المنهاج الجديد 2020 المستوى الأول

الماهر
في الرياضيات

الوحدة الثانية

التفــاضــل

الأستاذ ماهر ضمرة

للتواصل عبر الفيسبوك WWW.Facebook.com/maher.damra

الوحدة الثانية

2 التفاضل

أولاً معدل التغير

أ) إذا تغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن مقدار التغير في السينات $= س_٢ - س_١$ ويرمز للتغير في السينات Δس أو هـ .

ب) إذا كان ص $=$ ق(س) معرفاً على الفترة [أ ، ب] وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن ص ستتغير من $ص_١$ إلى $ص_٢$ والتغير في الصادات (التغير في ق(س) ، مقدار التغير في قيمة الاقتران) $= ص_٢ - ص_١ =$ ق($س_٢$) $-$ ق($س_١$) ويرمز له بالرمز Δص.

أمثلة

١) جد التغير في السينات على الفترة [-١ ، ٣]

الحل: $\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣ - -١ = ٤$

٢) إذا كان الاقتران ق(س) $= س^٢ + ٧س + ١$ ، جد مقدار التغير في الاقتران ق(س) على الفترة [-١،١]

الحل: Δص $=$ ق($س_٢$) $-$ ق($س_١$)

$=$ ق(١) $-$ ق(-١)

$= ٩ - -٥ = ١٤$

٣) إذا كان ق(س) $= \frac{أ}{س+١}$ وكان $\Delta ص = \frac{٢٤}{٧}$ عندما تتغير س من -٢ إلى ٦ جد قيمة أ .

أ) ٢ ب) ٣ ج) ١ د) ٢٤

الحل : Δص $=$ ق(٦) $-$ ق(-٢)

$\frac{٢٤}{٧} = \frac{أ}{٧} - \frac{أ}{-١}$ نوحد المقامات

$\frac{٢٤}{٧} = \frac{أ + ٧أ}{٧}$

$٢٤ = ٨أ \leftarrow أ = ٣$

٤) قطعة معدن على شكل مكعب تعرضت للحرارة فإذا ازداد طول ضلعها من ٢سم إلى ٤سم ، جد مقدار التغير في حجم القطعة .

أ) ١٦ ب) ١٢ ج) ٢٨ د) ٥٦

الحل : الحجم $=$ ع $=$ (الضلع)^٣ $=$ س^٣

$\Delta ع = ع(٤) - ع(٢) = ٦٤ - ٨ = ٥٦$

٥) قرص ثلجي يذوب فينقص نصف قطره من ٣سم إلى ١سم جد مقدار التغير في مساحته ؟

أ) ٨π ب) -٨π ج) ٤π د) -٤π

الحل : مساحة القرص الدائري $=$ م $= \pi$ نق^٢

$\Delta م = م(١) - م(٣) = \pi - ٩\pi = -٨\pi$

٦) إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \sqrt[٣]{س} & ، س \geq ١ \\ \frac{١}{س} + ٥ & ، س < ١ \end{cases}$ ، جد مقدار التغير في ق(س) على الفترة [-١ ، ٨]

أ) ٩ ب) ٢ ج) -٢ د) $\frac{٩}{٨}$

الحل : Δص $=$ ق(٨) $-$ ق(-١)

$= ٢ - \left(\frac{١}{-١} + ٥\right) = -٢$

٧) إذا كان ق(س) = أ $س^٢$ وكان مقدار التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [−٢ ، ٤] يساوي ٢٤ فما قيمة أ ؟ (٢٠٠٦) وزاري

أ) ١,٢ ب) ١٢ ج) ٢ د) ٧,٢

ج) يعرف معدل التغير في الاقتران ق(س) على أنه فرق الصادات على فرق السينات أي $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ وسنرمز له بالرمز م

$$م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

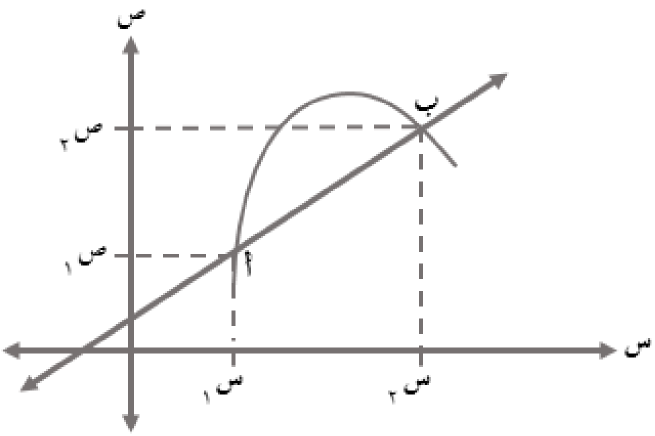
$$= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

كما ذكرنا أن:

$\Delta س = س_٢ - س_١$ إذا $س_٢ = س_١ + \Delta س$

أ) **يفسر معدل التغير هندسياً** إذا تغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ على أنه ميل القاطع الواصل بين نقطتين.

(وضح ذلك)



ميل أ ب

$$م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

= ظا هـ (هـ الزاوية المحصورة بين أ ب والاتجاه الموجب لمحور السينات)، $٠ \le هـ \le \pi$

ميل العمودي على القاطع $= \frac{-١}{ميل\ القاطع}$

ب) **ويفسر معدل التغير فيزيائياً** على أنه السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك على خط مستقيم في الفترة الزمنية $[ن_١ ، ن_٢]$ وفقاً لاقتران المسافة ف(ن) ويرمز لها بالرمز $\bar{ع}$.

أي أن: $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

$= \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن}$ ، $\Delta ن > ٠$

---

٨) إذا كان ق(س) = ٦ جد معدل تغير الاقتران ق(س) على الفترة [−١ ، ٣]

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - -١} = \frac{٦ - ٦}{٤} = ٠$

ملاحظة :

ق(س) كثير حدود من الدرجة ن ، إذا كان معدل التغير ق(س) على أي فترة = صفر ⟷ ق(س) ثابت (ن = صفر)

---

٩) إذا علمت أن ق(س) = ٥س + ٢ جد معدل تغير ق(س) عندما تتغير س من −٢ إلى ٩ ؟

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٩) - ق(-٢)}{٩ - -٢}$

$= \frac{٤٧ - -٨}{١١} = \frac{٥٥}{١١} = ٥$

ملاحظة :

ق(س) كثير حدود من الدرجة ن ، إذا كان معدل التغير ق(س) على أي فترة = أ (ثابت ≠ ٠) ⟷ ق(س) خطي (ن = ١)

---

١٠) إذا علمت أن ق(س) = ٨ − ب س وكان معدل التغير عندما تتغير س من أ إلى ٢أ يساوي ٤ جد قيمة ب ؟

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = -ب = ٤$ لأنه خطي

∴ ب = −٤

١١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣$ جد معدل تغير الاقتران عندما تتغير س من -٢ إلى ٢ .

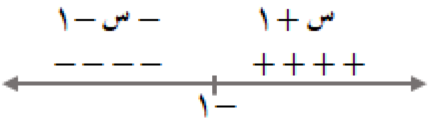
الحل :
$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٢)}{٢ - -٢}$$
$$= \frac{٧ - ٧}{٤} = \text{صفر}$$

ملاحظة:

إذا كان معدل ق(س) على فترة يساوي صفر فليس من الضروري أن يكون ق(س) ثابت ، بينما إذا كان معدل التغير يساوي صفر لكل فترة فإن ق(س) اقتران ثابت.

١٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} + ١|$ جد معدل التغير في الاقتران ق(س) على الفترة $[-٣ ، ٥]$.

الحل :



$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(-٣)}{٥ - -٣}$$
$$= \frac{(٥ + ١) - (٣ - ١)}{٤}$$
$$= \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

١٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ ، & \text{س} \geq -١ \\ \text{س} + ٣ ، & \text{س} < -١ \end{cases}$ وكان $\text{ه}(\text{س}) = ٢\text{ق}(\text{س}) + \text{س}$ ، جد معدل تغير الاقتران ه(س) على الفترة $[-٢ ، ٣]$ ؟

الحل:
$$\text{م}_{\text{ه}} = \frac{\text{ه}(٣) - \text{ه}(-٢)}{٣ - -٢}$$
$$= \frac{(٢\text{ق}(٣) + ٣) - (٢\text{ق}(-٢) - ٢)}{٣ - -٢}$$
$$= \frac{(٢ \times ١٠ + ٣) - (٢ \times ١ - ٢)}{٥}$$
$$= \frac{٢٣ - ٠}{٥} = \frac{٢٣}{٥}$$

١٤) إذا كان معدل تغير ق(س) على الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي -٢ وكان $\text{ه}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢} - ٢$ جد معدل تغير ه(س) على نفس الفترة ؟

الحل :
$$\text{م}_{\text{ه}} = \frac{\text{ه}(٣) - \text{ه}(١)}{٣ - ١}$$
$$= \frac{(\text{ق}(٣) + ٧) - (\text{ق}(١) - ١)}{٢}$$
$$= \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٢} + \frac{٧ - -١}{٢}$$
$$= -٢ + ٤ = ٢$$

١٥) إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}\,\text{ق}(\text{س})$ وكان معدل التغير للاقتران ل(س) في الفترة $[-٢ ، ٤]$ يساوي ١٢ $\text{ل}(٤) = ٦$ أوجد $\text{ق}(-٢)$ ؟ (٢٠٠٥) وزاري

أ) ٣٩ ب) −٩ ج) ٣٣ د) −٦٦

١٦) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي ٥ ، وكان $\text{ق}(١) \times \text{ق}(٣) = ١٢$ وكان $\text{ه}(\text{س}) = \frac{١}{\text{ق}(\text{س})}$ ، جد قيمة معدل التغير للاقتران ه في الفترة نفسها ؟ (٢٠٠٥) وزاري

أ) $\frac{٥}{١٢}$ ب) $\frac{-٥}{١٢}$ ج) $\frac{-١}{٥}$ د) $\frac{١}{٥}$

تدريب:

إذا علمت أن $\text{ه}(\text{س}) = \text{ق}^{٢}(\text{س}) + ٢\text{س}$ وكان معدل تغير ق(س) على الفترة $[-١ ، ٢]$ يساوي ٣ ، وأن $\text{ق}(-١) + \text{ق}(٢) = ٤$ ، جد معدل تغير ه(س) على نفس الفترة ؟

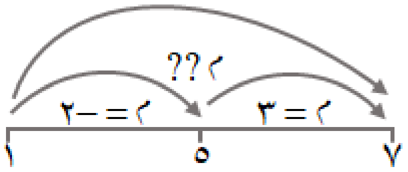
١٧) إذا كان معدل تغير الاقتران ق(س) على الفترة [١ ، ٥] يساوي − ٢ ، وعلى الفترة [٥ ، ٧] يساوي ٣ ، جد معدل تغير الاقتران ق(س) على الفترة [١ ، ٧] ؟

الحل : $م_{١} = -٢ = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)}{٥ - ١} \leftarrow \text{ق}(٥) - \text{ق}(١) = -٨ \ldots \boxed{١}$

$م_{٢} = ٣ = \frac{\text{ق}(٧) - \text{ق}(٥)}{٧ - ٥} \leftarrow \text{ق}(٧) - \text{ق}(٥) = ٦ \ldots \boxed{٢}$

$\boxed{١} + \boxed{٢} \leftarrow \text{ق}(٧) - \text{ق}(١) = -٢$

$\therefore \; م_{٣} = \frac{\text{ق}(٧) - \text{ق}(١)}{٧ - ١} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$



---

١٨) إذا كان ق(س) = س^{٢} والتغير في الصادات يساوي ٥ ، س$_{١}$ = ٢ ، جد معدل تغير الاقتران ق(س) على الفترة [س$_{١}$ ، س$_{٢}$] ؟

الحل : $\Delta \text{ص} = \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})$

$٥ = \text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(٢) \leftarrow ٥ = \text{س}_{٢}^{٢} - ٤$

$\text{س}_{٢}^{٢} = ٩ \leftarrow \therefore \; \text{س}_{٢} = ٣ \text{ ، } -٣$ لكن س = −٣ مرفوضة حسب ترتيب الفترة

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٥}{٣ - ٢} = ٥$

---

١٩) إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٣س − ب ، جد قيمة (أ) إذا كان معدل تغير الاقتران ق(س) على الفترة [أ ، ٢أ] يساوي ١٩.

الحل: $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٢\text{أ}) - \text{ق}(\text{أ})}{٢\text{أ} - \text{أ}}$

$١٩ = \frac{\text{أ}(٢\text{أ})^{٢} + ٣(٢\text{أ}) - \text{ب} - (\text{أ}(\text{أ})^{٢} + ٣(\text{أ}) - \text{ب})}{\text{أ}}$

$١٩ = \frac{٤\text{أ}^{٣} + ٦\text{أ} - \cancel{\text{ب}} - \text{أ}^{٣} - ٣\text{أ} + \cancel{\text{ب}}}{\text{أ}}$

$١٩ = \frac{\cancel{\text{أ}}(٣\text{أ}^{٢} + ٣)}{\cancel{\text{أ}}} \leftarrow ٣\text{أ}^{٢} = ١٦ \leftarrow \text{أ}^{٢} = \frac{١٦}{٣}$

$\therefore \; \text{أ} = \frac{٤}{\sqrt{٣}} \text{ ، } \frac{-٤}{\sqrt{٣}}$ لكن $\text{أ} = \frac{-٤}{\sqrt{٣}}$ مرفوضة لترتيب الفترات

---

٢٠) إذا كان ق(س) = جاس − جتاس ، جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٠ ، ق(٠)) ، (π ، ق(π)) ثم جد ميل العمودي على القاطع ؟

الحل: $م_{\text{القاطع}} = \frac{\text{ق}(\pi) - \text{ق}(٠)}{\pi - ٠} = \frac{١ - -١}{\pi} = \frac{٢}{\pi}$

$م_{\text{العمودي}} = \frac{-\pi}{٢}$

٢١) إذا كـان مقـدار معـدل التغيـر في الاقـتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٢$ يساوي ٤ عندما س $= \text{س}_{١}$ ، $\Delta\text{س} = ١$ فإن قيمة $\text{س}_{١} =$ ؟ **(١٩٩٧) وزاري**

أ) ٤ ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) -٤ د) ١

تدريب:

إذا كـان $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١$ وكـان معـدل تغيـر الاقتـران ق يسـاوي ٤ عنـدما تتغيـر س مـن $\text{س}_{١}$ إلى $\text{س}_{١} + ١$ جد قيمة $\text{س}_{١}$ ؟

---

٢٢) إذا كــان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} > ١ \\ ٣\text{س} - ٦ & ، \text{س} \leq ١ \end{cases}$ ، وكــان معدل التغير $= ٥$ عندما تتغير س من ١ إلى $١ + \text{هـ}$ جد قيمة هـ حيث $\text{هـ} > ٠$ ؟

الحل:

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = ٥ = \frac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\cancel{١} + \text{هـ} - \cancel{١}}$$

$$\therefore ٥\text{هـ} = ١ + \text{هـ} -- ٣$$

$$٤\text{هـ} = ٤ \leftarrow \text{هـ} = ١$$

---

٢٣) يتحـرك جسـيم على خـط مسـتقيم وفـق العلاقـة $\text{ف}(\text{ن}) = ٢٠\text{ن}^{٢} + \text{ن} + ١$ ، جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[١ ، ٣]$ ؟

الحل:

$$\overline{\text{ع}} = \frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}} = \frac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٣ - ١}$$

$$= \frac{١٨٤ - ٢٢}{٢}$$

$$= \frac{١٦٢}{٢} = ٨١ \text{ م/ث}$$

٢٤) إذا كان القاطع الواصل بين $(١ ، \text{ق}(١))$ ، $(٣ ، \text{أ})$ يصـنع زاوية مقدارها $١٢٠°$ مع محـور السـينات بالاتجاه الموجب ، حيث النقطتين تقعا على منحنى $\text{ق}(\text{س})$ ، وكان $\text{ق}(١) = ٤$ ، فجد أ ؟

الحل:

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = \text{ظا } ١٢٠°$$

$$\leftarrow -\sqrt{٣} = \frac{\text{أ} - ٤}{٢}$$

$$-٢\sqrt{٣} = \text{أ} - ٤$$

$$\therefore \text{أ} = ٤ - ٢\sqrt{٣}$$

---

٢٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ ، فأثبت أن معدل التغير للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ يساوي $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{ظاهـ}}{\text{هـ}(١ - \text{ظاس} \times \text{ظاهـ})}$ عندما تتغير س من س إلى $\text{س} + \text{هـ}$ ؟

الحل:

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ظا}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ظاس}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\frac{\text{ظاس} + \text{ظاهـ}}{١ - \text{ظاس ظاهـ}} - \text{ظاس}}{\text{هـ}} \quad \text{نوحد المقامات}$$

$$= \frac{\cancel{\text{ظاس}} + \text{ظاهـ} - \cancel{\text{ظاس}} + \text{ظا}^{٢}\text{س ظاهـ}}{١ - \text{ظاس ظاهـ}} \times \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ظاهـ} + \text{ظا}^{٢}\text{س ظاهـ}}{١ - \text{ظاس ظاهـ}} \times \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ظاهـ}(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})}{١ - \text{ظاس ظاهـ}} \times \frac{١}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{ظاهـ} \times \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{هـ}(١ - \text{ظاس ظاهـ})}$$

ورقـة عمـل (١)

السـؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١) إذا علمت أن ق(س) = أ جاس وكان مقدار التغير في ق(س) على الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$ يساوي (٥) فإن أ =

أ) $\frac{-٥}{٢}$ ب) صفر ج) $\frac{٥}{٢}$ د) $\frac{٥\pi}{٢}$

٢) إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة (ن) ، وكان معدل تغير ق(س) على أي فترة يساوي ٧، وأن ق(٠) = ١ ، فإن ق(س) =

أ) ٧ ب) ٧س ج) ٧س + ١ د) ١

٣) إذا كان ق(س) = أ س^{٢} وكان القاطع الواصل بين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية $\frac{\pi}{٤}$ مع محور السينات بالاتجاه الموجب فإن أ =

أ) ٤ ب) − ٤ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{-١}{٤}$

٤) إذا كان ق(س) = ٢هـ(س) + ٣س^{٢} وكان معدل هـ(س) على الفترة [−١ ، ٢] يساوي ٢ فإن معدل تغير ق(س) على نفس الفترة يساوي:

أ) ٤ ب) ٧ ج) ٣ د) ٥

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + ٣\text{س} ، & \text{س} \geq ١ \\ ٧ - \text{س} ، & \text{س} < ١ \end{cases}$ وكان معدل تغير ق(س) على الفترة [−٢ ، ١] يساوي ٣ فإن أ =

أ) ١٨ ب) ١٥ ج) ١٤ د) ١٢

٦) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها فإذا زاد طول ضلعها من ٤سم إلى ٦سم جد معدل التغير في مساحتها ؟

أ) ١٠ ب) ٢٠ ج) ١ د) ٤

٧) إذا علمت أن ق(س) = س^{٢} + ٧ فجد معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ١+هـ ، هـ > ٠

أ) هـ ب) ١+هـ ج) ٢+هـ د) ٢−هـ

٨) ق(س) = س^{٢} هـ(س) وكان مقدار التغير في الاقتران هـ(س) على الفترة [−٢ ، ٢] يساوي −٢ ، فإن معدل تغير ق(س) على نفس الفترة يساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) ٢ د) −٢

٩) قذف جسيم رأسياً لأعلى وفق العلاقة ف(ن) = ٥٠ن − ن^{٢} ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [١ ، ٣] ؟

أ) ٩٢ م/ث ب) ٦٤ م/ث ج) ٤٦ م/ث د) ١٤١ م/ث

---

١٠) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ × هـ(س) ، وكان معدل تغير ق(س) على الفترة [١ ، ٤] = ٣ ، ومعدل تغير هـ(س) على نفس الفترة = ٥ فإن هـ(١) =

أ) −١١ ب) ١١ ج) ٢١ د) −٢١

---

١١) إذا تحركت نقطة في المستوى الديكارتي على منحنى ق(س) من النقطة ل(١ ، −١) إلى النقطة م(٢ ، ق(٢)) وكانت السرعة المتوسطة = ٧ م/ث فإن ق(٢) =

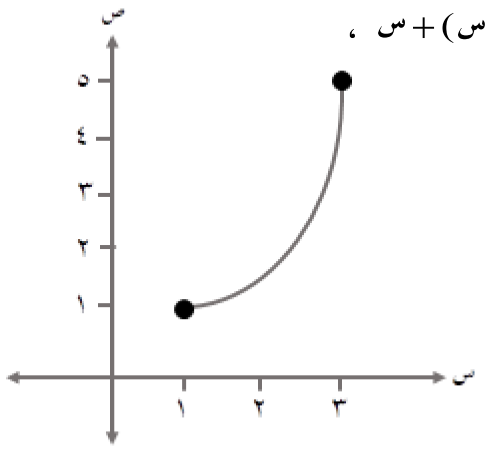
أ) ٦ ب) ٨ ج) ١٨ د) −٦

---

١٢) الشكل المجاور يمثل منحى ق(س) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢}ق(س) + س ، جد معدل تغير هـ(س) على الفترة [١ ، ٣]

أ) ٢٢ ب) ٤٤

ج) ٣ د) ٢٣



السؤال الثاني:

١) إذا كان العمودي على القاطع لمنحنى ق(س) يصنع زاوية $\frac{٣\pi}{٤}$ مع السينات بالاتجاه الموجب بالفترة [−١ ، ٢] هـ(س) = ق(س) + س^{٢} − ٣ جد معدل تغير هـ(س) على نفس الفترة .

٢) إذا علمت أن ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{هـ(س)}}$ وكان معدل تغير هـ(س) على الفترة [١ ، ٣] = $\frac{٥}{٢}$ ومعدل تغير ق(س) على نفس الفترة = $\frac{-١}{٤}$ ، جد كلا من هـ(١)، هـ(٣)

السؤال الثالث: إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٢س − ١ جد معدل تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + ١ ؟

الحل : م = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{ق(س}_{١}\text{ + ١) − ق(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{١}\text{ + ١ − س}_{١}}$

= ق(س$_{١}$ + ١) − ق(س$_{١}$) = (س$_{١}$ + ١)^{٢} + ٢(س$_{١}$ + ١) − ١ − (س$_{١}^{٢}$ + ٢س$_{١}$ − ١)

= $\cancel{\text{س}_{١}^{٢}}$ + ٢س$_{١}$ + ١ + $\cancel{\text{٢س}_{١}}$ + ٢ − $\cancel{\text{س}_{١}^{٢}}$ − $\cancel{\text{٢س}_{١}}$ + ١ = ٢س$_{١}$ + ٣

ثانياً المشـتـقة الأولى

- **تعلمنـا أن:** ميل القاطع الواصل بين النقطتين أ$(س_{١} ، ص_{١})$ ، ب$(س_{٢} ، ص_{٢})$ تمثل $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

إذا تحركت النقطة (ب) بإتجاه النقطة (أ) على منحنى ق(س) عندها $س_{٢}$ تقترب من $س_{١}$

وتكون Δس تؤول إلى الصفر (أ ب) يؤول إلى مماس لمنحنى الاقتران ق(س) وفي هذه الحالة

يصبح ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة أ$(س_{١} ، ص_{١})$ يساوي $\underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ إن وجدت ،

ويسمى معدل التغير في ص بالنسبة إلى س ، وكذلك يسمى المشتقة الأولى ويرمز لها بأحد الرموز:

$$ص' \equiv ق'(س) \equiv \frac{دص}{دس}$$

(إذا المشتقة = ميل المماس عند نقطة = ظا θ) ، θ بالاتجاه الموجب

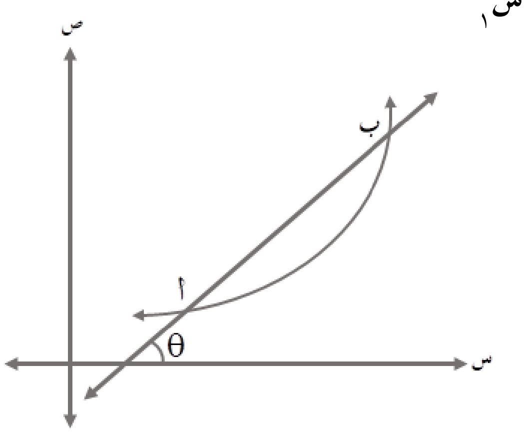
تعريف: ليكن ق(س) اقتران معرف على الفترة [أ ، ب] ولتكن س ∈ (أ ، ب) فإن:

$$ق'(س) = \underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{س_{٢} \to س_{١}}{نها} \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$= \underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{نها} \frac{ق(س_{١} + هـ) - ق(س_{١})}{هـ}$$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$



يكون ق(س) قابل للاشتقاق إذا كانت النهاية موجودة.

أولاً: إيجاد المشـتـقة باسـتـخدام التعـريـف

أمثلـة:

١) باستخدام تعريف المشتقة الأولى جد ق'(س) للاقتران ق(س) = ٣

الحل: $ق'(س) = \underset{ع \to س}{نها} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$$= \underset{ع \to س}{نها} \frac{٣ - ٣}{ع - س} = صفر$$

٢) إذا كان $ق(س) = ٥س - ٢$ مستخدماً تعريف المشتقة الأولى جد $صَ$ للاقتران ؟

الحل: $$صَ = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{(٥ع - ٢) - (٥س - ٢)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{٥ع - \cancel{٢} - ٥س + \cancel{٢}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{٥\cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} = ٥$$

---

٣) إذا كان $ق(س) = س^{٢} + ١$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

الحل: $$\frac{دص}{دس} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ع^{٢} + \cancel{١} - س^{٢} - \cancel{١}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{(ع + س)\cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} = ٢س$$

---

٤) إذا كان $ل(س) = \frac{س}{س + ٢}$ ، فجد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = -١}$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى حيث $س \neq -٢$.

الحل: $$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = -١} = \underset{ع \to -١}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(-١)}{ع - - ١}$$

$$= \underset{ع \to -١}{\text{نها}} \frac{\frac{ع}{ع + ٢} - \frac{-١}{١}}{ع + ١}$$

$$= \underset{ع \to -١}{\text{نها}} \frac{ع + ع + ٢}{ع + ٢} \times \frac{١}{ع + ١}$$

$$= \underset{ع \to -١}{\text{نها}} \frac{٢\cancel{(ع + ١)}}{ع + ٢} \times \frac{١}{\cancel{ع + ١}} = \frac{٢}{١} = ٢$$

---

٥) إذا كان $ق(س) = \sqrt{س + ٣}$ ، جد $قَ(س)$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى حيث $س > -٣$

الحل: $$قَ(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\sqrt{ع + ٣} - \sqrt{س + ٣}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع + ٣} + \sqrt{س + ٣}}{\sqrt{ع + ٣} + \sqrt{س + ٣}}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ع + \cancel{٣} - س - \cancel{٣}}{(ع - س)\left(\sqrt{ع + ٣} + \sqrt{س + ٣}\right)}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\cancel{ع - س}}{\cancel{(ع - س)} \times ٢\sqrt{س + ٣}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س + ٣}}$$

---

٦) باستخدام تعريف المشتقة الأولى ، جد مشتقة $ق(س) = س + \sqrt{س}$ عندما $س = ٤$ حيث $س > ٠$

الحل: $$قَ(٤) = \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(٤)}{ع - ٤}$$

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{ع + \sqrt{ع} - ٤ - ٢}{ع - ٤}$$

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{ع} + ع - ٦}{ع - ٤} \quad \text{نفصل}$$

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{ع} - ٢}{ع - ٤} + \frac{٢ + ع - ٦}{ع - ٤}$$

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{ع} - ٢}{ع - ٤} \times \frac{\sqrt{ع} + ٢}{\sqrt{ع} + ٢} \ \boxed{+}\ ١$$

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\cancel{ع - ٤}}{(٤)\cancel{(ع - ٤)}} \ \boxed{+}\ ١ = \frac{٥}{٤}$$

٧) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{\sqrt{س-٥}}$ ، جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى حيث $س > ٥$

الحل: $ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\sqrt{ع-٥}} - \frac{١}{\sqrt{س-٥}}}{ع - س}$ نوحد المقامات

$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-٥} - \sqrt{ع-٥}}{\sqrt{س-٥}\,\sqrt{ع-٥}} \times \frac{١}{ع - س}$ مرافق

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\sqrt{س-٥} - \sqrt{ع-٥}}{\sqrt{س-٥}\,\sqrt{ع-٥}} \times \frac{\sqrt{س-٥} + \sqrt{ع-٥}}{\sqrt{س-٥} + \sqrt{ع-٥}} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{س - \cancel{٥} - ع + \cancel{٥}}{\sqrt{س-٥}\,\sqrt{ع-٥}\left(٢\sqrt{س-٥}\right)} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{\cancel{س - ع}}}{\sqrt{س-٥}\,\sqrt{ع-٥}\left(٢\sqrt{س-٥}\right)} \times \frac{١}{\cancel{ع - س}} = \frac{-١}{٢(س-٥)\sqrt{س-٥}}$$

---

٨) إذا علمت أن $ص = \sqrt[3]{س}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

الحل: $\frac{دص}{دس} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{ع} - \sqrt[3]{س}}{ع - س}$ مرافق تكعيبي

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{ع} - \sqrt[3]{س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt[3]{ع^٢} + \sqrt[3]{ع}\,\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{س^٢}}{\sqrt[3]{ع^٢} + \sqrt[3]{ع}\,\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{س^٢}}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\cancel{ع - س}}{\cancel{(ع - س)}\left(\sqrt[3]{ع^٢} + \sqrt[3]{ع}\,\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{س^٢}\right)} = \frac{١}{٣\sqrt[3]{س^٢}}$$

---

٩) إذا علمت أن $ق(س) = \frac{١}{\sqrt[3]{س+١}}$ ، جد $ص'$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى. (للطالب)

الحل: $ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\sqrt[3]{ع+١}} - \frac{١}{\sqrt[3]{س+١}}}{ع - س}$ نوحد المقامات ثم مرافق

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\sqrt[3]{س+١} - \sqrt[3]{ع+١}}{\sqrt[3]{ع+١}\,\sqrt[3]{س+١}\,(ع - س)} \times \frac{\sqrt[3]{(س+١)^٢} + \sqrt[3]{س+١}\,\sqrt[3]{ع+١} + \sqrt[3]{(ع+١)^٢}}{\sqrt[3]{(س+١)^٢} + \sqrt[3]{س+١}\,\sqrt[3]{ع+١} + \sqrt[3]{(ع+١)^٢}}$$

نعوض المقام ع → س

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{س + \cancel{١} - ع - \cancel{١}}{\sqrt[3]{ع+١}\,\sqrt[3]{س+١}\,(ع - س)\left(\sqrt[3]{(س+١)^٢} \times ٣\right)}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\overset{-١}{\cancel{س - ع}}}{\sqrt[3]{ع+١}\,\sqrt[3]{س+١}\,\cancel{(ع - س)}\,\sqrt[3]{(س+١)^٢} \times ٣} = \frac{-١}{٣\sqrt[3]{(س+١)^٤}}$$

١٠) إذا كان ق(س) = جا ٢س ، جد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

الحل: $$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا ٢ع} - \text{جا ٢س}}{\text{ع} - \text{س}}$$ متطابقة جا أ − جا ب

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{٢جتا}\left(\frac{\text{٢ع} + \text{٢س}}{\text{٢}}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{٢ع} - \text{٢س}}{\text{٢}}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$ نفرض ص = ع − س ، $\text{ع}\to\text{س}$ ، $\text{ص}\to\text{٠}$

$$= \text{٢ جتا ٢س} \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\frac{\cancel{\text{٢}}(\text{ع} - \text{س})}{\cancel{\text{٢}}}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{٢ جتا ٢س} \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = \text{٢ جتا ٢س}$$

---

١١) إذا علمت أن ق(س) = قا س ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

الحل: $$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{قا ع} - \text{قا س}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{جتا ع}} - \frac{\text{١}}{\text{جتا س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا س} - \text{جتا ع}}{\text{جتا س} \times \text{جتا ع}(\text{ع} - \text{س})}$$ متطابقة

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{-\text{٢جا}\left(\frac{\text{س} + \text{ع}}{\text{٢}}\right)\text{جا}\left(\frac{\text{س} - \text{ع}}{\text{٢}}\right)}{\text{جتا س} \times \text{جتا ع}(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \frac{-\text{٢جا س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\frac{\text{س} - \text{ع}}{\text{٢}}}{(\text{ع} - \text{س})}$$ ص = ع − س ، $\text{ع}\to\text{س} \Leftarrow \text{ص}\to\text{٠}$

$$= -\text{٢ قا س ظا س} \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,\frac{-\text{ص}}{\text{٢}}}{\text{ص}} = -\text{٢ قا س ظا س} \times \frac{-\text{١}}{\text{٢}} = \text{قا س ظا س}$$

---

١٢) إذا كان ق(س) = ظا س ، فجد صَ باستخدام التعريف.

