الوحدة الرابعة

التكـامـل

أولاً: التكامل غير المحدود

عناصر خطة التكامل

(أ) (ب) (جـ)

٦ قواعد التكامل ٣ تجهيزات ٢ تجهيزات تفوق

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة (1): $\int$ العدد . $س^{رقم}$ $دس \leftarrow$ العدد $س + جـ$

قاعدة (2): $\int س^{ن} دس \leftarrow \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + جـ$

قاعدة (3): $\int أ س^{ن} دس \leftarrow أ \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + جـ$

ملاحظة : أهم قاعدة لا تنسى

$\int س^{ن} دس$

- موجب ← نزيد درجة $+ جـ$
- سالب ← انزل درجة $+ جـ$
- كسر $\frac{أ}{ب} \leftarrow \frac{ب}{أ+ب} س^{\frac{أ+ب}{ب}} + جـ$

أمثلة : جد التكاملات الآتية:

1) $\int س^{٥} + س^{٣} + ٩س + ١٨ \, دس$

2) $\int ٣س^{\frac{٥}{٢}} + ٩س^{\frac{-٧}{٢}} + ٩س^{٥} + ٨س^{-٢} + ١٨ \, دس$

قاعدة (4): قوس بداخله معادلة درجة أولى

$\int (أ س + ب)^{ن} \, دس \leftarrow \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{(ن+1) \times أ}$

قاعدة (5): تكامل الاقترانات الدائرية

$\int جا س \, دس = - جتا س + جـ$

$\int جتا س \, دس = جا س + جـ$

$\int قا^{٢} س \, دس = ظا س + جـ$

قاعدة (6): تكامل الاقترانات المثلثية في الزاوية خطية $(أ س + ب)$ First class

$\int جا(أ س + ب) \, دس \leftarrow \frac{- جتا(أ س + ب)}{أ} + جـ$

$\int جتا(أ س) \, دس \leftarrow \frac{جا(أ س)}{أ} + جـ$

$\int قا^{٢}(أ س + ب) \, دس \leftarrow ظا(أ س + ب) + جـ$

$\int ٤ قا^{٢} س + ٤ جا س + ٣ جتا س \, دس$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

$\int$ ٢ جا س وس

$\int$ جتا ٢س + جا ٧س وس

$\int$ (٣س − ٣)^{٢} وس

$\int$ جتا(٩ − ٨س) وس =

$\int$ (٢س − ٣)$^{-٦}$ وس

أ) تجهيزات لازمة قبل التكامل

1) الجذر $\int$ $\sqrt[ن]{\text{س}^{م}}$ ← نجهز ← $\int$ س$^{\frac{م}{ن}}$ ← الداخل / الخارج

$\int$ $\sqrt[٨]{\text{س}}$ وس

$\int$ $\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}}$ وس

$\int$ $\sqrt[٥]{(٥ - ٣\text{س})^{٣}}$ وس

AWA2EL LEARN 2 BE
تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

2) الضرب نجهز

$\int أ\,س^{ن} \times ب\,س^{م}\,$ دس $\leftarrow \int أ \times ب\,س^{م+ن}\,$ دس

$\int (٥س+٢)(س-١)\,$ دس

$\int س^{٢}(٢س^{٢}+٩س)\,$ دس

3) قسمة

أ) $\int \frac{\text{عدد}}{س^{ن}}\,$ دس $\leftarrow$ نجهز $\leftarrow \int$ **عدد** $س^{-ن}\,$ دس

ب) $\int \frac{أ+ب-جـ}{س^{ن}}\,$ دس $\leftarrow$ **نوزع**

ج) $\int \frac{أ+ب-جـ}{س \mp أ}\,$ دس $\leftarrow$ **نحلل**

$\int \frac{١}{س^{٥}}\,$ دس

$\int \frac{س^{٦}-٥}{س^{٢}}\,$ دس

$\int \frac{س^{٢}-٢٥}{س-٥}\,$ دس

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

$$\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, د س$$

$$\int \frac{س^{٢} - ٥س - ٢٤}{٢س - ١٦} \, د س$$

$$\int ٣س^{٢} - \frac{٢}{س^{٣}} + ٤ \sqrt[٣]{س^{٢}} \, د س$$

ب) تجهيز تفوق

1) ظا س ← نجهز ← **نضع محلها** $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

