\lim_{س \to ٤^{-}}$ هـ(س)

∴ هـ(س) متصل عند س = ٤ من جهة اليسار

∴ هـ(س) متصل على [٢، ٤]

٢٠١٢/ش)
٢٤)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} ٥س - ٩ & ، س \geq ٢ \\ [٢ - \frac{١}{٢}س] & ، ٢ > س \geq ٤ \\ |س - ٤| & ، س > ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) على مجموعة الاعداد الحقيقية .

الحل : نعيد التعاريف

$$ق(س) = \begin{cases} ٥س - ٩ & ، س \geq ٢ \\ ٠ & ، ٢ > س \geq ٤ \\ س - ٤ & ، س > ٤ \end{cases}$$

نوائم

ق(س) متصل على $(-\infty, ٢)$ لأنه على صورة كثير حدود

ق(س) متصل على $(٢, ٤)$ لأنه على صورة كثير حدود (ثابت)

ق(س) متصل على $(٤, \infty)$ لأنه على صورة كثير حدود

نقاط التفرع

$س = ٢$

$ق(٢) = ١$ $\quad \lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٠$

$\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند $س = ٢$

$س = ٤$

$ق(٤) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ٠$

$\therefore$ ق(س) متصل عند $س = ٤$

$\therefore$ ق(س) متصل على ح / $\{٢\}$

٢٥) جد قيم المجاهيل التالية التي تجعل ق(س) متصلاً على ح

أ) ق(س) = $\frac{س}{س^٢ + ٥س + جـ}$

ب) ق(س) = $\begin{cases} س + ٢ & س \leq ٢ \\ أس - ب & ٢ < س < ٤ \\ س^٢ - ٦ & ٤ \leq س \end{cases}$

٢٦) جد نقاط أو فترات عدم الاتصال في كل مما يلي

أ) ق(س) = $س^٢ + ٤س - ١$

ب) ق(س) = $\frac{٤}{س^٢ - ٩}$

ج) ق(س) = $\sqrt{٢ س^٢ + ٨}$

د) $ق(س) = \frac{٢ - س}{|س| - ٤}$

هـ) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & س > ٢ \\ ٦ - س & س < ٢ \end{cases}$

و) $ق(س) = \sqrt[٤]{\frac{س - ٣}{١ - س^{٢}}}$

ز) $ق(س) = [\frac{١}{٢} س - ١]$

ح) $ق(س) = [\frac{١}{٢} س - \frac{٢}{٣}]$

ط) $ق(س) = \frac{س - ٦}{[س - ٤]}$

ورقة عمل (٤)

١) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} |٢س - ١| & -١ \leq س \leq ٣ \\ \sqrt{س + ١} & ٣ < س \leq ٤ \\ \frac{٤}{س} + ١ & ٤ < س \leq ٥ \end{cases}$$

على الفترة [-١ ، ٥] .

(٢٠٠٤) إذا كان

٣) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & س < ٠ \\ [\frac{س}{٣} + ٢] & ٠ \leq س < ٢ \\ \sqrt{س + ٧} + \frac{٤}{س} & س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال ق(س) لكل س عدد حقيقي

٣) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظاس|}{س^2} & 0 < س < \frac{\pi}{2} \\ جتا\ س & \frac{\pi}{2} \le س \le \pi \end{cases}$$

على الفترة $(0 ، \pi]$ ؟

٤) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} [س+1] & |س| \ge 1 \\ |س-1| & |س| < 1 \end{cases}$$

على مجاله ؟

٥) $ق(س) = \frac{س + 1}{س^2 + 2س + جـ}$

جد جـ التي تجعل ق(س) متصل على ح

٦) $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq 0 \\ [س + 1] & ، س = 0 \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

٧) $ق(س) = \begin{cases} س & ، س < 1 \\ ٣ & ، س = 1 \\ ٤ & ، س > 1 \end{cases}$

هـ(س) = جا πس

ابحث في اتصال ق × هـ عند س = ١

٨) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} |٢س-٦| & -1 \le س < ٢ \\ \left[\frac{س}{٢}\right] & ٢ \le س < ٤ \\ \sqrt{س} + 1 & س = ٤ \end{cases}$$

على الفترة [-١ ، ٤]

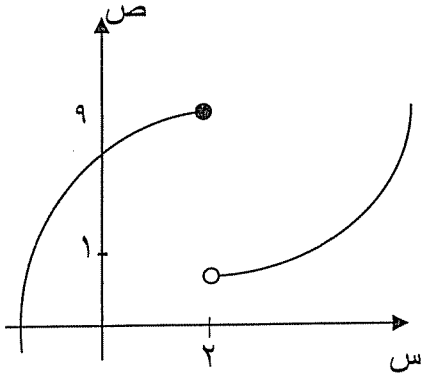
٩) ابحث في اتصال

$$ق(س) = \begin{cases} جتاس & -\frac{\pi}{2} < س \le 0 \\ \frac{ظاس}{س} & 0 < س < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2} ، \frac{\pi}{2}\right)$

١٠) $ق(س) = \begin{cases} ٢س^2 + 1 & |س| < ٢ \\ ٣ - س & |س| \ge ٢ \end{cases}$

وكان منحنى هـ(س) يعطى بالشكل



ابحث في اتصال ق(س) + هـ(س)عند س = ٢

١١) جد قيم أ التي تجعل ق(س) متصل على ح

$$ق(س) = \frac{س + ٩}{أ\ س^2 - ٤س + أ}$$

١٢) إذا علمت أن $ق(س) = \sqrt{[س] + س}$

هـ(س) = $س^2$ + ١ ابحث في اتصال ق× هـ على الفترة [٠ ، ١]

(٢٠٠٩/ش)

١٣)

$$اذا\ كان\ ق(س) = \begin{cases} س^2 + \sqrt{-س} & ، -1 \le س < 0 \\ [س] + ٥س - ٢ & ، 0 \le س \le 1 \end{cases}$$

فإبحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [-١ ، ١]

كتاب قديم

١٤)

$$ع(س) = \begin{cases} |٢س - ١| & ، -1 \le س \le 1 \\ [\frac{1}{2} س + ٢] & ، 1 < س \le ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ع(س) على [-١ ، ٣]

١٥) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} أ\,س^{٢} + ١ & س < ١ \\ ٧ + ب\,س & س > ١ \\ ٥س & س = ١ \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٧س & س < ١ \\ ٣س + ١ & س > ١ \\ س + ٤ & س = ١ \end{cases}$$