الحل: $$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ظا ع} - \text{ظا س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا ع}}{\text{جتا ع}} - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$ نوحد المقامات

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا ع جتا س} - \text{جا س جتا ع}}{\text{جتا ع جتا س}(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\text{ع} - \text{س})}{\text{جتا ع جتا س}(\text{ع} - \text{س})}$$ نعوض بعد فصل النهاية

ص = ع − س ، $\text{ع}\to\text{س} \Leftarrow \text{ص}\to\text{٠}$

$$= \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}$$ (فكر بطريقة أخرى)

١٣) إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س جا س}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع جا ع} - \text{س جا س}}{\text{ع} - \text{س}}$ نجمع ونطرح ناتج تعويض أحدهما × الآخر

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع جا ع} - \text{س جا ع}}{\text{ع} - \text{س}} + \dfrac{\text{س جا ع} - \text{س جا س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا ع}\,\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \dfrac{\text{س}\,(\text{جا ع} - \text{جا س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

نفصل ونعوض ←

$$= \text{جا س} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} \times \text{٢ جا}\left(\dfrac{\text{ع} - \text{س}}{\text{٢}}\right)\text{جتا}\left(\dfrac{\text{ع} + \text{س}}{\text{٢}}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{جا س} + \text{٢س جتا س}\ \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\left(\dfrac{\text{ع}-\text{س}}{\text{٢}}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

نفرض $\text{ص} = \text{ع} - \text{س}$ ، $\text{ع} \to \text{س} \Rightarrow \text{ص} \to \text{٠}$

$$= \text{جا س} + \text{٢س جتا س}\ \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}} \boxed{\dfrac{\text{جا}\,\frac{\text{ص}}{\text{٢}}}{\text{ص}}}\ \dfrac{\text{١}}{\text{٢}} = \text{جا س} + \text{س جتا س}$$

---

١٤) إذا كـان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}$ ، جـد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام تعريف $\text{ق}'(\text{س})$. (للطالب)

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ع} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$ نحلل

نفصل ونعوض ← متطابقة

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{جا ع} - \text{جا س})(\text{جا ع} + \text{جا س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{٢جا س}\ \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{٢جتا}\left(\dfrac{\text{ع}+\text{س}}{\text{٢}}\right)\text{جا}\left(\dfrac{\text{ع}-\text{س}}{\text{٢}}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

نفرض $\text{ص} = \text{ع} - \text{س}$ ، $\text{ع} \to \text{س} \Rightarrow \text{ص} \to \text{٠}$

$$= \text{٢جا س} \times \text{٢جتا س}\ \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا}\,\frac{\text{ص}}{\text{٢}}}{\text{ص}} = \text{٢جا س} \times \cancel{\text{٢}}\,\text{جتا س} \times \dfrac{\text{١}}{\cancel{\text{٢}}} = \text{جا ٢س}$$

---

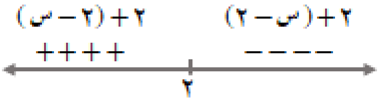
١٥) إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = (\text{س} - \text{أ})\,\text{ق}(\text{س})$ حيث $\text{ق}(\text{س})$ اقتران متصل عند $\text{س} = \text{أ}$ استخدم تعريف المشتقة في إثبات أن $\text{ق} = (\text{أ}) = \text{ل}'(\text{أ})$ حيث (أ) ثابت . (٢٠٠٠) وزاري

الحل: $\text{ل}'(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}} = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ع} - \text{أ})\,\text{ق}(\text{ع}) - (\text{أ} - \text{أ})\,\text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{ع} - \text{أ})}\,\text{ق}(\text{ع})}{\cancel{\text{ع} - \text{أ}}} = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نها}}\ \text{ق}(\text{ع}) = \text{ق}(\text{أ})$ لأن $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = \text{أ}$

١٦) $ق(س) = ٢ + |٢ - س|$ جد $ق'(س)$ عند $س = ٢$ باستخدام تعريف المشتقة . (٢٠١٠) وزاري

الحل: $$ق(س) = \begin{cases} س ، & س \geq ٢ \\ ٤ - س ، & س < ٢ \end{cases}$$



$$ق'_{+}(٢) = \underset{ع \to ٢^{+}}{نهـا} \frac{ع - ٢}{ع - ٢} = ١$$

$$ق'_{-}(٢) = \underset{ع \to ٢^{-}}{نهـا} \frac{٤ - ع - ٢}{ع - ٢} = \underset{ع \to ٢^{-}}{نهـا} \frac{٢ - ع}{- ع - ٢} = -١$$

$ق'(٢)$ غير موجودة

أو $ق(س)$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

---

١٧) إذا كان $$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} ، & س \leq ٣ \\ ٦س - ٩ ، & س > ٣ \end{cases}$$ ابحث في قابلية الاشتقاق عند $س = ٣$ (كتاب)

باستخدام تعريف المشتقة الأولى .

الحل: $$ق'_{+}(٣) = \underset{ع \to ٣^{+}}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(٣)}{ع - ٣}$$

$$= \underset{ع \to ٣^{+}}{نهـا} \frac{٦ع - ٩ - (٣)^{٢}}{ع - ٣} = \underset{ع \to ٣^{+}}{نهـا} \frac{٦(ع - ٣)}{ع - ٣} = ٦$$

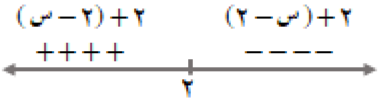
$$ق'_{-}(٣) = \underset{ع \to ٣^{-}}{نهـا} \frac{ع^{٢} - ٩}{ع - ٣} = \underset{ع \to ٣^{-}}{نهـا} \frac{\cancel{(ع - ٣)}\,(ع + ٣)}{\cancel{ع - ٣}} = ٦ \qquad \therefore ق'(٣) = ٦$$

تمرين: إذا كان $ق(س) = [٣س]$ ابحث في قابلية الاشتقاق عند $س = ٢$ باستخدام التعريف .

---

١٨) إذا كان $م(س) = س\, ق(س)$ وكان $ق(١) = ٤$ ، $ق'(١) = -٢$ فجد $م'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة .

الحل: $$م'(١) = \underset{ع \to ١}{نهـا} \frac{م(ع) - م(١)}{ع - ١}$$



$$= \underset{ع \to ١}{نهـا} \frac{ع\,ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$$ نفصل النهاية

$$= \underset{ع \to ١}{نهـا} \left(\frac{ع\,ق(ع) - ق(ع)}{ع - ١} + \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} \right)$$

$$= \underset{ع \to ١}{نهـا} \frac{ق(ع)\,\cancel{(ع - ١)}}{\cancel{ع - ١}} + \underset{ع \to ١}{نهـا} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١}{نهـا} ق(ع) + ق'(١)$$ لأن ق قابل للاشتقاق

$\because$ $ق(س)$ قابل للاشتقاق ← متصل (لاحقاً)

$$= ق(١) + ق'(١) = ٤ + -٢ = ٢$$

ثانياً: الإثباتات

١٩) إذا علمت أن د(س) قابل للاشتقاق عند س فبين أن $\lim_{ع \to س} \frac{ع د(س) - س د(ع)}{ع - س} = د(س) - س د'(س)$

الحل: $\lim_{ع \to س} \left(\frac{ع د(س) - س د(س)}{ع - س} + \frac{س د(س) - س د(ع)}{ع - س} \right)$ ← نفصل النهاية (كتاب)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{د(س)\cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} + \lim_{ع \to س} \frac{س(د(س) - د(ع))}{ع - س}$$

$$= د(س) + \lim_{ع \to س} س \times \lim_{ع \to س} \frac{د(س) - د(ع)}{ع - س}$$

$= د(س) + س \times -د'(س)$ لأن د(س) قابل للاشتقاق

$$= د(س) - س د'(س)$$

---

٢٠) أثبت أن $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع د(ع) - ٣س د(س)}{ع - س} = ٣د(س) + ٣س د'(س)$ حيث د(س) قابل للاشتقاق.

الحل: $\lim_{ع \to س} \frac{٣ع د(ع) - ٣س د(ع)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٣س د(ع) - ٣س د(س)}{ع - س}$ ← نفصل النهاية (كتاب)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣د(ع)\cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} + \lim_{ع \to س} \frac{٣س(د(ع) - د(س))}{ع - س}$$

$= \lim_{ع \to س} ٣د(ع) + \lim_{ع \to س} ٣س \times \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$ لأن د(س) قابل للاشتقاق ← متصل

$$= ٣د(س) + ٣س \times د'(س)$$

---

٢١) إذا كان د قابلاً للاشتقاق فأثبت أن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س - هـ)}{هـ} = ٢د'(س)$

الحل: $\lim_{هـ \to ٠} \left(\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} + \frac{د(س) - د(س - هـ)}{هـ} \right)$ ← نفصل النهاية

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} - \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س - هـ) - د(س)}{هـ}$$

د(س) قابل للاشتقاق $= د'(س)$

نفرض ص $= -$هـ ← هـ $= -$ص　　هـ $\to ٠$　　ص $\to ٠$

$$= د'(س) - \lim_{ص \to ٠} \frac{د(س + ص) - د(س)}{-ص} = د'(س) + \lim_{ص \to ٠} \frac{د(س + ص) - د(س)}{ص}$$

كذلك مرة أخرى د(س) قابل للاشتقاق

$$= د'(س) + د'(س) = \boxed{٢د'(س)}$$

٢٢) أثبت أن معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أي قيمة) يساوي محيط الدائرة .

(كتاب)

الحل: $م = \pi\, نق^{٢} = \pi\, س^{٢}$ (للتسهيل حيث نق = س)

$$\frac{دم}{دنق} = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{\pi\, ع^{٢} - \pi\, س^{٢}}{ع - س}$$ (π عامل مشترك)

$$= \pi \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(ع - س)}\,(ع + س)}{\cancel{ع - س}}$$

$= \pi \times ٢س = ٢\pi س$ لكن س = نق

$= ٢\,\pi\,نق =$ محيط الدائرة

ثالثاً: دلالات المشتقة

٢٣) إذا كان $ق'(٢) = ٩$ ، فجد $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢ + ٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ}$

(كتاب)

الحل: نفرض $ص = ٤هـ \leftarrow هـ = \frac{ص}{٤}$

$هـ \to ٠$ $ص \to ٠$

$$= \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢ + ص) - ق(٢)}{٦ \times \frac{ص}{٤}} = \frac{٤}{٦} \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢ + ص) - ق(٢)}{ص}$$

لكن ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٢

$$= \frac{٤}{٦} \times ق'(٢) = \frac{٢}{٣} \times ٩ = ٦$$

٢٤) إذا كان $ق'(٠) = -٦$ ، فجد $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{٢هـ}$

(كتاب)

الحل: نرتب القوس المركب $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٠) - ق(٠ + ٥هـ)}{٢هـ}$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-(ق(٠ + ٥هـ) - ق(٠))}{٢هـ}$$

لكن $ص = ٥هـ \leftarrow هـ = \frac{ص}{٥}$ عندما $هـ \to ٠$ ، $ص \to ٠$

$= \frac{-١}{٢} \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٠ + ص) - ق(٠)}{\frac{ص}{٥}}$ لأنه قابل للاشتقاق

$$= \frac{-٥}{٢} \times ق'(٠) = \frac{-٥}{٢} \times -٦ = ١٥$$

٢٥) إذا كان معدل تغير الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير س من س إلى $س+هـ$ يعطى بالعلاقة $\frac{٤}{س} - ٢س + ٤س^{٢}هـ$ ، جد $ق'(١)$

الحل: المعطى $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ والمطلوب $ق'(س)$

$$\therefore ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \left(\frac{٤}{س} - ٢س + ٤س^{٢}هـ\right)$$

$$ق'(س) = \frac{٤}{س} - ٢س \leftarrow ق'(١) = ٤ - ٢ = ٢$$

---

٢٦) إذا كان التغير في $ق(س)$ عندما تتغير س من س إلى $س+هـ$ يعطى بالعلاقة

$٤هـ + \frac{هـ^{٢}}{س+١} - ٢هـس + ٤س^{٢}هـ$ ، جد معدل تغير الاقتران $ق(س)$ عند $س = ٢$.

الحل: $\Delta ص = ٤هـ + \frac{هـ^{٢}}{س+١} - ٢هـس + ٤س^{٢}هـ$

نقسم المقدار على هـ لنحصل على $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤هـ + \frac{هـ^{٢}}{س+١} - ٢هـس + ٤س^{٢}هـ}{هـ}$$

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{هـ}\left(٤ + \frac{هـ}{س+١} - ٢س + ٤س^{٢}\right)}{\cancel{هـ}} = ٤ - ٢س + ٤س^{٢}$$

$$\therefore ق'(٢) = ٤ - ٤ + ١٦ = ١٦$$

---

٢٧) إذا كان $\Delta ص = ع^{٣} - س^{٣}$ ، جد $ق'(-١)$

الحل: نجد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ بالقسمة على $ع - س$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س}$$

$$\therefore ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\cancel{(ع - س)}(ع^{٢} - عس + س^{٢})}{\cancel{ع - س}} = ٣س^{٢}$$

$$ق'(-١) = ٣(-١)^{٢} = ٣$$

---

٢٨) إذا علمت أن $ق(س+هـ) = ٣هـ - ٢هـ^{٢}س + ٤هـس + ق(س)$ ، جد $ق'(-١)$

الحل: نرتب الحدود

$$ق(س+هـ) - ق(س) = ٣هـ - ٢هـ^{٢}س + ٤هـس$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٣هـ - ٢هـ^{٢}س + ٤هـس}{هـ}$$

$$\therefore ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\cancel{هـ}(٣ - ٢هـس + ٤س)}{\cancel{هـ}} = ٣ + ٤س \leftarrow ق'(-١) = -١$$

ورقـة عمـل (٢)

باستخدام تعريف المشتقة الأولى جد مشتقته في التمارين من (١ – ١٣)

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س}$ عند $\text{س} = ١$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}+١}$ ، $\text{س} > -١$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} + ٤\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس} + \sqrt{\text{س}}$

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{قاس} - \text{س}^{٢}$

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}^{٢}\text{س}$

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}+١}$

٩) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س جتاس}$

١٠) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+٢}$ عند $\text{س} = ١$

١١) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - ١|$ عند $\text{س} = ٢$

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}|\text{س} - ١|$ عند $\text{س} = ١$

١٣) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ \text{ ، } \text{س} \geq ١ \\ ٣ - \text{س} \text{ ، } \text{س} < ١ \end{cases}$ عند $\text{س} = ١$

---

١٤) إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} \times \text{هـ}(\text{س})$ وكان $\text{هـَ}(٤) = ٥$ وأن $\text{هـ}(٤) = -١$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى ، جد $\text{قَ}(٤)$.

١٥) أثبت أن $\lim\limits_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س ق}(\text{س}) - \text{ع ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} = -\text{ق}(\text{س}) - \text{س قَ}(\text{ع})$ حيث $\text{ق}(\text{س})$ قابل للاشتقاق على ح

١٦) إذا علمت أن $\text{قَ}(٤) = -٦$ باستخدام التعريف ، جد $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤ - ٢\text{هـ})}{٣\text{هـ}}$

١٧) إذا علمت أن التغير في $\text{ق}(\text{س})$ يعطى بالعلاقة $٢\text{هـس} + \text{س}^{٢}\text{هـ} + ٢\text{هـ}^{٢}\text{س}$ ، جد $\text{قَ}(-١)$

١٨) إذا علمت أن $\text{قَ}(٤) = ٦$ ، فجد $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق}(٤ - ٢\text{هـ}) - \text{ق}(٤ + ٥\text{هـ})}{\text{هـ}}$

١٩) باستخدام تعريف المشتقة الأولى أثبت أن مشتقة الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٢}}$ يعطى بالعلاقة $\frac{٢}{٣(\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}}}$

٢٠) جد معدل تغير مساحة مربع بالنسبة لطول ضلعه عندما يكون طول الضلع ٤سم .

٢١) إذا كـان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا}٣\text{س}$ ، جـد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

٢٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{قتاس}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

٢٣) إذا كـان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س قتاس}$ ، جـد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى.

ثالثاً قواعد الاشتقاق

القاعدة الأولى: إذا كان ق(س) = جـ فإن قَ(س) = صفر ، (حيث جـ عدد حقيقي ثابت) ،

أي مشتقة الاقترانات الثابتة = صفر

مثال: ق(س) = ٧ ← قَ(س) = صفر

القاعدة الثانية: إذا كان ق(س) = س^{ن} حيث ن عدد حقيقي فإن قَ(س) = ن س$^{ن-١}$

مثال: ق(س) = س^{٣} ← قَ(س) = ٣س^{٢}

مثال: ق(س) = س$^{-٢}$ ← قَ(س) = −٢س$^{-٣}$

القاعدة الثالثة: إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق هـ(س) = جـ × ق(س) ← هـَ(س) = جـ × قَ(س)

(أي المعامل العدد يبقى كما هو ويتم اشتقاق الاقتران)

مثال: ق(س) = ٥س^{٤} ← قَ(س) = ٥ × ٤س^{٣} = ٢٠س^{٣}

القاعدة الرابعة: إذا كان م(س) ، ل(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س

وكان ق(س) = هـ(س) ± ل(س) فإن قَ(س) = هـَ(س) ± لَ(س)

(أي أن المشتقة تتوزع على الجمع والطرح)

مثال: ق(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} ← قَ(س) = ٣س^{٢} + ١٠س

القاعدة الخامسة: قاعدة الضرب

ق(س) = م(س) × هـ(س) حيث م ، ل قابلين للاشتقاق

فإن قَ(س) = م(س) × هـَ(س) + هـ(س) × مَ(س)

الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال: ق(س) = (س^{٢} + ١)(س^{٣} − ٢) فإن:

قَ(س) = (س^{٢} + ١)(٣س^{٢}) + (س^{٣} − ٢)(٢س)

= ٣س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س^{٤} − ٤س

= ٢س^{٤} + ٣س^{٣} + ٣س^{٢} − ٤س

القاعدة السادسة: إذا كان $د(س) = \frac{م(س)}{ل(س)}$ حيث م ، ل قابلين للاشتقاق

فإن $\bar{د}(س) = \frac{ل(س) \times \bar{م}(س) - م(س) \times \bar{ل}(س)}{ل^{٢}(س)}$.

$$= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال: $د(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} + ١} \leftarrow \bar{د}(س) = \frac{(س^{٢}+١)(١) - (س+٣)(٢س)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

$$\bar{د}(س) = \frac{١ - ٦س - س^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

نتيجة (١):

١) إذا كان $د(س) = \frac{أ}{ه(س)}$ (ه قابل للاشتقاق)

فإن $\bar{د}(س) = \frac{-أ \times \bar{ه}(س)}{ه^{٢}(س)} = \frac{- \text{الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

٢) إذا كان $د(س) = \frac{ه(س)}{أ}$ فإن $\bar{د}(س) = \frac{\bar{ه}(س)}{أ} = \frac{\bar{م} \,.\, \text{البسط}}{\text{نفس الثابت}}$

مثال: $د(س) = \frac{-٧}{س^{٢} + ٩} \leftarrow \bar{د}(س) = \frac{٧ \times ٢س}{(س^{٢}+٩)^{٢}}$

مثال: $د(س) = \frac{س^{٢} + س + ٧}{٨} \leftarrow \bar{د}(س) = \frac{٢س + ١}{٨}$

أمثلة: جد $\frac{دص}{دس}$ في الأمثلة من (١ – ١٩) :

١) $د(س) = \frac{-١}{٩} \leftarrow \bar{د}(س) = \text{صفر}$

٢) $ص = جا^{٢}س + جتا^{٢}س \leftarrow \bar{ص} = \text{صفر}$

٣) $د(س) = س^{٩} \leftarrow \bar{د}(س) = ٩س^{٨}$

٤) $ه(س) = س \leftarrow \bar{ه}(س) = ١$

٥) $ل(س) = -٧س \leftarrow \bar{ل}(س) = -٧$

٦) $\frac{د}{دس}(٢س^{٣}) = ٦س^{٢}$

٧) $ص = \frac{١}{٢}س^{٨} \leftarrow \bar{ص} = ٤س^{٧}$

٨) $ل(س) = -٧س^{-٣} \leftarrow \bar{ل}(س) = ٢١س^{-٤}$

٩) $د(س) = س^{٣}\left|س^{٢}\right|$ ، جد $\bar{د}(٢)$

١٠) $د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} - ٧س + ١$

$\bar{د}(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ٧$

تذكير: $ص = \sqrt[م]{س^{ن}} = س^{\frac{ن}{م}}$

١١) $د(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}} + \sqrt[٥]{س^{٣}} + \sqrt[٤]{س}$

$د(س) = س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{٣}{٥}} + س^{\frac{١}{٤}}$

$\bar{د}(س) = \frac{٢}{٣}س^{\frac{-١}{٣}} + \frac{٣}{٥}س^{\frac{-٢}{٥}} + \frac{١}{٤}س^{\frac{-٣}{٤}}$

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ٤\text{س})(١ - ٣\text{س}^{٣})$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ٤\text{س})(-٩\text{س}^{٢}) + (١ - ٣\text{س}^{٣})(٢\text{س} + ٤)$

$\text{ق}'(\text{س}) = -١٥\text{س}^{٤} - ٨٤\text{س}^{٣} + ٢\text{س} + ٤$

١٣) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{-٣} + ١)(\text{س}^{٢} + ٧)$

الحل:

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^{-٣} + ١)(٢\text{س}) + (\text{س}^{٢} + ٧)(-٣\text{س}^{-٤})$

$= ٢\text{س}^{-٢} + ٢\text{س} - ٣\text{س}^{-٢} - ٢١\text{س}^{-٤}$

$= -٢١\text{س}^{-٤} - \text{س}^{-٢} + ٢\text{س}$

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = (٢\text{س}^{٣} + ٣)\left|\overset{+}{٩\text{س}}\right|$ ، جد $\text{ق}'(١)$

الحل: نعيد تعريف

$\text{ق}(\text{س}) = (٢\text{س}^{٣} + ٣)(٩\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = (٢\text{س}^{٣} + ٣)(٩) + (٩\text{س})(٦\text{س}^{٢})$

$\text{ق}'(١) = ٤٥ + ٥٤ = ٩٩$

١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} - ١)(١) - (\text{س} + ١)(١)}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

١٦) $\text{ع}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٦}$ ، جد $\text{ع}'(\text{س})$

الحل:

$\text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٦)(١) - \text{س}(٣\text{س}^{٢} - ٨\text{س})}{(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٦)^{٢}}$

$\text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{-٢\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢} + ٦}{(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} + ٦)^{٢}}$

١٧) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٢}{\text{س} + ٧}$ ، جد

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-٢ \times ١}{(\text{س} + ٧)^{٢}}$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-٢}{(\text{س} + ٧)^{٢}}$

١٨) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{-٤}{\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٤}$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٤(٣\text{س}^{٢} + ٥)}{(\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٤)^{٢}}$

١٩) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٥\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١}{٦}$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٢٠\text{س}^{٣} - ٦\text{س} + ٢}{٦}$

٢٠) $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \left[\text{س} + \dfrac{١}{٢}\right]$ وكان

$\text{ق}'(-٢) = -٨$ ، فإن (أ) تساوي:

أ) صفر ب) $\dfrac{١}{٢}$ ج) ٣ د) −٣

الحل:

٢١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢}+١}$ وكان $\text{قَ}(١)=١$ ، فإن (أ) تساوي:

أ) $\frac{١}{٢}$　ب) ٤　ج) ٢　د) −٢

الحل:

٢٢) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{أ س}^{٢}+١)(\text{س}^{٣}-٢)$ وكان $\text{قَ}(١)=٢$ ، فإن (أ) تساوي:

أ) ١　ب) −١　ج) $\frac{١}{٥}$　د) $\frac{-١}{٥}$

الحل:

إذا كان ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = −٢ ، هـ(٢) = −١ ، هـَ(٢) = ٣ **أجب عن ما يلي من** (٢٣ − ٢٦) :

٢٣) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ق}\times\text{هـ})(٢) =$

أ) ٦　ب) ١　ج) ٥　د) −٦

الحل:

٢٤) $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٢) =$

أ) صفر　ب) $\frac{١}{٢}$　ج) ١　د) −١

الحل:

٢٥) $\left(\frac{\text{ق}(٢)}{\text{هـ}}\right)'(٢) =$

أ) صفر　ب) ٣　ج) −٣　د) −١

الحل:

٢٦) $(\text{ق}(٢)\times\text{هـ}(٢))' =$

أ) ٥　ب) −٥　ج) −٦　د) صفر

الحل:

٢٧) إذا كان ق(س) × هـ(س) = ل (ل عدد ثابت)

هـَ(١) = ٤ ، هـ(١) = −٢ فإن قَ(١) =

(٢٠٢٠ دراسة خاصة)

أ) −ل　ب) −٢ ل　ج) $\frac{-\text{ل}}{٤}$　د) $\frac{-\text{ل}^{٢}}{٤}$

الحل:

٢٨) $(١+\text{س}^{٢})\,\text{ق}(\text{س}) + ١٢ = ٤\text{س}$ ، فإن قَ(−١) =

أ) ١٤　ب) −٢　ج) −٦　د) صفر

الحل:

٢٩) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س هـ}(\text{س})}$ ، وكان

قَ(٢) = ل(٢) = −٣ ، لَ(٢) = هـ(٢) = ١ ،

جد هـَ(٢)

الحل:　(٢٠١٤ صيفي ٨ علامات)

نتيجة (٢):

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س}) \times \text{م}(\text{س})$ (هـ ، ل ، م قابلين للاشتقاق)

فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س}) \times \text{م}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}'(\text{س}) \times \text{م}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ل}(\text{س}) \times \text{م}'(\text{س})$

---

٣٠) $\text{ق}(١) = ٢$ ، $\text{ق}'(١) = ١$ ، $\text{هـ}(١) = -١$ ، $\text{هـ}'(١) = ٣$ ، $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س})$ ، جد $\text{ل}'$

الحل: $\text{ل}'(\text{س}) = ٢\text{س} \times \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢} \times \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) + \text{س}^{٢} \times \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\text{ل}'(١) = ٢ \times ٢ \times -١ + ١ \times ١ \times -١ + ١ \times ٢ \times ٣$

$= -٤ - ١ + ٦ = ١$

القاعدة السابعة: حصري للجذر التربيعي

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) > ٠$ حيث هـ قابل للاشتقاق

فإن: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢ \times \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$

أي: $\dfrac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

---

٣١) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} + ٥}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ١}}$

٣٢) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٥}$ ، جد $\text{ق}'(٢)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{٣\text{س}^{٢} - ٢}{٢\sqrt{\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٥}}$

$\text{ق}'(٢) = \dfrac{١٠}{٢\sqrt{٩}} = \dfrac{٥}{٣}$

٣٣) جد $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \times \dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\text{س}^{٣} + \text{س}\right)\right)$

الحل: $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء س}}\left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \times \left(٣\text{س}^{٢} + ١\right)\right)$

$= \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \times ٦\text{س} + \left(٣\text{س}^{٢} + ١\right) \times \dfrac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$

$= ٦\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} + \dfrac{٣\text{س}^{٣} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}$

أسئلة كلامية على المشتقة

السؤال الأول: قرص ثلجي دائري يذوب فتتناقص مساحته جد معدل التغير في المساحة بالنسبة لنصف قطره عندما $\text{نق} = ٢$ سم .

