

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل (مراجعة)



أولاً: التفسير الهندسي للمشتقة

هنا بيعطينا اقتران $y = f(x)$ ويطلب

جد ميل المماس ← فوراً اشتق وعوض بـ x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

أو جد معادلة المماس عند $x = a$

$$\text{فوراً } y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = f'(x)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = f'(x)$$

نوجد قيمة

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = f'(x)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = f'(x)$$

أو نعوض مباشرة بقيمة $x = a$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ملاحظة: النقطة (أ ، ب)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad m = f'(x)$$



يمكن استخدام ميل المماس في إيجاد مجهول x

إذا كتب ميل المماس = رقم فجد x

معناها (أ) اشتق

(ب) المشتقة = الرقم ثم نجد x

أمثلة:

$$(1) \text{ إذا كان } y = x^3 + 2x^2 + 3, \text{ فجد ميل المماس عند } x = 1$$

(2) إذا كان θ (س) $= \frac{4}{s} + 9s$ ، فجد ميل المماس عند $s = 2$

(3) إذا كان θ (س) $= \frac{2-s^3}{1+s}$ ، فجد ميل المماس عند $s = 4$

(4) إذا كان θ (س) $= \frac{1+s^2}{4-s^5}$ ، فجد ميل المماس عند $(1, 3)$

(5) إذا كان θ (س) $= 3s^2 + \sqrt{1-s}$ ، فجد ميل المماس عند $(1, 4)$

(6) إذا كان θ (س) $= s(s-5)^2$ ، فجد ميل المماس عند $s = 1$

(7) إذا كان θ (س) $= s^5 + 4s^2$ ، فجد معادلة المماس عندما $s = 1$

(8) إذا كان θ (س) $= \sqrt{s^2+3}$ ، فجد معادلة المماس عند النقطة $(2, 3)$

(9) إذا كان $s = 2 + \sqrt{s}$ ، جد معادلة المماس عند $s = 1$

(10) إذا كان $s = \frac{2s^2}{s^3 + 1}$ ، جد معادلة المماس عند النقطة $(1, \frac{1}{2})$

(11) إذا كان $s = 4s^2 + 5s$ ، فجد قيمة s عندما يكون ميل المماس يساوي (3)

(12) إذا كان $s = 1s^2 + 2s + 5$ ، حيث (أ) عدد ثابت وكان ميل المماس

عندما $s = 2$ يساوي (26) ، فما قيمة الثابت (أ)



ثانياً: التفسير الفيزيائي للمشتقة

فـعـت

المسافة ← السرعة ← التسارع
 ف (ن) ← ع (ن) ← ت (ن)

صيغة السؤال

(ن) الزمن غير معطى

عندما (سرعته / تسارعه)

نكتب فـعـت عامودي

ف (ن)	= المعادلة كما هي
ع (ن)	= ف = اشتق مرة ه أسطر
ت (ن)	= ف = اشتق مرتين

ثم نستخدم المعلومة لإيجاد

قيمة ن

سرعته ١٠ تسارعه ٢٠

السرعة = ١٠ ت (ن) = ٢٠

ثم نعوض بقيمة ن في

المعادلة الأخرى

(ن) الزمن معطى

بعد مرور عدد الثواني

✦ هنا فـعـت

✦ نشتق مرة أو مرتين

✦ نعوض بالزمن

بعد مرور ← نعوض

ثانية واحدة ← ن = ١

ثانيتين ← ن = ٢

دقيقة ← ن = ٦٠

ن ثانية ← ما في تعويض



أمثلة:

- 1) يتحرك جسيم وفق العلاقة $f = 2n^2 + 3$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار ، (ن) الزمن بالثواني ، فجد سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة.

(2) يتحرك جسيم وفق العلاقة $f(t) = (2t^2 + 1)$ جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة .

(3) يتحرك جسيم وفق العلاقة $f(t) = 3t^2 - 2t + 7$ حيث (ف) المسافة بالأمتر، حيث (ت) الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم عندما يصبح تسارعه $2 \text{ م}^2/\text{ث}^2$

(4) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتزان حيث (ف) المسافة $f(t) = 2t^3 - 6t + 60$ ، حيث (ت) الزمن بالثواني ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $48 \text{ م}^2/\text{ث}^2$.

(5) يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2$ احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه .

(6) يتحرك جسيم حسب العلاقة $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{4}t^2 + 10t + 5$ ، جد السرعة عندما التسارع يساوي $-2 \text{ م}^2/\text{ث}^2$

(7) يتحرك جسيم حسب العلاقة $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + t + 1$ ، جد التسارع عندما السرعة تساوي $-1/4$ ت .

(8) يتحرك جسيم وفق العلاقة $f(t) = t^3 + 3t - 7$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار ، (ت) الزمن بالثواني $t \leq 0$ ، جد السرعة عندما يكون تسارعه يساوي $18/4$ ت .

(9) يتحرك جسيم على منحنى المسافة $f(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t + 10$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار ، (ت) الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

ثالثاً: إيجاد قيم س الحرجة

هي قيم **س** التي تجعل المشتقة = صفر

١. نشتق المعادلة $f'(s) = 0$

٢. نساوي المشتقة بالصفر $f'(s) = 0$

٣. ثم نوجد قيم س الحرجة (حل معادلة)



إيجاد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران

ب) القيم القصوى (العظمى والصغرى)

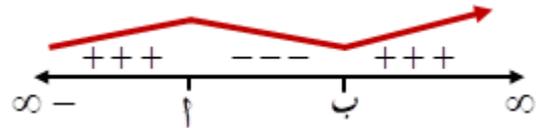
هنا الخطوات التي نقوم بها 5 أصابع وهي:

١. نشتق $f'(s)$

٢. $f'(s) = 0$ صفر

٣. نوجد قيم **س** الحرجة مثلاً $s = a$ / $s = b$

٤. خط أعداد



٥. **نعنع**

ع	ن	ع	ن
↓	↓	↓	↓

نضع نفس إشارة معامل أكبر درجة لـ **س** في المشتقة مثلاً كانت +
الإشارة
الإجابة للفترات

أ) فترات تزايد + $(-\infty, a]$ ، $[b, \infty)$ ، $[a, b]$ عكس

ب) فترات تناقص $[a, b]$

ب) قيمة عظمى عند $s = a$ وقيمتها $f(a)$

قيمة صغرى عند $s = b$ وقيمتها $f(b)$

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net

أمثلة:

(1) و (س) = $س^2 - 8س + 5$

قياس الدرجة:

النقط الدرجة:

التزايد:

التناقص:

القيم القصوى:

(2) و (س) = $س^2 - 16س$

قياس الدرجة:

النقط الدرجة:

التزايد:

التناقص:

القيم القصوى:

(3) و (س) = $س^3 - 27س + 5$

قياس الدرجة:

النقط الدرجة:

التزايد:

التناقص:

القيم القصوى:

(4) و (س) = $س^2 - 8س + 5$

قياس الدرجة:

النقط الدرجة:

التزايد:

التناقص:

القيم القصوى:

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net



$$(5) \text{ و (س) } = 3س - 3س + 7$$

قياس الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

$$(6) \text{ و (س) } = \frac{3س}{3} - \frac{5س}{2} + 6س$$

قياس الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

$$(7) \text{ و (س) } = 5 - 2س$$

قياس الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

$$(8) \text{ و (س) } = 3س + 5$$

قياس الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net



$$(9) \text{ و } (س) = ١٠ - ٣س$$

قيـمـس الحـرجـة :

النـقـط الحـرجـة :

التـزايـد :

التـناقـص :

القيـم القـصوى :

$$(10) \text{ و } (س) = (١ + س)(٢ + س)$$

قيـمـس الحـرجـة :

النـقـط الحـرجـة :

التـزايـد :

التـناقـص :

القيـم القـصوى :

$$(11) \text{ و } (س) = ٣س٣ - ٤س٢$$

قيـمـس الحـرجـة :

النـقـط الحـرجـة :

التـزايـد :

التـناقـص :

القيـم القـصوى :

$$(12) \text{ و } (س) = ٣س٣ - ٣س٣ - ٢س٢ - ١س$$

قيـمـس الحـرجـة :

النـقـط الحـرجـة :

التـزايـد :

التـناقـص :

القيـم القـصوى :

تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.awa2el.net



$$(13) \text{ و } (س) = (س - 3) (س - 2)$$

قيم س الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

(1) إذا كان للاقتران $(س) = (س - 3) (س - 2)$ قيمة حرجة عندما $س = 2$ ، جد قيمة الثابت (أ)

