مكثف
تطبيقات التفاضل

الأستاذ : ماهر ضمرة

مكثف : تطبيقات التفاضل

أولا : التطبيقات الهندسية

* معادلة المماس $ص - ص_١ = م_{المماس}(س - س_١)$

* معادلة العمودي على المماس $ص - ص_١ = م_{العمودي}(س - س_١)$

$م_{المماس} = قَ(س) = \frac{\triangle ص}{\triangle س}$ (المماس يمر بنقطتين) $= ظا\ \theta$
(θ بالاتجاه الموجب مع السينات ، $٠ \leq \theta < \pi$)

$م_{العمودي} = \frac{-١}{م_{المماس}} = \frac{\triangle ص}{\triangle س}$ (العمودي يمر بنقطتين) $= ظا\ \beta$
(β الزاوية التي يصنعها العمودي مع السينات
$٠ \leq \beta < \pi$ ، بالاتجاه الموجب)

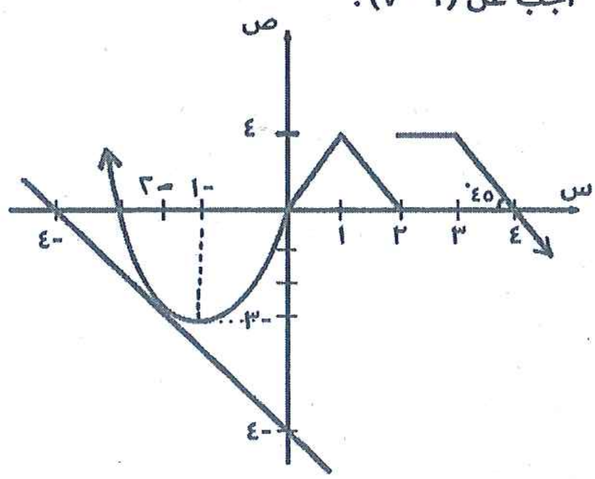
حالات الهندسي	التفصيل
التوازي	١) يتوازي مستقيمين $\longleftrightarrow$ $م_١ = م_٢$ ٢) المستقيم (المماس) يوازي السينات (أفقي) $\longleftrightarrow$ م = صفر معادلته $ص = ص_١$ ٣) يتوازى مماس علاقة مع الصادات $\longleftrightarrow$ م غ . م $\longleftrightarrow$ معادلته $س = س_١$
التعامد	١) يتعامد مستقيمين $\longleftrightarrow$ $م_١ \times م_٢ = -١$ ٢) يتعامد مستقيم محور السينات $\longleftrightarrow$ م غ . م المعادلة $س = س_١$ ٣) يعامد مستقيم محور الصادات $\longleftrightarrow$ يوازي السينات $\longleftrightarrow$ م = صفر المعادلة $ص = ص_١$ ٤) نقطة تعامد المنحنين: $ق(س_١) = هـ(س_١)$ ، $م_١ \times م_٢ = -١$
تماس منحنيين	١) $ق(س_١) = هـ(س_١)$ وفي العلاقات حذف أو تعويض ٢) $قَ(س_١) = هـَ(س_١)$ أي $(م_١ = م_٢)$
التقاطع	١) إذا تقاطع اقترانين $\longleftrightarrow$ $ق(س) = هـ(س)$ ، علاقات (حذف أو تعويض) ٢) إذا تقاطع منحنى مع محور: السينات $ص = ٠$ ، الصادات $س = ٠$

مكثف : تطبيقات التفاضل

النقطة الخارجية (أ ، ب) لا تقع على منحنى ق(س)	١) نفرض التماس (س١ ، ص١) ٢) نجد ميل المستقيم $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ونبدل ص من الاقتران . ٣) مالمماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = قَ(س) ← نجد نقاط التماس .

* اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

من الشكل التالي لمنحنى ق(س) أجب عن (١ - ٧) .



١) إن قَ(٠) =

أ) صفر ب) ٤
ج) -١ د) غ . م

٢) إن قَ($\frac{١}{٢}$) =

أ) صفر ب) ٤
ج) -١ د) غ . م

٣) إن قيم س التي يكون عندها ق(س) متصل لكنه غير قابل للاشتقاق .

أ) {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ب) {٠ ، ١ ، ٢}
ج) {٠ ، ١ ، ٣} د) {١ ، ٣}

٤) إن قَ(٢,٥) =

أ) صفر ب) ٤
ج) ١ د) غ . م

٥) إن زاوية الميل لمنحنى ق(س) عند س = -٢ هي :

أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$
ج) $\frac{٣\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{٦}$

٦) هـ(س + ١) = ق^{٢}(س) + س^{٢} + ١ ، فإن هـَ(-١) =

أ) ٤ ب) ٨
ج) -٨ د) صفر

٧) إن قَ(٤) =

أ) صفر ب) ١
ج) -١ د) ٢

٨) إذا علمت أن المماس عند (١ ، ٥) لمنحنى علاقة ما ، يوازي الصادات فإن معادلة العمودي :

أ) س = ١ ب) س = ٥
ج) ص = ١ د) ص = ٥

٩) إذا علمت أن العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (١، ق(١)) يمر بالنقطتين (١، ٣) ، (٣، ٥) وكان هـ(س) = ٣ق(س) + س^{٢} + ١ فإن هـَ(١) =

أ) ٢ ب) -٣

ج) ١ د) صفر

---

١٠) إذا علمت أن معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٢ هي ٣س + ص = ١١

ل(س) = $\frac{\text{س}}{\text{ق(س)}}$ فإن لَ(٢) =

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) $\frac{١١}{٢٥}$

ج) $\frac{١}{٢٥}$ د) $\frac{١١}{٩}$

---

١١) إذا كان منحنى ق(س) يمر (٢، ١) وكان المماس يصنع زاوية ٤٥° مع السينات بالاتجاه الموجب فإن

$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{ق(س)} - \frac{١}{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤}$ =

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{-١}{٤}$

ج) $\frac{١}{٨}$ د) $\frac{-١}{٨}$

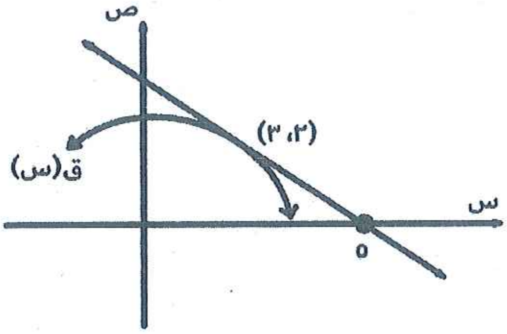
---

١٢) إن النقطة الواقعة على منحنى (ص - ٢)^{٢} = ٥س + ١٠ والتي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة يوازي المستقيم ٢ص - ٥س - ١ = ٠ هي :

أ) ($\frac{٩}{٥}$ ، ٣) ب) ($\frac{-٩}{٥}$ ، ٣)

ج) (٥، ٣) د) (-٥، ٣)

١٣)



إذا كان ق ، هـَ قابلين للاشتقاق بحيث قَ(س) = (س + ١) هـَ(٣س) جد هـ‴(٦) :

أ) -٨ ب) $\frac{-٢}{٩}$

ج) $\frac{٢}{٩}$ د) صفر

---

١٤) إذا علمت أن معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (٤، ١) هو

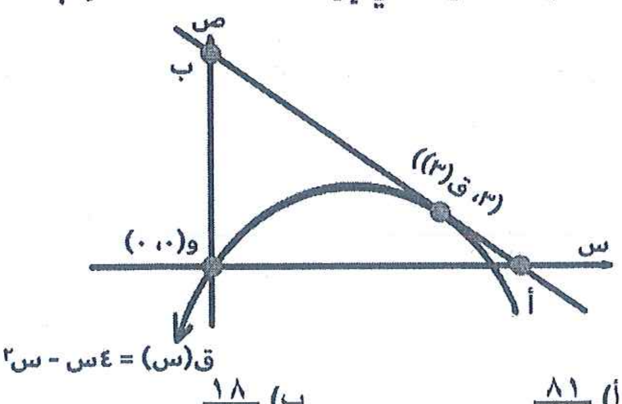
ص = $\sqrt{\text{جـ}}$ س فإن قَ(٤) =

أ) $\frac{-١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٤}$

ج) ٤ د) -٤

---

١٥) من الشكل التالي إن مساحة المثلث أ و ب =



أ) $\frac{٨١}{٤}$ ب) $\frac{١٨}{٤}$

ج) $\frac{٩}{٤}$ د) ٨١

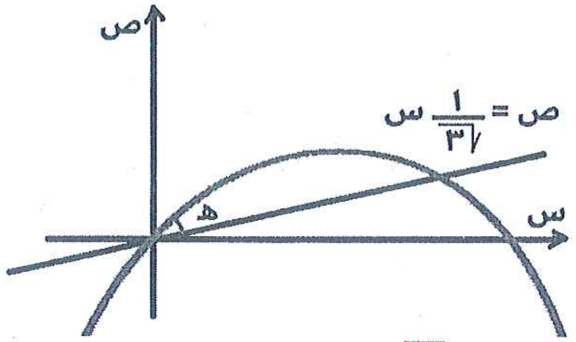
١٦) إن قياس الزاوية التي يصنعها مماس $ص^{٢} + س^{٢} + ٦ص - ٢س + ٢ = ٠$ عند (٣، -١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

أ) $\frac{٣\pi}{٤}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$

ج) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{\pi}{٤}$

---

١٧) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س) أوجد قياس الزاوية هـ المحصورة بين ص ومماس ق(س) عند (٠، ٠) .



ق(س) = $\sqrt{٣}$ س - $س^{٢}$

أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٦}$

ج) $\frac{\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{١٢}$

---

١٨) إذا كان م(س) = $\frac{ق^{٢}(س) + ٢س}{هـ(س)}$

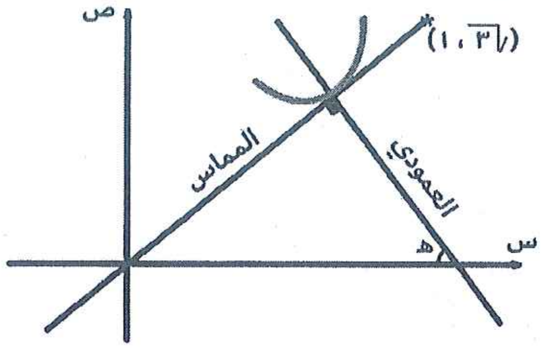
هـ ≠ ٠ وكان لمنحنى ق ، هـ مماس أفقي مشترك عند النقطة (-١، ٢) فإن مَ(-١) =

أ) صفر ب) ١

ج) -١ د) $\frac{١}{٢}$

---

١٩) من الشكل المجاور ، فإن هـ =



أ) $\frac{٢\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٦}$

ج) $\frac{\pi}{٣}$ د) $\frac{٥\pi}{٣}$

أسئلة مقالية

١) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢، ٢٥) ، (-١، -١٧) يمس منحنى ق(س) = ٥$س^{٢}$ + ك س + ٢ ، جد ك .

الحل

نجد معادلة المستقيم م = $\frac{٢٥ - -١٧}{٢ - -١}$ = ١٤

المعادلة ص - ٢٥ = ١٤(س - ٢)

ص = ١٤س - ٣

١) لهم نفس الميل ← ١٠س + ك = ١٤ | س = س١

∴ ك = ١٤ - ١٠س١

٢) لهم نفس الصور عندما س = س١

هـ(س١) = ص | س = س١

٥$س_{١}^{٢}$ + ك س١ + ٢ = ١٤س١ - ٣

٥$س_{١}^{٢}$ + (١٤ - ١٠س١) س١ + ٢ = ١٤س١ - ٣

-٥$س_{١}^{٢}$ = -٥ ← $س_{١}^{٢}$ = ١

س١ = ١ ← ك = ٤ ، س = -١ ← ك = ٢٤

٢) جد جميع النقاط الواقعة على منحنى العلاقة $٢س^{٢} - ٤س + ص^{٢} - ٢٢ = ٠$ التي يكون عندها المماس عمودي على ص + س = ١ .