الحل : $\text{م} = \pi \, \text{نق}^{٢}$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د نق}} = ٢\pi \, \text{نق} \leftarrow \therefore \left. \frac{\text{د م}}{\text{د نق}} \right|_{\text{نق} = ٢} = ٤\pi$$

السؤال الثاني: صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة أمثال عرضها أوجد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها عندما يكون طولها ١٥سم .

الحل : الطول = س ، العرض = ص (٢٠٠٢ وزاري)

$\text{م} = \text{س ص}$

نجعل المساحة بدلالة الطول = س ، لكن $\text{س} = ٣\text{ص} \leftarrow \text{ص} = \frac{\text{س}}{٣}$

$$\text{م} = \text{س} \times \frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{س}^{٢}}{٣}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د س}} = \left. \frac{٢\text{س}}{٣} \right|_{\text{س} = ١٥} = \frac{٢ \times ١٥}{٣} = ١٠$$

السؤال الثالث: متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ضعف طول ضلع قاعدته ، جد معدل التغير في حجم متوازي المستطيلات بالنسبة لارتفاعه عندما يكون طول ضلع قاعدته = ١سم

الحل: الطول = العرض = س الارتفاع = ع = ٢س

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$\text{ح} = \text{س} \times \text{س} \times ٢\text{س} = ٢\text{س}^{٣}$ نجعل الحجم بدلالة ع ، $\text{ع} = ٢\text{س} \leftarrow \text{س} = \frac{\text{ع}}{٢}$

$$\text{ح} = ٢\frac{\text{ع}^{٣}}{٨} = \frac{\text{ع}^{٣}}{٤}$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د ع}} = \left. \frac{٣\text{ع}^{٢}}{٤} \right|_{\substack{\text{س} = ١ \\ \text{ع} = ٢}} = \frac{٣ \times ٤}{٤} = ٣$$

السؤال الرابع: قطعة معدن على شكل مربع تتمدد بانتظام ، جد معدل التغير في مساحة القطعة بالنسبة لمحيطها عندما يصبح طول ضلعها ٤سم.

الحل: $\text{م} = \text{س}^{٢}$ ، المحيط $\text{ل} = ٤\text{س} \leftarrow \text{س} = \frac{\text{ل}}{٤}$

$$\therefore \text{م} = \left(\frac{\text{ل}}{٤}\right)^{٢} = \frac{\text{ل}^{٢}}{١٦}$$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ل}} = \frac{٢\text{ل}}{١٦} = \frac{\text{ل}}{٨}$$ لكن $\text{س} = ٤$ ، $\text{ل} = ١٦$

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ل}} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$ (يمكن حل المسألة بقاعدة السلسلة لاحقاً)

السؤال الخامس: مخروط من الثلج ارتفاعه ثلاثة أمثال نصف قطر قاعدته ، أخذ المخروط بالذوبان بحيث يحافظ على شكله ، جد معدل تغير حجم المخروط بالنسبة لارتفاعه عندما يكون طول نصف قاعدته ١٠ سم.

(كتاب قديم)

الحل:

السـؤال الخـامس: أنبوب من المعدن اسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين ، سخن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظاً على شكله ، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦سم.

(كتاب)

الحل: المساحة الجانبية $\text{م} = ٢\,\pi\,\text{نق}\,\text{ع}$

$$\therefore \text{م} = ٢\,\pi\,\text{نق}(\text{نق} + ٢) = ٢\,\pi(\text{نق}^{٢} + ٢\text{نق})$$

$$\frac{\text{دم}}{\text{دنق}} = ٢\,\pi(٢\text{نق} + ٢)$$

$$\left.\frac{\text{دم}}{\text{دنق}}\right|_{\text{نق} = ٦} = ٢٨\,\pi$$

رابعاً الاتصال والاشتقاق

نظرية (١): إذا كـان ق(س) قابلاً للاشتقاق عنـد س = $\text{س}_{\text{١}}$ فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة.

نظرية (٢): إذا كـان ق(س) غير متصل عنـد النقطة س = $\text{س}_{\text{١}}$ فإنه غير قابل للاشتقاق عندها.

تلخيص النظرية:

١) إذا كان ق(س) قابل للاشتقاق عند نقطة ← فإن الاقتران متصل عند تلك النقطة.

٢) إذا كان ق(س) غير متصل عند نقطة ← فإن الاقتران غير قابل للاشتقاق عند تلك النقطة

٣) إذا كان ق(س) متصل عند نقطة فليس من الضرورة أن يكون ق(س) قابل للاشتقاق عند تلك النقطة.

مثال: ق(س) = |س| = $\begin{cases} \text{س} & \text{، س} \geq \text{٠} \\ -\text{س} & \text{، س} < \text{٠} \end{cases}$ متصل عند س = ٠

لكن قَ$_{+}$(٠) = ١ ، قَ$_{-}$(٠) = −١ ← قَ(٠) غير موجودة

٤) إذاً لبحث قابلية الاشتقاق عند نقاط التشعب نبدأ بالاتصال.

أمثلة: جد ما يلي:

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٣} & \text{، ٣} \leq \text{س} < \text{٤} \\ \text{٧} & \text{، ٤} \leq \text{س} < \text{٥} \end{cases}$ ، فإن

قَ(٤) =

أ) صفر ب) ٧ ج) ٣ د) غ.م

---

٢) إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{٢}}{\text{س} - \text{١}}$ ، ابحث في قابلية الاشتقاق عند:

أ) س = ٢ ب) س = ١

الحل:

أ) ق(س) متصل عند س = ٢

لأنها ليست من أصفار المقام

قَ(س) = $\dfrac{-\text{٢}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}}$ ← قَ(٢) = −٢

ب) ق(س) غير متصل عند س = ١

قَ(١) غير موجودة

---

٣) إذا علمت أن ق(١) = ٣ ، قَ(١) = ٢ ، جد

$\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \left(\text{ق(س)} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٢}\right)$

الحل: ∴ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

متصل عند س = ١

المطلوب ق(١) + $(\text{١})^{\text{٢}}$ − ٢ = ٣ + ١ − ٢ = ٢

---

٤) إذا كان ق(٢) = ٣ ، قَ(٢) = ١ ، جد

$\underset{\text{س} \to \text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(١ + س)} - \text{٣}}{\text{س} - \text{١}}$

الحل: هنا نحول النهاية إلى صيغة المشتقة

لأن التعويض $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نفرض ع = ١ + س ← س = ع − ١

س ← ١ ، ع ← ٢

$\underset{\text{ع} \to \text{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(٢)}}{\text{ع} - \text{٢}}$ = قَ(٢) = ١

لأن ق قابل للاشتقاق عند س = ٢

خامساً مشتقة الاقترانات المتشعبة

لإيجاد مشتقة الاقترانات المتشعبة على مجاله:

١) نتأكد من اتصال القواعد (التأكد من أصفار المقام ، الجذور السالبة ...إلخ).

٢) نتأكد من اتصال نقاط التشعب.

٣) نجد مشتقة القواعد ونحذف المساواة عن التشعب والأطراف .

٤) إذا كانت نقطة التشعب متصلة نبحث في قابلية اشتقاقها $\underset{+}{\bar{ق}}(أ)$ ، $\underset{-}{\bar{ق}}(أ)$ وتكون قاعدة غير موجودة للأطراف وأي نقطة غير قابلة للاشتقاق .

٥) إذا كانت $\underset{+}{\bar{ق}}$ (التشعب) = $\underset{-}{\bar{ق}}$ (التشعب) نرجع المساواة للتشعب

ملاحظة:

- الأطراف دائماً غير قابلة للاشتقاق
- إذا كان مطلوب مشتقة نقاط التشعب فقط نبحث في اتصال التشعب وإذا كانت متصلة نبحث في اشتقاقها.

أمثلة: جد ما يلي:

١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ ، & س \ge ١ \\ ٤ - س ، & س < ١ \end{cases}$ ، جد $\bar{ق}(س)$ على مجاله

الحل: جميع القواعد متصلة عند $س = ١$ ،

$ق(١) = ٣$ ، $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٣$ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٣$

ق(س) متصل على مجاله

$$\bar{ق}(س) = \begin{cases} ٢س ، & س > ١ \\ -١ ، & س < ١ \\ \text{غ.م} ، & س = ١ \end{cases}$$

$\underset{+}{\bar{ق}}(١) = ٢$ ، $\underset{-}{\bar{ق}}(١) = -١$ ، $\bar{ق}(١)$ غير موجودة

$\therefore$ ق(س) قابل للاشتقاق على ح $-$ {١}

٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٤}{س + ١} ، & س \le ١ \\ س + ١ ، & س > ١ \end{cases}$ ، ابحث في قابلية الاشتقاق ق(س) على ح. (كتاب)

الحل: القواعد ق غير متصل عند $س = -١$

$\bar{ق}(-١)$ غير موجودة

ق(س) متصل عند $س = ١$

لأن $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(١) = ٢$

$$\bar{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{-٤}{(س + ١)^{٢}} ، & س < ١ \\ ١ ، & س > ١ \end{cases}$$

$\underset{+}{\bar{ق}}(١) = ١$ ، $\underset{-}{\bar{ق}}(١) = -١ \leftarrow \bar{ق}(١)$ غير موجودة

$$\therefore \bar{ق}(س) = \begin{cases} \dfrac{-٤}{(س + ١)^{٢}} ، & س < ١ ، س \ne -١ \\ ١ ، & س > ١ \\ \text{غ.م} ، & س = ١ ، -١ \end{cases}$$

$\therefore$ ق(س) قابل للاشتقاق على ح $-$ {١ ، $-$١}

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٦ - \text{س}| & ، \; ٠ \le \text{س} < ١ \\ [٨ - ٢\text{س}] & ، \; ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$ ،

جد $\text{ق}'(\text{س})$ على الفترة $[٠ ، ٢]$

الحل: نعيد التعاريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٦ - \text{س} & ، \; ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٥ & ، \; ١ < \text{س} \le ١,٥ \\ ٤ & ، \; ١,٥ < \text{س} \le ٢ \\ ٦ & ، \; \text{س} = ١ \end{cases}$$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل عند جميع القواعد

$\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند $\text{س} = ١$ ، $\text{س} = ١,٥$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -١ & ، \; ٠ < \text{س} < ١ \\ ٠ & ، \; ١ < \text{س} < ١,٥ \\ ٠ & ، \; ١,٥ < \text{س} < ٢ \\ \text{غ.م} & ، \; \text{س} = ٠ ، ٢ ، ١ ، ١,٥ \end{cases}$$

---

٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ١| + |٢\text{س} - ٦|$ ، جد

$\text{ق}'_{+}(٣)$ ، $\text{ق}'_{-}(٣)$ ، $\text{ق}'(٣)$

الحل: نعيد التعريف عند $\text{س} = ٣$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - ١ + \begin{cases} ٢\text{س} - ٦ & ، \; \text{س} \ge ٣ \\ ٦ - ٢\text{س} & ، \; \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٣\text{س} - ٧ & ، \; \text{س} \ge ٣ \\ ٥ - \text{س} & ، \; \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ٣$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٣ & ، \; \text{س} > ٣ \\ -١ & ، \; \text{س} < ٣ \\ \text{غ.م} & ، \; \text{س} = ٣ \end{cases}$$

$\therefore \; \text{ق}'_{+}(٣) = ٣$ ، $\text{ق}'_{-}(٣) = -١$

$\text{ق}'(٣)$ غير موجودة

٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left[\frac{\text{س}}{٢} + ١\right]$ ، جد

$\text{ق}'(١)$ ، $\text{ق}'(٢)$ ، $\text{ق}'(٤)$

الحل: نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ١ & ، \; ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ٢ & ، \; ٢ \le \text{س} < ٤ \\ ٣ & ، \; ٤ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$$

$\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ١$

غير متصل عند $\text{س} = ٢ ، ٤$

$\text{ق}'(٢)$ غ.م ، $\text{ق}'(٤)$ غ.م

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & ، \; ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٠ & ، \; ٢ < \text{س} < ٤ \\ ٠ & ، \; ٤ < \text{س} < ٦ \\ \text{غ.م} & ، \; \text{س} = ٢، ٤، ٠، ٦ \end{cases} \rightarrow \text{ق}'(١) = ٠$$

- نستنتج مشتقة الكبر عدد صحيح (منفرد) =
  - صفر ، ليست نقطة تشعب [كسري]
  - غ . م ، نقطة تشعب [صحيح]

---

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [٢\text{س} + ٠,٣]$ ، فإن $\text{ق}'\left(\frac{١}{٢}\right) =$

أ) ١   ب) صفر   ج) -١ د) غ.م

---

٧) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left[\sqrt{٢\text{س} + ٠,٢}\right]$ فإن $\text{ق}'(١,٤) =$

أ) غ.م   ب) صفر   ج) ١   د) ٢

- وإذا كان الأكبر عدد صحيح مركب (ليس منفرد) نعيد التعريف ونبحث في الاتصال والاشتقاق

---

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\left[\frac{٢}{٣}\text{س}\right] + ٢}{\text{س} - ٣}$ ، جد

$\text{ق}'\left(\frac{٥}{٢}\right) =$

الحل: نعيد التعريف $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١ + ٢}{\text{س} - ٣} = \dfrac{٣}{\text{س} - ٣}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٣}{(\text{س} - ٣)^{٢}}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{٥}{٢}\right) = \frac{-٣}{\frac{١}{٤}} = -١٢$$

٩) إذا كان

ق(س) = [٧س + ١] − [٧س − ٣] + |٥س| ،

فإن قَ(−١) =

أ) غ.م　ب) ٥　ج) −٥　د) صفر

---

١٠) إذا كان

ق(س) = { ١٤س ، س < ١
　　　　س هـ(س) + ١٠س + ٢ ، س ≥ ١

وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق ، حيث

هـ(١) = $\underset{+}{\text{هـَ(١)}}$ = ٢ ، ابحث في قابلية اشتقاق

ق(س) عند س = ١

الحل: نبحث في اتصال ق(س) عند س = ١

ق(١) = ١هـ(١) + ١٠(١) + ٢ = ١٤

$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١٤ ، $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١٤

∴ ق(س) متصل عند س = ١

قَ(س) = { ١٤ ، س < ١
　　　　س هـَ(س) + هـ(س) + ١٠ ، س > ١

بقي عند س = ١

$\underset{-}{\text{قَ(١)}}$ = ١٤

$\underset{+}{\text{هـَ(١)}}$ = هـ(١) = ٢

لكن هـ قابل للاشتقاق

← $\underset{+}{\text{هـَ(١)}}$ = $\underset{-}{\text{هـَ(١)}}$ = هـَ(١) = ٢

← متصل ← $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) = هـ(١) = ٢

∴ $\underset{+}{\text{قَ(١)}}$ = ٢ + ٢ + ١٠ = ١٤

∴ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

١١) إذا كان ق(س) = { ٥ − ٣س^٢ ، س < −١
　　　　　　　　٢س + ١ ، س ≥ −١ ،

هـ(س) = { ٤س + ٣ ، س < −١
　　　　س^٢ + ١ ، س ≥ −١ ، ابحث في

قابلية الاشتقاق للاقتران ،

ل(س) = ق(س) + هـ(س) عند س = −١

الحل: نركب　(٢٠٠٥ وزاري)

ل(س) = { ٣س^٢ + ٤س + ٨ ، س < −١
　　　　س^٢ + ٢س + ٢ ، س ≥ −١

ل(س) متصل عند س = −١

لأن $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}$ ل(س) = ل(−١) = ١

لَ(س) = { −٦س + ٤ ، س < −١
　　　　٢س + ٢ ، س > −١
　　　　غ.م ، س = −١

$\underset{+}{\text{لَ(−١)}}$ = ٠ ، $\underset{-}{\text{لَ(−١)}}$ = ١٠ ، لَ(−١) غ.م

ل(س) غير قابل للاشتقاق عند س = −١

---

١٢) ق(س) = { أس^٣ + ٣ ، س ≥ ١
　　　　　س^٢ − ب ، س < ١ ، جد قيمة

أ ، ب التي تجعل الاقتران قابل للاشتقاق عند س = ١

الحل: قَ(س) = { ٣أس^٢ ، س ≥ ١
　　　　　　٢س ، س < ١

∵ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

∴ $\underset{+}{\text{قَ(١)}}$ = $\underset{-}{\text{قَ(١)}}$

٣أ = ٢ ← أ = $\frac{٢}{٣}$

∵ ق(س) متصل عند س = ١

فإنه متصل عند س = ١

$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

أ + ٣ = ١ − ب ← ب = ١ − ٣ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{-٨}{٣}$

١٣) إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} أس^{٣} + ٦س - ١ & ، س \geq ٢ \\ ب - جـ س & ، س < ٢ \end{cases}$

جد أ ، ب ، جـ التي تجعل $ق'(٢) = -٢$

الحل: $ق'(س) = \begin{cases} ٣أس^{٢} + ٦ & ، س \geq ٢ \\ -جـ & ، س < ٢ \end{cases}$

$$ق'_{+}(٢) = ق'_{-}(٢) = -٢$$

$$ق'_{-}(٢) = -٢$$

$$-جـ = -٢ \leftarrow \boxed{جـ = ٢}$$

$$ق'_{+}(٢) = ١٢أ + ٦ = -٢$$

$$أ = \frac{-٨}{١٢} = \boxed{\frac{-٢}{٣}}$$

∵ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ٢

فإنه متصل عند س = ٢

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$$

$$٨أ + ٦(٢) - ١ = ب - ٢جـ$$

$$٨\left(\frac{-٢}{٣}\right) + ١١ = ب - ٤$$

$$\boxed{ب = \frac{٢٩}{٣}}$$

١٤) إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب & ، س \geq ٢ \\ جـ س + ٣ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان $ق'_{+}(٢) = ٥$ ، $ق'_{-}(٢) = ٧$ ، جد أ ، ب ، جـ

الحل: $ق'(س) = \begin{cases} ٢أس & ، س > ٢ \\ جـ & ، س < ٢ \end{cases}$

$$ق'_{+}(٢) = ٤أ = ٥ \leftarrow \boxed{أ = \frac{٥}{٤}}$$

$$ق'_{-}(٢) = جـ = ٧ \leftarrow \boxed{جـ = ٧}$$

ق(س) متصل

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$$

$$٤أ + ب = ٢جـ + ٣$$

$$٥ + ب = ١٧ \leftarrow \boxed{ب = ١٢}$$

ورقة عمل (٣)

السؤال الأول: جد مشتقة ما يلي:

١) $ق(س) = س^{-١} + س^{٣} - \sqrt{٣}$

٢) $ق(س) = \left(س^{٣} + ٤\right)\left(١ - \frac{٢}{٥}س\right)$

٣) $ق(س) = \frac{أ}{س^{٢} + ١}$ ، وكان $ق'(١) = ٣$ ، جد أ

٤) $ق(س) = \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، جد $ق'(٨)$

٥) $ق(س) = \frac{١ - س^{٢}}{(س + ١)(س - ٥)}$ ، جد $ق'(١)$

٦) $ق(س) = \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{٢}{س + ٢} + \frac{س^{٣} - ١}{٩}$ ،

جد $ق'(س)$

٧) $ق(س) = \frac{س^{٣} - ٧س^{٨} - س^{-٥}}{جا^{٢}س + جتا^{٢}س}$ ، جد $ق'(س)$

٨) إذا كان $ق(س) = ٧م^{٢} - \frac{٧}{م} + ١$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$

حيث $م \in ح$

٩) إذا كان $ق(س) = \frac{١ - ٣س}{س^{٢} - ٢}$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$ ،

عند النقطة $\left(٠ ، \frac{-١}{٢}\right)$

١٠) إذا كان $ق(س) = \frac{أس - ١}{س^{٢} + ١}$ ، وكان

$ق'(٢) = \frac{٤}{٩}$ ، جد قيمة أ

١١) إذا كان $ق(س) = \frac{س}{٨} + \frac{٨}{س}$ ، جد $ق'(١)$

١٢) إذا علمت أن $ق(٣) = ٢$ ، $ق'(٣) = -١$ ، وكان

$هـ(س) = س^{٢}ق(س)$ ، جد $هـ'(٣)$

١٣) إذا علمت أن $ق(س) = س^{٢}هـ(س)$ ،

وأن $هـ'(٢) = ٥$ ، $ق(٢) = ٨$ ، جد $ق'(٢)$

١٤) جد مشتقة $ق(س) = \begin{cases} [س] + س ، & ١ \le س < ٢ \\ |س - ٢| ، & ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$

على مجاله .

١٥) $ق(س) = |س - ٢| + |س + ١|$ ، جد $ق'(س)$ ،

عند النقطة (٢ ، ٣)

١٦) $ق(س) = |س - ٢|$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} ، & س \ge ١ \\ س ، & س < ١ \end{cases}$

جد $(ق + هـ)'(١)$

١٧) $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ٢ ، & س > ٢ \\ ب س + جـ ، & س \le ٢ \end{cases}$ ، وكان

$ق'(٢) = ١٢$ جد قيم أ ، ب ، جـ

١٨) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}\,هـ(س) ، & س \ge ٢ \\ \frac{٩}{٢}س^{٢} + ١٠س - ٢٢ ، & س < ٢ \end{cases}$

وكان هـ(س) قابل للاشتقاق عند $س = ٢$ ،

وأن $هـ(٢) = ٤$ ، $هـ'_{-}(٢) = ٣$ ،

ابحث في قابلية اشتقاق ق(س) عند $س = ٢$

السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{س}^{٣}+١}$ ، وكان $\text{قَ}(١)=٢$ ،

$\text{ق}(١)=٣$ جد $\text{لَ}(١)$

أ) ١٨ ب) ١٧ ج) ١٥ د) ١٣

---

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{\text{س}^{٢}+١}$ فإن $\text{قَ}(١)$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) $\frac{-١}{٤}$ د) صفر

---

٣) إذا علمت أن $\text{ق}(١)=٣$ $\text{قَ}(١)=٦$ ، وكان

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٣}\,\text{ق}(\text{س})$ فإن $\text{هـَ}(١)$

أ) ٦ ب) ٢٠ ج) صفر د) ٢٤

---

٤) إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}) - ١$ ، فإن $\text{قَ}(١)$

أ) ١ ب) −١ ج) ٤ د) −٤

---

٥) إذا علمت أن $\text{هـ}(٢)=٤$، $\text{هـَ}(٢)=٥$ ،

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{هـ}(\text{س})}$ $\text{قَ}(٢)=-١$ ، فإن أ =

أ) ١٦ ب) $\frac{٥}{١٦}$ ج) $\frac{١٦}{٥}$ د) $\frac{١}{١٦}$

---

٦) إذا علمت أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + [\text{س}+١] - [\text{س}-٥]$

فإن $\text{قَ}(٢)$ تساوي:

أ) ١٢ ب) صفر ج) غ.م د) ١٠

---

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{|\text{س}+١|}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، وكان $\text{هـَ}(٢)=٣$ ،

$\text{هـ}(٢)=-١$ فإن $\text{قَ}(٢)$ تساوي:

أ) −٢ ب) −١ ج) −١٠ د) ١٠

---

٨) $\text{ل}(\text{س}) = \frac{\left[\frac{١}{٢}\text{س}-١\right]}{\text{هـ}(\text{س})}$ ، وكان $\text{لَ}(-١)=٢$ ،

$\text{ل}(-١)=٥$ فإن $\text{هـَ}(-١)$ تساوي:

أ) ٢ ب) $\frac{٤}{٢٥}$ ج) $\frac{٢}{٥}$ د) غ.م

---

٩) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}|[\text{س}]$ ، فإن $\text{قَ}(-٣,٢٥)$ تساوي:

أ) −٤ ب) ٤ ج) صفر د) غ.م

---

١٠) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{س}-١} & ،\ \text{س} \neq ١ \\ ٢ & ،\ \text{س} = ١ \end{cases}$

فإن $\text{قَ}(١)$ تساوي:

أ) صفر ب) ١ ج) غ.م د) −١

---

١١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ،\ \text{س} > ٢ \\ ٢\text{س} & ،\ \text{س} < ٢ \\ ٤ & ،\ \text{س} = ٢ \end{cases}$ ، فإن $\text{قَ}(٢)$ تساوي:

أ) صفر ب) غ.م ج) ٤ د) ٢

---

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{[\text{س}+١]}{\text{س}-١}$ فإن $\text{قَ}\left(\frac{١}{٢}\right)$ تساوي:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{-١}{٤}$ ج) ٤ د) −٤

---

١٣) $\text{ق}(\text{س}) = |٣-٢\text{س}|$ فإن $\text{قَ}\left(\frac{٢}{٣}\right)$ تساوي:

أ) −٢ ب) صفر ج) ١ د) ٢

---

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}| + [\text{س}+٢,٠] - \text{س}$ ، فإن

$\text{قَ}(-١) =$

أ) غ.م ب) صفر ج) −٢ د) ١

---

١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \left[\sqrt{٣\text{س}+٤,٢}\right]$ ، فــــإن $\text{قَ}(٢,٢)$

تساوي:

أ) صفر ب) غ.م ج) ٣ د) ١

السؤال الثالث:

١) جد معدل تغير مساحة مثلث متساوي الأضلاع بالنسبة لطول ضلعه عندما يصبح طول ضلعه = ٣ سم .

٢) جد معدل تغير مساحة دائرة بالنسبة لمحيطها عندما يصبح نق = ٢ سم .

٣) جد معدل التغير في حجم الأسطوانة بالنسبة لمحيط قاعدتها عندما يكون نق = ٢ سم ، علماً بأن ارتفاع الأسطوانة يساوي ضعف طول نصف قطرها.