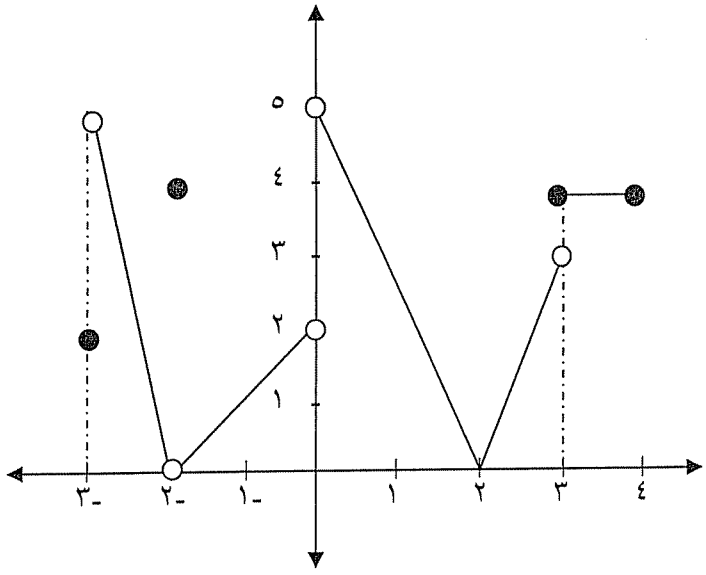
و كان ق(س) + هـ(س) متصل عند س = ١ جد أ ، ب

١٦) إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س < ١ ، س \neq ٠ \\ \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢} & ، س \geq ١ \end{cases}$$

فإبحث في اتصال الاقتران د(س) على ح

١٧)



أ ∈ {-٣، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

جد أ حيث

١) ق(س) غير متصل

٢) ق(س) غير متصل بسبب نهـا ق(س) غير موجودة.
س ← ا

٣) ق(س) غير متصل بسبب ق(أ) غير معرّف.

٤) ق(س) غير متصل بسبب نهـا ق(س) ≠ ق(أ)
س ← ا

حيث: نهـا ق(س) موجودة
س ← م
ق(م) معرفة

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

حل ورقة عمل (١)

١) نحل المعادلة ونجرب المعطى

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ١٠ \Leftarrow \lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$

المطلوب $\lim_{س \to ١} س \times \lim_{س \to ١} ق(س) + (\lim_{س \to ١} ق(س))^{٢} - ١$

$= ٥ \times ٥ + (٥)^{٢} - ١ = ٤٩$

٢) $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٢$ نكعب $\Leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٨$

نوزع النهاية $٢ \lim_{س \to ٢} هـ(س) - ٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) + ٥ = ٢٤$

$١٦ - ٣ \lim_{س \to ٢} ق(س) + ٥ = ٢٤$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = -١ \Leftarrow (\lim_{س \to ٢} ق(س))^{٢} = ١$

٣) المطلوب $\left(\dfrac{\lim_{س \to ١} ق(س)}{س}\right)^{٢} = (٣)^{٢} = ٩$

٤) نجرب المعطى

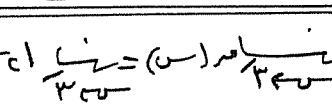
$\lim_{س \to ٣} \dfrac{ق(س)}{س - ٣} \times \lim_{س \to ٣} \dfrac{١}{س^{٣} - ٣س + ٩} = ٢$ (نعوض)

$\therefore \lim_{س \to ٣} \dfrac{ق(س)}{س - ٣} = ٥٤$

المطلوب $\lim_{س \to ٣} \dfrac{ق(س)}{س - ٣} \times \dfrac{١}{س + ٣}$ (نعوض)

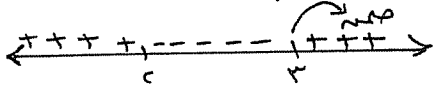
$= ٥٤ \times \dfrac{١}{٦} = ٩$

٥)

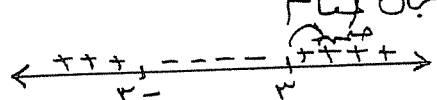


النهاية غير موجودة

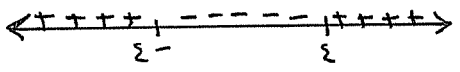
٦) مجال البسط



مجال المقام

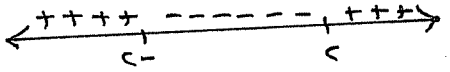


٧)



$ب \in (-\infty، -٤) \cup (٤، \infty)$

٨)



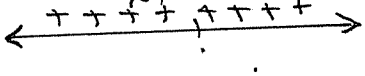
$ب \in [-ج، ج]$

لأن ٢ من المقام موجودة لذلك لا تختفيها

٩) $[ب + ١] = ٧ \Leftarrow ٧ \geq ب + ١ > ٨$

$٣ \leq ب < ٣,٥ \Leftarrow ب \in [٣، ٣,٥)$

١٠) ٧٠ نقطة من الرسم



= صفر

١١) $[ب + ١-] = ٥ \Leftarrow ٥ > ب + ١- \geq ٦$

$٧ \geq ب > ٦$

١٢) $[-١]^{+} = \dfrac{-١}{|ب + ١|} \Leftarrow |ب + ١| = ١$

$ب + ١ = ١ \Leftarrow ب = ٠$

$ب + ١ = -١ \Leftarrow ب = -٢$

١٣) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \lim_{س \to ٣} ا س + ١ = ٧ \quad (ب)$

١٤) $٢ \lim_{س \to ج} ق(س) + ٦ = ١٠ \Leftarrow \lim_{س \to ج} ق(س) = ٢$

$٣ \lim_{س \to ج} هـ(س) = ج$ نكعب $\Leftarrow \lim_{س \to ج} هـ(س) = ٨$

المطلوب $= \dfrac{٥}{٨} + ٤ = \dfrac{١٧}{٤}$

١٥) $\lim_{س \to ٢} ل(٤س - ٦) = ٨ - ٦$

نفرض ص $= ٤س - ٦$ عندما $س \to ٢$ ، $ص \to ٢$

$\lim_{ص \to ٢} ل(ص) = ٢$

$\therefore (\lim_{س \to ٢} ل(س))^{٣} + (-٢ع)^{٣} = ٦٨$

$٤ - ٨ ع^{٣} = ٦٨ \Leftarrow -٨ع^{٣} = ٦٤ \Leftarrow ع^{٣} = -٨ \Leftarrow ع = -٢$

١٦) نقل الصورة

$\lim_{س \to ١} هـ(٤س + ٧) = -٢$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ٥$

$\lim_{ص \to ٥} هـ(ص) = -٢$

المطلوب $(\lim_{ص \to ٥} هـ(س))^{٣} + ٢(٥) = (-٢)^{٣} + ١٠ = ٢$

١٧) $\lim_{س \to ٣} (٢هـ(س) - ٥و(س)) = -٣ - ٣ = -٦$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س) - و(س)) = -٣$

ج) $\lim_{س \to ٣} ((هـ(س) - و(س))^{٢} + ٧س) = ٩ + ٢١ = ٣٠$

ب) $\lim_{س \to ٣} س^{٣} \times \lim_{س \to ٣} (هـ(س) - و(س))^{٣} = ٩ \times -٧ = -٢٤٣$