2) **عند وجود** قا س **أو** جتا س **في المقام**

$$\int \frac{أ}{\text{جتا}^{٢} س} + \frac{ب}{\text{قا س}} \, د س \leftarrow \text{هنا نجهز} \int أ \, \text{قا}^{٢} س + ب \, \text{جتا س} \, د س$$

$$\int \underset{\downarrow}{\text{ظا س}} \, \text{جتا س} \, د س$$

$$\int \frac{٦}{\text{جتا}^{٢} س} + \frac{٨}{\text{قا س}} \, د س$$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

تدريب (2): ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1) $\int$ ـ س يساوي:

أ) صفر ب) $س^{٢}$ ج) $س + جـ$ د) $١ + جـ$

2) $\int$ -٢ جا س ـ س يساوي:

أ) ٢ جتا $س + جـ$ ب) ٢ جتا $٢س + جـ$ ج) -٢ جا $س + جـ$ د) $١ + جـ$

3) $\int$ م ـ س حيث م عدد ثابت:

أ) $م + جـ$ ب) $م س + جـ$ ج) صفر د) $\frac{م^{٢}}{٢} + جـ$

4) $\int$ $٦ قا^{٢} ٣س$ ـ س يساوي:

أ) ٦ ظا $٣س + جـ$ ب) ٢ ظا $٣س + جـ$ ج) ١٨ ظا $٣س + جـ$ د) صفر

5) $\int$ صفر ـ س يساوي:

أ) صفر ب) $س + جـ$ ج) $\frac{س^{٢}}{٢} + جـ$ د) $جـ$

ثانياً: التكامل المحدود

أ) إيجاد قيمة (ناتج التكامل المحدود)

القاعدة العامة: جد $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ـ س

١) نعمل تكامل للمقدار $\Big[\ \Big]_{أ}^{ب}$

٢) أحلى قوسين بينهم $\boxed{-}$

$$\Big[\text{نعوض بالرقم اللي فوق}\Big] - \Big[\text{نعوض بالرقم اللي تحت}\Big]$$

أمثلة:

1) $\int_{-٢}^{٣}$ $٣س^{٢}$ ـ س

2) $\int_{١}^{٣}$ $\frac{١}{س^{٣}}$ ـ س

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

3) $\int_{-1}^{3} (2س + 7)\ د س$

4) $\int_{0}^{2} (1 - 4س)\ د س$

ب) إيجاد مجاهيل التكامل المحدود

مخطط الخطوات

$\int_{أ}^{ب} \square\ د س$ = عدد جد الثابت م

أ) نعمل تكامل محدود للمقدار

سينات [ ]$_{أ}^{ب}$ ( ) نلغي الفتحة

[ ]$_{أ}^{ب}$ = ( ) − ( )

ب) ونعوض ونقوم بإيجاد المجهول بس نخلص جهة اليمن = العدد

ج) ويصبح السؤال حل معادلة إيجاد مجاهيل (عادي)

أمثلة:

1) إذا كان $\int_{-1}^{أ+5} هـ(س)\ د س$ ، س = ٠ ، فما قيم (أ)

2) إذا كان $\int_{2}^{أ} 3س^2\ د س = -35$ ، فما قيمة (أ)

AWA2EL LEARN 2 BE
تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

3) إذا كان $\int_{1}^{جـ} (٢س + ٣)\,دس = ٠$ ، فما قيم (جـ)