الحل :

ميل المستقيم ص$'$ = ١ ← م المماس = ١ = ص$'$

$٤س - ٤ + ٢ص ص' = ٠$ ←

$٤س - ٤ + ٢ص(١) = ٠$ ← $ص = ٢ - ٢س$

$٢س^{٢} - ٤س + (٢ - ٢س)^{٢} - ٢٢ = ٠$

$٢س^{٢} - ٤س + ٤ - ٨س + ٤س^{٢} - ٢٢ = ٠$

$٦س^{٢} - ١٢س - ١٨ = ٠$ (÷ ٦)

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

(٣، -٤) ، (-١، ٤)

---

٣) جد معادلة جميع المماسات المرسومة من النقطة $(٠، \frac{-١١}{٢})$ للعلاقة $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ص - ١٢ = ٠$

الحل : نفرض التماس (س، ص)

م الماس = $\frac{ص + \frac{١١}{٢}}{س}$

$٢س + ٢ص ص' - ٢ص' = ٠$ (÷ ٢)

$س + ص \times \frac{ص + \frac{١١}{٢}}{س} - \frac{ص + \frac{١١}{٢}}{س} = ٠$

× س ← $س^{٢} + ص^{٢} + \frac{١١}{٢} ص - ص - \frac{١١}{٢} = ٠$

∴ $س^{٢} = - ص^{٢} - \frac{٩}{٢} ص + \frac{١١}{٢}$

$\cancel{-ص^{٢}} - \frac{٩}{٢} ص + \frac{١١}{٢} + \cancel{ص^{٢}} - ٢ص - ١٢ = ٠$ نعوض

$\frac{-١٣}{٢} ص - \frac{١٣}{٢} = ٠$ ← ص = -١

∴ $س^{٢} = -١ + \frac{٩}{٢} + \frac{١١}{٢} = ٩$

∴ س = ٣، -٣

١- $س_{١} = ٣$ ← $ص_{١} = -١$ ← م = $\frac{-٣}{٢}$

$ص + ١ = \frac{-٣}{٢}(س - ٣)$

٢- س = -٣ ← ص = -١ ← م = $\frac{٣}{٢}$

$ص + ١ = \frac{٣}{٢}(س + ٣)$

---

٤) جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $\sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى هـ(س) = $س^{٢} - \frac{٣}{٢} س + \frac{٣}{٢}$

الحل :

عند نقاط التماس

١- ق$'$ = هـ$'$ ← $\frac{١}{٢\sqrt{س}} = ٢س - \frac{٣}{٢}$

× $٢\sqrt{س}$ ← $١ = \sqrt{س}(٤س - ٣)$ نربع

$١ = س(٤س - ٣)^{٢}$

$١ = س(١٦س^{٢} - ٢٤س + ٩)$

$١٦س^{٣} - ٢٤س^{٢} + ٩س - ١ = ٠$

بالتجريب س = ١ ← بالقسمة التركيبية

$(س - ١)(١٦س^{٢} - ٨س + ١)$

$(س - ١)(٤س - ١)^{٢} = ٠$

س = ١ ✓ ، س = $\frac{١}{٤}$ ✗

هـ$(\frac{١}{٤}) \neq$ ق$(\frac{١}{٤})$

النقطة (١، ١) ← م = $\frac{١}{٢}$

المعادلة ص - ١ = $\frac{١}{٢}$(س - ١)

٥) جد معادلة المماس لمنحنى
$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٣\text{س} = ٢$ عند نقطة تقاطعه
مع $٢\text{س} - ٢\text{ص}^٢ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ = -٢$
حيث س > ٠

الحل :

١) × ٢ ← $٢\text{س}^٢ + ٢\text{ص}^٢ - ٦\text{س} = ٤$

٢) ← $٢\text{س} - ٢\text{ص}^٢ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ = -٢$

$\frac{٥}{٢}\text{س}^٢ - ٤\text{س} = ٢$ × ٢

$٥\text{س}^٢ - ٨\text{س} - ٤ = ٠$

$(٥\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\text{س} = \frac{-٢}{٥}$ × ، س = ٢

$٤ + \text{ص}^٢ - ٦ = ٢ \leftarrow \text{ص}^٢ = ٤$

ص = ٢ ، −٢

التقاطع (٢ ، −٢) ، (٢ ، ٢)

نجد المشتقة $٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\text{ص}' - ٣ = ٠$

عند (٢ ، ٢) ← $٤ + ٤\text{ص}' - ٣ = ٠$

$\text{م}_١ = \frac{-١}{٤} \leftarrow \text{ص} - ٢ = \frac{-١}{٤}(\text{س} - ٣)$

عند (٢ ، −٢) ← $\text{م}_٢ = \frac{١}{٤}$ ←

$\text{ص} + ٢ = \frac{١}{٤}(\text{س} - ٣)$

---

٦) إذا كان المستقيم أ س + ص = ٧ يمس
منحنى ق(س) = $\text{س}^٢$ + أ س + ب
عند (١ ، ق(١)) فجد قيمة الثابتين أ ، ب

الحل :

١− لهم نفس الميل عند التماس

$\text{م} + \text{ص}' = ٠ \leftarrow \text{ص}' = -\text{م}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + \text{م}$

$\text{ق}'(١) = ٢ + \text{م}$

$٢ + \text{م} = -\text{م} \leftarrow \text{م} = -١$

٢− لهم نفس الصور

$-١(١) + \text{ص} = ٧ \leftarrow \text{ص} = ٨$

$\therefore ٨ = ١ - ١ + \text{ب} \leftarrow \text{ب} = ٨$

---

٧) إذا كان المستقيم $\text{ص} = \frac{٤٧}{٢٤}\text{س} + \frac{٤}{٣}$
يمس $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\sqrt[٣]{\text{س}}} + ٢\text{س}$ ، س ≠ ٠
جد أ.

الحل :

نساوي المشتقات عند التماس

$\text{ص}' = \frac{٤٧}{٢٤}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-١}{٣}\text{م}\,\text{س}^{\frac{-٤}{٣}} + ٢$

نفرض التماس (س١ ، ص١)

$\frac{٤٧}{٢٤} = \frac{-١}{٣}\text{م}\,\text{س}^{\frac{-٤}{٣}} + ٢$

$\text{م} = \frac{١}{٨}\text{س}^{\frac{٤}{٣}}$

كذلك $\text{ص}\big|_{\text{س}=\text{س}_١} = \text{ق}(\text{س}_١)$

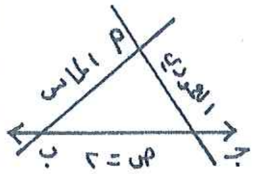
$\frac{٤٧}{٢٤}\text{س}_١ + \frac{٤}{٣} = \frac{\frac{١}{٨}\text{س}_١^{\frac{٤}{٣}}}{\sqrt[٣]{\text{س}_١}} + ٢\text{س}_١$

$\frac{٤٧}{٢٤}\text{س}_١ + \frac{٤}{٣} = \frac{١}{٨}\text{س}_١ + ٢\text{س}_١$

$\frac{-٤}{٢٤}\text{س}_١ = \frac{-٤}{٣} \leftarrow \text{س}_١ = ٨$

$\therefore \text{م} = \frac{١}{٨}(٨)^{\frac{٤}{٣}} = ٢$

٨) احسب مساحة المثلث المكون من مماس ق(س) = س^{٢} + ٧س - ١ عند (١) ، ق(٨)) والعمودي على المماس عند نفس النقطة والمستقيم ص = ٢



الحل : م (١ ، ٧)
نقطة التماس

نجد معادلة المماس

م = ٢س + ٧ $|_{س=١}$ = ٩

المعادلة ص - ٧ = ٩(س - ١)

ص = ٩س - ٢

يقطع ص = ٢ ← س = $\frac{٤}{٩}$

ب ($\frac{٤}{٩}$ ، ٢)

معادلة العمودي ص - ٧ = $\frac{-١}{٩}$ (س - ١)

س = ٠ ← ص = $\frac{٦٤}{٩}$

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٦٤}{٩}$ - $\frac{٤}{٩}$) (٧ - ٢)

= $\frac{١٥٠}{٩}$ وحدة مربعة

٩) احسب مساحة المثلث المكوّن من مماس ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + ١ عند (-١ ، ق(-١))) والمستقيمين س = ٢ ، ص = ٢

الحل :

نجد معادلة المماس س$_{١}$ = -١ ، ص$_{١}$ = ١

م$_{المماس}$ = ٣ - ٢ = ١ ← المعادلة

ص - ١ = س + ١ ← ص = س + ٢

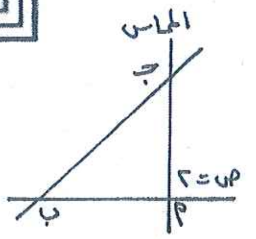
م (٢ ، ٢)

س = ٢ ← ص = ٤

جـ (٢ ، ٤)

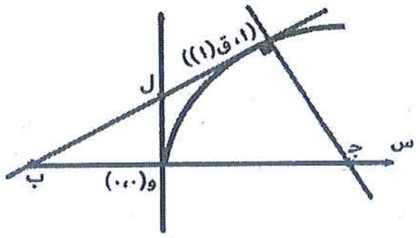
ص = ٢ ← س = ٠

ب (٠ ، ٤)



المساحة = $\frac{١}{٢}$ (٢ - ٠) (٤ - ٢) = ٢

١٠) من الشكل المجاور إذا علمت أن مساحة الرباعي المكون من مماس ق(س) = أ$\sqrt{س}$ ، س > ٠ عند (١ ، ق(١)) والعمودي عند نفس النقطة والمحورين = (١) وحدة مربعة جد أ .



الحل :

نجد معادلة المماس عند س = ١

ص$_{١}$ = أ ، م = $\frac{أ}{٢}$

المعادلة ص - أ = $\frac{أ}{٢}$ (س - ١)

نجد ل بوضع س = ٠ ← ص = $\frac{أ}{٢}$ ←

ل (٠ ، $\frac{أ}{٢}$)

نجد ب بوضع ص = ٠ ← - أ = $\frac{أ}{٢}$ (س - ١)

س = -١ ← ب (-١ ، ٠)

معادلة العمودي ص - أ = $\frac{-٢}{أ}$ (س - ١)

ص = ٠ ← - أ = $\frac{-٢}{أ}$ (س - ١)

$\frac{أ^{٢}}{٢}$ = س - ١ ← س = $\frac{أ^{٢}}{٢}$ + ١

جـ ($\frac{أ^{٢}}{٢}$ + ١ ، ٠)

مساحة الرباعي =

م المثلث الكبير - م المثلث الصغير

١ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{أ^{٢}}{٢}$ + ١ + ١) (أ) - $\frac{١}{٢}$ (١) ($\frac{أ}{٢}$)

أ^{٣} + ٣أ - ٤ = ٠ بالتجريب

أ = ١ قسمة تركيبية

أ^{٢} + أ + ٤ = ٠ لا يحل

مكثف : تطبيقات التفاضل

ثانياً : التطبيقات الفيزيائية

$\text{ف}' = \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} = \text{ع}$

$\text{ع}' = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \text{ت}$

$\text{ف} \xrightarrow{\text{المشتقة}} \text{ع} \xrightarrow{\text{المشتقة}} \text{ت}$

	أفكار ومصطلحات	الإجراء	ملاحظات
المقذوفات	أقصى ارتفاع	ع = ٠	
	لحظة عودة الجسم لسطح القذف (الاسناد)	ف = ٠	
	مقابل كل ف معطاه	يوجد زمنين ن_1 : صعود (الأقل) ن_2 : هبوط (الأكبر)	ما عدا أقصى ارتفاع زمن واحد
أي حركة	السرعة الابتدائية	ع(٠)	ليس شرط = ٠
	تحرك جسم من السكون	ع(٠) = ٠	
	السرعة المتوسطة	$\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$	
	لإثبات أن الجسم بدأ بالعودة	على خط الأعداد ∞- ـــ + + + + ـ | ـ - - - - - ـــ ∞ ن تتحول من - إلى +	
	يفقد $\frac{1}{4}$ سرعته الابتدائية	ع = $\frac{3}{4}$ ع(٠) أو ع = ع ـ - $\frac{1}{4}$ ع ـ	
	الاشتقاق الضمني	$(\text{ف}^2)' = 2\text{ف ع}$ ، $(\sqrt{\text{ع}})' = \frac{\text{ت}}{2\sqrt{\text{ع}}}$	

الأسئلة

اختر الاجابة الصحيحة فيما يلي :

١) قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح الأرض وفق العلاقة ف(ن) = -١٦ن^٢ + ٣٢ن ، فإن بعد الجسم عن سطح الأرض عندما يفقد الجسم $\frac{١}{٤}$ سرعته الابتدائية .

أ) ٨ قدم ب) ١٥ قدم
ج) ١٢ قدم د) ٧ قدم

---

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ع = أ$\sqrt{ف}$ ، أ > ٠ ، ف > ٠ ، إذا علمت أن التسارع = ٢ م/ث^٢ فإن أ =

أ) ٣ ب) ٨
ج) ٤ د) ٢

---

٣) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح بناية ارتفاعها ل وفق العلاقة ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^٢، فإذا كانت سرعته عندما وصل ارتفاع ٤٥م عن الأرض وهو صاعد ٢٠ م/ث فإن ل =

أ) ٧٠ ب) ٢٥
ج) ٢٠ د) ١٠

---

٤) إذا علمت أن اقتران المسافة ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^٣ - ٣ن^٢ + ٥ن ، فإن تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة حيث ت ≥ ٠ .

أ) ٤ م/ث^٢ ب) صفر م/ث^٢
ج) ٢ م/ث^٢ د) ٦ م/ث^٢

---

٥) قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض بسرعة ابتدائية ع. فإذا كان بعده بالأمتار عن نقطة القذف يعطى بالعلاقة ف(ن) = ع. ن - ٥ن^٢، إذا علمت أن أقصى ارتفاع وصل اليه الجسيم (٤٥) متر فإن ع. =

أ) ٣ ب) ٩
ج) ٣٠ د) ١٠

---

٦) يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٢ جا^٢($\frac{ن}{٢}$) + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ، ن ∋ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$ م/ث

أ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$
ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

---

٧) إذا علمت أن ف(ن) = أ ن - ٥ ن^٢، وكانت سرعة الجسيم بعد ٣ ثوان تساوي نصف سرعته الابتدائية فإن أ =

أ) ٣٠ ب) ١٥
ج) ٦٠ د) ٢٠

---

٨) يتحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) = $\frac{١}{ظا ن}$

ن ∋ (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$) فإن تسارع الجسم عندما يقطع ٣ أمتار هو :

أ) -٥٠ ب) -١٠
ج) -٦٠ د) ٦٠

مكثف : تطبيقات التفاضل

أسئلة مقالية

١) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح بناية ارتفاعها ١٠م عن سطح الأرض وفق العلاقة ف(ن) = -٥ن² + ٢٠ن + ١٠ ، جد :

١) زمن التحليق. الحل : ف المعطاة عن سطح الأرض لأن ١٠م ضمن اقتران ف (طول البناية)

سطح العمارة هو سطح الاسناد

ف(ن) = -٥ن² + ٢٠ن = ٠

-٥ن (ن - ٤) = ٠

ن = ٠ ✗   ن = ٤ ✓

٢) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم عن سطح الأرض.