١٨) نرتب المسألة

$\lim_{س \to ٣} (هـ^{٢}(س) - ٩هـ(س) + ١٤) = ٠$

$(\lim_{س \to ٣} هـ(س))^{٢} - ٩ \lim_{س \to ٣} هـ(س) + ١٤ = ٠$

$(\lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٢)(\lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٧) = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٧$ ✗

لأن $\lim_{س \to ٣} هـ(س) < ٣$

١٩) $هـ(س) = أس + ب$

$\lim_{س \to -٢} (أس + ب) = -٢أ + ب = ١$ ---- ①

$\lim_{س \to ٣} (أس + ب) = ٣أ + ب = ١٦$ ---- ②

بالطرح $-٥أ = -١٥ \leftarrow أ = ٣$

$ب = ٧$

$\therefore هـ(س) = ٣س + ٧$

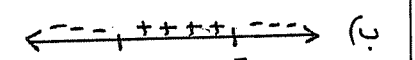
٢٠) $(٢ع - ٣)(٤ع + ٥) = ٨ع^{٢}$

$٨ع^{٢} - ٢ع - ١٥ = ٨ع^{٢}$

$-٢ع = ١٥ \leftarrow ٢ع = -١٥ \leftarrow ع = -\frac{١٥}{٢}$

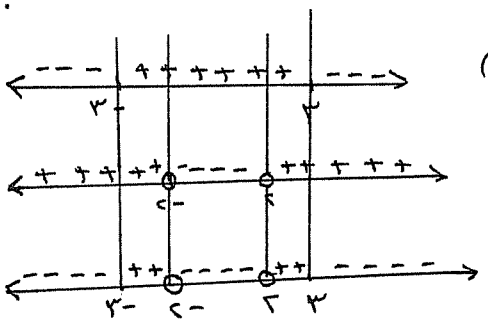
٢١) أ) $ح / \{-٥\}$

ب) $أ \in (-\infty, ١) \cup (٢, \infty)$



ج) ح لأن جاذ لا يمكن أن تكون أكبر من ١

د)



$أ \in (-٣, -٢) \cup (٢, ٣)$

٢٢) أ) $\lim_{س \to ١} [٦ - ٢س] = [٤] = ٣$

ب) $\lim_{س \to ١} ا س - ١ا =$ حرفي $\Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س)$ غير موجودة

٢٣) $\lim_{س \to ١} هـ(س) = \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$[٤] = أ + [١] \Leftarrow ٣ = أ + ٥ \Leftarrow أ = -٢$

٢٤) أ) $٢(٠) + ٣(١) + (٠)^{٢} = ٣$

ب) $٣(٣) - ٢(١) + ٦ = ١٣$

ج) $\{-١\} \cup [٠, ٢)$

د) نجرب جميع قيم أ المعطاة $أ = ١ - ٧١٦٠ =$

لأن $\lim_{س \to ١} هـ(س) + و(س) = \lim_{س \to ١} هـ(س) + و(س) = ١$

كذلك بقية الخيارات ١٧ - ١ هي مجموع متساويين

هـ) $ص = ٣ - س$ ، $ع = ٢ - س$

$س \to ٢^{+}$ ، $ص \to ١^{-}$ ، $س \to ٢^{+}$ ، $ع \to ٠^{-}$

$\lim_{ص \to ١} هـ(ص) + \lim_{ع \to ٠} هـ(ع) = ١ + ٣ + ٤ = ٨$

٢٥) $هـ(٣) = ٤ = \lim_{س \to ٣} هـ(س)$ لأنه كثير حدود

$و(٣) = ٠ = \lim_{س \to ٣} و(س)$ " " "

$هـ^{٢}(٣) + و^{٣}(٣) + ٩أ = ٥٢$

$١٦ + ٠ + ٩أ = ٥٢ \leftarrow أ = ١$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر حمدة

حلول ورقة عمل (٣) ص ٦٣

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س-١}-١}{\sqrt{٦+س}-٣} \times \frac{\sqrt{س-١}+١}{\sqrt{س-١}+١}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س-١-١}{(٦+س-٩)(\sqrt{س-١}+١)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س-٢}{(س-٣)(س-٣)(\sqrt{س-١}+١)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{١}{(س-٣)(\sqrt{س-١}+١)} = \frac{١}{٤}$

٢) إيقام قرة تركيبية

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	مطلقة
	١	١	٠	٣٦-
٣	٠	٣	١٢	٣٦
	١	٤	١٥	∴

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣-٣س^٢+٥س-٣}{(س-٣)(س^٢+٤س+١٢)} \times \frac{\sqrt[٣]{(س^٢+٥س+١٣)^٢}+٣\sqrt[٣]{س^٢+٥س+٢}+٩}{\sqrt[٣]{(س^٢+٥س+١٣)^٢}+٣\sqrt[٣]{س^٢+٥س+٢}+٩}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢+٥س-٣+٢٧}{٢٧(س-٣)(س^٢+٤س+١٢)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٨)}{٢٧(س-٣)(٣٣)}$

$= \frac{١١}{٢٧ \times ٣٣} = \frac{١}{٨١}$

٣) نفصل أو نفرض

$ص = \sqrt{س} \Leftarrow س = ص^٤$

$س \to ٤ \quad ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٤-١٦}{ص^٣-٨}$ نفك

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^٢+١٦)(ص-٢)(ص+٢)}{(ص-٢)(ص^٢+٢ص+٤)}$ قوة تركيبية

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص+٢)(ص^٢+١٦)}{ص^٢+٢ص+٤} = \frac{٣٢ \times ٢٠}{١٢} = \frac{٨٠}{٣}$

٤) نوحد المقام ثم مرافق تربيعي

$\lim_{س \to ١} \frac{\frac{\sqrt{س+٣}-٢}{س-١}}{س}$ نرفع س للبسط ونفصل النهاية

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣}-٢}{س-١} \times$ نهاية س

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣}-٢}{س-١} \times \frac{\sqrt{س+٣}+٢}{\sqrt{س+٣}+٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{(س-١)(\sqrt{س+٣}+٢)} = \frac{١}{٤}$

٥) نضرب البسط والمقام بـ $\sqrt{س}+١$ ثم نفصل

أو نفرض $ص = \sqrt{س+٣}$

$ص^٢ = س+٣ \Leftarrow س = ص^٢-٣$

$س \to ١ \quad ص \to ٢$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^٢-٣)^٢-١}{ص^٢+ص-٣-٣}$ نفك البسط

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص^٢-٣-١)(ص^٢-٣+١)}{ص^٢+ص-٦}$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ : ماهر ضمرة