سادساً المشتقات العليا

$\text{د}(\text{س}) = \text{ص}$

↓ بالاشتقاق

$\text{د}'(\text{س}) = \text{ص}' = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

↓ بالاشتقاق

$\text{د}''(\text{س}) = \text{ص}'' = \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$

↓ بالاشتقاق

$\text{د}'''(\text{س}) = \text{ص}''' = \frac{\text{ء}^{3}\text{ص}}{\text{ءس}^{3}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}\right)$

↓ بالاشتقاق (ن من المرات)

$\text{د}^{(\text{ن})}(\text{س}) = \text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ء}^{\text{ن}-1}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}-1}}\right)$

أمثلة:

١) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{4} + 3\text{س}^{2} - 4\text{س} + 1$ ،

جد $\text{د}''(\text{س})$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = 4\text{س}^{3} + 6\text{س} - 4$

$\text{د}''(\text{س}) = 12\text{س}^{2} + 6$

٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \frac{2}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{3} + 4}{2}$ ،

جد $\text{د}''(1) + \text{هـ}''(1)$

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = \frac{-2}{\text{س}^{2}}$

$\text{د}''(\text{س}) = \frac{2 \times 2\text{س}}{\text{س}^{4}} = \frac{4}{\text{س}^{3}}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{3\text{س}^{2}}{2}$

$\text{هـ}''(\text{س}) = \frac{6\text{س}}{2} = 3\text{س}$

$\therefore \text{د}''(1) + \text{هـ}''(1) = 4 + 3 = 7$

٣) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{3} + 4\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1$

وكان $\text{د}''(1) = 50$ ، جد قيمة أ

الحل: $\text{د}'(\text{س}) = 3\text{أ}\text{س}^{2} + 8\text{س} - 2$

$\text{د}''(\text{س}) = 6\text{أ}\text{س} + 8$

$\text{د}''(1) = 6\text{أ} + 8 = 50$

$6\text{أ} = 42 \leftarrow \text{أ} = 7$

٤) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = (3\text{س}^{2} + 2)(\text{س}^{3} - 2\text{س} + 1)$ ،

فأثبت أن $\text{د}'(1) \times \text{د}''(1) = 210$

الحل: (كتاب قديم)

$\text{د}'(\text{س}) = (3\text{س}^{2} + 2)(3\text{س}^{2} + 2) + (\text{س}^{3} - 2\text{س} + 1)(6\text{س})$

$\therefore \text{د}'(1) = 5 + 0 = 5$

$\text{د}''(\text{س}) = (3\text{س}^{2} + 2)(6\text{س}) + (6\text{س})(3\text{س}^{2} + 2)$

$+ (\text{س}^{3} - 2\text{س} + 1)(6) + (6\text{س})(3\text{س}^{2} + 2)$

$\text{د}''(1) = 30 + 6 + 0 + 6 = 42$

$\therefore \text{د}'(1) \times \text{د}''(1) = 5 \times 42 = 210$

٥) إذا كان $\text{ص} = \frac{2}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$ ، فأثبت أن

$\text{ص}'' = \frac{1}{2}\text{ص}^{3}$ (كتاب)

الحل: $\text{ص}' = \frac{-2}{\text{س}^{2}}$

$\text{ص}'' = \frac{2 \times 2\text{س}}{\text{س}^{4}} = \frac{4}{\text{س}^{3}}$

$\frac{1}{2}\text{ص}^{3} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{\text{س}}\right)^{3} = \frac{4}{\text{س}^{3}}$

$\therefore \text{ص}'' = \frac{1}{2}\text{ص}^{3}$

٦) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، أثبت أن

$ق'''(س) - ٣س\, ق'(س)\, ق''(س) = ٠$

الحل: $ق'(س) = \frac{-١}{س^{٢}}$

$$ق''(س) = \frac{١ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$$

$$ق'''(س) = \frac{-٢ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦}{س^{٤}}$$

نطبق $ق'''(س) - ٣س\, ق'(س)\, ق''(س)$

$$= \frac{-٦}{س^{٤}} - ٣س \times \frac{-١}{س^{٢}} \times \frac{٢}{س^{٣}}$$

$$= \frac{-٦}{س^{٤}} + \frac{٦}{س^{٤}} = \text{صفر}$$

---

٧) إذا كان $ق(١) = ٢$ ، $ق'(١) = -١$ ، $ق''(١) = ٣$

جد $\left(\frac{ق'}{ق}\right)'(١)$

الحل:

$$\left(\frac{ق'}{ق}\right)'(١) = \frac{ق(١) \times ق''(١) - ق'(١) \times ق'(١)}{ق^{٢}(١)}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - (-١) \times (-١)}{(٢)^{٢}} = \frac{٥}{٤}$$

---

٨) إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، وكان $ق^{(٤)}(س) = أ\, س$

فجد قيمة أ (كتاب)

الحل: نجد حتى المشتقة الرابعة

$$ق'(س) = ن\, س^{ن-١}$$

$$ق''(س) = ن(ن-١)\, س^{ن-٢}$$

$$ق'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)\, س^{ن-٣}$$

$$ق^{(٤)}(س) = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\, س^{ن-٤}$$

بالمقارنة الأس = الأس للمشتقة الرابعة

$ن - ٤ = ١ \leftarrow ن = ٥$

المعامل = المعامل

$أ = ٥(٤)(٣)(٢) = ١٢٠$

---

٩) إذا علمت أن $ق(س) = س^{ن}$ وأن

$ق^{(٣)}(س) = ٢١٠\, س^{ن-٣}$ جد (ن)

الحل: $ق'(س) = ن\, س^{ن-١}$

$$ق''(س) = ن(ن-١)\, س^{ن-٢}$$

$$ق'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)\, س^{ن-٣}$$

$$\therefore\ ٢١٠ = ن(ن-١)(ن-٢)$$

نبحث عن ٣ أعداد متتالية ضربها ٢١٠

$٧ \times ٦ \times ٥ \leftarrow \boxed{ن = ٧}$

---

١٠) إذا كان $ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٣} - ٦س^{٢} - س$ ،

فجد قيم س التي تحقق: (كتاب)

أ) $ق''(س) = ٠$ ب) $ق''(س) \geq ٠$ ج) $ق''(س) \leq ٠$

الحل: $ق'(س) = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١$

$$ق''(س) = ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢$$

أ) $ق''(س) = ٠$

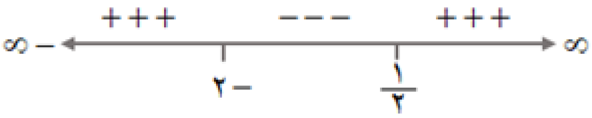
$١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢ = ٠$ (بالقسمة على ٦)

$٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$

$\therefore\ س = \frac{١}{٢}$ ، $س = -٢$

ب) $ق''(س) \geq ٠$

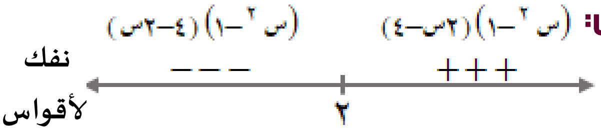


$س \in (-\infty ، -٢] ، [\frac{١}{٢} ، \infty)$

ج) $ق''(س) \leq ٠ \leftarrow [-٢ ، \frac{١}{٢}]$

٣) إذا كان $ق(س) = (س^٢ - ١)\,|٢س - ٤|$ أبحث في قابلية اشتقاق $ق(س)$ على ح ثم جد $ق''(١)$ ، $ق''(٢)$

الحل:



$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^٣ - ٤س^٢ - ٢س + ٤ & ، س \geq ٢ \\ -٢س^٣ + ٤س^٢ + ٢س - ٤ & ، س < ٢ \end{cases}$$

$ق(س)$ متصل عند $س = ٢$ (تأكد من ذلك)

$$ق'(س) = \begin{cases} ٦س^٢ - ٨س - ٢ & ، س > ٢ \\ -٦س^٢ + ٨س + ٢ & ، س < ٢ \end{cases}$$

$ق'_{+}(٢) = ٦$ ، $ق'_{-}(٢) = -٦$ ← $ق'(٢)$ غ.م

$$ق''(س) = \begin{cases} ١٢س - ٨ & ، س > ٢ \\ -١٢س + ٨ & ، س < ٢ \\ & ، س = ٢ \end{cases}$$

$ق''(١) = -١٢(١) + ٨ = -٤$ ← $ق''(٢)$ غ.م

٤) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} أس^٢ + ب س + جـ & ، س \geq ١ \\ ٧ - س^٢ & ، س < ١ \end{cases}$$ وكان

$ق''(١)$ موجودة ، فجد قيم أ ، ب ، جـ

الحل: $$ق'(س) = \begin{cases} ٢أ س + ب & ، س \geq ١ \\ -٢س & ، س < ١ \end{cases}$$

(بقيت المساواة لأن كل من $ق''(١)$ ، $ق'(١)$ موجودة)

$$ق''(س) = \begin{cases} ٢أ & ، س \geq ١ \\ -٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

١) $ق''_{+}(١) = ق''_{-}(١)$ ← $٢أ = -٢$ ← $أ = -١$

٢) ∴ $ق''(١)$ موجودة ← $ق'(١)$ موجودة

$ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١)$ ← $٢أ + ب = -٢$ ← $ب = ٠$

٣) ∴ $ق'(١)$ موجودة ← $ق(س)$ متصل عند $س = ١$

$$\underset{س \to ١^{+}}{نها}\, ق(س) = \underset{س \to ١^{-}}{نها}\, ق(س)$$

$$أ + ب + جـ = ٦$$

$$-١ + ٠ + جـ = ٦ \leftarrow جـ = ٧$$

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$ ، جد كلاً من

$ق'(٠)$ ، $ق''(٠)$ ، $ق'''(٠)$ (كتاب)

الحل: $ق(س)$ متصل عند $س = ٠$

$\underset{س \to ٠^{+}}{نها}\, ق(س) = ٠$ ، $\underset{س \to ٠^{-}}{نها}\, ق(س) = ٠$

$ق(س) = ٠$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$$

$ق'_{+}(٠) = ٠$ ، $ق'_{-}(٠) = ٠$ ← $ق'(٠) = ٠$

$$ق''(س) = \begin{cases} ٦س & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$$

$ق''_{+}(٠) = ٠$ ، $ق''_{-}(٠) = ٠$ ← $ق''(٠) = ٠$

$$ق'''(س) = \begin{cases} ٦ & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$$

$ق'''_{+}(٠) = ٦$ ، $ق'''_{-}(٠) = ٠$

$ق'''(٠) = ٠$ غير موجودة

سابعاً مشتقة الاقترانات الدائرية

ق(س)	قَ(س)
جا س	جتا س
جتا س	− جا س
ظا س	قا^{٢}س
ظتا س	− قتا^{٢}س
قا س	قا س ظا س
قتا س	− قتا س ظتا س

برهن مشتقة الاقترانات الدائرية

أمثلة:

١) إذا كان ق(س) = ٢ جتا س − ٣ جا س ، جد قَ(س)

الحل: قَ(س) = −٢ جا س − ٣ جتا س

---

٢) إذا كان ص = جا س جتا س ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جا س × − جا س + جتا س × جتا س

= جتا^{٢}س − جا^{٢}س = جتا٢س

---

٣) إذا كان ص = قا س ظا س ، جد صَ

الحل: صَ = قا س ×قا^{٢}س + ظا س قا س ظا س

صَ = قا^{٣}س + قا س ظا^{٢}س

---

٤) جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للاقتران ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س جتا س − جا س}}{\text{س}^{٢}}$

---

٥) إذا كان هـ(س) = $\frac{\text{قا س}}{\text{١ + جتا س}}$ ، جد هـَ(س)

الحل:

هـَ(س) = $\frac{\text{(١ + جتا س) قا س ظا س − قا س (− جا س)}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}}$

---

٦) إذا كان ص = قا س ، جد صً

الحل: صَ = قا س ظا س

صً = قا س ×قا^{٢}س + ظا س × قا س ظا س

صً = قا^{٣}س + قا س ظا^{٢}س

---

٧) إذا كان ص =جا س جتا س ،

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٢جتا^{٢}س + ١ تساوي:

أ) ١   ب) صفر   ج) جتا ٢س   د) −١

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جا س × − جا س + جتا س × جتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

نطبق   نجمع

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ − ٢ جتا^{٢}س + ١ = جتا^{٢}س − جا^{٢}س − ٢ جتا^{٢}س + ١

= − جا^{٢}س − جتا^{٢}س + ١

= − ١ + ١ = ٠

(فكر بطريقة أخرى)

---

٨) إذا كان ص = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$) جتا (س − π)

أثبت أن صَ تساوي:

أ) جتا ٢س   ب) جا س جتا س

ج) صفر   د) جا ٢س

الحل: نبسط عن طريق المتطابقات

جا (س + $\frac{\pi}{٢}$) = جاس جتا $\frac{\pi}{٢}$ + جتاس جا $\frac{\pi}{٢}$ = جتاس

جتا (س − π) = جتاس جتاπ + جاس جاπ = − جتاس

ص = جتا س× − جتا س

صَ = جتا س × جا س+ − جتا س × − جا س

= ٢جا س جتا س = ٢جا س

٩) إذا كان ص = جاس – جتاس ، فإن صَ × صً تساوي:

أ) جتا س ب) ١ ج) جتا٢س د) – جتا٢س

الحل: صَ = جتاس + جاس

صً = –جاس + جتاس

صَ × صً = – ~~جاس جتاس~~ + جتا^{٢}س – جا^{٢}س + ~~جاس جتاس~~

= جتا ٢ س

---

١٠) إذا كان ص = أ جا س + ب جتا س ثوابت أثبت أن (صَ)^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} (كتاب)

الحل: صَ = أ جتا س – ب جا س

(صَ)^{٢} = أ^{٢} جتا^{٢}س – ~~٢أ ب جتا س جا س~~ + ب^{٢} جا^{٢}س

(ص)^{٢} = أ^{٢} جا^{٢}س + ~~٢أ ب جا س جتا س~~ + ب^{٢} جتا^{٢}س +

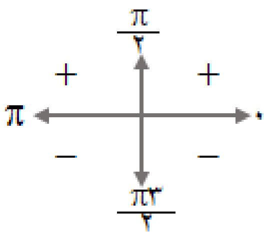
= أ^{٢} (جا^{٢}س+جتا^{٢}س) + ب^{٢} (جا^{٢}س+جتا^{٢}س) = أ^{٢} + ب^{٢}

---

١١) إذا كان ق(س) = |جا س| ، فابحث في قابلية اشتقاق ق(س) عند س = π

الحل:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{جا س ،} & \frac{\pi}{٢} < \text{س} \le \pi \\ \text{–جا س ،} & \pi < \text{س} < \frac{٣\pi}{٢} \end{cases}$$



ق(س) متصل عند س = π

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{جتا س ،} & \frac{\pi}{٢} < \text{س} < \pi \\ \text{–جتا س ،} & \pi < \text{س} < \frac{٣\pi}{٢} \end{cases}$$

قَ$_{+}$(π) = ١ ، قَ$_{-}$(π) = –١ ، قَ(π) غير موجودة

---

١٢) جد قيم س في الفترة [–٢π ، ٢π] ، التي تحقق المعادلة قَ(س) = ٠ لكل مما يأتي: (كتاب)

أ) ق(س) = س + جتا س ب) ق(س) = قا س ج) ق(س) = $\frac{١}{٢}$س + جتا س

الحل: أ) قَ(س) = ١ – جا س = ٠

جا س = ١ ← س = $\frac{\pi}{٢}$ الحل الأول

س (بالدورة السالبة) = ٩٠° – ٣٦٠° = –٢٧٠° = $\frac{-٣\pi}{٢}$

أو باستخدام الحل العام س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ن π ن ∈ ص

ب) ق(س) = قا س

قَ(س) = قا س ظا س ← قا س = ٠ غير ممكن
← ظا س = ٠

ظا س = ٠ ← جا س = ٠ ← {٠ ، ±π ، ±٢π} تحذف لأنها اطراف غ.م

ج) ق(س) = $\frac{١}{٢}$س + جتا س

ورقــة عمــل (٤)

١) إذا علمت أن ق(س) = $\frac{\pi}{\text{جتا س}}$ ، فإن قَ(π) =

أ) صفر ب) $-\pi$ ج) π د) ١

---

٢) ق(س) = $\frac{\text{جتا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٢}}\right)}{\text{س}}$ ، فإن قَ(س) =

أ) $\frac{\text{س جا س} - \text{جتا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ب) صفر

ج) $\frac{\text{س جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ د) جتا س

---

٣) ق(س) = $\frac{\text{جتا}\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\pi - \text{س}\right)}{\text{جتا س}}$ ، فإن قَ(س) =

أ) $-$ قتا$^{\text{٢}}$س ب) قتا$^{\text{٢}}$س

ج) قا$^{\text{٢}}$س د) $-$ قا$^{\text{٢}}$س

---

٤) ق(س) = $\frac{\text{٢جا}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) - \text{س}}{\text{قا}^{\text{٢}}\left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right)}$ ، فإن قَ(س) =

أ) صفر ب) $\frac{-\text{١}}{\text{٢}}$

ج) $\frac{-\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}$ د) $\frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

---

٥) ق(س) = س$^{\text{ن}}$ وكان قً(س) = ٢٠ س$^{\text{ن}-\text{٣}}$

فما قيمة ن

أ) ٦ ب) ٤ ج) ٥ د) ٧

---

٦) ق(س) = جا س ، هـ(π) = −١ ، هـَ(π) = ٢

فإن (ق . هـ)َ(π) =

أ) −٢ ب) ٢ ج) ١ د) −١

---

٧) إذا علمت أن قَ(١) = ٣ ، ق(١) = ٥

هـ(س) = $\frac{\left[\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\right]}{\text{ق(س)}}$ ، فإن هـَ(١)

أ) غ.م ب) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ ج) $\frac{-\text{٣}}{\text{٥}}$ د) $\frac{-\text{٣}}{\text{٢٥}}$

---

٨) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أس}^{\text{٢}} + \text{٢ب س} + \text{جـ} ، & \text{س} \leq \text{١} \\ \text{س}^{\text{٣}} ، & \text{س} > \text{١} \end{cases}$

، وكان قً(س) موجودة عند س = ١ ، جد قيم

أ ، ب ، جـ

---

٩) إذا كان ق(س) = س |جا س| ، ابحث في قابلية

اشتقاق ق(س) على الفترة $\left[\frac{\pi}{\text{٢}} ، \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\pi\right]$

---

١٠) إذا كان ص = جا س + جتا س ، أثبت أن

(صَ)$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ٢

---

١١) إذا كان ق(س) = ٢ جا س + ٣ جتا س ، أثبـت أن

قً(س) + ق(س) = ٠

ثامناً قاعدة السلسلة

أولاً: مشتقة تركيب الاقترانات (ق ∘ هـ)′(س)

مراجعة:

إذا كان ق ، هـ اقترانين حيث ص = ق(ع) ، ع = هـ(س) وكان مدى هـ مجموعة جزئية من مجال ق

فإنه ص = ق(ع) = (ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س))

مثال: ق(س) = س + س^{٣} ، هـ(س) = جتا س

فإن (هـ ∘ ق)(س) = هـ(ق(س)) = هـ(س + س^{٣}) = جتا(س + س^{٣})

بينما (ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س)) = ق(جتا س) = جتا س + جتا^{٣} س

قاعدة الاشتقاق:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند النقطة س وكان ق(س) قابل للاشتقاق عند النقطة هـ(س) فإن (ق ∘ هـ)(س) قابل للاشتقاق وأن: (ق ∘ هـ)′(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

أمثلـة

١) إذا كان ق(س) = ٤ − س^{٢} ، هـ(س) = جا س ، فجد:

الحل: كلا ق(س) ، هـ(س) متصلين ، قابلين للاشتقاق

قَ(س) = −٢س ، هـَ(س) = جتا س

قً(س) = −٢ ، هـً(س) = − جاس

أ) (ق ∘ هـ)′(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ(جا س) × جتا س

= −٢ جا س × جتا س = − جا ٢ س

ب) (ق ∘ ق)′(س) = قَ(ق(س)) × قَ(س)

= قَ(٤ − س^{٢}) × −٢س

= −٢(٤ − س^{٢}) × −٢س = ٤س(٤ − س^{٢})

جـ) (هـ ∘ ق)′(س) = هـَ(ق(س)) × قَ(س) = هـَ(٤ − س^{٢}) × −٢س

= جتا(٤ − س^{٢}) × −٢س

د) (ق ∘ هـَ)′(س) = قَ(هـَ(س)) × هـً(س) = قَ(جتا س) × − جا س

= − ٢ جتا س × − جا س = ٢ جا س جتا س = جا ٢س

هـ) (هـ ∘ هـَ)′(س) = هـَ(هـَ(س)) × هـً(س) = هـَ(جتا س) × − جا س

= جتا (جتا س) × − جا س

٢) $ق(س) = \frac{٨س}{س^{٢}+١}$ ، $هـ(س) = قا\ س$ ،
جد $(ق \circ هـ)'\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ (٢٠٠٧ وزاري)

الحل: هـ قابل للاشتقاق عند $س = \frac{\pi}{٣}$

ق قابل للاشتقاق عند $هـ\left(\frac{\pi}{٣}\right) = ٢$

$$ق'(س) = \frac{(س^{٢}+١)(٨) - ٨س(٢س)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

$$= \frac{٨ - ٨س^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

$هـ'(س) = قا\ س\ ظا\ س$

$$(ق \circ هـ)'\left(\frac{\pi}{٣}\right) = ق'\left(هـ\left(\frac{\pi}{٣}\right)\right) \times هـ'\left(\frac{\pi}{٣}\right)$$

$$= ق'(٢) \times ٢\sqrt{٣}$$

$$= \frac{٨ - ٨(٤)}{٢٥} \times ٢\sqrt{٣}$$

$$= \frac{-٤٨\sqrt{٣}}{٢٥}$$

تمرين:

إذا علمت أن $هـ(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - ١$، $ق'(١) = ٢$ وكان
$(هـ \circ ق)'(١) = ١٦$ ، فجد $ق(١)$

٣) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$

$هـ(س) = جاس$ ، جد $(هـ \circ ق)'(١)$

الحل: $ق(س)$ متصل عند $س = ١$ (بين ذلك)

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س > ١ \\ ٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

$$ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١) = ٢$$

∴ $ق(س)$ قابل للاشتقاق عند $س = ١$

$هـ'(س) = جتا\ س$

المطلوب $هـ'(ق(١)) \times ق'(١) = هـ'(٢) \times ٢ = ٢\ جتا\ ٢$

٤) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق
$(ق \circ هـ)(س) = س$ ، وكان
$ق'(س) = ١ + (ق(س))^{٢}$ ، فجد $هـ'(س)$
(٢٠١٧ شتوي ، ٥ علامات)

الحل:

---

٥) إذا كان $ق(س) = أ\ جا\ س$ ، $(أ \neq ٠)$ ، وكان
$هـ(س) = \frac{٣س}{س^{٢}+١}$ ، وكان $(هـ \circ ق)'\left(\frac{\pi}{٦}\right) =$
صفر ، جد قيمة أ ؟ (٢٠٠٨ وزاري)

الحل: كلا الاقترانين قابل للاشتقاق

$ق'(س) = أ\ جتا\ س$

$$هـ'(س) = \frac{(س^{٢}+١)(٣) - ٣س(٢س)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

$$∴ هـ'(س) = \frac{٣ - ٣س^{٢}}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

$$هـ'\left(ق\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right) \times ق'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = صفر$$

$هـ'\left(\frac{١}{٢}أ\right) \times أ\frac{\sqrt{٣}}{٢} = صفر$ لكن $أ \neq ٠$

$$هـ'\left(\frac{١}{٢}أ\right) = صفر$$

$$\frac{٣ - ٣\left(\frac{١}{٢}أ\right)^{٢}}{\left(\frac{أ^{٢}}{٤}+١\right)^{٢}} = صفر \text{ (صفر البسط)}$$

$$∴ \cancel{٣}^{\,١} = \cancel{٣}\left(\frac{أ^{٢}}{٤}\right) \leftarrow أ^{٢} = ٤$$

$$∴ أ = ٢ ، -٢$$

٦) إذا كان $ق(س) = |س - ١|$ ، $هـ(س) = س^{٢}$ ،

فجد $(هـ \circ ق)'(١)$ ثم جد $(ق \circ هـ)'(١)$

الحل: $ق(س) = \begin{cases} س - ١ ، & س \geq ١ \\ ١ - س ، & س < ١ \end{cases}$

$ق(س)$ متصل عند $س = ١$

$ق'(س) = \begin{cases} ١ ، & س > ١ \\ -١ ، & س < ١ \\ \text{غ.م} ، & س = ١ \end{cases}$ ، $هـ'(س) = ٢س$

المطلوب الأول:

نركب لأن $ق(س)$ غير قابل للاشتقاق

$هـ(ق(س)) = هـ(|س - ١|) = (|س - ١|)^{٢}$ يحذف المطلق

$هـ(ق(س)) = (س - ١)^{٢} = س^{٢} - ٢س + ١$

نشتق $\frac{د}{دس}\left(هـ(ق(س))\right) = ٢س - ٢$

$\therefore (هـ \circ ق)'(١) = \text{صفر}$

المطلوب الثاني:

$(ق \circ هـ)(س) = ق(هـ(س))$

$= |س^{٢} - ١| = \begin{cases} س^{٢} - ١ ، & س \geq ١ ، س \leq -١ \\ ١ - س^{٢} ، & -١ < س < ١ \end{cases}$

الاقتران متصل لكنه غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$

ثانياً: إذا كان $\underbrace{ص = ق(ع)}_{\text{ص اقتران لـ ع}}$ ، $\underbrace{ع = هـ(س)}_{\text{ع اقتران لـ س}}$

فإن $\frac{دص}{دس} = (ق \circ هـ)'(س)$

$= ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

تعميم: $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$

أمثلة

١) إذا كان $ص = ع^{٢} - ٤ع + ١$ ، $ع = ٦س^{٢}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = ١$

الحل: $\frac{دص}{دع} = ٢ع - ٤$ ، $\frac{دع}{دس} = ١٢س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = (٢ع - ٤)(١٢س)$

$= \left(٢(٦س^{٢}) - ٤\right)(١٢س) \Big|_{س = ١}$

$= ٨ \times ١٢ = ٩٦$

٢) إذا كان $ص = \frac{١}{م}$ ، $م = \frac{٢}{س + ١}$ ، أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}$

الحل: $\frac{دص}{دم} = \frac{-١}{م^{٢}}$ ، $\frac{دم}{دس} = \frac{-٢}{(س + ١)^{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دم} \times \frac{دم}{دس} = \frac{-١}{م^{٢}} \times \frac{-٢}{(س + ١)^{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{\frac{٤}{\cancel{(س+١)}^{٢}} \times \cancel{(س + ١)}^{٢}}$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

٣) إذا علمت أن

$ص = (ع - ١)(ع^{٢} + ١)$ ، $ع = \sqrt{س}$ ، جد

$\frac{دص}{دس}$ عند $ع = ٢$

الحل: $\frac{دص}{دع} = \left((ع - ١)(٢ع) + (ع^{٢} + ١)(١)\right)$

$\frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = \left((ع - ١)(٢ع) + ع^{٢} + ١\right) \times$

نعوض $ع = \sqrt{س} = ٢$

$\rightarrow \frac{دص}{دس} = ٩ \times \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{٩}{٤}$

٤) إذا علمت أن $ص = ع^{٢} + ١$ ، $٣ع س = ع + س$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: نجعل الوسيط في المعادلة الثانية موضع قانون

$$٣ع س - ع = س \leftarrow ع(٣س - ١) = س \leftarrow \therefore ع = \frac{س}{٣س - ١}$$

$$\frac{ءص}{ءع} = ٢ع$$

$$\frac{ءع}{ءس} = \frac{(٣س - ١) - س(٣)}{(٣س - ١)^{٣}} = \frac{-١}{(٣س - ١)^{٣}}$$

$$\frac{ءع}{ءس} = ٢ع \times \frac{-١}{(٣س - ١)^{٣}} = \frac{٢س}{٣س - ١} \times \frac{-١}{(٣س - ١)^{٢}} = \frac{-٢س}{(٣س - ١)^{٣}}$$

---

٥) إذا كان $ص = أ\sqrt{ع}$ ، $ع = س^{٢}$ ، حيث $س \in (-\infty ، ٠)$ ، جد قيمة أ حيث $\frac{ءص}{ءس} = -٧$ لكل س تنتمي للمجال.