ع = -١٠ن + ٢٠ = ٠ ← ن = ٢

ف(٢) = -٢٠ + ٤٠ + ١٠ = ٣٠م

٣) المسافة المقطوعة عن سطح الأرض عندما تبلغ سرعته ١/٤ السرعة الابتدائية.

ع(ن) = -١٠ن + ٢٠ ← ع(٠) = ٢٠

١/٤ ع(٠) = ٥

ع(ن) = ٥ ← -١٠ن + ٢٠ = ٥

ن = ٣/٢

ف(٣/٢) = -٥ × ٩/٤ + ٢٠ × ٣/٢ + ١٠

= -٤٥/٤ + ٤٠ = ١١٥/٤ م

٤) المسافة المقطوعة عن سطح الأرض عندما يفقد ١/٤ سرعته الابتدائية.

يفقد ١/٤ سرعته الابتدائية

∴ يتبقى ٣/٤ سرعته الابتدائية

٣/٤ ع(٠) = ٣/٤ × ٢٠ = ١٥

ع(ن) = ١٥ ← -١٠ن + ٢٠ = ١٥ ← ن = ١/٢

ف(١/٢) = -٥ × ١/٤ + ٢٠ × ١/٢ + ١٠

= -٥/٤ + ٢٠ = ٧٥/٤ م

٥) متى تصبح ع > ٠ .

ع = ٠ ← ن = ٢

٠ ++++ ٢ ---- ع

ن ∈ [٠ ، ٢)

٦) السرعة عندما تكون المسافة عن سطح الأرض ٢٥م.

ف الأرض = ٢٥ = -٥ن² + ٢٠ن + ١٠

-٥ن² + ٢٠ن - ١٥ = ٠   (÷ -٥)

ن² - ٤ن + ٣ = ٠

(ن - ٣)(ن - ١) = ٠

ن = ١ ← ع(١) = ١٠ م/ث

ن = ٣ ← ع(٣) = -١٠ م/ث

٢) يتحرك جسم وفق العلاقة

$$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{\text{ن}^{٢}}{\text{ع}(\text{ن}) + ١} \qquad \text{ع} > ٠$$

(أثبت أن الجسم ينعدم تسارعه عندما ن = ١ حيث المسافة في تلك اللحظة ف = $\frac{١}{٢}$)

الحل :

$$\text{ف}(١) = \frac{١}{\text{ع}(١)+١} \leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{١}{\text{ع}(١)+١}$$

$$\text{ع}(١) = ١$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = \frac{(\text{ع}(\text{ن})+١)\times ٢\text{ن} - \text{ن}^{٢}\times \text{ت}(\text{ن})}{(\text{ع}(\text{ن})+١)^{٢}}$$

$$١ = \frac{٢\times٢ - \text{ت}(١)}{٤}$$

$$٤ = ٤ - \text{ت}(١)$$

$$\text{ت}(١) = \text{صفر}$$

---

٣) من سطح بناية ارتفاعها ل سقط جسمان الأول وفق العلاقة $\text{ف}_{١} = ٥\text{ن}^{٢}$، والثاني وفق العلاقة $\text{ف}_{٢} = ٥\text{ن}^{٢} + ١٥\text{ن}$ ، فإذا ارتطم الأول بعد ١ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالأرض جد :

١) ارتفاع البناية (ل) .

٢) سرعة الجسمين لحظة وصولهما للأرض .

الحل :

$\text{ف}_{١} = ٥\text{ن}_{١}^{٢}$ ، $\text{ف}_{٢} = ٥\text{ن}_{٢}^{٢} + ١٥\text{ن}_{٢}$

الثاني وصل أولاً

$$\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢} + ١$$

$\text{ف}_{١} = ٥(\text{ن}_{٢}+١)^{٢}$ ، $\text{ف}_{٢} = ٥\text{ن}_{٢}^{٢} + ١٥\text{ن}_{٢}$

$$\text{ف}_{١} = \text{ف}_{٢}$$

$$٥(\text{ن}_{٢}^{٢} + ٢\text{ن}_{٢} + ١) = ٥\text{ن}_{٢}^{٢} + ١٥\text{ن}_{٢}$$

$$٥\text{ن}_{٢}^{٢} + ١٠\text{ن}_{٢} + ٥ = ٥\text{ن}_{٢}^{٢} + ١٥\text{ن}_{٢}$$

$$٥ = ٥\text{ن}_{٢}$$

$$\text{ن}_{٢} = ١ \rightarrow \text{ن}_{١} = ٢$$

١- $\text{ف}_{١}(٢) = ٢٠\text{م} = \text{ل}$

أو $\text{ف}_{٢}(١) = ٥ + ١٥ = ٢٠\text{م}$

٢- $\text{ع}_{١}(٢) = ١٠\times٢ = ٢٠\text{م/ث}$

$\text{ع}_{٢}(١) = ١٠ + ١٥ = ٢٥\text{م/ث}$

---

٤) من ارتفاع ١٠٠م سقط جسم وفق العلاقة $\text{ف}_{١}(\text{ن}) = ٥\text{ن}^{٢}$ وفي نفس الوقت قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض وفق العلاقة $\text{ف}_{٢}(\text{ن}) = \text{أ ن} + \text{ب ن}^{٢}$ جد أ ، ب حيث أن الجسمين لهما نفس الارتفاع عندما ن = ٢ وأن $\text{ع}_{٢}(٢) = ٣٠$ م/ث والمسافة عن سطح الأرض .

الحل :

$\text{ف}_{١}$ الأرض $= ١٠٠ - ٥\text{ن}^{٢}$

$\text{ف}_{٢}$ الأرض $= \text{أ ن} + \text{ب ن}^{٢}$

$$\text{ف}_{١}(٢) = \text{ف}_{٢}(٢)$$

$$٨٠ = ٢\text{أ} + ٤\text{ب} \qquad (\div ٢)$$

$$\text{أ} + ٢\text{ب} = ٤٠ \quad --- ١$$

$$\text{ع}_{٢} = \text{أ} + ٢\text{ب ن}$$

$$\text{ع}_{٢}(٢) = \text{أ} + ٤\text{ب} = ٢٠ \quad --- ٢$$

$$١) \rightarrow \text{أ} + ٢\text{ب} = ٤٠$$

$$٢)\times -١ \leftarrow -\text{أ} - ٤\text{ب} = -٢٠$$

$$-٢\text{ب} = ١٠$$

$$\text{ب} = -٥$$

$$\text{أ} = ٥٠$$

٥) تتحرك نقطة مادية حسب العلاقة
ف(ن) = $\sqrt{ن}$ (٩ - ن) بين أن هذه النقطة تبدأ بالعودة بعد ٣ ثوان .

الحل :

ع(ن) = $\sqrt{ن}$ × -١ + (٩-ن) × $\frac{١}{٢\sqrt{ن}}$ = ٠

$\sqrt{ن}$ = $\frac{٩-ن}{٢\sqrt{ن}}$ ← ٢ن = ٩-ن

٣ن = ٩ ← ن = ٣

ع > ٠ قبل ٣ ثوان

ع = ٠ عندما ن = ٣ ثوان

ع < ٠ بعد ن = ٣ ثوان

∴ الجسم يغير اتجاه حركته بعد ٣ ثوان .

٦) يتحرك جسم وفق العلاقة
ف(ن) = $\frac{١}{٤}$ ن^{٤} - ٢ن^{٣} + $\frac{١١}{٢}$ ن^{٢} - ٦ن + ٧
جد المسافة المقطوعة عندما تنعدم السرعة ؟

الحل :

ع = ن^{٣} - ٦ن^{٢} + ١١ن - ٦ = ٠

بالتجريب والعوامل

ن = ١ ، ٢ ، ٣

ف(١) = ٤,٧٥ م

ف(٢) = ٥ م

ف(٣) = ٤,٧٥ م

ثالثاً : التزايد والتناقص والتقعر

المصطلح	التعريف أو النظرية
النقطة الحرجة	هي التي تنتمي للمجال بحيث قَ(س) = صفر أو غ . م
الانعطاف	١) تنتمي للمجال ٢) قً(س) = صفر ، أو غ . م ٣) قً يغير اشارته حول الرقم ٤) ق(س) متصل عندها
تعريف التزايد والتناقص	١) التزايد س ٢ > س ١ ، ق(س ٢) > ق(س ١) ← ق متزايد ٢) التناقص س ٢ > س ١ ، ق(س ١) > ق(س ٢) ← ق متناقص
تعريف التقعر	١) جميع مماسات ق(س) تقع أسفل المنحنى (مقعر للأعلى) ٢) جميع مماسات ق(س) تقع أعلى المنحنى (مقعر للأسفل)
نظرية التزايد والتناقص	١) قَ > ٠ على (أ ، ب) ← ق(س) متزايد على [أ ، ب] ٢) قَ < ٠ على (أ ، ب) ← ق(س) متناقص على [أ ، ب]
زوايا ميل التزايد والتناقص	١) جميع مماسات ق(س) تصنع زوايا حادة بالاتجاه الموجب مع السينات (اقتران متزايد) ٢) جميع مماسات ق(س) تصنع زوايا منفرجة بالاتجاه الموجب مع السينات (اقتران متناقص)

الأسئلة

اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) إذا علمت أن جميع مماسات ق(س) تصنع زوايا منفرجة مع السينات بالاتجاه الموجب فإن ق على مجاله :

أ) ق(س) متزايد
ب) ق(س) متناقص
ج) ق(س) مقعر للأعلى
د) ق(س) مقعر للأسفل

---

٢) إذا علمت أن س٢ - س١ > ٠
ق(س١) - ق(س٢) > ٠ على مجاله فإن :

أ) ق(س) متزايد
ب) ق(س) متناقص
ج) ق(س) مقعر للأعلى
د) ق(س) مقعر للأسفل

---

٣) ق كثير حدود من الدرجة الرابعة معرف على [أ ، ب] فإن أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة :

أ) ٤ ب) ٦
ج) ٥ د) ٣

---

٤) ق(س) = [$\frac{1}{3}$ س + ١] إن قيم س الحرجة للاقتران ق المعرف على [-٣ ، ٣] :

أ) { - $\frac{1}{3}$ } ب) (-٣، ٣)
ج) { -٣، ٣} د) [-٣، ٣]

---

٥) ق(س) = [$\frac{1}{3}$ س + ١] س المعرف على [-٣ ، ٣] ، إن قيم س الحرجة :

أ) [-٣ ، ٣] ب) (-٣، ٣)
ج) [-٣ ، ٠] د) [-٣، ٠] ، {٣}

٦) ق(س) = س + (٤ - م٢) س٢ + ٧ ، فإن قيم م التي تجعل ق مقعر للأسفل :

أ) (- ∞ ، -٢)
ب) (-٢، ٢)
ج) (- ∞ ، -٢) ، (٢ ، ∞)
د) ح - {-٢، ٢}

---

٧) ق اقتران معرف على [١ ، ٤)
ق̃(س) = ٢س - ١ ، فإن قيم س الحرجة :

أ) { ١ ، ٤ ، $\frac{1}{2}$ } ب) { ١ }
ج) { ١ ، $\frac{1}{2}$ } د) { ١ ، ٤ }

اختبار المشتقة الثانية

لتحديد العظمى والصغرى المحلية

١) نجد ق̃ ← (ق̃ = ٠ الحرجات)
٢) نجد ق̃̃ (س)
٣) ق̃̃ (الحرجة) ←
+ صغرى محلية
- عظمى محلية
٠ يفشل الاختبار

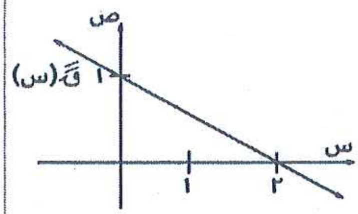
* استخداماته : ١) رسم ق̃ (س)
٢) معلومات عن ق̃

الأمثلة

٨) ق كثير حدود ، ق̃ (١) = صفر
ق̃ (١)× ق̃̃ (٢)> ٠ ، ق̃̃ (٢) < ٠ ، فإن للاقتران ق(س) عند س = ١ :

أ) عظمى محلية ب) عظمى مطلقة
ج) صغرى محلية د) صغرى مطلقة

٩) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى $\bar{ق}$(س) للاقتران ق المعرف على ح وكان للاقتران حرجة عند س = ١ ، فإن ق(١) :



أ) صغرى محلية
ب) صغرى مطلقة
ج) عظمى محلية
د) عظمى مطلقة

---

١٠) ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ - ٥ س فإن ق(س) مقعر للأعلى في الفترة :

أ) [٠ ، ∞)　　ب) (-∞ ، ٠]
ج) [١ ، ∞)　　د) (-∞ ، ∞)