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)(س^٢+٥)}{(س-٥)(س+٣)}$

$= \frac{٤ \times ١٠}{٥} = \frac{٨}{١}$

٦) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨(س^٣ - \frac{١}{٨})}{س - \frac{١}{٢}}$ عامل مشترك (٨)

$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٨(س-\frac{١}{٢})(س^٢ + \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٢}}$

$= ٨ \times \frac{٣}{٤} = ٦$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٤س+١+٥)(٤س+١-٥)}{س-٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+٦)(٤س-٤)}{س-٢}$ مشترك $(س-٢)$

$= ١٠ \times ٢ = ٢٠$

٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٤س+١-٥)(٤س+١)^٢ + ٥(٤س+١+٥)}{س^٣(س-٢) - (س-٢)}$ مشترك

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٧٥ \times (س-٢)}{(س-٢)(س^٣-١)} = \frac{١٥٠}{٧}$

٩) مرافقه تربيعي ثم تكعيبي

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س^٢+٧} - ٢}{س-١} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢+٧}^٢ + ٢\sqrt[٣]{س^٢+٧} + ٤}{\sqrt[٣]{س^٢+٧}^٢ + ٢\sqrt[٣]{س^٢+٧} + ٤} \times \frac{\sqrt{س+٣}+٢}{\sqrt{س+٣}+٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س^٢+٧-٨}{(س-١)(\sqrt[٣]{س^٢+٧}^٢ + ٢\sqrt[٣]{س^٢+٧} + ٤)(\sqrt{س+٣}+٢)}$ نفوض

$= \frac{١}{٢٤}$

١٠) نوحد المقامات

$= \lim_{س \to ١} \frac{س-١}{س^٤(س-١)} = ١$

١١) نوحد المقامات

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - \sqrt[٣]{س}}{\sqrt{س}\sqrt[٣]{س}(س-١)}$ نفصل ونفوض المقام

$= ١$

$= \lim_{س \to ١} \frac{١}{\sqrt{س}\sqrt[٣]{س}} \left(\frac{\sqrt{س}-١}{س-١} + \frac{١-\sqrt[٣]{س}}{س-١} \right)$ نفوض

مرافقه تربيعي

مرافقه تكعيبي

$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{(\sqrt{س}-١)(\sqrt{س}+١)} + \frac{١-س}{(س-١)(١+\sqrt[٣]{س}+\sqrt[٣]{س^٢})} \right)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

١٢) نحول الأسس الى موجب ونجذر

$= \lim_{س \to -١} \frac{\frac{١}{\sqrt{س+٥}} - \frac{١}{٢}}{س+١}$ نوحد المقامات

$= \lim_{س \to -١} \frac{٢ - \sqrt{س+٥}}{٢\sqrt{س+٥}(س+١)} \times \frac{٢+\sqrt{س+٥}}{٢+\sqrt{س+٥}}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{-(س+١)}{٢\sqrt{س+٥}(س+١)(٢+\sqrt{س+٥})} = \frac{-١}{١٦}$

١٣) ∵ المقام = صفر

والبسط غير موجود

∴ البسط ≠ صفر

$أ(١)^{٢} + ج(١) - ١ \neq ٠ \Leftarrow أ \neq ١-$

$أ \in ح / أ \neq ١-$

١٤) النهاية موجودة ، وتعويض $\frac{صفر}{صفر}$

∵ المقام = صفر $\Leftarrow$ عندما $س \to ٢$ البسط = صفر

$٤أ + ٢ب + ٨ = ٠ \Leftarrow ب = -٢-٢أ$

$$ناس_{س \to ٢} \frac{أ س^{٣} + ج(-٢-٢أ)س + ٨}{س - ٢} = ٩$$ (بفرض)

$$ناس_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(أ س^{٢} + ٢أ س - ٤)}{س-٢} = ٩$$

$٢أ + ٤ - ٤أ = ٩ \leftarrow ٩ = ٤ - ٤أ$

$أ = \frac{١٣}{٢}$

$\therefore ب = -٢ - ٢أ = \frac{-١٧}{٢}$

١٥) حل باستخدام القوانين

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	٠	$-٣-١$	م
١	١	١	١	$-م$
∴	١	١	$-م$	

$$ناس_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢} + س - م)}{س - ١} = ٥$$

$م - ٢ = ٥ \Leftarrow م = ٢ - ٥ = -٣$

١٦) نوحد مقام الجزء البسيط

$$ناس_{س \to ٩} \frac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{س}}{٩ - س} = ناس_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٣}{٣س}}{(٣ + \sqrt{س})(٣ - \sqrt{س})}$$

$$= ناس_{س \to ٩} \frac{-١}{٣س(٣ + \sqrt{س})}$$

$$\frac{-١}{٣ج^{٢}} = \frac{-١}{٤} \Leftarrow ٤ = ج^{٢}$$

$ج = \pm ٢$

١٧) نجزئ المقدار بالقسمة التأليفية

$$ناس_{س \to ١} \left(\frac{أ س^{٣} + ٧}{س - ١} \times \frac{١ + \sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س}}{١ + \sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س}} \right)$$

بفرض وتقسم

$$\Leftarrow ناس_{س \to ١} \frac{أ س^{٣} + ٧}{س - ١} \times ناس_{س \to ١} (١ + \sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س}) = ٩$$

$$\therefore ناس_{س \to ١} \frac{أ س^{٣} + ٧}{س - ١} = ٣$$

م) مقام المطلوب بالقوانين التركيبية

$$ناس_{س \to ١} \frac{أ س^{٣} + س^{٣} + ٦س}{(س-١)(س^{٢} + س + ٦)}$$ (نفصل)

تعويض بعد فصل النهايتين

$$= ناس_{س \to ١} \frac{أ س^{٣} + ٧}{٨(س-١)}$$ صفر/صفر

$$+ \frac{-٧ + س^{٣} + ٦س}{٨(س-١)}$$ قسمة تركيبية

$$= \frac{٣}{٨} + \frac{٩}{٨} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

١٧) بجهز المقام (مرر P)

$$\lim_{س\to 1} \frac{\text{مر}(س)+٧}{\sqrt[٣]{س}-1} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+1}{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+1} = ٩$$

$$\lim_{س\to 1} \frac{\text{مر}(س)+٧}{س-1} \times \lim_{س\to 1} \sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+1 = ٩$$

$$\therefore \lim_{س\to 1} \frac{\text{مر}(س)+٧}{س-1} = ٣$$

P) نفصل

$$\lim_{س\to 1} \frac{\text{مر}(س)+٧}{(س-1)(س^٢+س+٦)} + \frac{-٧+س^٣+س-٦}{(س-1)(س^٢+س+٦)}$$

$$= ٣ \times \frac{1}{٨} + \lim_{س\to 1} \frac{(س-1)(س^٢+س+٧)}{(س-1)(س^٢+س+٦)}$$

$$= \frac{٣}{٨} + \frac{٩}{٨} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