الاشتقاق في وجود التكامل

إذا طلب في الامتحان في مادة الفصل الثاني اشتقاق ← يعني طلب

جد $ق'(س)$ / أو $\frac{ص}{س}$ / أو $ق'(٢)$

وهذا السؤال غالباً سيبدأ به أسئلة وحدة التكامل في الورقة الإمتحانية

هنا المخطط التالي يوضح ماذا نفعل؟ جد $ق'(س)$

هنا لدينا حالتين وجود

1) وجود التكامل غير المحدود

هنا نثبت إشارة الـ = ونقسم السؤال إلى جهتين

جهة = جهة

$\int$ ☐ دس = ☐

↓ ↓

نلغي إشارة التكامل مع دس ونسخ الموجود بينهم = جهة بدون تكامل = نشتقها على القواعد

2) وجود التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب}$ ☐ دس

$ق'(س)$ = صفر

مشتقة التكامل المحدود دائماً ← صفر

أمثلة:

1) إذا كان $ق(س) = \int \frac{٣}{س^{٢} + ٧س + ١}$ دس ، جد $ق'(١)$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل www.awa2el.net

2) إذا كان $\int$ عَ(س) دس = ٦س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦س + ٥

جد عَ(١)

3) إذا كان $\int$ فَ(س) دس = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥

جد فـ(١) ، فَ(١)

4) إذا كان $\int$ فَ(س) دس = س^{٣} + ٥س دس ، جد فَ(٢)

ج) صيغ الأسئلة التي تبدو صعبة تقوم على موضوعين ← معلومتين:

١) $\int_{أ}^{ب}$ فَ(س) دس = [فـ(س)]$_{أ}^{ب}$

التكامل بيلغي الفتحة

٢) أي فترة موجودة في السؤال الفترة [أ ، ب] هي حدود التكامل $\int_{أ}^{ب}$ □ دس

أمثلة:

2) إذا كانت فَ(س) هي مشتقة الاقتران فـ المعرف على [٢ ، ٩] وكان فـ(٢) = ١١ ، فـ(٩) = ٢٥ احسب

$\int_{٢}^{٩}$ فَ(س) دس

تم تحميل الملف من موقع الأوائل www.awa2el.net

3) إذا كانت هَ(س) = ٦س هي مشتقة (هـ) المعرف على [−٢ ، ٣] فما قيمة هـ(٣) − هـ(−٢)

ص = $\int_{١}^{٣}$ $\frac{س - ١}{س + ٢}$ دس + $\int_{١}^{٣}$ $\frac{٥س}{س^{٢} + ٩}$ دس + $\int_{٢}^{٣}$ هـ(س) دس أوجد $\frac{د ص}{د س}$ $]_{س=٢}$ علماً بأن هـ(٢) = ٩ ، هَ(٢) = ٣

للتكامل المحدود ٣ خصائص رئيسية

١	٢	٣
= تساوي الحدود ↓ الناتج صفر	قلب الحدود ↓ نعكس إشارة الناتج	+ جمع تكاملين محدودين ↓ خاصية الإضافة

مع الانتباه للخواص الخطية

أ) خاصية التوزيع ← الخاصية الخبيثة $\int_{أ}^{ب}$ (هـ(س) ∓ مقدار) دس

لازم نوزع التكامل يعني نعمل تكامل للمقدار الموجود بجانب هـ(س)

$\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ∓ مقدار دس $\int_{أ}^{ب}$ (هذا نعمله تكامل محدود)

ب) $\int_{أ}^{ب}$ ل هـ(س) دس ← ل $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

عدد مضروب في اقتران — العدد بينزل زي ما هو ما بنعمله تكامل

أمثلة:

1) $\int_{٢}^{٢}$ س^٥ + ٩س دس =

2) إذا كان $\int_{٧}^{٤}$ هـ(س) دس = ٢ ، فإن $\int_{٤}^{٧}$ هـ(س) دس =

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

1) إذا كان $\int_{٣}^{٥} ٢ه(س)\ د س = ١٢$ ، فإن $\int_{٥}^{٣} ه(س)\ د س =$

2) إذا كان $\int_{٧}^{٤} ٢ه(س)\ د س = -٨$ ، فإن $\int_{٤}^{٧} ٣ه(س) - ٢س + ١\ د س =$

3) إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٢ه(س) - ٣\ د س = ٩$ ، جد $\int_{-١}^{٢} ه(س) + ٥س + ٧\ د س$

4) إذا كان $\int_{-١}^{٣} ه(س)\ د س = ٦$ ، $\int_{٣}^{-١} \frac{ع(س)}{٢}\ د س = -٥$ ، جد ما يلي:

أ) $\int_{-١}^{٣} ه(س) - ع(س)\ د س$

ب) $\int_{-١}^{٣} ٦س^{٢} - ٣ع(س) + ٢\ د س$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

5) إذا كان $\int_{7}^{1} \text{ق}(س)\ \text{د}س = ٥$ ، $\int_{7}^{٤} \text{ق}(س)\ \text{د}س = ٩$ جد $\int_{1}^{٤} \text{ق}(س)\ \text{د}س$

6) إذا كان $\int_{٣}^{٢} ٢\text{ق}(س) - ٢\ \text{د}س = ٨$ ، $\int_{٤}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{د}س = -١٢$ ، جد ما يلي:

أ) $\int_{٣}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{د}س$

ب) $\int_{٤}^{٣} \frac{\text{ق}(س)}{٢} + ٣س^{٢}\ \text{د}س$

لتحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

7) إذا كان $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(س) - ٢س\ \text{د}س = ٨$ ، $\int_{٣}^{٢} \frac{٤\text{ق}(س)}{٣}\ \text{د}س = ٢$، جد $\int_{١}^{٣} ٥\text{ق}(س) + ٣س^{٢}\ \text{د}س$

إذا كان $\text{ق}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = ١٩$ ، جد $\int_{١}^{٢} ٢\text{قَ}(س) + ٣س^{٢} - ٧\ \text{د}س$

قاعدة الاقتران

١) $\text{ه}(س) = \int \text{قَ}(س)\ \text{د}س$

٢) تكامل عادي $+ \text{جـ}$

٣) التخلص من (جـ) من المساعدة بالسؤال

أمثلة:

1) إذا كان $\text{قَ}(س) = ٣س^{٢} - ٢س$ ، احسب قاعدة الاقتران ه علماً بأن النقطة $(٢ ، ٣)$ تقع عليه

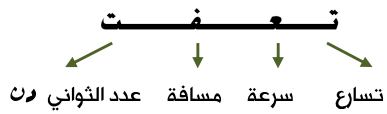
2) إذا كان ه قابل للاشتقاق وكانت $\text{قَ}(س) = ٦س - ٨س^{٣} + ٥$ ، وكان $\text{ه}(-١) = ٣$ احسب قاعدة الاقتران

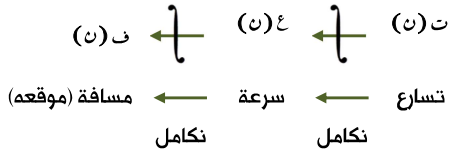
3) إذا كانت $\text{قَ}(س) = (٢س + ١)^{٣}$ ، احسب قاعدة الاقتران المار بالنقطة $(٠ ، ١٣)$

4) إذا كانت $\text{قَ}(س) = ٢س - ٥$ ، وكان $\text{ه}(٢) = ٤$ ، احسب $\text{ه}(١)$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

5) إذا كانت $\text{ق}'(س) = ٣س(٦ - ٥س + ٤س^{٣})$ ، وكان $\text{ق}(٢) = -١$ ، احسب قيمة $\text{ق}(١)$





ت (ن) =

ع (ن) = نعمل تكامل

ف (ن) = نعمل تكامل كمان مرة

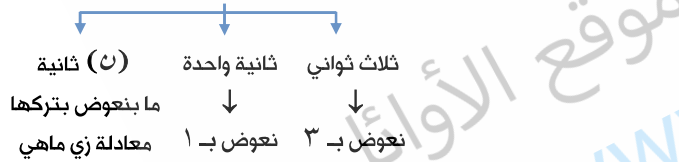
- الخطوات اللي رح نعملها كل مرة للانتقال من حرف لآخر