---

١١) ق(س) = ٢س - ٤ (م - ١) س^{٢} فإن قيمة الثابت م التي تجعل ق(س) مقعراً للأعلى :

أ) (١ ، ∞)　　ب) (-١ ، ∞)
ج) (-∞ ، ١)　　د) (-١ ، ١)

---

١٢) إن قيم س الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤س}$ هي :

أ) { ٠ ، ٢ ، ٤ }　　ب) { ٠ ، ٤ }
ج) { ٢ }　　د) { ٤ }

---

١٣) ق(س) = (أ س + ب)$^{\frac{١}{٣}}$ + ٥ب له قصوى عند س = ٢ مقدارها ٦ فإن أ ، ب على الترتيب :

أ) $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$　　ب) $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٦}{٥}$
ج) $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{-٦}{٥}$　　د) $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{-٦}{٥}$

أسئلة مقالية

١) ق(س) = جا س + $\sqrt{٣}$ جتا س
س ∈ [٠ ، ٢π]

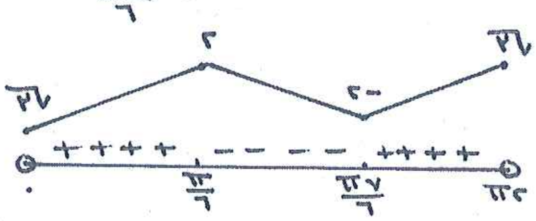
١) جد النقط الحرجة
٢) فترات تزايد وتناقص ق(س)
٣) القيم القصوى وبين نوعها

الحل :

ق(س) متصل على [٠ ، ٢π]
وقابل للاشتقاق على (٠ ، ٢π)
ق$'$(س) = جتاس - $\sqrt{٣}$ حاس = ٠
ظاس = $\sqrt{٣}$

الأول　　　الثالث

س = $\frac{\pi}{٦}$　　س = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°
= $\frac{٧\pi}{٦}$



ق(س) متزايد على [٠ ، $\frac{\pi}{٦}$] ، [$\frac{٧\pi}{٦}$ ، ٢π]
ومتناقص على [$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$]

عند س = $\frac{\pi}{٦}$ عظمى مطلقة ومحلية
مقدارها ٢
عند س = $\frac{٧\pi}{٦}$ صغرى مطلقة ومحلية
مقدارها -٢

٢) ق(س) = جا^{٢}س + جتا س

س ∈ [٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] ، حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى للاقتران ق(س) وحدد نوعها .

الحـل :

ق(س) متصل على [٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

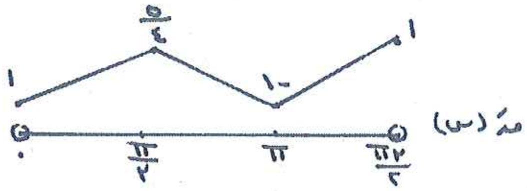
وقابل للاشتقاق على (٠ ، $\frac{٣\pi}{٢}$)

ق'(س) = ٢جاس جتاس − جاس = ٠

جاس (٢جتاس − ١) = ٠

جاس = ٠ ← س = ٠ ، π ، $\cancel{٢\pi}$

جتاس = $\frac{١}{٢}$ ← س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\cancel{\frac{٥\pi}{٣}}$



ق(س) متزايد على [٠ ، $\frac{\pi}{٣}$] ، [π ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

متناقص على [$\frac{\pi}{٣}$ ، π]

عند س = $\frac{\pi}{٣}$ عظمى مطلقة ومحلية مقدارها $\frac{٥}{٤}$

عند س = π صغرى مطلقة ومحلية مقدارها −١

٣) ق(س) = $\sqrt{١ - \text{جا س}}$ [٠ ، ٢π]

حدد فترات التزايد والتناقص لـ ق(س) والقيم القصوى وحدد نوعها .

الحـل :

ق(س) متصل لأن

−١ ≤ جاس ≤ ١

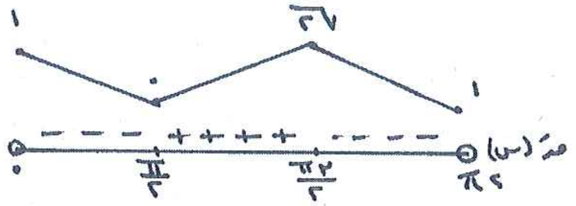
ق'(س) = $\frac{-\text{جتاس}}{٢\sqrt{١-\text{جاس}}}$

أصفار البسط

س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

أصفار المقام

س = $\frac{\pi}{٢}$



عند س = $\frac{٣\pi}{٢}$ عظمى مطلقة ومحلية مقدارها ($\sqrt{٢}$)

عند س = ٠ صغرى مطلقة ومحلية مقدارها (٠)

٤) ق(س) = { س^{٢} - ٢س - ١٠ ، س < ١ ؛ س^{٣} - ١٢س ، س ≥ ١ }

حدد مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى وبين نوعها .

الحل :

المجال ح

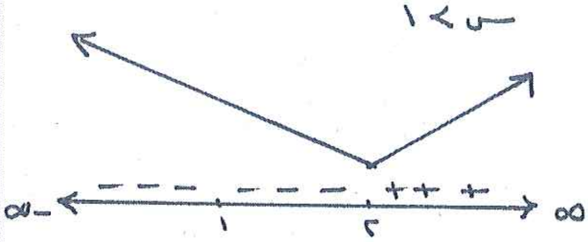
د(س) متصل عند س = ١

د'(س) = { ٢س - ٢ ، س < ١ ؛ ٣س^{٢} - ١٢ ، س > ١ ؛ غ.م ، س = ١ }

د'(١) غ.م

٢س - ٢ = ٠ ← س = ١ ✗ غ.م

٣س^{٢} - ١٢ = ٠ ← س = ٢ ✓ ، -٢ ✗ لأن س > ١



د(س) متناقص على (-∞ ، ٢]

د(س) متزايد على [٢ ، ∞)

عند س = ٢ صغرى مطلقة ومحلية مقدارها (-١٦)

٥) ق(س) = س | س^{٢} - ٣ | حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وحدد نوعها .

الحل :

المجال ح

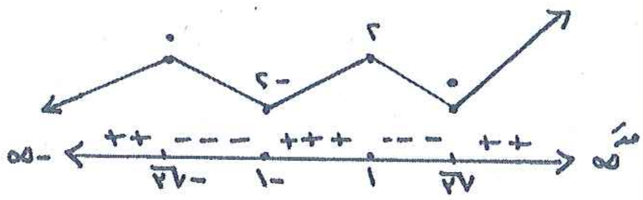
نفس التعريف

د(س) = { س^{٣} - ٣س ، س ≥ √٣ ، س ≤ -√٣ ؛ ٣س - س^{٣} ، -√٣ < س < √٣ }

د'(س) = { ٣س^{٢} - ٣ ، س > √٣ ، س < -√٣ ؛ ٣ - ٣س^{٢} ، -√٣ < س < √٣ ؛ غ.م ، س = √٣ ، -√٣ }

٣س^{٢} - ٣ = ٠ ← س = ١ ، -١ ∉ للمجال الجزئي

٣ - ٣س^{٢} = ٠ ← س = ١ ، -١ ∈ -√٣ < س < √٣



لا يوجد مطلقة

(-√٣ ، ٠) ، (١ ، ٢) عظمى محلية

(-١ ، -٢) ، (√٣ ، ٠) صغرى محلية

٦) ق(س) = -٣س^٤ + ١٦س^٣ - ٢٤س^٢ - ١٢

س ∈ [-١، ٣]

حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى للاقتران ق(س) وبين نوعها .

الحل :

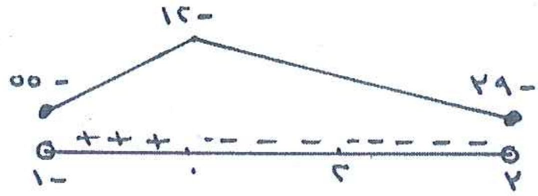
ق(س) متصل على [-١، ٢]

وقابل للاشتقاق على (-١، ٢)

ق′(س) = -١٢س^٣ + ٤٨س^٢ - ٤٨س

= -١٢س (س - ٢)^٢ = ٠

س = ٠ ، س = ٢



ق(س) متزايد على [-١، ٠]

متناقص على [٠، ٢]

عند س = -١ صغرى مطلقة

مقدارها (-٥٥)

عند س = ٠ عظمى مطلقة ومحلية

مقدارها (-١٢)

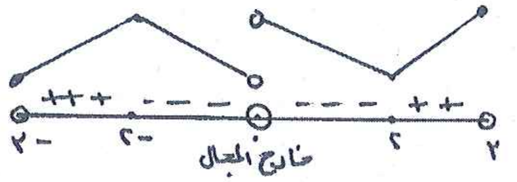
٧) ق(س) = س + $\frac{٤}{س}$ حيث

س ∈ [-٣، ٣] - {٠}

حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية .

الحل : ق(س) متصل على مجاله

ق′(س) = ١ - $\frac{٤}{س^٢}$ = ٠ ⇐ س = ٢ ، -٢



ق(س) متزايد على [-٣، -٢] ، [٢، ٣]

ومتناقص على [-٢، ٠) ، (٠، ٢]

عند س = -٢ عظمى محلية

عند س = ٢ صغرى محلية

---

٨) حدد مجالات التقعر عن مجاله

ق(س) = { س^٣ - ١ ، س < ٢ ؛ ١١ - س^٢ ، س ≥ ٢ }

الحل : ق(س) متصل على ح

ق′(س) = { ٣س^٢ ، س < ٢ ؛ -٢س ، س > ٢ ؛ غ.م ، س = ٢ }

ق″(س) = { ٦س ، س < ٢ ؛ -٢ ، س > ٢ ؛ غ.م ، س = ٢ }

٦س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ س < ٢

عند س = ٢ ق″(٢) غ.م

(-∞، ٠) ، (٢، ∞)

٩) ق(س) = $\sqrt[3]{\text{س} + ٣}$

الحل :

ق(س) متصلة على مجالها ح

ق'(س) = $\frac{١}{٣}$ (س + ٣)$^{-\frac{٢}{٣}}$

ق''(س) = $\frac{-٢}{٩}$ (س + ٣)$^{-\frac{٥}{٣}}$ = $\frac{-٢}{٩(\text{س}+٣)^{\frac{٥}{٣}}}$

س = -٣

ق'' : + + + + + ‎-٣‎ - - - - -

(-٣ ، ٠) نقطة انعطاف

١٠) ق(س) = جتا س - جا س [٠ ، ٢π]

الحل :

ق(س) متصلة على [٠ ، ٢π]

ق'(س) = - جاس - جتاس

ق''(س) = - جتاس + جاس = ٠

ظاس = ١ ← س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

ق'' : ٠ - - - $\frac{\pi}{٤}$ + + + + $\frac{٥\pi}{٤}$ - - - ٢π

١١) ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، منحنى ق(س) يمر بنقطة الأصل ومعادلة المماس لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف س = ٢ هي ص - ٢س + ١ = ٠ ، جد ق(س) .

الحل :

ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

ق(٠) = ٠ ← د = ٠ ---- (١)

عند س = ٢ تماس وانعطاف

ق(٢) = ص$|_{\text{س}=٢}$

٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ٣

٨أ + ٤ب + ٢جـ = ٣ ---- (٢)

كذلك ص' = ق'(٢) = ٢

ق'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ

ق'(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ = ٢ ---- (٣)

كذلك ق''(٢) = ٠ (انعطاف)

ق''(س) = ٦أ س + ٢ب

ق''(٢) = ١٢أ + ٢ب = ٠ ÷ ٢

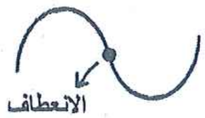
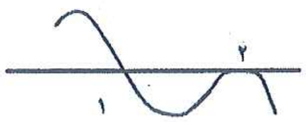
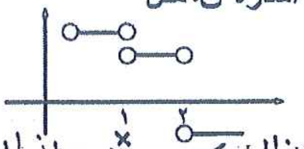
٦أ + ب = ٠ ---- (٤)

بالحذف

أ = $\frac{-١}{٨}$ ، ب = $\frac{٣}{٤}$ ، جـ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق(س) = $\frac{-١}{٨}$ س^{٣} + $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س

مكثف : تطبيقات التفاضل

	من رسم ق(س)	من رسم قَ(س)	من رسم قً(س)
النقاط الحرجة لـ ق	١) عدم الاتصال ٢) الاطراف إن كانت ضمن المجال ٣) العظمى والصغرى ٤) الثابت ______ ٥) المدبب والحاد 	١) عدم الاتصال ٢) الاطراف إن كانت ضمن مجال ق(س) ٣) التقاطع مع السينات	لا يمكن ايجادها
الانعطاف لـ ق	التحول من التقعر  بشرط أن يكون الاقتران عندها متصلاً	١) العظمى والصغرى ٢) عدم الاتصال بشرط أن قَ يغير من اشارته (تزايد أو تناقص قَ) (١) انعطاف  (٢) ليست انعطاف 	١) التقاطع مع السينات بشرط تغيير إشارة قً مثل  ٢) عدم الاتصال بشرط تغير اشارة قً مثل 
تزايد وتناقص ق(س)	 	فوق المحور (+) ← متزايد تحت المحور (-) ← متناقص	لا يمكن معرفتها
التقعر (تزايد وتناقص قَ (س))	 مقعر للاعلى قَ متزايد مقعر للاسفل قَ متناقص	 صاعد قَ متزايد ق(س) مقعر للأعلى قً(س) > ٠ هابط قَ متناقص ق(س) مقعر للاسفل قً(س) < ٠	فوق المحور قً (+) ← مقعر للأعلى قَ متزايد تحت المحور قً (-) ← مقعر للأسفل قَ متناقص

استنتاج الخصائص من رسم ق ، قَ ، قً

روابط مهمة جداً

١) ق(س) متزايد ↔ قَ > ٠
أي رسم قَ فوق محور السينات

٢) ق(س) متناقص ↔ قَ < ٠ ← أي أن قَ تحت محور السينات

٣) ق(س) مقعر للأعلى ↔
قً(س) > ٠ أي رسم قً فوق محور السينات

٤) ق(س) مقعر للأسفل ↔
قً(س) < ٠ أي رسم قً تحت محور السينات

٥) قَ متزايد ↔ قً > ٠
↔ ق(س) مقعر للأسفل .

