مكثف
التكامل وتطبيقاته

الأستاذ : ماهر ضمرة

مكثف : التكامل وتطبيقاته

أولاً : قواعد الاشتقاق

ملاحظات	ق َ(س)	ق(س)
التكامل المحدود ثابت	صفر	$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س
المشتقة تلغي التكامل	ل(س)	$\int$ ل(س) د س
المطلق لا يؤثر على المشتقة $\frac{د}{د س}$ لو$_{هـ}$|س| = $\frac{1}{س}$ ، س $\neq$ ٠	$\frac{ل َ(س)}{ل (س)}$ ، ل(س) > ٠	لو$_{هـ}$ل(س)
هـ العدد النيبيري ≅ ٢,٧	هـ$^{ل(س)}$ × ل َ(س)	هـ$^{ل(س)}$
أ ثابت	أ$^{ل(س)}$ × لو$_{هـ}$ أ × ل َ(س)	أ$^{ل(س)}$

مكثف : التكامل وتطبيقاته

الأسئلة

اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) إذا علمت أن ق(س) = $\frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$ + لو$_{هـ}\sqrt{س + ١}$ ، س > -١ ، فإن قَ(٠) =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{-٣}{٢}$

---

٢) إذا علمت أن ق(س) = $(٤)^{(٢س+١)}$ × $(٢)^{س}$ + هـ^{س} + لو$_{هـ}$٣ ، فإن قَ(٠) =

أ) ٢٠ لو$_{هـ}^{٢}$ + ١ ب) ٤ لو$_{هـ}^{٢}$ + ١

ج) ٢ لو$_{هـ}^{٢}$ + ١ د) ١٢ لو$_{هـ}^{٢}$ + ١

---

٣) إذا علمت أن $\int$ س ق(س) د س = $\int$ ق(س) د س + جا س ، فإن قَ(٠) =

أ) -٢ ب) صفر ج) -٦ د) -١

---

٤) إذا علمت أن ص = هـ^{أس} ، أ > ٠ ، جد أ حيث صً + صَ - ٦ص = ٠

أ) -٣ ب) -٢ ج) -٦ د) -١

---

٥) إذا علمت أن $\int$ (جا $\frac{٣\pi}{٢}$ ق(س) + ظا^{٢}س) د س = ظا س + هـ$^{(٢ لو_{هـ}س + ١)}$ ، فإن قَ(١) =

أ) -٢هـ ب) ٢هـ ج) ٢ د) -٢

---

٦) ق(س) = لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س | فإن قَ(٠) =

أ) -١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

ثانياً : قواعد التكامل

القاعدة	جواب التكامل	ملاحظات
$\int س^{ن}\ د س$	$\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ج$	$ن \neq ١$
$\int \frac{١}{س}\ د س$	$لو_{هـ} \vert س \vert + ج$	$\int \frac{١}{س}\ د س = \int س^{-١}\ د س = لو_{هـ} \vert س \vert + ج$
$\int هـ^{أس}\ د س$	$\frac{هـ^{أس}}{أ} + ج$	الأس يجب أن يكون خطي ← هـ أسه ليس خطي (تعويض) ← كثير حدود × $هـ^{خطي}$ أجزاء
$\int جا\ أس\ \ د س$	$\frac{-\ جتا\ أس}{أ} + ج$	
$\int جتا\ أس\ \ د س$	$\frac{جا\ أس}{أ} + ج$	
$\int قا^{٢}\ أس\ \ د س$	$\frac{ظا\ أس}{أ} + ج$	$\int ظا\ أس\ د س = \frac{-١}{أ} لو_{هـ} \vert جتا\ أس \vert + ج$
$\int قتا^{٢}\ أس\ \ د س$	$\frac{-\ ظتا\ أس}{أ} + ج$	$\int ظتا\ أس = \frac{١}{أ} لو_{هـ} \vert جا\ أس \vert + ج$
$\int قا\ أس\ ظا\ أس\ \ د س$	$\frac{قا\ أس}{أ} + ج$	
$\int قتا\ أس\ ظتا\ أس\ \ د س$	$\frac{-\ قتا\ أس}{أ} + ج$	
$\int ق(س)\ \ د س$	$م(س) + ج$	المعكوس
$\int (أس + ب)^{ن}\ د س$ ، $ن \neq -١$	$\frac{(أس + ب)^{ن+١}}{(ن+١)\ أ} + ج$	ما داخل القوس الخطي

مكثف : التكامل وتطبيقاته

التبديلات من المتطابقات

١) متطابقات = ١

١) جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١
٢) قا^{٢}س - ظا^{٢}س = ١ ، ظا^{٢}س - قا^{٢}س = -١
٣) قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س = ١ ، ظتا^{٢}س - قتا^{٢}س = -١

٢) ضعف الزاوية

في الجواب نصف الزاوية

١) جا ٢س = ٢ جا س جتا س

٢) جتا ٢س ←
- جتا^{٢}س - جا^{٢}س
- ١ - ٢ جا^{٢}س
- ٢ جتا^{٢}س - ١

٣) تبديل التربيع

نضاعف الزاوية

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا ٢س)
جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)

نفس الزاوية

ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١
ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س - ١

٣) تبديل التربيع

١) جا أ جتا أ = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ أ
٢) جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ (جا (أ + ب) + جا (أ - ب))
٣) جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ (جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب))
٤) جا أ ب جا ب = $\frac{١}{٢}$ (جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب)
= $\frac{-١}{٢}$ (جتا (أ + ب) - جتا (أ - ب))

الأسئلة

١) $\int \sqrt{س^٣ - ٦س^٢ + ٩س}$ د س ، س > ٣

الحل

$\int \sqrt{س} \sqrt{(س-٣)^٢}$ ءس

$= \int س^{\frac{١}{٢}} \, |س - ٣|$ ءس

$= \int (س^{\frac{٥}{٢}} - ٣ س^{\frac{١}{٢}})$ ءس

$= \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} - ٢ س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= \frac{٢}{٧} \sqrt{س^٧} - ٢ \sqrt{س^٣} + ج$

---

٢) $\int \frac{١ + \sqrt{٩س + ٩}}{\sqrt[٣]{س + ١}}$ د س ، س > -١

الحل

$\int ((س+١)^{-\frac{١}{٣}} + ٣ (س+١)^{\frac{١}{٢}} (س+١)^{-\frac{١}{٣}})$ ءس

$= \frac{(س+١)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + ٣ \int (س+١)^{\frac{١}{٦}}$ ءس

$= \frac{٣}{٢} (س+١)^{\frac{٢}{٣}} + ٣ \times \frac{٦}{٧} (س+١)^{\frac{٧}{٦}} + ج$

---

٣) $\int (١ + ظا س)^٢$ د س

الحل

$\int (\underbrace{١ + ٢ ظاس + ظا^٢س}_{متطابقة})$ ءس

$= \int (٢ ظاس + قا^٢س)$ ءس

$= -٢ لو_{هـ} |حتاس| + ظاس + ج$

---

٤) $\int \frac{١ - جتا^٢س}{١ + جتا س}$ د س

الحل

$\int \frac{(١ - حتاس)\cancel{(١ + حتاس)}}{\cancel{١ + حتاس}}$ ءس

$= \int (١ - حتاس)$ ءس

$= س - جاس + ج$

---

٥) $\int$ جا ٣س (جا س + جتا س)^٢ د س

الحل : بفك التربيع

$\int جا٣س (جا^٢س + ٢ جاس حتاس + حتا^٢س)$ ءس

$= \int جا٣س (١ + جا٢س)$ ءس

$= \int جا٣س$ ءس $+ \frac{١}{٢} \int (حتاس - حتا٥س)$ ءس

$= -\frac{حتا٣س}{٣} + \frac{١}{٢} (جاس - \frac{جا٥س}{٥}) + ج$

٧) $\int \frac{\text{قا س} + \text{ظا س}}{\text{قا س} - \text{ظا س}}$ د س

الحل

$\int \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} - \text{ظاس}} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$ ء س

$= \int \frac{(\text{قاس} + \text{ظاس})^2}{\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س}}$ ء س

$= \int (\text{قا}^2\text{س} + ٢\,\text{قاس ظاس} + \text{ظا}^2\text{س})$ ء س

$= \int (\text{قا}^2\text{س} + ٢\,\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س} - ١)$ ء س

$= ٢\,\text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} - \text{س} + \text{جـ}$

---

٨) $\int \frac{١ - \text{جا ٢س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$ د س

الحل

$\int \frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$ ء س

$= \int \frac{(\text{جتاس} - \text{جاس})^2}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$ ء س

$= \text{جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

---

٩) $\int \sqrt{١ + \text{جا ٢س}}$ د س ، ٠ < س < $\frac{\pi}{٣}$

الحل

$\int \sqrt{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} + ٢\,\text{جاس جتاس}}$ ء س

$= \int \sqrt{(\text{جاس} + \text{جتاس})^2}$ ء س

$= \int |\text{جاس} + \text{جتاس}|$ ء س

$= - \text{جتاس} + \text{جاس} + \text{جـ}$

اختر الاجابة الصحيحة :

١) إن $\int (\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س})$ د س =

أ) س + جـ　　ب) $\frac{\text{جتا ٢س}}{٢}$ + جـ

ج) $\frac{\text{جا ٢س}}{٢}$ + جـ　　د) $\frac{\text{جتا ٢س}}{٢}$ + جـ

---

٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جا ٢س}}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}$ د س =

أ) صفر　　ب) π

ج) ١　　د) $\frac{\pi}{٢}$

---

٣) إن $\int \frac{\text{س قا}^2\text{س} - \text{س ظا}^2\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ د س =

أ) $\sqrt[٣]{\text{س}^2}$ + جـ　　ب) $\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^5}$ + جـ

ج) $\frac{\text{س}^2}{٢}$ + جـ　　د) $\frac{٥}{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^5}$ + جـ

---

٤) إن $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} \sqrt{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا ٢س}}$ د س =

أ) ‎-١　　ب) ١

ج) $\frac{\pi}{٢}$　　د) صفر

إضافي

١) $\int$ جا^{٤}س جتا^{٤}س د س

الحل

$\int ($جاس جتاس$)^{٤}$ ء س

$= \int (\frac{١}{٢}$ جا٢س$)^{٤}$ ء س

$= \frac{١}{١٦} \int (\frac{١}{٢}(١ -$ جتا٤س$))^{٢}$ ء س

$= \frac{١}{٦٤} \int (١ - ٢$ جتا٤س $+$ جتا^{٢}٤س$)$ ء س

$= \frac{١}{٦٤} \int (١ - ٢$ جتا٤س $+ \frac{١}{٢}(١ +$ جتا٨س$))$ ء س

$= \frac{١}{٦٤}($س $- \frac{١}{٢}$ جا٤س $+ \frac{١}{٢}($س $+ \frac{جا٨س}{٨}))$ + ج

٢) $\int \frac{جتا^{٢}٧س - جتا^{٢}س}{جا٤س جا٣س}$ د س

الحل :

$\int \frac{(\cancel{جتا٧س - جتاس})(جتا٧س + جتاس)}{\frac{١}{٢}(\cancel{جتاس - جتا٧س})}$ ء س

$= -٢ (\frac{جا٧س}{٧} +$ جاس$)$ + ج

٣) $\int \sqrt{هـ^{٢س} + ٤هـ^{س} + ٤}$ د س

الحل

$\int \sqrt{(هـ^{س} + ٢)^{٢}}$ ء س

$= \int |هـ^{س} + ٢|$ ء س

$=$ هـ^{س} + ٢س + ج

٤) $\int \frac{هـ}{هـ^{(س+١)} + هـ^{(س+٣)}}$ د س

الحل

$\int \frac{هـ}{هـ \times هـ^{س} + هـ^{٣} \times هـ^{س}}$ ء س

$= \int \frac{\cancel{هـ}}{\cancel{هـ}(هـ^{س} + هـ^{٢}هـ^{س})}$ ء س

$= \int هـ^{-س} (\frac{١}{١ + هـ^{٢}})$ ء س

$= \frac{-١}{١ + هـ^{٢}} \times هـ^{-س}$ + ج

٥) إن قيمة $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{١}{س لو_{هـ} س^{٢}}$ د س =

الحل

$\frac{١}{٢} \int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{\frac{١}{س}}{لو_{هـ} س}$ ء س

$= \frac{١}{٢} [لو_{هـ} |لو_{هـ} س|]_{هـ}^{هـ^{٢}} = \frac{١}{٢}(لو_{هـ} ٢ - ٠)$

$=$ لو$_{هـ}\sqrt{٢}$

ثالثاً : معكوس المشتقة

م(س) معكوس ق(س) المتصل
← مَ(س) = ق(س)

ملاحظات وأفكار

١) يوجد ما لا نهاية من معكوس المشتقة م١ ، م٢ ، ....