الحل: $\frac{ءص}{ءع} = أ \times \frac{١}{٢\sqrt{ع}}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢س$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{أ}{\cancel{٢}\sqrt{ع}} \times \cancel{٢}س$$

$$-٧ = \frac{أ}{\sqrt{س^{٢}}} \times س \leftarrow -٧ = \frac{أ}{|س|} \times س$$

$$-٧ = \frac{أ}{\underset{\downarrow}{-\cancel{س}}} \times \cancel{س} \leftarrow أ = ٧$$

$$|س| = -س \text{ لأن } س \in (-\infty ، ٠)$$

ثالثاً: الأقواس

إذا كان $ص = (هـ(س))^{ن}$ فإن $ص' = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$ ويمكن برهنة ذلك بفرض $ع = هـ(س)$

فيصبح الاقتران $ص = ع^{ن}$ ، $ع = هـ(س)$

$$\frac{ءص}{ءع} = نع^{ن-١} ، \frac{ءع}{ءس} = هـ'(س)$$

إذا: $\frac{ءص}{ءس} = نع^{ن-١} \times هـ'(س) = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

---

١) إذا كان $ص = (٧س^{٢} + ٣س + ١)^{٦}$ جد $ص'$

الحل: $ص' = ٦(٧س^{٢} + ٣س + ١)^{٥} \times (١٤س + ٣)$

---

٢) إذا كان $ق(س) = (٨س - س^{٢})^{-١}$ جد $ق'(٢)$

الحل: $ق'(س) = -(٨س - س^{٢})^{-٢} \times (٨ - ٢س)$

$$ق'(٢) = -(١٢)^{-٢} \times ٤ = \frac{-٤}{١٤٤} = \frac{-١}{٣٦}$$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٢}$ جد $\text{قَ}(١)$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٢\right)^{\frac{١}{٣}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\left(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٢\right)^{\frac{-٢}{٣}} \times (٢\text{س} + ٥)$$

$$\text{قَ}(١) = \frac{١}{٣}(٨)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٧ = \frac{٧}{١٢}$$

نتيجة (١):

مشتقة اقتران الجذر التربيعي (فقط) $= \dfrac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

$$\left(\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}\right)' = \frac{\text{هـَ}(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$$

البرهان:

---

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} \times \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣}$ جد $\text{قَ}(٢)$

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = \text{س}^{٣} \times \dfrac{٢\text{س}+١}{٢ \times \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} + ٣}} + \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣} \times ٣\text{س}^{٢}$

$$\text{قَ}(٢) = ٨ \times \frac{٥}{٢\sqrt{٩}} + \sqrt{٩} \times ١٢$$

$$= \frac{٢٠}{٣} + ٣٦ = \frac{١٢٨}{٣}$$

---

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢}{\sqrt[٤]{\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ٢}}$ جد $\text{قَ}(٢)$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \left(\text{س}^{٢} + ٢\right)\left(\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ٢\right)^{\frac{-١}{٤}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \left(\text{س}^{٢} + ٢\right) \times \frac{-١}{٤}\left(\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ٢\right)^{\frac{-٥}{٤}} \times \left(٣\text{س}^{٢} + ٣\right) + \left(\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ٢\right)^{\frac{-١}{٤}} \times ٢\text{س}$$

$$\text{قَ}(٢) = ٦ \times \frac{-١}{٤} \times (١٦)^{\frac{-٥}{٤}} \times ١٥ + (١٦)^{\frac{-١}{٤}} \times ٤ = \frac{-٣}{٢} \times \frac{١}{٣٢} \times ١٥ + ٢ = \frac{-٤٥}{٦٤} + ٢ = \frac{٨٣}{٦٤}$$

تدريب:

ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٣} + ١٠\text{س} + ٢١}}$ ، وكان هـَ(١) = ٢ ، ق(١) = ٣ ، جد قَ(١)

نتيجة (٢):

إذا كان ق(س) = جا(هـ(س)) (أو أي اقتران دائري) فإن قَ(س) = جتا(هـ(س)) × هـَ(س)

أي قَ(س) = مشتقة الاقتران × مشتقة الزاوية

٦) إذا كان ق(س) = ظا(س^{٥} − ٤س^{٢}) جد قَ(س)

الحل: قَ(س) = قا^{٢}(س^{٥} − ٤س^{٢}) × (٥س^{٤} − ٨س)

٧) إذا كان ق(س) = ٥ جتا(٧س) جد قَ(س)

الحل: قَ(س) = −٥ جا(٧س) × ٧ = −٣٥ جا(٧س)

٨) إذا كان ص = قا($\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ١}$) جد صَ

الحل: صَ = قا(س^{٢} − ١)$^{\frac{١}{٣}}$ × ظا(س^{٢} − ١)$^{\frac{١}{٣}}$ × $\frac{١}{٣}$(س^{٢} − ١)$^{\frac{-٢}{٣}}$ × ٢س

٩) إذا كان ص = جتا ٦س × قتا ٢س جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل: صَ = جتا ٦س × − ٢ قتا ٢س ظا ٢س + قتا ٢س × − ٦ جا ٦س

= − ٢ جتا ٦س قتا ٢س ظا ٢س − ٦ جا ٦س قتا ٢س

ملاحظة:

إذا كان للاقتران الدائري أس وزاوية مركبة فإنه يتم اشتقاقه على ثلاث مراحل:

نبدأ بالأس × م. اقتران دائري × م. زاوية

١٠) إذا كان هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س وكان ص = جا$^{\text{ن}}$(هـ(س)) ، حيث ن عدد صحيح ، فأثبت أن

صَ = ن جا$^{\text{ن}-١}$(هـ(س)) × جتا(هـ(س)) × هـَ(س)　　(كتاب)

الحل: نكتب ص = (جا هـ(س))$^{\text{ن}}$ نجري فرضين: (١) ع = هـ(س) ← ص = (جاع)$^{\text{ن}}$ ، ع = هـ(س)

(٢) نفرض م = جاع ← ∴ ص = م$^{\text{ن}}$ ، م = جاع

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءم}} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءع}}$ = ن م$^{\text{ن}-١}$ × جتاع ← ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ن(جاع)$^{\text{ن}-١}$ × جتاع

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ن(جاع)$^{\text{ن}-١}$ × جتاع × هـَ(س) نرجع ع

= ن(جا هـ(س))$^{\text{ن}-١}$ × جتا(هـ(س)) × هـَ(س)

١١) $\text{ص} = \text{جا}^{٣}\left(٧\text{س}^{٢}+١\right)$ جد صَ

الحل: $\text{صَ} = ٣\,\text{جا}^{٢}\left(٧\text{س}^{٢}+١\right) \times \text{جتا}\left(٧\text{س}^{٢}+١\right) \times ١٤\text{س}$

---

١٢) $\text{ص} = \text{قا}^{٦}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right)$ جد صَ

الحل: (مشتقة الزاوية)

$$\text{صَ} = ٦\,\text{قا}^{٥}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right) \times \text{قا}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right) \times \text{ظا}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right) \times \frac{-١}{\text{س}^{٢}} = ٦\,\text{قا}^{٦}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right) \times \text{ظا}\left(\frac{١+\text{س}}{\text{س}}\right) \times \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$$

---

١٣) $\text{ص} = \text{ظا}^{٣}\left(\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\right)$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل: $\text{صَ} = ٣\text{ظا}^{٢}\left(\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\right) \times \text{قا}^{٢}\left(\sqrt{\text{س}^{٢}+١}\right) \times \frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}$

ملاحظة: هناك نوعان من الأسئلة المتعلقة بالاقتران ق

النوع الأول: مشتقة ق المركبة عندما $\text{س} = \text{أ}$

$$\text{ق}^{\text{ن}}(\text{الزاوية}) = \text{ن}\,\text{ق}^{\text{ن}-١}(\text{الزاوية}) \times \text{قَ}(\text{الزاوية}) \times \text{م.الزاوية}$$

---

١٤) إذا كان $\text{ق}(١) = ١$ ، $\text{قَ}(١) = -٣$ حيث $\text{ق}(\text{س})$ اقتران قابل للاشتقاق وكان

أ) $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ق}^{٣}(\text{س}) - \text{س}^{٢} + ١$ جد $\text{هـَ}(١)$

ب) $\text{ع}(\text{س}) = \text{ق}^{٣}\left(\sqrt{\text{س}}\right) - \frac{١}{\text{ق}(\text{س})} + ٦\text{س}$ جد $\text{عَ}(١)$

الحل: أ) $\text{هـَ}(\text{س}) = ٣\text{ق}^{٢}(\text{س}) \times \text{قَ}(\text{س}) \times ١ - ٢\text{س}$

$$\text{هـَ}(١) = ٣\text{ق}^{٢}(١) \times \text{هـَ}(١) - ٢(١) = -٩ - ٢ = -١١$$

$$\text{ب})\ \text{عَ}(\text{س}) = ٣\text{ق}^{٢}\left(\sqrt{\text{س}}\right) \times \text{قَ}\left(\sqrt{\text{س}}\right) \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{قَ}(\text{س})}{\text{ق}^{٢}(\text{س})} + ٦$$

$$\text{عَ}(١) = ٣\text{ق}^{٢}(١) \times \text{قَ}(١) \times \frac{١}{٢\sqrt{١}} + \frac{\text{قَ}(١)}{\text{ق}^{٢}(١)} + ٦$$

$$= \frac{-٩}{٢} - ٣ + ٦ = -١{,}٥$$

---

١٥) إذا كان $\text{هـ}(\text{س})$ اقتران كثير حدود $\text{هـ}(١) = ٥$ ، $\text{هـَ}(١) = -١$ ، فإن $\left(\text{هـ}^{٢}\right)'(١) =$ (وزاري ٢٠...؟)

أ) -١٠ ب) ١٠ ج) صفر د) -٢

---

١٦) $\text{ص} = \text{ق}(\text{ظا}٢\text{س})$ وكان $\text{قَ}(١) = ٥$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٨}$ (وزاري ٢٠١٣)

أ) ٥ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) $١٠\sqrt{٢}$

النوع الثاني: ق (مركبة) = اقتران

والمطلوب إيجاد قَ(عدد) (أي س ليست معطاه بشكل صريح)

إذا كان لدينا ق (زاوية) وطلب السؤال قَ (عدد) فيجب أولاً إيجاد قيمة س وذلك بمساواة ما داخل الأقواس ببعضها.

---

١٧) إذا كان ق(٣س^{٣} + ١) = ٤س^{٢} − ٢س + ١ ، فجد قَ(٨٢)

الحل: نجد قيمة س المطلوب عندها الاشتقاق

٣س^{٣} + ١ = ٨٢ ← ٣س^{٣} = ٨١ ← س^{٣} = ٢٧ ← س = ٣

نشتق ونعوض س = ٣

قَ(٣س^{٣} + ١) × ٩س^{٢} = ٨س − ٢ نعوض ← قَ(٨٢) × ٨١ = ٢٢ ← قَ(٨٢) = $\frac{٢٢}{٨١}$

---

١٨) إذا كان ق(س^{٢} − ١) = ٢س حيث س > ٠ ، فإن قَ(٨) = (٢٠١٣ شتوي وزاري)

أ) ٣ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ٢

---

١٩) ق($\frac{١}{٢}$ س) = (|س|)^{٣} ، فإن قَ(−١) = (٢٠١٣ صيفي وزاري)

أ) −٤٨ ب) −٦ ج) ٢٤ د) ٤٨

---

٢٠) ق(جا٢س) = قتا٢س حيث س ∋ (٠ ، $\frac{\pi}{٣}$] ، جد قَ($\frac{١}{٢}$)

الحل: نجد قيمة س

جا٢س = $\frac{١}{٢}$ ← ٢س = $\frac{\pi}{٦}$ ، ٥$\frac{\pi}{٦}$

٣٠° ، ١٥٠°

س = $\frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{٥\pi}{١٢}$

✓ ✗ خارج الفترة ، نشتق قَ(جا٢س) × جتا٢س × $\cancel{٢}$ = −$\cancel{٢}$ قتا٢س ظتا٢س

نعوض قَ($\frac{١}{٢}$) × $\frac{\cancel{\sqrt{٣}}}{٢}$ = −٢ × $\cancel{\sqrt{٣}}$ ∴ قَ($\frac{١}{٢}$) = −٤

تدريب: إذا علمت أن ق(س^{٢} + ١) = س^{٢} + أ س ، أ > ٠ وكان قَ(٥) = −١ ، جد قيمة (أ)

---

٢١) إذا كان ق(س) = $\frac{٢}{س}$ ، فجد:

أ) قَ(جا٢س) ب) $\frac{د}{دس}$(ق(جا٢س))

الحل: أ) قَ(س) = $\frac{-٢}{س^{٢}}$

قَ(جا٢س) = $\frac{-٢}{جا^{٢}٢س}$

ب) المطلوب قَ(جا٢س) × جتا٢س × ٢

= $\frac{-٢}{جا^{٢}٢س}$ × جتا٢س × ٢

= −٤ قتا٢س ظتا٢س

المشتقة الثانية للسلسلة

٢٢) جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ ، ص = ع^{٣} + ع^{٢} ، ع = س^{٥}

الحل: $\frac{ءص}{ءع}$ = ٣ع^{٢} + ٢ع ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٥س^{٤}

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = (٣ع^{٢} + ٢ع)(٥س^{٤})

$\frac{ءص}{ءس}$ = (٣س^{١٠} + ٢س^{٥})(٥س^{٤}) نشتق مرة أخرى

= (٣س^{١٠} + ٢س^{٥})(٢٠س^{٣}) + (٥س^{٤})(٣٠س^{٩} + ١٠س^{٤})

٢٣) إذا كان ص = جا(س^{٢} + ٢س + ٥) ، جد ق$''$(س)

الحل: ص$'$ = (٢س + ٢) جتا (س^{٢} + ٢س + ٥)

ص$''$ = (٢س + ٢) × (٢س + ٢) × − جا (س^{٢} + ٢س + ٥) + ٢ جتا (س^{٢} + ٢س + ٥)

٢٤) إذا كان ق(س) = ٢س^{٢} ، ه$'$(١) = ٢ ، ه(١) = ١ ، ه$''$(١) = ٣ ، فجد (ق ∘ ه)$''$(١)

الحل: نجد المشتقة الأولى بالنسبة لـ س

(ق ∘ ه)$'$(س) = ق$'$(ه(س)) × ه$'$(س)

نجد مرة أخرى مشتقة الأولى الضرب

(ق ∘ ه)$''$(س) = ق$'$(ه(س)) × ه$''$(س) + ه$'$(س) × ق$''$(ه(س)) × ه$'$(س)

لكن ق$'$(س) = ٤س ، ق$''$(س) = ٤

نعوض (ق ∘ ه)$''$(١) = ق$'$(١) × ٣ + ٢ × ق$''$(١) × ٢ = ١٢ + ٤ × ٤ = ٢٨

٢٥) اشتق ما يلي:

١) (ق ∘ ه)^{ن}(س)

المشتقة =

٢) $\sqrt{(ق ∘ ه)(س)}$

المشتقة =

٣) $\frac{١}{(ق ∘ ه)(س)}$

المشتقة =

٤) جا^{ن}(ق ∘ ه)(س)

المشتقة =

ورقـة عمـل (٥)

١) من الجدول التالي جد ما يلي:

س	ق(س)	ق′(س)	هـ(س)	هـ′(س)
−١	٢	٣	٢	−٣
٢	٦	٤	١	−٥

أ) (ق ∘ هـ)′(−١)

ب) إذا كان ل(س) = $(\text{٢ق(س)})^{2}$ ، جد ل′(٢)

ج) (هـ ∘ ق)′(−١)

د) م(س) = هـ^{2}(س) ، جد م′(٢)

---

٢) إذا كان ل(س) = (ق ∘ هـ)(س) حيث ق′(س) = $\sqrt{\text{٣س}+4}$ هـ(س) = س^{2} − ١ ، جد ل′(س)

---

٣) ق(س) = $\sqrt[3]{(\text{س}^{2}+\text{٥س}+2)^{2}}$ هـ(١) = ٢ ، هـ′(١) = −١ وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) ، جد ل′(١)

---

٤) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{جاس}+\text{جتاس}+8}$ ، وكان ٢هـ′(٠) = هـ(٠) = ٤ ، وأن ل(س) = ق(س) × هـ(س)،

جد ل′(٠)

---

٥) ق(س) = $\dfrac{\pi}{\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}}$ ، جد ق′(س)

---

٦) ق(س) = أ ظاس ، هـ(س) = س^{2} − ١ ، وكان (هـ ∘ ق)′$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = ٤ ، جد قيمة أ

---

٧) أثبت أن مشتقة ق(س) = جتا$^{\text{ن}}$(هـ(س)) تعطى بالعلاقة

ق′(س) = ن جتا$^{\text{ن}-1}$(هـ(س)) × −جا(هـ(س)) × هـ′(س)

---

٨) إذا كان ق(س^{3} + ٧) = س^{3} + س^{2} − ٩ جد ق′(−١)

---

٩) إذا علمت أن س ق(٢س + ١) − ٢ = س^{3} ، جد ق′(٥)

---

١٠) ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{2}+\text{س}+7} \times \sqrt[3]{\text{س}^{3}+7}$ ، جد ق′(١)

---

١١) ص = $(\text{٢ع}^{2}-1)^{2}$ ، ع = $\sqrt{\text{س}}$ ، جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

---

١٢) إذا علمت أن ق′(١) = ٢ ، ق(١) = ٣ وكان هـ(س) = ق^{3}(س^{2}) + ٣س^{2} ، جد هـ′(١)

---

١٣) ق(س) = ٢ظتاس ، هـ(س) = أس$(\text{س}^{2}-3)^{3}$ وكان (هـ ∘ ق)′$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = −٥٠ ، فجد قيمة الثابت أ

---

١٤) إذا كان ق(س) = جا^{2}٣س فجد ق′$\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (٢٠٠٩ وزاري)

أ) ٣ ب) صفر ج) $\sqrt{2}$ د) ١

١٥) ق(س) = |٣ − س| ، فإن $(ق^{٢})'(١)$

أ) ٤   ب) −٤   ج) ١   د) غ.م

---

١٦) ق(س) = $س^{٢}$ (| س |)° ، وكان هـَ(٢) = ٤ ، هـ(٢) = −١   (٢٠٠٢ وزاري)

فإن قيمة (ق ∘ هـ)َ(٢)

أ) −٢٨   ب) ٢٨   ج) ٧   د) −١٠

---

١٧) (م ∘ ل)(س) = س وكان م . ل قابلين للاشتقاق   (٢٠٠٨ وزاري)

حيث مَ(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ١، فإن لَ(س)

أ) م(س)   ب) ١   ج) س   د) ل(س)

---

١٨) ق(س) = $س^{٣}$ ، هـ(١) = −١ ، هـَ(١) = ٢ ، هـً(١) = ٣ ، جد (ق ∘ هـ)ً(١)

---

١٩) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان (ق ∘ هـ)َ(٣) = ١٠ ، (قَ ∘ هـ)(٣) = ٤ ، فإن قيمة

٢ هـَ(٣) =

أ) $\frac{٥}{٢}$ ب) ٥   ج) ٢   د) $\frac{٢}{٥}$

---

٢٠) إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = ٣ن^{٢}$ ، $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢ن}$ فإن $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عند ن = ٢ يساوي:

أ) ٢   ب) ٨   ج) ١٢   د) ٤٨

---

٢١) إذا علمت أن (ق ∘ هـ)(س) = أ$\sqrt{س + ٣}$ + $\frac{أ}{س}$ وكان قَ(س) = $\sqrt[٣]{٢س + ٤}$ ، هـ(١) = ٢ ،

هـَ(١) = ٢ ، فإن أ =

أ) ١   ب) $\frac{-١٦}{٣}$ ج) $\frac{١٦}{٣}$ د) −٣

---

٢٢) إذا علمت أن هـ(س) = $جا^{٢}$(πق($س^{٣}$)) ، ق(١) = $\frac{١}{٤}$ ، قَ(١) = $\frac{١}{٢\pi}$ ، فإن هـَ(١) =

أ) $\frac{٣}{٢}\pi$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٣}{٢\pi}$

---

٢٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |١ - س^{٢}| + ٤١س ، س < ١ \\ س هـ^{٢}(س) + ١٠ ، س \geq ١ \end{cases}$ ، وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق ،

حيث هـ(١) = هـَ₊(١) = ٢ ابحث في قابلية الاشتقاق عند س = ١

---

٢٤) إذا كان $\frac{ءص}{ءم}$ = ٥ ، م = $\frac{٢س^{٢} + ١}{س}$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ١

---

٢٥) إذا كان $ق^{٣}(س) = ٣س^{٢} - ١٠س - ١$ فجد قَ(١)

---

٢٦) إذا كان $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ عند ع = ١ وكان ص = $٢ع^{٣} + ٦ع - ١$ ، جد $\frac{ءع}{ءس}$ عند نفس النقطة.

تاسعاً الاشتقاق الضمني

يستخدم الاشتقاق الضمني: إذا لم تكن ص معطاة بشكل صريح (أي ليست موضع قانون)

خطوات إيجاد المشتقة للعلاقة الضمنية

١. يتم اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للمتغير س حسب قواعد الاشتقاق .

٢. أينما نشتق ص نضرب بـ $\frac{ءص}{ءس}$ أو صَ

٣. نجمع جميع الحدود التي تحتوي $\frac{ءص}{ءس}$ على طرف وبقية الحدود على الطرف الآخر.

٤. نخرج $\frac{ءص}{ءس}$ عامل مشترك ونقسم على معامله ويكون الجواب.

أمثلــــة

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ للعلاقة $س^٣ - ص^٣ = ٦س ص$

الحل: نشتق الطرفين

$$٣س^٢ - ٣ص^٢ صَ = ٦س صَ + ص × ٦$$

$$٣س^٢ - ٦ص = ٦س صَ + ٣ص^٢ صَ$$

$$٣س^٢ - ٦ص = صَ (٦س + ٣ص^٢)$$

$$∴ صَ = \frac{٣س^٢ - ٦ص}{٦س + ٣ص^٢}$$

٢) إذا كان $س^٢ - ٣س ص^٣ - س = ٣$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: $٢س - (٣س × ٣ص^٢ صَ + ص^٣ × ٣) - ١ = ٠$

$$٢س - ٣ص^٣ - ١ = ٩س ص^٢ صَ$$

$$∴ صَ = \frac{٢س - ٣ص^٣ - ١}{٩س ص^٢}$$

٣) إذا كان $\sqrt{س ص} + ١ = ص$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: نبسط العلاقة

$\sqrt{س ص} = ص - ١ \xleftarrow{نربع} س ص = (ص - ١)^٢$ نشتق

$$س صَ + ص = ٢(ص - ١) صَ$$

$$ص = صَ (٢(ص - ١) - س) ← ∴ صَ = \frac{ص}{٢(ص - ١) - س}$$

٤) $\frac{س}{ص} - \frac{٣ص}{س} = ٢$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (٣ ، ١)

(٢٠١٣ وزاري)

الحل: نبسط العلاقة ×س ص للأطراف

$س^٢ - ٣ص^٢ = ٢ س ص$ نشتق

$٢س - ٦ص صَ = ٢ س صَ + ص × ٢$ نعوض

$$س = ٣ ، ص = ١$$

$$٦ - ٦صَ = ٦صَ + ٢ ← ٤ = ١٢صَ ← صَ = \frac{١}{٣}$$

٥) إذا كان $(س^٢ + ٣ص^٢)^٤ = س$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: نشتق

$$٤(س^٢ + ٣ص^٢)^٣ × (٢س + ٦ص صَ) = ١$$

$$٢س + ٦ص صَ = \frac{١}{٤(س^٢ + ٣ص^٢)^٣}$$

$$٦ص صَ = \frac{١}{٤}(س^٢ + ٣ص^٢)^{-٣} - ٢س$$

$$∴ صَ = \frac{\frac{١}{٤}(س^٢ + ٣ص^٢)^{-٣} - ٢س}{٦ص}$$

٦) إذا كان $\sqrt{٢}\,جا(س ص) = ص$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند $\left(\frac{\pi}{٤} ، ١\right)$

الحل: نشتق الطرفين $\sqrt{٢}\,جتا\,(س\,ص)\left(س\,صَ + ص\right) = صَ$

نعوض $س = \frac{\pi}{٤}$ ، $ص = ١$

$$\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}\left(\frac{\pi}{٤}صَ + ١\right) = صَ$$

$$١ = صَ - \frac{\pi}{٤}صَ \leftarrow \frac{١}{١ - \frac{\pi}{٤}} = صَ$$

٧) إذا كان $ظا^{٣}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) = س$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل: نشتق الطرفين $٣ظا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) قا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right)\left(س \times ٢ص\,صَ + ص^{٢} + صَ\right) = ١$

$$٢س\,ص\,صَ + ص^{٢} + صَ = \frac{١}{٣}\,ظتا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) جتا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right)$$

$$صَ\,(٢س\,ص + ١) = \frac{١}{٣}\,ظتا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) جتا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) - ص^{٢}$$

$$\therefore صَ = \frac{\frac{١}{٣}\,ظتا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) جتا^{٢}\left(س\,ص^{٢} + ص\right) - ص^{٢}}{٢س\,ص + ١}$$

٨) إذا كان $جا\,س - س - جتا\,س = ص^{٢}$ ، جد قيمة س التي تجعل $\frac{ءص}{ءس} =$ صفر حيث $س \in [٠ ، ٢\pi]$

الحل: نشتق الطرفين $جتا\,س - ١ + جا\,س = ٢ص\,صَ$

نعوض $صَ = ٠ \leftarrow جتا\,س + جا\,س = -١$

$$س \in \left\{\underset{\times}{٠} ، \frac{\pi}{٢} ، \underset{\times}{٢\pi}\right\}$$

لكن المشتقة عند الأطراف غير موجودة $\therefore س = \frac{\pi}{٢}$

٩) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي تحقق المعادلة $صَ = -٢$

الحل: $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{صَ}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

نعوض $صَ = -٢ \leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{-\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{ص}} = ٠$

$$\frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{١}{\sqrt{ص}}$$

$$\therefore \sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$$

نعوض في العلاقة الرئيسية $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$

$$\therefore ٣\sqrt{س} = ٣$$

$س = ١ \leftarrow ص = ٤$ $\quad (١ ، ٤)$

١٠) إذا كان $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س} - ٤\text{ص} = ٠$ ، فجد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ عند $(٢ ، ٠)$

الحل:

١) نجد المشتقة الأولى $٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\text{صَ} - ٢ - ٤\text{صَ} = ٠$

٢) نجد قيمة صَ بتعويض $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٠$

$$٤ + ٠ - ٢ - ٤\text{صَ} = ٠ \leftarrow \text{صَ} = \frac{١}{٢}$$

٣) نشتق (١) مرة أخرى

$$٢ + ٢\text{ص}\,\text{صً} + ٢(\text{صَ})^{٢} - ٤\text{صً} = ٠$$

نعوض $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٠$ ، $\text{صَ} = \frac{١}{٢}$

$$٢ + ٠ + ٢\left(\frac{١}{٤}\right) - ٤\text{صً} = ٠ \leftarrow \frac{٥}{٢} = ٤\text{صً}$$

$$\leftarrow \text{صً} = \frac{٥}{٨}$$

---

١١) إذا كان $\text{س} = \text{ظا}\,٣\,\text{ص}$ ، فجد صً عندما $\text{ص} = \frac{\pi}{١٢}$

الحل: نجد المشتقة الأولى

$$١ = \text{قا}^{٢}\,٣\,\text{ص} \times ٣\text{صَ} \leftarrow \text{صَ} = \frac{١}{٣}\,\text{جتا}^{٢}\,٣\,\text{ص}$$

نجد قيمة $\text{صَ} \leftarrow \text{صَ} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

نشتق مرة أخرى $\text{صً} = \frac{٢}{٣}\,\text{جتا}٣\,\text{ص} \times -\text{جا}٣\,\text{ص} \times ٣\,\text{صَ}$

$\text{صً} = ٢\,\text{جتا}٣\,\text{ص} \times -\text{جا}٣\,\text{ص} \times \text{صَ}$ نعوض

$$\text{صً} = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٦} = \frac{-١}{٦}$$

تدريب:

إذا كان $٣\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} - ٦\text{س} + ٨\text{ص} - ٤٥ = ٠$ ،

فجد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ عند $(-٣ ، -٢)$

---

١٢) إذا كان $\text{س} = \text{جا}\,\text{ص}$ ، أثبت أن

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{ظا}\,\text{ص}\,\text{قا}^{٢}\,\text{ص}$ (كتاب)

الحل: $١ = \text{جتا}\,\text{ص}\,\text{صَ} \leftarrow \text{صَ} = \text{قا}\,\text{ص}$

$\text{صً} = \text{قا}\,\text{ص}\,\text{ظا}\,\text{ص}\,\text{صَ}$ نعوض صَ

$$\text{صً} = \text{قاص}\,\text{ظاص} \times \text{قاص} = \text{قا}^{٢}\text{ص}\,\text{ظاص}$$

---

١٣) $\text{س} = \text{ظا}\,\text{ص}$ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = ٣$

(٢٠٠٦ وزاري)

الحل: نشتق طرفي العلاقة $١ = \text{قا}^{٢}\,\text{ص}\,\text{صَ}$

$$\text{صَ} = \frac{١}{\text{قا}^{٢}\,\text{ص}} = \frac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\,\text{ص}}$$

$$\text{صَ} = \frac{١}{١ + \text{س}^{٢}}\Bigg|_{\text{س}=٣} = \frac{١}{١٠}$$

---

١٤) إذا كان $\text{ق}(\text{ص}^{٢}) = \text{س}\,\text{ص}$ ، وكان $\text{قَ}(٤) = ٣$ ،

جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقطة $(٢ ، ٢)$

الحل: نشتق الطرفين

$$\text{قَ}(\text{ص}^{٢}) \times ٢\text{ص}\,\text{صَ} = \text{س}\,\text{صَ} + \text{ص}$$

نعوض $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٢$

$$\text{قَ}(٤) \times ٤\,\text{صَ} = ٢\,\text{صَ} + ٢$$

$$١٢\,\text{صَ} - ٢\,\text{صَ} = ٢$$

$$١٠\,\text{صَ} = ٢$$

$$\text{صَ} = \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$$

---

١٥) إذا كان $\text{ق}(\text{ص} + ١) = \text{س}^{٣}$ ، $\text{قَ}(٥) = ٤$ ، $\text{ق}(٥) = ٨$

فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما $\text{ص} = ٤$ تساوي:

(٢٠٠٤ وزاري)

أ) ٤ ب) ٣ ج) ١٢ د) ٤٨

١٦) إذا كان س = جا ٣ن ، ص = جتا ٣ن ، جد أن $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عند ن = $\frac{\pi}{٣}$ (كتاب)

الحل: $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣ جتا ٣ن ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = −٣ جا ٣ن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

= −٣ جا ٣ن × $\frac{١}{\text{٣ جتا ٣ن}}$ = −ظا ٣ن

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = −٣ قا^{٢} ٣ن × $\frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

= −٣ قا^{٢} ٣ن × $\frac{١}{\text{٣ جتا ٣ن}}$

= −قا^{٣} ٣ن $\Big|_{ن=\frac{\pi}{٣}}$ = ١

تدريب:

ص = ن^{٤} + ن ، س = ٣ن^{٢} − ٥ن ، فجد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$

أسئلـــة إثباتـــات

في أسئلة الإثباتات يراعى ما يلي:

١) نحاول تبسيط المسألة وذلك بالتخلص من الكسور والجذور

ص = $\sqrt{\text{س}^{٢}+١}$ $\xrightarrow{\text{نربع}}$ ص^{٢} = س^{٢} + ١

ص = $\frac{\text{س}}{\text{جا س}}$ ⟵ س = جا س × ص

٢) نشتق ضمني (على الأغلب)

٣) قبل الاشتقاق مرة أخرى نحاول التبسيط مرة أخرى:

أ) تحويل المسألة بدلالة ص أوضح الحالات

ص = قاس ، قتا س

ب) المتطابقات

٤) نشتق مرة أخرى ونحاول التوصل للمطلوب بالتبسيط

من العلاقة الرئيسية:
- المتطابقات
- عامل مشترك
- القسمة على حد خارجي
- تربيع الطرفين

١) إذا كان ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، أثبت أن

س ص'' + ٢ص' + س ص = ٠ (كتاب)

الحل: نبسط س ص = جا س نشتق

س ص' + ص = جتا س نشتق مرة أخرى

س ص'' + ص' + ص' = − جا س

س ص'' + ٢ص' + جا س = ٠ نبدل جا س

س ص'' + ٢ص' + س ص = ٠

٢) ص = $\sqrt{\text{٤+٣جاس}}$ أثبت أن

٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + (ص)^{٢} = ٤ (كتاب)

الحل: نبسط بتربيع ص ⟵ ص^{٢} = ٤ + ٣جا س

٢ص ص' = ٣جتا س نشتق مرة أخرى

٢ص ص'' + ٢ص' × ص' = −٣جا س

٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + ٣جا س = ٠ نبدل ٣جا س

٢ص ص'' + ٢(ص')^{٢} + ص^{٢} = ٤

٣) إذا كان س + ص = جا ص ، فأثبت أن

(ص')^{٢} = ص''(ظا ص − قتا ص) (٢٠٠٨ وزاري)

الحل:

نشتق ١ + ص' = جتا ص ص' نشتق مرة أخرى

ص'' = جتا ص ص'' + ص' × − جا ص × ص'

جا ص (ص')^{٢} = جتا ص ص'' − ص'' ÷ جا ص

(ص')^{٢} = ظا ص ص'' − قتا ص ص'' ص'' عامل مشترك

(ص')^{٢} = ص''(ظا ص − قتا ص)

٤) إذا كان جتا ص − س ص = ٢س ، فأثبت أن

صً (س + جا ص) + صَ (٢ + صَ جتا ص) = ٠   (٢٠١٠)

الحل: − صَ جا ص − س صَ − ص = ٢   × −١

صَ جا ص + س صَ + ص = −٢   نشتق مرة أخرى

(صَ)^{٢} جتا ص + صً جا ص + س صً + صَ + صَ = ٠

صً (جا ص + س) + (صَ)^{٢} جتا ص + ٢صَ = ٠

صً (جا ص + س) + صَ (صَ جتا ص + ٢) = ٠

٥) جا ص = ظا س ، فأثبت أن

ظا ص = $\frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{٢}\text{س} + (\text{صَ})^{٢}}$ (٢٠٠٨ شتوي وزاري)

الحل: نشتق جتا ص صَ = قا^{٢} س   نشتق مرة أخرى

− جا ص (صَ)^{٢} + جتا ص صً = ٢ قا س قا س ظا س

− جا ص (صَ)^{٢} + جتا ص صً = ٢ قا^{٢}س ظا س   (÷ جتا ص)

− ظا ص (صَ)^{٢} + صً = $\frac{\text{٢ قا}^{٢}\text{س ظا س}}{\text{جتا ص}}$

لكن ظا س = جا ص

− ظا ص (صَ)^{٢} + صً = ٢ قا^{٢}س ظا ص

صً = ظا ص (٢ قا^{٢}س + (صَ)^{٢})

∴ ظاص = $\frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{٢}\text{س} + (\text{صَ})^{٢}}$

٦) إذا كان س + ص = س ص ، فأثبت أن صً = $\frac{\text{٢ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$

الحل: نجعل ص موضع قانون   (٢٠٠١)

ص (ص − ١) = س ← ص = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$ نشتق

صَ = $\frac{\text{س} - ١ - \text{س}}{(\text{س} - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

صً = $\frac{٢(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)^{٤}}$ = $\frac{٢}{(\text{س} - ١)^{٣}}$

لكن س − ١ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

صً = $\frac{٢}{\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٣}}$ = $\frac{\text{٢ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$

٧) إذا كان ص = (قا٢س + ظا٢س)^{٢} ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

أ) ٤ قا ٢س　　ب) ٢ص قا ٢س

ج) ٤ص قا ٢س　　د) ٤ص^{٢} قا ٢س

الحل:

صَ = ٢ (قا٢س + ظا٢س) (٢قا٢س ظا٢س + ٢قا^{٢} ٢س)

صَ = ٢ (قا٢س + ظا٢س) × ٢قا٢س (ظا٢س + قا٢س)

صَ = ٤ قا٢س (قا٢س + ظا٢س)^{٢}

صَ = ٤ص قا٢س

٨) إذا كان ص = $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} س ، فأثبت أن

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ٤ص (٣ص − ١)

الحل: صَ = قا س قا س ظا س

صَ = قا^{٢}س ظا س   لكن قا^{٢} س = ٢ص

صَ = ٢ص ظا س   نشتق مرة أخرى

صً = ٢ص قا^{٢} س + ظا س × ٢صَ   (نبدل قا^{٢} س)

صً = ٤ص^{٢} + ٢ قا^{٢}س + ظا^{٢}س   (نبدل قا^{٢} س)

صً = ٤ص^{٢} + ٤ ص ظا^{٢} س

صً = ٤ص (ص + ظا^{٢} س)

صً = ٤ص (ص + قا^{٢} س − ١)

صً = ٤ص (ص + ٢ص − ١) = ٤ص (٣ص − ١)

٩) إذا كانت ص = ظا (س + أ) − س ، فإن صَ =

أ) (س + ص)　　ب) (س + ص)^{٢}

ج) (س − ص)^{٢}　　د) (س − ص)

الحل: نشتق صَ = قا^{٢}(س + أ) − ١   (متطابقة)

صَ = ظا^{٢}(س + أ)

صَ = (س + ص)^{٢}

١٠) إذا كان ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣} س ، فإن $\frac{دص}{دس}$

أ) قا^{٢} س ب) ٢ قا^{٢} س ج) ٢ قا^{٤} س د) قا^{٤} س

الحل: صَ = قا^{٢} س + ظا^{٢} س قا^{٢} س (عامل مشترك)

صَ = قا^{٢} س (١ + ظا^{٢} س) (متطابقة)

= قا^{٢} س × قا^{٢} س = قا^{٤} س

١١) ص = جا (جا س) ، فأثبت أن

صً + ظا س صَ + جتا^{٢} س = ٠

الحل: صَ = جتا (جا س) × جتا س

صً = جتا (جا س) × −جا س + جتا^{٢} س × −جا(جا س)

لكن جتا (جا س) = $\frac{صَ}{جتا س}$

صً = $\frac{صَ}{جتا س}$ × −جا س − جتا^{٢} س ص

صً + ظا س صَ + جتا^{٢} س ص = ٠

١٢) إذا كان جاص = س ، |س| < ١ ، فإن $\frac{دص}{دس}$ =

(ص بالربع الأول) (٢٠٠١ وزاري)

أ) $\frac{١}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} − ١}}$

ج) $\frac{١}{\sqrt{١ − س^{٢}}}$ د) $\frac{−١}{\sqrt{١ − س^{٢}}}$

الحل: نشتق جتا ص صَ = ١ ← صَ = $\frac{١}{جتا ص}$

لكن جا^{٢} ص + جتا^{٢} ص = ١

س^{٢} + جتا^{٢} ص = ١

جتاص = $\sqrt{١ − س^{٢}}$

لأنها بالربع الأول أخذنا +

∴ صَ = $\frac{١}{\sqrt{١ − س^{٢}}}$

١٣) إذا كان ص = (جا س + جتا س)^{٤} ، أثبت أن

صً + ٤ص = ١٢ جتا^{٢} ٢س (٢٠٠٥ وزاري)

الحل: نشتق

صَ = ٤(جا س + جتا س)^{٣} (جتا س − جا س) نشتق

مرة أخرى

صً = ٤(جا س + جتا س)^{٣} (−جا س − جتا س) +

(جتا س − جا س) × ١٢(جا س + جتا س)^{٢} (جتا س − جا س)

صً = −٤ص + ١٢(جتا س − جا س)^{٢} (جا س + جتا س)^{٢}

صً + ٤ص = ١٢((جتا س − جا س)(جتا س + جا س))^{٢}

↲ فرق بين مربعين

صً + ٤ص = ١٢(جتا^{٢} س − جا^{٢} س)^{٢} ← متطابقة

صً + ٤ص = ١٢جتا^{٢} ٢س

١٤) إذا كان ٣ص = −$\sqrt{(ع + ١)^{٣}}$ − $\sqrt{(ع − ١)^{٣}}$

ع = ٢س بين أن $\left|\frac{دص}{دس}\right|$ = $\sqrt{٤س + ٢\sqrt{٤س^{٢} − ١}}$

س > $\frac{١}{٢}$ (٢٠١٧ شتوي)

الحل:

ص = $\frac{−١}{٣}$(ع + ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{١}{٣}$(ع − ١)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، ع = ٢س

$\frac{دص}{دع}$ = $\frac{−١}{٢}$(ع + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ − $\frac{١}{٢}$(ع − ١)$^{\frac{١}{٢}}$ ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$ = −(ع + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ − (ع − ١)$^{\frac{١}{٢}}$

↲ نربع الطرفين

$\left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢}$ = (ع + ١) + ٢(ع + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ (ع − ١)$^{\frac{١}{٢}}$ + ع − ١

$\left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢}$ = ٢ع + ٢(ع^{٢} − ١)$^{\frac{١}{٢}}$ نأخذ جذر

$\left|\frac{دص}{دس}\right|$ = $\sqrt{٢ع + ٢(ع^{٢} − ١)^{\frac{١}{٢}}}$

= $\sqrt{٤س + ٢\sqrt{٤س^{٢} − ١}}$

ورقـة عمـل (٦)

١) إذا علمت أن س = ظا ص أثبت أن:

أ) $\frac{\text{١}}{\text{س}}$ صً + ٢ جتا^{٤} ص =

أ) ١ ب) صفر ج) جتا^{٤} ص د) − جتا^{٤} ص

ب) صً (١ + س^{٢}) =

أ) جا٢ص ب) − جا٢ص ج) جتا٢ص د) صفر

---

٢) إذا علمت أن س^{٢} + ص^{٢} = ١ أثبت أن ص^{٣} صً + ١ = ٠

---

٣) إذا كان (ص + ١)^{٣} = (س − ٢)^{٢} ، إن ($\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ صَ)^{٢}

أ) $\frac{\text{١}}{\text{ص + ١}}$ ب) ص + ١ ج) $\frac{\text{−١}}{\text{ص + ١}}$ د) − ص − ١

---

٤) إذا كان س = ظا ٢ ص ، أثبت أن صً = − صَ جا ٤ ص (وزاري ٢٠١٢)

---

٥) إذا كان ص = س ظا س أثبت أن صً − ٢ص قا^{٢} س = ٢ قا^{٢} س (كتاب)

---

٦) إذا كان س ص − ٣ص = ٧س + ١٥ ، أثبت أن (س − ٣) صً + ٢ صَ = ٠ (وزاري ٢٠١٠)

---

٧) ص = أ جتا(ن س) + ب جتا (ن س) ، أثبت أن صً + ن^{٢} ص = ٠ ، حيث أ ، ب ≠ ٠

---

٨) إذا كان ص = ٢ جتا ٣ س − جا ٣ س ، إن صً + ٩ص =

أ) ١ ب) صفر ج) جتا٣س − جا٣س د) −١

---

٩) إذا كان ص = ظا (س ص) ، أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{ص + ص}^{٣}}{\text{١ − س (١ + ص}^{٢}\text{)}}$ (وزاري ٢٠٠٢)

---

١٠) س = أ جتا^{٣} هـ ، ص = أ جا^{٣} هـ ، إن صً = ، حيث أ ≠ ٠ ، ٠ < هـ < $\frac{\pi}{\text{٢}}$

أ) $\frac{\text{١}}{\text{٣أ جتا}^{٢}\text{هـ جا هـ}}$ ب) $\frac{\text{١}}{\text{٣أ جتا}^{٤}\text{هـ جا هـ}}$

ج) $\frac{\text{١}}{\text{٣أ جتا}^{٤}\text{هـ جا هـ}}$ د) $\frac{\text{١}}{\text{٣أ جتا}^{٢}\text{هـ جا}^{٢}\text{هـ}}$

---

١١) إذا كان (س − ص)^{٤} + (ص − س)^{٤} = ٣٢ ، س ≠ ص فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ =

أ) ١ ب) ٤ ج) −١ د) −٤

١٢) إذا كان س ص $= (س + ص)^{٤}$ ، فإن $\frac{دص}{دس} =$

أ) $\frac{٣س - ص}{س - ٣ص}$

ب) ١

ج) $\frac{ص(٣س - ص)}{س(س - ٣ص)}$

د) $\frac{ص(ص - ٣س)}{س(س - ٣ص)}$

١٣) ص $= \frac{جاس}{١ + جتاس}$ ، جتاس $\neq -١$ أثبت إن صً $= \frac{جاس}{(١ + جتاس)^{٢}}$

١٤) ص $=$ ظتا^{٢}س فإن صً $=$

أ) $(١ + ص)(١ + ٣ص)$

ب) $٢(١ + ص)(١ - ٣ص)$

ج) $٢(١ + ص)(١ + ٣ص)$

د) $(١ + ص)(١ - ٣ص)$

١٥) ص $= \sqrt{س - ص}$ ، س $>$ ص ، فإن صً $=$

أ) $\frac{٢}{(٢ص + ١)^{٣}}$

ب) $\frac{-٢}{(٢ص + ١)^{٣}}$

ج) $\frac{٢}{(٢ص - ١)^{٣}}$

د) $\frac{-٢}{(٢ص - ١)^{٣}}$

عاشراً قاعدة لوبيتال

- تستخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد النهايات في حالة كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س)}{\text{ه}(س)} = \frac{\text{قَ}(أ)}{\text{هَ}(أ)}$ ، وإذا بقي الجواب $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

فنشتق مرة أخرى $\frac{\text{قً}(أ)}{\text{هً}(أ)}$ وهكذا حتى نصل لجواب .

- تستخدم قاعدة لوبيتال فقط للتأكد أو حل أسئلة الاختيار من متعدد لأنها غير معتمدة وزارياً.

أمثلـــة

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٨}{٤ - س^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٣س^{٢}}{-٢س}$ نعوض $= \frac{١٢}{-٤} = -٣$

٣) $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^{٢}س - \text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٤}}{٤س - \pi}$

الحل:

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

الحل: $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س}{٢س} = \frac{١}{٢}$

٤) إذا كان $\text{ق}(٩) = ٥$ ، $\text{قَ}(٩) = -٢$ ، فجد

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٧س + ٢) - \text{ق}(٩)}{٣س - ٣} = \frac{٠}{٠}$$

الحل: نشتق البسط والمقام

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{قَ}(٧س + ٢) \times ٧}{٣} = \frac{٧}{٣}$$

$$\text{قَ}(٩) = \frac{-١٤}{٣}$$

نهايـات خاصـة

هنالك بعض النهايات تكون على شكل الصورة العامة للمشتقة لذلك نجد قيمتها من مشتقة الاقتران حيث

$$\text{قَ}(س) = \underset{\text{ه} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س + \text{ه}) - \text{ق}(س)}{\text{ه}}$$

$$= \underset{\Delta س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{س_{٢} \to س_{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س_{٢}) - \text{ق}(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

حيث $\text{ق}(س)$ قابل للاشتقاق

ملاحظات (لأسئلة الاختيار من متعدد)

١) $$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س+أهـ)-ق(س)}{ب\,هـ} = \frac{أ}{ب}\,\bar{ق}(س)$$

٢) $$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-ق(س+أهـ)}{ب\,هـ} = \frac{-أ}{ب}\,\bar{ق}(س)$$

٣) $$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س-هـ)-ق(س)}{هـ} = -\bar{ق}(س)$$

٤) $$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{أهـ}{ق(س+ب\,هـ)-ق(س)} = \frac{أ}{ب} \times \frac{١}{\bar{ق}(س)}$$

- قاعدة لوبيتال تساعد في استنتاج صيغة المشتقة ، أما أسئلة الحل فنرجع لطريقة الفرض.

النوع الأول: معطى والمطلوب نهاية على شكل مشتقة

أمثلـــة

١) إذا كان $ق(س) = ٢س^{٣}$ ، جد

$$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(١+هـ)-ق(١)}{هـ}$$

الحل: المطلوب $\bar{ق}(١)$

$$\bar{ق}(س) = ٦س^{٢}$$

$$\bar{ق}(١) = ٦$$

٢) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، جد

$$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢+هـ)-ق(٢)}{٤هـ}$$

الحل: المطلوب $\bar{ق}(٢) \times \frac{١}{٤}$

$$\bar{ق}(س) = \frac{٠-١}{س^{٢}} \Rightarrow \frac{-١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{-١}{١٦}$$

٣) إذا كان $ق(س) = \frac{س+١}{س+٢}$ ، جد

$$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س+هـ)-ق(س-هـ)}{هـ}$$

الحل: نفصل

$$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ} + \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-ق(س-هـ)}{هـ}$$

$$= \bar{ق}(س) - \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س+ص)-ق(س)}{-ص}$$

$$= ٢\bar{ق}(س) = ٢ \times \frac{١}{(س+٢)^{٢}}$$

٤) إذا كان $ق(س) = \sqrt{س+٢}$ ، جد

$$\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢)-ق(٢-٣هـ)}{٩هـ-هـ^{٢}}$$

الحل: نرتب المطلوب

$$-\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢-٣هـ)-ق(٢)}{هـ(٩-هـ)}$$

$$= -\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٩-هـ} \times \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢-٣هـ)-ق(٢)}{هـ}$$

نفرض $ص = -٣هـ \rightarrow هـ = \frac{ص}{-٣} \quad \begin{matrix} هـ \to ٠ \\ \therefore ص \to ٠ \end{matrix}$

$$= \frac{-١}{٩}\,\underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢+ص)-ق(٢)}{\frac{ص}{-٣}}$$

$$= \frac{١}{٣}\,\bar{ق}(٢)$$

لكن $\bar{ق}(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$

$\therefore$ المطلوب $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

٥) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}٢\text{س}$ ، جد

$$\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}\left(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{هـ}\right) - \text{ق}\left(\frac{\pi}{٢}\right)}{٤\text{هـ}}$$

الحل: نفرض $\text{ص} = -٢\text{هـ} \leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{ص}}{-٢}$ ، $\text{هـ} \to ٠$ ، $\text{ص} \to ٠$

$$= \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{ص}\right) - \text{ق}\left(\frac{\pi}{٢}\right)}{٤ \times \frac{\text{ص}}{-٢}}$$

$$= \frac{-١}{٢} \text{قَ}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$$

لكن $\text{قَ}(\text{س}) = ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س}$

$\text{قً}(\text{س}) = -٤ \text{ جا } ٢ \text{ س}$

المطلوب $\frac{-١}{٢} \times ٠ = \text{صفر}$

٦) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}}$ ، جد

$$\underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$$

الحل: المطلوب تعويض مباشر

$\text{ق}(٢) - \text{ق}(١) = \frac{٩}{٢} - ٢ = \frac{٥}{٢}$

النوع الثاني:

استنتاج $\text{ق}(\text{س})$ من نهاية على شكل مشتقة

٧) جد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١+\text{هـ})^٣ - ١}{\text{هـ}}$

الحل: من النهاية نستنتج أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣$

والمطلوب $\text{قَ}(١)$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢$

$\text{قَ}(١) = ٣$

٨) جد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٢+\text{هـ}} - \sqrt[٣]{٢}}{\text{هـ}}$

الحل: من النهاية نستنتج أن $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س})^{\frac{١}{٣}}$

والمطلوب $\text{قَ}(٢)$

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{٣} \text{س}^{\frac{-٢}{٣}}$

$\text{قَ}(٢) = \frac{١}{٣} (٢)^{\frac{-٢}{٣}}$

٩) جد $\underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢(\text{ظاس}) - \text{جا}^٢(\text{ظاع})}{\text{ع} - \text{س}}$

الحل: من النهاية نستنتج أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}^٢(\text{ظاس})$

والمطلوب $- \text{قَ}(\text{س})$

$\text{قَ}(\text{س}) = -٢ \text{ جا}(\text{ظا س}) \text{ جتا}(\text{ظا س}) \text{ قا}^٢ \text{س}$

١٠) جد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(٣\text{س} + ٣\text{هـ}) - \text{ظا}(٣\text{س})}{٣\text{هـ}}$

الحل: من النهاية نستنتج أن $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}٣\text{س}$

والمطلوب $\frac{١}{٣} \text{قَ}(\text{س})$

$\frac{١}{٣} \times \text{قا}^٢ ٣\text{س} \times ٣ = \text{قا}^٢ ٣\text{س}$

النوع الثالث: استنتاج $\text{قَ}(\text{س})$ معطى والمطلوب نهاية على شكل مشتقة

١. يجب جعل البسط عبارة عن طرح صور $\text{ق}(\ ) - \text{ق}(\ )$ وأحياناً نحتاج للفصل.

٢. نكون تناسق في النهاية بإرجاع الأعداد إلى أصل الاقتران.

٣. نستنتج صيغة الاشتقاق.

١١) $\text{ق}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)=\text{٢}$ ، $\text{قَ}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)=\text{٨}$ جد

$$\underset{\text{س}\to\text{٦}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}\left(\text{جا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right)\right)-\text{٢}}{\text{س}-\text{٦}}$$

(٢٠١٣ وزاري)

الحل: نبسط المطلوب

$$\underset{\text{س}\to\text{٦}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right)-\text{ق}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)}{\text{س}-\text{٦}}$$

نستطيع كتابة $\frac{\text{١}}{\text{٢}}=\text{جا}\frac{\pi}{\text{٦}}$ لتكوين تناسق

$$=\underset{\text{س}\to\text{٦}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right)-\text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{٦}}\right)}{\text{س}-\text{٦}}$$

المطلوب مشتقة $\text{ق}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right)$ عندما $\text{س}=\text{٦}$

$\text{قَ}\left(\text{جا}\frac{\pi}{\text{س}}\right)\times\text{جتا}\frac{\pi}{\text{س}}\times\frac{-\pi}{\text{س}^{\text{٢}}}$ عندما

$\text{س}=\text{٦}$

$$=\text{قَ}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)\times\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\times\frac{-\pi}{\text{٣٦}}$$

$$=\text{٨}\times\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\times\frac{-\pi}{\text{٣٦}}=\frac{-\sqrt{\text{٣}}\,\pi}{\text{٩}}$$

---

١٢) إذا كان $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})=\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ، $\text{قَ}(\text{٢})=\text{١}$ ، جد

$$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}-\text{٤ق}(\text{س})}{(\text{س}-\text{٢})\,\text{ق}(\text{س})}$$

الحل:

١٣) إذا علمت أن

$$\text{ق}(\text{س}+\text{ص})=\text{ق}(\text{س})+\text{ق}(\text{ص})-\text{٤س ص}$$

س ، ص عددان حقيقيان $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{هـ})}{\text{هـ}}=\text{٢}$

جد $\text{قَ}(\text{س})$

الحل: $\text{قَ}(\text{س})=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\cancel{\text{ق}(\text{س})}+\text{ق}(\text{هـ})-\text{٤س هـ}-\cancel{\text{ق}(\text{س})}}{\text{هـ}}$$

(نوزع)

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{هـ})}{\text{هـ}}+\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{٤س}\ \cancel{\text{هـ}}}{\cancel{\text{هـ}}}=\text{٢}-\text{٤س}$$

---

١٤) إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ قابل للاشتقاق وكان

$\text{ق}(\text{س}+\text{ص})=\text{ق}(\text{س})\times\text{ق}(\text{ص})$ حيث

$\text{قَ}(\text{٠})=\text{ق}(\text{٠})=\text{١}$ أثبت أن

$\text{قَ}(\text{س})=\text{ق}(\text{س})$

الحل:

$$\text{قَ}(\text{س})=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س})\times\text{ق}(\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س})(\text{ق}(\text{هـ})-\text{١})}{\text{هـ}}$$

$$=\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\times\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{هـ})-\text{ق}(\text{٠})}{\text{هـ}}$$

(حولنا إلى ق(٠))

$$=\text{ق}(\text{س})\times\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{٠}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{٠})}{\text{هـ}}$$

$$=\text{ق}(\text{س})\times\text{قَ}(\text{٠})=\text{ق}(\text{س})$$

$$\text{قَ}(\text{س})=\text{ق}(\text{س})$$

تماريـن إضافيـة (للطالب)

١) إذا كان $ق(٢) = ٤$ ، $ق'(٢) = -١$ ، جد قيمة $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق(٢) - س}{س - ٢}$

الحل:

---

٢) إذا كان $ق(س) = س^{٣}$ ، فجد $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$ (٢٠٠٠ وزاري)

الحل:

---

٣) إذا كان $ق(س) = أ\,س^{٢} + ٣\,س$ ، وكانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ٧$ ، فجد قيمة أ (٢٠٠٠ وزاري)

الحل:

---

٤) إذا كانت $ق'(١) = ٩$ ، $ق(١) = ٥$ ، فإن $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ٣}{٣ - س}$ تساوي: (٢٠٠٥ وزاري)

أ) -٩ ب) ٣ ج) ١ د) صفر

---

٥) إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ، وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فإن: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ٣}{٦ - ٣س}$ تساوي:

أ) ١ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{-١}{٣}$ د) -٣

---

٦) إذا كان $ق(س) = \left(س^{٣} + ٢\right)\left(٤ - س^{٢}\right)$ ، جد $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(١ - هـ) - ق(١)}{٢هـ}$

الحل: نفرض $ص = -هـ \leftarrow هـ = -ص \quad \begin{matrix} هـ \leftarrow ٠ \\ ص \leftarrow ٠ \end{matrix}$

$$\underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(١ + ص) - ق(١)}{-٢ص} = \frac{-١}{٢} ق'(١)$$

$$ق'(س) = \left(س^{٣} + ٢\right)(-٢س) + \left(٤ - س^{٢}\right)\left(٣س^{٢}\right)$$

المطلوب $\frac{-١}{٢}(-٦ + ٩) = \frac{-٣}{٢}$

تدريب: إذا كان $ق(س) = ٣\,م(س)$ ، وكان $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{م(٢ + ٣هـ) - م(٢)}{هـ^{٢} + هـ} = ١٢$ ، جد قيمة $ق'(٢)$

براهين النظريات

الاتصال والاشتقاق: كل اقتران قابل للاشتقاق عند $س = س_1$ فإنه متصل عند $س = س_1$

البرهان: $ق(س_1)$ موجودة لأن $ق$ قابل للاشتقاق عند $س_1$ فهو معرف عندها.

$$ق(س) - ق(س_1) = \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times س - س_1$$

حيث $س \neq س_1$ وبأخذ $\underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}$ للطرفين

نوزع النهاية

$$\underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س) - ق(س_1) = \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}} \left(\frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1} \times (س - س_1) \right)$$

$$\text{إذا: } \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س) - \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س_1) = \underbrace{\underset{س \to س_1}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1}}_{ق'(س)} \times \underbrace{\underset{س \to س_1}{\text{نهـا}} (س - س_1)}_{\text{صفر}}$$

$$\text{إذا: } \underset{س \to س_1}{\text{نهـا}}\, ق(س) = ق(س_1)$$

بما أن $ق(س_1)$ موجودة والنهاية موجودة ← $ق(س)$ متصل عند $س = س_1$

قواعد الاشتقاق

النظرية: $ق(س) = جـ$ فإن $ق'(س) = \text{صفر}$

البرهان: $ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \dfrac{جـ - جـ}{ع - س} = \text{صفر}$

النظرية: $ق(س) = س^{ن}$ (ن عدد طبيعي) فإن $ق'(س) = ن\, س^{ن-١}$

البرهان: سنبرهن لحالة ن عدد طبيعي

$$ق'(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ع^{ن} - س^{ن}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(ع - س)}\left(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢} س + ع^{ن-٣} س^{٢} + \ldots + س^{ن-١}\right)}{\cancel{ع - س}}$$

$$= س^{ن-١} + س^{ن-٢} س + س^{ن-٣} س^{٢} + \ldots + س^{ن-١}$$

$$= \underbrace{س^{ن-١} + س^{ن-١} + س^{ن-١} + \ldots + س^{ن-١}}_{\text{ن من المرات}} = ن\, س^{ن-١}$$

النظرية: $ه(س) = جـ\,ق(س)$ فإن $\bar{ه}(س) = جـ\,\bar{ق}(س)$ $جـ \in ح$ ، $ق(س)$ قابل للاشتقاق

البرهان:
$$\bar{ه}(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$$
$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{جـ\,ق(ع) - جـ\,ق(س)}{ع - س}$$
$$= جـ \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = جـ \times \bar{ق}(س)$$

النظرية : $ق(س) = م(س) - ل(س)$ فإن $\bar{ق}(س) = \bar{م}(س) - \bar{ل}(س)$ حيث $م$ ، $ل$ قابلان للاشتقاق

البرهان: (للطرح)
$$\bar{ق}(س) = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{م(ع) - ل(ع) - (م(س) - ل(س))}{ع - س}$$
$$= \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} - \underset{ع \to س}{\text{نهـا}} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} = \bar{م}(س) - \bar{ل}(س)$$

لأن كلاً $م(س)$ ، $ل(س)$ قابل للاشتقاق عند س

النظرية : $ق(س) = س^{ن}$ ($ن$ عدد صحيح سالب) فإن $\bar{ق}(س) = ن\,س^{ن-١}$

البرهان: $ن$ عدد صحيح سالب $\leftarrow ن = -م$ حيث $م$

عدد صحيح موجب إذاً: $ق(س) = س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$

وحسب نتيجة (١) فإن $\bar{ق}(س) = \frac{-١ \times م\,س^{م-١}}{(س^{م})^{٢}} = \frac{-م\,س^{م-١}}{س^{٢م}} = -م\,س^{-م-١}$

لكن $-م = ن$ ، إذاً: $\bar{ق}(س) = ن\,س^{ن-١}$

النظرية : $ق(س) = س^{\frac{م}{ن}}$ فإن $\bar{ق}(س) = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

البرهان: $ص = س^{\frac{م}{ن}} \leftarrow ص^{ن} = س^{م}$ بالاشتقاق الضمني

$$ن\,ص^{ن-١}\,\bar{ص} = م\,س^{م-١} \leftarrow \bar{ص} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}}$$

$$\bar{ص} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{\left(س^{\frac{م}{ن}}\right)^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{م-\frac{م}{ن}}}$$ نطرح الأسس

$$= \frac{م}{ن} \times س^{\cancel{م}+١-\cancel{م}+\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$$

حلول ورقة عمل (١)

١) $\Delta ص = د\left(\frac{\pi}{٢}\right) - د\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$

$٥ = أ - -أ \leftarrow أ = \frac{٥}{٢}$ (ج)

---

٢) $د(س) = أس + ب$ خطي

$أ = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٧$

$د(س) = ٧س + ب$

$د(٠) = ١ \leftarrow ب = ١ \leftarrow د(س) = ٧س + ١$ (ج)

---

٣) $ظا\frac{\pi}{٤} = \frac{د(٣) - د(١)}{٢}$

$١ = \frac{٩أ - أ}{٢} \leftarrow ٢ = ٨أ \leftarrow أ = \frac{١}{٤}$ (ج)

---

٤) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(٢ه(٢) + ١٢) - (٢ه(-١) + ٣)}{٣}$

