مكثف
النهايات والاتصال

الأستاذ : ماهر ضمرة

١ـ أصفار المقام بدون اختصار

(س + ٢)(س ـ ٢)

س = ـ ٢ ، س = ٢　　(ب)

٢ـ مجال المقام

ـ ∘ + ∘ ـ
　ـ١　　١

عدا أصفار المقام

(ـ١ ، ١)　　(ب)

٣ـ نهـا ق(س) = ق(١)
س ← ١⁺

أ ـ ب = ٢ ـــ (١)

نهـا ق(س) = ق(١)
س ← ١⁻

١ ـ أ ـ ب = ٢

ـ أ ـ ب = ٢ ـــ (٢)

(١) + (٢)

ـ ٢ب = ٥

ب = ـ ٥/٢

ـ أ + ٥/٢ = ٢

أ = ١/٢　　(ب)

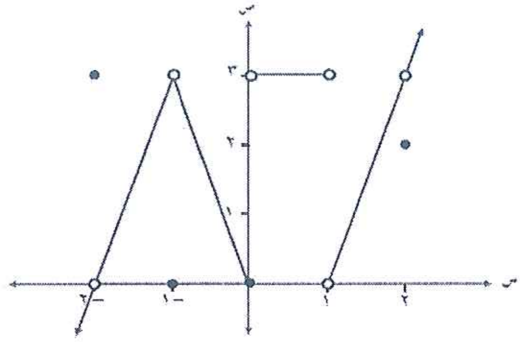
مكثف : النهايات والاتصال

أولا : نظريات النهايات والنهايات الكسرية والرسم

الفكرة	حل الفكرة	ملاحظات أو توضيح
النهاية غير موجودة من الرسم	١) الأطراف ٢) قفزات أو انقطاعات	
ق(س) كثير حدود باقي قسمة ق(س) على (س - أ) يساوي (ل)	$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ) = ل	ق(س) كثير حدود ، باقي قسمة ق(س) على (س + ١) = ٧ $\underset{\text{س} \leftarrow \text{-١}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٧
$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق (مركب)	١) نفرض ص = ما داخل القوس ٢) نفحص الاتجاه	$\underset{\text{س} \leftarrow \text{١+}}{\text{نهـا}}$ ق (٣ - س) = $\underset{\text{ص} \leftarrow \text{٢-}}{\text{نهـا}}$ ق(ص)
$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ غ . م	١) نجري اختصار إن كان هنالك اختصار ٢) غ . م عند أصفار المقام	$\text{نهـا} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٦}$ غ . م = $\text{نهـا} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ٦)\cancel{(\text{س} - ١)}}$ أ = -٦
$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}}$ موجودة ن زوجي	١) نجد أصفار ما داخل الجذر ٢) نختبر اشارة خط الاعداد ٣) نأخذ المناطق الموجبة بالفترات المفتوحة	$\text{نهـا} \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \div$ وكان ضمن البسط والمقام $\sqrt{٠}$ نحتاج خط الأعداد
ق(س) كثير حدود (متصل) يمر (أ ، ب)	$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ) = ب	
ق(س) = $\begin{cases} \text{، س} \in \text{ص} \\ \text{، س} \notin \text{ص} \end{cases}$	١) النهايات نعوض عند س ∉ ص ٢) الصورة حسب الموقع	

مكثف : النهايات والاتصال

١) من الشكل التالي لمنحنى ق(س)
أجب عن (١ - ٨)



١) قيم أ التي تجعل نهــا (س ← أ) ق(س) = ٣ هي :

أ) (٠ ، ١)
ب) (٠، ١) ، {-١}
ج) (٠، ١) ، {-١، -٢، ٢}
د) (٠، ١) ، {-١، ٢}

---

٢) إن قيم أ التي تجعل نهــا (س ← أ⁺) ق(س) = ٣ هي :

أ) [٠ ، ١)
ب) [٠، ١) ، {-١}
ج) [٠، ١) ، {-١ ، ٢}
د) [٠، ١] ، {-١ ، ٢}

---

٣) إن نهــا (س ← -٢⁻) ق (٣ - س) =

أ) ٢ ب) ١
ج) ٣ د) صفر

---

٤) إن نهــا (س ← ١⁺) (٥ - ٢س) ق (١ - س) =

أ) ٣ ب) صفر
ج) ٩ د) -٩

---

٥) هـ(س) = ٧ - س فإن

نهــا (س ← ١⁺) (ق(٣ - ٢س) / هـ(س) + ٢س²)

أ) ٢ ب) ٥/٢
ج) صفر د) ٣/٢

---

٦) قيم أ التي تجعل نهــا (س ← أ) ق(س) غير موجودة

أ) {-٢، -١، ٠، ١، ٢}
ب) {٠، ١}
ج) {-١، ٠، ١}
د) {١}

---

٧) إن نهــا (س ← -١⁻) (ق(٢س) + √(س + ١)) =

أ) صفر ب) ٣
ج) غير موجودة د) ١

---

٨) إن قيم أ التي تجعل نهــا (س ← أ⁺) ق(س) = صفر

أ) {١}
ب) {-٢، ١}
ج) {-٢، -١، ٠، ١}
د) {-٢، ٠، ١}

---

٢) اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) إن نهــا (س ← ١) ([س + ١] - [س - ٥]) =

أ) غير موجودة ب) ٦
ج) ٥ د) صفر

---

٢) إن نهــا (س ← ١) ([س + ٥] - [٤ - س]) =

أ) غير موجودة ب) ٩
ج) صفر د) ٨

---

٣) إن قيم أ التي تجعل نهــا (س ← أ⁺) [٢س] = ٨ هي :

أ) (٤ ، ٤,٥)
ب) [٤ ، ٤,٥]
ج) [٤ ، ٤,٥)
د) (٤، ٤,٥]

٤) إن قيم أ التي تجعل
$\lim\limits_{س \to أ^-} [\,١ - ٢س\,] = ٣$ هي :

أ) (-٥,١ ، -١)　　ب) [-٥,١ ، -١]
ج) (-٥,١ ، -١]　　د) [-٥,١ ، -١)

---

٥) إن قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ} \sqrt{٢س^٢ - ٨}$ موجودة .

أ) (٢ ، ∞) ، (-∞ ، -٢)
ب) [٢ ، ∞) ، (-∞ ، -٢]
ج) [٢ ، ∞) ، (-∞ ، ٢)
د) (٢ ، ∞) ، (-∞ ، -٢]

---

٦) إن قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ^+} \sqrt{٢٥ - س^٢}$ موجودة هي :

أ) [-٥ ، ٥]　　ب) (-٥ ، ٥)
ج) [-٥ ، ٥)　　د) (-٥ ، ٥]

---

٧) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (-١ ، ٥) ، هـ كثير حدود باقي قسمته على (س + ١) = ٣
فإن $\lim\limits_{س \to -١} (ق^٢(س) + ٢هـ(س) - س) =$

أ) ٣٠　　ب) ٣٢
ج) ٨　　د) ٢٠

---

٨) إن قيم أ التي $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة
حيث $ق(س) = \dfrac{س^٢ + ١}{س^٢ - ٧س + ١٢}$

أ) {٣ ، -٤}　　ب) {٦ ، ٢}
ج) {٣ ، ٤}　　د) {-٣ ، -٤}

---

٩) إن قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة حيث $ق(س) = \dfrac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$

أ) {٢ ، ٣}　　ب) {٢}
ج) {٣}　　د) {١ ، ٦}

---

١٠) إن $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{(٢٥)^{(س)} - (٥)^{(س)}}{١ - (٥)^{(س)}} =$

أ) -١　　ب) ١
ج) -٥　　د) ٥

---

١١) إذا علمت أن ق(س) كثير حدود وكانت
$\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{٣\,ق(س)}{س} = ١٢$
فإن $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(س + ١)^٣ - ١}{ق(س)} =$

أ) غير موجودة　　ب) $\frac{٤}{٣}$
ج) $\frac{٣}{٤}$　　د) $\frac{١}{٤}$

---

١٢) جد قيمة الثابت أ التي تجعل
$\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة
$ق(س) = \dfrac{س^٢ + (أ + ١٣)\,س + أ}{س - ٢}$

أ) ١٠　　ب) -١٠
ج) ١٥　　د) ٤

---

١٣) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} أس^٢ + ١ & ، س \in ص \\ أس + \sqrt{س} & ، س \notin ص \end{cases}$$

وكان $\lim\limits_{س \to ٤}$ ق(س) = ١٠ ، فإن ق(٤) =

أ) $\frac{١١}{٢}$　　ب) ١٠
ج) $\frac{٩}{١٦}$　　د) ٣٣

مكثف : النهايات والاتصال

أسئلة مقالية

٣) جد $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣س + ١)^{٣} - ٦٤}{١ + س(س^{٢} + ١) - ٣س^{٢}}$

الحل : النهاية = $\dfrac{صفر}{صفر}$

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{((٣س+١)-٤)((٣س+١)^{٢}+٤(٣س+١)+١٦)}{س^{٣} - ٣س^{٢} + س + ١}$

	س^٣	س^٢	س	ثابت
	١	٣-	١	١
١		١	٢-	١-
	١	٢-	١-	٠

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\cancel{(س-١)}((٣س+١)^{٢}+٤(٣س+١)+١٦)}{\cancel{(س-١)}(س^{٢}-٢س-١)}$

$= \dfrac{٣ \times ٤٨}{-٢} = -٧٢$

٤) جد $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س + \sqrt{س^{٣} + ١٢}}{\frac{س}{٢} + ١}$

الحل : النهاية = $\dfrac{صفر}{صفر}$

$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س + \sqrt{س^{٣}+١٢}}{\frac{س}{٢} + ١} \times \dfrac{س - \sqrt{س^{٣}+١٢}}{س - \sqrt{س^{٣}+١٢}}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - س^{٣} - ١٢}{\left(\frac{س+٢}{٢}\right)\left(س - \sqrt{س^{٣}+١٢}\right)}$ قسمة تركيبية

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س+٢)}(-س^{٢} + ٣س - ٦)}{\frac{١}{٢}\cancel{(س+٢)}\left(س - \sqrt{س^{٣}+١٢}\right)}$

$= \dfrac{-١٦}{\frac{١}{٢} \times -٤} = ٨$

٥) جد $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س + ١}\left(\dfrac{١}{\sqrt[٣]{٢س + ١}} + ١\right)$

الحل : النهاية = $\dfrac{صفر}{صفر}$

نوحد المقامات — المرافق التكعيبي

$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س+١}\left(\dfrac{١+\sqrt[٣]{٢س+١}}{\sqrt[٣]{٢س+١}}\right) \times \dfrac{١ - \sqrt[٣]{٢س+١} + \sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}}{١ - \sqrt[٣]{٢س+١} + \sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{س+١}\left(\dfrac{١+٢س+١}{\sqrt[٣]{٢س+١}\left(١-\sqrt[٣]{٢س+١}+\sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}\right)}\right)$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\cancel{س+١}}\left(\dfrac{٢\cancel{(س+١)}}{\sqrt[٣]{٢س+١}\left(١-\sqrt[٣]{٢س+١}+\sqrt[٣]{(٢س+١)^{٢}}\right)}\right)$

$= \dfrac{٢}{-١ \times ٣} = \dfrac{-٢}{٣}$

٦) جد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + س - ١٠}{س + \sqrt{س + ٧} - ٥}$

الحل : النهاية = $\dfrac{صفر}{صفر}$

إما بقسمة البسط والمقام على (س - ٢)

أو المرافق المباشر

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + س - ١٠}{(س-٥) + \sqrt{س+٧}} \times \dfrac{(س-٥) - \sqrt{س+٧}}{(س-٥) - \sqrt{س+٧}}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٥)}{(س-٥)^{٢} - س - ٧} \times \left((س-٥) - \sqrt{س+٧}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٥)}{س^{٢} - ١١س + ١٨} \times \left((س-٥) - \sqrt{س+٧}\right)$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س-٢)}(س^{٢}+٢س+٥)}{\cancel{(س-٢)}(س-٩)} \times \left((س-٥) - \sqrt{س+٧}\right)$

$= \dfrac{١٣}{-٧} \times -٦ = \dfrac{٧٨}{٧}$

مكثف : النهايات والاتصال

٧) جد $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهــا}} \left(\frac{2}{\text{س}^2 - 2\text{س}} - \frac{2\text{س} + 1}{\text{س}^2 + \text{س} - 6} \right)$

الحل : النهاية $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \left(\frac{2}{\text{س}(\text{س}-2)} - \frac{2\text{س}+1}{(\text{س}-2)(\text{س}+2)} \right)$

$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{2(\text{س}+2) - (2\text{س}+1)\text{س}}{\text{س}(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$

$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{-2\text{س}^2 + \text{س} + 6}{\text{س}(\text{س}-2)(\text{س}+2)}$

$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{(\cancel{\text{س}-2})(-2\text{س}-3)}{\text{س}(\cancel{\text{س}-2})(\text{س}+2)} = \frac{-7}{10}$

٨) جد $\underset{\text{س}\to \frac{3}{2}}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{-12\text{س} + 4\text{س}^2 + 9}}{[5 - 2\text{س}] - \text{س} - \frac{1}{2}}$

الحل : النهاية $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س}\to \frac{3}{2}^-}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(2\text{س}-3)^2}}{[5-2\text{س}] - \text{س} - \frac{1}{2}}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{3}{2}^-}{\text{نها}} \frac{|2\text{س}-3|}{[5-2\text{س}] - \text{س} - \frac{1}{2}}$

$[2]^+ = 2$

$= \underset{\text{س}\to \frac{3}{2}^-}{\text{نها}} \frac{3-2\text{س}}{2 - \text{س} - \frac{1}{2}}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{3}{2}^-}{\text{نها}} \frac{2(\cancel{\frac{3}{2}-\text{س}})}{\cancel{\frac{3}{2}-\text{س}}} = 2$

٩) إذا علمت أن $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) + 1}{\text{س} - 1} = 2$ ، فجد :

أ) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \left(\text{ق}^2(\text{س}) + 3\,\text{ق}(\text{س}) - 5\text{س}\right)$

∵ النهاية موجودة ، $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}$ المقام = صفر ∴ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}}$ البسط = صفر

∴ $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = -1$

المطلوب $\left(\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س})\right)^2 + 3 \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) - \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} 5\text{س}$

$= 1 - 3 - 5 = -7$

ب) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) + 1}{\text{س}^3 + \text{س} - 2}$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})+1}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+2)}$ قسمة تركيبية

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})+1}{\text{س}-1} \times \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{1}{\text{س}^2+\text{س}+2}$

$= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ج) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^2 + 5\text{س} - 6}{\text{ق}(\text{س}) + 1}$

نقسم البسط والمقام على $(\text{س}-1)$

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}^2+5\text{س}-6}{\text{س}-1}}{\frac{\text{ق}(\text{س})+1}{\text{س}-1}}$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\frac{(\cancel{\text{س}-1})(\text{س}+6)}{\cancel{\text{س}-1}}}{\frac{\text{ق}(\text{س})+1}{\text{س}-1}} = \frac{7}{2}$

د) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) + 1}{\text{س} - 1}$

نفصل الحدين

$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \left(\frac{\text{س}\,\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{س}-1} + \frac{\text{ق}(\text{س})+1}{\text{س}-1} \right)$

$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})(\cancel{\text{س}-1})}{\cancel{\text{س}-1}} + \underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س})+1}{\text{س}-1}$

$= -1 + 2 = 1$

مكثف : النهايات والاتصال

*** تمارين للطالب :**

١) جد $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\left|\dfrac{١}{\text{س} + ٣}\right| - \left|\dfrac{١}{\text{س} - ٥}\right|}{|١ - \text{س}|}$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١}{٥ + \sqrt{٢\text{س} + ١}} - \dfrac{١}{٥ + \sqrt{٣\text{س} + ١}} \right)$

تذكير **التحليل النوني**

$\text{س}^{ن} + \text{ص}^{ن} = (\text{س} + \text{ص}) (\text{س}^{ن-١} - \text{س}^{ن-٢}\text{ص} + \text{س}^{ن-٣}\text{ص}^{٢} - \text{س}^{ن-٤}\text{ص}^{٣}$ .... $+ \text{ص}^{ن-١})$

$\text{س}^{ن} - \text{ص}^{ن} = (\text{س} - \text{ص}) (\text{س}^{ن-١} + \text{س}^{ن-٢}\text{ص} + \text{س}^{ن-٣}\text{ص}^{٢} + \text{س}^{ن-٤}\text{ص}^{٣}$ .... $+ \text{ص}^{ن-١})$

---

١٠) جد $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{(٣\text{س} + ٢)^{٥} + (\text{س} + ٢)^{٥}}{\text{س} + ١}$

الحل : النهاية $= \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\overbrace{((٣\text{س}+٢)+(\text{س}+٢))}^{٤\cancel{(\text{س}+١)}}((٣\text{س}+٢)^{٤} - (٣\text{س}+٢)^{٣}(\text{س}+٢) + (٣\text{س}+٢)^{٢}(\text{س}+٢)^{٢} - (٣\text{س}+٢)(\text{س}+٢)^{٣} + (\text{س}+٢)^{٤})}{\cancel{\text{س}+١}}$

$= ٤ \times (١ + ١ + ١ + ١ + ١) = ٢٠$ (للتأكد نستخدم لوبيتال)

---

١١) إذا علمت أن

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{أ}\text{س}^{٣} + \text{ب}\text{س} + ٢}{\text{س} - ١} = ٨$

جد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل :

نحتاج لمعادلتين ، ∵ النهاية موجودة ،

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ للمقام = صفر ∴ $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ للبسط = صفر

∴ أ + ب + ٢ = ٠ ← ب = -٢ - أ

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}\text{س}^{٢} + (-٢ - \text{أ})\text{س} + ٢}{\text{س} - ١} = ٨$

بالقسمة التركيبية

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)} (\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{أ}\text{س} - ٢)}{\cancel{\text{س}-١}} = ٨$

٢أ - ٢ = ٨ ← أ = ٥

ب = -٧

*** تمارين للطالب :**

٣) إذا علمت أن

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{أ}\sqrt{\text{س} + ١} - \text{ب}}{\text{س} - ٣} = \dfrac{١}{٤}$

جد أ ، ب حيث كلاهما ثابتين .

مكثف : النهايات والاتصال

١٢) جد أ حيث أ ∈ ح ، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٥\text{س} + ٤} + \text{أس} - ٣ - \text{أ}}{\text{س} - ١} = \dfrac{٢٩}{٦}$

الحل : نفصل النهايـة

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٥\text{س}+٤} - ٣}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أس} - \text{أ}}{\text{س} - ١} = \dfrac{٢٩}{٦}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt{٥\text{س}+٤} - ٣)(\sqrt{٥\text{س}+٤} + ٣)}{(\text{س} - ١)(\sqrt{٥\text{س}+٤} + ٣)} + \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}(\cancel{\text{س} - ١})}{\cancel{\text{س} - ١}} = \dfrac{٢٩}{٦}$

$\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\text{س} + ٤ - ٩}{(\text{س} - ١)(\sqrt{٥\text{س}+٤} + ٣)} + \text{أ} = \dfrac{٢٩}{٦}$

$\dfrac{٥}{٦} + \text{أ} = \dfrac{٢٩}{٦} \leftarrow \text{أ} = ٤$

مراجعة المتطابقات

١) $\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$

« نفس الزاوية »

$١ - \text{جتا}^٢\text{س} = \text{جا}^٢\text{س}$ ، $١ - \text{جا}^٢\text{س} = \text{جتا}^٢\text{س}$

٢) $\text{قا}^٢\text{س} - \text{ظا}^٢\text{س} = ١$

« نفس الزاوية »

$\text{قا}^٢\text{س} = ١ + \text{ظا}^٢\text{س}$ ، $\text{ظا}^٢\text{س} = \text{قا}^٢\text{س} - ١$

كذلك $\text{قتا}^٢\text{س} - \text{ظتا}^٢\text{س} = ١$

٣) جا ٢س = ٢ جا س جتا س

« بعد المساواة نصف الزاوية »

مثلاً : جا ٤س = ٢ جا ٢س جتا ٢س

٤) $\text{جتا } ٢\text{س} = \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}$

« نأخذ نصف الزاوية »

$١ - ٢\text{جا}^٢\text{س} = \text{جتا } ٢\text{س}$ ، $٢\text{جتا}^٢\text{س} - ١ = \text{جتا } ٢\text{س}$

(نفس الاشارة)

٥) $\text{جا}(\text{أ} \mp \text{ب}) = \text{جا أ جتا ب} \mp \text{جتا أ جا ب}$

(عكس الاشارة)

٦) $\text{جتا}(\text{أ} \mp \text{ب}) = \text{جتا أ جتا ب} \pm \text{جا أ جا ب}$

« نفس »

٧) $\text{ظا}(\text{أ} \mp \text{ب}) = \dfrac{\text{ظا أ} \mp \text{ظا ب}}{١ \pm \text{ظا أ ظا ب}}$

« عكس »

٨) $\text{جا أ} - \text{جا ب} = ٢ \text{ جتا} \left(\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جا} \left(\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

٩) $\text{جا أ} + \text{جا ب} = ٢ \text{ جا} \left(\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جتا} \left(\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

١٠) $\text{جتا أ} - \text{جتا ب} = -٢ \text{ جا} \left(\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جا} \left(\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

١١) $\text{جتا أ} + \text{جتا ب} = ٢ \text{ جتا} \left(\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جتا} \left(\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

استنتاج

$١ - \text{جتا (زاوية)} = ٢ \text{ جا}^٢ \left(\dfrac{\text{الزاوية}}{٢}\right)$

مكثف : النهايات والاتصال

أولا : نهايات الاقترانات المثلثية

الفكرة	حل الفكرة	ملاحظات أو توضيح
س مقاسه بالدرجات نحولها إلى راد	س (الزاوية) × $\frac{\pi}{١٨٠}$	
س ← فردي $\frac{\pi}{٢}$	نحول جا ← جتا جتا ← جا ظتا ← ظا	الزاوية الجديدة = الناتج - القديمة ونفحص الاشارة على دائرة الوحدة
س ← صحيح π	جا ← جا جتا ← جتا ظا ← ظا	
الزاوية ليست خطية	نقسم ونضرب بالزاوية	$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{جا (س}^٢ - ١)}{\text{س}^٣ - ١}$ $= \frac{\text{جا (س}^٢ - ١)}{\text{س}^٢ - ١} \times \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س}^٣ - ١}$
جا زاوية - ظا نفس الزاوية	نكتب ظا = $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$	ثم جا عامل مشترك
إذا كان ضمن البسط أو المقام ١ - ٢ جا^{٢}س ٢ جتا^٢ س - ١	نحولها بالمتطابقة إلى جتا ٢س	$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ + \text{جتا ٤س} - ٢\,\text{جتا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢}$ $= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جتا ٤س - جتا ٢س}}{\text{س}^٢}$
جا س - جتا س (نفس الزاوية)	بالمرافق	تتحول إلى جتا ٢س
توزيع البسط على المقام	الأساس للتوزيع $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ لذلك جا ، ظا وحدهم للمقام (جتا ، قا - ١) مرافق	$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ + \text{س جا ٥س - جتا ٤س}}{\text{س}^٢}$ $= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{١ - \text{جتا ٤س}}{\text{س}^٢} + \frac{\text{س جا ٥س}}{\text{س}^٢}\right)$

مكثف : النهايات والاتصال

- اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{س}}$ تساوي حيث س مقاسه بالدرجات .

أ) ٢ ب) صفر

ج) $\frac{\pi}{٩٠}$ د) $\frac{٩٠}{\pi}$

٢) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا } |\text{س}|}{\text{س}} =$

أ) ١ ب) غير موجودة

ج) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{٢}{\pi}$

٣) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{س}^٢ - \text{جا } ٣\text{س} + \text{ظا } ٥\text{س}}{٣\text{س} - \text{ظا}^٢\text{س}} =$

أ) ١ ب) صفر

ج) $\frac{-٢}{٣}$ د) $-\frac{٢}{٣}$

٤) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جتا } ٤\text{س} - \text{جتا } ٦\text{س}}{\text{س جا } ٥\text{س}} =$

أ) $\frac{-٢}{٥}$ ب) ٢

ج) -٢ د) ١

٥) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \pi} \frac{\text{جتا } \frac{٣}{٢}\text{س}}{\text{س} - \pi} =$

أ) ١ ب) -١

ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{-٣}{٢}$

٦) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow -\text{أ}} \frac{\text{جا س} + \text{جا أ}}{\text{س} + \text{أ}} =$

(حيث أ $\in$ ح) ، أ $\neq$ ٠

أ) ١ ب) جا أ

ج) جتا أ د) - جتا أ

٧) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{١ - \text{جتا } ٢\text{س}}{١ - \text{جتا } ٤\text{س}} =$

أ) ١ ب) $\frac{١}{٢}$

ج) $\frac{-١}{٢}$ د) $\frac{١}{٤}$

٨) إن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا } (\pi + ٤\text{س})}{٣\text{س}} =$

أ) $\frac{-٤}{٣}$ ب) $\frac{٤}{٣}$

ج) $\frac{٤\pi}{٣}$ د) صفر

٩) إذا علمت أن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{س} - \text{جا س}}{\text{س}^٣} = \frac{١}{٦}$ فإن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}^٢\text{س} - \text{س}^٢}{\text{س}^٤} =$

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) صفر

ج) $\frac{١}{٣}$ د) غير موجودة

أسئلة مقالية

١) جد $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{جتا}6س - 2\,\text{جا}^2 س}{5س^2}$

الحل:

$\because 1 - 2\,\text{جا}^2 س = \text{جتا}2س$

$\therefore \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}2س - \text{جتا}6س}{5س^2}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-2\,\text{جا}4س\ \text{جا}-2س}{5س \times س} = \dfrac{16}{5}$

٢) جد $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 + \text{جتا}4س - 2\,\text{جتا}^2 س}{س^2}$ كتاب

الحل:

$\because 1 - 2\,\text{جتا}^2 س = -\text{جتا}2س$

$\therefore \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}4س - \text{جتا}2س}{س^2}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-2\,\text{جا}3س\ \text{جا}س}{س \times س} = -6$

٣) جد $\underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}\,\pi س}{4س^2 - 9}$

الحل: النهاية $= \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}(\frac{3\pi}{2} - \pi س)}{(2س-3)(2س+3)} = \underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}\,\pi(\frac{3}{2} - س)}{4(س-\frac{3}{2})(س+\frac{3}{2})}$

$= \underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}\,\pi(\frac{3}{2} - س)}{س - \frac{3}{2}} \times \underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{1}{4(س + \frac{3}{2})}$

نفرض ص $= \frac{3}{2} -$ س ، س $\to \frac{3}{2}$ ، ص $\to 0$

$\underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جا}\,\pi ص}{ص} \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi}{12}$

٤) $\underset{س \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{\pi}{س}}{س - 1}$

الحل:

$\underset{س \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\pi - \frac{\pi}{س})}{س - 1}$

$= \underset{س \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\pi - \frac{\pi}{س})}{\pi - \frac{\pi}{س}} \times \dfrac{\pi - \frac{\pi}{س}}{س - 1}$ نوحد المقامات

ص $= \pi - \frac{\pi}{س}$ ، س $\to 1$ ، ص $\to 0$

$\underset{ص \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}ص}{ص} \times \underset{س \to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi\left(\frac{\cancel{س-1}}{س}\right)}{\cancel{س-1}}$

$= 1 \times \pi \times 1 = \pi$

٥) جد $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2 - س\,\text{جا}س - 2\,\text{جتا}س}{س\ \text{ظا}2س}$

الحل: النهاية $= \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نفصل البسط

منطابقة

$\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-\cancel{س}\,\text{جا}س}{\cancel{س}\ \text{ظا}2س} + \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2(1 - \text{جتا}س)}{س\ \text{ظا}2س}$

$= \underset{س \to 0}{\text{نهـا}} -\dfrac{\frac{\text{جا}س}{س}}{\frac{\text{ظا}2س}{س}} + 2\,\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جا}^2 \frac{1}{2}س}{س\ \text{ظا}2س}$

$= \dfrac{-1}{2} + 4\,\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\frac{1}{2}س}{س} \times \dfrac{\frac{\text{جا}\frac{1}{2}س}{س}}{\frac{\text{ظا}2س}{س}}$

$= \dfrac{-1}{2} + 4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} =$ صفر

٦) جد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 + \text{جتا } 3س}{(3س - \pi)^2}$

الحل : $\text{النهاية} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{جتا}(\pi - 3س)}{(3س - \pi)^2}$

$ص = \pi - 3س$ ، $س \leftarrow \frac{\pi}{3}$ ، $ص \leftarrow 0$

$\underset{ص \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \text{جتا } ص}{(-ص)^2}$

$= \underset{ص \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2 \text{ جا}^2 \frac{1}{2} ص}{ص^2}$

$= 2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

---

٧) جد $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا } س - \text{جا } س}{س - س \text{ جتا } 2س}$

الحل : $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا } س}{\text{جتا } س} - \text{جا } س}{س(1 - \text{جتا } 2س)}$

$= \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } س(\text{قا } س - 1)}{س(1 - \text{جتا } 2س)} \times \dfrac{\text{قا } س + 1}{\text{قا } س + 1}$

$= \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا } س}{س} \times \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا}^2 س - 1}{2 \text{ جا}^2 س} \times \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1}{\text{قا } س + 1}$

$= 1 \times \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{ظا}^2 س}{س^2}}{\frac{2 \text{ جا}^2 س}{س^2}} \times \dfrac{1}{2}$

$= 1 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

---

٨) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{6}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا } س - \sqrt{3} \text{ جا } س}{6س - \pi}$

الحل : $\text{النهاية} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نفرض $ص = س - \frac{\pi}{6} \leftarrow س = ص + \frac{\pi}{6}$

$س \leftarrow \frac{\pi}{6}$ ، $ص \leftarrow 0$

$\underset{ص \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}(ص + \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} \text{ جا}(ص + \frac{\pi}{6})}{6ص}$

$= \underset{ص \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا } ص \text{ جتا } \frac{\pi}{6} - \text{جا } ص \text{ جا } \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}(\text{جا } ص \text{ جتا } \frac{\pi}{6} + \text{جتا } ص \text{ جا } \frac{\pi}{6})}{6ص}$

$= \underset{ص \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ جتا } ص} - \frac{1}{2} \text{ جا } ص - \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ جا } ص + \cancel{\frac{1}{2} \text{ جتا } ص})}{6ص}$

$= \underset{ص \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \dfrac{-2 \text{ جا } ص}{6ص} = \dfrac{-1}{3}$

أو بالطريقة العكسية

---

٩) جد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \sqrt{2} \text{ جا } س}{1 - \sqrt{2} \text{ جتا } س}$

الحل : $\text{النهاية} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - \sqrt{2} \text{ جا } س}{1 - \sqrt{2} \text{ جتا } س} \times \dfrac{1 + \sqrt{2} \text{ جا } س}{1 + \sqrt{2} \text{ جا } س} \times \dfrac{1 + \sqrt{2} \text{ جتا } س}{1 + \sqrt{2} \text{ جتا } س}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 - 2 \text{ جا}^2 س}{1 - 2 \text{ جتا}^2 س} \times \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{1 + \sqrt{2} \text{ جتا } س}{1 + \sqrt{2} \text{ جا } س}$

$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا } 2س}{-\text{جتا } 2س} \times \dfrac{2}{2} = -1$

٣) الإتصال (نقطة وفترة)

١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٩ - ٢٤\text{س} + ١٦\text{س}^٢}}{٤\text{س} - ٣} & ، \text{س} > \frac{٣}{٤} \\ \dfrac{[٢\text{س}] + ٣}{٤\text{س} + ١} & ، \text{س} < \frac{٣}{٤} \\ - \text{جا } ٢\pi \text{ س} & ، \text{س} = \frac{٣}{٤} \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = $\frac{٣}{٤}$

الحل :

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|٣ - ٤\text{س}|}{٤\text{س} - ٣} & ، \text{س} > \frac{٣}{٤} \\ \dfrac{[٢\text{س}] + ٣}{٤\text{س} + ١} & ، \text{س} < \frac{٣}{٤} \\ - \text{جا } ٢\pi\text{س} & ، \text{س} = \frac{٣}{٤} \end{cases}$

١- $\text{ق}(\frac{٣}{٤}) = - \text{جا } \frac{٣\pi}{٢} = ١$ معرف

٢- $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٤}^+} \dfrac{|٣ - ٤\text{س}|}{٤\text{س} - ٣}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٤}^+} \dfrac{٤\text{س} - ٣}{٤\text{س} - ٣} = ١$

كذلك $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٤}^-} \dfrac{[٢\text{س}] + ٣}{٤\text{س} + ١} = \dfrac{٤}{٤} = ١$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٤}} \text{ق(س)} = ١$

٢- $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٤}} \text{ق(س)} = \text{ق}(\frac{٣}{٤}) = ١$

$\therefore$ ق(س) متصل عند س = $\frac{٣}{٤}$

٢) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س} + ١| & ، \text{س} \geq ٢ \\ [\frac{١}{٢}\text{س}] & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$

$\text{هـ(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ١)^٢ - ٩}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ \text{س}^٣ + ١ & ، \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق + هـ عند س = ٢.

الحل :

كلا الاقترانين غير متصل عند س = ٢

نركب ل(س) = ق(س) + هـ(س)

$\text{ل(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ + \dfrac{(\text{س}+١)^٢ - ٩}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} > ٢ \\ ٠ + \text{س}^٢ + ١ & ، \text{س} < ٢ \\ ١٢ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$

١- ل(٢) = ١٢ معرف

٢- $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \left(\text{س} + ١ + \dfrac{(\cancel{\text{س}-٢})(\text{س}+٤)}{\cancel{\text{س}-٢}}\right)$

$= ٩$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{ل(س)} = ٩$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ل(س)} = ٩$

٢- لكن $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ل(س)} \neq \text{ل(٢)}$

$\therefore$ ل(س) غير متصل عند س = ٢

٥) إذا علمت أن ق(س) = $\sqrt{[س] + س}$ ، ه(س) = س^{٢} + ١ ، ابحث في اتصال ق × ه على الفترة [٠ ، ١].

الحل : ل(س) = ق(س) × ه(س)

$$ل(س) = \begin{cases} (س^{٢}+١)\sqrt{٠+س} & ، ٠ \le س < ١ \\ (س^{٢}+١)\sqrt{٢} & ، س = ١ \end{cases}$$

* القواعد :

ل(س) متصل على (٠ ، ١) لأنه معرف على جميع نقاط الفترة (ضمن المجال)

* الأطراف :

س = ٠

ل(٠) = ١ معرف

$\lim_{س \to ٠^{+}}$ ل(س) = ١

ل(س) متصل من اليمين عند س = ٠

س = ١

ل(١) = ٢$\sqrt{٢}$

$\lim_{س \to ١^{-}}$ ل(س) = ٢

ل(س) غير متصل من اليسار عند س = ١

∴ ل(س) متصل على [٠ ، ١)

٦) إذا علمت أن

$$ق(س) = \frac{س + ١}{ك س^{٢} + ٤س + ك}$$

متصل على ح جد قيم ك الممكنة .

الحل :

∵ ق(س) متصل على ح

∴ لا يوجد أصفار مقام

∵ المقام تربيعي ليس له أصفار

∴ المميز سالب

$\Delta = ب^{٢} - ٤أج < ٠$

$١٦ - ٤ك^{٢} < ٠$

$١٦ < ٤ك^{٢}$

$٤ < ك^{٢}$

$٢ < |ك|$

$ك > ٢$ ، $ك < -٢$ خصائص المطلق

أو حل آخر :

$١٦ - ٤ك^{٢} < ٠$

$+٤(٤ - ك^{٢}) < ٠$

− − − − (−٢) + + + (٢) − − −

$ك > ٢$ ، $ك < -٢$

مكثف : النهايات والاتصال

٣) ابحث في اتصال

ق(س) = { √(-س) + س² ، -١ ≤ س < ٠
        { [س/٢] + س ، ٠ ≤ س ≤ ٢

على الفترة [-١ ، ٢].

الحل : نعيد التعريف

ق(س) = { √(-س) + س² ، -١ ≤ س < ٠
        { س ، ٠ ≤ س < ٢
        { ٣ ، س = ٢

* القواعد :

ق(س) متصل على (-١، ٠) لأنه معرف على جميع نقاط الفترة (ضمن المجال)

ق(س) متصل على (٠، ٢) لأنه على صورة كثير حدود

* نقاط التشعب : س = ٠

ق(٠) = ٠ ، نهـا (س←٠⁺) ق(س) = صفر

نهـا (س←٠⁻) (√(-س) + س²) = ٠

∴ ق(س) متصل عند س = ٠

* الأطراف :

س = -١

ق(-١) = ٢ ، نهـا (س←-١⁺) ق(س) = ٢

ق(س) متصل من اليمين عند س = -١

س = ٢

ق(٢) = ٣ ، نهـا (س←٢⁻) ق(س) = ٢

ق(س) غير متصل من اليسار عند س = ٢

∴ ق(س) متصل على [-١، ٢)

٤) ابحث في اتصال ق(س) على مجاله .

ق(س) = { س² + ١ ، س ≤ ١
        { [س + ١] ، ١ < س ≤ ٣
        { |س - ٣| ، س > ٣

الحل : المجال ح ، نعيد التعريف

ق(س) = { س² + ١ ، س ≤ ١
        { ٢ ، ١ < س < ٢
        { ٣ ، ٢ ≤ س < ٣
        { ٤ ، س = ٣
        { س - ٣ ، س > ٣

* القواعد :

ق(س) متصل على (-∞، ١) ، (٣، ∞) لأنه على صورة كثير حدود ، ومتصل على (١، ٢)، (٢، ٣) لأنه على صورة ثابت

* نقاط التشعب :

س = ١ ، ق(١) = ٢

نهـا (س←١⁺) ق(س) = ٢ ، نهـا (س←١⁻) ق(س) = ٢

ق(س) متصل عند س = ١

س = ٢ ، ق(٢) = ٣

نهـا (س←٢⁺) ق(س) = ٣ ، نهـا (س←٢⁻) ق(س) = ٢

نهـا (س←٢) ق(س) غ.م ∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

س = ٣ ، ق(٣) = ٤

نهـا (س←٣⁺) ق(س) = ٠ ، نهـا (س←٣⁻) ق(س) = ٣

نهـا (س←٣) ق(س) غ.م ∴ ق(س) غير متصل عند س = ٣

∴ ق(س) متصل على ح / {٢، ٣}

- اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) ق(س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦}$ ، فإن ق(س) غير متصل عند :

أ) { ٢ } ب) { ٢، -٣ } ج) { -٦، ١ } د) { -٣ }

٢) ق(س) = $\frac{١ - \text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^٢}}$ ق(س) متصل في الفترة :

أ) [-١، ١] ب) (-١، ١) ج) (-∞، ١) د) [١، ∞)

٣) ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - (\text{أ} + \text{ب})\,\text{س} & ،\ \text{س} < ١ \\ ٣ & ،\ \text{س} = ١ \\ \text{أ}\,\text{س}^٣ - \text{ب}\,\text{س} & ،\ \text{س} > ١ \end{cases}$

ق متصل عند س = ١ ، فإن قيمة الثابت أ ، ب على الترتيب .

أ) $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٥}{٢}$

ج) ٦ ، ٣ د) صفر ، -٣

س١ .
١- (د)
٢- (ج)
٣- (د)
٤- (ب)
٥- (ب)
٦- (ب)
٧- (ج)
٨- (ب)

س٢ .
١- $\lim_{س \to ١}$ ($\cancel{[س]}$ + ١ - $\cancel{[س]}$ + ٥)
= ٦
(ب)

٢- نجد اليمين واليسار
$\lim_{س \to ١^+}$ $[س + ٥]^+$ - $[٤ - س]^-$
= ٦ - ٢ = ٤
$\lim_{س \to ١^-}$ $[س + ٥]^-$ - $[٤ - س]^+$
= ٥ - ٢ = ٣
∴ $\lim_{س \to ١}$ ق(س) غ م
(أ)

٢- $[٢أ]^+$ = ٨
٨ ≤ ٢أ < ٩
٤ ≤ أ < ٤,٥
نجرب ٤ ← $\lim_{س \to ٤^+}$ [٢س] = ٨ مغلقة
[٤ ، ٤,٥)
(ج)

٤- $[١ - ٢أ]^-$ = ٢
٢ < ١ - ٢أ ≤ ٣
٢ < -٢أ ≤ ١
-١,٥ < أ ≤ -١
نجرب -١ ← $\lim_{س \to -١^-}$ [١ - ٢س] = [١ + ٢] = ٢ مغلقة
(-١,٥ ، -١]
(ج)

٥- لأنه جذر زوجي نحتاج للمجال
٢س² - ٨ = ٠ ← س = ± ٢
+ (-٢) - (٢) +
(-∞ ، -٢) ∪ (٢ ، ∞)
(أ)

٦- موجودة غ م
- - - - - (-٥) + + + + + + (٥) - - - -
[-٥ ، ٥)
(ج)

٧- $\lim_{س \to -١}$ ق(س) = ق(-١) = ٥
$\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = ٢
٢٥ + ٦ + ١ = ٣٢
(ب)

٨- أصفار المقام ويستثنى أصفار البسط
(س - ٢)(س - ٤) = ٠ ← س = ٢ ، ٤
لايوجد أصفار للبسط
ليتم الاختصار
(ج)

٩- أصفار المقام

(س - ٣)(س - ٢) = ٠ ← س = ٣ ، ٢

أصفار البسط

(س - ٢)(س + ٢) = ٠ ← س = ٢ ، -٢

غ.م عند أصفار المقام ماعدا

أصفار البسط ⇐ س = ٣ (ب)

١٠- مباشر $\frac{٢٥ - ٥}{١ - ٥} = \frac{٢٠}{-٤} = -٥$ (جـ)

١١- $نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{(س+١)^٢ - ١}{س}}{\frac{ق(س)}{س}}$

$نهـا_{س \leftarrow ٠} \frac{(س+١-١)((س+١)^٢ + (س+١) + ١)}{س} \times \frac{١}{٤}$

$= ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٤}$ (جـ)

١٢- ∵ النهاية موجودة

س ← ٢ تصفر المقام

∴ تصفر البسط

٤ + (أ + ١٢)(٢) + أ = ٠

٢أ + ٢٠ = ٠

أ = -١٠ (ب)

١٣- $نهـا_{س \leftarrow ٤} (أس + \sqrt{س}) = ١٠$

٤أ + ٢ = ١٠

أ = ٢

ق(٤) = ٢ × ١٦ + ١ = ٣٣ (د)

تمارين للطالب ص ٦

١- $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{١}{س+٢} - \dfrac{١}{٥-س}}{س-١} \div \dfrac{-٤}{١}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\overset{٢(١-س)}{٥-س-س-٢}}{(س+٢)(٥-س)} \times \dfrac{١}{١-س}$

$= \dfrac{٢}{٤ \times ٤} = \dfrac{١}{٨}$

٢- $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{س} \left(\dfrac{٥+\sqrt{٢س+١} - ٥ - \sqrt{٢س+١}}{(٥+\sqrt{٢س+١})(٥+\sqrt{٢س+١})} \right)$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{س} \left(\dfrac{\sqrt{٢س+١} - \sqrt{٢س+١}}{(٥+\sqrt{٢س+١})(٥+\sqrt{٢س+١})} \right) \times \dfrac{\sqrt{٢س+١} + \sqrt{٢س+١}}{\sqrt{٢س+١} + \sqrt{٢س+١}}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\cancel{س}} \left(\dfrac{٢س + \cancel{١} - ٢س - \cancel{١}}{(٥+\sqrt{٢س+١})(٥+\sqrt{٢س+١})(\sqrt{٢س+١}+\sqrt{٢س+١})} \right)$

$= \dfrac{١}{٢ \times ٣٦} = \dfrac{١}{٧٢}$

٣- ∵ النهاية موجودة

س = ٢ أحد أصفار المقام

∴ نجعل البسط صفر

$أ \times ٢ - ب = ٠$

$ب = ٢أ$

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} أ \dfrac{\sqrt{س+١} - ٢}{س-٢} \times \dfrac{\sqrt{س+١} + ٢}{\sqrt{س+١} + ٢} = \dfrac{١}{٤}$

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}} أ \dfrac{س+\cancel{١}-٤}{(\cancel{س-٢})(\sqrt{س+١}+٢)} = \dfrac{١}{٤}$

$\dfrac{أ}{٤} = \dfrac{١}{٤}$

$أ = ١ \leftarrow ب = ٢$

١- $2 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$ (ج)

٢- مباشر $\frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ (د)

٣- $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{س}^2}{\text{س}} - \frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا}5\text{س}}{\text{س}}}{\frac{2\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا}^2\text{س}}{\text{س}}} = \frac{2}{2}$ (د)

٤- $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{-2\,\text{جا}5\text{س}\ \text{جا}\,\text{س}}{\text{س}\ \text{جا}5\text{س}} = 2$ (ب)

٥- $\lim\limits_{\text{س} \to \pi} \frac{-\text{جا}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\text{س}\right)}{\text{س} - \pi}$

$= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{-\text{جا}\frac{3}{2}\text{ص}}{-\text{ص}} = \frac{3}{2}$ (ج)

٦- $\lim\limits_{\text{س} \to -\text{أ}} \frac{2\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}+\text{أ}}{2}\right) \text{جتا}\left(\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}\right)}{\text{س} + \text{أ}}$

$= 2\,\text{جتا}\,-\text{أ} \times \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا}\frac{\text{ص}}{2}}{\text{ص}}$

$= \text{جتا}\,-\text{أ} = \text{جتا}\,\text{أ}$ (ج)

٧- $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{2\,\text{جا}^2\text{س}}{2\,\text{جا}^2 2\text{س}} = \frac{1}{4}$ (د)

٨- $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\pi\ \text{جتا}4\text{س} + \text{جتا}\pi\ \text{جا}4\text{س}}{2\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{-\text{جا}4\text{س}}{2\text{س}} = \frac{-4}{2}$ (أ)

٩- $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}^2\text{س} - \text{س}^2}{\text{س}^4}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{جا}\,\text{س} - \text{س})(\text{جا}\,\text{س} + \text{س})}{\text{س}^3 \times \text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,\text{س} - \text{س}}{\text{س}^3} \times \lim\limits_{\text{س} \to 0}\left(\frac{\text{جا}\,\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{س}}\right)$

$= -\frac{1}{6} \times (1 + 1) = -\frac{1}{2}$ (أ)