١) نعمل تكامل + ج

٢) نحسب قيمة ج من المعلومة

٣) نضع المعادلة كاملة + قيمة ج

٤) نعوض بعدد الثواني بعد كلمة (بعد مرور)



تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

أمثلة:

1) يتحرك جسيم حسب العلاقة: ع(ن) = (٢ ن + ٤) م / ث ، احسب المسافة بعد مرور (٣) ثواني علماً بأن الموقع الابتدائي ف(٠) = ٦

2) إذا كان تسارع جسيم معطى بالعلاقة: ت = ٦ ن م / ث ٢ ، احسب المسافة علماً بأن ع(٠) = ٢ م / ث ، ف(٠) = ٥ م

تم تحميل الملف من موقع الأوائل www.awa2el.net

ثالثاً: التكامل بالتعويض

متى نستخدم طريقة التكامل بالتعويض؟

نستخدم هذه الطريقة عند وجود ضرب بين اقترانين وبشرطين:

١) ما بنقدر نضربهم

٢) اقتران اكبر من الآخر بدرجة واحدة فقط

من الآخر نستخدمها في الحالتين:

أ) (سينات) × (سينات) $^{\text{ن}}$ وس ← يوجد أس s

ب) (سينات) × جا (معادلة)

جتا (معادلة)

قا^{٢} (معادلة)

ظا (معادلة)

قتا (معادلة) أو ظتا (معادلة)

هنا نلجأ للتكامل باستخدام طريقة التعويض وفق الخطوات التالية:

أولاً: بجانب السؤال نعمل غرفة الأسرار

١) ص = المعادلة الأكبر

٢) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = المشتقة

٣) د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{مشتقة}}$

جد (معادلة صغيرة) (معادلة كبيرة) $^{\text{ن}}$ وس

↓ ↓ ↓

تصبح محلها تنزل زي ما هي

ثانياً:

(معادلة صغيرة) ص $^{\text{ن}}$ $\frac{\text{د ص}}{\text{مشتقة}}$

اشطب فورا نكامل اشطب

$\frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + جـ

نرجع ص معادلتها $\frac{(\text{معادلة كبيرة})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + جـ

أمثلة: جد قيمة التكاملات الآتية:

1) $\int 2س(س^{2}+1)^{7}\ دس$

1) $\int \frac{4س-6}{\sqrt[3]{س^{2}-3س+1}}\ دس$

2) $\int (2س+1)\sqrt[5]{س^{2}+س-4}\ دس$

3) $\int (4س+6)قا^{2}(س^{2}+3س+8)\ دس$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

4) $\int \frac{٢س + ١}{جتا^{٢}س^{٢} + س + ٩}$ دس

5) إذا كان ق(٩) = ١٩ ، ق(١٣) = ٢ ، جد قيمة $\int_{١}^{ب} (٤س + ٦)$ ق$'$(س^{٢} + ٣س + ٩) دس

رابعاً: قاعدة الاقتران ميل المماس

هنا سنقوم بإيجاد المساحة باستخدام التكامل المحدود ← نحتاج لـ اقتران + حدود

صيغة السؤال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين؟

أولاً: اقتران واحد ومعه المحدود ق(س) = ... ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

أو الفترة [أ ، ب] ← **الإجراءات**

أ) مساواة الاقتران بالصفر ق(س) = ٠ ، لإيجاد قيم (س) فمثلاً إذا كانت قيمة (س) الناتجة هي س = جـ

ب) نشوف هل [جـ] تقع

بين العددين [أ ، ب]

إذا بينهم نرتبهم من الصغير للكبير

[أ ، جـ ، ب]