٢) طرح معكوسين لهما نفس المعامل العددي = ثابت
٢م١ - م٢ ليس ثابت
م١ - م٢ ثابت
٥م١ - ٥م٢ ثابت
س م١ - س م٢ ليس ثابت

٣) إذا كان لدينا معكوس١ وطلب معكوس٢ سيكون لهم نفس القسم المتغير لكن يختلفوا في الحد المطلق

مثلاً :

م معكوس ق
حيث م١ = ٣س٢ + ٥س + ١
م٢ = ٣س٢ + ٥س + أ

الأسئلة

اخترا الاجابة الصحيحة فيما يلي :

١) إذا كان م١ ، م٢ معكوسا المشتقة للاقتران المتصل ق وكان $\int_{-1}^{2}$ (م١ - م٢) د س = ١٢
فإن $\int_{5}^{7}$ (م٢ - م١) س د س =

أ) -٨ ب) ٤٨
ج) ١٤٤ د) -٤٨

٢) إذا علمت أن م(س) معكوس المشتقة للاقتران المتصل ق(س) وكان هـ$^{م(س)}$ + ٢س = أ س^{٢}
جد أ حيث ق(س) يمر بالنقطة (١ ، ٣)

أ) -٤ ب) ٤
ج) صفر د) ٨

---

٣) م(س) = ٢ جا س + جتا س + أ
معكوس ق(س) ، هـ(س) أيضاً معكوس ق(س) ، هـ(٠) = ٥ ، فإن هـ(π) =

أ) ٤ ب) ٣
ج) صفر د) ٢

---

٤) (٢٠٢٠ تكميلي) م ، هـ معكوساً المشتقة للاقتران المتصل ق(س) ، م(١) = ٣
هـ(س) = ٣س٢ + س + ٤ فإن
$\int$ (هـ(س) - م(س)) س٢ د س =

أ) س٣ + جـ ب) ٣س + جـ
ج) $\frac{1}{3}$س٣ + جـ د) $\frac{5}{3}$س + جـ

---

٥) م ، هـ معكوساً مشتقة للاقتران ق ، م(١) = ٣ ، هـ(١) = ٦
فإن $\int$ (هـ - ق) جا ٢س د س =

أ) -٣ جتا ٢س + جـ
ب) $\frac{-3}{2}$ جتا ٢س + جـ
ج) ٣ جا ٢س + جـ
د) $\frac{-3}{2}$ جا ٢س + جـ

٦) إذا علمت أن م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س) وكان

$٢\ م(س) + س^{٣} = \int س\ ق(س)\ د\ س$

جد $\bar{ق}(٤)$

أ) -٦ ب) ١

ج) ٢٤ د) صفر

٤) خصائص التكامل المحدود

اختر الاجابة الصحيحة :

١) إذا علمت أن $\int_{١}^{٢} (ق(س) + ١)\ د\ س = ٣$

$\int_{٣}^{٢} (\frac{ق(س)}{٢} - ١)\ د\ س = ٤$ فإن

$\int_{٠}^{١} ق(٢س + ١)\ د\ س =$

أ) -٢ ب) -١

ج) -٤ د) -٦

٢) إذا علمت أن س $\in$ [١، ٣]

$-٤ \leq ق(س) \leq ٢$ فإن

أكبر وأصغر قيمة على الترتيب للتكامل

$\int_{١}^{٣} (ق^{٢}(س) + ١)\ د\ س$

أ) ١٠، ٣٤ ب) ٢، ٣٢

ج) ٢، ٣٤ د) ١، ٧

٣) إن أكبر وأصغر قيمة للتكامل

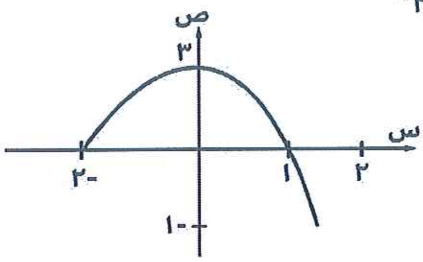
$\int_{٠}^{\pi} (٣ - ٢\ جا\ س)\ د\ س$

أ) π، ٢π ب) ٢π، ٣π

ج) π، ٥π د) π، ٣π

٤) من الشكل التالي لمنحنى ق(س) فإن م، ن على الترتيب

$م \leq \int_{-٢}^{٢} (ق^{٢}(س) + ٢)\ د\ س \leq ن$



أ) ٣، ١١ ب) ١٢، ٨٨

ج) ٢، ١١ د) ٨، ٤٤

٥) من الشكل السابق فإن م، ن على الترتيب

$م \leq \int_{-٢}^{٠} (٣\ ق(س) + ١)\ د\ س \leq ن$

أ) -٢، -١ ب) ٢، ٢٠

ج) -٤، ٢٠ د) ١، ١٠

٦) منصة درسك

$\int_{أ}^{ب} ق(س)\ د\ س + \int_{ب}^{ج} ٢ق(س)\ د\ س + \int_{ج}^{د} ق(س)\ د\ س = ٢٠$

وكان $\int_{أ}^{ج} ق(س)\ د\ س = \int_{ب}^{د} ٣\ ق(س)\ د\ س$

فإن قيمة $\int_{أ}^{ج} ق(س)\ د\ س =$

أ) ٥ ب) ١٠

ج) ١٥ د) ٢٠

٧) إن $\int_{٠}^{٢} هـ^{٢س}\ د\ س + \int_{٢}^{٠} (هـ^{٢س} - ٢)\ د\ س =$

أ) $\frac{هـ^{٤}}{٢} - ٤$ ب) $هـ^{٤} - ٤$

ج) -٤ د) ٤

٨) إن $\int_{0}^{3} |هـ^{س-1} - هـ| \, د\, س =$

أ) $هـ^{2} + هـ^{-1} - 2\, هـ$

ب) $هـ^{2} + هـ^{-1} + 3\, هـ$

ج) $هـ^{2} + هـ^{-1} + هـ$

د) $هـ^{-1} + هـ^{2} - هـ$

---

٩) $ق(س) = \begin{cases} 6 &، أ \le س < 2 \\ 3س &، س = 2 \\ 2س &، 2 < س \le 4 \end{cases}$

وكان $\int_{أ}^{4} ق(س)\, د\, س = 18$ ، فإن أ =

أ) ٦ ب) ١

ج) ٢ د) صفر

---

١٠) إن $\int_{1}^{4} \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 1} \, د\, س =$

أ) $\frac{16}{3}$ ب) ٧

ج) $\frac{14}{3}$ د) ١

مكثف : التكامل وتطبيقاته

رابعاً : طرق التكامل

أ) تمييز الطرق

التعويض	الأجزاء	اللوغاريتم	الكسور الجزئية
* إذا لم تكن الزاوية خطية مثلاً : جا (س^2) ، قا^2 $\sqrt{\text{س}}$ (ص = الزاوية)	خطي × تربيعي (كثير حدود) * لوغاريتم * هـ (أسه خطي) * دائري (زاويته خطي) * (خطي)^{ن}	بسط / مقام مشتقة المقام في البسط يكون الجواب لوغاريتم المقام	بسط / مقام * البسط والمقام كلاهما كثير حدود أو يفرض ويحول لكثير حدود .
* اقتران اسي (أسه ليس خطي) (ص = الأس)			* درجة البسط أقل من المقام .
* اللوغاريتم مركب ، أو في المقام (ص = لو)			* المقام يتحلل إلى أقواس خطية مختلفة .
* ضرب اقترانين احدهما مركب (ص = ما داخل المركب)	كذلك تكامل اللوغاريتم لوحده		
* جذر ما داخله خطي (ص = الجذر كله)			
* هـ (أسه خطي) في المقام (ص = الاسي كله)			

ب) حالات خاصة

* الأجزاء الدوري هـ (أس خطي) × جا (خطي) ، هـ (أس خطي) × جتا (خطي) ، جا (لو س) ، جتا ($لو_{هـ}$ س)

* تكامل جذر تربيعي ما داخله مربع كامل يتحول إلى مطلق

مثلاً: تكامل $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩}$ = تكامل $|س + ٣|$

* تكامل $\sqrt{هـ^{س} + ١}$ نفرض ص = الجذر كله ثم يتحول إلى كسور جزئية .

ج) تكاملات تحتاج لتبسيط قبل الحل

* اقتران أسي من ضمن الأس ($هـ^{س}$ ، لو س) نفصل ثم نبسط ثم فرض

مثال : $هـ^{(س + ٢لو س)} = هـ^{س} \times هـ^{لو س^{٢}} = س^{٢} \times هـ^{س}$

* اللوغاريتم المركب لو $\sqrt{س} = \frac{١}{٢}$ لو س ، لو $ظا^{٥}$ س = ٥ لو ظا س

* $\int \frac{(خطي)^{ن}}{س^{م}}$ نحول الأس الأكبر بقدر الأصغر ونفصل الباقي

مثال : $\int \frac{(٢س + ١)^{٧}}{س^{٩}} = \int \frac{(٢س + ١)^{٧}}{س^{٧} \times س^{٢}}$ د س

(٢٠١٧) $\int \frac{(س^{٢} - ٦س + ٩)^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}}$ د س

* $هـ^{س}$ في المقام نضرب البسط والمقام $هـ^{-س}$

$\int \frac{١}{هـ^{س} + ١} \times \frac{هـ^{-س}}{هـ^{-س}}$

* عامل مشترك أكبر وأصغر $\int \sqrt{س^{٢} + س^{٤}}$ د س = $\int \sqrt{س^{٢}(١ + س^{٢})}$ د س   س > ٠

$\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}$ د س = $\int \frac{\sqrt{س^{٤}(س^{-٢} - ١)}}{س^{٥}}$ د س   س > ٠

* ادخال س داخل الجذر $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}$ د س = $\int \sqrt[٣]{٥ - س}$ د س

* ضرب بالمرافق $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}$ د س

الأسئلة

جد التكاملات التالية :

١) $\int \frac{\text{قاس}}{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قاس} + \text{ظاس})}\ \text{دس}$

الحل

نفرض ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قاس} + \text{ظاس})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} = \frac{\text{قاس}(\text{قاس}+\text{ظاس})}{\text{قاس} + \text{ظاس}}$

$\therefore \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس}}$

$\int \frac{\text{قاس}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{قاس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{1}{٢\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٤\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}\ \text{دس}$

الحل نفرض ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$\int \frac{١}{٢\cancel{\text{س}}(\text{ص}+٢\text{ص}^2)} \times \cancel{\text{س}}\ \text{دص}$ كسور جزئية

$\frac{١}{٢\text{ص}(١+٢\text{ص})} = \frac{\text{أ}}{٢\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{١+٢\text{ص}}$

$١ = \text{أ}(١+٢\text{ص}) + \text{ب} \times ٢\text{ص}$

$\text{ص} = ٠ \longrightarrow \text{أ} = ١$

$\text{ص} = -\frac{١}{٢} \longrightarrow \text{ب} = -١$

الجواب

$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|١+٢\text{ص}| + \text{جـ}$ نرجع ص

$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|١+٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{دس}$