ب) نفصل

$$\lim_{س\to 1} \frac{\text{مر}(س)+٧}{\sqrt[٣]{س}-1} + \frac{-٧+٧س}{\sqrt[٣]{س}-1}$$

$$= ٩ + \lim_{س\to 1} \frac{٧(س-1)}{\sqrt[٣]{س}-1} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+1}{\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+1}$$

$$= ٩ + \lim_{س\to 1} \frac{٧(س-1)(\sqrt[٣]{س^٢}+\sqrt[٣]{س}+1)}{س-1}$$

$$= ٩ + ٢١ = ٣٠$$

ج) نقسم لبسط ولمقام على $س-1$

$$\lim_{س\to 1} \frac{\frac{س^٣+٥س-٦}{س-1}}{\frac{\text{مر}(س)+س+٦}{س-1}} + P س = 1$$

$$\Leftarrow \lim_{س\to 1} \frac{س^٢+س+٦}{٣+1} + P(1) = 1 \Leftarrow P = -1$$

١٨) حتى تكون النهاية غير موجودة

يجب أن تكون النهاية $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

∴ يجب أن يكون المقام مربع كامل

$$(س-ج)^٢ = س^٢ - ٤س + ٤$$

$$\therefore P = 1 \quad ، \quad ب = -٤$$

أو طريقة تحويلية أي موجودة وتجد P، ب

١٩) $$\lim_{س\to -٣} \frac{س^٤ - ١٢س - ٣}{س^٣ - ٢س - ١}$$

$$= \lim_{س\to -٣} \frac{س^٢ + ٤س - ٣}{س - ٣} = \frac{(س+٣)(س-١)}{(س+٣)} = -٤$$

٢٠) نفك لتقاربف

$$[٤س - ٥,٠] = ٩ \quad \text{(نقطة وصلية)}$$

$$٤س - ١٩ = ٩ - ٤س \quad \text{(لقاعدة الوجبة)}$$

$$\lim_{س\to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - (٤س - ٩)}$$

$$= \lim_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{٩ + ٣س - ٣س}$$

$$= \lim_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{(س-٣)(-٣)} = -٢$$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ : ماهر ضمرة

حلول ورقة عمل (٣) ص٤٥

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ جا ٨س}{س^{٤}} + \frac{٥ ظاس}{س^{٤}} - \frac{ظاس ظاس}{س \times س}$

$= ٨ + ١ - ١ \times ١ = ٨$

٢) نقسم ونضرب بالمرافق

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٤}+٢س-٨)}{س^{٤}+٢س-٨} \times \frac{س^{٤}+٢س-٨}{\sqrt{س+٢}-٢}$

نوزع ثم نفرض ص $= س^{٤}+٢س-٨$

$س \to ٢$

$ص \to ٠$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٤}+٢س-٨}{\sqrt{س+٢}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٢}+٢}{\sqrt{س+٢}+٢}$

$= ١ \times \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٤)}{س+٢-٤} \times ٤$

$= ٦ \times ٤ = ٢٤$

٣) $ظتا س = \frac{١}{ظاس}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣}}{(١-جتاس) ظاس} \times \frac{١+جتاس}{١+جتاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣}}{(١-جتا^{٢}س) ظاس} \times \lim_{س \to ٠} ١+جتاس$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س \times س \times س}{جاس \times جاس \times ظاس} \times ٢ = ١ \times ١ \times ٢$

$= ٢$ ٦٧

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{جا(\pi - \frac{\pi}{س})}{س-١}$ نعوض ① $\times$ نهاية س

$= \lim_{س \to ١} \frac{جا\pi(١ - \frac{١}{س})}{\pi(١-\frac{١}{س})} \times \frac{\pi(١-\frac{١}{س})}{س-١}$

نوزع النهاية ، ص $= ١ - \frac{١}{س}$

$س \to ١$

$ص \to ٠$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص} \times \lim_{س \to ١} \frac{\pi(\frac{س-١}{س})}{س-١}$

$= ١ \times \pi = \pi$

٥) $\lim_{س \to \pi} \frac{جا(\pi - س)}{(س)(\pi - س)}$ نوزع النهاية

$\lim_{س \to \pi} \frac{١}{س} \times \lim_{س \to \pi} \frac{جا(\pi - س)}{\pi - س}$

$ص = \pi - س$ $\quad س \to \pi$

$ص \to ٠$

$= \frac{١}{\pi} \times \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص}{ص} = \frac{١}{\pi}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س+١}-\sqrt{١-س}}{جاس} \times \frac{\sqrt{س+١}+\sqrt{١-س}}{\sqrt{س+١}+\sqrt{١-س}}$ نفصل ونعوض

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س+١-(١-س)}{٢ جاس} = \frac{٢س}{٢جاس} = ١$

٧) $\lim_{س \to 1} \frac{جا(\pi - \pi س)}{(1-س)(1+س)}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{جا \pi (1-س)}{1-س} \times \lim_{س \to 1} \frac{1}{1+س}$

ص = 1 − س ، س → 1 ، ص → 0

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جا \pi ص}{ص} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

٨) $1 - جتا^2 س = 2 جا^2 س$

$جتا^2 س - جتا 8س = -2 جاه س جا -3س$ (بالقسمة لكل حد على س)

$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{-2 جاس جا 4س}{-8 جاه س جا -3س} = \frac{-1}{-15} = \frac{1}{15}$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا^2 س}{جتا^2 س} - جا^2 س}{س^3}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س (ظا^2 س - 1)}{س^2 \times س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س - 1}{س^2} \times \frac{ظا^2 س + 1}{ظا^2 س + 1}$

$= 2 \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س - 1}{س^2} = 2 \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س}{س^2}$

$= 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = 4$

١٠) نعلم $1 - جتا^2 س = 2 جا^2 س$

$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{2 جا^2 س + ظا^2 س}{س جاس}$ نفصل

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا^2 س}{س جاس} + \lim_{س \to 0} \frac{ظاس \times ظاس}{س \times جاس}$ [بالقسمة على س لكل حد]

$= 2 + 1 \times 1 = 3$

١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جتا^2 (\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)^2}$

$= \frac{1}{4} \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جتا (\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)^2}$

ص = $\frac{\pi}{2}$ − س ، س → $\frac{\pi}{2}$ ، ص → 0

$= \frac{1}{4} \lim_{ص \to 0} \frac{1 - جتاص}{ص^2} \times \frac{1 + جتاص}{1 + جتاص}$

$= \frac{1}{4} \lim_{ص \to 0} \frac{1 - جتا^2 ص}{2 ص^2}$

$= \frac{1}{8} \lim_{ص \to 0} \frac{جا^2 ص}{ص^2} = \frac{1}{8}$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ : ماهر خميرة

١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \frac{جتاس}{جاس}}{\frac{1}{جاس}} \times \frac{جاس}{جاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس - جتاس}{1} = 0 - 1 = -1$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{س جاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا^2 \frac{س}{2}}{س جاس}$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

---

١٣) $ص = س - \frac{\pi}{3} \leftarrow س = ص + \frac{\pi}{3}$

$س \to \frac{\pi}{3} \Rightarrow ص \to 0$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{2 جتا(ص + \frac{\pi}{3}) - 1}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{2(جتاص جتا\frac{\pi}{3} - جاص جا\frac{\pi}{3}) - 1}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جتاص - \sqrt{3} جاص - 1}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-\sqrt{3} جاص}{ص} + \lim_{ص \to 0} \frac{جتاص - 1}{ص} \times \frac{جتاص + 1}{جتاص + 1}$

$= -\sqrt{3} + \lim_{ص \to 0} \frac{-جا^2 ص}{2ص}$

$= -\sqrt{3} + 0 = -\sqrt{3}$ (بقية الأسئلة بعد التمرين)

التمرين

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{1}{جا^2 س} - \frac{جتا^2 س}{جا^2 س}}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{1}{جا^2 س}(1 - جتا^2 س)}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{جا^2 س} \times \frac{جا^2 س}{س} \times \frac{جا^2 س}{س}$

$= 1 \times 1 \times 1 = 1$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{جاس}{جتاس}}{س - \frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - جاس}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{جتاس}$ نوزع ونلخص

$= \sqrt{2} \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - جاس}{س - \frac{\pi}{4}}$

$ص = س - \frac{\pi}{4} \leftarrow س = ص + \frac{\pi}{4}$

$= \sqrt{2} \lim_{ص \to 0} \frac{جتا(ص + \frac{\pi}{4}) - جا(ص + \frac{\pi}{4})}{ص}$

$= \sqrt{2} \lim_{ص \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} جتاص - \frac{1}{\sqrt{2}} جاص - \frac{1}{\sqrt{2}} جاص - \frac{1}{\sqrt{2}} جتاص}{ص}$

$= \sqrt{2} \lim_{ص \to 0} \frac{-\sqrt{2} جاص}{ص} = -2$

أو نكتب $جاس = جتا(\frac{\pi}{2} - س)$

ونصبح $جتاس - جتا(\frac{\pi}{2} - س) = -2 جا(\quad) جا(\quad)$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ : ماهر ضمرة

٣) بكتب $\tan^3 س = 2 جا س + جا س$

$$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س + جا س - جا 3س}{س^3}$$

$جا(-س) = -جا س$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س + 2 جتا 2س جا س}{س^3}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س - 2 جتا 2س جا س}{س^3}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س (1 - جتا 2س)}{س \times س^2}$$

$\because 1 - جتا 2س = 2 جا^2 س$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س \times 2 جا س \times جا س}{س \times س \times س}$$

$$= 2 \times 2 \times 1 = 4$$

---

٤) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا 2س}{2(س - \frac{\pi}{2})} + \frac{1 - جا س}{(س - \frac{\pi}{2})^2}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\pi - 2س)}{2(س - \frac{\pi}{2})} + \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جتا(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا 2(س - \frac{\pi}{2})}{2(س - \frac{\pi}{2})} + \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - جتا(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)(س - \frac{\pi}{2})}$$

$ص = س - \frac{\pi}{2}$ $\quad س \to \frac{\pi}{2}$

$ص \to 0$

$$\therefore \lim_{ص \to 0} \frac{جا 2ص}{2ص} + \lim_{ص \to 0} \frac{1 - جتا(-ص)}{2ص}$$

$\because جتا(-ص) = جتا ص$

$$= \frac{2}{2} + \lim_{ص \to 0} \frac{1 - جتا ص}{2ص} \times \frac{1 + جتا ص}{1 + جتا ص}$$

$$= 1 + 0 = 1$$

---

١٤) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} جا س - 1}{\sqrt{2} جتا س - 1} \times \frac{\sqrt{2} جا س + 1}{\sqrt{2} جا س + 1} \times \frac{\sqrt{2} جتا س + 1}{\sqrt{2} جتا س + 1}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2 جا^2 س - 1}{2 جتا^2 س - 1} \times \frac{\sqrt{2} جتا س + 1}{\sqrt{2} جا س + 1}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{-جتا^2 س}{جتا^2 س} \times \frac{2}{2} = -1$$

---

١٥) نفصل

$$\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا 5س}{3س^2} + \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا^2 س}{5س^2}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا^2 3س}{5س^2} - \frac{2}{5} = \frac{18}{5} - \frac{2}{5} = \frac{16}{5}$$

---

١٦) $$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - جتا س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} جتا س - 1}{س - \frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{جتا س}$$ (نفوض)

$$= \sqrt{2} \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2} جتا س - 1}{س - \frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{2} جتا س + 1}{\sqrt{2} جتا س + 1}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{2 جتا^2 س - 1}{س - \frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2} جتا س + 1}$$

$$= \sqrt{2} \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا 2س}{س - \frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - 2س)}{س - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{ص \to 0} \frac{جا 2ص}{-ص} = -\sqrt{2}$$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

١٧) $\text{ظتا}^2 س - \text{جا}^2 س = \text{ظتا}^2 س$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{س \text{ ظا}^3 س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظتا}^2 س - \text{جا}^2 س}{س \text{ ظا}^3 س} \times \frac{\text{ظتا}^2 س + \text{جا}^2 س}{\text{ظتا}^2 س + \text{جا}^2 س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظتا}^4 س - \text{جا}^4 س}{س \text{ ظا}^3 س (\text{ظتا}^2 س + \text{جا}^2 س)}$$

نفرض $ص = س^2$

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{ظتا}^2 ص (\text{ظتا}^2 ص - 1)}{ص \text{ ظا}^3 ص} \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{-2 \text{جا}^2 ص}{ص \text{ ظا}^3 ص} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

١٨) نضرب بالمرافق

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{4}} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$$

نفرض $ص = س - \frac{\pi}{4}$

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جاص} - \text{جتاص}}{ص} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جاص} - \text{جتاص}}{ص} \times \frac{\text{جاص} + \text{جتاص}}{\text{جاص} + \text{جتاص}}$$

نفرض $ع = ص + \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{ع \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\text{جتا}2ع}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$= (-1) \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - 2س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$$= (-2) \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}2(\frac{\pi}{4} - س)}{س - \frac{\pi}{4}}$$

$ص = \frac{\pi}{4} - س$ $\quad س \to \frac{\pi}{4}$ $\quad ص \to 0$

$$= (-2) \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}2ص}{-ص}$$

$$= (-2) \times 2 = (-4)$$

١٩) $\lim_{س \to -ط} \frac{2 \text{جا}^2(\frac{س+ط}{2}) \text{ضتا}(\frac{س-ط}{2})}{س+ط}$ نعوض

$$= \text{ضتا}(-ط) \lim_{ص \to 0} \frac{2 \text{جا}^2 ص}{ص} = \text{جتا} ط$$

٢٠) $\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{-\text{جتا}(-\frac{\pi}{2} - س) + 1}{(س + \frac{\pi}{2})^2}$

$ص = \frac{\pi}{2} + س$ $\quad س \to -\frac{\pi}{2}$ $\quad ص \to 0$

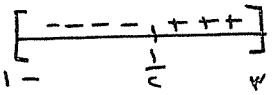
$$\lim_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جتا}(-ص)}{ص^2}$$ كما جتا- ص = جتاص

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{1 - \text{جتاص}}{ص^2} \times \frac{1 + \text{جتاص}}{1 + \text{جتاص}}$$

$$= \lim_{ص \to 0} \frac{\text{جا}^2 ص}{ص^2} \times \frac{1}{1 + \text{جتاص}} = \frac{1}{2}$$

حل ورقة عمل (٤) ص٥٨

١)



$$د(س) = \begin{cases} 1 - 2س ، & -1 \leq س < \frac{1}{2} \\ 2س - 1 ، & \frac{1}{2} \leq س \leq 3 \\ 7 + س ، & 3 < س \leq 4 \\ \frac{4}{س} + 1 ، & 4 < س \leq 5 \end{cases}$$

د(س) متصل على $(-1, \frac{1}{2})$ لأنه على صورة كثير حدود

د(س) متصل على $(\frac{1}{2}, 3)$ " " " " "

د(س) متصل على $(3, 4)$ لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

د(س) متصل على $(4, 5)$ لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

نقاط التفرع

$س = \frac{1}{2}$

$د(\frac{1}{2}) = \lim_{س \to \frac{1}{2}^+} د(س) = \lim_{س \to \frac{1}{2}} د(س) =$ موجود

متصل عند $س = \frac{1}{2}$

$س = 3$

$د(3) = 5$ ، $\lim_{س \to 3^+} د(س) = 2$ ، $\lim_{س \to 3^-} د(س) = 5$

د(س) غير متصل عند $س = 3$

$س = 4$

$د(4) = \sqrt{5}$ ، $\lim_{س \to 4^+} د(س) = 2$

$\lim_{س \to 4} د(س) = \sqrt{5}$ د(س) غير متصل عند $س = 4$

اكمال $د(-1) = \lim_{س \to -1^+} د(س) = 3$ متصل

من اليمين عند $س = -1$

$د(5) = \lim_{س \to 5^-} د(س) = \frac{9}{5}$ متصل من اليسار عند $س = 5$

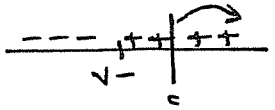
د(س) متصل على $[-1, 5] / \{3, 4\}$

٢) $د(س) = \begin{cases} س^2 + 2 ، & س < 0 \\ 3 ، & 0 \leq س < 2 \\ \sqrt{س + 7} + \frac{4}{س} ، & س \geq 2 \end{cases}$

القواعد

د(س) متصل على $(-\infty, 0)$ لأنه على صورة كثير حدود

د(س) متصل على $(0, 2)$ لأنه على صورة كثير حدود



د(س) متصل على $(2, \infty)$ لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

نقاط التفرع

$س = 0$

$د(0) = 2$ ، $\lim_{س \to 0^+} د(س) = 2$

$\lim_{س \to 0} د(س) = 2$ متصل عند $س = 0$

$س = 2$

$د(2) = 3 + 2 = 5$

$\lim_{س \to 2^+} د(س) = 5$

$\lim_{س \to 2^-} د(س) = 2$ ⇐ $\lim_{س \to 2}$ د(س) غ.م

د(س) غير متصل عند $س = 2$

د(س) متصل على $\mathbb{R} / \{2\}$

٣) $د(س) = \begin{cases} \frac{ظا س}{س} ، & 0 < س < \frac{\pi}{2} \\ جتا س ، & \frac{\pi}{2} \leq س \leq \pi \end{cases}$

د(س) متصل على $(0, \frac{\pi}{2})$ لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

د(س) متصل على $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

نقاط التفرع $س = \frac{\pi}{2}$

$ه(\frac{\pi}{2}) = 0$ ، $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}^+}$ ظتاس = صفر

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ ظتاس غير موجودة

∴ ه(س) غير متصل عند $س = \frac{\pi}{2}$

الأطراف $س = \pi$

$ه(\pi) = -1$ ، $\lim_{س \to \pi^-}$ ه(س) = -1

ه(س) متصل من اليسار عند $س = \pi$

∴ ه(س) متصل على $(0, \pi] / \{\frac{\pi}{2}\}$

$\lim_{س \to -1^-}$ ه(س) = 2

ه(س) غير متصل عند $س = -1$

ه(س) متصل على ح / $\{0, -1\}$

٥) متصل على ح ⇐ لا يوجد أصفار للمقام

⇐ لميز < 0

$ع - 4 \times 1 \times ع$ < 0 ⇐ $ع < 4$

$ع < 1$

$ع \in (-\infty, 1)$

٤) ه(س) = $\begin{cases} [س + 1] & ، -1 \leq س \leq 1 \\ |س - 1| & ، س > 1 \text{ أو } س < -1 \end{cases}$

ه(س) = $\begin{cases} 0 & ، -1 \leq س < 0 \\ 1 & ، 0 \leq س < 1 \\ 2 & ، س = 1 \\ س - 1 & ، س > 1 \\ 1 - س & ، س < -1 \end{cases}$

جميع القواعد متصلة لأن لها صورة كثير حدود

التفرع $(س = 0)$ غير متصل عندها ه(س)

لأن $\lim_{س \to 0^+}$ ه(س) ≠ $\lim_{س \to 0^-}$ ه(س)

$(س = 1)$ ه(س) غير متصل عندها لأن

$\lim_{س \to 1^+}$ ه(س) ≠ $\lim_{س \to 1^-}$ ه(س)

$(س = -1)$ ه(-1) = 0

$\lim_{س \to -1^+}$ ه(س) = 0

٦) ه(س) = $\begin{cases} \frac{س}{س} = 1 & ، س > 0 \\ \frac{-س}{س} = -1 & ، س < 0 \\ 1 & ، س = 0 \end{cases}$

الحل

ه(س) متصل على (0، ∞) لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

ه(س) متصل على $(-\infty, 0)$ لأنه معرف على جميع نقاط الفترة

نقاط التفرع $س = 0$

ه(0) = 1 ، $\lim_{س \to 0^+}$ ه(س) = 1

$\lim_{س \to 0^-}$ ه(س) = -1 ⇐ النهاية غير موجودة

ه(س) غير متصل عند $س = 0$

ه(س) متصل على ح / $\{0\}$

النهايات والإتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

٧) $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$

$$ل(س) = \begin{cases} س \, جا\pi س & ، \ س < ١ \\ ٣ \, جا\pi س & ، \ س = ١ \\ ٤ \, جا\pi س & ، \ س > ١ \end{cases}$$

$ل(١) = ٣ \, جا\pi = صفر$

$\lim_{س \to ١^+} ل(س) = \lim_{س \to ١^+} س \, جا\pi س = صفر$

$\lim_{س \to ١} ل(س) = صفر$

$\therefore ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ متصل عندما $س = ١$

٨) $ق(س) = \begin{cases} ٦ - ٢س & ، \ -١ \leq س < ٢ \\ ١ & ، \ ٢ \leq س < ٤ \\ \sqrt{س} + ١ & ، \ س = ٤ \end{cases}$

$ق(س)$ متصل على $(-١ ، ٢)$ لأنه على صورة كثير حدود

$ق(س)$ متصل على $(٢ ، ٤)$ لأنه على صورة كثير حدود

نقاط التفرع $س = ٢$

$ق(٢) = ١$ ، $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٢ \neq \lim_{س \to ٢^+} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore ق(س)$ غير متصل عندما $س = ٢$

الأطراف

$س = -١ \Leftarrow ق(-١) = ٨$

$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ٨$ متصل من اليمين عند $س = -١$

$س = ٤ \Leftarrow ق(٤) = ٣$

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ١$

$ق(س)$ غير متصل من اليسار عندما $س = ٤$

$ق(س)$ متصل على $[-١ ، ٤) / \{٢\}$

٩) $ق(س)$ متصل على $(-\frac{\pi}{٢} ، ٠)$ لأنه يعرف على جميع نقاط الفترة

$ق(س)$ متصل على $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$ لأنه يعرف على جميع نقاط الفترة

لتفرع $س = ٠$

$ق(٠) = ١$ ، $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$

$\lim_{س \to ٠} ق(س) = ١$ $ق(س)$ متصل عندما $س = ٠$

$ق(س)$ متصل على $(-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢})$

١٠) $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ + ١ & ، \ س < -٢ \\ ٣ - س & ، \ -٢ \leq س < ٢ \end{cases}$

باستخدام الاقتران والرسم

١) $ق(٢) + هـ(٢) = ١ + ٩ = ١٠$ معرف

٢) $\lim_{س \to ٢^+} (ق(س) + هـ(س)) = ٩ + ١ = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^-} (ق(س) + هـ(س)) = ١ + ٩ = ١٠$

$\therefore \lim_{س \to ٢} (ق(س) + هـ(س)) = ١٠$

٣) $\lim_{س \to ٢} (ق(س) + هـ(س)) = ق(٢) + هـ(٢) = ١٠$

$\therefore ق + هـ$ متصل عندما $س = ٢$

١١) المميز $> ٠ \Leftarrow ١٦ - ٤ \times ٩ \times ٤ > ٠$

$١٦ > ٤ ٩^٢ \Leftarrow ٤ > ٩^٢ \Leftarrow |٩| > ٢$

$٩ > ٢$ ، $٩ < -٢$ $\Leftarrow$ $٩ > ٢$ أو $٩ < -٢$

النهايات والاتصال

إعداد الأستاذ: ماهر ضمرة

١٢) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \sqrt{1+x} & x=1\end{cases}$

$L(x)=f(x)\times g(x)=\begin{cases}(x^2+1)\sqrt{x} & 0\le x<1\\ (x^2+1)\sqrt{1+x} & x=1\end{cases}$

نوائد $f(x)$ متصل على $(0,1)$ لأنه نعرف على جميع نقاط الفترة

لا ضرار

$f(0)=0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$f(1)=\sqrt{2}$ ، $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

$f(x)$ غير متصل عند $x=1$ من اليمار

$f(x)$ متصل على $[0,1)$

$f(x)$ غير متصل عند $x=0$

لا ضرار $\quad x=-1$

$f(-1)=2$ ، $\lim_{x\to -1^+} f(x)=2$

$f(x)$ متصل من اليمين عند $x=-1$

$x=1$

$f(1)=4$ ، $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$

غير متصل من اليسار عند $x=1$

$f(x)$ متصل على $[-1,1)\cup(1,\infty)$

١٣) $f(x)=\begin{cases}x^2+\sqrt{-x} & -1\le x<0\\ 5-x & 0\le x<1\\ 4 & x=1\end{cases}$

$f(x)$ متصل على $(-1,0)$ لأنه معرف على الفترة

$f(x)$ متصل على $(0,1)$ لأنه على صورة كثير حدود

نقاط التفرع $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-2$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

١٤) $g(x)=\begin{cases}1-x & -1\le x<\frac{1}{2}\\ x-1 & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 2 & 1<x<2\\ 3 & 2\le x\le 3\end{cases}$

نوائد

جميع النوائد متصلة لأنها على صورة كثير حدود

نقاط التفرع

$x=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} g(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} g(x)=g(\frac{1}{2})=0$

$g(x)$ متصل عند $x=\frac{1}{2}$

$x=1$

$g(x)$ غير متصل عند $x=1$ لأن

$\lim_{x\to 1^+} g(x)\neq \lim_{x\to 1^-} g(x)$

$x=2$ $g(x)$ غير متصل عند $x=2$

$\lim_{x\to 2^+} g(x)=3$ ، $\lim_{x\to 2^-} g(x)=2$

١٥) ل = و + هـ = { ٢س^٣ + ٧س + ١ ، س ≥ ١ ; ب س^٢ + ٣س + ٨ ، س < ١ ; ٦س + ٤ ، س = ١ }

ل متصل عند س = ١

← lim_{س→١^+} ل(س) = ل(١) ←

٢ + ٧ + ١ = ١٠ ← ٢ = ٢

كذلك lim_{س→١^-} ل(س) = ل(١) ←

ب + ١١ = ١٠ ← ب = -١

١٦) د(س) = { ١ ، ٠ < س < ١ ; -١ ، س ≤ ٠ ; ½س + ½ ، س ≥ ١ }

جميع القواعد متحققة لأن لها صورة كثير حدود

عند س = ١

د(١) = ١

lim_{س→١^+} د(س) = ١

lim_{س→١^-} د(س) = ١ ← lim_{س→١} د(س) = ١

∴ د متصل عند س = ١

لكن د(٠) غير معرف

∴ د متصل على ح - {٠}

١٧)

١) { -٣ ، -٢ ، ٠ ، ٣ ، ٤ }

٢) { -٣ ، ٠ ، ٣ ، ٤ }

٣) { ٠ }

٤) { -٢ }