$= \frac{٢(ه(٢) - ه(-١)) + ٩}{٣}$

$= \frac{٢(ه(٢) - ه(-١))}{٣} + \frac{٩}{٣}$

$= \frac{٢\Delta ه}{\Delta س} + ٣ = ٢ \times ٢ + ٣ = ٧$ (ب)

---

٥) $٣ = \frac{د(١) - د(-٢)}{٣}$

$٩ = (أ + ٣) - ٩ \leftarrow ١٨ = أ + ٣ \leftarrow أ = ١٥$ (ب)

---

٦) $م = س^{٢} \leftarrow \frac{\Delta م}{\Delta س} = \frac{٣٦ - ١٦}{٢} = ١٠$ (أ)

---

٧) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(١ + ه) - د(١)}{ه}$

$= \frac{(١ + ه)^{٢} + ٧ - ٨}{ه} = \frac{\cancel{١} + ٢ه + ه^{٢} - \cancel{١}}{ه}$

$= \frac{\cancel{ه}(٢ + ه)}{\cancel{ه}} = ٢ + ه$ (ج)

---

٨) $\frac{\Delta د}{\Delta س} = \frac{٤ه(٢) - ٤ه(-٢)}{٤}$

$= ه(٢) - ه(-٢) = -٢$ (د)

---

٩) $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{١٤١ - ٤٩}{٢} = \frac{٩٢}{٢} = ٤٦$ (ج)

---

١٠) $\frac{\Delta ه}{\Delta س} = \frac{ه(٤) - ه(١)}{٣} = ٥$

$ه(٤) - ه(١) = ١٥ \ldots\ldots (١)$

$\frac{\Delta د}{\Delta س} = \frac{٢ه(٤) - ه(١)}{٣} = ٣$

$٢ه(٤) - ه(١) = ٩ \ldots\ldots (٢)$

$(٢) - (١) \Leftarrow ه(٤) = -٦ \leftarrow ه(١) = -٢١$ (د)

---

١١) $٧ = \frac{د(٢) - -١}{١} \leftarrow د(٢) = ٦$ (أ)

---

١٢) $م_{ه} = \frac{ه(٣) - ه(١)}{٣ - ١}$ (د)

$= \frac{(٩د(٣) + ٣) - (د(١) + ١)}{٢}$

$= \frac{(٩ \times ٥ + ٣) - (١ + ١)}{٢} = \frac{٤٨ - ٢}{٢} = ٢٣$

ثانياً: ١) $م_{\text{العمودي على القاطع}} = ظا\frac{٣\pi}{٤} = -١$

$\therefore م_{\text{القاطع}} = \frac{-١}{-١} = ١ = \frac{د(٢) - د(-١)}{٢ - -١}$

$م_{ه} = \frac{ه(٢) - ه(-١)}{٢ - -١} = \frac{(د(٢) + ١) - (د(-١) - ٢)}{٣}$

$= \frac{د(٢) - د(-١)}{٣} + \frac{١ - -١}{٣} = ١ + ١ = ٢$

٢) $م_{د} = \frac{د(٣) - د(١)}{٣ - ١} = \frac{-١}{٤}$

$\frac{-١}{٢} = \frac{٣}{ه(٣)} - \frac{١}{ه(١)} \ldots\ldots (١)$ كذلك

$م_{ه} = \frac{ه(٣) - ه(١)}{٣ - ١} = \frac{٥}{٢}$

$ه(٣) - ه(١) = ٥ \ldots (٢)$

من (٢) $ه(٣) = ه(١) + ٥ \ldots\ldots (٢)$ نعوض في (١)

$\frac{-١}{٢} = \frac{٣}{ه(١) + ٥} - \frac{١}{ه(١)}$ نوحد المقامات

$\frac{-١}{٢} = \frac{\overbrace{٣ه(١) - ه(١)}^{٢ه(١)} - ٥}{(ه(١) + ٥)ه(١)}$

$-ه^{٢}(١) - ٥ه(١) = ٤ه(١) - ١٠$

$ه^{٢}(١) + ٩ه(١) - ١٠ = ٠$

$(ه(١) + ١٠)(ه(١) - ١) = ٠$

$ه(١) = -١٠ \leftarrow ه(٣) = -٥$

$ه(١) = ١ \leftarrow ه(٣) = ٦$

حلول ورقة عمل (٢)

١) $$\text{قَ}(١) = \lim_{\text{ع}\to ١} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to ١} \frac{\text{ع}^{٢} + ٢\text{ع} - ٣}{\text{ع} - ١}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to ١} \frac{(\text{ع}+٣)\,\cancel{(\text{ع}-١)}}{\cancel{\text{ع}-١}} = ٤$$

---

٢) $$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^{٢} + \frac{١}{\text{ع}} - \left(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)}{\text{ع} - \text{س}} \quad \text{نفصل}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\frac{١}{\text{ع}} - \frac{١}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{ع}+\text{س})\,\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{\overset{-١}{\cancel{\text{س}-\text{ع}}}}{\text{ع}\,\text{س}}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$$

$$= ٢\text{س} + \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$$

---

٣) $$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع}+١} - \sqrt{\text{س}+١}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}+١} + \sqrt{\text{س}+١}}{\sqrt{\text{ع}+١} + \sqrt{\text{س}+١}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع} + \cancel{١} - \text{س} - \cancel{١}}{٢(\text{ع}-\text{س})\sqrt{\text{س}+١}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+١}}$$

٤) $$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{١}{\sqrt{\text{ع}}} + ٤\text{ع} - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} + ٤\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} \quad \text{نفصل}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{١}{\sqrt{\text{ع}}} - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{٤\text{ع} - ٤\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ع}}}{(\text{ع}-\text{س})\sqrt{\text{ع}}\sqrt{\text{س}}} + \frac{٤\,\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ع}}}{(\text{ع}-\text{س})\sqrt{\text{ع}}\sqrt{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ع}}}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ع}}} +$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\overset{-١}{\cancel{\text{س}-\text{ع}}}}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\,\text{س} \times ٢\sqrt{\text{س}}} + ٤$$

$$= \frac{-١}{٢\text{س}\sqrt{\text{س}}} + ٤$$

---

٥) $$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جاع} + \sqrt{\text{ع}} - \text{جاس} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جاع} - \text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\ \text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}$$

نعوض

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{٢\text{جتا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\ \text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}\ ٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$= ٢\text{جتاس} \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\frac{\text{جاص}}{٢}}{\text{ص}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \qquad \text{ص} = \text{ع} - \text{س}$$

$$= \text{جتاس} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

٦)
$$\lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{قاع} - \text{ع}^{٢} - \text{قاس} + \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{قاع} - \text{قاس}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{-\text{ع}^{٢} + \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{١}{\text{جتاع}} - \frac{١}{\text{جتاس}}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\overset{-١}{\cancel{(\text{س} - \text{ع})}}\,(\text{س} + \text{ع})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتاع}}{\text{جتاع جتاس}\,(\text{ع} - \text{س})} - ٢\text{س}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-٢\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{ع}}{٢}\right)\ \text{جا}\left(\frac{\text{س}-\text{ع}}{٢}\right)}{\text{جتاع جتاس}\,(\text{ع} - \text{س})} - ٢\text{س}$$

↓

نعوض

$$= \frac{-٢\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}\frac{-\text{ص}}{٢}}{\text{ص}} - ٢\text{س}$$

$$= \cancel{-}\cancel{٢} \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times \cancel{-} \frac{١}{\cancel{٢}} - ٢\text{س}$$

$$= \text{قا س ظا س} - ٢\text{س}$$

٧)
$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتا}^{٢}\text{ع} - \text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

نعوض

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{(\text{جتاع} - \text{جتاس})(\text{جتاع} + \text{جتاس})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= ٢\text{جتاس} \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-٢\text{جا}\left(\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\right)\ \text{جا}\left(\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= ٢\text{جتاس} \times -٢\text{جاس} \lim_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا}\frac{\text{ص}}{٢}}{\text{ص}}$$

$$= \cancel{٢}\text{جتاس} \times -٢\text{جاس}\ \frac{١}{\cancel{٢}}$$

$$= -٢\ \text{جاس جتاس}$$

٨)
$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt[٣]{\text{ع}} - \frac{١}{\text{ع}+١} - \sqrt[٣]{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}+١}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt[٣]{\text{ع}} - \sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} + - \left(\frac{\frac{١}{\text{ع}+١} - \frac{١}{\text{س}+١}}{\text{ع} - \text{س}} \right)$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\sqrt[٣]{\text{ع}} - \sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt[٣]{\text{ع}^{٢}} + \sqrt[٣]{\text{ع}}\ \sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}{\sqrt[٣]{\text{ع}^{٢}} + \sqrt[٣]{\text{ع}}\ \sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}} - \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\frac{\text{س}\cancel{+١} - \text{ع} \cancel{-١}}{(\text{ع}+١)(\text{س}+١)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\left(٣\ \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}\right)} - \frac{\overset{-١}{\cancel{\text{س} - \text{ع}}}}{(\text{ع}+١)(\text{س}+١)\ \cancel{(\text{ع} - \text{س})}} = \frac{١}{٣\ \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}} + \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$$

٩)
$$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع جتاع} - \text{س جتا س}}{\text{ع} - \text{س}}$$ نفصل

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ع جتاع} - \text{س جتا ع}}{\text{ع} - \text{س}} + \frac{\text{س جتاع} - \text{س جتا س}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاع}\,\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \frac{\text{س}\,(\text{جتاع} - \text{جتا س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{جتاس} + \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{س}\left(-٢\text{جا}\frac{\text{ع}+\text{س}}{٢}\ \text{جا}\frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}\right)}{\text{ع} - \text{س}} = \text{جتاس} - ٢\text{س جا س} \lim_{\text{ص}\to ٠} \overset{\frac{١}{٢}}{\boxed{\frac{\text{جا}\frac{\text{ص}}{٢}}{\text{ص}}}} = \text{جتاس} - \text{س جا س}$$

١٠) $د'(١) = \underset{ع \to ١}{\text{نها}} \frac{\frac{ع}{ع+٢} - \frac{١}{٣}}{ع - ١}$

$$= \underset{ع \to ١}{\text{نها}} \frac{\frac{٣ع - ع - ٢}{(ع+٢)(٣)}}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١}{\text{نها}} \frac{\overset{٢\cancel{(ع-١)}}{٢ع - ٢}}{(ع+٢)(٣)\cancel{(ع-١)}} = \frac{٢}{٩}$$

---

١١) $د(س) = |س^{\overset{+}{٢}} - ١|$

$$د'(٢) = \underset{ع \to ٢}{\text{نها}} \frac{ع^{٢} - ١ - ٣}{ع - ٢}$$

$$= \underset{ع \to ٢}{\text{نها}} \frac{\cancel{(ع-٢)}(ع+٢)}{\cancel{ع-٢}} = ٤$$

---

١٢) $د(س) = \begin{cases} س^{٣} - س^{٢} \text{ ، } س \geq ١ \\ س^{٢} - س^{٣} \text{ ، } س < ١ \end{cases}$

$د(١) = ٠$ ، $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نها}} د(س) = ٠$ ، $\underset{س \to ١^{-}}{\text{نها}} د(س) = ٠$

$د(س)$ متصل عند $س = ١$

$$د'_{+}(١) = \underset{ع \to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{د(ع) - د(١)}{ع - ١}$$

$$= \underset{ع \to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{ع^{٣} - ع^{٢} - ٠}{ع - ١} = \frac{ع^{٢}\cancel{(ع-١)}}{\cancel{ع-١}} = ١$$

$$د'_{-}(١) = \underset{ع \to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{ع^{٢} - ع^{٣} - ٠}{ع - ١} = -١$$

$د'(١)$ غير موجودة

---

١٣) $د(س)$ متصل عند $س = ١$

$$د'_{+}(١) = \underset{ع \to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{ع^{٢} + ١ - ٢}{ع - ١} = \frac{\cancel{(ع-١)}(ع+١)}{\cancel{ع-١}} = ٢$$

$$د'_{-}(١) = \underset{ع \to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{٣ - ع - ٢}{ع - ١} = -١$$

$د'(١)$ غير موجودة

---

١٤) $د'(٤) = \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{ع}\, هـ(ع) - ٢هـ(٢)}{ع - ٤}$ نفصل

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \left(\frac{\sqrt{ع}\, هـ(ع) - ٢هـ(ع)}{ع - ٤} + \frac{٢هـ(ع) - ٢هـ(٢)}{ع - ٤} \right)$$

$$= \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{هـ(ع)(\sqrt{ع} - ٢)}{ع - ٤} + \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{٢(هـ(ع) - هـ(٢))}{ع - ٤}$$

∴ هـ(س) قابل للاشتقاق ← منفصل

$$= هـ(٤) \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{ع} - ٢}{ع - ٤} \times \frac{\sqrt{ع} + ٢}{\sqrt{ع} + ٢} + ٢هـ'(٤)$$

$$= -١ \times \underset{ع \to ٤}{\text{نها}} \frac{\cancel{ع - ٤}}{\cancel{(ع - ٤)}\,(٤)} + ٢ \times ٥ = \frac{-١}{٤} + ١٠ = \frac{٣٩}{٤}$$

---

١٥) نفصل

$$\underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{\overbrace{س\, د(س) - ع\, د(س)}^{\text{مشترك}}}{ع - س} + \frac{\overbrace{ع\, د(س) - ع\, د(ع)}^{\text{مشترك}}}{ع - س}$$

$$= \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{د(س)\overset{-١}{\cancel{(س - ع)}}}{\cancel{ع - س}} + \underset{ع \to س}{\text{نها}} \frac{ع(د(س) - د(ع))}{ع - س}$$

د(س) قابل للاشتقاق ← متصل

$$= -د(س) + س \times -د'(س)$$

$$= -د(س) - س\, د'(س)$$

---

١٦) نفرض $ص = -٢هـ \leftarrow هـ = \frac{ص}{-٢}$

$هـ \to ٠$ $ص \to ٠$

$$\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \frac{د(٤) - د(٤ + ص)}{٣ \times \frac{ص}{-٢}}$$

$$= \frac{-٢}{٣} \underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \frac{د(٤) - د(٤ + ص)}{ص}$$

$$= \frac{-٢}{٣} \times -د'(٤) = \frac{٢}{٣} \times -٦ = -٤$$

١٧) $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{٢هـس} + \text{س}^{٢}\text{هـ} + \text{٢هـ}^{٢}\text{س}}{\text{هـ}}$

$$\therefore \text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\cancel{\text{هـ}}\left(\text{٢س} + \text{س}^{٢} + \text{٢هـس}\right)}{\cancel{\text{هـ}}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{٢س} + \text{س}^{٢} \leftarrow \quad \therefore \text{قَ}(-١) = -٢ + ١ = -١$$

---

١٨) نفصل ← $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(٤ - \text{٢هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤ + \text{٥هـ})}{\text{هـ}}$

نفرض $\text{ص}_{١} = -\text{٢هـ}$ $\quad \text{ص}_{٢} = \text{٥هـ} \quad \leftarrow \quad \text{هـ} = \frac{\text{ص}_{١}}{-٢} \quad \text{هـ} = \frac{\text{ص}_{٢}}{٥}$

$$\underset{\text{ص}_{١}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(٤ + \text{ص}_{١}) - \text{ق}(٤)}{\frac{\text{ص}_{١}}{-٢}} + \underset{\text{ص}_{٢}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤ + \text{ص}_{٢})}{\frac{\text{ص}_{٢}}{٥}}$$

$$= -\text{٢قَ}(٤) - \text{٥قَ}(٤) = -\text{٧قَ}(٤) = -٧ \times ٦ = -٤٢$$

---

١٩) $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٢}} - \sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٢}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٤}} + \sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٢}}\,\sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٢}} + \sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٤}}}{\sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٤}} + \sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٢}}\,\sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٢}} + \sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٤}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{(\text{ع}-١)^{٢} - (\text{س}-١)^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٤}} + \sqrt[٣]{(\text{ع}-١)^{٢}}\,\sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٢}} + \sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٤}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\left(\text{ع} - \cancel{١} - \overset{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}{\text{س}} + \cancel{١}\right)(\text{ع} - ١ + \text{س} - ١)}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} \times \frac{١}{٣\ \sqrt[٣]{(\text{س}-١)^{٤}}}$$

$$= (\text{٢س} - ٢) \times \frac{١}{٣(\text{س}-١)^{\frac{٤}{٣}}} = \frac{٢(\text{س}-١)}{٣(\text{س}-١)^{\frac{٤}{٣}}} = \frac{٢}{٣}(\text{س}-١)^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣(\text{س}-١)^{\frac{١}{٣}}}$$

---

٢٠) $\text{م} = \text{س}^{٢}$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \underset{\text{ع}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{م}(\text{ع}) - \text{م}(٤)}{\text{ع} - ٤}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٤}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{٢} - ١٦}{\text{ع} - ٤} = \underset{\text{ع}\to ٤}{\text{نها}} \frac{(\text{ع} + ٤)\,\cancel{(\text{ع} - ٤)}}{\cancel{\text{ع} - ٤}} = ٨$$

٢١) $$\bar{ق}(س) = \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}٣ع - \text{جتا}٣س}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{-٢\ \text{جا}\left(\frac{٣ع+٣س}{٢}\right) \text{جا}\left(\frac{٣ع-٣س}{٢}\right)}{ع - س}$$

نعوض

$$= \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} -٢\ \text{جا}\left(\frac{٣ع+٣س}{٢}\right) \times \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\ \frac{٣}{٢}(ع - س)}{ع - س} \quad \text{نفرض}\ ص = ع - س$$

$$= -٢\ \text{جا}\ ٣س \times \underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\ \frac{٣}{٢}ص}{ص} = -\cancel{٢}\ \text{جا}٣س \times \frac{٣}{\cancel{٢}} = -٣\ \text{جا}\ ٣س$$

---

٢٢) $$\frac{دص}{دس} = \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{قتا}ع - \text{قتا}س}{ع - س} = \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{جا}ع} - \frac{١}{\text{جا}س}}{ع - س}$$

متطابقة

$$= \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}س - \text{جا}ع}{\text{جا}ع - \text{جا}س\ (ع - س)} = \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جتا}\left(\frac{س+ع}{٢}\right) \text{جا}\left(\frac{س-ع}{٢}\right)}{\text{جا}ع - \text{جا}س\ (ع - س)}$$

نعوض

$$= \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جتا}\left(\frac{س+ع}{٢}\right)}{\text{جا}س - \text{جا}ع} \times \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{س-ع}{٢}\right)}{ع - س} \quad \text{نفرض}\ ص = س - ع$$

$$= \frac{٢\text{جتا}\ س}{\text{جا}^{٢}س} \times \underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\ \frac{ص}{٢}}{-ص} = \frac{\cancel{٢}\text{جتا}\ س}{\text{جا}س\times\text{جا}س} \times \frac{١}{\cancel{٢}} = -\ \text{قتا}\ س\ \text{ظتا}\ س$$

---

٢٣) $$ق(س) = \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{ع\ \text{قتا}ع - س\ \text{قتا}س}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{ع\ \text{قتا}ع - س\ \text{قتا}ع}{ع - س} + \frac{س\ \text{قتا}ع - س\ \text{قتا}س}{ع - س}$$

$$= \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{قتا}ع\cancel{(ع - س)}}{\cancel{ع - س}} + \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{س\left(\frac{١}{\text{جا}ع} - \frac{١}{\text{جا}س}\right)}{ع - س}$$

$$= \text{قتا}س + \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} س \times \frac{\text{جا}س - \text{جا}ع}{\text{جا}ع\ \text{جا}س\ (ع - س)}$$

$$= \text{قتا}س + \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} س \times \frac{٢\text{جتا}\left(\frac{س+ع}{٢}\right) \text{جا}\left(\frac{س-ع}{٢}\right)}{\text{جا}ع\ \text{جا}س\ (ع - س)}$$

نعوض

$$= \text{قتا}س + \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{٢س\ \text{جتا}\left(\frac{س+ع}{٢}\right)}{\text{جا}ع - \text{جا}س} \times \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\left(\frac{س-ع}{٢}\right)}{ع - س} \quad \text{نفرض}\ ص = س - ع$$

$$= \text{قتا}س + \underset{ع\to س}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{٢}س\ \text{جتا}\ س}{\text{جا}س - \text{جا}س} \times \frac{-١}{\cancel{٢}} = \text{قتا}س - س\ \text{قتا}س\ \text{ظتا}س$$

حلول ورقة عمل (٣)

السؤال الأول:

١) $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{س}^{-٢} + ٣\text{س}^{٢}$

---

٢) $\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}^{٣} + ٤)\left(\frac{-٢}{٥}\right) + \left(١ - \frac{٢}{٥}\text{س}\right)(٣\text{س}^{٢})$

---

٣) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$

$\text{ق}'(١) = \frac{-٢\text{أ}}{٤} = ٣ \leftarrow \text{أ} = -٦$

---

٤) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}\text{س}^{\frac{-٢}{٣}} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{-١}{٣}}$

$\text{ق}'(٨) = \frac{١}{٣}(٨)^{\frac{-٢}{٣}} + \frac{٢}{٣}(٨)^{\frac{-١}{٣}}$

$= \frac{١}{١٢} + \frac{\cancel{٢}}{٣} \times \frac{١}{\cancel{٢}} = \frac{٥}{١٢}$

---

٥) نبسط الاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١ - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥)(-٢\text{س}) - (١ - \text{س}^{٢})(٢\text{س} - ٤)}{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٥)^{٢}}$

$\text{ق}'(١) = \frac{-٨ \times -٢ - ٠}{(-٨)^{٢}} = \frac{١٦}{٦٤} = \frac{١}{٤}$

---

٦) نبسط

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{-١}{٣}} + \frac{-٢}{\text{س}+٢} + \frac{\text{س}^{٣} - ١}{٩}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-١}{٣}\text{س}^{\frac{-٤}{٣}} + \frac{٢}{(\text{س}+٢)^{٢}} + \frac{\overset{١}{\cancel{٣}}\text{س}^{٢}}{\underset{٣}{\cancel{٩}}}$

---

٧) نبسط الاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} - ٧\text{س}^{٨} - \text{س}^{-٥}}{١}$

$= \text{س}^{٣} - ٧\text{س}^{٨} - \text{س}^{-٥}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٥٦\text{س}^{٧} + ٥\text{س}^{-٦}$

---

٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

---

٩) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢} - ٢)(-٣) - (١ - ٣\text{س})(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٢}}$

نعوض $\text{س} = ٠$ ولا يوجد أهمية $\text{ص} = \frac{-١}{٢}$

$\text{ق}'(٠) = \frac{٦ - ٠}{٤} = \frac{٣}{٢}$

---

١٠) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{٢}+١)(\text{أ}) - (\text{أس} - ١)(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$

$\text{ق}'(٢) = \frac{٥\text{أ} - (٢\text{أ} - ١)(٤)}{٢٥} = \frac{٤}{٩}$

$\frac{-٣\text{أ} + ٤}{٢٥} = \frac{٤}{٩} \leftarrow \text{أ} = \frac{-٦٤}{٢٧}$

---

١١) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٨} + \frac{-٨}{\text{س}^{٢}}$

---

١٢) $\text{هـ}'(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) \times ٢\text{س}$

$\text{هـ}'(٣) = ٩ \times \text{ق}'(٣) + \text{ق}(٣) \times ٦$

$= -٩ + ١٢ = ٣$

---

١٣) نجد $\text{هـ}(٢) \leftarrow \text{ق}(٢) = ٤ \times \text{هـ}(٢)$

$\leftarrow ٨ = ٤\text{هـ}(٢) \leftarrow \text{هـ}(٢) = ٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times \text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \times ٢\text{س}$

$\text{ق}'(٢) = ٤ \times ٥ + ٢ \times ٤ = ٢٨$

---

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ \text{ ، } ١ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٢ \text{ ، } ٢ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = ٠ \text{ ، } \text{نها}_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س}) = ٣$

$\text{نها}_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) \text{ غ.م}$

$\text{ق}(\text{س})$ غير متصل عند $\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ق}'(٢)$ غ.م

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ١ \text{ ، } ١ < \text{س} < ٢ \\ ١ \text{ ، } ٢ < \text{س} < ٤ \\ \text{غ.م ، } \text{س} = ١ \text{ ، } ٤ \text{ ، } ٢ \end{cases}$

١٥) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ ، & \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} ، & \text{س} < ٢ \end{cases} + \text{س} + ١$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ١ ، & \text{س} \geq ٢ \\ ٣ ، & \text{س} < ٢ \end{cases} \quad \text{ق}(\text{س})$

متصل عند $\text{س} = ٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢ ، & \text{س} > ٢ \\ ٠ ، & \text{س} < ٢ \\ \text{غ.م} ، & \text{س} = ٢ \end{cases}$ $\text{ق}'(٢)$ غيرموجودة

١٦) $\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \text{س}$ عندما $\text{س} = ١$ (القاعدة السالبة)

$\text{ل} = \text{ق} + \text{هـ} = \begin{cases} \text{س}^٢ - \text{س} + ٢ ، & \text{س} \geq ١ \\ ٢ ، & \text{س} < ١ \end{cases}$

$\text{ل}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ١$

$\text{ل}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ١ ، & \text{س} > ١ \\ ٠ ، & \text{س} < ١ \end{cases} \rightarrow \text{ل}'(١)$ غيرموجودة

١٧) $\text{ق}'_{+}(٢) = ٢\text{أ}(٢) = ١٢ \rightarrow \text{أ} = ٣$

$\text{ق}'_{-}(٢) = \text{ب} = ١٢$

ولأن $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ٢ \rightarrow \text{جـ} = -١٠$

(من النهايات)

١٨) $\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\text{س} = ٢$

لأن $\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢) = ١٦$

$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ \text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \times ٢\text{س} ، & \text{س} > ٢ \\ ٩\text{س} + ١٠ ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\text{ق}'_{+}(٢) = ٤ \times ٣ + ٤ \times ٤ = ٢٨$

$\text{ق}'_{-}(٢) = ٩(٢) + ١٠ = ٢٨$

$\therefore \text{ق}'(٢) = ٢٨$

$\text{ق}(\text{س})$ قابل للاشتقاق عند $\text{س} = ٢$

السؤال الثاني:

١) $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})(\text{س}^٣ + ١)$

$\text{ل}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})(٣\text{س}^٢) + (\text{س}^٣ + ١)\text{ق}'(\text{س})$

$\text{ل}'(١) = \text{ق}(١) \times ٣ + ٢ \times \text{ق}'(١) = ٩ + ٤ = ١٣$ (د)

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}^٢ + ١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-١ \times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢ + ١)^٢}$

$\text{ق}'(١) = \dfrac{-٢}{٤} = \dfrac{-١}{٢}$ (ب)

٣) $\text{ق}(١) = ٦$ ، $\text{ق}'(١) = ٢$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{س}^٣ \text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س}) \times ٣\text{س}^٢$

$\text{هـ}'(١) = \text{ق}'(١) + \text{ق}(١) \times ٣ = ٢ + ١٨ = ٢٠$ (ب)

٤) نبسط $٢\text{س}^٢ \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}) = ١$

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{٢\text{س}^٢ - ١}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-٤\text{س}}{(٢\text{س}^٢ - ١)^٢}$

$\text{ق}'(١) = \dfrac{-٤}{١} = -٤$ (د)

٥) $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-\text{أ}\,\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^٢(\text{س})}$

$\text{ق}'(٢) = \dfrac{-\text{أ}\,\text{هـ}'(٢)}{\text{هـ}^٢(٢)} \rightarrow +١ = \dfrac{+\text{أ} \times ٥}{١٦}$

$\text{أ} = \dfrac{١٦}{٥}$ (جـ)

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + \cancel{[\text{س}]} + ١ - \cancel{[\text{س}]} + ٥$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + ٦$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ \rightarrow \text{ق}'(٢) = ١٢$ (أ)

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{|\overset{+}{\text{س} + ١}|}{\text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{\text{س} + ١}{\text{هـ}(\text{س})}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) \times ١ - (\text{س} + ١)\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^٢(\text{س})}$

$\text{ق}'(٢) = \dfrac{-١ \times ١ - ٣ \times ٣}{(-١)^٢} = -١٠$ (جـ)

٨) نعيد تعريف الصحيح $[-١,٥] = -٢$

$$\text{ل}(\text{س}) = \frac{-٢}{\text{هـ}(\text{س})}$$

$$\acute{\text{هـ}}(\text{س}) = \frac{٢ \times \acute{\text{ل}}(\text{س})}{\text{ل}^{٢}(\text{س})}$$

$$\acute{\text{هـ}}(-١) = \frac{٢ \times ٢}{٢٥} = \frac{٤}{٢٥} \qquad \text{(ب)}$$

---

٩) التعاريف $\text{ق}(\text{س}) = |\overline{\text{س}}|\,[\text{س}^{-٤}]$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س} \leftarrow \acute{\text{ق}}(\text{س}) = ٤ \qquad \text{(ب)}$$

---

١٠) ق(س) غير متصل عند س = ١

∴ $\acute{\text{ق}}(١)$ غير موجودة (ج)

---

١١) ق(س) متصل عند س = ٢

لكن $\acute{\text{ق}}_{+}(٢) = ٤ \qquad \acute{\text{ق}}_{-}(٢) = ٢$

$\acute{\text{ق}}(٢) =$ غير موجودة (ب)

---

١٢) نعيد التعريف

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١}$$

$$\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \frac{-١}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\acute{\text{ق}}\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{-١}{\frac{١}{٤}} = -٤ \qquad \text{(د)}$$

---

١٣) $\text{ق}(\text{س}) = |٣ \overset{+}{-} ٢\text{س}|$

$$\text{ق}(\text{س}) = ٣ - ٢\text{س}$$

$$\acute{\text{ق}}(\text{س}) = -٢ \qquad \text{(أ)}$$

---

١٤) $\text{ق}(\text{س}) = |\overline{\text{س}}| + [\text{س} \overset{-١}{+} ٢,٠] - \text{س}$

$$\text{ق}(\text{س}) = -\text{س} - ١ - \text{س} = -٢\text{س} - ١$$

$$\acute{\text{ق}}(\text{س}) = -٢ \qquad \text{(ج)}$$

---

١٥) غير موجودة (ب)

السؤال الثالث:

١) مثلث متساوي الاضلاع زواياه متساوية = ٦٠°

نستخدم قانون $\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{الضلع}_{١} \times \text{الضلع}_{٢} \times \text{جا}\,\theta$

(θ الزاوية المحصورة)

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س}^{٢} \times \text{جا}\,٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^{٢}$$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{س}\Big|_{\text{س}=٣} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$$

٢) $\text{م} = \pi\,\text{نق}^{٢}$ ، $\text{ل} = ٢\pi\,\text{نق} \leftarrow \text{نق} = \frac{\text{ل}}{٢\pi}$

$$\text{م} = \pi\left(\frac{\text{ل}}{٢\pi}\right)^{٢} = \frac{\text{ل}^{٢}}{٤\pi}$$

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءل}} = \frac{\cancel{٢}\,\text{ل}}{{}_{٢}\cancel{٤}\,\pi} = \frac{\cancel{٢\pi}\,\text{نق}}{\cancel{٢\pi}} = ٢$$

٣) $\text{ع} = \pi\,\text{نق}^{٢}\,\text{ع}$ ، $\text{ل} = ٢\pi\,\text{نق}$ ، $\text{ع} = ٢\,\text{نق}$

$$\text{ع} = \pi\,\text{نق}^{٢}(٢\,\text{نق}) = ٢\pi\,\text{نق}^{٣}$$

$$\text{لكن نق} = \frac{\text{ل}}{٢\pi}$$

$$\text{ع} = ٢\cancel{\pi} \times \frac{\text{ل}^{٣}}{٨\pi^{\cancel{٣}\,٢}} = \frac{\text{ل}^{٣}}{٤\pi^{٢}}$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءل}} = \frac{٣\text{ل}^{٢}}{٤\pi^{٢}} \quad \text{لكن ل} = ٢\pi\,(٢) = ٤\pi$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءل}} = \frac{٣ \times (٤\pi)^{٢}}{٤\pi^{٢}} = ١٢$$

حلول ورقة عمل (٤)

١) نبسط الاقتران ق(س) = π قا س

قَ(س) = π قا س ظا س

∴ قَ(π) = π قا π ظا π = صفر (أ)

---

٢) نبسط ق(س) = $\frac{\text{جاس جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{جاس جا}\frac{\pi}{٢}}{\text{س}}$

ق(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$

∴ قَ(س) = $\frac{\text{س جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^٢}$ (ج)

---

٣) نبسط ق(س) = $\frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = − ظا س

قَ(س) = − قا^٢ س (د)

---

٤) نلاحظ أن قا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ ، جا $\frac{\pi}{٢}$ ثوابت مشتقاتها = صفر

قَ(س) = $\frac{-١}{\text{قا}^٢\frac{\pi}{٤}}$ = − جتا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{-١}{٢}$ (ب)

---

٥) قَ(س) = ن س$^{ن-١}$

قً(س) = ن(ن − ١) س$^{ن-٢}$

قًَ(س) = ن(ن − ١)(ن − ٢) س$^{ن-٣}$

∴ ن(ن − ١)(ن − ٢) = ١٢٠

٦×٥×٤ = ١٢٠ ← ن = ٦ (أ)

---

٦) قَ(π)×هـَ(π) + هـ(π)×قً(π)

قَ(س) = جتاس ← قَ(π) = −١

قً(س) = − جاس ← قً(π) = ٠

−١×٢ + −١×٠ = −٢ (أ)

---

٧) نعيد التعريف [١,٥] = ١

هـ(س) = $\frac{١}{\text{ق(س)}}$ ← هـَ(س) = $\frac{-\text{قَ(س)}}{\text{ق}^٢\text{(س)}}$

∴ هـَ(١) = $\frac{-٣}{٢٥}$ (د)

---

٨) قَ(س) = $\begin{cases} ٢\text{أ س} + ٢\text{ب} & \text{، س} \geq ١ \\ ٣\text{س}^٢ & \text{، س} < ١ \end{cases}$

قً(س) = $\begin{cases} ٢\text{أ} & \text{، س} \geq ١ \\ ٦\text{س} & \text{، س} < ١ \end{cases}$

قً$_+$(١) = قً$_-$(١) ← ٢أ = ٦ ← $\boxed{\text{أ} = ٣}$

كذلك قَ$_+$(١) = قَ$_-$(١) ← ٦ + ٢ب = ٣

٢ب = −٣ ← $\boxed{\text{ب} = \frac{-٣}{٢}}$

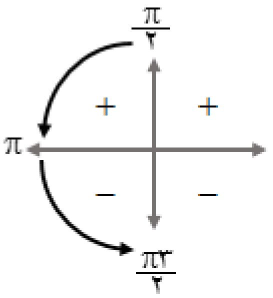
وأن ق(س) متصل ∴ أ + ٢ب + جـ = ١

٣ − ٣ + جـ = ١ ← $\boxed{\text{جـ} = ١}$

---

٩) ق(س) = $\begin{cases} \text{س جا س} & \text{، } \frac{\pi}{٢} \leq \text{س} \leq \pi \\ -\text{س جا س} & \text{، } \pi < \text{س} \leq \frac{٣\pi}{٢} \end{cases}$

متصل عند س = π



قَ(س) = $\begin{cases} \text{س جتاس} + \text{جا س} & \text{، } \frac{\pi}{٢} < \text{س} < \pi \\ -\text{س جتاس} - \text{جا س} & \text{، } \pi < \text{س} < \frac{٣\pi}{٢} \\ \text{غ.م} & \text{، س} = \frac{\pi}{٢} \text{، } \frac{٣\pi}{٢} \text{، } \pi \end{cases}$

---

١٠) ص = جاس + جتا س

صَ = جتا س − جا س

∴ (صَ)^٢ = جتا^٢ س − ٢جا س جتا س + جا^٢ س = ١ − جا ٢س

(ص)^٢ = جا^٢ س + ٢جا س جتا س + جتا^٢ س = ١ + جا ٢س

(صَ)^٢ + ص^٢ = ١ − $\cancel{\text{جا٢س}}$ + ١ + $\cancel{\text{جا٢س}}$ = ٢

---

١١) ق(س) = ٢ جاس + ٣ جتا س

قَ(س) = ٢ جتاس − ٣ جا س

قً(س) = −٢ جاس − ٣ جتا س

ق(س) + قً(س)

= ٢ $\cancel{\text{جاس}}$ + ٣ $\cancel{\text{جتاس}}$ − ٢ $\cancel{\text{جاس}}$ − ٣ $\cancel{\text{جتاس}}$ = ٠

حلول ورقة عمل (٥)

١) أ) قَ(هـ(−١)) × هـَ(−١)

= قَ(٢) × −٣ = ٤ × −٣ = −١٢

ب) لَ(س) = ٢(٢ق(س)) × ٢ قَ(س)

∴ لَ(٢) = ٨ ق(٢) × قَ(٢) = ٨ × ٦ × ٤ = ١٩٢

جـ) هـَ(ق(−١)) × قَ(−١)

= هـَ(٢) × ٣ = −٥ × ٣ = −١٥

د) مَ(س) = ٢هـ(س) × هـَ(س)

مَ(س) = ٢هـ(٢) هـَ(٢) = ٢ × ١ × −٥ = −١٠

---

٢) لَ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

لَ(س) = قَ(س^{٢} − ١) × ٢س

= $\sqrt{٣(س^{٢} − ١) + ٤}$ × ٢س

---

٣) ق(١) = $\sqrt[٣]{(٨)^{٢}}$ = ٤

قَ(س) = $\frac{٢}{٣}$(س^{٢} + ٥س + ٢)$^{\frac{-١}{٣}}$ × (٢س + ٥)

قَ(١) = $\frac{٢}{٣}$(٨)$^{\frac{-١}{٣}}$ × ٧ = $\frac{٧}{٣}$

∴ لَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

لَ(١) = ٤ × −١ + ٢ × $\frac{٧}{٣}$ = −٤ + $\frac{١٤}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$

---

٤) ق(٠) = $\sqrt{٩}$ = ٣

قَ(س) = $\frac{جتاس − جاس}{٢\sqrt{جاس + جتاس + ٨}}$

قَ(٠) = $\frac{١}{٢ × ٣}$ = $\frac{١}{٦}$

لَ(٠) = ق(٠) × هـَ(٠) + هـ(٠) × قَ(٠)

لَ(٠) = ٣ × ٢ + ٤ × $\frac{١}{٦}$ = ٦ + $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢٠}{٣}$

---

٥) نبسط ق(س) = $\frac{\pi}{جتا٢س}$ = π قا ٢س

قَ(س) = π قا٢س ظا٢س × ٢

= ٢π قا٢س ظا٢س

---

٦) قَ(س) = أ قا^{٢}س ، هـَ(س) = ٢س

(هـ ∘ ق)َ($\frac{\pi}{٤}$) = هـَ(ق($\frac{\pi}{٤}$)) × قَ($\frac{\pi}{٤}$)

٤ = هـَ(أ) × ٢أ ← ٤ = ٢أ^{٢}

أ^{٢} = ١ ← أ = ±١

---

٧) ق(س) = (جتا هـ(س))^{ن}

نفرض م = هـ(س) ، ص = (جتا م)^{ن}

نفرض ع = جتا م ، ∴ ص = ع^{ن} ، ع = جتا م

$\frac{دص}{دم}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دم}$ = ن ع$^{ن−١}$ × − جا م

لكن ص = (جتا م)^{ن} ، م = هـ(س)

$\frac{دص}{دم}$ = ن ع$^{ن−١}$ × − جا م

= ن (جتا م)$^{ن−١}$ × − جا م

بإرجاع ع ، $\frac{دم}{دس}$ = هـ(س)

∴ $\frac{دص}{دم}$ = $\frac{دص}{دم}$ × $\frac{دم}{دن}$

= ن (جتا م)$^{ن−١}$ × − جا م × هـَ(س)

= ن (جتا هـ(س))$^{ن−١}$ × − جا(هـ(س)) × هـَ(س)

---

٨) نجد قيمة س

س^{٣} + ٧ = −١ ← س^{٣} = −٨ ← س = −٢

نشتق قَ(س^{٣} + ٧) × ٣س^{٢} = ٣س^{٢} + ٢س

قَ(−١) × ١٢ = ١٢ − ٤

قَ(−١) = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

---

٩) نجد قيمة س ← ٢س + ١ = ٥ ← س = ٢

نجعل ق موضع قانون

ق(٢س + ١) = $\frac{س^{٣} + ٢}{س}$ = س^{٢} + $\frac{٢}{س}$

قَ(٢س + ١) × ٢ = ٢س − $\frac{٢}{س^{٢}}$

قَ(٥) × ٢ = ٤ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٧}{٢}$ ← قَ(٥) = $\frac{٧}{٤}$

١٠) $ق'(س) = \sqrt{س^٢ + س + ٧} \times \frac{١}{٣}(س^٣ + ٧)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٣س^٢ + \sqrt[٣]{س^٣ + ٧} \times \frac{٢س + ١}{٢\sqrt{س^٢ + س + ٧}}$

$ق'(١) = \cancel{٣} \times \frac{١}{\cancel{٣}}(٨)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٣ + \sqrt[٣]{٨} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٩}} = \frac{٣}{٤} + ٢ \times \frac{\cancel{٣}}{٢ \times \cancel{٣}} = \frac{٧}{٤}$

---

١١) $\frac{دص}{دع} = ٢(٢ع^٢ - ١) \times (٤ع)$

$\frac{دع}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \cancel{٢}(٢ع^٢ - ١)(٤ع) \times \frac{١}{\cancel{٢}\sqrt{س}}$ ← نبدل $ع = \sqrt{س}$

$= (٢س - ١)(٤\cancel{\sqrt{س}}) \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{س}}} = ٤(٢س - ١)$

---

١٢) $هـ'(س) = ٣ق^٢(س^٢) \times ق'(س^٢) \times ٢س + ٦س$

$هـ'(١) = ٣ق^٢(١) \times ق'(١) \times ٢ + ٦ = ١٠٨ + ٦ = ١١٤$

---

١٣) $ق'(س) = -٢ قتا^٢ س$

$هـ'(س) = أس \times ٣(س^٢ - ٣)^٢ \times ٢س + (س^٢ - ٣)^٣ \times أ \quad \therefore هـ'(٢) = ١٢٥أ$

$(هـ \circ ق)'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = هـ'\left(ق\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right) \times ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) \leftarrow -٥٠ = هـ'(٢) \times -٤$

$هـ'(٢) = \frac{٥٠}{٤} = \frac{٢٥}{٢} \leftarrow ١٢٥أ = \frac{٢٥}{٢} \leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

---

١٤) $ق'(س) = ٢ جا ٣س جتا ٣س \times ٣$

$ق'\left(\frac{\pi}{١٢}\right) = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times ٣ = ٣$ (أ)

---

١٥) المطلوب $(ق^٢)'(١) = ٢ق(١) \times ق'(١)$

لكن $ق(س) = |\overset{+}{س} - ٣| = ٣ - س$

$ق'(س) = -١ \leftarrow (ق^٢)'(١) = ٢ \times ٢ \times -١ = -٤$ (ب)

---

١٦) $(هـ \circ ق)'(٢) = ق'(ق(٢)) \times هـ'(٢) = ق'(-١) \times ٤$

لكن $ق(س) = س^٢ \times (-س)^٥ = -س^٧$

$ق'(س) = -٧س^٦ \leftarrow \therefore (ق \circ هـ)'(٢) = -٧ \times ٤ = -٢٨$ (أ)

---

١٧) $(م \circ ل)(س) = س$ نشتق الطرفين

$(م \circ ل)'(س) = ١$

$م'(ل(س)) \times ل'(س) = ١$

$\frac{١}{ل(س)} \times ل'(س) = ١ \leftarrow ل'(س) = ل(س)$ (د)

١٨) المشتقة الأولى (ق ∘ هـ)َ(س) = قَ(هـ(س)) × هَـ(س)

المشتقة الثانية (ق ∘ هـ)ً(س) = قَ(هـ(س)) × هًـ(س) + هَـ(س) × قً(هـ(س)) × هَـ(س)

لكن قَ(−١) = ٣ ← قً(−١) = −٦

(ق ∘ هـ)ً(١) = ٩ + −٢٤ = −١٥

---

١٩) قَ(هـ(٣)) × هَـ(٣) = ١٠ لكن قَ(هـ(٣)) = ٤

∴ ٤هَـ(٣) = ١٠ ← هَـ(٣) = $\frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$ المطلوب ٢هَـ(٣) = ٥

---

٢٠) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٣\text{ن}^{٢} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = ٣\text{ن}^{٢} \times ٢\text{ن} = ٦\text{ن}^{٣} \Big|_{\text{ن}=٢} = ٦ \times ٨ = ٤٨$ (د)

---

٢١) نشتق الطرفين

$\text{قَ(هـ(س))} \times \text{هَـ(س)} = \frac{\text{أ}}{٢\sqrt{\text{س}+٣}} + \frac{-\text{أ}}{\text{س}^{٢}} \Big|_{\text{س}=١}$

قَ(هـ(١)) × هَـ(١) = $\frac{\text{أ}}{٤}$ − أ

∴ قَ(٢) × ٢ = $\frac{-٣}{٤}$أ ← ٤ = $\frac{-٣}{٤}$أ ← أ = $\frac{-١٦}{٣}$ (ب)

---

٢٢) هَـ(س) = ٢ جا(π ق(س^{٣})) × جتا π ق(س^{٣}) × π قَ(س^{٣}) × ٣س^{٢}

∴ هَـ(١) = ٢ جا$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ جتا$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ × $\cancel{\pi}$ × $\frac{١}{٢\cancel{\pi}}$ × ٣

$= ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$ (جـ)

---

٢٣) ق(س) متصل عند س = ١ ← $\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ - \text{س}^{٢} + ١٤\text{س} & \text{، س} < ١ \\ \text{س هـ}^{٢}\text{(س)} + ١٠ & \text{، س} \geq ١ \end{cases}$

$\text{قَ(س)} = \begin{cases} -٢\text{س} + ١٤ & \text{، س} < ١ \\ \text{س} \times ٢\text{هـ(س)} \times \text{هَـ(س)} + \text{هـ}^{٢}\text{(س)} & \text{، س} > ١ \end{cases}$

قَ$_{+}$(١) = ٢هـ(١) × هَـ(١) + هـ^{٢}(١) = ١٢

لأن هـ قابل للاشتقاق عند س = ١

هَـ$_{+}$(١) = هَـ$_{-}$(١) = هَـ(١) = ٢

قَ$_{-}$(١) = −٢(١) + ١٤ = ١٢

∴ قَ(١) = ١٢

٢٤) $\frac{ىم}{ىس} = \frac{س(٤س) - (٢س^{٢}+١)(١)}{س^{٢}}$

$= \frac{٢س^{٢}-١}{س^{٢}}$

$\frac{ىص}{ىس} = \frac{ىص}{ىم} \times \frac{ىم}{ىس} = ٥ \times \frac{٢س^{٢}-١}{س^{٢}} \Big|_{س=١} = ٥ \times ١ = ٥$

---

٢٥) إما نشتق مباشرة أو الأفضل نجعل ق(س) موضع قانون

$ق(س) = (٣س^{٢} - ١٠س - ١)^{\frac{١}{٣}}$

$ق'(س) = \frac{١}{٣}(٣س^{٢} - ١٠س - ١)^{\frac{-٢}{٣}} \times (٦س - ١٠)$

$ق'(١) = \frac{١}{٣} \times (-٨)^{\frac{-٢}{٣}} \times -٤ = \frac{-١}{٣}$

---

٢٦) $\frac{ىص}{ىس} = \frac{ىص}{ىع} \times \frac{ىع}{ىس}$

$٦ = (٦ع^{٢} + ٦)\left(\frac{ىع}{ىس}\right)$ عندما $ع = ١$

$٦ = ١٢ \times \frac{ىع}{ىس}$

$\frac{ىع}{ىس} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

حلول ورقة عمل (٦)

١) س = ظا ص نشتق

أ) ١ = قا^{٢} ص صَ ← صَ = جتا^{٢} ص نشتق

صً = ٢ جتا ص × − جا ص × صَ

صً = −٢ جتا^{٢} ص جا ص

لكن $\frac{١}{س}$ صً = −٢ جتا^{٣} ص جا ص × $\frac{١}{س}$

$\frac{١}{س}$ صً = −٢ جتا^{٣} ص جا ص × $\frac{١}{ظا ص}$

$\frac{١}{س}$ صً = −٢ جتا^{٣} ص ~~جا ص~~ × $\frac{جتا ص}{جا ص}$

$\frac{١}{س}$ صً + ٢ جتا^{٤} ص = ٠ (ب)

ب) صً = ٢ جتا ص × − جا ص × صَ متطابقة

صً = − جا ٢ص صَ

$\frac{صً}{صَ}$ = − جا ٢ص

لكن صَ = جتا^{٢} ص

∴ صً قا^{٢} ص = − جا ٢ص

صً (١ + ظا^{٢} ص) = − جا ٢ص (ب)

٢) ٢س + ٢ص صَ = ٠ (÷ ٢)

س + ص صَ = ٠ ......*

ص صً + (صَ)^{٢} + ١ = ٠

لكن من * صَ = $\frac{−س}{ص}$

ص صً + $\frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$ + ١ = ٠ × ص^{٢}

ص^{٣} صً + س^{٢} + ص^{٢} = ٠

من بداية السؤال = ١

ص^{٣} صً + ١ = ٠

٣) نشتق ٣(ص + ١)^{٢} صَ = ٢(س − ٢)

$\frac{٣}{٢}$ صَ = $\frac{س − ٢}{(ص + ١)^{٢}}$ نربع

($\frac{٣}{٢}$ صَ)^{٢} = $\frac{(س − ٢)^{٢}}{(ص + ١)^{٤}}$ نبدل من السؤال

($\frac{٣}{٢}$ صَ)^{٢} = $\frac{(ص + ١)^{٣}}{(ص + ١)^{٤}}$ = $\frac{١}{ص + ١}$ (أ)

٤) ١ = −٢ قتا^{٢} ٢ص صَ

∴ صَ = $\frac{−١}{٢}$ جا^{٢} ٢ص

صً = − جا ٢ص جتا ٢ص × ٢ صَ

متطابقة

صً = − صَ جا ٤ص

٥) ص = س ظا س

صَ = س قا^{٢} س + ظا س

صً = س × ٢ قا س قا س ظا س + قا^{٢} س + قا^{٢} س

صً = ٢س قا^{٢} س ظا س + ٢ قا^{٢} س

ص

صً − ٢ص قا^{٢} س = ٢ قا^{٢} س

٦) نشتق مرتين

س صَ + ص − ٣ صَ = ٧ نشتق مرة أخرى

س صً + صَ + صَ − ٣ صً = ٠

س صً + ٢ صَ − ٣ صً = ٠

صً (س − ٣) + ٢ صَ = ٠

٧) صَ = −أ ن جا (ن س) − ب ن جا (ن س)

صً = −أ ن^{٢} جتا (ن س) − ب ن^{٢} جتا (ن س)

صً = −ن^{٢} (أ جتا (ن س) + ب جتا (ن س)) مشترك

صً = −ن^{٢} ص ← صً + ن^{٢} ص = ٠

٨)
$$\text{صَ} = -٦\ \text{جا}\ ٣\text{س} - ٣\ \text{جتا}\ ٣\text{س}$$
$$\text{صً} = -١٨\ \text{جتا}\ ٣\text{س} + ٩\ \text{جا}\ ٣\text{س}$$
$$\text{صً} = -٩(٢\ \text{جتا}\ ٣\text{س} - \text{جا}\ ٣\text{س})$$
$$\text{صً} = -٩\text{ص} \leftarrow \text{صً} + ٩\text{ص} = ٠ \qquad (\text{ب})$$

---

٩)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}(\text{س ص})\left(\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}\right)$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{س قا}^{٢}(\text{س ص})\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص قا}^{٢}(\text{س ص})$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\left(١ - \text{س قا}^{٢}(\text{س ص})\right) = \text{ص قا}^{٢}(\text{س ص})$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص قا}^{٢}(\text{س ص})}{١ - \text{س قا}^{٢}(\text{س ص})}$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}\left(١ + \text{ظا}^{٢}(\text{س ص})\right)}{١ - \text{س}\left(١ + \text{ظا}^{٢}(\text{س ص})\right)}$$
$$= \frac{\text{ص}(١ + \text{ص}^{٢})}{١ - \text{س}(١ + \text{ص}^{٢})} = \frac{\text{ص} + \text{ص}^{٣}}{١ - \text{س}(١ + \text{ص}^{٢})}$$

---

١٠)
$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءهـ}} = ٣\text{أ جتا}^{٢}\text{هـ} \times -\text{جا هـ}$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}} = ٣\text{أ جا}^{٢}\text{هـ جتا هـ}$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءهـ}} \times \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}}$$
$$= ٣\text{أ جا}^{٢}\text{هـ جتا هـ} \times \frac{١}{-٣\text{أ جتا}^{٢}\text{هـ جا هـ}}$$
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{ظا هـ} \text{ ، } \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -\text{قا}^{٢}\text{هـ}\ \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}}$$
$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{-١}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} \times \frac{١}{-٣\text{أ جتا}^{٢}\text{هـ جا هـ}}$$
$$= \frac{١}{٣\text{أ جتا}^{٤}\text{هـ جا هـ}} \qquad (\text{جـ})$$

---

١١)
$$\left(-(\text{ص} - \text{س})\right)^{٤} + (\text{ص} - \text{س})^{٤} = ٣٢ \text{ نحذف السالب}$$
$$٢(\text{ص} - \text{س})^{٤} = ٣٢ \leftarrow (\text{ص} - \text{س})^{٤} = ١٦$$
$$٤(\text{ص} - \text{س})^{٣}(\text{صَ} - ١) = ٠ \leftarrow \text{صَ} = ١ \qquad (\text{أ})$$

---

١٢)
$$\text{س صَ} + \text{ص} = ٤(\text{س} + \text{ص})^{٣}(١ + \text{صَ})$$
$$\text{س صَ} - \text{صَ} \times ٤(\text{س} + \text{ص})^{٣} = ٤(\text{س} + \text{ص})^{٣} - \text{ص}$$
$$\text{صَ}\left(\text{س} - ٤(\text{س} + \text{ص})^{٣}\right) = ٤(\text{س} + \text{ص})^{٣} - \text{ص}$$
$$\text{صَ} = \frac{٤(\text{س} + \text{ص})^{٣} - \text{ص}}{\text{س} - ٤(\text{س} + \text{ص})^{٣}} \quad \text{نضرب بـ} \quad \frac{(\text{س} + \text{ص})}{(\text{س} + \text{ص})}$$
$$\text{صَ} = \frac{٤(\text{س} + \text{ص})^{٤} - \text{ص}(\text{س} + \text{ص})}{\text{س}(\text{س} + \text{ص}) - ٤(\text{س} + \text{ص})^{٤}} \qquad (\text{جـ})$$
$$= \frac{٤\text{س ص} - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ٤\text{س ص}} = \frac{\text{ص}(٣\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - ٣\text{س ص})}$$

---

١٣)
$$\text{صَ} = \frac{(١ + \text{جتا س}) \times \text{جتا س} - \text{جا س} \times - \text{جا س}}{(١ + \text{جتا س})^{٢}}$$
$$\text{صَ} = \frac{\text{جتا س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س}}{(١ + \text{جتا س})^{٢}} = \frac{١ + \text{جتا س}}{(١ + \text{جتا س})^{٢}}$$
$$\text{صَ} = \frac{١}{١ + \text{جتا س}}$$
$$\text{صً} = \frac{-١ \times - \text{جا س}}{(١ + \text{جتا س})^{٢}} = \frac{\text{جا س}}{(١ + \text{جتا س})^{٢}}$$

---

١٤)
$$\text{صَ} = ٢\ \text{ظتا س} \times - \text{قتا}^{٢}\text{س} = -٢\ \text{ظتا س قتا}^{٢}\text{س}$$
$$\text{صً} = -٢\ \text{ظتا س} \times ٢\ \text{قتا س} \times - \text{قتا س ظتا س} + \text{قتا}^{٢}\text{س} \times ٢\ \text{قتا}^{٢}\text{س}$$
$$\text{صً} = ٢\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\left(٢\ \text{ظتا}^{٢}\text{س} + \underset{\downarrow}{\text{قتا}^{٢}\text{س}}\right)$$
$$\text{صً} = ٢(١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س})(٢\ \text{ظتا}^{٢}\text{س} + ١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س})$$
$$= ٢(١ + \text{ص})(٣\text{ص} + ١) \qquad (\text{جـ})$$

---

١٥) نربع $\leftarrow \text{ص}^{٢} = \text{س} - \text{ص}$ نشتق

$$٢\text{ص صَ} = ١ - \text{صَ} \quad \text{نشتق} \quad ٢\text{ص صً} + ٢(\text{صَ})^{٢} = -\text{صً}$$
$$٢\text{ص صً} + \text{صً} = -٢(\text{صَ})^{٢}$$
$$\text{صً} = \frac{-٢(\text{صَ})^{٢}}{٢\text{ص} + ١} \quad \text{لكن} \quad \text{صَ} = \frac{١}{٢\text{ص} + ١}$$
$$\text{صً} = -٢ \times \frac{\frac{١}{(٢\text{ص} + ١)^{٢}}}{٢\text{ص} + ١} = \frac{-٢}{(٢\text{ص} + ١)^{٣}} \qquad (\text{ب})$$

حلول التمارين الإضافية (صفحة ٦١ – ٦٢)

١) بالتعويض المباشر

$= \frac{\text{ق}(٢) - ٢}{٠} = \frac{٢}{٠}$ غير موجودة

---

٢) تعويض مباشر

$= \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(٣)}{١ - ٣} = \frac{١ - ٢٧}{-٢} = ١٣$

---

٣) المعطى $\text{ق}'(١) = ٧ \quad \leftarrow \quad \text{ق}'(س) = ٢\text{أ}س + ٣$

$\text{ق}'(١) = ٢\text{أ} + ٣ = ٧ \leftarrow ٢\text{أ} = ٤ \leftarrow \text{أ} = ٢$

---

٤) تعويض مباشر

$= \frac{٥ - ٣}{٣ - ١} = \frac{٢}{٢} = ١$

---

٥) $\text{ق}'(٢) = \text{ظا}\, ٤٥° = ١ \quad \leftarrow \quad \text{ق}(٢) = ٣$

المطلوب $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(٢)}{-٣(س - ٢)} = \frac{-١}{٣}\text{ق}'(٢)$

$= \frac{-١}{٣} \times ١ = \frac{-١}{٣}$

تدريب:

المعطى $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{م}(٢ + ٣\text{هـ}) - \text{م}(٢)}{\text{هـ}} \times \frac{١}{\text{هـ} + ١} = ١٢$

$٣\text{م}'(٢) \times \frac{١}{١} = ١٢ \quad \leftarrow \quad \text{م}'(٢) = ٤$

لكن $\text{ق}'(س) = ٣\text{م}'(س) \quad \leftarrow \quad \text{ق}'(٢) = ٣\text{م}'(٢)$

$\text{ق}'(٢) = ٣ \times ٤ = ١٢$