الحل نفرض ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

لكن $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جتاص دص}$

أجزاء دوري

$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}} \longrightarrow \text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{جتاص دص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{جاص}$

$\text{ع} \times \text{هـ} - \int \text{هـ دع}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جاص} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جاص دص}$

$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}} \longrightarrow \text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{جاص دص} \longrightarrow \text{هـ} = -\text{جتاص}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جتاص دص} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جاص} - (\text{هـ}^{\text{ص}} \times -\text{جتاص} + \int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جتاص دص})$

$\therefore \frac{٢}{٢}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جتاص دص} = \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جاص} + \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{جتاص}}{٢} + \text{جـ}$

(نرجع ص)

٤) $\int هـ^{(جاس + ٣ لوهـ جتاس)}$ دس

الحل نفصل ونبسط

$\int هـ^{جاس} \times هـ^{لوهـ جتا^{٣}س}$ دس

$= \int$ جتا^{٣}س هـ^{جاس} دس

ص = جاس ← دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$\int$ جتا^{٣}س × هـ^{ص} × $\frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$= \int (١ - جا^{٢}س)$ هـ^{ص} دص

$= \int (١ - ص^{٢})$ هـ^{ص} دص أجزاء مرتين

و	ده
$١ - ص^{٢}$ (+)	هـ^{ص}
$-٢ص$ (−)	هـ^{ص}
-٢ (+)	هـ^{ص}
٠	هـ^{ص}

$= (١ - ص^{٢})$ هـ^{ص} + ٢ص هـ^{ص} − ٢هـ^{ص} + جـ

ثم نرجع ص

٥) $\int$ قا^{٤}س لوهـ ظا^{٢}س دس

الحل نبسط التكامل

$٢\int$ قا^{٤}س لوهـ ظاس دس

ص = ظاس ← دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

$٢\int$ قا^{٢}س لوهـ ص دص

$= ٢\int (١ + ظا^{٢}س)$ لوهـ ص دص

$= ٢\int (١ + ص^{٢})$ لوهـ ص دص أجزاء

ع = لوهـ ص ← دع = $\frac{١}{ص}$ دص

ده = $(١ + ص^{٢})$ دص ← هـ = $ص + \frac{ص^{٣}}{٣}$

الجواب

$٢(ص + \frac{ص^{٣}}{٣})$ لوهـ ص $- \int (٢ + \frac{٢}{٣}ص^{٢})$ دص

$= ٢(ص + \frac{ص^{٣}}{٣})$ لوهـ ص $- ٢ص - \frac{٢}{٩}ص^{٣}$ + جـ

٦) $\int \frac{لوهـ س}{س^{٢} + ٦س + ٩}$ دس

الحل نرتب التكامل

$\int \frac{لوهـ س}{(س+٣)^{٢}}$ دس

ع = لوهـ س ← دع = $\frac{١}{س}$ دس

ده = $(س+٣)^{-٢}$ دس ← هـ = $\frac{-١}{س+٣}$

⇐ $\frac{-لوهـ س}{س+٣} + \int \frac{١}{س(س+٣)}$ دس

$\frac{١}{س(س+٣)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+٣}$

$١ = أ(س+٣) + ب س$

س = ٠ ← أ = $\frac{١}{٣}$

س = −٣ ← ب = $\frac{-١}{٣}$

الجواب

$\frac{-لوهـ س}{س+٣} + \frac{١}{٣}$ لوهـ |س| $- \frac{١}{٣}$ لوهـ |س+٣| + جـ

7) إذا علمت أن

$\int_{1}^{هـ} س^{ن} لو_{هـ} س \; دس = أ$ ، $ن \neq -1$

جد بدلالة أ، $\int_{1}^{هـ} س^{ن} (لو_{هـ} س)^{2} \; دس$

الحل :

$ص = (لو_{هـ} س)^{2} \longrightarrow دص = 2 لو_{هـ} س \times \frac{1}{س} دس$

$دع = س^{ن} دس \longrightarrow ع = \frac{س^{ن+1}}{ن+1}$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1} (لو_{هـ} س)^{2} \Big]_{1}^{هـ} - \frac{2}{ن+1} \int_{1}^{هـ} س^{ن} لو_{هـ} س \; دس$

$= \frac{هـ^{ن+1}}{ن+1} - \frac{2أ}{ن+1}$

---

8) $\int ظتا س \; لو_{هـ} جا س \; دس$

الحل : $ص = لو_{هـ} جا س \longrightarrow \frac{دص}{دس} = \frac{جتا س}{جا س}$

$دس = \frac{جا س}{جتا س} دص$

$\Leftarrow \int \cancel{ظتا س} \times ص \times \frac{\cancel{جا س}}{\cancel{جتا س}} \; دص$

$= \frac{ص^{2}}{2} + ج = \frac{1}{2} (لو_{هـ} جا س)^{2} + ج$

طريقة 2) ص = جا س

ثم نفرض $ع = لو_{هـ} ص$

---

9) $\int هـ^{(هـ^{س} + 2س)} \; دس$

الحل : نفصل التكامل

$\int هـ^{هـ^{س}} \times هـ^{2س} \; دس$

$ص = هـ^{س} \longrightarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$\int هـ^{ص} \; ص \times \frac{دص}{ص} = \int ص \; هـ^{ص} \; دص$

$ع = ص \longrightarrow دع = دص$

$دهـ = هـ^{ص} دص \longrightarrow هـ = هـ^{ص}$

الجواب $= ص \; هـ^{ص} - هـ^{ص} + ج$ (نرجع ص)

---

10) $\int \frac{1}{1 + هـ^{س}} \; دس$

الحل : $\int \frac{1}{هـ^{س} (هـ^{-س} + 1)} \; دس$ عامل مشترك

$= \int \frac{هـ^{-س}}{هـ^{-س} + 1} \; دس$

$= - لو_{هـ} |هـ^{-س} + 1| + ج$

---

11) $\int \frac{هـ^{(2 + 2 لو_{هـ}(س+1))}}{س^{3} + 3س^{2} + 3س + 9} \; دس$

الحل : نفصل ونبسط

$\int \frac{هـ^{2} \times هـ^{لو_{هـ}(س+1)^{2}}}{س^{3} + 3س^{2} + 3س + 9} \; دس$

$= هـ^{2} \int \frac{س^{2} + 2س + 1}{س^{3} + 3س^{2} + 3س + 9} \; دس$

$= \frac{هـ^{2}}{3} لو_{هـ} |س^{3} + 3س^{2} + 3س + 9| + ج$

١٢) $\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{هـ^{س}+2}+هـ^{س}}$ د س

الحل : نفرض ص $= \sqrt{هـ^{س}+2}$

$ص^2 = هـ^{س}+2 \longrightarrow دس = \frac{2ص\,دص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{هـ^{س}}{ص+ص^2-2} \times \frac{2ص\,دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{2ص}{(ص+2)(ص-1)}\,دص$

$\frac{2ص}{(ص+2)(ص-1)} = \frac{أ}{ص+2} + \frac{ب}{ص-1}$

$2ص = أ(ص-1) + ب(ص+2)$

$ص = 1 \longrightarrow 2 = 3ب \leftarrow ب = \frac{2}{3}$

$ص = -2 \longrightarrow -4 = -3أ \leftarrow أ = \frac{4}{3}$

الجواب

$= \frac{4}{3}\,لو_{هـ}|ص+2| + \frac{2}{3}\,لو_{هـ}|ص-1| + جـ$ (نرجع ص)

١٣) $\int \frac{س\,هـ^{س}}{(س+1)^2}$ د س

الحل :

$م = س\,هـ^{س} \longrightarrow دم = (س\,هـ^{س}+هـ^{س})\,دس$

$= هـ^{س}(س+1)\,دس$

$دهـ = (س+1)^{-2}\,دس \longrightarrow هـ = \frac{-1}{س+1}$

الجواب

$\frac{-س\,هـ^{س}}{س+1} + \int هـ^{س}\,دس$

$= \frac{-س\,هـ^{س}}{س+1} + هـ^{س}$

١٤) $\int قا^{ن}س\ ظا\,س$ د س ن $\neq 0$

الحل

$ص = قاس \longrightarrow دس = \frac{دص}{قاس\,ظاس}$

$\int ص^{ن}\,\cancel{ظاس}\,\frac{دص}{\cancel{قاس\,ظاس}} = \int ص^{ن-1}\,دص$

$= \frac{ص^{ن}}{ن} + جـ = \frac{قا^{ن}س}{ن} + جـ$

١٥) $\int جتا^{5}\,\frac{1}{2}س$ د س

الحل :

$\int جتا\frac{1}{2}س\,(جتا^2\frac{1}{2}س)^2\,دس$

$= \int جتا\frac{1}{2}س\,(1-جا^2\frac{1}{2}س)^2\,دس$

$ص = جا\frac{1}{2}س \longrightarrow دس = \frac{دص}{\frac{1}{2}جتا\frac{1}{2}س}$

$\int \cancel{جتا\frac{1}{2}س}\,(1-ص^2)^2\,\frac{دص}{\frac{1}{2}\cancel{جتا\frac{1}{2}س}}$

$= 2\int (1-2ص^2+ص^4)\,دص$

$= 2(ص - \frac{2ص^3}{3} + \frac{ص^5}{5}) + جـ$

نرجع ص

١٦) $\int$ جا^2 ٢س جتا^5 س د س

الحل

$\int$ (٢ جاس جتاس)^2 جتا^5 س د س

= ٤ $\int$ جا^2 س جتا^7 س د س

ص = جاس ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$

٤ $\int$ ص^2 جتا$^{\cancel{7}\,6}$ س $\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

= ٤ $\int$ ص^2 (١ - جا^2 س)^3 د ص

= ٤ $\int$ ص^2 (١ - ص^2)^3 د ص

= ٤ $\int$ ص^2 (١ - ٣ص^2 + ٣ص^4 - ص^6) د ص

= ٤ ($\frac{\text{ص}^3}{3}$ - ٣ $\frac{\text{ص}^5}{5}$ + ٣ $\frac{\text{ص}^7}{7}$ - $\frac{\text{ص}^9}{9}$) + ج نرجع ص

١٧) $\int$ قا^5 س ظا^3 س د س

الحل ص = قاس ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{قاس ظاس}}$

$\int$ ص^5 ظا$^{\cancel{3}\,2}$ س $\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{قاس ظاس}}}$

= $\int$ ص^4 (قا^2 س - ١) د ص

= $\int$ (ص^6 - ص^4) د ص

= $\frac{\text{ص}^7}{7}$ - $\frac{\text{ص}^5}{5}$ + ج

نرجع ص

١٨) $\int$ قتاس ظا^4 س د س

الحل

$\int$ $\frac{1}{\text{جاس}}$ × $\frac{\text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^4\text{س}}$ د س

ص = جتاس ⟵ د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{-جاس}}$

$\int$ $\frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{ص}^4}$ × $\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{-جاس}}}$ = - $\int$ ص$^{-4}$ (١ - جتا^2 س) د ص

= - $\int$ ص$^{-4}$ (١ - ص^2) د ص

= - $\frac{\text{ص}^{-3}}{-3}$ + $\frac{\text{ص}^{-1}}{-1}$ + ج نرجع (ص)

١٩) $\int$ س قا^2 $\sqrt{\text{س}^2 - 1}$ د س

الحل : نفرض ص = $\sqrt{\text{س}^2 - 1}$

ص^2 = س^2 - ١ ⟵ ٢ص د ص = ٢س د س

د س = $\frac{\text{ص د ص}}{\text{س}}$

$\int$ $\cancel{\text{س}}$ قا^2 ص × $\frac{\text{ص د ص}}{\cancel{\text{س}}}$ اجزاء

م = ص ⟵ د م = د ص

د هـ = قا^2 ص د ص ⟵ هـ = ظاص

م هـ - $\int$ هـ د م

= ص ظاص - $\int$ ظاص د ص

= ص ظاص + لو|جتاص| + ج

نرجع (ص)