م$_{١}$ م$_{٢}$

ويكون لدينا مساحتين المساحة

المساحة = م$_{١}$ + م$_{٢}$

$$م = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,دس$$

نعمل تكامل محدود — نعمل تكامل محدود

ثم نجمع المساحتين

أو مش بينهم هنا

نعمل [جـ] ويكون

لدينا مساحة واحدة فقط

$$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$$

نعمل تكامل محدود

والناتج هو المساحة

أمثلة:

1) احسب المساحة المحصورة بين ق = ٢س − ٢ ومحور السينات عندما س = ٣ ، س = ٥

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

2) احسب المساحة المحصورة بين $\text{ه} = 2\text{س} - 2$ ومحور السينات على $[-1 ، 3]$

3) احسب المساحة المحصورة بين $\text{ه} = 4 - 2\text{س}$ ومحور السينات عندما $\text{س} = -1 ، \text{س} = 3$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

ثانياً: اقتران واحد ومحور السينات (بدون حدود) $\text{ه}(\text{س}) = \ldots\ldots\ldots$ ومحور السينات

الإجراءات

أ) مساواة الاقتران بالصفر $\text{ه}(\text{س}) = 0$

وذلك لإيجاد قيم (س) وهي تكون الحدود

ب) نحلل لإيجاد قيم (س)

المعادلة كلها سينات (نأخذ عامل مشترك)

مش كلها سينات (نفتح قوسين)

بعد إيجاد قيم (س) بعد إيجاد مثلاً $\begin{cases} \text{س} = \text{أ} \\ \text{س} = \text{ب} \end{cases}$

ج) نعمل تكامل محدود لإيجاد قيمة

المساحة $= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ه}(\text{س})\, \text{د س}$ الناتج هو المساحة (الإجابة)

← كبير

← صغير

أمثلة:

1) احسب المساحة المحصورة بين $\text{ه} = \text{س}^{2} - 4$ ومحور السينات

2) احسب المساحة المحصورة بين $ق = ٩ - س^{٢}$ ومحور السينات

3) احسب المساحة المحصورة بين $ق = س^{٢} - ٥س$ ومحور السينات

4) احسب المساحة المحصورة بين $ق = ٦س - ٣س^{٢}$ ومحور السينات

5) احسب المساحة المحصورة بين $ق = س^{٢} + ٢س - ٣$ ومحور السينات

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

خامساً: إيجاد المساحة بين اقتران ومحور السينات

خطوات الحل:

١) لازم استخراج المعطيات من السؤال أي مساحة كل منطقة ووضعها على الرسمة

٢) الإجابة على المطلوب مع الانتباه

المطلوب

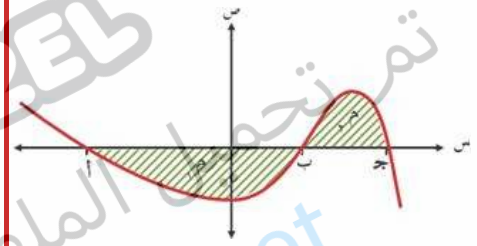
مساحة كله موجب ولا تكامل (فوق + تحت −)

ولو طالب منطقتين مساحة نجمع المنطقتين

تكامل فوق + تحت −

أمثلة:

1) في الشكل المجاور إذا كانت م١ = ٨ ، م٢ = ٥ ، أوجد ما يلي:



١) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س

٢) $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) د س

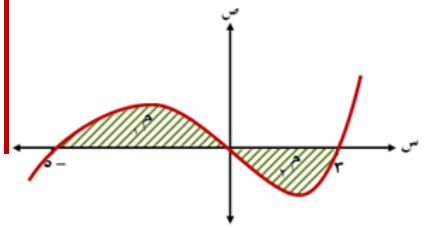
٣) $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) د س

٤) المساحة المحصورة على [أ ، ب]

٥) المساحة المحصورة على [ب ، جـ]

6) المساحة المحصورة على [أ ، جـ]

2) إذا كانت م١ = ١٣ ، م٢ = ٣ احسب قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ٢ق(س) د س



تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net