(2) إذا كان للاقتران $(س) = (س - 3) (س - 2) + 15$ قيمة حرجة عندما $س = 1$ ، جد قيمة الثابت (أ)

(3) إذا كان للاقتران $(س) = (س - 3) (س - 2) + 24$ قيمة قصوى عندما $س = 4$ ، جد الثابت (أ)

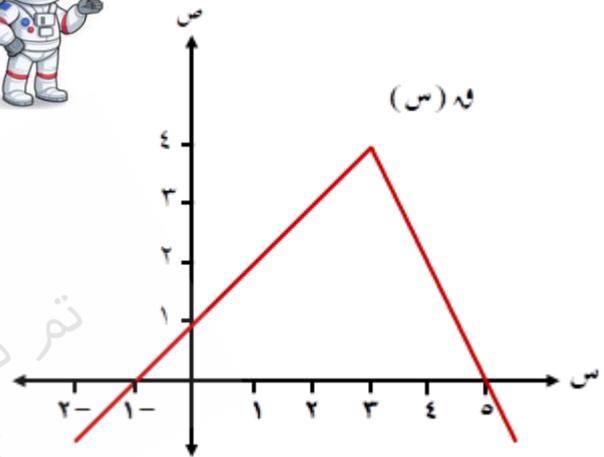
رابعاً: إيجاد قيم س الحرجة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوى من الرسمه

(أ) رسمه هـ (س)

هـ ← قم بالنسخ للشكل على خط الأعداد

مثال (١): بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل

منحنى الاقتران هـ (س) جد كلاً من:



(١) جد قيم س الحرجة وحدد نوعها

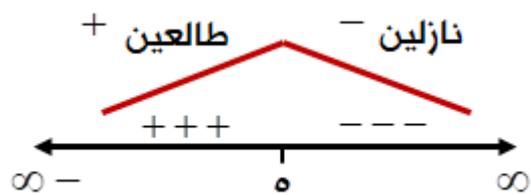
(٢) جد فترات التزايد والتناقص

(٣) جد القيم القصوى للاقتران (إن وجدت) وحدد نوعها

هـ ← قم بالنسخ

هنا نقوم بعمل خط أعداد نسخ الشكل

الموجود في الرسمه عليه



الإجابات:

(١) $s = 3$ ← نوعها عظمى

(٢) فترات التزايد: $[-3, \infty)$ +

فترات التناقص: $(\infty, 3]$ -

(٣) قيمة عظمى عند $s = 3$ وقيمته $h(3) = 4$

هنا يكون المطلوب ص من الرسمه

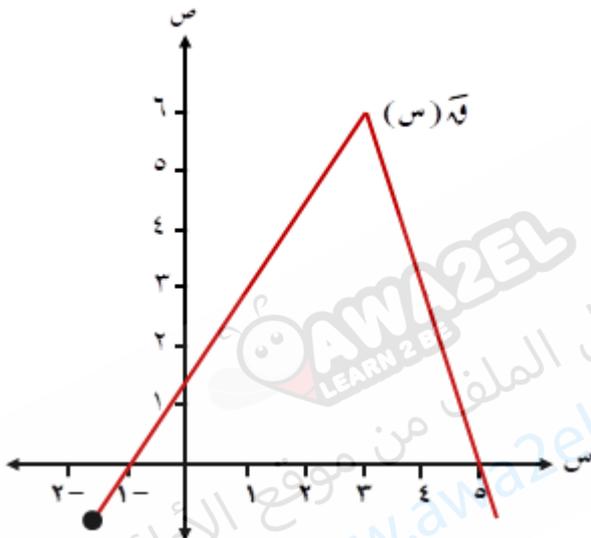
(ب) رسمه و (س)

و ← سكين نقط قطع محور س قيم حرجة على

خط الأعداد

مثال (٢): بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل

منحنى المشتقة الأولى للاقتران و (س) أجب عما يلي:



(١) جد قيم س التي يكون للاقتران ق عندها قيم

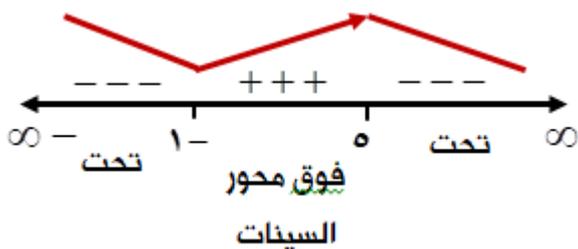
قصوى وبين نوعها

(٢) جد فترات التزايد والتناقص

(٣) جد هنا $\frac{h(3) - (h + 3)h}{h}$ ← هـ

هنا و ← سكين نعمل خط الأعداد

نقوم بوضع عليه نقط قطع محور س ← قيم حرجة



(١) $s = 1$ = صغرى / $s = 5$ = عظمى

(٢) فترات تزايد $[0, 2]$

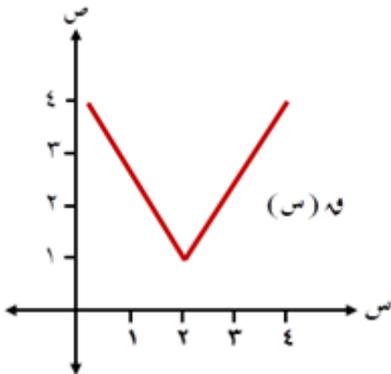
تناقص $(-\infty, 1]$, $(3, \infty)$

(٣) هنا و (٣) = 6

أمثلة:

❖ معتمداً على الرسومات التالية والتي تمثل منحنى الاقتران $f(x)$ ، جد خواص الاقتران (فترات التزايد والتناقص ، القيم الحرجة ، القيم القصوى)

(4)



قيمه س الحرجة :

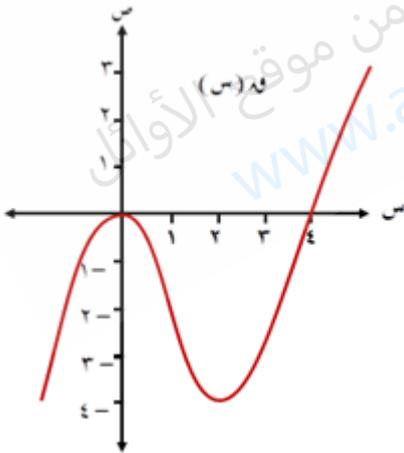
النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

(5)



قيمه س الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

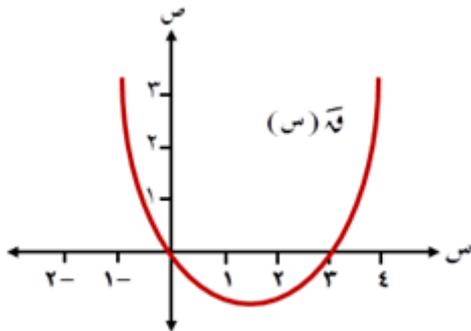
التناقص :

القيم القصوى :

معتمداً على الرسومات التالية والتي تمثل منحنى $f(x)$ ، جد خواص الاقتران $f(x)$

(فترات التزايد والتناقص ، القيم الحرجة ، القيم القصوى)

(6)



قيمه س الحرجة :

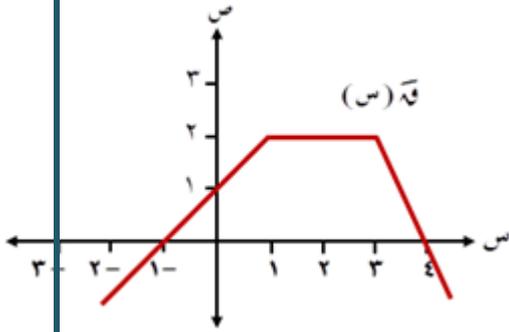
النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيم القصوى :

(7)



قيمه s الحرجة :

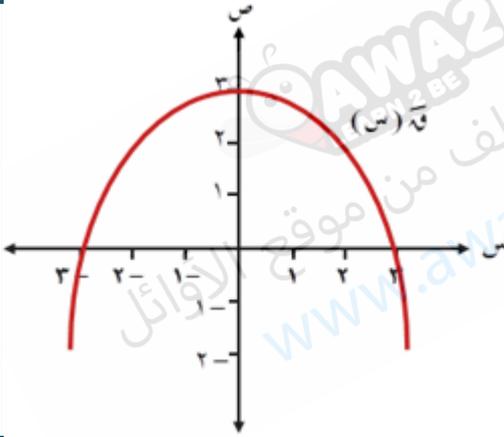
النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيمه القصوى :

(8)



قيمه s الحرجة :