٢٠) $\int جا^{2}س \, جتا^{4}س \; د س$

الحل

$\int (جاس \, جتاس)^{2} جتا^{2}س \, دس$

$= \int (\frac{1}{2} جا ٢س)^{2} جتا^{2}س \, دس$

$= \frac{1}{4} \int جا^{2}٢س \times \frac{1}{2}(1 + جتا ٢س) \, دس$

$= \frac{1}{8} \int جا^{2}٢س \, دس + \frac{1}{8} \int جا^{2}٢س \, جتا ٢س \, دس$

$ص = جا ٢س \longrightarrow دس = \frac{دص}{٢ جتا ٢س}$

$= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 - جتا ٤س) \, دس + \frac{1}{8} \int ص^{2} \cancel{جتا ٢س} \frac{دص}{٢ \cancel{جتا ٢س}}$

$= \frac{1}{16}(س - \frac{جا ٤س}{4}) + \frac{1}{48} ص^{3} + ج$

نرجع ص

٢١) $\int جتا ٤س \, (جا ٢س - جتا ٢س)^{5} \; د س$

الحل : نحل

$\int (جتا^{2}٢س - جا^{2}٢س)(جا ٢س - جتا ٢س)^{5} \, دس$

$= \int (جتا ٢س - جا ٢س)(جتا ٢س + جا ٢س)(جا ٢س - جتا ٢س)^{5} \, دس$

$= - \int (جتا ٢س + جا ٢س)(جا ٢س - جتا ٢س)^{6} \, دس$

$ص = جا ٢س - جتا ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢ جتا ٢س + ٢ جا ٢س}$

$\Leftarrow - \int (\cancel{جتا ٢س} + جا ٢س) \, ص^{6} \, \frac{دص}{٢(\cancel{جتا ٢س} + جا ٢س)}$

$= - \frac{ص^{7}}{14} + ج$

نرجع ص

٢٢) $\int \frac{جتا س}{-٦ جا^{2}س - ٨ جتا^{2}س} \; د س$

الحل

$\int \frac{جتا س}{-٦ جا^{2}س - ٨(1 - جا^{2}س)} \, دس$

$= \int \frac{جتا س}{٢ جا^{2}س - ٨} \, دس$

$ص = جا س \longrightarrow دس = \frac{دص}{جتا س}$

$\int \frac{\cancel{جتا س}}{٢ص^{2} - ٨} \times \frac{دص}{\cancel{جتا س}}$ كسور جزئية

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(ص - ٢)(ص + ٢)} \, دص$ ---- الخ

$= \frac{1}{8} لو_{هـ} |ص - ٢| - \frac{1}{8} لو_{هـ} |ص + ٢| + ج$ نرجع ص

٢٣) $\int \frac{س + جا س \, جتا س + ١}{١ + جتا ٢س} \; د س$

الحل : نفصل التكامل إلى تكاملين

$\int \frac{س + ١}{١ + جتا ٢س} + \frac{جاس \, جتاس}{١ + جتا ٢س} \, دس$

(١) اجزاء (٢) لوغاريتم مباشر

(١) $\int \frac{س + ١}{٢ جتا^{2}س} \, دس = \int \frac{1}{2}(س + ١) قا^{2}س \, دس$

$هـ = \frac{1}{2}(س + ١) \longrightarrow دهـ = \frac{1}{2} دس$

$دهـ = قا^{2}س \, دس \longrightarrow هـ = ظاس$

$= \frac{1}{2}(س + ١) ظاس - \frac{1}{2} لو_{هـ} |جتاس|$ (٢) $- \frac{1}{4} لو_{هـ} |١ + جتا ٢س| + ج$

٢٤) $\displaystyle\int \frac{١}{٣\,\text{جا}^{٢}\text{س} - ١٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

الحل عامل مشترك

$$\int \frac{١}{٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س}\,(\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٤)}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٣(\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٤)}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}{٣(\text{ص}^{٢} - ٤)} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$$ كسور جزئية

⋮

٢٥) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} + ١}{\text{س} + \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٢\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^{٣} = \text{س}$

$$٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{ص} + ١}{\text{ص}^{٣} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{ص}} \times ٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{\text{ص} + ١}{\cancel{\text{ص}}(\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٢)} \times ٣\,\cancel{\text{ص}^{٢}}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{٣\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص}}{\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٢}\,\text{دص}$$ قسمة مطولة

$$= \int ٣\,\text{دص} + \int \frac{٦}{\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٢}\,\text{دص}$$ كسور جزئية

$$\frac{٦}{(\text{ص}+٢)(\text{ص}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}+٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-١}$$

$$٦ = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(\text{ص}+٢)$$

$$\text{ص} = ١ \leftarrow ٦ = ٣\text{ب} \leftarrow \text{ب} = ٢$$

$$\text{ص} = -٢ \leftarrow ٦ = -٣\text{أ} \leftarrow \text{أ} = -٢$$

الجواب

$$٣\text{ص} - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+٢| + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١| + \text{ج}$$

نرجع ص

---

٢٦) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{٩\text{س} + ٢٧} - ٣}{\sqrt{٤\text{س} + ١٢} + ٢\text{س} + ٦}\,\text{دس}$

الحل: $\displaystyle\int \frac{٣\sqrt{\text{س}+٣} - ٣}{\sqrt{٤(\text{س}+٣)} + ٢(\text{س}+٣)}\,\text{دس}$

$$= \frac{٣}{٢}\int \frac{\sqrt{\text{س}+٣} - ٣}{\sqrt{\text{س}+٣} + (\text{س}+٣)}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+٣} \leftarrow \text{ص}^{٢} = \text{س}+٣$$

$$٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$$

$$= \frac{٣}{٢}\int \frac{\text{ص} - ٣}{\text{ص} + \text{ص}^{٢}} \times ٢\text{ص}\,\text{دص}$$

$$= \frac{٣}{\cancel{٢}}\int \frac{\text{ص} - ٣}{\cancel{\text{ص}}(\text{ص}+١)} \times \cancel{٢}\,\cancel{\text{ص}}\,\text{دص}$$

قسمة مطولة

$$= ٣\int \left(١ + \frac{-٤}{\text{ص}+١}\right)\text{دص}$$

$$= ٣(\text{ص} - ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١|) + \text{ج}$$

٢٧) $\int \frac{د س}{س^٢ \times \sqrt{س^٢ + ١}}$ ، س > ٠

الحل : عامل مشترك أكبر

$\int \frac{د س}{س^٢ \sqrt{س^٢ (١ + س^{-٢})}}$

$= \int \frac{د س}{س^٣ (١ + س^{-٢})^{\frac{١}{٢}}}$ ∵ س > ٠

$ص = ١ + س^{-٢} \Leftarrow د س = \frac{د ص}{-٢ س^{-٣}}$

$\int \frac{١}{\cancel{س^٣} ص^{\frac{١}{٢}}} \times \frac{د ص}{-٢ \cancel{س^{-٣}}}$

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{١} ص^{\frac{١}{٢}} + ج = -(١ + س^{-٢})^{\frac{٣}{٢}} + ج$

٢٨) $\int \frac{(س^٢ - ٤س + ٤)^{\frac{٥}{٢}}}{س^٧}$ د س ، س > ٢

الحل

$\int \frac{((س - ٢)^٢)^{\frac{٥}{٢}}}{س^٧}$ د س

$= \int \frac{|س - ٢|^٥}{س^٧}$ د س

+

$= \int \frac{(س - ٢)^٥}{س^٥ \times س^٢}$ د س

$= \int \left(\frac{س - ٢}{س}\right)^٥ \times س^{-٢}$ د س

$= \int (١ - ٢ س^{-١})^٥ \times س^{-٢}$ د س

$ص = ١ - ٢ س^{-١} \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ س^{-٢}}$

$\int ص^٥ \cancel{س^{-٢}} \frac{د ص}{٢ \cancel{س^{-٢}}}$

$= \frac{١}{١٢} ص^٦ + ج$ (نرجع ص)

٢٩) إذا علمت أن

$ع_ن = \int ظتا^ن س$ د س اثبت

أن $ع_ن = \frac{- ظتا س^{ن-١}}{ن - ١} - ع_{ن-٢} + ج$ ، ن ≠ ١

الحل

$ع_ن = \int ظتا^٢ س\, ظتا^{ن-٢} س$ د س

$= \int (قتا^٢ س - ١)\, ظتا^{ن-٢} س$ د س

$= \int قتا^٢ س\, ظتا^{ن-٢} س$ د س $- \int ظتا^{ن-٢} س$ د س

$ص = ظتا س \Leftarrow د س = \frac{د ص}{- قتا^٢ س}$

$= \int \cancel{قتا^٢ س}\, ص^{ن-٢} \frac{د ص}{\cancel{- قتا^٢ س}} - ع_{ن-٢}$

$= - \frac{ص^{ن-١}}{ن-١} - ع_{ن-٢} + ج$

$= - \frac{١}{ن-١} ظتا^{ن-١} س - ع_{ن-٢} + ج$

٣٠) $\int \frac{س}{س^٤ + ٣س^٢ + ٢}$ د س

الحل

$ص = س^٢ \Leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$\int \frac{\cancel{س}}{ص^٢ + ٣ ص + ٢} \times \frac{د ص}{٢ \cancel{س}}$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{(ص+٢)(ص+١)}$ د ص

كسور جزئية :

$= -\frac{١}{٢} لو_هـ |ص + ٢| + \frac{١}{٢} لو_هـ |ص + ١| + ج$

(نرجع ص)

تدريبات (٢) للطالب

١) $\int \frac{\text{د س}}{\text{س} + ٦\,\text{س}^{-١} + ٥}$

٢) إذا علمت أن ق(١) = ٤ ، ق(هـ) = ٢

وكان $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{ق(س) د س} = ١$ ،

جد $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ق}'\left(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{ د س}$

٣) $\int \text{ق(س) لو}_{\text{هـ}}\, \text{م}^{٢}\text{(س) د س}$

م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س)

٤) $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{١ - \sqrt{\text{س}}}}$ ، س > ٠

٥) $\int \frac{\text{س جا س}}{\text{قا س}} \text{ د س}$

٦) $\int \text{قا}^{٤}\text{ س لو}_{\text{هـ}}\, \text{ظا}^{٥}\text{ س د س}$

٧) إذا علمت أن

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} & \text{، س} \geq -١ \\ ٧ - \text{س} & \text{، س} < -١ \end{cases}$$

جد :

أ) $\int_{-١}^{١} \text{ق(٣س + ٢) د س}$

ب) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا ٢س ق}'\text{(جا س) د س}$

٨) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{قا}^{٢}\text{ س جتا س - جتا س}} \text{ د س}$

٩) $\int \sqrt{١ + \text{هـ}^{\text{س}}} \text{ د س}$

١٠) $\int \text{جا ٢س لو}_{\text{هـ}} \sqrt{\text{جتا س}} \text{ د س}$

١١) $\int (\text{قتا س + ظتا س})^{٧٠}\, \text{قتا س د س}$

١٢) أثبت أن

$$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س - ٢س + ١})^{\frac{\text{ن}}{٢}}}{\text{س}^{\text{ن} + ٢}} \text{ د س} = \frac{١}{\text{ن} + ١} \qquad \text{ن} \neq -١$$

خامساً : المساحات

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين
$ص = س^٢$ ، $ص = س + ٢$ ، $ص = ٢ - س$
في الربع الأول.

الحل نجد التقاطعات

١) $س^٢ = س + ٢ \leftarrow س^٢ - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

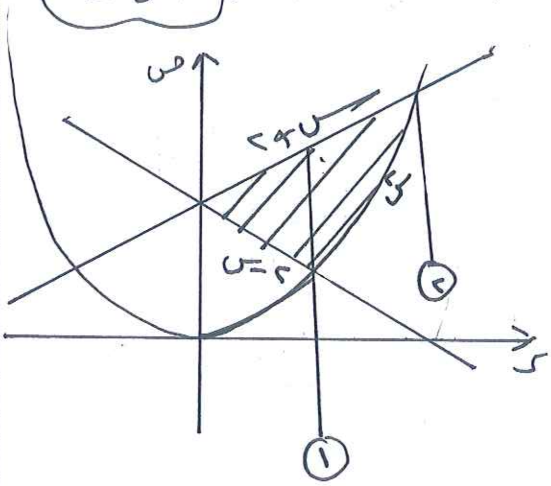
$س = ٢$ ، $س = -١$ × الأول

٢) $س^٢ = ٢ - س \leftarrow س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$س = -٢$ × ، $س = ١$ الأول

٣) $س + ٢ = ٢ - س \leftarrow س = ٠$



$$المساحة = \int_{٠}^{١} (س + ٢) - (٢ - س) \, ءس + \int_{١}^{٢} (س + ٢) - س^٢ \, ءس$$

$$= \frac{١٣}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين
$ق(س) = - س$ ، $هـ(س) = \sqrt{٢ - س}$
ومحور السينات

الحل نجد التقاطعات

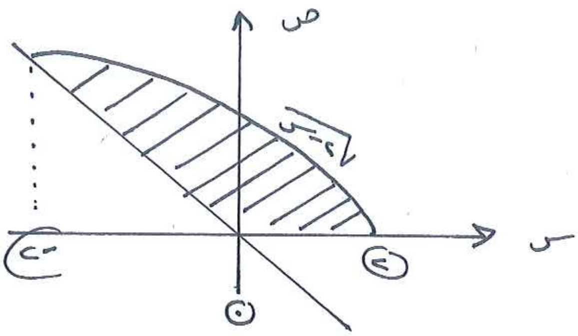
١) $ق = هـ \leftarrow - س = \sqrt{٢ - س}$ نربع

$س^٢ = ٢ - س \leftarrow س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = ١ ، -٢$

٢) $ق = ٠ \leftarrow س = ٠$

٣) $هـ = ٠ \leftarrow س = ٢$



$$المساحة = \int_{-٢}^{٠} (٢ - س)^{\frac{١}{٢}} - - س \, ءس + \int_{٠}^{٢} (٢ - س)^{\frac{١}{٢}} - ٠ \, ءس$$

$$= \left[\frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-\frac{٣}{٢}}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١٠}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = $\sqrt{٨\,س}$ ، ل(س) = ٤

الحل

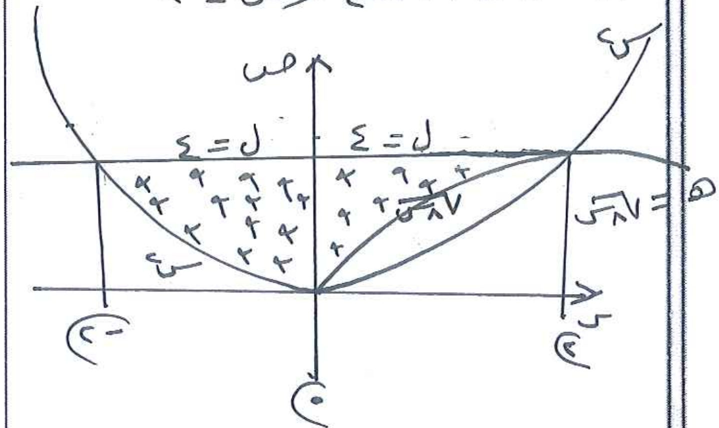
١) ق = هـ ← س^{٢} = $\sqrt{٨س}$ تربيع

س^{٤} - ٨س = ٠ ← س = ٠ ، ٢

٢) ق = ل ← س^{٢} = ٤ ← س = ٢ ، -٢

٣) هـ = ل ← $\sqrt{٨س}$ = ٤ تربيع

٨س = ١٦ ← س = ٢



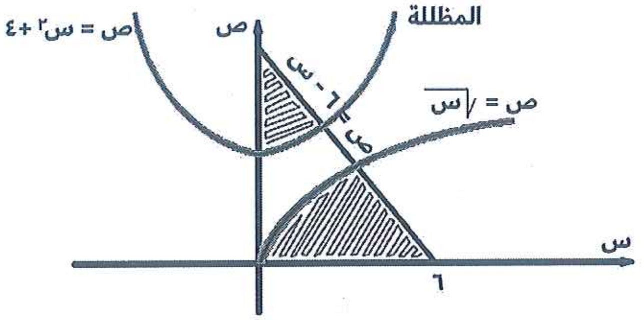
م = $\int_{-٢}^{٠}$ (٤ - س^{٢}) ءس + $\int_{٠}^{٢}$ (٤ - $\sqrt{٨س}$) ءس

= $\left[٨ - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{٠}$ + $\left[٨ - \frac{(٨س)^{\frac{٣}{٢}}}{٨ \times \frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢}$

= ٨ - (٠ + $\frac{٨}{٣}$) + ٨ - $\frac{٦٤}{١٢}$

= ٨ وحدة مربعة

٤) احسب مساحة المنطقة المظللة



الحل : نجد التقاطعات :

١) س^{٢} + ٤ = ٦ - س ← س^{٢} + س - ٢ = ٠

(س + ٢)(س - ١) = ٠ ← س = -٢ ، ١

٢) $\sqrt{س}$ = ٦ - س تربيع س = ٣٦ - ١٢س + س^{٢}

س^{٢} - ١٣س + ٣٦ = ٠

(س - ٤)(س - ٩) = ٠

س = ٤ ، س = ٩ أكبر من ٦

٣) س + ٠ - ٦ = ٠ ← س = ٦

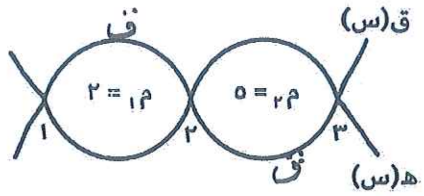
المساحة :

م = $\int_{٠}^{١}$ ((٦ - س) - (س^{٢} + ٤)) ءس + $\int_{٠}^{٤}$ (س$^{\frac{١}{٢}}$ - ٠) ءس

+ $\int_{٤}^{٦}$ (٦ - س) - ٠ ءس

= $\frac{١٧}{٢}$ وحدة مربعة

٥) من الشكل المجاور



جد $\int_{3}^{1}$ (هـ(س) - ق(س)) د س

الحل

م١ = ٢ = $\int_{1}^{2}$ (ق(س) - هـ(س)) د س

∴ $\int_{1}^{2}$ (هـ(س) - ق(س)) د س = -٢

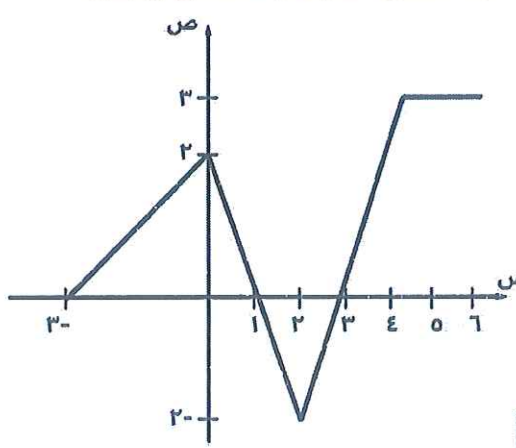
م٢ = ٥ = $\int_{2}^{3}$ (هـ(س) - ق(س)) د س

∴ $\int_{1}^{3}$ هـ - ق = $\int_{1}^{2}$ هـ - ق + $\int_{2}^{3}$ هـ - ق

= -٢ + ٥ = ٣

∴ $\int_{3}^{1}$ (هـ - ق) د س = -٣

٦) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س)



جد :

١) $\int_{-3}^{6}$ ق(س) د س

الحل نحسب مساحة الأشكال

م١ = $\frac{1}{2}$ (١ - -٣)(٢) = ٤

م٢ = $\frac{1}{2}$ (٣ - ١)(٢) = ٢

م٣ = $\frac{1}{2}$ (٤ - ٣)(٣) = $\frac{3}{2}$

م٤ = (٦ - ٤)(٣) = ٦

∴ $\int_{-3}^{6}$ ق(س) د س = ٤ - ٢ + ١,٥ + ٦

= ٩,٥

٢) $\int_{-3}^{6}$ |ق(س)| د س

الحل

= ٤ + ٢ + $\frac{3}{2}$ + ٦

= ١٣,٥

٣) قيمة أ حيث $\int_{-3}^{أ}$ ق(س) د س = ٣,٥

أ ∈ {١، ٣، ٤، ٦}

بالتجريب

$\int_{-3}^{1}$ ق(س) د س + $\int_{1}^{3}$ ق(س) د س + $\int_{3}^{4}$ ق(س) د س

= ٤ - ٢ + ١,٥ = ٣,٥

∴ أ = ٤

٤) $\int_{.}^{٣}$ س^٣ قَ(س^٢ - ٣) د س

الحل :

ص = س^٢ - ٣ ⟵ دص = ٢س دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$ = دس

نغير الحدود

٠ ⟵ -٣

٣ ⟵ ٦

$\int_{-٣}^{٦}$ س$^{\cancel{٣}}$ قَ(ص) $\frac{\text{دص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}}$ = $\frac{١}{٢}\int_{-٣}^{٦}$ (ص+٣) قَ(ص) دص

بالأجزاء

ع = $\frac{١}{٢}$ (ص+٣) ⟵ دع = $\frac{١}{٢}$ دص

ده = قَ(ص) دص ⟵ ه = ق(ص)

⇐ $\frac{١}{٢}$ (ص+٣) ق(ص) $\Big]_{-٣}^{٦}$ - $\frac{١}{٢}\int_{-٣}^{٦}$ ق(ص) دص

= $\frac{٢٧}{٢}$ - $\frac{١٩}{٤}$ = $\frac{٣٥}{٤}$

تدريبات (٣) للطالب

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

ق(س) = $\frac{١}{\text{س}^٢}$ ، هـ(س) = س^٢ ، ل(س) = ٤

أ) في الربع الثاني

ب) في الأول ومحور الصادات

٢) المساحة بين ق(س) = س^٣

هـ(س) = س^٢ + ٤ ، ل(س) = -٤س

٣) ق(س) = س^٢ - ١ ، هـ(س) = س + ٥

ل(س) = س + ١ ومحور الصادات في الربع الثاني

٤) ق(س) = س^٢ - ٤ ، هـ(س) = ٢س + ٤

والمحورين في الربع الأول

٥) ق(س) = ٢س^٢ - ٤س

هـ(س) = ٢س^٢ + ٤س

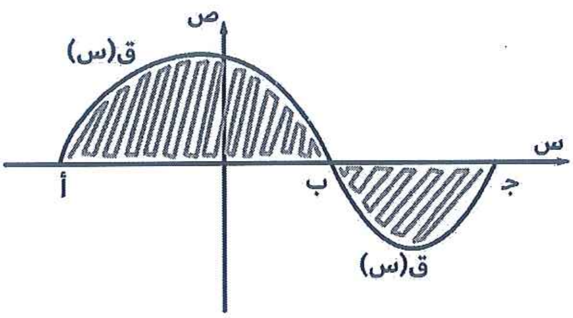
والمستقيم ص = -٢

٦) المساحة بين ق(س) = جا س

هـ(س) = جتا س

والمستقيم ص = ٢ في الفترة [٠ ، π]

٧) يعبر عن المساحة الموضوعة بالشكل التالي :



أ) ٢ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س

ب) $\int_{أ}^{ج}$ ق(س) د س

ج) $\int_{أ}^{ج}$ | ق(س) | د س

د) ٢ $\int_{أ}^{ب}$ | ق(س) | د س

سادساً : المعادلات التفاضلية

١) يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة ت(ن) = $\frac{1}{\sqrt[3]{ن}}$ جد المسافة المقطوعة بعد مرور ٨ ثوان علماً بأن الجسيم تحرك من السكون وأن ف(١) = $\frac{9}{10}$ م

الحل

$\frac{دع}{دن} = \frac{1}{ن^{\frac{1}{3}}} \Leftarrow \int دع = \int ن^{-\frac{1}{3}} دن$

ع = $\frac{3}{2}$ ن$^{\frac{2}{3}}$ + جـ ، ع(٠) = ٠ ⟸ جـ = ٠

$\int$ دف = $\int \frac{3}{2}$ ن$^{\frac{2}{3}}$ دن

ف(ن) = $\frac{9}{10}$ ن$^{\frac{5}{3}}$ + جـ ، ف(١) = $\frac{9}{10}$

جـ = ٠ ⟸ ف(٨) = $\frac{144}{5}$ م

٢) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ع = $\frac{1}{2ت}$ ع ، ت > ٠

إذا كانت السرعة الابتدائية = ١ م/ث وأن الموقع الابتدائي = $\frac{2}{3}$ م ، جد ف(٣)

الحل

ت = $\frac{1}{2ع}$ ⟸ ٢ع دع = دن

نكامل ⟸ ع^2 = ن + جـ

ع(٠) = ١ ⟸ جـ = ١

ع^2 = ن + ١ ⟸ ع = $\sqrt{ن+1}$

$\int$ دف = $\int$ (ن+١)$^{\frac{1}{2}}$ دن

ف(ن) = $\frac{2}{3}$(ن+١)$^{\frac{3}{2}}$ + جـ

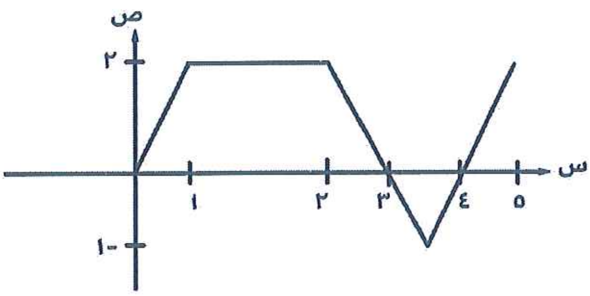
ف(٠) = $\frac{2}{3}$ ⟵ جـ = ٠

ف(ن) = $\frac{2}{3}$(ن+١)$^{\frac{3}{2}}$

∴ ف(٣) = $\frac{2}{3}$(٤)$^{\frac{3}{2}}$

= $\frac{16}{3}$ م

٣) الشكل التالي يمثل العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم



أ) جد المسافة المقطوعة في الفترة [٠، ٥]

الحل

م١ = $\frac{1}{2}$ × ١ × ٢ = ١

م٢ = (٢ − ١)(٢) = ٢

م٣ = $\frac{1}{2}$(٣ − ٢)(٢) = ١

م٤ = $\frac{1}{2}$(٤ − ٣)(١) = ٠٫٥

م٥ = $\frac{1}{2}$(٥ − ٤)(٢) = ١

المسافة دائماً موجبة = ١ + ١ + ٢ + ٢ + ٥ر٠ + ١
= ٥ر٥

ب) الإزاحة في الفترة [٠ ، ٥]

الإزاحة = ١ + ٢ + ١ - ٥ر٠ + ١

= ٥ر٤

٤) جد حل المعادلة التفاضلية
(س - ص^2 س) د س = (ص - س^2 ص) د ص

الحل

س (١ - ص^2) د س = ص (١ - س^2) د ص

$\int \frac{س}{١ - س^2}\, د س = \int \frac{ص}{١ - ص^2}\, د ص$

$-\frac{1}{2}$ لوهـ |١ - ص^2| = $-\frac{1}{2}$ لوهـ |١ - س^2| + جـ

× -٢ ← لوهـ |١ - ص^2| = لوهـ |١ - س^2| + جـ

٥) جد حل المعادلة التفاضلية
هـ^{س} ظا ص د س + (١ - هـ^{س}) قا^{2}ص د ص = ٠

الحل

هـ^{س} ظا ص د س = (هـ^{س} - ١) قا^{2}ص د ص

$\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - ١}\, د س = \int \frac{قا^2 ص}{ظا ص}\, د ص$

لوهـ |هـ^{س} - ١| + جـ = لوهـ |ظا ص|

٦) تصب حنفية في خزان وفق العلاقة
$\frac{د ع}{د ن} = أ ع$
حيث ع : كمية الماء في الخزان بعد ن ساعة
ن : الزمن بالساعة
أ : ثابت ≠ ٠
فإذا زادت كمية الماء من ٤٠٠ لتر إلى ١٢٠٠ لتر خلال ساعتين جد كمية الماء في الخزان بعد مرور ٦ ساعات .

الحل :

نحل المعادلة التفاضلية :

$\int \frac{د ع}{ع} = \int أ\, د ن$

لوهـ |ع| = أ ن + جـ

ع(٠) = ٤٠٠ ← لوهـ ٤٠٠ = جـ

ع = هـ$^{(أ ن + لوهـ ٤٠٠)}$ = ٤٠٠ هـ$^{أ ن}$

ع(٢) = ١٢٠٠ ⟸ ١٢٠٠ = ٤٠٠ هـ^{٢أ}

هـ^{٢أ} = ٣

∴ ع(٦) = ٤٠٠ هـ^{٦أ} = ٤٠٠ (هـ^{٢أ})^3

= ٤٠٠ × (٣)^3

= ١٠٨٠٠ لتر

٧) يذوب الملح بالماء بمعدل يتناسب مع كمية الملح المتبقية وفق العلاقة $\frac{دع}{دن} = أع$

فإذا وضع ١٠ كغم من الملح فذاب نصفه بعد ربع ساعة جد كمية الملح المتبقية بعد ($\frac{٣}{٤}$) ساعة علماً بأن :

ع : كمية الملح المتبقية (لم تذوب)

ن : الزمن بالساعة ، أ : ثابت

الحل :

نحل المعادلة التفاضلية

$\int \frac{دع}{ع} = \int أ\, دن$

$لو_{هـ} ع = أن + جـ$

$ع(٠) = ١٠ \Leftarrow لو_{هـ} ١٠ = جـ$

$لو_{هـ} ع = أن + لو_{هـ} ١٠ \Leftarrow ع = هـ^{(أن + لو_{هـ} ١٠)}$

$ع(ن) = ١٠\, هـ^{أن}$

$ع(\frac{١}{٤}) = ٥ \Leftarrow ٥ = ١٠\, هـ^{(\frac{١}{٤}أ)}$

$هـ^{\frac{١}{٤}أ} = \frac{١}{٢}$

$ع(\frac{٣}{٤}) = ١٠\, هـ^{\frac{٣}{٤}أ} = ١٠(هـ^{\frac{١}{٤}أ})^{٣}$

$= ١٠(\frac{١}{٢})^{٣} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ كغم

تدريبات (٤) للطالب

١) يتحرك جسيم في المستوى الديكارتي وفق العلاقة $ت = \frac{١}{ع^{أ}}$ أ ، ع > ٠

جد أ حيث الجسم تحرك من السكون مبتدائاً من نقطة الأصل وأن ف(٢) = $\frac{٨}{٣}$ وحدة

٢) يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ت = ع ، ع > ٠ ، فإذا كانت سرعته الابتدائية ٢ م/ث وأن ف $(لو_{هـ}٢) = ٥$ م ، جد المسافة المقطوعة بعد $لو_{هـ}٣$ ثانية .

٣) إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى علاقة يعطى $\frac{١}{هـ^{(س + ص - ١)}}$

جد قاعدة العلاقة علماً بأن منحناها يمر (١ ، ٠)

أسئلة ص(٢)

١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$

$\text{ق}(\text{س}) = 1 + \text{هـ}^{-\text{س}} + \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{هـ}^{-\text{س}} + \frac{1}{2(\text{س}+1)}$

$\text{ق}'(0) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (ب)

٢) $\text{ق}(\text{س}) = (2)^{4\text{س}+2} \times (2)^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}3$

$\text{ق}(\text{س}) = 2^{(5\text{س}+2)} + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}3$

$\text{ق}'(\text{س}) = 2^{(5\text{س}+2)} \times \text{لو}_{\text{هـ}}2 \times 5 + \text{هـ}^{-\text{س}}$

$\text{ق}'(0) = 20\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 + 1$ (أ)

٣) نشتق الطرفين

$\text{س ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{جتا س}$

$\text{ق}(\text{س})(\text{س}-1) = \text{جتا س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جتا س}}{\text{س}-1}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}-1)(-\text{جا س}) - \text{جتا س}(1)}{(\text{س}-1)^2}$

$\text{ق}'(0) = \frac{-1}{1} = -1$ (د)

٤) $\text{ص}' = \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{أس}}$

$\text{ص}'' = \text{أ}^2\,\text{هـ}^{\text{أس}}$ نطبق

$\text{أ}^2\text{هـ}^{\text{أس}} + \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{أس}} - 6\,\text{هـ}^{\text{أس}} = 0$

$\text{هـ}^{\text{أس}}(\text{أ}^2 + \text{أ} - 6) = 0$

$\text{هـ}^{\text{أس}} \neq 0 \Leftarrow (\text{أ}+3)(\text{أ}-2) = 0$

$\text{أ} = -3$ ، $\text{أ} = 2$ (أ)

٥) نشتق الطرفين

$-\text{ق}(\text{س}) + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} + \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2+1}\right)$

$-\text{ق}(\text{س}) + \text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} + \text{هـ} \times 2\text{س}$

$-\text{ق}(\text{س}) = 1 + 2\text{هـ س}$ نشتق

$-\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{هـ} \leftarrow \text{ق}'(1) = -2\text{هـ}$

(أ)

٦) المطلق لا يؤثر

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{قا س ظا س} + \text{قا}^2\text{س}}{\text{قا س} + \text{ظا س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{قا س}\cancel{(\text{ظا س} + \text{قا س})}}{\cancel{\text{قا س} + \text{ظا س}}}$

$\text{ق}'(0) = 1$ (ج)

مكثف/التكامل وتطبيقاته — أ. ماهر ضمرة

ص٦

١) $\int (\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س)(\text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س)\, ءس$

$= \int \text{جتا}٢س\, ءس = \frac{1}{2}\text{جا}٢س + ج$

(ج)

٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{١\,\text{جا}س + \text{جتا}س\,١}{\text{جا}س + \text{جتا}س}\, ءس$

$= \frac{\pi}{2}$ (ء)

٣) $\int \frac{س(\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س)}{\sqrt[3]{س}}\, ءس$

$= \int س^{\frac{2}{3}}\, ءس = \frac{3}{5} س^{\frac{5}{3}} + ج$ (ب)

٤) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\text{جا}^2 س + ١ - ٢\text{جا}^2 س}\; ءس$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{١ - \text{جا}^2 س}\; ءس$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\text{جتا}س|\, ءس$

$= -\text{جا}س\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(٠ - ١) = ١$ (ب)

ص٨

١) $(م_1 - م_2)(٣) = ١٢$

$(م_1 - م_2 = ٤)$

$\therefore \int_{5}^{7} -٤س\, ءس = -٢س^2\Big]_{5}^{7} = -٤٨$ (ء)

٢) $هـ^{م(س)} = م س^2 - ٢س$ (لو للطرفين)

$م(س) = \text{لو}_{هـ}(م س^2 - ٢س)$ نشتق

$م'(س) = \frac{٢م س - ٢}{م س^2 - ٢س}$

$م'(١) = هـ(١) = \frac{٢م - ٢}{م - ٢} = ٣$

$٣م - ٦ = ٢م - ٢ \Leftarrow م = -٤$ (أ)

٣) $هـ(س) = ٢\text{جا}س + \text{جتا}س + ج$

$هـ(٠) = ١ + ج = ٥ \Leftarrow ج = ٤$

$هـ(\pi) = ٠ - ١ + ٤ = ٣$ (ب)

٤) $م(س) = ٣س^2 + س + م$

$م(١) = ٣ \Leftarrow م = ٣$

$\therefore هـ - م = ٤ - ٣ = ١$

$\int س^2\, ءس = \frac{س^3}{٣} + ج$ (ج)

٥) (ب) ٦) (ء)

مكثف/التكامل وتطبيقاته — أ. ماهر ضمرة

خصائص التكامل المحدود

1) $\int_1^2 ق(س)\, دس = 2$

$\int_1^3 ق(س)\, دس = 6$

ص = 2س + 1 ← دص = 2 دس ← $دس = \frac{دص}{2}$

$أ\ 1 \to 3$ ، $1 \to 1$ ⇐ $\int_1^3 ق(ص) \frac{دص}{2}$

$= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 ق(ص)\, دص + \int_2^3 ق(ص)\, دص \right)$

$= \frac{1}{2} (2 - 6) = -2$ (أ)

2) $0 \le ق^2(س) \le 16$

$1 \le ق^2(س) + 1 \le 17$

⇐ $2 \le \int_1^3 (ق^2(س) + 1)\, دس \le 34$ (جـ)

3) $0 \le جاس \le 1$ × -2 ثم $+3$

$1 \le 3 - 2جاس \le 3$

∴ $\pi \le \int_0^{\pi} (3 - 2جاس)\, دس \le 3\pi$ (د)

4) $-1 \le ق(س) \le 3$ نربع $\le ق^2(س) \le 9$

$\int_{-2}^{2} 2\, دس \le \int_{-2}^{2} (ق^2(س) + 2)\, دس \le \int_{-2}^{2} 11\, دس$

$8 \le \ \le 44$ (د)

5) $0 \le ق(س) \le 3$ على $[-2 ، 0]$

نضرب 3 ثم +1 ← $1 \le 3ق(س) + 1 \le 10$

نكامل $2 \le \ \le 20$ (ب)

6) $\int_أ^ب ق\, دس + \int_ب^{جـ} ق\, دس + \int_ب^{جـ} ق\, دس + \int_{جـ}^{د} ق\, دس = 20$

$\int_أ^{ب} ق\, دس + \int_ب^{د} ق\, دس = 20$

لكن $\int_أ^{جـ} ق\, دس = 3 \int_ب^{د} ق\, دس$

∴ $4 \int_ب^{د} ق\, دس = 20$ ← $\int_ب^{د} ق\, دس = 5$

∴ $\int_أ^{جـ} ق\, دس = 15$ (جـ)

7) نوزع

$\cancel{\int_0^{2} ه^{س^2}}\, دس + \cancel{\int_2^{0} ه^{س^2}}\, دس + 4 = 4$

(د)

8) نغير التعريف

0 ——— س = 2 +++ 3

$\int_0^2 (ه - ه^{س-1})\, دس + \int_2^3 (ه^{س-1} - ه)\, دس$

$= 2ه - \left[\frac{ه^{س-1}}{1}\right]_0^2 + \left[\frac{ه^{س-1}}{1}\right]_2^3 - ه$

$= 2ه - (ه - ه^{-1}) + (ه^2 - ه) - ه$

(د) [illegible]

٩) الصورة س = ٤ نختار ج

$\int_{م}^{٢} ٦ \, دس + \int_{٢}^{٤} س \, دس = ١٨$

$٦(٢ - م) + \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{٢}^{٤} = ١٨$

$١٢ - ٦م + ١٢ = ١٨ \leftarrow ٦م = ٦$

$م = ١$ (ب)

١٠) $\int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}(\cancel{\sqrt{س} - ١})}{\cancel{\sqrt{س} - ١}} دس$

$= \frac{٢}{٣} \left[س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{١}^{٤} = \frac{٢}{٣}(٨ - ١)$

$= \frac{١٤}{٣}$

تدريبات (٣) (ص ٢١)

١) $\int \frac{دس}{س + ٦ - س^{-١} + ٥} \times \frac{س}{س}$

$= \int \frac{س}{س^٢ + ٥س + ٦} دس$ كسور جزئية

$\frac{س}{(س+٣)(س+٢)} = \frac{م}{س+٣} + \frac{ب}{س+٢}$

$س = م(س+٢) + ب(س+٣)$

$س = -٢ \leftarrow ب = -٢$

$س = -٣ \leftarrow -٣ = -م$

$م = ٣$

$\therefore \int \frac{س}{س^٢ + ٥س + ٦} دس = \int \frac{٣}{س+٣} دس + \int \frac{-٢}{س+٢} دس$

$= ٣ \text{ لوهـ} |س+٣| - ٢ \text{ لوهـ} |س+٢| + جـ$

٣) نفرض

$ص = \sqrt{هـ^{س}} \longrightarrow ص^{2} = هـ^{س}$

$٢ص\ ءص = هـ^{س}\ ءس$

$\therefore ءس = \dfrac{٢ص\ ءص}{هـ^{س}}$

$س = صفر \longrightarrow ص = ١$

$س = ٢ \longrightarrow ص = هـ$

$\int_{1}^{هـ} هـ^{س}\ د'(ص)\ \dfrac{٢ص}{هـ^{س}}\ ءص$

$= \int_{1}^{هـ} ٢ص\ د'(ص)\ ءص$ أجزاء

$ع = ٢ص \longrightarrow ءع = ٢ءص$

$ءهـ = د'(ص)\ ءص \longrightarrow هـ = د(ص)$

$= ٢ص\ د(ص)\Big]_{1}^{هـ} - \int_{1}^{هـ} ٢د(ص)\ ءص$

$= ٢هـ\ د(هـ) - ٢د(١) - ٢ \times ١$

$= ٤هـ - ٨ - ٢ = ٤هـ - ١٠$

٣) بسط التكامل

$\int ٢د(س)\ لو_{هـ} م(س)\ ءس$

$ع = لو_{هـ} م(س) \longrightarrow ءع = \dfrac{د(س)}{م(س)}\ ءس$

$ءهـ = ٢د(س)\ ءس \longrightarrow هـ = ٢م(س)$

$ع \times هـ - \int هـ \times ءع$

$= ٢م(س)\ لو_{هـ} م(س) - \int ٢د(س)\ ءس$

$= ٢م(س)\ لو_{هـ} م(س) - ٢م(س) + جـ$

٤) نفرض أ

$ص = ١ - \sqrt{س} \longrightarrow \dfrac{ءص}{ءس} = \dfrac{-١}{٢\sqrt{س}}$

$ءس = -٢\sqrt{س}\ ءص$

$\int \dfrac{-٢\sqrt{س}}{\sqrt[3]{ص}}\ ءص$

لكن $\sqrt{س} = ١ - ص$

$= \int \dfrac{-٢(١-ص)}{\sqrt[3]{ص}}\ ءص$

$= -٢\int (ص^{-\frac{1}{3}} - ص^{\frac{2}{3}})\ ءص$

$= -٢\left(\dfrac{٣}{٢} ص^{\frac{2}{3}} - \dfrac{٣}{٥} ص^{\frac{5}{3}}\right) + جـ$

نعوض عن ص

٥) $\int \text{س جاس جتاس } \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\text{س جا٢س ءس}$

$\text{ع} = \frac{1}{2}\text{س} \longrightarrow \text{ءع} = \frac{1}{2}\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جا٢س ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{-\text{جتا٢س}}{2}$

$= -\frac{1}{4}\text{س جتا٢س} + \frac{\text{جا٢س}}{8} + \text{جـ}$

٦) $\int 5\,\text{قا}^4\text{س لوهـ ظاس ءس}$

الحل: $\text{ص} = \text{ظاس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\int 5\,\text{قا}^4\text{س لوهـ ص } \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= 5\int (1+\text{ص}^2)\,\text{لوهـ ص ءص}$

$\text{ع} = \text{لوهـ ص} \longrightarrow \text{ءع} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$

$\text{ءهـ} = (1+\text{ص}^2)\,\text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}$

$\Leftarrow 5\left((\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3})\,\text{لوهـ ص} - \int (1 + \frac{\text{ص}^2}{3})\,\text{ءص}\right)$

$= 5\left((\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3})\,\text{لوهـ ص} - \text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{9}\right) + \text{جـ}$

٧) أ) $\text{ص} = 3\text{س} + 2 \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3}$

$-1 \longrightarrow -1$

$1 \longrightarrow 5$

$\int_{-1}^{5} \text{د(ص)} \frac{\text{ءص}}{3} = \frac{2}{3}\int_{-1}^{5} \text{ص ءص}$

$= \frac{1}{3}[\text{ص}^2]_{-1}^{5} = 8$

ب) $\text{ص} = \text{جاس} \longrightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$0 \longrightarrow 0$

$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 1$

$\int_{0}^{1} 2\,\text{جاس جتاس د}'\text{(ص)} \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$= \int_{0}^{1} 2\text{ص د}'\text{(ص) ءص}$

$\text{ع} = 2\text{ص} \longrightarrow \text{ءع} = 2\,\text{ءص}$

$\text{ءهـ} = \text{د}'\text{(ص) ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{د(ص)}$

$= 2\text{ص د(ص)}]_{0}^{1} - 2\int_{0}^{1}\text{د(ص) ءص}$

$= 2\times1\times2 - 2\int_{0}^{1} 2\text{ص ءص}$

$= 4 - 2[\text{ص}^2]_{0}^{1} = 2$

٨) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}(\text{قا}^2\text{س} - 1)}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جتاس}}\;|\text{ظاس}|\;\text{ءس}$ ← + الأول

$\text{ص} = \text{جتاس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\int_{1}^{0} \text{ص}^{\frac{1}{2}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$= \int_{0}^{1} \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\text{ص}}\,\text{ءص} = 2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}]_{0}^{1} = 2$

٩) $ص = \sqrt{هـ^{س} + ١} \Leftarrow ص^{٢} = هـ^{س} + ١$

$٢ص \, ءص = هـ^{س} \, ءس \Leftarrow ءس = \frac{٢ص \, ءص}{هـ^{س}}$

$\int ص \times \frac{٢ص \, ءص}{ص^{٢} - ١} = \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢} - ١} ءص$

قسمة طويلة $\Leftarrow \int ٢ + \frac{٢}{ص^{٢} - ١} ءص$

$\frac{٢}{(ص-١)(ص+١)} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

$٢ = أ(ص+١) + ب(ص-١)$

$ص = ١ \Leftarrow ٢ = ٢أ \Leftarrow أ = ١$

$ص = -١ \Leftarrow ٢ = -٢ب \Leftarrow ب = -١$

$= ٢ص + لو_{هـ}|ص-١| - لو_{هـ}|ص+١| + جـ$

١٠) $\int \frac{١}{٢} جا٢س \, لو_{هـ} جتاس \, ءس$

$ص = جتاس \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-جاس}$

$\frac{١}{\cancel{٢}} \int \cancel{٢} \cancel{جاس} جتاس \, لو_{هـ} ص \, \frac{ءص}{-\cancel{جاس}}$

$= \int -ص \, لو_{هـ} ص \, ءص$ اجزاء

$ع = لو_{هـ} ص \Leftarrow ءع = \frac{١}{ص} ءص$

$ءهـ = ص \, ءص \Leftarrow هـ = \frac{ص^{٢}}{٢}$

$= -\frac{١}{٢} ص^{٢} لو_{هـ} ص + \frac{١}{٤} ص^{٢} + جـ$

مجموعة

١١) $ص = قتاس + ظتاس$

$ءس = \frac{ءص}{-قتاس \, ظتاس - قتا^{٢}س} = \frac{ءص}{-قتاس(قتاس + ظتاس)}$

$\int ص^{\cancel{٧}\,٦} \times \cancel{قتاس} \times \frac{ءص}{-\cancel{قتاس} \times \cancel{ص}}$

$= -\frac{ص^{٧}}{٧} + جـ$ ، مجموعة

١٢) $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{\left((س-١)^{٢}\right)^{\frac{ن}{٢}}}{س^{ن+٢}} ءس$

$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{|١-س|^{ن}}{س^{ن+٢}} ءس$

$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(١-س)^{ن}}{س^{ن}} \times \frac{١}{س^{٢}} ءس$

$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (س^{-١} - ١)^{ن} \times س^{-٢} ءس$

$ص = س^{-١} - ١ \Leftarrow ءس = \frac{ءص}{-س^{-٢}}$

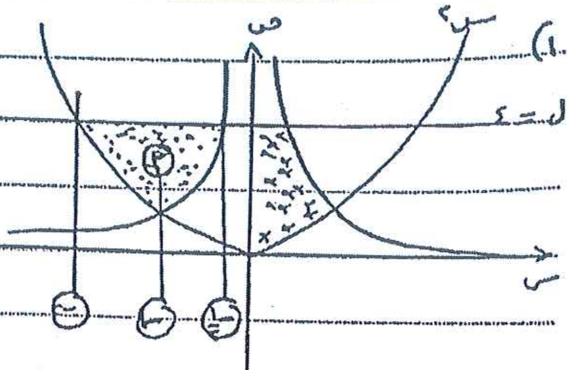
$\frac{١}{٢} \longrightarrow ١ \qquad ١ \longrightarrow ٠$

$\int_{١}^{٠} ص^{ن} \cancel{س^{-٢}} \frac{ءص}{-\cancel{س^{-٢}}} = \int_{٠}^{١} ص^{ن} ءص$

$= \left[\frac{ص^{ن+١}}{ن+١}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{ن+١}$ *

تدريبات (٣)

١)



$\frac{1}{س^2} = 4 \Rightarrow س = \frac{1}{2} ، -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{س^2} = س^2 \Rightarrow س = 1 ، -1$

$س^2 = 4 \Rightarrow س = 2 ، -2$

$م = \int_{-2}^{-1} (4 - س^2)\, ءس + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(4 - \frac{1}{س^2}\right) ءس$

$= 4 - \left[\frac{س^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + 2 + \left[س^{-1}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$

$= 4 - \frac{1}{3}(-1 + 8) + 2 + (-2 + 1)$

$= 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

ب) $م = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (4 - س^2)\, ءس + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{س^2} - س^2\right) ءس$

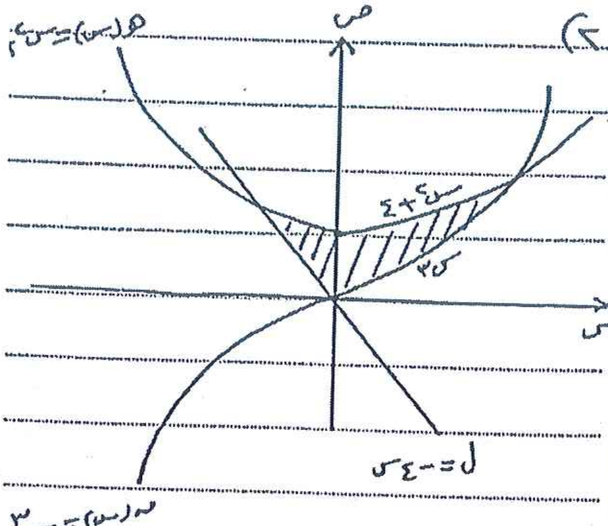
$= 2 - \left[\frac{س^3}{3}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} + \left[س^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[\frac{س^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= 2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 0\right) - (1 - 2) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right)$

$= 3 - \frac{1}{24} - \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$

$= \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

٢)



$س^2 + 4 = س^3$

$س^3 - س^2 - 4 = 0 \Leftarrow س = 2$

$-4س = س^2 + 4$

$س^2 + 4س + 4 = 0 \Leftarrow س = -2$

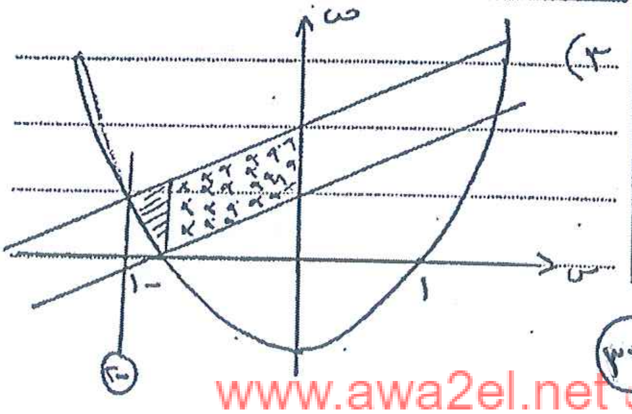
$م = \int_{-2}^{0} (س^2 + 4) + 4س\, ءس + \int_{0}^{2} س^2 + 4 - س^3\, ءس$

$= \left[\frac{س^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[2س^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{س^3}{3}\right]_{0}^{2} + 8 + 8 - \left[\frac{س^4}{4}\right]_{0}^{2}$

$= \frac{8}{3} + (0 - \cancel{8}) + \frac{8}{3} + \cancel{8} - \left[\frac{س^4}{4}\right]_{0}^{2} + 1$

$= \frac{16}{3} + 4 = \frac{28}{3}$ وحدة مربعة

٣)



س² − ١ = س + ٥ ⇐ س² − س − ٦ = ٠

(س − ٣)(س + ٢) = ٠

س = ٣ ، س = −٢

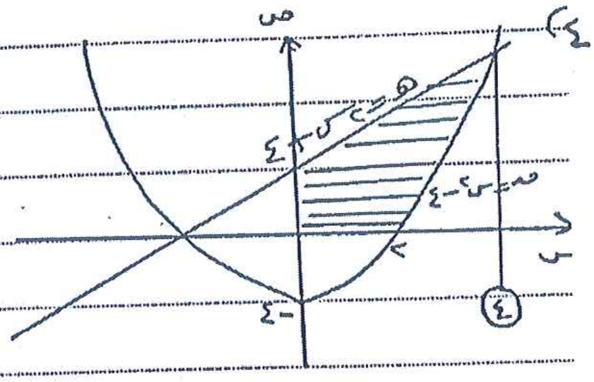
م = ∫ من −٢ إلى −١ ((٥ + س) − (−س)) ءس + ∫ من −١ إلى ٠ (−س² − ١) ءس + ∫ ((٥ + س) − (١ + س)) ءس

= ٦ + [٤س²/٢] من −٢ إلى −١ − [س³/٣] من −٢ إلى −١ + ٤ + [~~٤س²/٢~~] من −١ إلى ٠ − [~~س²/٢~~] من ١ إلى ٠

= ١٠ + −٣/٢ − ١/٣ (−١ − −٨)

= (٦٠ − ٩ − ١٤)/٦ = ٣٧/٦ وحدة مربعة

٤)



س² − ٤ = ٠ ⇐ س = ٢ ، −٢

س² − ٤ = ٢س + ٤ ⇐ س² − ٢س − ٨ = ٠

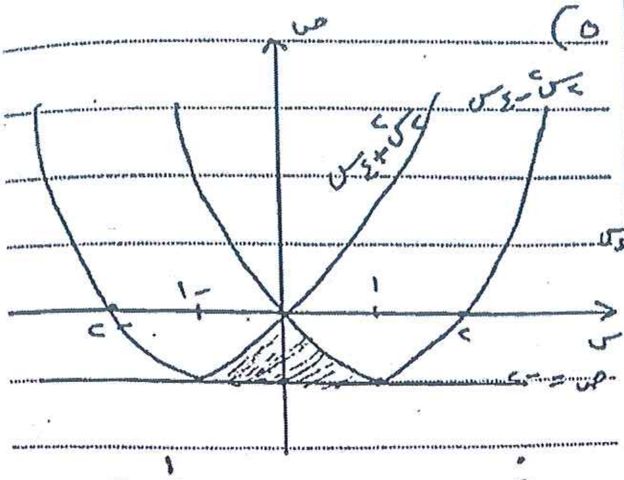
(س − ٤)(س + ٢) = ٠ ⇐ س = ٤

م = ∫ من ٠ إلى ٢ (٢س + ٤) ءس + ∫ من ٢ إلى ٤ (٢س + ٤ − س² + ٤) ءس

= ٤ + ٨ + ١٢ − ٨ − [س³/٣] من ٢ إلى ٤ + ٨

= ٤٠ − ٥٦/٣ = ٦٤/٣ وحدة مربعة

٥)

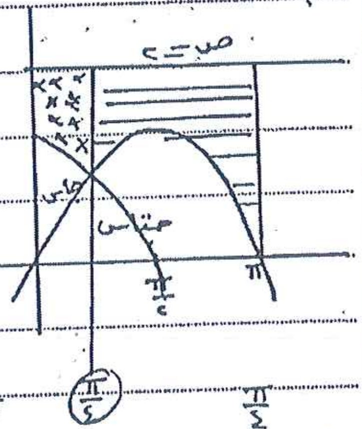


م = ∫ من −١ إلى ٠ (٢ + ٤س + س² − ٢) ءس + ∫ من ٠ إلى ١ (س² − ٤س + ٢) ءس

= [س³/٣] من −١ إلى ٠ + ٢ [~~س²~~] من −١ إلى ٠ + ~~٢~~ + [س³/٣] من ٠ إلى ١ − ٢ [~~س²~~] من ٠ إلى ١ + ~~٢~~

= ٢/٣ + ٢/٣ − ٢/٣ = ٤/٣ وحدة مربعة

٦)



م = ∫ من ٠ إلى π/٤ (٢ − جتاس) ءس + ∫ من π/٤ إلى π (٢ − جاس) ءس

= π/٢ − [جاس] من ٠ إلى π/٤ + ٣π/٢ + [جتاس] من π/٤ إلى π

= ٢π − (١/√٢ − ٠) + (−١ − ١/√٢)

= ٢π − ١ − ٢/√٢

= ٢π − ١ − √٢ وحدة مربعة

٧) ج

تدريبات (٤)

١) $\frac{دع}{دن} = \frac{1}{أ ع} \Leftarrow ع\, دع = \frac{1}{أ}\, دن$

تكامل $\Leftarrow \frac{ع^2}{2} = \frac{1}{أ} ن + جـ$

$ع(0) = 0 \Leftarrow جـ = 0$

$ع^2 = \frac{2}{أ} ن \Leftarrow |ع| = \sqrt{\frac{2}{أ}}\, ن^{\frac{1}{2}}$

$\frac{دف}{دن} = \sqrt{\frac{2}{أ}}\, ن^{\frac{1}{2}} \Leftarrow دف = \sqrt{\frac{2}{أ}}\, ن^{\frac{1}{2}}\, دن$

$ف(ن) = \sqrt{\frac{2}{أ}} \times \frac{2}{3} ن^{\frac{3}{2}} + جـ$

$ف(0) = 0 \Leftarrow جـ = $ صفر

$\frac{8}{\cancel{3}} = \frac{2}{\cancel{3}} \sqrt{\frac{2}{أ}}\, (2)^{\frac{3}{2}}$

$8 = 2 \times \frac{4}{أ^{\frac{1}{2}}} \Leftarrow \boxed{أ = 1}$

٢) $\frac{دع}{دن} = ع \Leftarrow \int \frac{دع}{ع} = \int دن$

$لو_{هـ} |ع| = ن + جـ \qquad ع(0) = 2$

$لو_{هـ} 2 = 0 + جـ$

$ع = هـ^{(ن + لو_{هـ} 2)} = 2هـ^{ن}$

$\int دف = \int 2 هـ^{ن}\, دن$

$ف(ن) = 2هـ^{ن} + جـ$

$5 = 2 هـ^{لو_{هـ} 2} + جـ \Leftarrow جـ = 1$

$\therefore ف(ن) = 2هـ^{ن} + 1$

$ف(لو_{هـ} 3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ م

٣) $\frac{دص}{دس} = - هـ^{(س-1)} \times هـ^{ص}$

$هـ^{-ص}\, دص = - (هـ^{س-1})\, دس$ ، تكامل

$\cancel{-} هـ^{-ص} = \cancel{-} هـ^{س-1} + جـ$

$س = 1 ، ص = 0$

$-1 = -1 + جـ \Leftarrow جـ = 0$

$هـ^{-ص} = هـ^{س-1} \Leftarrow -ص = س - 1$

$ص = 1 - س$