رسم قً > ٠ | رسم ق(س) | رسم قَ

قَ متزايد ← ق مقعر للأعلى

ق للأعلى ← قً > ٠ ← قَ متزايد

قَ متزايد ← قً > ٠ ← ق مقعر للأعلى

٦) قَ متناقص ↔ قً < ٠
ق(س) مقعر للأسفل

الأسئلة

اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) س$_{٢}$ > س$_{١}$ ، قَ(س$_{١}$) > قَ(س$_{٢}$)
لكل س ∈ للمجال فإن :

أ) ق(س) متزايد
ب) ق متناقص
ج) ق(س) مقعر للأعلى
د) ق(س) مقعر للأسفل

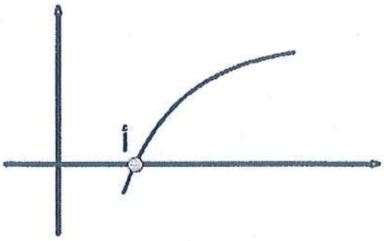
---

٢) إذا علمت أن جميع مماسات قَ(س) تصنع زوايا حادة مع السينات بالاتجاه الموجب فإن :

أ) ق(س) متزايد
ب) ق(س) مقعر للأعلى
ج) ب) ق (س) متناقص
د) ق(س) مقعر للأسفل

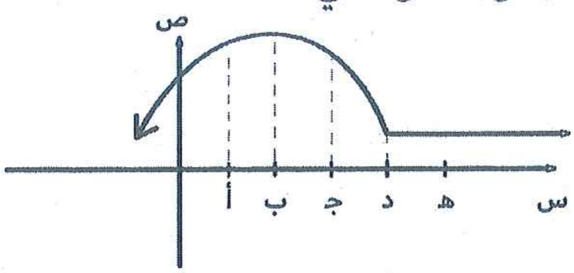
---

٣) من الشكل التالي فإن أحد العبارات التالية صحيحة



أ) قَ (أ) < قً (أ) < ق (أ)
ب) قً (أ) < قَ (أ) < ق (أ)
ج) قً (أ) < ق (أ) < قَ (أ)
د) ق (أ) < قً (أ) < قَ (أ)

٤) من الشكل التالي



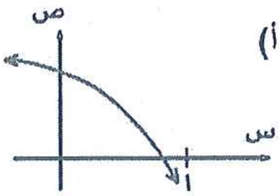
إن قيمة س التي يكون عندها المشتقة الثانية سالبة والمشتقة الأولى موجبة :

أ) ب   ب) أ   ج) د   د) هـ

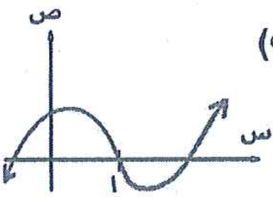
---

٥) أي المنحنيات يمثل رسم ق(س) الذي فيه ق′ (٠) > ٠ ، ق′ (١) < ٠
ق″ (س) سالبة دائماً .

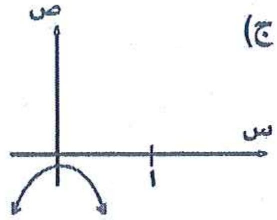
أ)



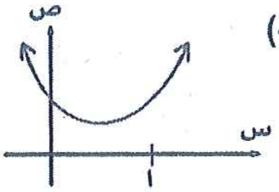
ب)



ج)

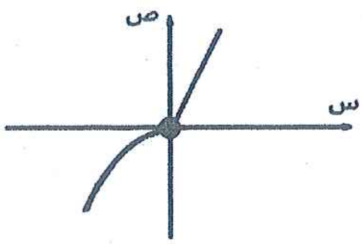


د)

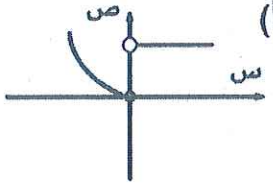


٢٠٠٨

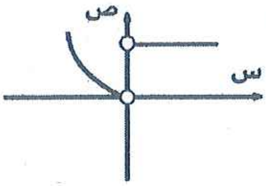
٦) إذا مُثِّل منحنى ق(س) بالشكل فإن الشكل التقريبي لمنحنى ق′ (س) هو :



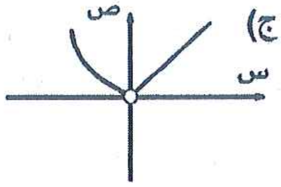
أ)



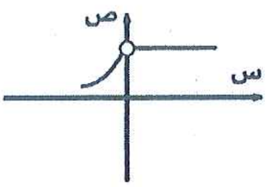
ب)



ج)

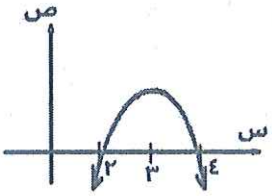


د)

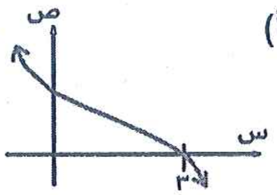


٢٠٠٥

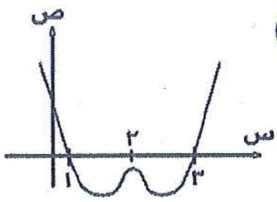
٧) الشكل التالي يمثل منحنى ق′ (س)
أي الرسومات التالية يعد تمثيلاً لمنحنى ق(س) :



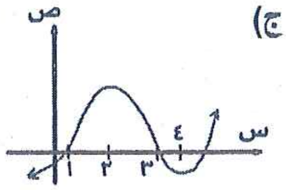
أ)



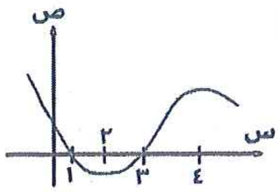
ب)



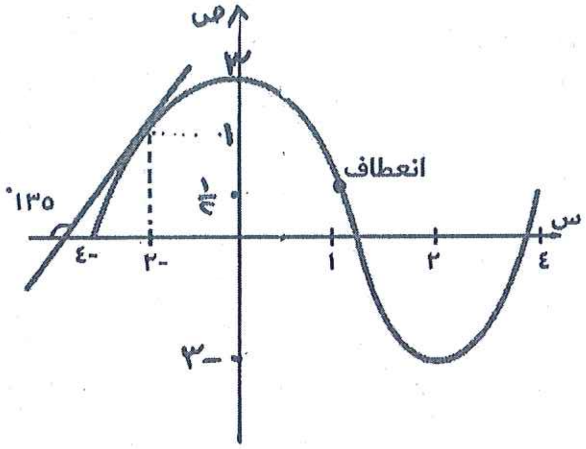
ج)



د)



١٢) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س) المعرف على [-٤ ، ٤] جد :



١) مجالات تزايد وتناقص ق(س)

متزايد على [-٤ ، ٠] ، [٢ ، ٤]

متناقص على [٠ ، ٢]

٢) مجالات التقعر

مقعر للأعلى [١ ، ٤]

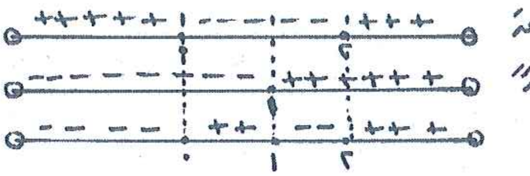
مقعر للأسفل [-٤ ، ١]

٣) القيم القصوى المطلقة والمحلية

(٠ ، ٣) عظمى مطلقة ومحلية

(٢ ، -٣) صغرى مطلقة ومحلية

٤) الفترة التي يكون قَ < ٠ ، قً > ٠



(١ ، ٢)

٥) قَ × قً < ٠

(-٤ ، ٠) ، (١ ، ٢)

٦) هـ(س + ١) = ق^٢(س) + س^٢ - ١ ، جد هـَ(-١)

س + ١ = -١ ← س = -٢

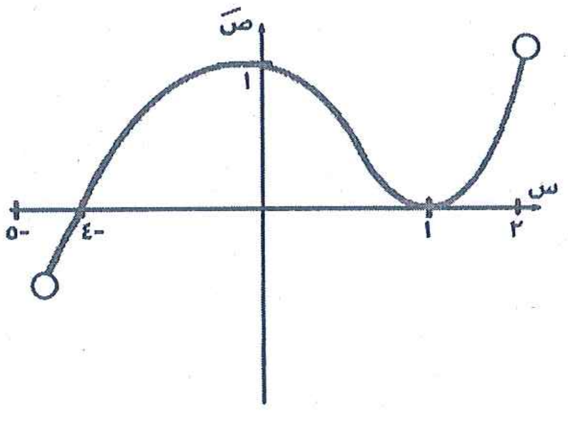
هـَ(س + ١) = ٢ق(س) قَ(س) + ٢س

لكن قَ(-٢) = ظا ٤٥° = ١

هـَ(-١) = ٢ق(-٢) قَ(-٢) - ٤

= ٢ × ١ × ١ - ٤ = -٢

١٣) من الشكل المجاور لمنحنى قَ(س) للاقتران ق(س) المتصل على [-٥ ، ٢]



١) قيم س الحرجة للاقتران ق(س)

{-٥ ، ٢ ، -٤ ، ١}

٢) فترات تزايد وتناقص ق(س)

متزايد على [-٤ ، ١] ، [١ ، ٢]

متناقص على [-٥ ، -٤]

٣) مجالات تقعر ق(س)

مقعر للأعلى [-٥ ، ٠] ، [١ ، ٢]

مقعر للأسفل [٠ ، ١]

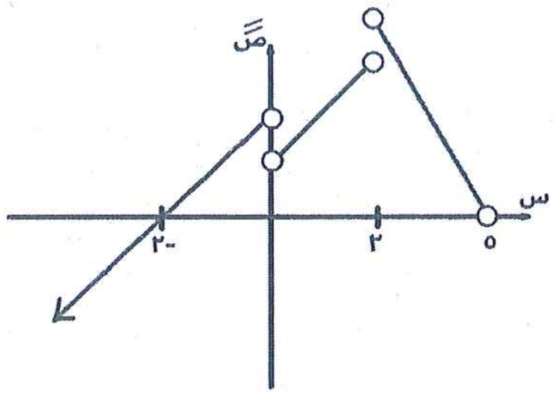
٤) قيم س الانعطاف

{٠ ، ١}

٥) زاوية الانعطاف عند س = ٠

ظاهـ = ق'(٠) = ١ ← هـ = $\frac{\pi}{٤}$

١٤) من الشكل المجاور لمنحنى قَ (س) للاقتران المتصل ق(س) على (-∞ ، ٥] جد :



١) قيم س الانعطاف

{-٢}

٢) فترات تقعر ق(س)

مقعر للأعلى [-٢ ، ٥]

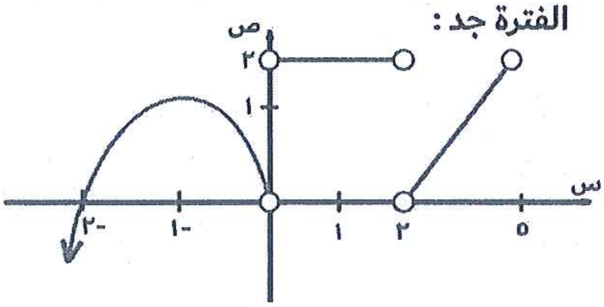
مقعر للأسفل (-∞ ، -٢]

٣) إذا كانت س = -٣ ، س = ١ حرجة حدد أيا منها عظمى محلية أم صغرى محلية إن أمكن .

ق''(١) = + ← (١ ، ق(١)) صغرى محلية

ق''(-٢) = - ← (-٢ ، ق(-٢)) عظمى محلية

١٥) من الشكل المجاور لمنحنى قَ(س) ، حيث ق(س) معرف على (-∞ ، ٥] ومتصل على نفس الفترة جد :



١) قيم س الحرجة لمنحنى ق(س)

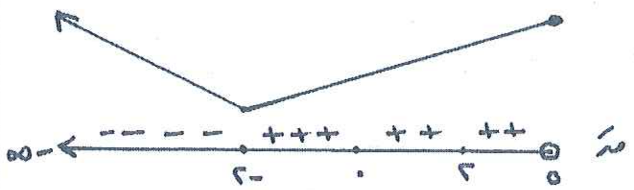
{-٢ ، ٠ ، ٢ ، ٥}

٢) الفترات التي يكون فيها ق(س) متناقص ومتزايد

متزايد على [-٢ ، ٥]

متناقص على (-∞ ، -٢]

٣) القيم القصوى المطلقة والمحلية (إن وجدت)



عند س = -٢ صغرى مطلقة ومحلية مقدارها ق(-٢)

مكثف : تطبيقات التفاضل

المعدلات المرتبطة بالزمن وتطبيقات القيم القصوى

المسألة	الإجراء	توضيحات
إذا أعطى السؤال الزمن (أو طلب الزمن)	$\text{س} = \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \times \text{ن}$ $\text{ص} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \text{ن}$	
مسائل الكرات والدوائر	المعادلة المساعدة غالباً قانون فيثاغورس	إلا بوجود مثلث متساوي الأضلاع نستخدم النسب المثلثية
المخاريط	المعادلة المساعدة غالباً تكون تشابه المثلثات	إذا أعطى زاوية الرأس نستخدم النسب المثلثية
زاوية معطاه أو مطلوب معدل زاوية	نستخدم النسب المثلثية جا θ ، جتا θ ، ظا θ	بشرط وجود زاوية قائمة
مسائل اختلاف الانطلاق أو اختلاف الوصول	مسائل الانطلاق نجمع الفرق للذي انطلق أولاً مسائل الوصول نجمع الفرق للمتأخر	

الأسئلة

١) جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ١٢ سم بحيث يقع رأس الداخلي على مركز قاعدة الخارجي .

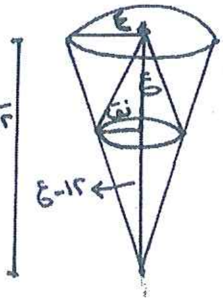
الحل : $\text{ح} = \frac{1}{3}\pi\,\text{نق}^2\,\text{ع}$

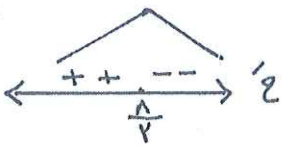
من التشابه $\frac{\text{نق}}{4} = \frac{12-\text{ع}}{12} \leftarrow \text{ع} = 12 - 3\text{نق}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{3}\text{نق}^2(12 - 3\text{نق}) = \pi(4\text{نق}^2 - \text{نق}^3)$

$\frac{\text{دح}}{\text{دنق}} = \text{ح}' = \pi(8\text{نق} - 3\text{نق}^2) = 0$

$\text{نق} = 0$ X ، $\text{نق} = \frac{8}{3}$

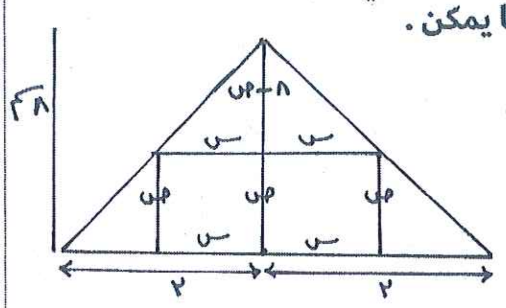




$\therefore \text{ح} = \frac{256}{27}\pi\ \text{سم}^3$

٢) مثلث متساوي الساقين طول قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ٨ سم يراد قطع مستطيل منه بحيث يقع رأسان منه على قاعدة المثلث ويقع كل من الرأسين الآخرين على ساقي المثلث جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

الحل :



$$\text{م} = \text{٢ س ص}$$

$$\text{من التشابه}\quad \frac{\text{٨} - \text{ص}}{\text{٨}} = \frac{\text{س}}{\text{٣}}$$

$$\text{س} = \text{٣} - \frac{\text{٣}}{\text{٨}}\,\text{ص}$$

$$\text{م} = \text{٢}\left(\text{٣} - \frac{\text{٣}}{\text{٨}}\,\text{ص}\right)\text{ص}$$

$$= \text{٦ ص} - \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\,\text{ص}^{\text{٢}}$$

$$\text{م}' = \text{٦} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\,\text{ص} = \text{٠}$$

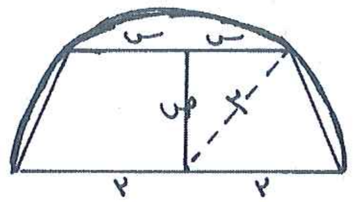
$$\text{ص} = \text{٤}$$

$$\text{س} = \text{٣} - \frac{\text{٣}}{\text{٨}} \times \text{٤} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$

اذاً أكبر المساحة = ١٢ سم²

٣) جد مساحة أكبر شبه منحرف يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها ٣ سم بحيث يكون رأسين منه على نهايتي القطر والرأسين الآخرين على محيط نصف الدائرة .

الحل :



$$\text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{٦} + \text{٢س}\right)\text{ص}$$

$$= \left(\text{٣} + \text{س}\right)\text{ص}$$

$$\text{من فيثاغورث}\quad \text{٩} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}}}$$

$$\text{م} = \left(\text{٣} + \text{س}\right)\left(\sqrt{\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}}}\right)$$

$$\text{م}' = \left(\text{٣} + \text{س}\right)\left(\frac{-\text{٢س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}}}}\right) + \sqrt{\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}}} = \text{٠}$$

$$\sqrt{\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٣س} + \text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}}}}$$

$$\text{٩} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{٣س} + \text{س}^{\text{٢}}$$

$$\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٣س} - \text{٩} = \text{٠}$$

$$\left(\text{٢س} - \text{٣}\right)\left(\text{س} + \text{٣}\right) = \text{٠}$$

$$\text{س} = -\text{٣} \times \quad،\quad \text{س} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{٢٧}}{\text{٤}}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}}\sqrt{\frac{\text{٢٧}}{\text{٤}}} = \frac{\text{٩}\sqrt{\text{٢٧}}}{\text{٤}}$$

٤) يراد صنع صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، مغلق من جهتي القاعدة ، ذو حجم ٢٠٠٠ سم^3 بحيث يكلف صنع ١ سم^2 من القواعد ضعف تكلفة ١ سم^2 من الجوانب ، جد أبعاد الصندوق حتى تكون التكلفة الكلية لصنع الصندوق أقل ما يمكن .

الحل :

نفرض أن تكلفة ١سم^2 من الجوانب = ع

∴ تكلفة ١سم^2 من القواعد = الضعف = ٢ع

التكلفة الكلية = مساحة القاعدتين × التكلفة + المساحة الجانبية × التكلفة

$ك = ٢س^2 \times ٢ع + ٤س ص \times ع$

(تذكر ع سعر (ثابت))

$ك = ٤س^2 ع + ٤س ص ع$

لكن $ح = ٢٠٠٠ = س^2 ص \leftarrow ص = \frac{٢٠٠٠}{س^2}$

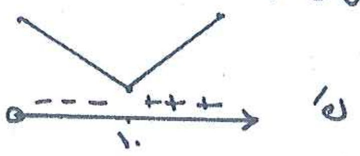
$\therefore ك = ٤س^2 ع + ٤س \times \frac{٢٠٠٠}{س^2} \times ع$

$ك = ٤س^2 ع + \frac{٨٠٠٠}{س} ع$

$ك' = ٨س ع - \frac{٨٠٠٠}{س^2} ع = ٠$

$\therefore س^3 = ١٠٠٠$

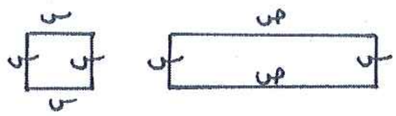
$س = ١٠$



$ص = ٢٠$

٥) خيط طوله ٦٠ سم ، يراد تكوين منه مستطيل ومربع بحيث يكون طول المستطيل = طول المربع ، جد أبعاد الشكلين ليكون مجموع المساحتين أكبر ما يمكن .

الحل :



مجموع المساحتين $م = س^2 + س ص$

$٦٠ = ٤س + ٢س + ٢ص$

$٦٠ = ٦س + ٢ص$

$ص = \frac{٦٠ - ٦س}{٢}$

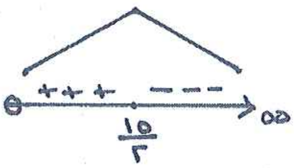
$ص = ٣٠ - ٣س$

$م = س^2 + ٣٠س - ٣س^2$

$= ٣٠س - ٢س^2$

$م' = ٣٠ - ٤س = ٠$

$س = \frac{١٥}{٢}$

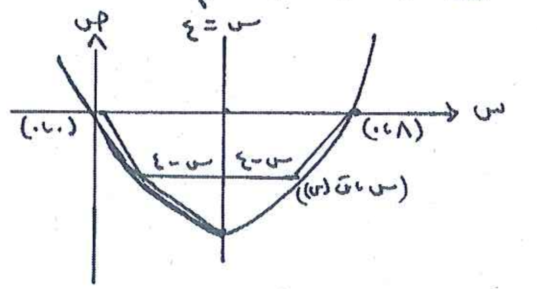


$ص = \frac{١٥}{٢}$

٦) جد مساحة أكبر شبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث يكون احدى قاعدتيه على السينات والرأسين الآخرين على منحنى ق(س) = س^٢ - ٨س

الحل :

محور التماثل $س = \frac{٨}{٢} = ٤$



المساحة $= م = \frac{١}{٢} (٢س - ٨ + ٨)(-ق(س))$

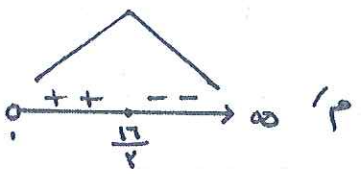
$م = س (٨س - س^٢)$

$م' = س (٨ - ٢س) + (٨س - س^٢)(١) = ٠$

$-٢س^٢ + ١٦س = ٠$

$س(-٢س + ١٦) = ٠$

$س = \frac{١٦}{٢}$

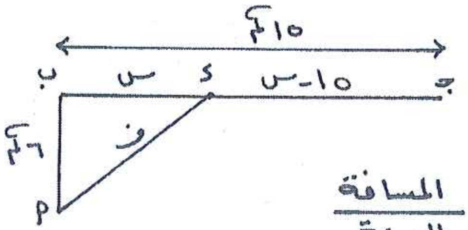


$\therefore م = \frac{١٦}{٢} \left(٨ \times \frac{١٦}{٢} - \left(\frac{١٦}{٢}\right)^٢ \right)$

$= \frac{٢٠٤٨}{٢٧}$

٧) (كتاب) يقف رجل عند النقطة أ التي تبعد ٦ كم عن النقطة ب ، يريد أن يصل إلى النقطة جـ ، مروراً بالنقطة د إذا كان الرجل يسير بسرعة ٣ كم/س عند الانتقال من أ إلى د ، وبسرعة ٦ كم/س عند الانتقال من د إلى جـ فحدد موقع د بحيث يصل بأقصر وقت ممكن علماً بأن البعد بين ب ، جـ ١٥ كم

الحل :



الزمن $= \frac{المسافة}{السرعة}$

$ن_{الكلية} = ن_١ + ن_٢$

$= \frac{ف}{٣} + \frac{١٥-س}{٦}$

$ن = \frac{\sqrt{س^٢+٣٦}}{٣} + \frac{١٥-س}{٦}$

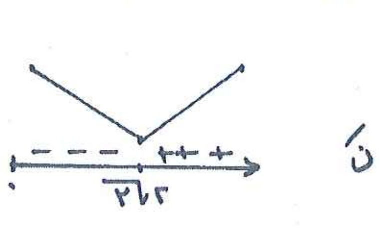
$ن' = \frac{١}{٣} \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+٣٦}} - \frac{١}{٦} = ٠$

$\sqrt{س^٢+٣٦} = ٢س$ تربيع الطرفين

$س^٢ + ٣٦ = ٤س^٢$

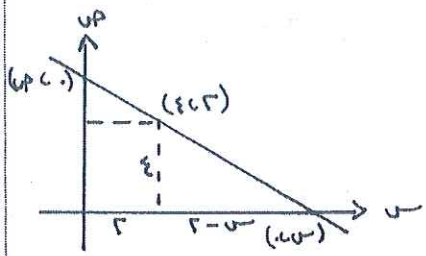
$٣س^٢ = ٣٦$

$س^٢ = ١٢ \leftarrow س = ٢\sqrt{٣}$



٨) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويصنع مع المحورين مثلثاً مساحته أقل ما يمكن

الحل :



$\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{س ص}$

من التشابه $\frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{س}}{\text{س}-٣} \leftarrow \text{ص} = \frac{٤\text{س}}{\text{س}-٣}$

$\text{م} = \frac{1}{2} \times \frac{٤\text{س}^2}{\text{س}-٣}$

$\text{م}' = \frac{1}{2} \times \frac{(\text{س}-٣)(٨\text{س}) - ٤\text{س}^2(١)}{(\text{س}-٣)^2} = ٠$

$٤\text{س}\,(٢\text{س} - ٦ - \text{س}) = ٠$

س = ٠ ✗ ، س = ٦ ✓

$\text{ص} = \frac{٢٤}{٣} = ٨$

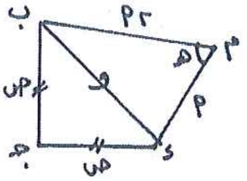
$\text{م}_{\text{المستقيم}} = \frac{٨ - ٠}{٠ - ٦} = -\frac{٤}{٣}$

المعادلة ص − ٠ = $-\frac{٤}{٣}$(س − ٦)

ص = $-\frac{٤}{٣}$س + ٨

٩) معتمداً الشكل التالي الذي يمثل الرباعي م ب جـ د الذي فيه $\overline{\text{م ب}}$ ثابت ويساوي ضعف $\overline{\text{م د}}$، إلا أن وضعه متحول يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة م ، أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة و الضلعان $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ متطابقات دوماً . جد قياس الزاوية (هـ) التي تجعل مساحة الرباعي أكبر ما يمكن .

الحل :



$\text{م}_{\text{الرباعي}} = \text{م}_{\triangle\,\text{د جـ ب}} + \text{م}_{\triangle\,\text{م د ب}}$

$\text{م} = \frac{1}{2}\text{ص}^2 + \frac{1}{2}(\text{م})(٢\text{م})\,\text{جاهـ}$

$= \frac{1}{2}\text{ص}^2 + \text{م}^2\,\text{جاهـ}$

$(\text{ب د})^2 = \text{و}^2 = \text{ص}^2 + \text{ص}^2 \leftarrow \text{و}^2 = ٢\text{ص}^2$

كذلك $\text{و}^2 = \text{م}^2 + (٢\text{م})^2 - ٢(\text{م})(٢\text{م})\,\text{جتاهـ}$

$\therefore ٢\text{ص}^2 = ٥\text{م}^2 - ٤\text{م}^2\,\text{جتاهـ}$

$\text{ص}^2 = \frac{٥}{٢}\text{م}^2 - ٢\text{م}^2\,\text{جتاهـ}$

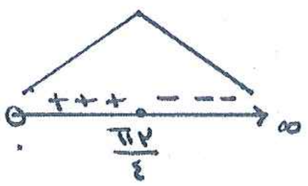
$\therefore \text{م} = \frac{٥}{٤}\text{م}^2 - \text{م}^2\,\text{جتاهـ} + \text{م}^2\,\text{جاهـ}$

$\text{م}' = \text{م}^2\,\text{جاهـ} + \text{م}^2\,\text{جتاهـ} = ٠ \quad \div \text{م}^2$

ظاهـ = −١

$\therefore \text{هـ} = \frac{٣\pi}{٤}$

م'



١٠) جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $ق(س) = \sqrt{س^2 - 1}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(٦، ٠)$

الحل :

نفرض النقطة $(س، ص)$ على منحنى $ق(س) = (س، \sqrt{س^2-1})$

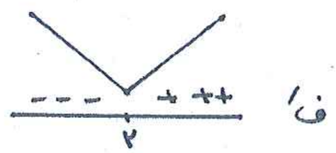
$$ف = \sqrt{(س-٦)^2 + (\sqrt{س^2-1} - ٠)^2}$$

$$ف = \sqrt{(س-٦)^2 + س^2 - 1}$$

$$ف' = \frac{٢(س-٦) + ٢س}{٢\sqrt{(س-٦)^2 + س^2 - 1}} = ٠$$

$$٤س - ١٢ = ٠$$

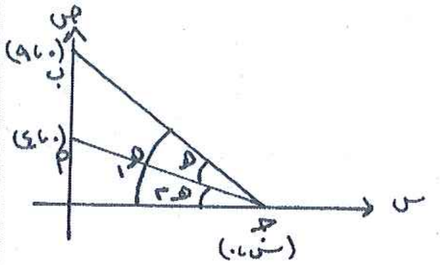
$$س = ٢$$



النقطة $(٢، \sqrt{٨})$

١١) لتكن أ $(٠، ٤)$، ب $(٠، ٩)$ نقطتان ثابتتان ج نقطة تتحرك على محور السينات الموجب جد أكبر قياس ممكن للزاوية أ ج ب

الحل :



$$ظاهـ_1 = \frac{٩}{س}$$

$$ظاهـ_2 = \frac{٤}{س}$$

$$هـ = هـ_1 - هـ_2$$

$$ظاهـ = \frac{ظاهـ_1 - ظاهـ_2}{1 + ظاهـ_1 ظاهـ_2}$$

$$ظاهـ = \frac{\frac{٥}{س}}{1 + \frac{٢٦}{س^2}} \quad \begin{matrix} \times س^2 \\ \times س^2 \end{matrix}$$

$$ظاهـ = \frac{٥س}{س^2 + ٢٦}$$

نشتق بالنسبة لـ س

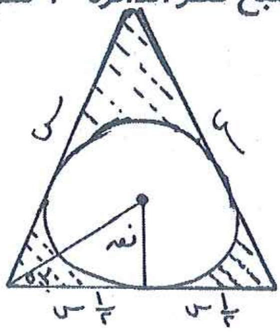
$$قا^2هـ \frac{دهـ}{دس} = \frac{(س^2 + ٢٦)(٥) - ٥س(٢س)}{(س^2 + ٢٦)^2}$$

$$٥(٢٦ - س^2) = ٠ \leftarrow س = ٦ ، -٦ \times$$

$$ظاهـ = \frac{٢٠}{٧٢}$$

$$هـ = ظا^{-1}\left(\frac{٢٠}{٧٢}\right)$$

١٢) مثلث متطابق الأضلاع طول كل ضلع س سم ، رسم بداخله دائرة تمس جميع أضلاعه ، أخذت الدائرة والمثلث معاً بالتمدد بحيث يزداد نصف قطر الدائرة بمعدل ٣ سم/د ، جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة عندما يصبح قطر الدائرة ١٠ سم



الحل :

$\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ٣$

نق = ٥

م = م△ − م○

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}\text{س}^{٢} - \pi\,\text{نق}^{٢}$

نق ⊥ المماس ← تنصف القاعدة
(مثلث متساوي الساقين)

$\text{ظا}\,٣٠° = \frac{\text{نق}}{\frac{١}{٢}\text{س}} \leftarrow \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢\text{نق}}{\text{س}}$

$\text{س} = ٢\sqrt{٣}\,\text{نق}$

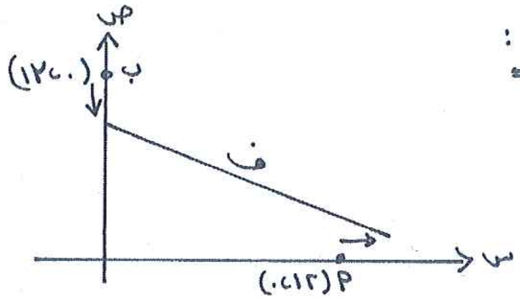
$\therefore \text{م} = ٣\sqrt{٣}\,\text{نق}^{٢} - \pi\,\text{نق}^{٢}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٦\sqrt{٣}\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} - ٢\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$= ٩٠\sqrt{٣} - ٣٠\pi$ سم²/د

١٣) تحركت النقطة أ (١٢ ، ٠) على محور السينات مبتعدة عن نقطة الأصل بمعدل ٢ وحدة/ث والنقطة ب (٠، ١٣) على محور الصادات مقتربة من نقطة الأصل بمعدل ١ وحدة/ث ، جد معدل تغير البعد بين النقطتين بعد مرور ٣ ثوان

الحل :



بعد أ = ١٢ + ٢ن

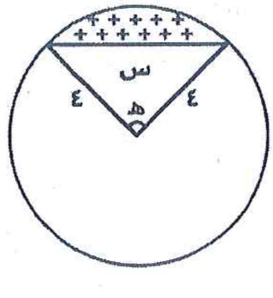
بعد ب = ١٢ − ١ن

$\text{ف} = \sqrt{(١٢+\text{ن})^{٢} + (١٢-\text{ن})^{٢}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\cancel{٢}(١٢+٢\text{ن})\times٢ + \cancel{٢}(١٢-\text{ن})\times-١}{\cancel{٢}\sqrt{(١٢+٢\text{ن})^{٢} + (١٢-\text{ن})^{٢}}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٣٦-١٠}{\sqrt{(١٨)^{٢}+١٠٠}} = \frac{٢٦}{\sqrt{٤٢٤}}$

١٤) في الشكل المجاور دائرة طول نصف قطرها ثابت = ٤ سم ، س وتر في الدائرة يتناقص بمعدل ٢ سم/ث ، جد معدل التغير في مساحة القطعة الدائرية المظللة عندما يصبح قياس الزاوية المركزية هـ = $\frac{\pi}{3}$



الحل :

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٢$

م القطعة = م القطاع - م المثلث

$م = \frac{1}{2}(٤)^2 هـ - \frac{1}{2}(٤)(٤)\text{ جاهـ}$

$م = ٨ هـ - ٨ \text{ جاهـ}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} - ٨ \text{ جتاهـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

نجد $\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}$

$س = \sqrt{١٦ + ١٦ - ٣٢ \text{ جتاهـ}}$

$س = \sqrt{٣٢ - ٣٢ \text{ جتاهـ}}$

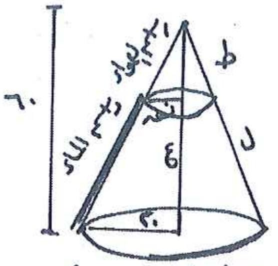
$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٣٢ \text{ جاهـ} \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{٣٢ - ٣٢ \text{ جتاهـ}}}$

$-٢ = \frac{٨\sqrt{٢}\frac{\text{دهـ}}{\text{دن}}}{٤} \leftarrow \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{-٨}{\sqrt{٢}} + \frac{٤}{\sqrt{٢}} = \frac{-٤}{\sqrt{٢}}$

١٥) مخروط قائم رأسه لأعلى ارتفاعه ٦٠ سم نصف قطر قاعدته ٢٠ سم صبّ فيه سائل من فتحة في رأسه بمعدل ٣٠٠ π سم^3/ د جد :

أ) معدل تغير مساحة سطح الماء عندما نق = ٥



مساحة سطح الماء = π نق^2

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi \text{ نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

ح السائل = ح الكبير - ح الصغير

$ح = \frac{1}{3}\pi(٢٠)^2(٦٠) - \frac{1}{3}\pi \text{ نق}^2(٦٠ - ع)$

نريد فقط نق ، نستبدل ع

$\frac{٦٠ - ع}{٦٠} = \frac{\text{نق}}{٢٠} \leftarrow ع = ٦٠ - ٣ \text{ نق}$

$ح = ٨٠٠٠\pi - \pi \text{ نق}^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -٣\pi \text{ نق}^2 \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$٣٠٠\pi = -٣\pi(٢٥)\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$-٤ = \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$\therefore \frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi(٥)(-٤) = -٤٠\pi \text{ سم}^2/\text{د}$

ب) معدل التغير في طول رأسم الماء عندما نق = ٥

نجد $ط = \sqrt{\text{نق}^2 + (٦٠ - ع)^2}$

$= \sqrt{\text{نق}^2 + (٣\text{نق})^2} = \sqrt{١٠ \text{ نق}^2} = \sqrt{١٠}\text{ نق}$

الراسم الكلي لوعاء المخروط $= \sqrt{٢٠^2 + ٦٠^2}$

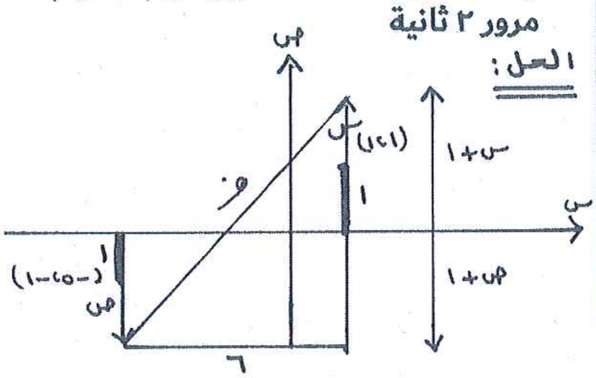
$\therefore ل = \sqrt{٢٠^2 + ٦٠^2} - \sqrt{١٠}\text{ نق}$

$\therefore \frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -\sqrt{١٠}\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

$= -\sqrt{١٠} \times -٤ = ٤\sqrt{١٠} \text{ سم/د}$

١٦) النقطة أ (١، ١) تحركت بشكل عمودي مبتعدة عن السينات بمعدل ٢ سم/ث
النقطة ب (−٥، −١) تحركت بشكل عمودي مبتعدة عن السينات بمعدل ١ سم/ث
جد معدل ابتعاد النقطتين عن بعضها بعد مرور ٢ ثانية

الحل:



$$\left.\frac{دف}{دن}\right|_{ن=٢} = ؟؟$$

$$ف = \sqrt{(س+ص+٢)^٢ + ٣٦}$$

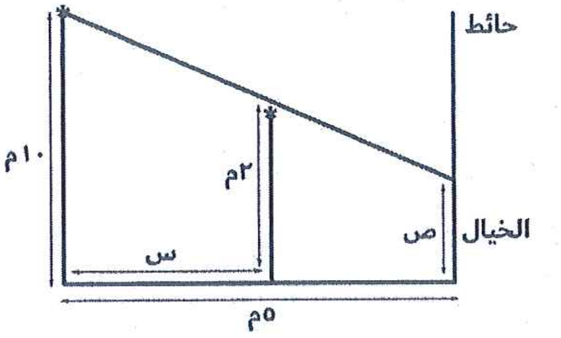
$$\frac{دف}{دن} = \frac{٢(س+ص+٢)\left(\frac{دس}{دن} + \frac{دص}{دن}\right)}{٢\sqrt{(س+ص+٢)^٢ + ٣٦}}$$

$$س = ٢ \times ٢ = ٤$$

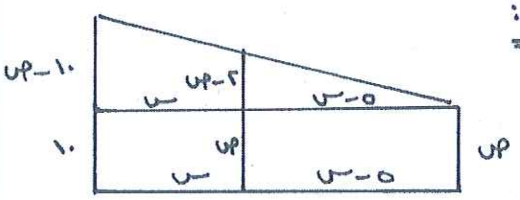
$$ص = ١ \times ٢ = ٢$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{٨(٣)}{\sqrt{٦٤+٣٦}} = \frac{٢٤}{١٠}$$

١٧) في الشكل التالي عمود إضاءة ارتفاعه ١٠م يبعد مسافة ٥م عن حائط عمودي ، يسير رجل طوله ٢م مبتعداً عن العمود بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/ث ، جد معدل تغير طول خيال الرجل على الحائط عندما يكون الرجل على بعد ٢م عن العمود



الحل :



من التشابه : $\frac{٢-ص}{١٠-ص} = \frac{٥-س}{٥}$

$$ص = \frac{١٠س - ٤٠}{س} = ١٠ - \frac{٤٠}{س}$$

$$\frac{دص}{دن} = \frac{٤٠}{س^٢}\,\frac{دس}{دن} = \frac{٤٠ \times \frac{١}{٢}}{٤} = ٥ م/ث$$

إجابة الدوائر من ٢ ← من ٤

١- قَ+(١) ≠ قَ-(١) ← قَ(١) غ.م　(د)

٢- قَ(½) = $\frac{Δص}{Δس} = \frac{ق(١) - ق(٠)}{١ - ٠}$

$= \frac{٠ - ٤}{٠ - ١} = ٤$　(ب)

٣- [٠، ١، ٢}　(جـ)

٤- قَ(٥، ٢) = ٠ تقع على ثابت　(أ)

٥- ظا θ = $\frac{Δص}{Δس} = \frac{٠ - ٤}{-٤ - ٠} = -١$

θ = $\frac{٣π}{٤}$　(جـ)

٦- نجد س ← س + ١ = -١ ← س = -٢

هَ(س+١) = ٢ق(س) قَ(س) + ٢س

هَ(-١) = ٢ق(-٢) قَ(-٢) - ٤

قَ(-٢) = $\frac{Δص}{Δس}$ = -١

معادلة المستقيم لإيجاد ق(-٢)

ص - ص١ = م(س - س١)

ص - ٠ = -١(س + ٤)

ص = -س - ٤ ← ق(-٢) = ٢

∴ هَ(-١) = ٢×٢×-١ - ٤ = صفر　(د)

٧- قَ(٤) = -ظا٤٥° = -١　(جـ)

٨- العمودي // السينات

ص = ص١ ← ص = ٥　(د)

٩- م العمودي = $\frac{Δص}{Δس} = \frac{٢}{٢} = ١$

م المماس عند س = ١ = قَ(١) = $\frac{-١}{م العمودي}$ = -١

هَ(س) = ٢قَ(س) + ٢س

هَ(١) = -٢ + ٢ = صفر　(د)

١٠- ٢س + ص = ١١　مماس ق عند س = ٢

صورة　　مشتقة

ص = ق(٢) = ٥　　٢ + صَ = ٠، صَ = -٢ = قَ(٢)

لَ(س) = $\frac{ق(س) × ١ - س قَ(س)}{ق^٢(س)}$

لَ(٢) = $\frac{٥ - ٣ × -٢}{٢٥} = \frac{١١}{٢٥}$　(ب)

١١- د′(٢) = ظا ٤٥° = ١

المطلوب من لوبيتال أو النهايات الخاصة

$= \frac{د′(٢) - \frac{١}{٢}}{٤} = \frac{١}{٨}$ (ج)

١٢- لهم نفس الميل

٢ص′ − ٥ = ٠ ⟵ ص′ = $\frac{٥}{٢}$

ميل المنحنى ٢(ص − ٢)ص′ = ٥ ⟵

٢(ص − ٢) × $\frac{٥}{٢}$ = ٥ ⟵ ص − ٢ = ١ ⟵ ص = ٣

نجد س ⟵ ١ = ٥س + ١٠ ⟵ س = $\frac{-٩}{٥}$

($\frac{-٩}{٥}$ ، ٣) (ب)

١٣- نجد س ⟵ ٢س = ٦ ⟵ س = ٣

د′(س) = (س + ١) هـ″(٢س) × ٢ + هـ′(٢س)

د′(٣) = ٩هـ″(٦) + هـ′(٦)

لكن د(٣) = ٣هـ′(٦)

٣ = ٣هـ′(٦) ⟵ هـ′(٦) = ١

د′(٣) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٣ - ٠}{٢ - ٥}$ = −١

−١ = ٩هـ″(٦) + ١

هـ″(٦) = $\frac{-٢}{٩}$ (ب)

١٤- العمودي يمر (١، ٤) ⟵ ١ = ٤$\sqrt{جـ}$

$\sqrt{جـ} = \frac{١}{٤}$ ⟵ جـ = $\frac{١}{١٦}$

ص = $\frac{١}{٤}$ س ⟵ ص′ = $\frac{١}{٤}$ = م العمودي

د′(٤) = −٤ (د)

١٥- س١ = ٣ ، ص١ = ١٢ − ٩ = ٣

د′(س) = ٤ − ٢س

م المماس = −٢ ، ص − ٣ = −٢(س − ٣)

ص = −٢س + ٩

يقطع السينات ⟵ ص = ٠ ⟵ س = $\frac{٩}{٢}$

يقطع الصادات ⟵ س = ٠ ⟵ ص = ٩

المساحة = $\frac{١}{٢}$($\frac{٩}{٢}$ − ٠)(٩ − ٠) = $\frac{٨١}{٤}$ (أ)

١٦- ظا θ = ص′ عند س = ٣ ، ص = −١

٢ص ص′ + ٢س + ٦ص′ − ٣ = ٠

−٢ص′ + ٦ + ٦ص′ − ٣ = ٠

٤ص′ = −٤ ⟵ ص′ = −١ = ظا θ

θ = ١٣٥° = $\frac{٣\pi}{٤}$ (أ)

١٧- $ص' = \frac{١}{\sqrt{٣}} \rightarrow ظا هـ_١ = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$هـ_١ = ٣٠^\circ$

$د'(س) = \sqrt{٣} - ٢س$

$ظا هـ_٢ = د'(٠) = \sqrt{٣}$

$هـ_٢ = ٦٠^\circ \Leftarrow هـ = ٣٠^\circ = \frac{\pi}{٦}$ (ب)

١٨- $م(-١) = هـ(-١) = ٢$

$د'(-١) = هـ'(-١) = صفر$

$م'(-١) = \frac{هـ(-١)\,(٢د(-١)\,د'(-١) + ٢) - (د^٢(-١) - ٢)\,هـ'(-١)}{هـ^٢(-١)}$

$م'(-١) = \frac{٢(٠ + ٢)}{٤} = ١$ (ب)

١٩- $م_{المماس} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{١ - ٠}{\sqrt{٣} - ٠} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$م_{العمودي} = -\sqrt{٣}$

$ظا \theta = -\sqrt{٣} \rightarrow \theta = ١٢٠^\circ$

$هـ = ٦٠^\circ = \frac{\pi}{٣}$ (جـ)

أو زاوية ميل المماس ٣٠°

$هـ = ١٨٠ - (٩٠ + ٣٠) = ٦٠^\circ$

إجابة الدوائر ص ٩

١- ع = −٣٢ن + ٣٢

ع(٠) = ٣٢ ← ع = $\frac{٣}{٤}$ ع(٠)

ع = ٢٤ = −٣٢ن + ٣٢

٣٢ن = ٨ ← ن = $\frac{١}{٤}$

(د) ف($\frac{١}{٤}$) = −١٦ × $\frac{١}{١٦}$ + ٨ = ٧م

٢- ت = م $\frac{ع}{٢\sqrt{ف}}$ = م × $\frac{م\sqrt{ف}}{٢\sqrt{ف}}$

(د) ٤ = م² م = ٢ ، ~~−٢~~

٣- ف = ل + ٢٠ن − ٥ن²

ل

ع = ٢٠ − ١٠ن

٠ = ٢٠ − ١٠ن

١٠ن = ١٠ ← ن = ١

ف(١) = ٤٥ ← ل + ٢٥ = ٤٥

(جـ) ل = ٢٠م

٤- ع = ن² − ٦ن + ٥ = ٠

(ن − ٥)(ن − ١) = ٠

ت = ٢ن − ٦

(أ) ت(١) = −٤ ~~×~~ ، ت(٥) = ٤ ✓

٥- ع = ع٠ − ١٠ن ← ع٠ = ١٠ن

٤٥ = ١٠ن² − ٥ن² ← ن = ٣

(جـ) ع٠ = ٣٠

٦- ع = ٤ جا $\frac{ن}{٢}$ جتا $\frac{ن}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\sqrt{٣}$ = جان + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ← جان = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(د) ن = $\frac{\pi}{٣}$ ، ت = جتان ← ت = $\frac{١}{٢}$

٧- ع = م − ١٠ن ← ع(٠) = م

ع(٢) = $\frac{١}{٢}$ م ، م − ٢٠ = $\frac{١}{٢}$ م ←

(جـ) $\frac{١}{٢}$ م = ٢٠ ← م = ٦٠

٨- ف = ظتان = ٣

ع = −قتا²ن

ت = −٢قتان × −قتان ظتان

ت = ٢قتا²ن ظتان

= ٦(١ + ظتا²ن)

(د) = ٦(٩ + ١) = ٦٠

اجابة الدوائر ص ١٤، ١٥

١- د(س) متناقص (ب)

٢- س٢ > س١ ، ق(س١) > ق(س٢)

د(س) متناقص (ب)

٣- د' من الدرجة الثالثة

وطرفين ← ٥ نقط حرجة (ج)

٤- كل المجال حرجات (د)

٥- د(س) = { ٠ ، -٢ < س < ٠
س ، ٠ ≤ س < ٢
٢س ، س = ٢ }

د(س) غير متصل عند س = ٠

د'(س) = { ٠ ، -٢ < س < ٠
١ ، ٠ < س < ٢
غ.م ، س = -٢، ٠، ٢ }

الحرجات [-٢، ٠] ، {٢} (د)

٦- د'(س) = ١ + ٢(٤ - م٢) س

د''(س) = ٢(٤ - م٢) = ٠

--- ، +++ ، ---
-٢ ، ٢

(٢، ∞) ، (-∞، -٢) (ج)

٧- ٢س - ١ = ٠ ← س = $\frac{1}{2}$ خارج المجال

٤ خارج المجال ← فقط {١} (ب)

٨- د''(٢) < ٠ ← د''(١) < ٠

← عند س = ١ عظمى محلية (أ)

٩- د''(١) = +

ق(١) صغرى محلية (أ)

١٠- د'(س) = $\frac{1}{3}$ س $^{-\frac{2}{3}}$ - ٥

د''(س) = $\frac{-2}{9}$ س $^{-\frac{5}{3}}$ = $\frac{-2}{9 \text{س}^{\frac{5}{3}}}$

أصفار المقام س = ٠

د'' : +++ ، --- (ب)

١١- $\text{د}'(\text{س}) = ٢ - ٨(\text{م} - ١)\text{س}$

$\text{د}''(\text{س}) = -٨(\text{م} - ١) = ٠$

$\text{م} = ١$

+ + + ١ - - -

$(-\infty ، ١)$ (ج)

١٢- $\text{س}(\text{س} - ٤) = ٠$

$\text{س} = ٠ ، \text{س} = ٤$

+ + ٠ - - ٤ + +

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} - ٤}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س}}} = ٠$

س = ٢ × أصفار البسط خارج المجال

$\text{س} = ٠ ، \text{س} = ٤$ (ب)

١٣- $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}(\text{أس} + \text{ب})^{-\frac{١}{٢}} \times \text{أ}$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\text{أ}}{٢(\text{أس} + \text{ب})^{\frac{١}{٢}}}$

$٢\text{أ} + \text{ب} = ٠ \leftarrow \text{ب} = -٢\text{أ}$

$\text{ق}(\text{س}) = (\text{أس} - ٢\text{أ})^{\frac{١}{٢}} + ٥ \times -٢\text{أ}$

$\text{ق}(٢) = ٠ + -١٠\text{أ} = ٦$

$\text{أ} = \frac{-٣}{٥} ، \text{ب} = \frac{٦}{٥}$ (ب)

اجابة الدوائر ص ٢١، ٢٢

١- ق َ متناقص ⟵ ق(س) مقعر للأسفل

(د)

٢- ق َ متزايد ⟵ ق(س) مقعر للأعلى

(ب)

٣- متزايد ق َ > ٠

مقعر للأسفل ق ً < ٠

ق(م) = ٠

ق ً(م) < ق(م) < ق َ(م)

(جـ)

٤- مقعر للأسفل ومتزايد (ب)

٥- ق متزايد عند س = ٠

ق متناقص عند س = ١

مقعر للأسفل دائماً (جـ)

٦- (-∞، ٠] ق مقعر للأسفل

∴ ق َ متناقص

[٠، ∞) خطي ⟵ ق َ ثابت

عند س = ٠ غير قابل للاشتقاق

أي ق َ₊(٠) ≠ ق َ₋(٠)

(ب)

٧- ق َ ⟵ - - - ٢ + + + ٤ - - - ⟶

ق ً ⟵ + + + ٢ - - - ⟶

(د)