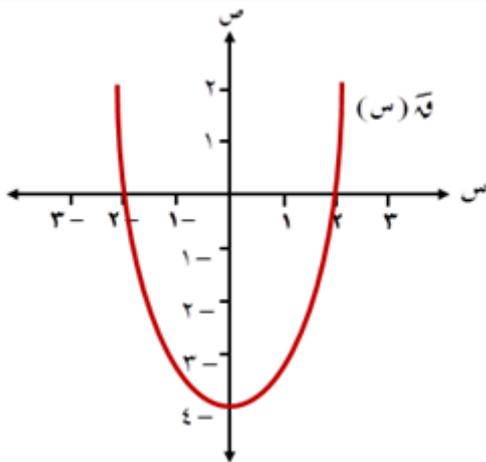
النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيمه القصوى :

(9)



قيمه s الحرجة :

النقط الحرجة :

التزايد :

التناقص :

القيمه القصوى :

خامساً: تطبيقات اقتصادية على التفاضل

بداية لازم نحفظ

$$(1) \text{ الربح الكلي} = \text{الإيراد الكلي} - \text{التكلفة الكلية}$$

$$r(s) = d(s) - k(s)$$

$$(2) \text{ الإيراد الكلي} = \text{عدد الوحدات} \times \text{سعر البيع}$$

$$d(s) = \text{دائماً } s \times \text{رقم أو معادلة}$$

✚ ويمكن من خلال القانون الأول نعمل قانون للإيراد

$$(3) \text{ الإيراد} = \text{الربح} + \text{التكلفة}$$

✚ ما معنى كلمة حدي؟ معناها اشتق

صيغة السؤال



أمثلة:

(1) مصنع ألبسة إذا كان اقتران التكلفة الكلية $k(s) = 0.1s$ واقتران الإيراد الكلي $d(s) = 5s - s^2$ عن بيع s وحدة من منتج ما، جد ما يلي:

- (أ) التكلفة الحدية (ب) الإيراد الحدي
- (ج) الربح الكلي (د) الربح الحدي

(2) إذا كان سعر القطعة الواحدة $ع(س) = ٥س^٣ + ٢س^٢$ وتكلفة القطعة الواحدة تساوي $٤س^٢ + ٣س$ ، جد الربح الحدي عند $س = ١$

(3) إذا كان سعر القطعة $ع(س) = ٣س^٣ + ٤$ وتكلفة القطعة تساوي $٧س^٢$ ، جد الربح الحدي عند $س = ٢$

(4) إذا كانت تكلفة قطعة واحدة هي $ع(س) = ٢س - ٤س$ ، جد عدد القطع حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن

(5) إذا كان سعر القطعة الواحدة $ع = ٣ - ٢س$ ، جد عدد القطع حتى يكون الإيراد أكبر ما يمكن.

(6) يبيع مصنع للأحذية $س$ حذاء من منتجاته أسبوعياً بسعر القطعة $(٨٠٠ - ٨٠,٨س)$ قرش ، فإذا كانت تكلفة $س$ من الأحذية $(٢٠٠ + ٨٠٠٠)$ ، فما عدد الأحذية التي يجب أن ينتجها المصنع أسبوعياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن.

(7) إذا كان اقتران الإيراد الكلي لمبيعات منتج ما هو $D(S) = 80 - S^2$ ديناراً، واقتران التكلفة الكلية هو $C(S) = 60 + 4S$ ديناراً، حيث S عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

(8) إذا كان $C(S)$ اقتران التكلفة الكلية، و $D(S)$ اقتران الإيراد الكلي لمصنع حيث S عدد الوحدات المنتجة أسبوعياً يكون الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن عندما:

(أ) $D(S) = \text{صفر}$ (ب) $C(S) = D(S)$

(ج) $D(S) < \text{صفر}$ (د) $C(S) = D(S)$

(9) إذا كان $C(S) = 40 + 3S^2$ اقتران التكلفة الكلية لإنتاج S قطعة من سلعة ما، فإن التكلفة الحدية لإنتاج 20 قطعة من السلعة نفسها هي:

(أ) 40 (ب) 160 (ج) 120 (د) 46

(10) ينتج مصنع S من أجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ $(260 - S)$ ديناراً، إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج S من الأجهزة تعطى بالعلاقة $C(S) = 400 + 60S + S^2$ ديناراً، فما عدد الأجهزة التي يجب أن ينتجها ويبيعها المصنع شهرياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن