دليل المعلم
الرياضيات
الصف العاشر
الفصل
الدراسي الثاني

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
الدرس 1: اقترانات كثيرات الحدود.	• يتعرف الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته. • يمثل الاقتران كثير الحدود بيانيًّا، ويجد مجاله ومداه. • يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على الاقترانات كثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن الاقترانات كثيرات الحدود.	وحيد الحد، كثير الحدود، الدرجة، الصورة القياسية لكثير الحدود، كثير الحدود الصفري، المعامل الرئيس، المجال، المدى.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية.	• يجد ناتج قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر. • يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها. • يمثل الاقترانات النسبية بيانيًّا، ويجد خطوط التقارب. • يحل مسائل حياتية عن القسمة والاقترانات النسبية.	خوارزمية القسمة، اقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خط التقارب الأفقي، خط التقارب الرأسي.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: تركيب الاقترانات.	• يتعرف مفهوم الاقتران المُركَّب، وشرط تركيب اقترانين. • يحسب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد معطى. • يجد قاعدة اقتران مُركَّب عُلِمت قاعدتا مُركَّبتيه. • يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.	تركيب الاقترانات، الاقتران المُركَّب، المُركَّبتان.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
الدرس 4: الاقتران العكسي.	• يتعرَّف الاقتران العكسي. • يجد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد، ويحدد مجاله ومداه. • يحل مسائل حياتية عن الاقتران العكسي.	العلاقة العكسية، الاقتران العكسي، اقتران واحد لواحد، اختبار الخط الأفقي، الاقتران المحايد، الاقتران الجذري.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	2
الدرس 5: المتتاليات.	• يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها. • يكتب حدود متتالية عُلِم حدها العام. • يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية. • يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.	المتتالية، الحد، الحد العام.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.	1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				18

الوحدة
5

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، والاقترانات الثابتة، والخطية، والتربيعية، وكيفية تمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها. وكذلك تعلموا جمع المقادير الجبرية، وطرحها، وضربها، وتحليل العبارة الثلاثية، والفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بينهما. وتعلموا أيضًا المتتاليات الخطية، والتربيعية، والتكعيبية، ووصف الحد العام لكلٍّ منها. وسيتعلمون في هذه الوحدة الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته، وصورته القياسية والعامة، وتمثيله بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره بالتحليل إلى العوامل، وتطبيق عمليات الجمع والطرح والقسمة على كثيرات الحدود، ويتعرفون الاقتران النسبي، ويجدون مجاله ومداه، ويُمثِّلونه بيانيًّا، ويجدون خطوط تقارب منحناه. سيتعلمون أيضًا تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، وإيجاد المجال والمدى للاقتران المُركَّب والاقتران العكسي، والعلاقة بين الاقتران ومعكوسه. وكذلك سيتعلمون المتتاليات الأسية بوصفها اقترانًا، ويجدون حدها العام.

الوحدةُ 5

الاقتراناتُ
Functions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ الاقتراناتُ لنمذجةِ التطبيقاتِ الحياتيةِ بصورةٍ رياضيةٍ تُسهِّلُ فهمَها. فمثلًا، تُستعمَلُ بعضُ أنواعِ الاقتراناتِ لوصفِ العلاقةِ بينَ أسعارِ السلعِ والكمياتِ المبيعةِ منْها. سأتعرَّفُ في هذهِ الوحدةِ أنواعًا عديدةً منَ الاقتراناتِ والمتتالياتِ ذاتِ الاستعمالاتِ الحياتيةِ الكثيرةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ الاقتراناتِ الخطِّيَّةَ، والتربيعيةَ، وتمثيلَها بيانيًّا.
- ✓ إيجادَ القيمةِ العظمى أوِ القيمةِ الصغرى للاقترانِ التربيعيِّ.
- ✓ تكوينَ معادلاتٍ تربيعيةٍ، وحلَّها.
- ✓ جمعَ مقاديرَ جبريةٍ، وطرحَها، وضربَها.
- ✓ المتتالياتِ الخطِّيَّةَ، والتربيعيةَ، وكتابةَ حدودِها.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◀ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وخصائصَها، وتمثيلَها بيانيًّا.
- ◀ جمعَ كثيراتِ الحدودِ، وطرحَها، وضربَها، وقسمتَها.
- ◀ الاقتراناتِ النسبيةَ، ومجالَها، ومداها.
- ◀ تركيبَ الاقتراناتِ، والاقترانَ العكسيَّ، والاقترانَ الجذريَّ.
- ◀ استنتاجَ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ.

6

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- تعرف المقادير الجبرية، وتحليلها إلى عواملها الأولية.
- وصف الاقترانات التربيعية، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- وصف الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية، والتعبير عنه بمقدار جبري.

الصف العاشر

- تعرف كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًّا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود.
- تعرف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها وخطوط تقارب منحنياتها، وتمثيلها بيانيًّا.
- إيجاد نتيجة تركيب اقترانين، ومجال الاقتران المُركَّب ومداه.
- إيجاد معكوس الاقتران، وتحديد المجال والمدى لكلٍّ من الاقتران ومعكوسه.
- تعرف الاقترانات الجذرية، وإيجاد مجالها ومداها.
- وصف الحد العام لمتتاليات أسية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- تمثيل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية والمتفرعة، واستنتاج خواصها الأساسية.
- اكتشاف المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، وإيجاد حدها العام ومجموع (n) من حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لانهائية تقاربية.
- إدخال أوساط حسابية وهندسية بين عددين.

مشروعُ الوحدةِ

نمذجةُ علاقاتٍ حياتيةٍ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بيانـاتٍ عنِ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ في أحدِ المجالاتِ الحياتيةِ، ونمذجتُها باستـعمالِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ.

الموادُّ والأدواتُ جهازُ حاسوبٍ، شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ إكسل (Microsoft Excel).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختـارُ أنا وأفرادُ مجموعتي مُتغيِّرَيْنِ لجمعِ بياناتٍ حولَهُما، مثلَ: تكلفةِ إنتاجِ سـلعةٍ مُعيَّنةٍ، وعددِ الوحداتِ المُنتَجةِ، أوْ عددِ ساعاتِ النهارِ في إحدى المدنِ في أيامٍ مختلفةٍ منَ العامِ، أوْ أيِّ مُتغيِّرَيْنِ آخرَيْنِ.
2. أجمعُ البياناتِ، ثمَّ أُدوِّنُها في جدولٍ منْ عمودَيْنِ، بحيثُ يحوي العمودُ الأولُ قيمَ المُتغيِّرِ x، ويحوي العمودُ الثاني القيمَ المُناظِرةَ للمُتغيِّرِ y (يجبُ جمعُ ما لا يقلُّ عنْ 15 زوجًا).
3. أستعملُ برمجيةَ إكسـل لتمثيلِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا، وإيجادِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ الأفضلِ تمثيلًا لها باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

	A	B
1	1	10.9
2	2	11.5
3	3	11.9
4	4	12.3
5	5	11.6
6	6	10.8
7	7	11
8	8	10.3
9	9	10
10	10	9.3
11	11	8.7
12	12	9.2
13	13	9.6
14	14	10
15	15	10.2

- أُدخِلُ البيانـاتِ في عمودَيْنِ متجاورَيْنِ ضمنَ صفحةِ إكسـل، وأُظلِّـلُ العمودَيْنِ، ثمَّ أختارُ (مُخطَّطاتٌ) منْ تبويبةِ (إدراجٌ)، وأنقرُ (مُبعثَرٌ)، ثمَّ أختارُ المُخطَّطَ الذي يُبيِّنُ مجموعةَ نقاطٍ منفصلةٍ، فيظهرُ مُخطَّطٌ بيانيٌّ.
- أنقرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ إحدى النقاطِ، ثمَّ أختارُ أيقونةَ (إضافةُ خطِّ اتجاهٍ) منَ القائمةِ المُنسدِلةِ، فيظهرُ مستقيمٌ يتوسَّطُ النقاطَ، وتظهرُ خياراتُ التنسيقِ جانبًا، فأنقرُ المُربَّعَ أمامَ أيقونةِ (عرضُ المعادلةِ في المُخطَّطِ)، لتظهرَ معادلةُ المستقيمِ التي هيَ قاعدةُ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ المطلوبِ.
- إذا لاحظْتُ أنَّ المستقيمَ أوِ المنحنى الظاهرَ لا يُناسِبُ النقاطَ، فإنَّني أستطيعُ تغييرَ نوعِهِ؛ إذْ يُمكِنُني مثلًا اختيارُ مُتعدِّدِ الحدودِ (أيْ كثيرِ الحدودِ)، واختيارُ الترتيبِ (أيْ درجةِ كثيرِ الحدودِ) المناسبِ.
- عندما أحصلُ على المستقيمِ أوِ المنحنى الأنسبِ للنقاطِ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.

4. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ، ومداهُ، وأصفارَهُ، ونقاطَ القيمِ القصوى المحليةِ لهُ.
5. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ)، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ، وأُحدِّدُ فائدتَهُ، ودلالاتِهِ في سياقِ موضوعِ البحثِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ خطواتِ العملِ في المشروعِ والنتائجَ التي توصَّلْنا إليْها مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، ثمَّ نعرضُهُ أمامَ الزملاءِ في مختبرِ الحاسوبِ.

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار متغيرين مناسبين من واقع الحياة يدلان على سعة الأفق والابتكار.			
2	جمع البيانات بطريقة علمية موثوقة.			
3	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
4	دقة الحسابات المتوقعة باستعمال النموذج.			
5	مراعـاة أن يكون التقريـر المكتوب كامـلًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود.

هدف المشـروع: نمذجة العلاقة بين متغيرين من الحياة اليومية باقتران كثير حدود، واستـعمال النمـوذج للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بافتراض معلومية الآخر، وتعرف خصائص هذا النموذج، وتعيين مجاله ومداه، وإيجاد معكوسه إن أمكن.

خطوات تنفيذ المشروع

- عـرِّف الطلبة بالمشـروع وأهميته في تعلـم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية)، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اطلـب إلى أفراد كل مجموعة إعداد المشـروع، ثم كتابة تقرير مفصل عنه، ودور كل منهم في إنجازه.
- وجـه أفراد المجموعـات إلى اختيار متغيريـن من واقع الحياة، مثل: العمر بالسـنوات، والطول بالسـنتيمترات لأفراد تتراوح أعمارهم بين سـنة و15 سنة؛ وطول عظمة العضد، وطول الجسم لمجموعة متنوعة من الأشخاص.
- بيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشـروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشـروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

- اطلـب إلى أفراد كل مجموعة المشـاركة في عرض جزء من نتائج المشـروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهـارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهـم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- وضِّح للطلبة أهمية اشـتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليهـا، والمعلومات الجديدة التـي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشـروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

» إذا كان $f(x) = 2x + 5$، فجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $f(0)$ 5
2) $f(3)$ 11
3) $f(-1)$ 3

» اكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:

4) $3(2x-5) + 4x$ $10x - 15$
5) $4a(2a^2 + 5ab^3 + 2)$ $8a^3 + 20a^2b^3 + 8a$
6) $(3x^2 - 4x) + (7x + 5)$ $3x^2 + 3x + 5$

» جد x بدلالة y في كلٍّ ممّا يأتي:

7) $y = x + 4$ $x = y - 4$
8) $y = 5x$ $x = \frac{y}{5}$
9) $y = 4x + 3$ $x = \frac{(y-3)}{4}$

» أجد الحدين التاليين في كلٍّ ممّا يأتي:

10) $2, 4, 6, 8, \ldots.$ $10, 12$
11) $40, 35, 30, 25, \ldots.$ $20, 15$

إجابات المسائل (أختبر معلوماتي):

13) 104°F   14) 30°C   15) 16, 19

16) 76, 70   17) 27, 38

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

• إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ.

إذا كانَ $f(x) = 3x-2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $g(0)$ -3
2) $f(2)$ 4
3) $f(-3)$ -11
4) $g(-4)$ 21

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

قاعدةُ الاقترانِ	$g(x) = 2x^2 + 5x + 4$
بتعويضِ $x = -2$	$g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$
بالتبسيطِ	$= 8 - 10 + 4 = 2$

• تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $-3(2x - 2y - 4)$ $-6x + 6y + 12$
2) $(4a + b) + 2(a - 3b)$ $6a - 5b$
3) $5x^2(2x - 5)$ $10x^3 - 25x^2$
4) $(x - 3)^2 + 11x$ $x^2 + 5x + 9$

مثالٌ: أكتبُ $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ في أبسطِ صورةٍ.

المقدارُ الأصليُّ	$-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$
خاصيةُ التوزيعِ	$= -2a(3a) - 2a(-2b) - 2a(-5) + 5a^2$
بالتبسيطِ	$= -6a^2 + 4ab + 10a + 5a^2$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$= -a^2 + 4ab + 10a$

• التعبيرُ عنْ مُتغيِّرٍ بدلالةِ الآخرِ.

أَجِدُ قيمةَ x بدلالةِ y في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = 4x - 7$ $x = \frac{y+7}{4}$
2) $y = 3 - 5x$ $x = \frac{3-y}{5}$
3) $y = x^2 - 5$ $\pm\sqrt{y+5}$
4) $y = \frac{1}{2x - 1}$ $x = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + 1) = \frac{1+y}{2y}$

تُستعمَلُ الصيغةُ: $F = \frac{9}{5}C + 32$ لتحويلِ درجةِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس C إلى مقياسِ فهرنهايت F.

5) أُحوِّلُ 40° C إلى مقياسِ فهرنهايت F.   104°F
6) أُحوِّلُ 86° F إلى مقياسِ سيلسيوس C.   30°C

مثالٌ: أَجِدُ قيمةَ x بدلالةِ y في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 3x - 8$

المعادلةُ الأصليةُ	$y = 3x - 8$
بإضافةِ 8 إلى الطرفيْنِ	$y + 8 = 3x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 3	$\frac{y+8}{3} = x$

b) $y = \frac{3}{2 - x}$

المعادلةُ الأصليةُ	$y = \frac{3}{2 - x}$
بضربِ الطرفيْنِ في $(2-x)$	$y(2-x) = 3$
	$2y - yx = 3$
بطرحِ $2y$ منَ الطرفيْنِ، وضربِ الطرفيْنِ في -1	$yx = 2y - 3$
بقسمةِ الطرفيْنِ على y	$x = \frac{2y - 3}{y}$

• إيجادُ حدودِ متتاليةٍ.

أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1) $4, 7, 10, 13, \ldots.$ 16, 19
2) $100, 94, 88, 82, \ldots.$ 76, 70
3) $3, 6, 11, 18, \ldots.$ 27, 38

مثالٌ: أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتاليةِ: $2, 7, 12, 17, \ldots$

أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُهُ بمقدارٍ ثابتٍ هوَ 5:

$7-2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$

إذنْ، الحدّانِ التاليانِ هما: $17 + 5 = 22$, $22 + 5 = 27$

الدرسُ 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًا، وإجراءُ عملياتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ عليْها، وحلُّ مسائلَ عنْها.

المصطلحاتُ وحيدُ الحدِّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسيةُ لكثيرِ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفريُّ، المجالُ، المدى.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعٌ ثُريّاتٍ عددُها x ثُريّا أسبوعيًا، حيثُ $0 \le x \le 350$، ويبيعُ الواحدةَ منْها بسعرِ $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتاجِ x مِنَ الثُّريّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدْ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُريّا أسبوعيًا وبيعِها.

الاقترانُ **وحيدُ الحدِّ** (monomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ عددٍ حقيقيٍّ، يُسمّى المعاملَ، في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأُسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموعِ عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلةِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$ $\quad f(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad f(x) = 3x - 4$ $\quad f(x) = 2$

مفهومٌ أساسيٌّ

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. x: مُتغيِّرٌ.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

8

نتاجات الدرس

- يتعرف كثير الحدود وصورته القياسية، ويعين درجته ومعاملاته وأصفاره.
- يمثل كثيرات الحدود بيانيًّا، ويعين مجالها ومداها.
- يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية تتعلّق بكثيرات الحدود.

المواد والأدوات:

برمجية جيوجبرا، ورق رسم بياني، آلة حاسبة.

التعلم القبلي:

- حساب قيمة الاقتران لقيم معلومة للمتغير المستقل.
- تمثيل المعادلات بيانيًّا.
- ضرب حد جبري في آخر، وكتابة الناتج في أبسط صورة.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بالعلاقة، والاقتران، والفرق بينهما، والرمز المستخدم للاقتران: اكتب الاقتران $f(x) = 3x + 5$، ثم اطلب إليهم إيجاد كلٍّ ممّا يأتي: $f(0), f(2), f(-3)$
- اطلب إلى الطلبة تمثيل المعادلة: $y = f(x) = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم ناقِشهم في مقطعي الخط البياني من المحورين وما يُمثّلانه في هذه المعادلة.
- اطلب إلى الطلبة تبسيط كلٍّ ممّا يأتي: $(2x^2y^3)(3xy^2), (2xy^3)(-2.5y^4)$

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  - » إذا أنتج المصنع 100 ثريا، فبكم دينارًا يبيع الواحدة؟ 120 دينارًا.
  - » ما تكلفة إنتاج 100 ثريا؟ 11300 دينار.
  - » كيف تجد ربح المصنع مــن إنتاج عدد من الثريات وبيعها؟ طرح تكلفة الإنتاج من ثمن بيع الثريات.
  - » ما ربح المصنع من إنتاج 100 ثريا وبيعها؟ 700 دينار.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم وحيد الحد، وكثير الحدود، ورمز الاقتران وقراءته، واذكر أمثلة على ذلك.
- ناقش الطلبة في الصورة العامة للاقتران كثير الحدود، والتسميات المتعلقة بكثيرات الحدود.
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على كثيرات الحدود، وأمثلة على غير كثيرات الحدود.

مثال 1

- شارك الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن طريقة تحديد إذا كان الاقتران المعطى يُمثِّل كثير حدود أم لا، وتحديد الدرجة وبعض المعاملات إن كان كثير حدود.

مثال إضافي

- حدِّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وإذا كان كثير حدود، فاكتبه بالصورة القياسية، ثم حدِّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + \sqrt[3]{x} + 6$ لا

b) $h(x) = 5x^2 - 3x^5 + 4x + 7$

نعم، كثير حدود، صورته القياسية:

$h(x) = -3x^5 + 5x^2 + 4x + 7$، ومعامله الرئيس: -3، ودرجته 5، وحده الثابت 7

c) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-3}$ لا

ملاحظات المعلم

إذا كانَ $a_n \neq 0$ ، فإنَّهُ يُسمّى **المعاملَ الرئيسَ** (leading coefficient)، و**درجةُ** (degree) كثيرِ الحدودِ هيَ أكبرُ أُسٍّ للمُتغيِّرِ في جميعِ حدودِهِ، ويُسمّى a_0 الحدَّ الثابتَ.

يكـونُ كثيرُ الحدودِ مكتوبًا **بالصورةِ القياسـيةِ** (standard form) إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيبٍ تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِها درجةً.

كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ يُسمّى **كثيرَ الحدودِ الصفريَّ** (zero polynomial)، وهوَ $f(x) = 0$، وليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

مثال 1

أُحـدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـالِ كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبُـهُ بالصورةِ القياسـيةِ، ثـمَّ أُحـدِّدُ المعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 3، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معاملهُ الرئيسُ -2، وحدُّهُ الثابتُ -4

2) $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

3) $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

4) $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 2، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معاملهُ الرئيسُ $\frac{3}{4}$، وحدُّهُ الثابتُ $-\frac{5}{4}$

أتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ: انظر الهامش

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

9

إجابة أتحقق من فهمي1:

a) كثير حـدود، صورته القياسـية: $h(x) = \sqrt{2x^5} - 5x + 9$ ، ودرجته 5، والمعامل الرئيس $\sqrt{2}$، والحد الثابت 9

b) ليس كثير حدود.

c) كثيـر حدود، صورته القياسـية: $f(x) = -2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$، ودرجته 4، والمعامل الرئيس -2، والحد الثابت 0

d) كثير حدود، صورته القياسية: $r(x) = 7x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$ درجته 5، المعامل الرئيس 7، وحده الثابت 2π

التقويم التكويني:

- وجِّـه الطلبة إلى حـل التدريب في بنـد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

! أخطـاء مفاهيميـة: قـد يخطئ بعض الطلبة فـي تحديد المعامل الرئيـس، فيكتبون أكبر معاملات كثير الحدود أو معامل أول حد؛ لذا ذكِّرهم أن المعامل الرئيس هو معامل الحد الأكبر درجة بعد تبسيط الاقتران.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في خطوات تمثيل كثيـر الحدود بيانيًّا، وشاركهم في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية تمثيل كثير الحـدود بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومـداه وأصفاره، مُبيِّنًا لهم أن أصفار الاقتران هي الإحداثيات x لنقاط تقاطع المنحنى مع المحـور x، وأن الناتج في هذه الطريقة يكون أحيانًا قيمة تقريبية لعدم دقة الرسم، وأنه يمكن إيجاد الأصفار جبريًّا بحل المعادلة $f(x) = 0$ بالطرق التي تعلموها، وبخاصة التحليل إلى العوامل.

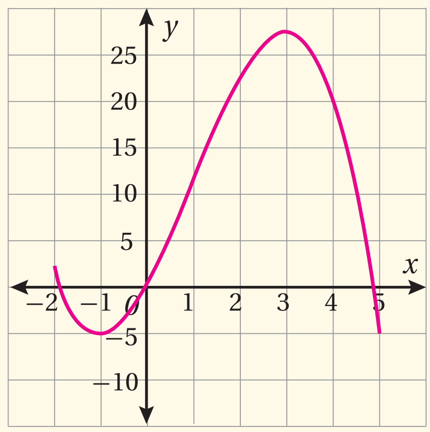
مثال إضافي

- مثِّل بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه وأصفاره:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x \ , -2 \le x \le 5$

مجاله: $-2 \le x \le 5$ مداه: $-5 \le y \le 27$

أصفاره: $-1.9, 0, 4.9$ تقريبًا.

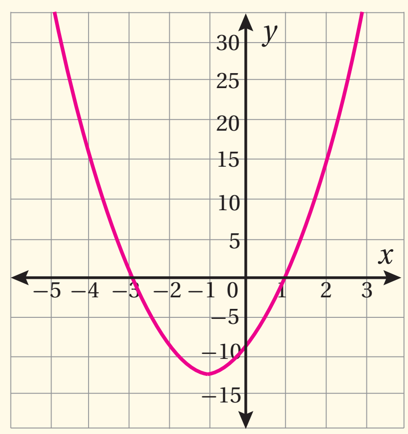


b) $f(x) = 3(x+1)^2 - 12$

مجاله: مجموعة الأعداد الحقيقية.

مداه: $y \ge -12$

أصفاره: $-3, 1$



مجالُ (domain) أيِّ اقترانٍ هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ x، **ومداهُ** (range) هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ y.

لتمثيلِ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ بيانيًّا، أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ أُحدِّدُ فيهِ قيمَ المُتغيِّرِ x، وأحسبُ قيمَ $f(x)$، وأُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ.

أتعلَّمُ

مجالُ كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ في نصِّ السؤالِ، **ومداهُ** هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها تُحدَّدُ منْ جدولِ قيمِ الاقترانِ، أوْ بتحليلِ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ.

مثال 2

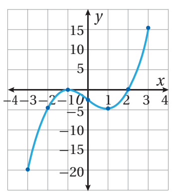
أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2, \ -3 \le x \le 3$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1, 0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ x الحقيقيةِ، حيثُ: $-3 \le x \le 3$، أوِ الفترةُ $[-3, 3]$، ومداهُ: $-20 \le y \le 16$، أوِ الفترةُ $[-20, 16]$.

يُظهِرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $-1, 2$

أتعلَّمُ

أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ منَ التمثيلِ البيانيِّ بإيجادِ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

2 $f(x) = x^2 - 4x$

هذا الاقترانُ تربيعيٌّ، ومنحناهُ قطعٌ مُكافِئٌ مفتوحٌ إلى الأعلى؛ لأنَّ معاملَ x^2 عددٌ موجبٌ.

لرسمِ منحناهُ، أَجِدُ إحداثيَّيْ نقطةِ رأسِهِ.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: اقتران function، وكثير الحدود polynomial، والدرجة degree، والمعامل الرئيس leading coefficient، والمجال domain، والمدى range.

تنويع التعليم:

اطلب إلى الطلبة من ذوي المســتوى فوق المتوسط كتابة كثيري حدود $f(x), g(x)$، بحيث إن:

a) درجة $(f(x) + g(x))$ أصغر من درجة $f(x)$

b) درجة $(f(x) + g(x))$ تساوي درجة $f(x)$

ثم اطلــب إليهم كتابــة ملاحظاتهم علــى درجة مجموع اقترانين كثيري حدود.

الإحداثيُّ x لرأسِ القطعِ المُكافئ	$x = \frac{-b}{2a}$
بتعويضِ $b = -4, a = 1$	$= \frac{-(-4)}{2(1)}$
بالتبسيط	$x = 2$
بتعويضِ $x=2$ في معادلةِ $f(x)$، والتبسيط	$y = 2^2 - 4(2) = -4$

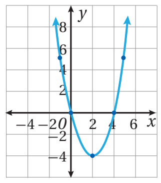
أتذكّرُ

إحداثيا نقطةِ رأسِ القطعِ المُكافِئِ هما: $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ يكــونُ منحنــى القطعِ مفتوحًا إلــى الأعلى إذا كانَ معامــلُ x^2 موجبًا، ومفتوحًا إلى الأسفلِ إذا كانَ معاملُ x^2 سالبًا.

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمِ (الرأسُ ونقطتانِ إلى يسارِهِ، ونقطتانِ إلى يمينِهِ).

x	-1	0	2	4	5
$y = f(x)$	5	0	-4	0	5
(x, y)	$(-1, 5)$	$(0, 0)$	$(2, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 5)$

الخطوةُ 2: أُعيِّــنُ النقاطَ التــي تُمثِّــلُ الأزواجَ (x, y) في المســتوى الإحداثيِّ، وأَصِــلُ بينَهــا بمنحنى متصلٍ، وأضعُ ســهمًا علــى طرفَــي المنحنى للدلالــةِ على أنَّــهُ يمتدُّ إلى مــا لا نهايةَ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجــالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ (لمْ يُحدَّدْ في نصِّ الســؤالِ خلافُ ذلكَ)، ومداهُ هوَ الأعدادُ الحقيقيةُ التي لا تقلُّ عنْ -4؛ أيِ الفترةُ $[-4, \infty)$.

لهذا الاقترانِ صفرانِ، هما: $0, 4$

أُفكِّرُ

مــا الفــرقُ بيــنَ الفترةِ $[-4, \infty)$ والفتــرةِ $(-4, \infty)$؟

أتحقق من فهمي

أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 - 16, -3 \le x \le 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

جمعُ كثيراتِ الحدودِ

لجمعِ كثيراتِ الحدودِ، أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ التي لها الدرجةُ نفسُها، وأجمعُ معاملاتِها.

إجابة أتحقق من فهمي2:

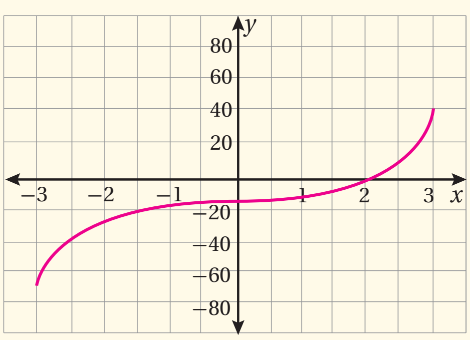
a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-70	-32	-18	-16	-14	0	38

المجال: $-3 \le x \le 3$

المدى: $-70 \le y \le 38$

له صفر واحد هو 2

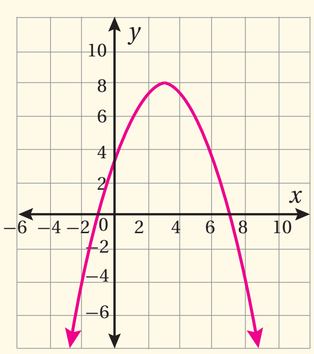


b)

x	-2	-1	1	3	7	8
$y = f(x)$	-4.5	0	6	8	0	-4.5

المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: الأعداد الحقيقية التي لا تزيد على 8؛ أي $y \le 8$، أو الفترة $(-\infty, 8]$.

له صفران، هما: -1، و 7



المثالان 3 و 4

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثاليــن 3 و 4، مُوضِّحًا جمع كثيـري حـدود بالطريقـة الأفقية بتجميــع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ثم جمع معاملاتها، والطريقة العمودية بترتيب الحدود المتشـابهة تحت بعضها، ثم جمع معاملاتها. بعـد ذلك نبِّههم إلى أن المتغير يبقى كما هو بدرجته نفســها في الجمع وفي الطرح.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x)=12x+1-2x^2,\ h(x)=6x^2+4x+12$، فجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $f(x)+h(x)$ $\quad 4x^2+16x+13$

b) $h(x)-f(x)$ $\quad 8x^2-8x+11$

مثال 3

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x^3+4x-9,\ g(x)=7x^3+6x+4$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

$f(x)+g(x)=(2x^2-5x^3+4x-9)+(7x^3+6x+4)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2+(-5x^3+7x^3)+(4x+6x)+(-9+4)$ بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

$=2x^2+2x^3+10x-5$ بجمعِ المعاملاتِ

$=2x^3+2x^2+10x-5$ بكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيةِ

أتحقق من فهمي انظر الهامش

إذا كانَ $f(x)=3x^2+8x^3+2x+13,\ g(x)=-4x^3+6x^2-5$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

طرحُ كثيراتِ الحدودِ

لإيجادِ ناتجِ طرحِ اقترانيْنِ، أُحوِّلُ عمليةَ الطرحِ إلى جمعِ النظيرِ الجمعيِّ للمطروحِ، ثمَّ أجمعُ كما في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُنـي أنْ أَجِدَ ناتجَ جمـعِ اقترانيْنِ باسـتعمالِ الطريقةِ العموديةِ، وذلـكَ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ، ثمَّ جمعِ المعاملاتِ.

أتعلَّمُ

النظيرُ الجمعيُّ للاقترانِ $f(x)$ هوَ $-f(x)$، وينتجُ مـنْ عكـسِ إشـاراتِ معاملاتِ حدودِ $f(x)$.

مثال 4

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x-3,\ g(x)=6x-7x^2-8$، فأَجِدُ $f(x)-g(x)$.

$f(x)-g(x)=2x^2-5x-3-(+6x-7x^2-8)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2-5x-3+(-6x+7x^2+8)$ بتغييـرِ الطرحِ إلى جمـعٍ، وتغييرِ إشاراتِ المطروحِ

$$\begin{array}{r} 2x^2-5x-3 \\ +\ 7x^2-6x+8 \\ \hline 9x^2-11x+5 \end{array}$$

بترتيبِ الحدودِ المتشـابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ

بجمعِ المعاملاتِ

أتحقق من فهمي انظر الهامش

إذا كانَ $f(x)=5x^3-12x^2+3x+20,\ g(x)=x^3+6x^2-14$، فأَجِدُ $g(x)-f(x)$.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

$f(x)+g(x)=4x^3+9x^2+2x+8$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$f(x)-g(x)=4x^3-18x^2+3x+34$

ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لضربِ كثيراتِ الحدودِ، أستعملُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ الطريقةِ العموديةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 5

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) . g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3 , g(x) = 2x^2 - 5x - 4$

$f(x).g(x) = 3x^3(2x^2 - 5x - 4)$ بتعويض $f(x)$ و $g(x)$

$= 3x^3(2x^2) + 3x^3(-5x) + 3x^3(-4)$ بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ

$= (3\times2)(x^3.x^2) + (3\times-5)(x^3.x) + (3\times-4)x^3$ خاصيةُ التجميعِ

$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

$3x^4 - 5x^2 + x - 5$ بترتيبِ الاقترانيْنِ عموديًّا

$(\times)\ 4x^2 - 7$

$12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2$ بضربِ $4x^2$ في حدودِ f

$(+)\quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35$ بضربِ -7 في حدودِ f

$12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ

أتذكَّرُ

أُطبِّقُ قاعدةَ ضربِ القوى منْ قوانينِ الأسسِ عندَ ضربِ الحدودِ الجبريةِ:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) . g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

تُستعمَلُ كثيراتُ الحدودِ لتمثيلِ وحلِّ مسائلَ حياتيةٍ كثيرةٍ في الصناعةِ، والتجارةِ، والاقتصادِ، والزراعةِ، والتعليمِ، ومعظمِ مناحي الحياةِ.

13

إجابة أتحقق من فهمي5:

a) $35x^3 + 30x + 28x + 24$

b) $10x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 36x^2 - 32x$

مثال 5

- ناقِش الطلبة في ضرب كثيرات الحدود بالطريقتين الأفقية والعمودية، مُذكِّرًا إيّاهم بجمع الأسس عند ضرب قوى لها الأساس نفسه، وشاركهم في حل المثال.

مثال إضافي

- جد ناتج ضرب $f(y) \cdot g(y)$ إذا كان

$f(y) = y^2 - 7y + 5 , f(y) = y^2 - y - 3$

$f(y) \cdot g(y) = y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 16y - 15$

تنويع التعليم:

اعرض طريقة ضرب كثيري حدود باستعمال جدول، وذلك بكتابة أحد الاقترانين فوق الجدول، وكتابة الآخر إلى يساره، ووضع نواتج ضرب الحدود داخل خلايا الجدول، ثم جمع النواتج داخل الجدول قطريًّا.

يُوضِّح الجدول المجاور طريقة ضرب: $(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$.

	x^2	$+4x$	$+3$
$2x^2$	$2x^4$	$+8x^3$	$+6x^2$
$-3x$	$-3x^3$	$-12x^2$	$-9x$
-2	$-2x^2$	$-8x$	-6

$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= 2x^4 + (+8x^3 - 3x^3) + (+6x^2 - 12x^2 - 2x^2) + (-9x - 8x) + (-6)$

$= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6$

مثال 6: من الحياة

لياقةٌ: بلغَ عددُ المُشترِكينَ في مركزِ لياقةٍ بدنيةٍ 840 شخصًا، يدفعُ كلٌّ منْهُمْ اشتراكًا شهريًّا مقدارُهُ 30 دينارًا. في دراسةٍ للسوقِ، وجدَ الباحثونَ أنَّ المركزَ سيفقدُ 25 مُشترِكًا مُقابِلَ كلِّ دينارٍ يزيدُهُ على قيمةِ الاشتراكِ. ما قيمةُ الاشتراكِ التي تُحقِّقُ للمركزِ أعلى دخلٍ؟ ما مقدارُ هذا الدخلِ؟

أفترضُ أنَّ المركزَ جعلَ قيمةَ الاشتراكِ x دينارًا، حيثُ: $x > 30$

قيمةُ زيادةِ الاشتراكِ	$x - 30$
عددُ المُشترِكينَ الذينَ سيفقدُهُمُ المركزُ	$25(x-30)$
عددُ المُشترِكينَ الباقينَ	$840 - 25(x-30)$
الدخلُ $R(x)$ يساوي عددَ المُشترِكينَ الباقينَ مضروبًا في قيمةِ الاشتراكِ	$R(x) = x(840-25(x-30))$
بتوزيعِ الضربِ	$= 840x - 25x^2 + 750x$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$= -25x^2 + 1590x$

هذا اقترانٌ تربيعيٌّ، معاملُهُ الرئيسُ سالبٌ؛ فمنحناهُ قطعٌ مُكافِئٌ مفتوحٌ إلى الأسفلِ، ولهُ قيمةٌ عظمى عندَ رأسِهِ.

الإحداثيُّ x للرأسِ هوَ: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1590}{2(-25)} = \frac{1590}{50} = 31.8$

إذنْ، قيمةُ الاشتراكِ التي تُحقِّقُ للمركزِ أعلى دخلٍ هيَ 31.8 دينارًا منْ كلِّ مُشترِكٍ، ومقدارُ هذا الدخلِ هوَ $R(31.8)$.

بتعويضِ 31.8 بدلًا منْ x في اقترانِ الدخلِ	$R(31.8) = -25(31.8)^2 + 1590\,(31.8)$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$= 25281$

إذنْ، أعلى دخلٍ يُحقِّقُهُ المركزُ هوَ 25281 دينارًا كلَّ شهرٍ.

يُمكِنُني التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ بتمثيلِ الاقترانِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

تُعدُّ الرياضةُ الصباحيةُ أفضلَ وسيلةٍ لحرقِ الدهونِ وفقدانِ الوزنِ؛ إذْ تعملُ على تزويدِ الجسمِ بالطاقةِ التي تلزمُهُ منَ الحموضِ الدهنيةِ الحُرَّةِ الزائدةِ المفيدةِ لحرقِ الدهونِ.

ستادُ عمّانَ الدوليُّ أكبرُ ملاعبِ كرةِ القدمِ في الأردنِّ، افتُتِحَ عام 1968م.

أتحقق من فهمي

رياضةٌ: يتَّسِعُ ملعبٌ (ستادٌ) رياضيٌّ لنحوِ 62000 مُشجِّعٍ. إذا كانَ ثمنُ بطاقةِ الدخولِ 11 دينارًا، فإنَّ مُعدَّلَ عددِ الحضورِ هوَ 28000 مُشجِّعٍ. وجدَتْ دراسةٌ أنَّ عددَ بطاقاتِ الدخولِ المبيعةِ يزيدُ بمقدارِ 4000 بطاقةٍ مُقابِلَ كلِّ دينارٍ يُخصَمُ منْ ثمنِ البطاقةِ. ما ثمنُ بطاقةِ الدخولِ الذي يُحقِّقُ أعلى دخلٍ؟ ما مقدارُ هذا الدخلِ؟ انظر الهامش

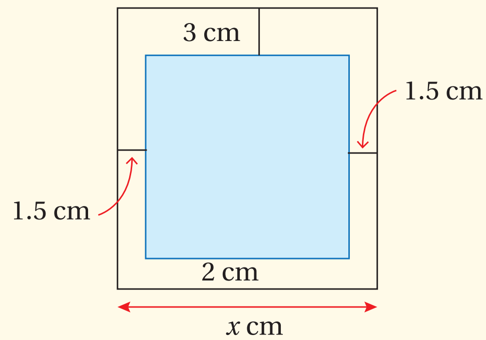
14

مثال 6: من الحياة

- ناقِش الطلبة في كيفية كتابة كثير حدود لنمذجة مسألة حياتية بطريقة مشابهة لترجمة المسألة إلى معادلة. وضِّح خطوات حل هذا المثال، ثم اطلب إلى الطلبة حله بطريقة بديلة بافتراض أن الزيادة هي x

مثال إضافي

إعلان: يريد سعد أن يطبع إعلانًا على ورقة مستطيلة محيطها 80 cm، بحيث يترك هامشًا من الأعلى عرضه 3 cm، وهامشًا من الأسفل عرضه 2 cm، وهامشًا من يمين الورقة ويسارها عرضه 1.5 cm



- اكتب اقترانًا يُمثِّل مساحة الإعلان بدلالة عرض الورقة x، ثم جد أبعاد الورقة التي تجعل مساحة الإعلان أكبر ما يمكن.

$A(x) = -x^2 + 38x - 105$, 19 cm, 21 cm

أتدرب وأحل المسائل

1 إلى 20 انظر ملحق الإجابات

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1. $f(x) = 4 - x$
2. $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$
3. $h(x) = 3x(4x-7) + 2x - 12$
4. $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$
5. $j(t) = \sqrt{7}\,t - 16t^2$
6. $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$
7. $f(x) = 13(2)^x + 6$
8. $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

9. $f(x) = x^2 - 3x - 4$
10. $f(x) = -4x^2 + 8x + 3$
11. $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \le x \le 3$
12. $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \le x \le 4$

إذا كانَ $f(x) = 2x+1,\ g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4,\ h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ:

13. $h(x) + g(x)$
14. $g(x) - h(x)$
15. $f(x) \cdot h(x)$
16. $x(f(x)) + h(x)$
17. $(f(x))^2 - g(x)$
18. $h(x) - x(g(x))$

19. **صاروخٌ:** أُطلِقَ صاروخٌ إلى أعلى، وكانَ ارتفاعُهُ بالأمتارِ فوقَ سطحِ البحرِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ $h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$. أجِدُ أقصى ارتفاعٍ يبلغُهُ الصاروخُ.

20. **زراعةٌ:** وجدَ مُزارعٌ أنَّهُ إذا زرعَ 75 شجرةَ فاكهةٍ في بُستانِهِ، فإنَّ مُعدَّلَ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ هوَ 21 صندوقًا في الموسمِ. وكلَّما نقصَ عددُ الأشجارِ شجرةً واحدةً زادَ مُعدَّلُ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ بمقدارِ 3 صناديقَ؛ فتباعدُ الأشجارِ بعضِها عنْ بعضٍ يُعزِّزُ فرصَها في الحصولِ على حاجاتِها منَ التربةِ. ما عددُ الأشجارِ التي يتعيَّنُ عليهِ زراعتُها لإنتاجِ أكبرِ قدرٍ منَ الثمرِ؟ ما مقدارُ هذا الثمرِ؟ انظر ملحق الإجابات

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية (18–2) ضمن مجموعات).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن الاقتران في السؤال 2 كثير حدود بسبب إمكانية اختصار العامل x من البسط والمقام، فيتحول إلى $f(x) = 5x+2$؛ لذا نبِّههم إلى أن القسمة لا تصح إلا إذا كان المقسوم عليه لا يساوي صفرًا. وإذا أرادوا كتابة هذا الاقتران بالصورة المختصرة: $f(x) = 5x + 2$، فيجب عليهم الإشارة عنده إلى أن $x \neq 0$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 8 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 25 إلى كتابة أي مقدار ذي حدين، ثم البحث عن مقدار ثلاثي الحدود؛ شرط أن تكون 4 من نواتج الضرب متناظرة بالنسبة إلى عملية الجمع، فيكون مجموعها صفرًا، ويبقى حدان من ناتج ضرب المقدارين.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 26 إلى البحث عن طريقة لتحليل مقدار ذي 4 حدود.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:

نظرية الأعداد:

يعطى مجموع مربعات أول n من الأعداد الطبيعية بالاقتران:

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) جد قيمة $F(5), F(10)$

b) صف ما تُمثِّله كلٌّ من القيمتين في الفقرة a.

c) جد مجموع: $1 + 4 + 9 + 16 + ... + 400$

6 الختام

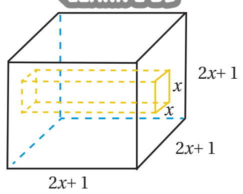
- اطلب إلى الطلبة وصف طرائق مختلفة لتصنيف كثيرات الحدود، ثم إعداد قائمة تتضمن ما يجب مراعاته عند جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اختيار متغيرين من الحياة اليومية، والبدء بجمع البيانات حولهما.
- ذكِّر الطلبة بضرورة تدوين قيمة المتغير الأول (المستقل) مع قيمة المتغير الثاني (التابع) المناظرة لها، وذلك في العمود المقابل لها في الجدول.

21 **سـياجٌ:** لدى سعيدٍ 120 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يستعملَها لتسييجِ 3 حظائرَ مستطيلةٍ متساويةٍ كما في المُخطَّطِ الآتي.
ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ لهذهِ الحظائرِ؟ انظر ملحق الإجابات

22 **هندسةٌ:** مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِهِ $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِهِ x cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ. انظر ملحق الإجابات



23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشفُ الخطأَ:** وجدَ كلٌّ منْ طه وقاسمٍ ناتجَ $3x(x^2 - 2x - 3) - (5x^3 + 7x^2 - 3)$:

طه

$$3x^3 - 6x^2 - 9x + 5x^3 + 7x^2 - 3$$
$$= 8x^3 + x^2 - 9x - 3$$

قاسمٌ

$$3x^3 - 6x^2 - 9x + (-5x^3 - 7x^2 + 3)$$
$$= -2x^3 + 6x^2 - 6x$$

أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي. 24 إلى 27 انظر ملحق الإجابات

25 **مسـألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ كثيريْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

26 **تحدٍّ:** أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

27 **تبريـرٌ:** إذا كانَ f, g كثيريْ حـدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحـدودِ h الناتجِ منْ جمعِهِما، وطرحِهِما، وضربِهِما، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يقسم اقتران كثير حدود على كثير حدود آخر.
- يبين إن كان كثير حدود أحد عوامل كثير حدود آخر.
- يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها.
- يجد خطوط التقارب (إن وجدت) لمنحنى الاقتران النسبي.
- يمثل اقترانات نسبية بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية عن قسمة الاقترانات والاقترانات النسبية.

التعلم القبلي:

- قسمة القوى وتبسيط مقادير جبرية كسرية.
- تحليل مقادير جبرية إلى عواملها.
- حل معادلات خطية وتربيعية.

1 التهيئة

- راجِـع الطلبة في قوانين الأســس، ثـم اطلب إليهم تبسيط ما يأتي:

$$x^5 \div x^2 \qquad \frac{6x^3}{2x} \qquad \frac{12x^4}{4x^2} \qquad \frac{6x^3+8x^2}{2x^2}$$

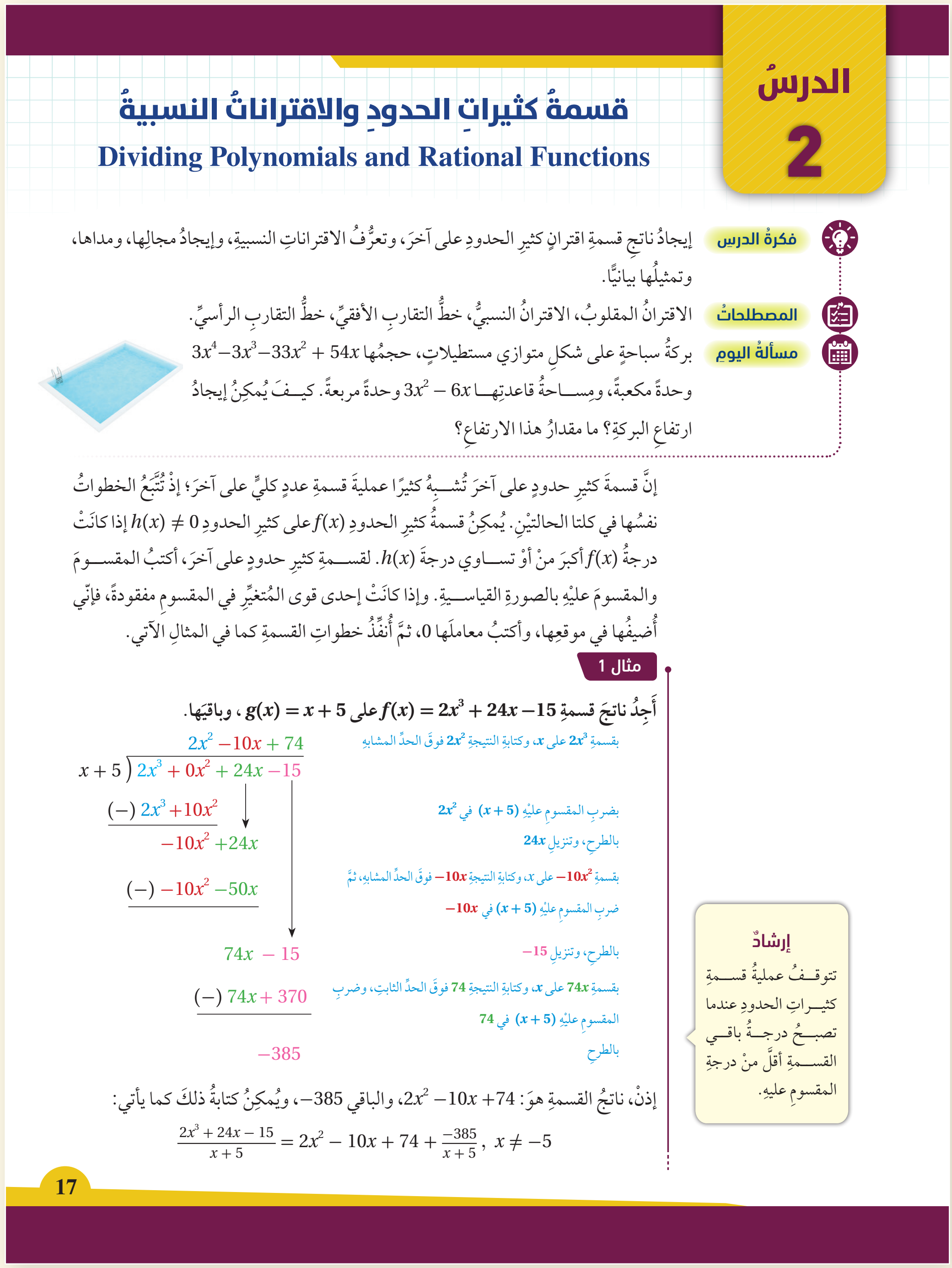
» اطلب إلى الطلبة حل المعادلات الآتية:

a) $3x - 2 = 10$

b) $2 - 4x = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$



الدرس 2

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتُ النسبيةُ

Dividing Polynomials and Rational Functions

فكرةُ الدرسِ إيجادُ ناتجِ قسمةِ اقترانٍ كثيرِ الحدودِ على آخرَ، وتعرُّفُ الاقتراناتِ النسبيةِ، وإيجادُ مجالِها، ومداها، وتمثيلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقترانُ المقلوبُ، الاقترانُ النسبيُّ، خطُّ التقاربِ الأفقيِّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

مسألةُ اليومِ بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُها $3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x$ وحدةً مكعبةً، ومِساحةُ قاعدتِها $3x^2 - 6x$ وحدةً مربعةً. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ ارتفاعِ البركةِ؟ ما مقدارُ هذا الارتفاعِ؟

إنَّ قسمةَ كثيرِ حدودٍ على آخرَ تُشبِهُ كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ؛ إذْ تُتَّبَعُ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتيْنِ. يُمكِنُ قسمةُ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$. لقسمةِ كثيرِ حدودٍ على آخرَ، أكتبُ المقسومَ والمقسومَ عليْهِ بالصورةِ القياسيةِ. وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّرِ في المقسومِ مفقودةً، فإنّي أُضيفُها في موقعِها، وأكتبُ معاملَها 0، ثمَّ أُنفِّذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 1

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$، وباقيَها.

$$\begin{array}{r l}
2x^2 - 10x + 74 & \\
x+5 \,\big)\, \overline{2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} & \text{بقسمةِ } 2x^3 \text{ على } x\text{، وكتابةِ النتيجةِ } 2x^2 \text{ فوقَ الحدِّ المشابهِ} \\
(-)\ 2x^3 + 10x^2 & \text{بضربِ المقسومِ عليْهِ } (x+5) \text{ في } 2x^2 \\
-10x^2 + 24x & \text{بالطرحِ، وتنزيلِ } 24x \\
(-)\ -10x^2 - 50x & \text{بقسمةِ } -10x^2 \text{ على } x\text{، وكتابةِ النتيجةِ } -10x \text{ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ } (x+5) \text{ في } -10x \\
74x - 15 & \text{بالطرحِ، وتنزيلِ } -15 \\
(-)\ 74x + 370 & \text{بقسمةِ } 74x \text{ على } x\text{، وكتابةِ النتيجةِ } 74 \text{ فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ } (x+5) \text{ في } 74 \\
-385 & \text{بالطرحِ}
\end{array}$$

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x+5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x+5},\ x \neq -5$$

إرشادٌ تتوقفُ عمليةُ قسمةِ كثيراتِ الحدودِ عندما تصبحُ درجةُ باقي القسمةِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ.

17

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما متوازي المستطيلات؟ مجسم ثلاثي الأبعاد ذو 6 أوجه مستطيلة الشكل، وأوجهه المتقابلة متوازية ومتطابقة، وأوجهه المتجاورة متعامدة.
  » كيف نجد حجمه؟ بضرب طوله في عرضه في ارتفاعه، أو بضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه.
  » إذا علم حجم متوازي مستطيلات وطول اثنين من أبعاده، فكيف نجد بعده الثالث؟ بقسمة الحجم على ناتج ضرب البعدين المعلومين.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- اطلب إلى الطلبة استعمال القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $695 \div 21$
- وضِّح لهم أنه يتعيَّن اتباع الخطوات نفسها عند قسمة $6x^2 + 9x + 5$ على $2x + 1$
- اسألهم:
  » كيف يمكن قسمة $9x^2 + 9x + 2$ على $3x + 2$ باستعمال قسمة الأعداد الكلية؟

مثال 1

- ناقِش الطلبة في خطوات قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة المعروضة في المثال، ونبِّههم إلى أنه يجب كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية وإضافة 0 في موقع أي قوة مفقودة في أي منهما.

مثال إضافي

- جد ناتج قسمة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 23$ على $h(x) = 2x + 3$ وباقيها.

الناتج: $3x^2 - 6x + 9$، والباقي -4

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يغفل بعض الطلبة عن كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، أو وضع 0 في موقع أي قوة مفقودة؛ لذا أكِّد هذين الأمرين لتجنب الوقوع في الخطأ.

ملاحظات المعلم

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

$$(x+5)(2x^2-10x+74)-385 = 2x^3-10x^2+74x+10x^2-50x+370-385$$
$$= 2x^3+(-10+10)x^2+(74-50)x-15$$
$$= 2x^3+24x-15 \checkmark$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتِجَ قسمةِ $f(x) = 4x^4-7x^3+12x-25$ على $h(x) = x-4$ انظر الهامش

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسومِ عليْهِ، وإضافةِ الباقي. فإذا كانَتِ النتيجةُ مساويةً للمقسومِ كانَ الحلُّ صحيحًا.

إذا كانَ $f(x)$ وَ $h(x)$ كثيري حدودٍ، وكانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$، وَ $h(x) \neq 0$، فإنَّهُ يوجدُ كثيرا حدودٍ وحيدانِ، هما: $q(x)$ (ناتجُ القسمةِ)، وَ $r(x)$ (باقي القسمةِ)، ودرجتُهُ أصغرُ منْ درجةِ $h(x)$، حيثُ:

$$f(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{أوْ} \quad \frac{f(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

إذا كانَ $r(x) = 0$، فإنَّ $f(x)$ يقبلُ القسمةَ على $h(x)$، ويكونُ $h(x)$ أحدَ عواملِ $f(x)$.

معلومةٌ

يُمكِنُ استعمالُ خوارزميةِ القسمةِ للتأكُّدِ أنَّ كثيرَ الحدودِ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ كثيرِ حدودٍ آخرَ $f(x)$ أمْ لا.

مثال 2

أُثبِتُ أنَّ $(2x^2+x+7)$ هوَ أحدُ عواملِ الاقترانِ $f(x) = 6x^4-7x^3+10x^2-38x-21$.

يكونُ $(2x^2+x+7)$ أحدَ عواملِ الاقترانِ $f(x)$ إذا كانَ باقي قسمةِ $f(x)$ على $(2x^2+x+7)$ يساوي 0، أُقسِمُ $f(x)$ على $(2x^2+x+7)$:

$$
\begin{array}{r l}
 & 3x^2 -5x -3 \\
2x^2+x+7 \,\big) & 6x^4-7x^3+10x^2-38x-21 \\
(-) & 6x^4+3x^3+21x^2 \\
 & -10x^3-11x^2-38x \\
(-) & -10x^3-5x^2-35x \\
 & -6x^2-3x-21 \\
(-) & -6x^2-3x-21 \\
 & 0
\end{array}
$$

بقسمةِ $6x^4$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ $3x^2$ فوقَ الحدِّ المشابِهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(2x^2+x+7)$ في $3x^2$

بالطرحِ، وتنزيلِ $-38x$

بقسمةِ $-10x^3$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ $-5x$ فوقَ الحدِّ المشابِهِ، وضربِها في المقسومِ عليْهِ

بالطرحِ، وتنزيلِ -21

بقسمةِ $-6x^2$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ -3 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ -3 في المقسومِ عليْهِ

بالطرحِ

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في الحفاظ على تركيزهم في أثناء تنفيذ الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة، فشجِّعهم على مقارنة نتيجة كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في الشرط الذي يجعل عددًا عاملًا لعدد آخر. وبطريقة مماثلة، وضِّح الشرط الذي يجعل اقتران كثير حدود عاملًا لاقتران كثير حدود آخر، ثم شارك الطلبة في حل المثال، والتحقق من صحة الحل.

مثال إضافي

- بيِّن إذا كان $h(x) = x+1$ أحد عوامل الاقتران: $f(x) = 2x^3+5x^2+2x-12$ أم لا.

لا، $h(x)$ ليس أحد عوامل $f(x)$؛ لأن باقي القسمة -11، وليس 0

إجابة أتحقق من فهمي 1:

الناتج:

$4x^3+9x^2+36x+156$ ، والباقي: 599

مثال 3

- ناقِش الطلبة في مفهوم الاقتران النســبي، واذكر أمثلة عليه، مُوضِّحًا أنه لا يوجد للاقتران النسبي قيمة عندما يكون مقامه صفرًا؛ لأن القسمة على الصفر غير معرفة، ولذلك يكون مجاله جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار مقامه. بعد ذلك شارك الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية تعيين مجال الاقتران النسبي.

مثال إضافي

- جد مجال كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\{x | x \neq 2\}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 16}$ $\{x | x \neq -4, x \neq 4\}$

c) $h(x) = \dfrac{2x - 6}{x^2 + 25}$ كل الأعداد الحقيقية

بما أنَّ باقي القســمةِ $r(x)$ يســاوي 0، فإنَّ المقسومَ يساوي المقســومَ عليْهِ مضروبًا في ناتجِ القسمةِ؛ أيْ إنَّ:

$$6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 = (2x^2 + x + 7)(3x^2 - 5x - 3)$$

وهذا يعني أنَّ $(2x^2+x+7)$ عاملٌ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ ذلكَ بضربِ العامليْنِ في النتيجةِ السابقةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55,\ h(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3,\ h(x) = x^2 + 3x - 1$

الاقترانات النسبيةُ (rational functions) هي اقترانات يُمكِنُ كتابتُها بصورةِ نسبةٍ بينَ كثيريْ حدودٍ، مثلُ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرطَ أنْ: $g(x) \neq 0$. ومنَ الأمثلةِ عليْها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x} \quad , \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9} \quad , \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مفهومٌ أساسيٌّ

الاقترانُ النســبيُّ: اقتــرانٌ تكونُ قاعدتُــهُ (معادلتُهُ) بصــورةِ $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيثُ إنَّ $g(x) \neq 0$ ، وَ $g(x)$، وَ $f(x)$ كثيرا حدودٍ.

مجالُ الاقترانِ النســبيِّ: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باســتثناءِ الأعدادِ التي تجعلُ المقامَ يساوي صفرًا.

مثال 3

أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ في ما يأتي:

1 $q(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 9}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x^2 - 9 = 0$:

$x^2 = 9$ بإضافةِ 9 إلى الطرفيْنِ

$x = \pm 3$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $-3, 3$، ويُكتَبُ برمزِ المجموعةِ كما يأتي: $\{x \mid x \neq \pm 3\}$

أتذكَّرُ

يُمكِنُ اســتعمالُ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعيْنِ لتحليلِ $x^2 - 9 = 0$

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) ناتج القسمة هو $x^2 + 2x - 11$ ، والباقي 0

b) ناتج القسمة هو $5x - 3$ ، والباقي 0

أفكِّر

هلْ مجالُ الاقترانِ $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجالَ الاقترانِ $g(x)=x-3$؟

2 $y=\frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $2x^3-5x^2-3x=0$:

بإخراجِ x عاملٍ مشتركٍ	$x(2x^2-5x-3)=0$
بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ $2x^2-5x-3$	$x(2x+1)(x-3)=0$
خاصيةُ الضربِ الصفريِّ	$x=0$ أو $2x+1=0$ أو $x-3=0$
بحلِّ المعادلاتِ	$x=0, x=\frac{-1}{2}, x=3$

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $0, 3, \frac{-1}{2}$، أوْ $\{x \mid x\neq 0, x\neq 3, x\neq \frac{-1}{2}\}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مجالَ كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $h(x)=\frac{x^3+8}{x^2-5x+6}$

b) $y=\frac{x^2-4}{6x-3x^2}$

مِنْ أبسطِ الاقتراناتِ النسبيةِ الاقترانُ $f(x)=\frac{1}{x}$ الذي يُسمّى **اقترانَ المقلوبِ** (reciprocal function)، ومنهُ تتولّدُ اقتراناتٌ نسبيةٌ كثيرةٌ. يُمكِنُ تمثيلُ هذا الاقترانِ بيانيًّا في الفترةِ $[-4, 4]$ مثلًا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ معَ استثناءِ 0؛ لأنَّهُ ليسَ منْ مجالِهِ.

أُخِذَتْ قيمٌ صغيرةٌ للمُتغيِّرِ x قريبةٌ منَ الصفرِ لتمثيلِ الاقترانِ بدقةٍ؛ فالقيمُ الصحيحةُ وحدَها لا تُمثِّلُ الصورةَ كاملةً، وإنَّما تكونُ الصورةُ مُجتزَأةً ناقصةً.

x	-4	-2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	1	2	4
$f(x)=\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1.25	-2	-5	5	2	1.25	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

أُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ يمينَ $x=0$ بمنحنى، وأَصِلُ بينَ النقاطِ يسارَ $x=0$ بمنحنى آخرَ؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ $x=0$، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.

20

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) مجال $H(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 و3، أي $\{x| x\neq 2, x\neq 3\}$

b) مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و2 ؛ أي $\{x| x\neq 0, x\neq 2\}$

اقتران المقلوب

ناقِش الطلبة في تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، مُوضِّحًا لهم مفهوم خطوط التقارب الرأسية والأفقية، وكيفية إيجادها، ثم ناقِشهم في خصائص اقتران المقلوب.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الاقتران النسبي rational function، واقتران المقلوب reciprocal function، وخط التقارب الرأسي vertical asymptote، وخط التقارب الأفقي horizontal asymptote .

مثال 4

- شـــارِك الطلبة في حل المثال 4 الذي يُوضِّح خطوات تمثيل اقتران نسبي بسيط بيانيًّا.

مثال إضافي

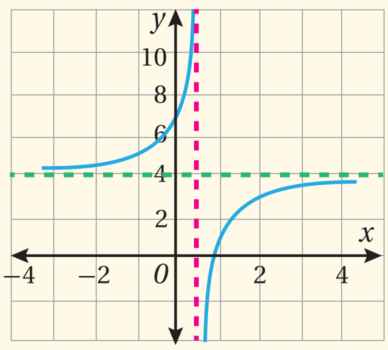
- جد خطوط التقارب للاقتران: $g(x) = \frac{-3}{2x-1} + 4$، ومثِّله بيانيًّا، ثم جد مجاله ومداه.

له خط تقارب رأسي هو المستقيم $x = 0.5$، وخط تقارب أفقي هو المستقيم $y = 4$

x	-2	-1	0	0.25	0.75	1	2	3
$y = (x)$	4.6	5	7	10	-2	1	3	3.4

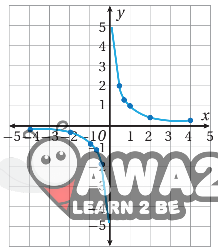
المجال: $\{x|x \neq 0.5\}$

المدى: $\{y|y \neq 4\}$

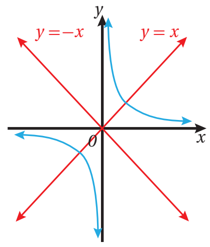


إرشـاد: وجِّـه الطلبـة إلـى اسـتعمال ورق الرسـم البيانـي لتمثيـل الاقترانـات بصـورة دقيقـة ومرتبـة، مُنبِّهًـا إيّاهـم إلـى اختيـار قيـم للمتغيـر x علـى جانبـي كل خـط تقـارب رأسـي.

أُلاحِظُ منَ الشكلِ الخصائصَ الآتيةَ لاقترانِ المقلوبِ:



- كلَّمــا اقترَبَتْ x مــنَ الصفرِ اقتــربَ المنحنى منَ المحــورِ y. ولذلكَ يكونُ المحورُ y الذي معادلتُهُ $x = 0$ خطَّ تقاربٍ رأسيٍّ (vertical asymptote) للمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$.
- كلَّمــا زادَتْ قيمةُ $|x|$ اقتــربَ المنحنى أكثرَ وأكثرَ مــنَ المحــورِ x. ولذلكَ يكونُ المحــورُ x الذي معادلتُهُ $y = 0$ خطَّ تقــاربٍ أفقيٍّ (horizontal asymptote) لهذا المنحنى.



- منحنــى اقتــرانِ المقلــوبِ $f(x) = \frac{1}{x}$ لا يقطعُ المحوريْنِ أبدًا، ولكنَّهُ يقتربُ كثيرًا منْهُما.
- للمنحنى محورا تماثلٍ، هما المستقيمانِ:

$y = x, y = -x$

يُلاحَظُ منَ الرسمِ أنَّ مدى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{x}$ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ الصفرِ. وباستعمالِ رمزِ المجموعاتِ، يُكتَبُ مداهُ كما يأتي:

$\{y \mid y \neq 0\}$

مثال 4

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

الخطوةُ 1: أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ.

لهــذا الاقترانِ خطُّ تقاربٍ رأســيٍّ عندَ صفرِ المقــامِ؛ أيْ عندما $x-3 = 0$ يكونُ خطُّ التقاربِ الرأسيِّ هوَ المستقيمَ $x = 3$

كلَّمــا زادَتْ $|x|$ اقتــربَ $\frac{5}{x-3}$ منَ الصفــرِ، واقترَبَــتْ قيمةُ $f(x)$ مــنْ 2؛ أيْ إنَّ خطَّ التقاربِ الأفقيِّ هوَ $y = 2$

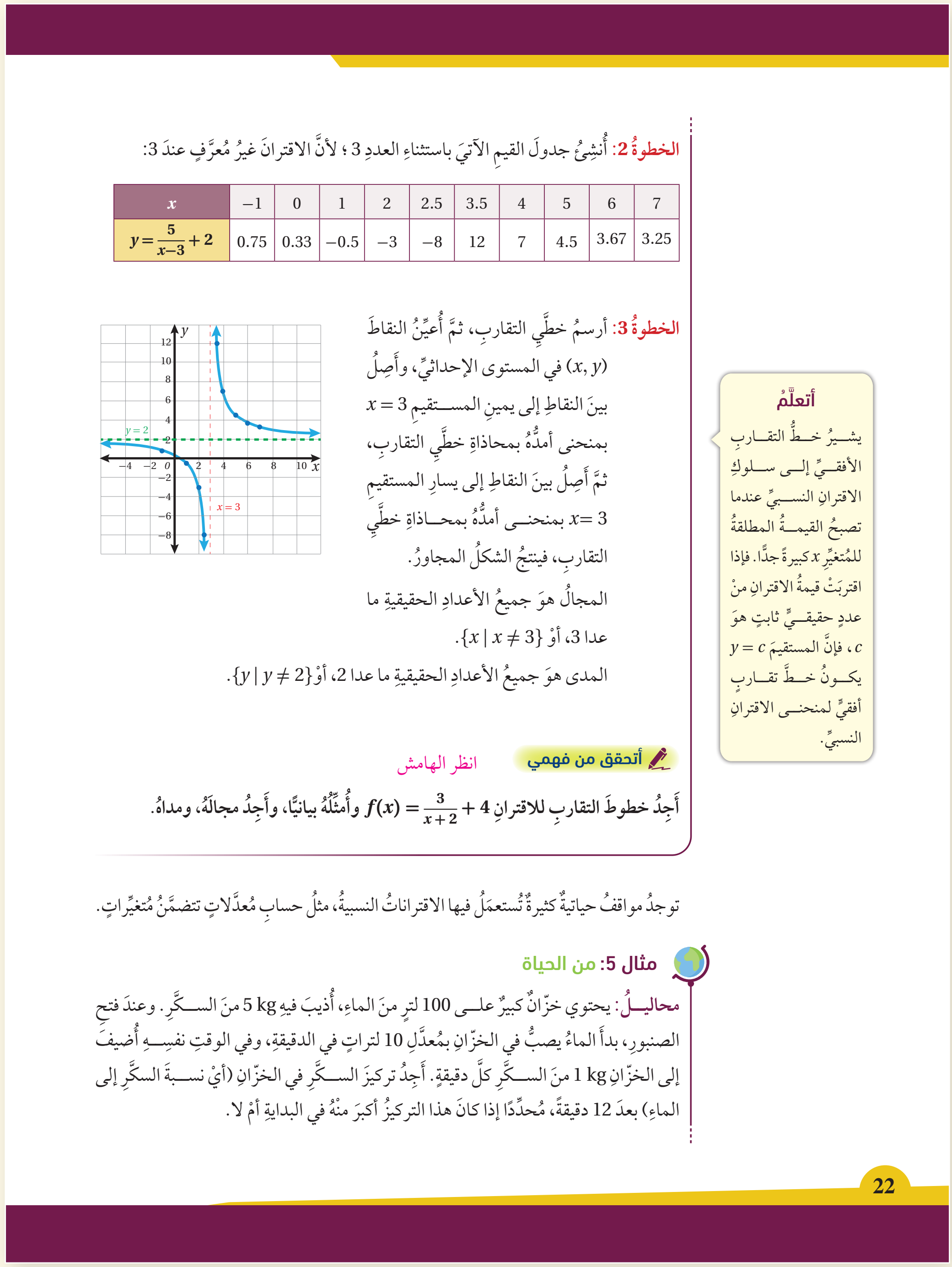
أتعلَّمُ

إذا لــمْ توجــدْ عواملُ مشــتركةٌ بيــنَ بســطِ الاقترانِ النسبيِّ ومقامِهِ، فإنَّــهُ توجــدُ خطــوطُ تقاربٍ رأسيةٌ عندَ أصفارِ مقامِهِ جميعِها.

إرشادات للمعلم

بيِّن للطلبة أنه يوجد للاقتران النسبي $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر. فإذا كانت درجة البسـط أكبر من درجــة المقام فلا يوجد خط تقارب أفقي، وإذا تساوت درجتا البســط والمقام فإن خط التقارب الأفقي يكون المســتقيم $y = \frac{a_n}{b_n}$، حيث a_n المعامل الرئيس للبسط، و b_n المعامل الرئيس للمقام. وإذا كانت درجة البســط أصغر مــن درجة المقام كان خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.

بيِّن لهم أيضًا أنه قد يوجد للاقتران النســبي الذي ليس لبسطه ومقامه عوامل مشــتركة عِدَّة خطوط تقارب رأســية تبعًا لأصفار مقامه، وأنه قد لا يوجد له خطوط تقارب رأســية إذا لم يكــن لمقامه أصفار، وأنــه لا يمكن أن يقطع منحناه خط التقارب الرأسي.



الخطوةُ 2: أُنشِئُ جدولَ القيمِ الآتيَ باستثناءِ العددِ 3 ؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ 3:

x	−1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$y=\frac{5}{x-3}+2$	0.75	0.33	−0.5	−3	−8	12	7	4.5	3.67	3.25

الخطوةُ 3: أرسمُ خطَّيِ التقاربِ، ثمَّ أُعيِّنُ النقاطَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يمينِ المستقيمِ $x = 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّيِ التقاربِ، ثمَّ أَصِلُ بينَ النقاطِ إلى يسارِ المستقيمِ $x= 3$ بمنحنى أمدُّهُ بمحاذاةِ خطَّيِ التقاربِ، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.

المجالُ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 3، أوْ $\{x \mid x \neq 3\}$.

المدى هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ ما عدا 2، أوْ $\{y \mid y \neq 2\}$.

أتعلَّم

يشيرُ خطُّ التقاربِ الأفقيُّ إلى سلوكِ الاقترانِ النسبيِّ عندما تصبحُ القيمةُ المطلقةُ للمُتغيِّرِ x كبيرةً جدًّا. فإذا اقتربَتْ قيمةُ الاقترانِ منْ عددٍ حقيقيٍّ ثابتٍ هوَ c، فإنَّ المستقيمَ $y = c$ يكونُ خطَّ تقاربٍ أفقيٍّ لمنحنى الاقترانِ النسبيِّ.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ للاقترانِ $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ.

توجدُ مواقفُ حياتيةٌ كثيرةٌ تُستعمَلُ فيها الاقتراناتُ النسبيةُ، مثلُ حسابِ مُعدَّلاتٍ تتضمَّنُ مُتغيِّراتٍ.

مثال 5: من الحياة

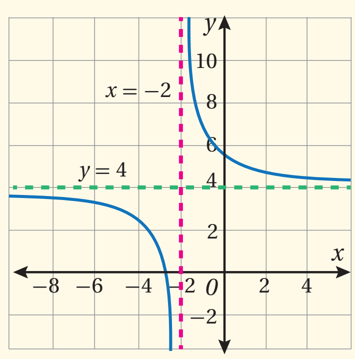
محاليلُ: يحتوي خزّانٌ كبيرٌ على 100 لترٍ منَ الماءِ، أُذيبَ فيهِ 5 kg منَ السكَّرِ. وعندَ فتحِ الصنبورِ، بدأَ الماءُ يصبُّ في الخزّانِ بمُعدَّلِ 10 لتراتٍ في الدقيقةِ، وفي الوقتِ نفسِهِ أُضيفَ إلى الخزّانِ 1 kg منَ السكَّرِ كلَّ دقيقةٍ. أَجِدُ تركيزَ السكَّرِ في الخزّانِ (أيْ نسبةَ السكَّرِ إلى الماءِ) بعدَ 12 دقيقةً، مُحدِّدًا إذا كانَ هذا التركيزُ أكبرَ منْهُ في البدايةِ أمْ لا.

22

إجابة أتحقق من فهمي 4:

له خط تقارب رأسي هو $x = -2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 4$

x	−8	−6	−4	−3	−2.5	−1.5	−1	0	1	4
$y=f(x)$	3.5	3.25	2.5	1	−2	10	7	5.5	5	4.5



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء −2؛ أي $\{x|x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{y|y \neq 4\}$

مثال 5: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 5 الذي يُمثِّل موقفًا حياتيًّا تستعمل فيه الاقترانات النسبية، ثم اسألهم عن مجال هذا الاقتران ومداه. بعد ذلك وضِّح لهم أن المجال في هذه الحالة هو الأعداد الحقيقية غير السالبة فلا يكون الزمن سالبًا، وأن المدى هو الأعداد الحقيقية من 0.05 إلى أقل من 0.1؛ لأن خط التقارب الأفقي هو $y = 0.1$

مثال إضافي

- يبيع خالد اشتراكات إحدى الصحف لمؤسسات. فإذا باع 5 اشتراكات لكل واحدة من أول 12 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أُخرى، وباع لكلٍّ منها اشتراكين. جد متوسط عدد الاشتراكات التي باعها خالد لكل مؤسسة زارها، ثم جد قيمة x إذا كان هذا المتوسط 3 اشتراكات.

$$M(x) = \frac{60 + 2x}{12 + x} \text{ , } x = 24$$

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية (12–2) ضمن مجموعات.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة التاسعة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

إذا كانَ t هوَ عددَ الدقائقِ التي تلي فتحَ الصُّنبورِ، فإنَّ:

$W(t) = 100 + 10t$ كميةَ الماءِ هيَ الكميةُ الأصليةُ مضافًا إليْها مُعدَّلُ الصَّبِّ مضروبًا في t

$S(t) = 5 + 1t$ كميةَ السكَّرِ هيَ الكميةُ الأصليةُ مضافًا إليْها مُعدَّلُ الإضافةِ مضروبًا في t

$C(t) = \frac{5+t}{100+10t}$ تركيزَ السكَّرِ هوَ نسبةُ السكَّرِ إلى الماءِ في الخزّانِ

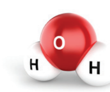
$C(12) = \frac{5+12}{100+10(12)}$ تركيزَ السكَّرِ بعدَ 12 دقيقةً هوَ نتيجةُ تعويضِ $t = 12$ في الاقترانِ: $C(t)$

$C(12) = \frac{17}{220} \approx 0.08$ بالتبسيطِ، واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، تركيزُ السكَّرِ في الخزّانِ بعدَ 12 دقيقةً هوَ 0.08 kg/L وقدْ كانَ تركيزُهُ في البدايةِ $\frac{5}{100} = 0.05$ kg/L، إذنْ، تركيزُ السكَّرِ بعدَ 12 دقيقةً أكبرُ منْهُ في البدايةِ؛ لأنَّ $0.08 > 0.05$

أتحقق من فهمي

محاليلُ: يحتوي خزّانٌ كبيرٌ على 300 لترٍ منَ الماءِ، أُذيبَ فيهِ 8 kg منَ السكَّرِ. وعندَ فتحِ الصنبورِ، بدأَ الماءُ يصبُّ في الخزّانِ بمُعدَّلِ 20 لترًا في الدقيقةِ، وفي الوقتِ نفسِهِ أُضيفَ إلى الخزّانِ 2 kg منَ السكَّرِ كلَّ دقيقةٍ. أَجِدُ تركيزَ السكَّرِ في الخزّانِ بعدَ t دقيقةً، ثمَّ أَجِدُ قيمةَ t التي يكونُ عندها تركيزُ السكَّرِ في الخزّانِ 0.04 kg/L انظر الهامش



تسمحُ الروابطُ القطبيةُ للماءِ بإذابةِ العديدِ منَ الموادِّ؛ ما يجعلُهُ مذيبًا مثاليًّا.

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ ناتجَ القسمةِ والباقيَ في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(x^2 + 5x - 1) \div (x - 1)$ الناتج: $x + 6$، والباقي: 5
2. $(3x^2 + 23x + 14) \div (x + 7)$ الناتج: $3x + 2$، والباقي: 0
3. $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \div (x - 2)$ الناتج: $x^2 - x + 3$، والباقي: 0
4. $(9x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \div (3x - 1)$ الناتج: $3x^2 - 2x + 5$، والباقي: 11
5. $(-6x^3 + x^2 + 4) \div (2x - 3)$ الناتج: $-3x^2 - 4x - 6$، والباقي: -14
6. $(8x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2) \div (4x^2 + x - 1)$ الناتج: $2x^2 - 3$، والباقي: $3x + 5$

أُثبِتُ أنَّ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7. $h(x) = x - 2$, $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x - 6$ الناتج: $3x^3 + 4x + 3$، والباقي: 0
8. $h(x) = 2x^2 - 7x - 4$, $f(x) = 6x^4 - 17x^3 - 28x^2 - x + 4$ الناتج: $3x^2 + 2x - 1$، والباقي: 0

إجابة أتحقق من فهمي 5:

$$C(t) = \frac{8+2t}{300+20t}$$

$$0.04 = \frac{8+2t}{300+20t}$$

$$8 + 2t = 0.04(300 + 20t)$$

$$8 + 2t = 12 + 0.8t$$

$$1.2t = 4 \Rightarrow t = 3.33 \text{ min}$$

أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ: انظر ملحق الإجابات

9 $f(x) = \frac{3x-6}{2x}$ **10** $h(x) = \frac{2x-8}{2x^2-3x+1}$ **11** $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+9}$

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ: انظر ملحق الإجابات

12 $f(x) = \frac{2}{x-3}$ **13** $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

14 $w(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x}$ **15** $g(x) = \frac{5x^2}{x^2+4}$

16 أدرسُ إحدى مسائلِ القسمةِ في هذا الدرسِ، ثمَّ أكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منَ المقسومِ والمقسومِ عليْهِ والباقي.
درجة ناتج القسمة تساوي درجة المقسوم ناقص درجة المقسوم عليه، ودرجة باقي القسمة أصغر من درجة المقسوم عليه.

17 مِساحةُ ورقةٍ مستطيلةٍ تساوي $(3x^3+14x^2+ax+8)$ وحداتٍ مُربَّعةً، وطولُها يساوي $(x+2)^2$ وحدةً. أَجِدُ قيمةَ a. انظر ملحق الإجابات

18 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

(19–21) انظر ملحق الإجابات

19 **أيُّها لا ينتمي:** أُحدِّدُ فيما يأتي الاقترانَ المختلفَ عنِ الاقتراناتِ الثلاثةِ الأُخرى، مُبرِّرًا إجابتي:

$l(x) = \frac{7}{x^2-9}$	$h(x) = \frac{9}{x^2+1}$
$g(x) = \frac{5}{x+2}$	$f(x) = \frac{3}{x+5}$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ نسبيٍّ يكونُ لتمثيلِهِ البيانيِّ خطُّ تقاربٍ أفقيٍّ هوَ: $y = 3$، وخطّا تقاربٍ رأسيانِ هما: $x = -2, x = 7$.

21 **تحدٍّ:** أَجِدُ اقترانَ كثيرِ حدودٍ منَ الدرجةِ الثالثةِ، يكونُ أحدُ عواملِهِ $(x-1)^2$، وباقي قسمتِهِ على $(x+2)$ هوَ 9، وباقي قسمتِهِ على $(x-3)$ هوَ 44

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السؤال 22 إلى كتابة العامل $(x-1)^2$ بصورة (x^2-2x+1)، ثم اسألهم:
  - » ماذا يكون العامل الآخر الذي ناتج ضربه في (x^2-2x+1) اقتران من الدرجة الثالثة؟

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:
  - » إذا كان $(x-1)$ أحد عوامل الاقتران $f(x) = x^3-2x^2-19x+20$، فما مجموع مربعات أصفار $f(x)$؟ 42

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة إعداد قائمة تتضمن الخطوات التي يتبعونها في قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر، ويُطبِّقوها في قسمة $f(x) = 3x^2 + 6x^4 - 28x - 10$ على $h(x) = 2x^2 + 5$

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة الانتهاء من جمع البيانات عن المتغيرين اللذين اختاروهما.
- ذكِّر الطلبة بضرورة توثيق مصدر معلوماتهم.

الدرس 3

نتاجات الدرس

- يتعرف مفهوم تركيب الاقترانات وشـــرطه، والاقتران المُركَّب.
- يحســـب قيم اقتران مُركَّب عند قيـــم معلومة للمتغير المستقل.
- يجد قاعدة الاقتران المُركَّب.
- يجد مُركَّبتي اقتران مُركَّب.
- يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.

التعلم القبلي:

- حســـاب قيمة اقتران معطى عند قيـــم معلومة للمتغير المستقل.
- ضرب مقادير جبرية وتبسيطها.
- تحديد مجال الاقتران كثير الحدود والاقتران النسبي.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح :

$f(x) = 3x^2 - 2x + 1,\ g(x) = 4 - 3x,$

$h(x) = \dfrac{x}{2x-6}$، ثم اطلب إلى الطلبة تحديد مجال كلٍّ من هذه الاقترانات، وإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1) $f(1)$ 2 **2)** $f(-2)$ 17

3) $g(3)$ -5 **4)** $h(2)$ -1

مجال f, g هو مجموعـــة الأعداد الحقيقية، ومجال h هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 3

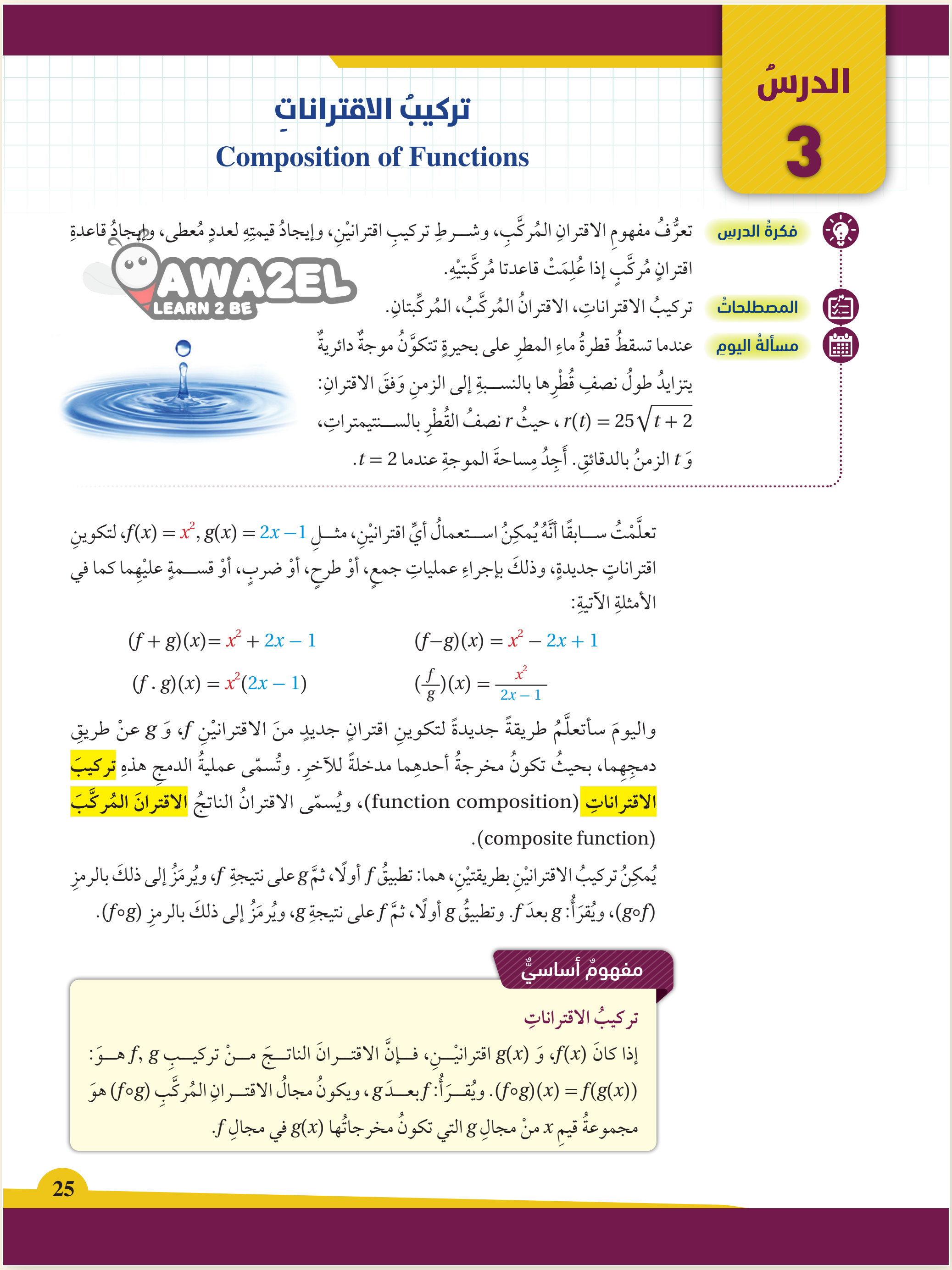
- اطلب إلى الطلبة تبسيط المقدارين الآتيين:

a) $3(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 4$

$12x^2+2x+2$

b) $2x(x^2 + 5x) - 3(x^3 - 5x^2 + 4)$

$-x^3 + 25x^2 - 12$



الدرسُ 3

تركيبُ الاقتراناتِ
Composition of Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ مفهومِ الاقترانِ المُركَّبِ، وشـــرطِ تركيبِ اقترانيْنِ، وإيجادُ قيمتِهِ لعددٍ مُعطى، وإيجادُ قاعدةِ اقترانٍ مُركَّبٍ إذا عُلِمَتْ قاعدتا مُركَّبتيْهِ.

المصطلحاتُ تركيبُ الاقتراناتِ، الاقترانُ المُركَّبُ، المُركِّبتانِ.

مسألةُ اليومِ عندما تسقطُ قطرةُ ماءِ المطرِ على بحيرةٍ تتكوَّنُ موجةٌ دائريةٌ يتزايدُ طولُ نصفِ قُطْرِها بالنســـبةِ إلى الزمنِ وَفقَ الاقترانِ: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$، حيثُ r نصفُ القُطْرِ بالســـنتيمتراتِ، وَ t الزمنُ بالدقائقِ. أَجِدُ مِساحةَ الموجةِ عندما $t = 2$.

تعلَّمْتُ ســـابقًا أنَّهُ يُمكِنُ اســـتعمالُ أيِّ اقترانيْنِ، مثـــلِ $f(x) = x^2, g(x) = 2x - 1$، لتكوينِ اقتراناتٍ جديدةٍ، وذلكَ بإجراءِ عملياتِ جمعٍ، أوْ طرحٍ، أوْ ضربٍ، أوْ قســـمةٍ عليْهِما كما في الأمثلةِ الآتيةِ:

$(f+g)(x) = x^2 + 2x - 1$ $(f-g)(x) = x^2 - 2x + 1$

$(f \cdot g)(x) = x^2(2x-1)$ $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

واليومَ سأتعلَّمُ طريقةً جديدةً لتكوينِ اقترانٍ جديدٍ منَ الاقترانيْنِ f، وَ g عنْ طريقِ دمجِهِما، بحيثُ تكونُ مخرجةُ أحدِهِما مدخلةً للآخرِ. وتُسمّى عمليةُ الدمجِ هذهِ **تركيبَ الاقتراناتِ** (function composition)، ويُسمّى الاقترانُ الناتجُ **الاقترانَ المُركَّبَ** (composite function).

يُمكِنُ تركيبُ الاقترانيْنِ بطريقتيْنِ، هما: تطبيقُ f أولًا، ثمَّ g على نتيجةِ f، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(g \circ f)$، ويُقرَأُ: g بعدَ f. وتطبيقُ g أولًا، ثمَّ f على نتيجةِ g، ويُرمَزُ إلى ذلكَ بالرمزِ $(f \circ g)$.

مفهومٌ أساسيٌّ

تركيبُ الاقتراناتِ

إذا كانَ $f(x)$، وَ $g(x)$ اقترانيْـــنِ، فـــإنَّ الاقتـــرانَ الناتـــجَ مـــنْ تركيـــبِ f, g هـــوَ: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. ويُقـــرَأُ: f بعـــدَ g، ويكونُ مجالُ الاقتـــرانِ المُركَّبِ $(f \circ g)$ هوَ مجموعةُ قيمِ x منْ مجالِ g التي تكونُ مخرجاتُها $g(x)$ في مجالِ f.

25

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما طول نصف قطر الموجة بعد 7 دقائق من سقوط قطرة المطر على البحيرة؟ 75 cm
  » كيف تحسب مساحة الموجة؟ باستعمال صيغة مساحة الدائرة: $A = \pi r^2$
  » كيف تحسب مساحة الموجة بعد عِدَّة دقائق من سقوط قطرة الماء على البحيرة؟ إيجاد طول نصف قطرها r أولًا، ثم تعويضه في صيغة المساحة.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- اكتب الاقترانين: $f(x) = x-2$, $g(x) = 4 + 2x$، ثم اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة f للأعداد: 9 ,5 ,3 ,2، ثم كتابة النتائج في عمودين كما يأتي:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ 2 & \rightarrow & 0 \\ 3 & \rightarrow & 1 \\ 5 & \rightarrow & 3 \\ 9 & \rightarrow & 7 \end{array}$$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة g للأعداد الناتجة من f، ثم كتابة النتائج كما في المخطط الآتي:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ 2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 4 \\ 3 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 6 \\ 5 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 10 \\ 9 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 18 \\ & & g\circ f & & \end{array}$$

- بيِّن للطلبة أن النتيجة النهائية الأولى 4 تُمثِّل قيمة g لِـ $f(2)$، وأنها تكتب بصورة $g(f(2)) = 4$، أو $(g\circ f)(2) = 4$، وهكذا الحال لبقية النتائج.
- وضِّح للطلبة أن عملية تعويض قيمة اقتران في اقتران آخر تسمى تركيب الاقترانات، وأنه عند تعويض $f(x)$ مكان x في معادلة $g(x)$ ينتج الاقتران المُركَّب $(g\circ f)(x)$ الذي هو $g(f(x))$، وأنه عند تعويض قيمة $g(x)$ في معادلة $f(x)$ ينتج $(f\circ g)(x)$، وأن هذين الاقترانين المُركَّبين يكونان غالبًا مختلفين.

مثال 1

- ناقِش الطلبة في تعريف تركيب اقترانين، وطريقتي التركيب، وشروطه، مُبيِّنًا أنه إذا كانت الاقترانات كثيرات حدود فإن مجالها ومداها الأعداد الحقيقية؛ فيمكن تركيبها بالطريقتين. بعد ذلك شارِك الطلبة في حل المثال، مُوضِّحًا خطوتي الحل في كل فقرة.

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

ملاحظات المعلم

أخطاء مفاهيمية:

قد يجد بعض الطلبة قيمة $(g\circ f)(x)$ ببدء التعويض في $g(x)$ أولًا، ثم تعويض النتيجة في $f(x)$؛ لذا نبِّههم إلى البدء من أقصى اليمين، بتعويض x في معادلة $f(x)$، ثم تعويض الناتج في معادلة $g(x)$.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = 3x^2 + 1,\ g(x) = \frac{2x}{x-1}$، فجد ما يأتي:

a) $(f \circ g)(2)$ $\quad 49$

b) $(g \circ f)(2)$ $\quad \frac{13}{6}$

c) $(f \circ g)(5)$ $\quad 19.75$

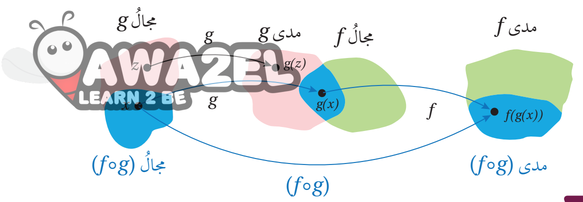
تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشــجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: تركيــب الاقترانــات composition of functions، والاقتران المُركَّــب composite function، والمُركِّبة component

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يســتطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

يُوضِّــحُ المُخطَّطُ الآتي أنَّ مجالَ $(f\circ g)$ هوَ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجالِ g، وأنَّ مدى $(f\circ g)$ هوَ مجموعــةٌ جزئيةٌ منْ مدى f. وإذا كانَتْ إحدى القيمِ مثلُ $g(z)$ (حيثُ z أحدُ عناصرِ مجالِ g) غيرَ موجودةٍ في مجالِ f، فلا يُمكِنُ إيجادُ $(f\circ g)(z)$ في هذهِ الحالةِ:



مثال 1

إذا كانَ $f(x) = x^2,\ g(x) = x + 4$، فأَجِدُ:

1 $(g\circ f)(3)$

$(g\circ f)(3) = g(f(3))$ — $(g\circ f)(3)$ تعني g لِـ $f(3)$؛ أيْ f ثمَّ g

$= g(3^2)$ — بتعويضِ $x = 3$ في معادلةِ f

$= g(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9 + 4 = 13$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

2 $(g\circ f)(-2)$

$(g\circ f)(-2) = g(f(-2))$ — $(g\circ f)(-2)$ تعني g لِـ $f(-2)$؛ أيْ f ثمَّ g

$= g((-2)^2)$ — بتعويضِ $x = -2$ في معادلةِ f

$= g(4)$ — بالتبسيطِ

$= 4 + 4 = 8$ — بتعويضِ $x = 4$ في معادلةِ g، والتبسيطِ

3 $(f\circ g)(5)$

$(f\circ g)(5) = f(g(5))$ — $(f\circ g)(5)$ تعني f لِـ $g(5)$؛ أيْ g، ثمَّ f

$= f(5+4)$ — بتعويضِ $x = 5$ في معادلةِ g

$= f(9)$ — بالتبسيطِ

$= 9^2 = 81$ — بتعويضِ $x = 9$ في معادلةِ f، والتبسيطِ

أُفكِّرُ

هــلْ توجــدُ أيُّ قيــمٍ للمُتغيِّــرِ x لا يُمكِــنُ حســابُ $(h\circ j)(x)$ عندهــا؟

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $j(x) = 2x + 1$ ، $h(x) = \sqrt{x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $(h\circ j)(4)$ **b)** $(j\circ h)(4)$ **c)** $(h\circ h)(16)$ **d)** $(j\circ j)(-8)$

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) 3 **b)** 5 **c)** 2 **d)** -29

يُمكِنُ إيجادُ قاعدةِ الاقترانِ المُركَّبِ بدلالةِ المُتغيِّرِ x، ثمَّ حسابِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ عندَ أيِّ قيمةٍ عدديةٍ معطاةٍ.

مثال 2

إذا كانَ $f(x) = 3x + 5, g(x) = 2x^2 - 6$، فأَجِدُ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f∘g)(x)$، وَ $(g∘f)(x)$، ثمَّ أَجِدُ $(f∘g)(-2)$، وَ $(g∘f)(0)$.

$(f∘g)(x) = f(g(x))$	تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ
$= f(2x^2 - 6)$	بتعويضِ $g(x) = 2x^2 - 6$
$= 3(2x^2 - 6) + 5$	بتعويضِ $(2x^2 - 6)$ مكانَ x في معادلةِ f
$(f∘g)(x) = 6x^2 - 13$	بالتبسيطِ
$(f∘g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11$	بتعويضِ $x = -2$، والتبسيطِ

$(g∘f)(x) = g(f(x))$	تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ
$= g(3x+5)$	بتعويضِ $f(x) = 3x + 5$
$= 2(3x+5)^2 - 6$	بتعويضِ $(3x + 5)$ مكانَ x في معادلةِ g
$= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6$	بتربيعِ $(3x + 5)$
$(g∘f)(x) = 18x^2 + 60x + 44$	بالتبسيطِ
$(g∘f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44$	بتعويضِ $x = 0$، والتبسيطِ

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = x^2 + 4x, g(x) = 2 - 3x$، فأَجِدُ قاعدةَ كلٍّ منْ: $(f∘g)(x)$، وَ $(g∘f)(x)$، ثمَّ أَجِدُ $(f∘g)(3)$، وَ $(g∘f)(-1)$. انظر الهامش

رموزٌ رياضيةٌ

يُقرَأُ الرمزُ $(f∘g)(x)$، f بعدَ $g(x)$، ويُقرَأُ الرمزُ $f(g(x))$، f لِـ $g(x)$

أُفكِّرُ

هلْ تُحقِّقُ عمليةُ تركيبِ الاقتراناتِ الخاصيةَ التبديليةَ؟

يُمكِنُ النظرُ إلى كثيرٍ منَ الاقتراناتِ بوصفِها اقتراناتٍ مُركَّبةً، وإيجادُ اقترانيْنِ بسيطيْنِ يُكافِئُ تركيبُهُما الاقترانَ المُركَّبَ، عندئذٍ يكونُ الاقترانانِ البسيطانِ **مُركَّبتَيِ الاقترانِ المُركَّبِ** (components of the composite function).

فمثلًا، يُمكِنُ اعتبارُ الاقترانِ $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقترانًا مُركَّبًا، ومُركَّبتاهُ هما: $g(x) = 4x^2 + 9$، $h(x) = \sqrt{x}$، ويكونُ $f(x) = (h∘g)(x)$.

27

إجابة أتحقق من فهمي 2:

$(f∘g)(x) = (2-3x)^2 + 4(2-3x) = 9x^2 - 24x + 12$

$(f∘g)(3) = 21$

$(g∘f)(x) = 2 - 3(x^2 + 4x) = -3x^2 - 12x + 2$

$(g∘f)(-1) = 11$

مثال 2

- ناقِش الطلبة في كيفية تعويض مقدار جبري من اقتران في معادلة اقتران آخر للتعبير عن تركيبهما جبريًّا، مُوضِّحًا الخطوات المتبعة في المثال، وتبسيط المقدار الناتج لأبسط صورة.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x) = \sqrt{2x + 10}$, $g(x) = 4x + 1$، فجد $(f∘g)(x)$، ثم جد $(f∘g)(3)$ بطريقتين.

$(f∘g)(x) = \sqrt{8x + 12}$, $(f∘g)(3) = \sqrt{8(3) + 12}$

$= \sqrt{36} = 6$

$(f∘g)(3) = f(g(3)) = f(13) = \sqrt{2(13) + 10}$

$= \sqrt{36} = 6$

إرشاد: وجِّه الطلبة إلى التحقُّق من صحة الإجابة عند إيجاد قاعدة الاقتران المُركَّب، بحساب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد ما بالتعويض في القاعدة، واستعمال تعريف الاقتران المُركَّب، ومقارنة النتيجتين، فإذا تساوتا كانت القاعدة صحيحة.

تنويع التعليم

- وزِّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم اطلب إلى كل ثنائي أن يكتبا اقترانين؛ كل على حدة، ثم العمل معًا لإيجاد ناتج تركيبهما، والتحقق من صحته.

مثال 3

- وضِّح للطلبة كيفية تفكيك اقتران معطى إلى اقترانين بسيطين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى، ثم أخبرهم أنه يوجد في حالات عِدَّة أكثر من طريقة لكتابة اقترانين ينتج من تركيبهما الاقتران المعطى. بعد ذلك ناقِش الطلبة في حلِّ المثال، ثم اطلب إليهم البحث عن إجابة أُخرى.

مثال إضافي

- جد الاقترانين $f(x), g(x)$ بحيث يمكن التعبير عن $h(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 9}$ بصورة $h(x) = f(g(x))$.

إجابة محتملة:

$g(x) = x^2 + 9, f(x) = 2 + \sqrt{x}$

مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 4 الذي يُبيِّن توظيف تركيب الاقترانات في موقف حياتي، ثم اطلب إليهم تفسير الاقترانين المعطيين في المسألة، ومدلول الاقتران الناتج من تركيبهما. بعد ذلك اسألهما عن حساب التكلفة من دون كتابة اقتران مُركَّب.

مثال 3

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$

إرشادٌ

قدْ لا تكونُ القيودُ على مجالِ الاقتراناتِ واضحةً بعدَ إجراءِ عمليةِ تركيبِ الاقتراناتِ وتبسيطِها؛ لذا منَ المُهِمِّ الانتباهُ إلى مجالِ الاقترانيْنِ قبلَ تركيبِهِما.

1) $h(x) = \frac{1}{x+3}$

أفترضُ أنَّ $g(x) = x + 3, f(x) = \frac{1}{x}$. وبذلكَ، فإنَّ:

$f(g(x)) = f(x + 3)$ بتعويضِ $g(x) = x + 3$

$= \frac{1}{x+3} = h(x)$ بتعويضِ $x+3$ مكانَ x في معادلةِ f

2) $h(x) = (2 + x^2)^{10}$

أفترضُ أنَّ $g(x) = 2 + x^2, f(x) = x^{10}$. وبذلكَ، فإنَّ:

$f(g(x)) = f(2 + x^2)$ بتعويضِ $g(x) = 2 + x^2$

$= (2 + x^2)^{10} = h(x)$ بتعويضِ $2 + x^2$ في معادلةِ f

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$ انظر الهامش

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكِنُ استعمالُ فكرةِ الاقتراناتِ المُركَّبةِ في مواقفَ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثلِ: التجارةِ، والصناعةِ، وغيرِهِما.

مثال 4: من الحياة

صناعةٌ: وجدَ مديرُ مصنعٍ للأثاثِ أنَّ تكلفةَ إنتاجِ q منْ خزاناتِ الكتبِ في فترةِ العملِ الصباحيةِ بالدينارِ هيَ: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كانَ عددُ خزاناتِ الكتبِ التي يُمكِنُ إنتاجُها في t ساعةً في الفترةِ الصباحيةِ هيَ: $q(t) = 20t, 0 \leq t \leq 5$، فما تكلفةُ الإنتاجِ بدلالةِ t؟ كمْ دينارًا تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ؟

28

إجابة أتحقق من فهمي 3:

من الإجابات المحتملة:

a) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x$, أو $f(x) = 4x - 1, g(x) = x^2$

من الإجابات المحتملة:

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 5$, $g(x) = (x+2)^2$ ، أو $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5$, $g(x) = x+2$

لإيجادِ تكلفةِ الإنتاجِ بدلالةِ t ، أُعـوِّضُ قيمةَ $q(t)$ في معادلةِ التكلفةِ، فأُكوِّنُ اقترانًا مُركَّبًا هوَ $(C\circ q)(t)$:

$$(C\circ q)(t) = C(20t)$$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$$= (20t)^2 + 2(20t) + 800$$ بتعويضِ $20t$ مكانَ q في معادلةِ التكلفةِ

$$(C\circ q)(t) = 400t^2 + 40t + 800$$ بالتبسيطِ

تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ : $(C\circ q)(4)$

$$(C\circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذنْ، تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ هيَ: 7360 دينارًا.

معلومةٌ

الكلفن وحدةٌ لقياسِ درجةِ الحرارةِ، اعتُمِدَتْ في النظامِ الدوليِّ، ورُمِزَ إليْها بالرمزِ (K)، وقدْ سُمِّيَتْ بهذا الاسمِ نسبةً إلى الفيزيائيِّ اللورد كلفن.

أتحقق من فهمي

قياسٌ: يُحوِّلُ الاقترانُ $C(F) = \frac{5}{9}(F-32)$ درجاتِ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ F إلى مقياسِ سيلسيوس C. ويُحوِّلُ الاقترانُ $K(C) = C + 273$ درجاتِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس إلى مقياسِ كلفن K. أكتبُ الاقترانَ الذي يُحوِّلُ درجةَ الحرارةِ منَ المقياسِ الفهرنهايتيِّ إلى مقياسِ كلفن، ثمَّ أجِدُ درجةَ الحرارةِ على مقياسِ كلفن التي تُقابِلُ 86 درجةً فهرنهايتيةً. انظر الهامش

أتدرب وأحل المسائل

إذا كانَ $f(x) = x + 7,\ g(x) = \frac{x}{2}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1) $(f\circ g)(4)$ 9

2) $(g\circ f)(4)$ 5.5

3) $(g\circ g)(-2)$ $-\frac{1}{2}$

4) $(f\circ f)(3)$ 17

إذا كانَ $c(x) = x^3,\ d(x) = 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

5) $(c\circ d)(3)$ 27

6) $(d\circ c)(5)$ 247

7) $(c\circ d)(x)$ $(c\circ d)(x) = (2x-3)^3$

8) $(d\circ c)(x)$ $(d\circ c)(x) = 2x^3 - 3$

إجابة أتحقق من فهمي 4:

$$(K\circ C)(F) = K(\frac{5}{9}(F-32)) = \frac{5}{9}(F-32) + 273$$

$$(K\circ C)(86) = \frac{5}{9}(86-32) + 273 = 303K$$

مثال إضافي

تجارة: أعلن محل لبيع الأجهزة الكهربائية عن خصم قيمته 15% على جميع الأجهزة. يريد خليل أن يشتري ثلاجة من هذا المحل، ولديه قسيمة من المصنع تُخوِّله الحصول على خصم 25 دينارًا من ثمن الثلاجة.

a) اكتب اقترانين f, g يُمثِّل أحدهما ما سيدفعه خليل لشراء ثلاجة ثمنها x دينارًا مستفيدًا من الخصم المعلن، ويُمثِّل الآخر ما سيدفعه مستفيدًا من القسيمة.

$f(x) = x - 25\ ,\ \ g(x) = x - 0.15x = 0.85x$

b) اكتب قاعدة كلٍّ من $(g\circ f)(x), (f\circ g)(x)$، مُفسِّرًا دلالاتهما، ومُحدِّدًا أيهما أفضل لخليل.

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من القسيمة أولًا، ثم الخصم المعلن: $(g\circ f)(x) = 0.85x - 21.25$

ما سيدفعه خليل مستفيدًا من الخصم المعلن أولًا، ثم القسيمة: $(f\circ g)(x) = 0.85x - 25$

الأفضل لخليل هو $(f\circ g)(x)$ ؛ لأنه سيدفع أقل بمقدار 3.75 دنانير.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (10–1)، وتابعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم ناقِشهم فيها.

تعليمات المشروع

وجِّه الطلبة إلى البدء بتنفيذ الخطوة 3 من المشروع، بتمثيل البيانات التي جمعوها باستعمال برمجية Excel ، وإيجاد قاعدة الاقتران المناسب للبيانات.

9 إذا كانَ $a(x) = x + 4, b(x) = x-7$، فأُثبِتُ أنَّ $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$. انظر ملحق الإجابات

10 إذا كانَ $f(x) = 2^x, g(x) = 3x + 4$، فأَجِدُ $(f \circ g)(x)$، ثمَّ أَجِدُ قيمةَ $(f \circ g)(-3)$. انظر ملحق الإجابات

11 إذا كانَ $g(x) = 2x-10 , f(x) = \frac{1}{x-4}$، فأَجِدُ $(g \circ f)(x)$ بصورةِ كسرٍ واحدٍ، ثمَّ أُعيِّنُ مجالَهُ. انظر ملحق الإجابات

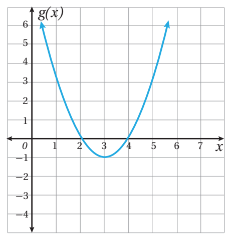
إذا كانَ $f(x) = x+1, g(x) = x^2 - 7$، فأُعبِّرُ عنْ كلٍّ ممّا يأتي بصورةِ اقترانٍ مُركَّبٍ، مُعتمِدًا الاقترانيْنِ f, g:

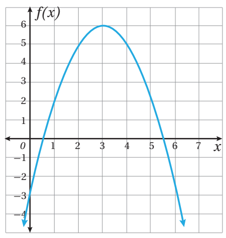
12 $x^2 - 6$
$(f \circ g)(x)$

13 $x + 2$
$(f \circ f)(x)$

14 $x^2 + 2x - 6$
$(g \circ f)(x)$

أستعملُ التمثيليْنِ البيانييْنِ للاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ لإيجادِ قيمةِ الاقترانِ المُركَّبِ في الأسئلةِ (18 – 15):





15 $(f \circ g)(2)$ $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = -3$

16 $(g \circ f)(4)$ $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(5) = 3$

17 $(g \circ g)(5)$ $(g \circ g)(5) = g(g(5)) = g(3) = -1$

18 $(f \circ f)(3)$ $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(6) = -3$

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$، بحيثُ يُمكِنُ التعبيرُ عنْ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ بالصورةِ $h(x) = f(g(x))$:

19 $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$ انظر ملحق الإجابات

20 $h(x) = (\frac{1}{2x-3})^3$ انظر ملحق الإجابات

21 إذا كانَ $g(x) = \frac{2}{3-x} , x > 3$، $f(x) = \sqrt{x-2} , x \geq 2$، فهلْ يُمكِنُ تكوينُ $(f \circ g)(x)$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
انظر ملحق الإجابات

22 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

تنبيه: في الأسئلة (18–15)، وجِّه الطلبة إلى اختيار التمثيل البياني للاقتران الأيمن في صيغة الاقتران المُركَّب، ورسم عمود من القيمة x المحددة في السؤال بحيث يلاقي المنحنى، ثم رسم مستقيم أفقي إلى المحور y، وتحديد قيمة y، ثم تعيين تلك القيمة على المحور x في التمثيل البياني الثاني، ثم رسم عمود يلاقي المنحنى، ثم رسم خط أفقي إلى المحور y، وتحديد قيمة y، فتكون تلك القيمة هي قيمة الاقتران المُركَّب.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية من 12 إلى 22، إضافةً إلى الأسئلة ذوات الأرقام الفردية في الصفحة العاشرة من كتاب التمارين.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل. ناقِشهم أيضًا في الأسئلة الباقية من الدرس.

يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدةِ في الثلّاجةِ بالاقترانِ:
$N(T) = 23T^2 - 56T + 1,\ 3 < T < 33$، حيثُ T درجةُ حرارةِ الطعامِ. عندَ إخراجِ الطعامِ منَ الثلّاجةِ تُعطى درجةُ حرارتِهِ بالاقترانِ: $T(t) = 5t + 1.5$، حيثُ t الزمنُ بالساعاتِ:

23 أكتبُ الاقترانَ: $(N \circ T)(t)$. (23–26) انظر ملحق الإجابات

24 أَجِدُ الزمنَ الذي يصلُ عندهُ عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خليةً، مُقرِّبًا إجابتي إلى منزلتيْنِ عشريتيْنِ.

25 إذا كانَ $f(x) = ax + b,\ a > 0$، وكانَ $(f \circ f)(x) = 16x - 15$، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ a، وَb.

26 أَجِدُ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ: $h(x) = x + 3$, $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{x}$.

مهارات التفكير العليا

(27–30) انظر ملحق الإجابات

27 **أكتشفُ الخطأَ:** وجدَتْ كلٌّ منْ هدى ووفاءَ ناتجَ $(f \circ g)(x)$ ، حيثُ: $f(x) = x^2 - 6x - 5,\ g(x) = x^2 + 5$. أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

وفاءُ

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= (x^2+5)^2 - 6x^2 - 5\\ &= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5\\ &= x^4 + 4x^2 + 20\end{aligned}$$

هدى

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= (x^2+5)^2 - 6(x^2+5) - 5\\ &= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5\\ &= x^4 + 4x^2 - 10\end{aligned}$$

28 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ اقترانيْنِ f، وَ g بحيثُ يكونُ $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

29 **تحدٍّ:** إذا كانَ $g(x) = \frac{1}{x+2}$; $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ، فما قاعدةُ $(f \circ g)(x)$؟ ما مجالُهُ؟

30 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$ ، وكانَ $g(x) = \frac{2x-1}{3}$ ، فأَحُلُّ المعادلةَ $(f \circ g)(x) = -4$.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.

- أرشد الطلبة إلى إكمال المربع في الاقتران الوارد في السؤال 28

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » إذا كان $f(x) = 3x - 7$، وكان $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 11$ ، فما قاعدة $g(x)$؟
    $g(x) = \frac{4}{3}x^2 + 6$
  - » إذا كان $f(x) = \sqrt{3x}$ ، وكان $(g \circ f)(x) = 18x + 7$ ، فما قاعدة $g(x)$؟
    $g(x) = 6x^2 + 7$
  - » إذا كان $f(x) = \frac{2+3x}{2x-6}$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، فما مجال كل من $(f \circ g)(x)$، و $(g \circ f)(x)$؟

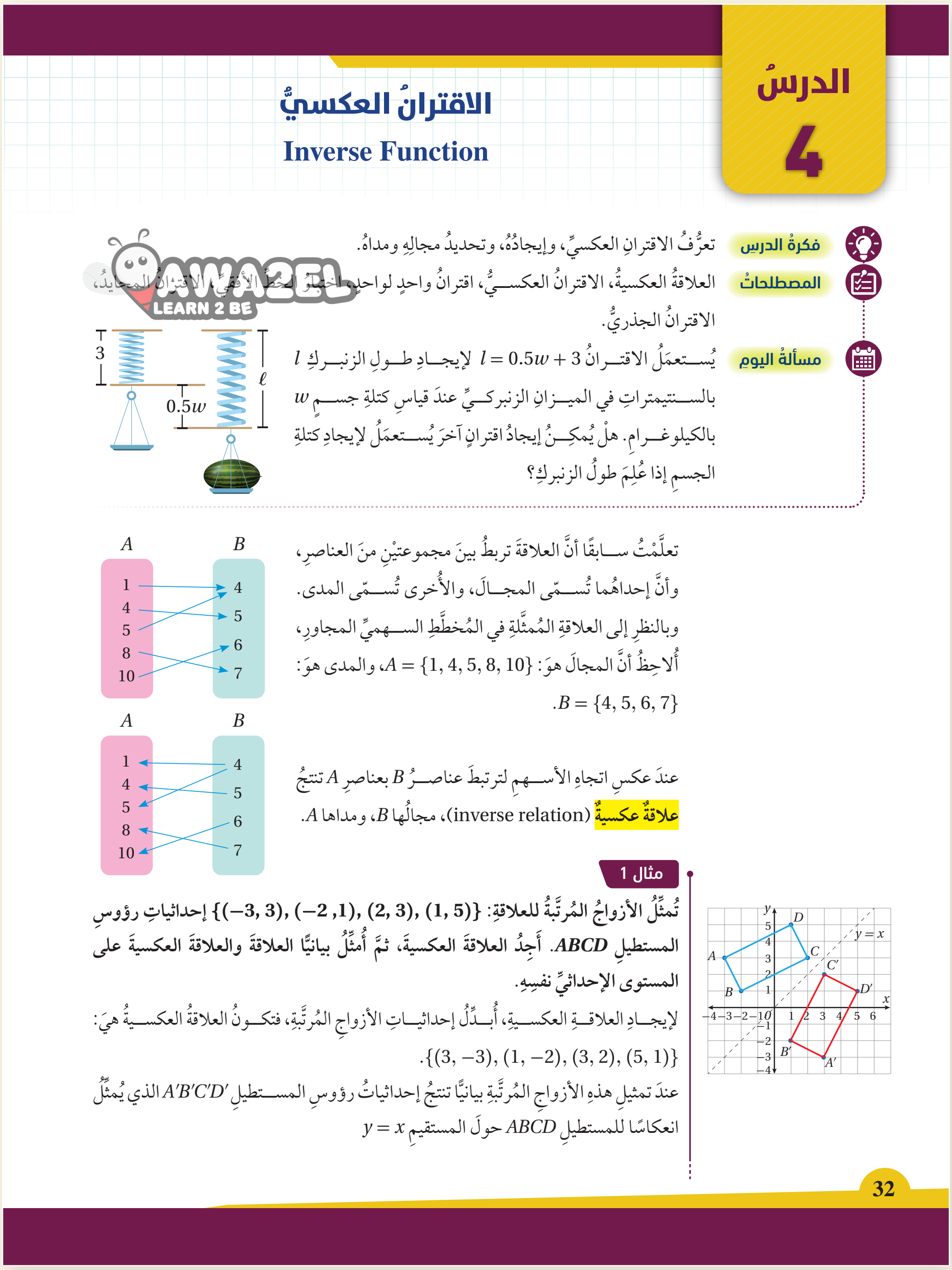
مجال $(f \circ g)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و $\frac{1}{3}$

مجال $(g \circ f)(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 و $\frac{-2}{3}$

6 الختام

- اطلب إلى الطلبة البحث في مكتبة المدرسة أو شبكة الإنترنت عن أمثلة تطبيقية على تركيب الاقترانات، ثم كتابة مثال واقعي عن تركيب الاقترانات.

الدرس 4



الدرس 4

الاقترانُ العكسيُّ

Inverse Function

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقترانِ العكسيِّ، وإيجادُهُ، وتحديدُ مجالِهِ ومداهُ.

المصطلحاتُ العلاقةُ العكسيةُ، الاقترانُ العكسيُّ، اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ، اختبارُ الخطِّ الأفقيِّ، الاقترانُ المحايدُ، الاقترانُ الجذريُّ.

مسألةُ اليومِ يُستعمَلُ الاقترانُ $l = 0.5w + 3$ لإيجادِ طولِ الزنبركِ l بالسنتيمتراتِ في الميزانِ الزنبركيِّ عندَ قياسِ كتلةِ جسمٍ w بالكيلوغرامِ. هلْ يُمكِنُ إيجادُ اقترانٍ آخرَ يُستعمَلُ لإيجادِ كتلةِ الجسمِ إذا عُلِمَ طولُ الزنبركِ؟

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ العلاقةَ تربطُ بينَ مجموعتيْنِ منَ العناصرِ، وأنَّ إحداهُما تُسمّى المجالَ، والأُخرى تُسمّى المدى. وبالنظرِ إلى العلاقةِ المُمثَّلةِ في المُخطَّطِ السهميِّ المجاورِ، أُلاحِظُ أنَّ المجالَ هوَ: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$، والمدى هوَ: $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

عندَ عكسِ اتجاهِ الأسهمِ لترتبطَ عناصرُ B بعناصرِ A تنتجُ علاقةٌ عكسيةٌ (inverse relation)، مجالُها B، ومداها A.

مثال 1

تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(1, 5), (2, 3), (-2, 1), (-3, 3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المستطيلِ $ABCD$. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

لإيجادِ العلاقةِ العكسيةِ، أُبدِّلُ إحداثياتِ الأزواجِ المُرتَّبةِ، فتكونُ العلاقةُ العكسيةُ هيَ: $\{(5, 1), (3, 2), (1, -2), (3, -3)\}$.

عندَ تمثيلِ هذهِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا تنتجُ إحداثياتُ رؤوسِ المستطيلِ $A'B'C'D'$ الذي يُمثِّلُ انعكاسًا للمستطيلِ $ABCD$ حولَ المستقيمِ $y = x$

32

نتاجات الدرس

- يتعرف العلاقة العكسية، والاقتران العكسي.
- يجد الاقتران العكسي، ويحدد مجاله ومداه.
- يتعرف الاقتران الجذري، ويحدد مجاله ومداه.
- يمثل الاقتران واحد لواحد واقترانه العكسي في المستوى الإحداثي نفسه، ويتعرف العلاقة بينهما.

التعلم القبلي:

- تمييز العلاقة والاقتران.
- تغيير موضوع القانون.

1 التهيئة

- اسأل الطلبة عن العلاقة والاقتران والفرق بينهما.
- اكتب العلاقتين الآتيتين، ثم اسأل الطلبة عن المجال والمدى لكلٍّ منهما، وأيهما اقتران:

1) $\{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 8)\}$

2) $\{(-2, 4), (-1, 1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$

- اطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة x بدلالة y في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = 2x - 5$ $\qquad x = \dfrac{y + 5}{2}$

2) $y = \dfrac{3y + 4}{5}$ $\qquad x = \dfrac{5y - 4}{3}$

ملاحظات المعلم

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**) واسألهم:
  » لماذا يستطيل الزنبرك عندما تُعلَّق به كتلة؟ لأن قوة الجاذبية تشد الكتلة إلى الأسفل، فيزداد طول الزنبرك.
  » إذا عُلِّق بالميزان مادة كتلتها 4 k، فما طول الزنبرك؟ 5 cm
  » كيف تُحسَب كتلة جسم عُلِّق بهذا الميزان فأصبح طول الزنبرك 7 cm؟ ما كتلته؟ بتعويض 7 بدل l في المعادلة وحلها لإيجاد w. كتلته 8 kg
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم العلاقة العكسية التي تنتج بعكس اتجاه الأسهم في المخطط السهمي، أو بتبديل الإحداثيين في الأزواج المرتبة التي تُمثِّل العلاقة. فإذا كان (a, b) موجودًا في العلاقة R، فإن (b, a) يكون موجودًا في العلاقة العكسية للعلاقة R.

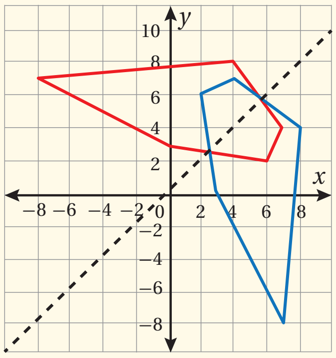
مثال 1

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 1 الذي يُبيِّن كيفية إيجاد العلاقة العكسية لعلاقة مكتوبة بصورة أزواج مرتبة، وتمثيل العلاقة ومعكوسها في المستوى البياني نفسه، ومقارنة التمثيلين البيانين، مُذكِّرًا إيّاهم بالانعكاس حول مستقيم.

مثال إضافي

- تُمثِّل العلاقة $\{(2, 6), (3, 0), (4, 7), (7, -8), (8, 4)\}$ رؤوس مضلع خماسي. جد العلاقة العكسية، ومثِّل العلاقتين في المستوى الإحداثي نفسه.

العلاقة العكسية هي:
$\{(-8, 7), (0, 3), (4, 8), (6, 2), (7, 4)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المضلع حول المستقيم $y = x$



- وضِّح للطلبة أنه يمكننا إيجاد معكوس للاقتران مثلما نجد معكوسًا للعلاقة. غير أن معكوس الاقتران $f(x)$ لا يكون اقترانًا إلا إذا كان كل عنصر في مدى الاقتران f مرتبطًا بعنصر واحد فقط من مجاله؛ فلا يمكن أن يرتبط عنصران من المجال بعنصر واحد من المدى. ويسمى الاقتران الذي يُحقِّق هذه الخصيصة اقتران واحد لواحد، ويكون معكوسه هو الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$.
- وجِّه الطلبة إلى تأمُّل المخططين السهميين في الصفحة 33، ثم رسم معكوس كلٍّ منهما، ثم اسألهم:
  » أي المعكوسين هو اقتران؟
- وضِّح للطلبة اختبار الخط الأفقي؛ لكي يتمكّنوا من تمييز اقتران واحد لواحد.

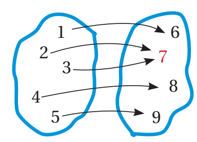
أتحقق من فهمي

تُمثِّلُ الأزواجُ المُرتَّبةُ للعلاقةِ: $\{(4, 3), (-4, 3), (1, -3)\}$ إحداثياتِ رؤوسِ المثلثِ ABC. أَجِدُ العلاقةَ العكسيةَ، ثمَّ أُمثِّلُ بيانيًّا العلاقةَ والعلاقةَ العكسيةَ على المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. انظر الهامش

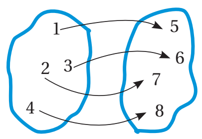
الاقتراناتُ هيَ نوعٌ خاصٌّ منَ العلاقاتِ؛ لأنَّ لها خاصيةً لا تُحقِّقُها جميعُ العلاقاتِ؛ فهيَ تربطُ كلَّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المدى. وبما أنَّ كلَّ اقترانٍ هوَ علاقةٌ فإنَّهُ يُمكِنُ إيجادُ علاقةٍ عكسيةٍ للاقترانِ (معكوسُ الاقترانِ)، فإذا كانَ المعكوسُ اقترانًا أيضًا سُمِّيَ **اقترانًا عكسيًّا** (inverse function). ويُرمَزُ إلى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $f(x)$ بالرمزِ $f^{-1}(x)$.

> **رموزٌ رياضيةٌ**
> يُقرَأُ الرمزُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِنُ تحديدُ إذا كانَ معكوسُ الاقترانِ $f(x)$ يُمثِّلُ اقترانًا أمْ لا بالنظرِ إلى $f(x)$ نفسِهِ؛ فإذا ارتبطَ كلُّ عنصرٍ في المدى بعنصرٍ واحدٍ فقطْ في المجالِ كانَ المعكوسُ اقترانًا، عندئذٍ يُسمّى $f(x)$ **اقترانَ واحدٍ لواحدٍ** (one to one function).

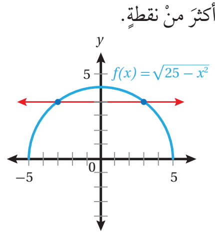


اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.

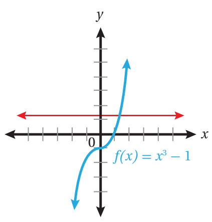


اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ.

يُمكِنُ أيضًا استعمالُ طريقةٍ تُسمّى **اختبارَ الخطِّ الأفقيِّ** (horizontal line test)؛ للتحقُّقِ منْ أنَّ الاقترانَ هوَ واحدٌ لواحدٍ، وذلكَ برسمِ أيِّ خطٍّ أفقيٍّ، والتأكُّدِ أنَّهُ لا يقطعُ منحنى $f(x)$ في أكثرَ منْ نقطةٍ.



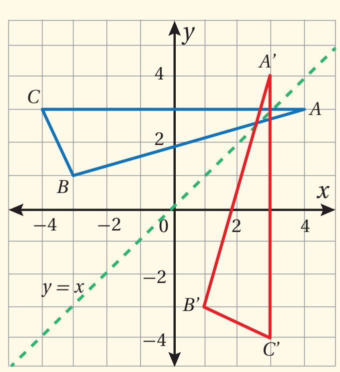
اقترانٌ ليسَ واحدًا لواحدٍ.



اقترانٌ واحدٍ لواحدٍ.

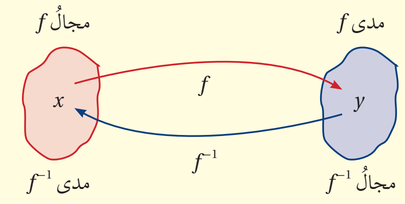
إجابة أتحقق من فهمي 1:

العلاقة العكسية هي: $\{(3, 4), (3, -4), (-3, 1)\}$، وهي تُمثِّل انعكاسًا لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$



مفهومٌ أساسيٌّ

لأيِّ اقتـرانِ $f(x)$، يوجدُ اقترانٌ عكسـيٌّ $f^{-1}(x)$ إذا وفقـطْ إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، عندئذٍ يكونُ مجالُ $f(x)$ هوَ مدى $f^{-1}(x)$، ومدى $f(x)$ هوَ مجالَ $f^{-1}(x)$.



يُمكِنُ إيجادُ الاقترانِ العكسـيِّ للاقترانِ المكتوبِ بصورةِ معادلةٍ بالتبديلِ بينَ x وَ y في قاعدةِ الاقترانِ.

مثال 2

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 4(x-5)$

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = f(x)$

أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = 4(x-5)$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y = 4(x-5)$ المعادلةُ الأصليةُ

$y = 4x-20$ بتوزيعِ الضربِ في 4 على الحدَّيْنِ

$y + 20 = 4x$ بإضافةِ 20 إلى طرفَيِ المعادلةِ

$\frac{y+20}{4} = x$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 4

الخطوةُ 3: أُبـدِّلُ x بـِ y، وأُبدِّلُ y بـِ x في الصيغةِ التي توصَّلْتُ إليْها فـي الخطوةِ 2، فينتجُ:

$\frac{x+20}{4} = y$

مثال 2

- وضِّح للطلبة خطوات إيجاد الاقتران العكسي لاقتران عُلِمت معادلته كما في المثال.
- اكتب على اللوح بعض الأعداد، ثم اطلب إلى الطلبة تعويضها في $f(x)$، وتعويض الأعداد الناتجة في الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$، وملاحظة العلاقة بين الاقتران ومعكوسه.

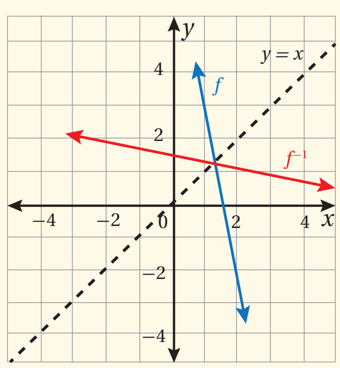
إذا كان $f(a) = b$، فإن $f^{-1}(b) = a$

- وضِّح لهم أيضًا أنه لرسم الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران، يجب اختيار بعض النقاط، وتبديل ترتيب إحداثي كلٍّ منها، وتعيين النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ورسم المنحنى (أو المستقيم) المار بها.

مثال إضافي

- جد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = 7 - 5x$، ثم مثِّل $f(x), f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه.

$$f^{-1}(x) = \frac{7-x}{5}$$



التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

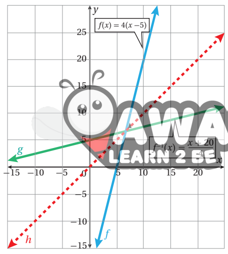
كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: علاقة عكسية inverse relation، واقتران عكسي invers function، واقتران واحد لواحد one to one function، واقتران جذري radical function، واقتران محايد identity function.

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فيكونُ الناتجُ قاعدةَ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$.

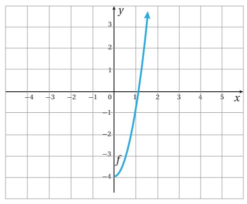
أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+20}{4}$$

عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y=x$



2) $f(x)=3x^2-4,\ x\ge 0$



باستعمالِ اختبارِ الخطِّ الأفقيِّ، أَجِدُ أنَّ $f(x)$ هوَ اقترانٌ واحدٌ لواحدٍ عندما $x\ge 0$؛ لذا فإنَّ لهُ اقترانًا عكسيًّا.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y=3x^2-4$

الخطوةُ 2: أُعيدُ ترتيبَ المعادلةِ الناتجةِ في الخطوةِ 1 بجعلِ x موضوعَ القانونِ:

$y=3x^2-4$ المعادلةُ الأصليةُ

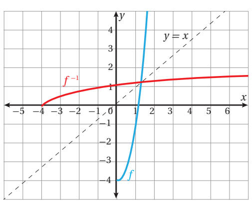
$y+4=3x^2$ بإضافةِ 4 إلى طرفَيِ المعادلةِ

$\frac{y+4}{3}=x^2$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 3

$\sqrt{\frac{y+4}{3}}=x$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفيْنِ؛ لأنَّ مجالَ f الذي يُمثِّلُ مدى f^{-1} هوَ الأعدادُ غيرُ السالبةِ.

الخطوةُ 3: أُبدِّلُ x بـ y، وأُبدِّلُ y بـ x، فينتجُ: $y=\sqrt{\frac{x+4}{3}}$

الخطوةُ 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ: $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x+4}{3}}$



عندَ تمثيلِ كلٍّ منْ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f^{-1}(x)$ هوَ انعكاسٌ للتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $f(x)$ حولَ المستقيمِ $y=x$

معلومةٌ

بوجهٍ عامٍّ، لا يوجدُ للاقترانِ التربيعيِّ اقترانٌ عكسيٌّ؛ لأنَّهُ ليسَ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ. ولكنْ إذا اختُزِلَ مجالُهُ بالفترةِ التي يكونُ فيها اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، كانَ لهُ عندئذٍ اقترانٌ عكسيٌّ.

رموزٌ رياضيةٌ

يدلُّ الرمزُ $f^{-1}(x)$ على الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f، أمّا الرمزُ $\frac{1}{f(x)}$ فيدلُّ على مقلوبِ الاقترانِ f.

✎ أتحقق من فهمي

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ: انظر الهامش

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

منْ خصائصِ أيِّ اقترانيْنِ مُتعاكِسيْنَ أنَّ كلًّا منْهُما يَعكسُ أثرَ الآخرِ؛ لذا ينتجُ منْ تركيبِهِما الاقترانُ الذي يُبْقي كلَّ عنصرٍ في مجالِهِما على حالِهِ، وهوَ **الاقترانُ المحايدُ** (identity function) الذي يربطُ كلَّ عنصرٍ بنفسِهِ، وقاعدتُهُ هيَ: $f(x) = x$

إرشادٌ

تعني جملةُ (إذا وفقط إذا) أنَّ العبارةَ صحيحةٌ في الاتجاهيْنِ.

نتيجةٌ

يكونُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)$، إذا وفقطْ إذا كانَ:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ لجميعِ قيمِ x في مجالِ $f^{-1}(x)$ وَ $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ لجميعِ قيمِ x في مجالِ $f(x)$.

تُستعمَلُ النتيجةُ السابقةُ لإثباتِ أنَّ كلًّا منَ اقترانيْنِ معلوميْنِ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ، وللتحقُّقِ منْ صحَّةِ الحلِّ عندَ إيجادِ الاقترانِ العكسيِّ.

مثال 3

أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$ وَ $g(x) = 3x - 5$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ بإيجادِ $(f \circ g)(x)$، وَ $(g \circ f)(x)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= f(3x - 5)$ بتعويضِ $g(x) = 3x - 5$

$= \frac{(3x-5)+5}{3}$ بتعويضِ $3x - 5$ مكانَ x في معادلةِ $f(x)$

$= \frac{3x+(-5+5)}{3}$ بالتجميعِ

$(f \circ g)(x) = x$ بالتبسيطِ

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ تعريفُ الاقترانِ المُركَّبِ

$= g(\frac{x+5}{3})$ بتعويضِ $f(x) = \frac{x+5}{3}$

$= 3(\frac{x+5}{3}) - 5$ بتعويضِ $\frac{x+5}{3}$ مكانَ x في معادلةِ $g(x)$

$= x + 5 - 5$ باختصارِ العاملِ 3 منَ البسطِ والمقامِ

$(g \circ f)(x) = x$ بالتبسيطِ

إذنْ، كلٌّ منَ الاقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ؛ لأنَّ $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

مثال 3

- ناقِش الطلبة في النتيجة الخاصة بتركيب اقتران مع الاقتران العكسي له، وكيفية توظيفها لتحديد إذا كان كلٌّ من اقترانين معطيين يُمثِّل اقترانًا عكسيًّا للآخر أم لا، بناءً على المثال 3.

مثال إضافي

- أثبت أن كلًّا من الاقترانين $f(x) = 4x^2 - 1, x \geq 0$ و $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}\ , x \geq -1$ هو اقتران عكسي للآخر.

$(f \circ g)(x) = 4(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}\ )^2 - 1$

$= 4(\frac{1}{4})(x+1) - 1 = x$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2 - 1) + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2}$

$= \frac{1}{2}(2x) = x$

إذن، كل من $f(x), g(x)$ اقتران عكسي للآخر؛ لأن $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = x$

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{7}$

b) $g^{-1}(x) = \sqrt{x-2}\ , x \geq 2$

مثال 4

- وضِّح للطلبة مفهوم الاقتران الجذري ومجاله ومداه، ثم ناقِشهم في المثال 4، مُذكِّرًا إيّاهم بخصائص علاقة التباين ($\le$، $\ge$، $<$، $>$).
- وضِّح لهم أيضًا كيفية حل المعادلة التي تحوي جذورًا عند إيجاد الاقتران العكسي لاقتران جذري.

مثال إضافي

- جد المجال والمدى والاقتران العكسي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $g(x) = 2 + \sqrt{9 - 3x}$

b) $h(x) = \sqrt[3]{4x - 15}$

a) المجال: $x \le 3$ أو الفترة $(-\infty, 3]$، والمدى $y \ge 2$ أو الفترة $[2, \infty)$, $x \ge 2$, $g^{-1} =$

$$g^{-1}(x) = \frac{9-(x-2)^2}{3}, x \ge 2$$

b) المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: جميع الأعداد الحقيقية

$$h^{-1}(x) = \frac{x^3 + 15}{4}$$

إرشادات للمعلم

وضِّح للطلبة كيف يُوظَّف الاقتران العكسي في مسائل عملية بحيث يصبح المتغير المستقل تابعًا، والمتغير التابع مستقلًّا. فالاقتران الذي يربط محيط مربع بطول ضلعه هو $p(s) = 4s$، والاقتران العكسي له هو $s(p) = \frac{p}{4}$، فينتج طول الضلع بدلالة المحيط.

وضِّح للطلبة أيضًا اختلاف خطوات إيجاد الاقتران العكسي في المسائل العملية عنها في الطريقة السابقة؛ إذ لا يُبدَّل المتغيران لأنهما مسميان لكميات معينة خاصة، ولا يستعمل رمز الاقتران العكسي.

أتحقق من فهمي

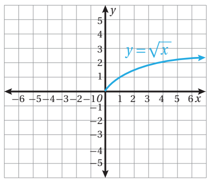
انظر الهامش

أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x) = 4x - 8$ وَ $g(x) = \frac{x}{4} + 2$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ.

نتجَ في المثالِ الثاني الاقترانُ العكسيُّ $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذرًا تربيعيًّا لمقدارٍ جبريٍّ، وهوَ نوعٌ خاصٌّ منَ الاقتراناتِ يُسمّى **الاقترانَ الجذريَّ** (radical function)، مثلَ:

$f(x) = \sqrt{5 + x^2}$ $\quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+12}{8}}$ $\quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}}$ $\quad f(x) = \frac{\sqrt{x - x^3}}{\sqrt[3]{1-x}}$

إذا كانَ دليلُ الجذرِ فرديًّا مثلَ: $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$ كانَ مجالُ الاقترانِ الجذريِّ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ، ومداهُ جميعَ الأعدادِ الحقيقيةِ. أمّا إذا كانَ دليلُهُ زوجيًّا مثلَ: $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt{\ }$ ، فإنَّ مجالَهُ يكونُ مجموعةَ الأعدادِ التي تجعلُ المقدارَ تحتَ رمزِ الجذرِ عددًا غيرَ سالبٍ؛ لأنَّ الجذورَ الزوجيةَ للأعدادِ السالبةِ ليسَتْ حقيقيةً، ويكونُ مداهُ مجموعةً منَ الأعدادِ الحقيقيةِ غيرِ السالبةِ. فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x}$ مجالُهُ $x \ge 0$ ، ومداهُ $y \ge 0$، وتمثيلُهُ البيانيُّ كما في الشكلِ الآتي:



مثال 4

أَجِدُ مجالَ الاقترانِ $f(x) = \sqrt{2x - 6}$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ قيمُ x التي تجعلُ $2x - 6 \ge 0$:

أكتبُ المتباينةَ	$2x - 6 \ge 0$
بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ	$2x - 6 + 6 \ge 0 + 6$
بالتبسيطِ	$2x \ge 6$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$x \ge 3$

إذنْ، مجالُ $f(x)$ هوَ $x \ge 3$، أوِ الفترةُ $[3, \infty)$، ومداهُ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ منْ قيمتِهِ عندَ 3 فصاعدًا؛ لأنَّ المقصودَ بالجذرِ هنا هوَ الجذرُ الموجبُ. فالمدى هوَ $y \ge 0$، أوِ الفترةُ $[0, \infty)$.

أتذكَّرُ

عملياتُ الجمعِ والطرحِ والضربِ في عددٍ موجبٍ لا تُغيِّرُ رمزَ التباينِ. أمّا الضربُ في عددٍ سالبٍ فيعكسُ رمزَ التباينِ.

لإيجادِ الاقترانِ العكسيِّ، أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $y = \sqrt{2x-6}$، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ لإيجادِ x بدلالةِ y:

المعادلةُ الأصليةُ	$y = \sqrt{2x-6}$
بتربيعِ الطرفيْنِ	$y^2 = 2x - 6$
بإضافةِ 6 إلى الطرفيْنِ	$y^2 + 6 = 2x$
بقسمةِ الطرفيْنِ على 2	$\frac{y^2+6}{2} = x$

بإبدالِ y بـِ x، وَ x بـِ y في المعادلةِ الناتجةِ، فإنَّهُ ينتجَ: $y = \frac{x^2+6}{2}$

أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكانَ y، فينتجُ: $f^{-1}(x) = \frac{x^2+6}{2}$

يكونُ مجالُ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى $f(x)$؛ أيْ مجالُهُ الفترةُ $[0, \infty)$، ومداهُ هوَ مجالُ $f(x)$؛ أيِ الفترةُ $[3, \infty)$.

أتذكَّرُ

مجالُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ هوَ مدى الاقترانِ f.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

أَجِدُ مجالَ $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداهُ، ثمَّ أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لهُ.

تتطلَّبُ بعضُ المسائلِ الحياتيةِ استعمالَ مفهومِ الاقترانِ العكسيِّ لحلِّها. فإذا عُلِمَ طولُ نصفِ قُطْرِ كرةٍ أمكنَ إيجادُ حجمِها بالتعويضِ المباشرِ في قانونِ حسابِ حجمِ الكرةِ: $V(r) = \frac{4}{3} r^3 \pi$. ولكنْ إذا عُلِمَ الحجمُ، وطُلِبَ إيجادُ طولِ نصفِ القُطْرِ، فيجبُ تغييرُ الصيغةِ الخاصةِ بإيجادِ الحجمِ V إلى صيغةٍ أُخرى لإيجادِ r، وهنا يبرزُ مفهومُ الاقترانِ العكسيِّ.

إرشادٌ

لا يُستعمَلُ رمزُ الاقترانِ العكسيِّ $f^{-1}(x)$ في المسائلِ العمليةِ، وإنَّما يُستعمَلُ رمزٌ مثلُ $r = r(V)$ الذي يُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطْرِ بدلالةِ الحجمِ.

مثال 5: من الحياة

فيزياءُ: سقطَ جسمٌ ساكنٌ منَ ارتفاعِ 200 m عنْ سطحِ الأرضِ، فكانَ ارتفاعُهُ h عنِ الأرضِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً منْ سقوطِهِ $h(t) = 200 - 4.9t^2$. أُعبِّرُ عنْ t بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ الارتفاعِ h، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ الذي يكونُ فيهِ ارتفاعُ الجسمِ 50 m فقطْ.

إنَّ التعبيرَ عنْ t بدلالةِ h يعني إيجادَ الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ $h(t)$. ولأنَّ الزمنَ t لا يكونُ سالبًا؛ فإنَّ مجالَ $h(t)$ هوَ $t \geq 0$، وفيهِ يكونُ $h(t)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، ولهُ اقترانٌ عكسيٌّ.

38

إجابة أتحقق من فهمي 4:

مجال $g(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -4؛ أي $\{x | x \geq -4\}$، أو الفترة $[-4, \infty)$.

ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -2؛ أي $\{y | y \geq -2\}$، أو الفترة $[-2, \infty)$.

$$g^{-1}(x) = \frac{(x+2)^2 - 12}{3}, x \geq -2$$

مثال 5: من الحياة

- ناقِش الطلبة في خطوات حل المثال 5 الذي يشير إلى استعمال مفهوم الاقتران العكسي في موقف عملي حياتي.

مثال إضافي

- دفع مصطفى مبلغ 1385 دينارًا تكلفة لبضاعة اشتراها شاملة ضريبة مبيعات بنسبة 12%، ودفع مبلغ 13 دينارًا أجرة شحن:

a) اكتب اقترانًا يُعبِّر عن التكلفة C بدلالة ثمن البضاعة الأصلي p. $C(p) = 1.12p + 13$

b) اكتب اقترانًا يُعبِّر عن الثمن الأصلي بدلالة التكلفة. $p(C) = \frac{C - 13}{1.12}$

c) ما الثمن الأصلي للبضاعة التي اشتراها مصطفى؟ 1225 دينارًا.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسـئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حل الأسئلة (12–1)،
- وتابِعهم في هذه الأثناء.
- اختر بعض الأخطاء التي وقع فيها الطلبة من دون ذكر أسمائهم؛ تجنبًا لإحراجهم، ثم ناقِشهم فيها.

إرشاد: تحقق من إجابة السؤالين 7 و8 من دون إيجاد قاعدة الاقتران العكسي؛ إذ يجب أن يفهم الطلبة العلاقة بين الاقتران والاقتران العكسي له، فإذا كان $f(a) = b$ فإن $f^{-1}(b) = a$ تلقائيًّا.

ملحوظة: هذان السـؤالان مرتبطان بالسؤالين 5 و6 على التوالي.

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسـائل الواردة في الصفحة الحادية عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسـائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

الخطوةُ 1: أكتبُ الاقترانَ بصورةِ $h = 200 - 4.9t^2$

الخطوةُ 2: أجعلُ t موضوعَ القانونِ.

$h = 200 - 4.9t^2$ المعادلةُ الأصليةُ

$h - 200 = -4.9t^2$ بطرحِ 200 منْ طرفَيِ المعادلةِ

$\frac{h-200}{-4.9} = t^2$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على -4.9

$\frac{200-h}{4.9} = t^2$ بضربِ البسطِ والمقامِ في -1

$\sqrt{\frac{200-h}{4.9}} = t$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ الموجبِ للطرفيْنِ

إذنْ، الاقترانُ الذي يُعبِّرُ عنِ الزمنِ بدلالةِ الارتفاعِ هوَ: $t(h) = \sqrt{\frac{200-h}{4.9}}$

$t(50) = \sqrt{\frac{200-50}{4.9}}$ بتعويضِ $h = 50$

≈ 5.53 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، يكونُ الجسمُ على ارتفاعِ 50 m بعدَ مُضِيِّ 5.53 ثوانٍ تقريبًا منْ لحظةِ سقوطِهِ.

أتحقق من فهمي انظر الهامش

يرتبطُ محيطُ الرأسِ C للطفلِ بطولِهِ H (كلا القياسيْنِ بالسنتيمترِ) عنْ طريقِ الاقترانِ:

$$H(C) = 2.15C - 26.75$$

a) أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ محيطِ الرأسِ C بدلالةِ طولِ الطفلِ H.

b) أَجِدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طولُهُ 66 cm

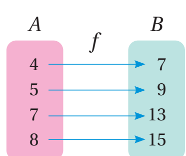
كتلةُ رأسِ الطفلِ حديثِ الولادةِ تساوي رُبْعَ كتلةِ جسمِهِ تقريبًا.

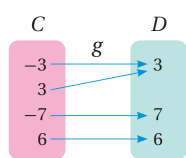
أتدرب وأحل المسائل (1–4) انظر ملحق الإجابات

أُحدِّدُ الاقترانَ الذي لهُ اقترانٌ عكسيٌّ في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ):

1) $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2) $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$

3) 

4) 

إجابة أتحقق من فهمي 5:

a) $C(H) = \frac{H + 26.75}{2.15}$

b) $C \approx 43.1$ cm

تنويع التعليم

بعد حل السؤال 18، اطلب إلى الطلبة البحث عن اقترانات أُخرى تكون عكسية لنفسها.

من الإجابات المحتملة:

$f(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = \frac{a}{x}$ ، حيث a عدد حقيقي.

$f(x) = a - x$، حيث a عدد حقيقي، وغيره.

إذا كانَ $f(x) = 3(\frac{x}{2} + 4)$ ، فأَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

5 $f(-2)$ 9

6 $f(4)$ 18

7 $f^{-1}(9)$ -2

8 $f^{-1}(18)$ 4

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

9 $f(x) = x + 7$ $f^{-1}(x) = x - 7$

10 $f(x) = 8x$ $f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$

11 $f(x) = \frac{x}{2} + 6$ $f^{-1}(x) = 2(x - 6)$

12 $f(x) = \frac{3x - 6}{5}$ $f^{-1}(x) = \frac{5x + 6}{3}$

13 $f(x) = 4x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$

14 $g(x) = 4 + \sqrt{6-3x}, x \leq 2$ $g^{-1}(x) = \frac{6-(x-4)^2}{3}, x \geq 4$

15 $g(x) = \frac{8-3x}{5x}, x \neq 0$ $g^{-1}(x) = \frac{8}{5x + 3}, x \neq -\frac{3}{5}$

16 $j(x) = (x-2)^2 + 4, x \geq 2$ $j^{-1}(x) = \sqrt{x-4}, x \geq 4$

17 أُثبِتُ أنَّ كلًّا منَ الاقترانيْنِ $f(x), g(x)$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ:

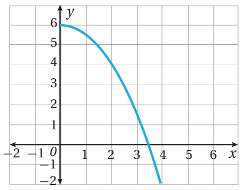
$f(x) = (x+3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$ انظر ملحق الإجابات

18 أُثبِتُ أنَّ $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ هوَ اقترانٌ عكسيٌّ لنفسِهِ. انظر ملحق الإجابات

19 **صناعةٌ:** إذا كانَ $C(x)$ يُمثِّلُ التكلفةَ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً منْ مصابيحِ الإنارةِ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $C^{-1}(23000)$؟

عدد المصابيح التي يمكن إنتاجها بمبلغ مقداره 23000 دينار.

20 أرسمُ منحنى الاقترانِ العكسيِّ للاقترانِ f المجاورِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، مُعيِّنًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ f و f^{-1}. انظر ملحق الإجابات



إرشادات:

- في معرض مناقشة الطلبة في السؤال 20، اسألهم:
  » كيف يمكن رسم منحنى الاقتران العكسي من التمثيل البياني للاقتران؟
- استمع لإجابات الطلبة. وفي حال لم يتوصَّلوا إلى إجابة صحيحة، فذكِّرهم بالعلاقة بين منحنى الاقتران والاقتران العكسي، وربط ذلك بالمثال 1، وتمثيل العلاقة والعلاقة العكسية.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- في السؤال 28، يتعيَّن على الطلبة إيجاد الاقتران المُركَّب والاقتران العكسي للاقتران $g(x)$، ثم القيمة $g^{-1}(34)$، ثم مساواتهما، وحل المعادلة التربيعية الناتجة، والانتباه أن x موجبة. اسألهم:
  » كيف يمكن إيجاد $g^{-1}(34)$ من دون إيجاد الاقتران العكسي؟

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:
  » إذا كان $f(x) = 5 - 3x$ و $g(x) = \dfrac{2x-3}{7}$، فجد كلًّا ممّا يأتي، مُدوِّنًا استنتاجك:

$$(f\circ g)(x),\ (f\circ g)^{-1}(x),\ (f^{-1}\circ g^{-1})(x),\ (g^{-1}\circ f^{-1})(x)$$

6 الختام

- اطلب إلى كل طالب أن يكتب على ورقة اقترانًا والاقتران العكسي له، واقترانًا ليس له اقتران عكسي، واقترانًا عكسيًّا لنفسه، ثم يُسلِّمك الورقة عند الخروج من الصف.

تعليمات المشروع:

- وجِّه الطلبة إلى متابعة تنفيذ الخطوتين 4 و5 من المشروع.
- ذكِّر الطلبة بأن موعد عرض نتائج المشروع قريب؛ لذا يتعيَّن عليهم وضع اللمسات النهائية على المشروع، والتأكُّد أن عناصر المشروع جميعها موجودة يوم العرض.

21 أجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ: $f(x) = x^2-2x+5\ ,\ -3 \le x \le 1$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.
(إرشادٌ: أكتبُ $f(x)$ بصورةِ $(x+b)^2+c$ باستعمالِ إكمالِ المربعِ). انظر ملحق الإجابات

22 **كيمياءُ:** في دورقٍ 100 mL مِنْ أحدِ المحاليلِ، منها 25 mL مِنْ حامضِ الهيدروكلوريكِ. إذا أُضيفَ إلى الدورقِ n mL مِنْ محلولٍ مُشابِهٍ، تركيزُ الحامضِ فيهِ 60%، فإنَّ تركيزَ الحامضِ في الدورقِ يُعطى بالاقترانِ: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبِّرُ عنْ n بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ التركيزِ C، ثمَّ أجِدُ عددَ المِلّيلتراتِ n التي يجبُ إضافتُها ليصبحَ تركيزُ الحامضِ في الدورقِ 50% انظر ملحق الإجابات

23 أحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. انظر ملحق الإجابات

24 تُعطى مِساحةُ السطحِ الكليةُ A للأسطوانةِ التي نصفُ قُطرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها 40 cm بالاقترانِ: $A(r) = 2\pi r^2 + 80\,\pi r$. أُعبِّرُ عنْ نصفِ القُطرِ r بصورةِ اقترانٍ بدلالةِ المِساحةِ A، ثمَّ أجِدُ طولَ نصفِ قُطرِ قاعدةِ أسطوانةٍ مِساحةُ سطحِها الكليةُ $2000\ cm^2$ انظر ملحق الإجابات

25 أجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)=\sqrt[3]{x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f^{-1}(x)$, $f(x)$ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ. انظر ملحق الإجابات

مهارات التفكير العليا

26 **تبريرٌ:** إذا كانَ للاقترانِ $f(x)$ اقترانٌ عكسيٌّ، وكانَ لهُ صفرٌ عندما $x = 4$، فما الذي يُمكِنُ استنتاجُهُ عنْ منحنى $f^{-1}(x)$؟ انظر ملحق الإجابات

27 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ واحدٍ لواحدٍ والاقترانَ العكسيَّ لهُ، ثمَّ أُثبِتُ أنَّ كلًّا منهُما اقترانٌ عكسيٌّ للآخرِ. انظر ملحق الإجابات

28 **تحدٍّ:** إذا كانَ $f(x) = x^2 + 3$، وَ $g(x) = 5x - 1$، وَ $x > 0$، فأحُلُّ المعادلةَ: $(f\circ g)(x) = g^{-1}(34)$. انظر ملحق الإجابات

تنبيه:
عند حل السؤال 24، وجِّه الطلبة إلى إكمال المربع؛ لكتابة المساحة بصورة مشابهة لتلك التي وردت في السؤال 21

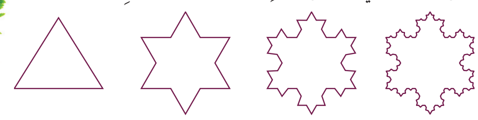
الدرسُ 5

المتتالياتُ
Sequences

فكرةُ الدرسِ استنتاجُ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسّيةٍ.

المصطلحاتُ المتتاليةُ، الحدُّ، الحدُّ العامُّ.

مسألةُ اليومِ يُمثِّلُ النمطُ الآتي مراحلَ تطوُّرِ ورقةِ نباتِ السرخسِ:



المرحلةُ (1).   المرحلةُ (2).   المرحلةُ (3).   المرحلةُ (4).

أستعملُ النمطَ لأُكمِلَ الجدولَ الآتيَ:

المرحلةُ	1	2	3	4	5	6
عددُ الأضلاعِ	3	12	48	192		

تُعَدُّ **المتتاليةُ** (sequence) اقترانًا مجالُهُ مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منْها، ومداهُ مجموعةٌ جزئيةٌ منْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ.

مراجعةُ مفهومٍ

المتتاليةُ: هيَ مجموعةٌ منَ الأعدادِ تَتْبَعُ ترتيبًا مُعيَّنًا، ويُسمّى كُلُّ عددٍ فيها **الحدَّ** (term).

مثال 1

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 $2 , 5 , 8 , 11 , ...$

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ السابقِ بمقدارِ 3، إذنْ تتزايدُ المتتاليةُ بمقدارِ 3، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$2 \underbrace{,}_{+3} 5 \underbrace{,}_{+3} 8 \underbrace{,}_{+3} 11 \underbrace{,}_{+3} 14 \underbrace{,}_{+3} 17 \underbrace{,}_{+3} 20 , ...$$

أتذكَّرُ

قدْ تنتجُ المتتاليةُ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها، أوْ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، أوْ منْ كلتا العمليتيْنِ معًا.

الدرس

5

نتاجات الدرس

- يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها.
- يكتب حدود متتالية إذا عُلِم حدها العام.
- يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية.
- يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.

التعلم القبلي:

- إكمال متتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية معطاة بعض حدودها.
- التعبير عن الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية بمقدار جبري.
- تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية.

1 التهيئة

- اكتب على اللوح المتتاليات الآتية:

1) $1, 5, 9, 13, ...$

2) $1, 4, 9, 16, ...$

3) $2, 9, 28, 65, ...$

- اطلب إلى الطلبة كتابة الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية.
- اطلب إلى الطلبة كتابة الحد العام لكل متتالية.
- اطلب إلى الطلبة تصنيف المتتاليات إلى خطية، وتربيعية، وتكعيبية بحسب حدها العام.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند **(مسألة اليوم)** ثم اسألهم:
  - » كيف يمكن رؤية تطور الأشكال الهندسية لورقة السرخس؟ باستخدام المجهر.
  - » هل يُمثِّل تطور ورقة السرخس متتالية؟ لماذا؟ نعم، لأنها تتبع ترتيب ما.
  - » أيكم يُكمِل الجدول الذي يُمثِّل تطور ورقة السرخس؟ 768, 3072
  - » أيكم يستطيع كتابة الحد العام؟ $3(4)^{n-1}$
  - » هل هذه المتتالية خطية، أم تربيعية، أم تكعيبية أو غير ذلك؟ أسية
- قد لا يتمكَّن الطلبة من إيجاد الحد العام؛ فهذه المتتالية أسية لم يسبق لهم أن تعلموها، ولكن سؤالهم عنها سيثير فضولهم عن موضوع الدرس.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم، ثم اسألهم كل مرة:
  - » من يؤيد الإجابة؟
  - » من لديه إجابة أُخرى؟
  - » اذكرها.

وذلك لتعزيز مهارات التواصل واحترام الرأي والرأي الآخر لديهم. بعد ذلك أخبرهم أنهم سيتعرفون هذا النوع من المتتاليات في الدرس، ثم اكتب العنوان على اللوح.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة أن المتتالية تتكوَّن من حدود، لكلٍّ منها رتبة تُمثِّل ترتيب الحد في المتتالية.
- أخبر الطلبة أن المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 1

- وضِّح للطلبة أنه يمكن وصف المتتالية، وكتابة الحدود التالية عن طريق الحدود الأولى للمتتالية.
- ذكِّر الطلبة بأن المتتاليات الثلاث الأولى قد درسوها سابقًا.
- اكتب حدود المتتالية في الفرع الرابع على اللوح، ثم حلِّلها إلى عواملها الأولية.
- اطلب إلى أحد الطلبة أن يكتب كل حد من حدود المتتالية بصورة $\left(\frac{1}{3}\right)^n$
- اكتب صيغة الاقتران الأسي $y = a(b)^n$ الذي درسه الطلبة في الفصل الدراسي الأول، ثم قارنه بحدود المتتالية؛ ليستنتجوا أن $a = 1$ و $b = \frac{1}{3}$
- بيِّن للطلبة أن هذه المتتالية أسية لأن حدها العام بصورة اقتران أسي.

إرشاد: قد يؤدي تنظيم حدود المتتالية في جدول إلى فهم الطلبة الموضوع بصورة أفضل، وبخاصة الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط.

ملاحظات المعلم

2 $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ ...$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ، أَجِدُ أنَّ الحصولَ على أيِّ حدٍّ يكونُ بضربِ الحدِّ السابقِ لهُ في 2، إذنْ تتضاعفُ المتتاليةُ بمقدارِ 2، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48\ ,\ 96\ ,\ 192\ ,\ ...$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

3 $80\ ,\ 73\ ,\ 66\ ,\ 59\ ,\ ...$

بطرحِ أيِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ ينقصُ عنِ الحدِّ السابقِ بمقدارِ 7، إذنْ تتناقصُ المتتاليةُ بمقدارِ 7، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$80\ ,\ 73\ ,\ 66\ ,\ 59\ ,\ 52\ ,\ 45\ ,\ 38\ ,\ ...$$

$-7 \quad -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7$

4 $\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{27}\ ,\ \frac{1}{81}\ ,\ ...$

بقسمةِ أيِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ، أَجِدُ أنَّ كلَّ حدٍّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروبًا في الحدِّ السابقِ لهُ، إذنْ تتضاءلُ المتتاليةُ بمقدارِ $\frac{1}{3}$، والحدودُ الثلاثةُ التاليةُ هيَ:

$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{27}\ ,\ \frac{1}{81}\ ,\ \frac{1}{243}\ ,\ \frac{1}{729}\ ,\ \frac{1}{2187}\ ,\ ...$$

$\times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3}$

أتذكّرُ

يُمكِنُ التعبيرُ عنِ المتتاليةِ: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...$ في صورةِ:

$\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$

$\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$

$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$

$\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$

أتحقّقُ من فهمي

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, ...$

b) $5 , 10 , 20 , 40 , ...$

c) $150 , 141 , 132 , 123 , ...$

d) $400, 200, 100, 50, ...$

إجابة أتحقق من فهمي 1:

a) $\frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{17}{2}, ...$

b) $80 , 160 , 320 , ...$

c) $114 , 105 , 96 , ...$

d) $25 , 12.5 , 6.25 , ...$

مثال إضافي

- جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية ممّا يأتي:

1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$

2) $0.1 , 0.01 , 0.001 , 0.0001 ...$

الحل:

1) $\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, ...$

2) $0.00001 , 0.000001 , 0.0000001 , ...$

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال (فرديًّا، أو ضمن مجموعات).
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة في حل الفرع الأول من بند (**أتحقق من فهمي**)، وذلك بإضافة العدد 2 إلى البسط فقط؛ أي اعتبار الحد العام لمتتالية $T(n) = \frac{n+2}{2}$؛ لذا صحِّح لهم ذلك بتعويض $n = 1$ في الحد العام؛ للتأكُّد أن الناتج ليس الحد الأول، وذكِّرهم بأن المتتالية تنتج من إضافة العدد $\frac{3}{2}$ كل مرَّة؛ أي إن الحد العام هو: $T(n) = n + \frac{3}{2}$

مثال 2

- أخبر الطلبة أنه يمكن إكمال حـــدود المتتالية إذا عُلِم حدها العام الذي يربط كل حد برتبته.
- وضِّح للطلبـــة كيف يمكن إيجاد الحد مـــن رتبته إذا عُلِمت قاعدة الحد العام للمتتاليـــة، مُقدِّمًا مزيدًا من الأمثلة؛ للتأكُّد أن الطلبة يمتلكون المهارة المطلوبة.
- أخبر الطلبـــة بأهمية وجـــود علاقة تربـــط بين الحد ورتبتـــه؛ وذلك لإيجـــاد أي حد مـــن دون حاجة إلى إيجاد الحدود جميعها، وصولًا إلى الحد المطلوب.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخطئ الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط في التعويض بالحد العام للمتتالية بدءًا بالصفر؛ لذا أخبرهـم أن المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة جزئية منها.

إرشاد:

- ذكِّر الطلبة بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تُمثِّل الأعداد الصحيحة الموجبة.

تعلَّمْتُ في صفوفٍ ســابقةٍ **الحدَّ العامَّ** (n^{th} term) لمتتاليةٍ، الــذي يُمثِّلُ العلاقةَ بينَ أيِّ حدٍّ ورُتبتِهِ (n)، ويُرمَزُ إليْهِ بالرمزِ $T(n)$. يُســهِّلُ الحدُّ العامُّ إيجادَ أيِّ حدٍّ في المتتاليةِ باســتعمالِ رُتبتِهِ، مثلِ الحدِّ الذي رُتبتُهُ خمســونَ مثلًا. ويُمكِنُ تصنيفُ المتتاليةِ اعتمادًا على حدِّها العامِّ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ، وغيرِ ذلكَ.

مثال 2

أُبيِّنُ إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ المُعطى بجانبِ كلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثمَّ أُصنِّفُ المتتالياتِ إلى خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، أوْ أُسِّيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ في كلٍّ منْها:

1 $4, 7, 10, 13, \ldots, 3n+1$

أُعوِّضُ رُتبَ بعضِ الحدودِ في المقدارِ الجبريِّ المُعطى للتأكُّدِ أنَّها تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$\times 3$	3	$+1$	4
$n=2$	$\times 3$	6	$+1$	7
$n=3$	$\times 3$	9	$+1$	10
$n=4$	$\times 3$	12	$+1$	13

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ خطِّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ خطِّيٌّ.

لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ، أُعوِّضُ $n = 75$ في قاعدةِ الحدِّ العامِّ:

$$3(75)+1=226$$

2 $4, 7, 12, 19, \ldots, n^2+3$

أُعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ الحدودَ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n=1$	$(1)^2$	1	$+3$	4
$n=2$	$(2)^2$	4	$+3$	7
$n=3$	$(3)^2$	9	$+3$	12
$n=4$	$(4)^2$	16	$+3$	19

أتذكَّرُ

رُتبُ الحدودِ هيَ أعدادٌ صحيحةٌ موجبةٌ أُعوِّضُها في الحدِّ العامِّ للمتتاليةِ لتنتجَ حدودُها.

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تربيعيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تربيعيٌّ.

أعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$(75)^2 + 3 = 5628$

3 $2, 9, 28, 65, \dots, n^3 + 1$

أعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ				الحدُّ
$n = 1$	$(1)^3$	1	$+1$	2
$n = 2$	$(2)^3$	8	$+1$	9
$n = 3$	$(3)^3$	27	$+1$	28
$n = 4$	$(4)^3$	64	$+1$	65

إذنْ، المقـدارُ الجبـريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العـامَّ للمتتاليةِ، وهيَ تكعيبيـةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ تكعيبيٌّ. أعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$(75)^3 + 1 = 421876$

4 $2, 4, 8, 16, \dots, 2^n$

أعوِّضُ للتأكُّدِ أنَّ جميعَ الحدودِ تنتجُ منَ الحدِّ العامِّ:

رُتبةُ الحدِّ		الحدُّ
$n = 1$	$(2)^1$	2
$n = 2$	$(2)^2$	4
$n = 3$	$(2)^3$	8
$n = 4$	$(2)^4$	16

إذنْ، المقدارُ الجبريُّ المُعطى يُمثِّلُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ، وهيَ أُسِّيةٌ؛ لأنَّ الحدَّ العامَّ أُسِّيٌّ.

أعوِّضُ $n = 75$ في الحدِّ العامِّ لإيجادِ الحدِّ الخامسِ والسبعينَ:

$(2)^{75} = 3.777893186 \times 10^{22}$

أتذكَّرُ

الصورةُ العلميةُ لعددٍ ما هيَ كتابتُهُ في صورةِ: $A \times 10^n$، حيثُ: $1 \leq A < 10$، n: عددٌ صحيحٌ، علمًا بأنَّ الحدَّ الخامسَ والسبعينَ كُتِبَ بالصورةِ العلميةِ.

45

- بسِّـط للطلبة الفرع الرابـع باسـتعمال التحليل إلى العوامل.
- عند التعويض $n = 75$ في الحد العام للمتتالية الأسية باستعمال الآلة الحاسبة، ينتج عدد بالصورة العلمية؛ لذا ذكِّر الطلبة أنهم درسوها سابقًا.

إرشادات للمعلم

أرشـد الطلبة إلى اسـتخدام الآلة الحاسبة في حل الفرع الرابع من المثال 2.

مثال إضافي

- بيِّـن إذا كان المقـدار الجبري المعطـى بجانب كل متتاليـة ممّا يأتي يُمثِّل حدًّا عامًّـا لها أم لا، ثم صنِّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، أو أسية، ثم جد الحد الخامس والأربعين في كلٍّ منها:

1) $5, 5, 5, 5, \dots \; T(n) = 5$

2) $-1, 1, -1, 1 \dots \; T(n) = (-1)^n$

الحل:

1) $T(45) = 5$ الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي خطية.

2) $T(45) = -1$ الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي أسية.

أخطاء مفاهيمية:

- قد يخطئ بعض الطلبة من ذوي المسـتوى دون المتوسط أحيانًا عند إيجاد الحد العاشر – مثلًا– بمضاعفة الحد الخامس؛ لذا صحِّح لهم ذلك.

مثال 3

- ذكِّر الطلبة أن قاعـدة الحد العام للمتتالية مذكورة في المثـال 2، وأن هذا المثال يشـرح كيفية إيجاد قاعدة الحد العام لمتتاليـات خطية، وتربيعيـة، وتكعيبية، وأسية.
- ناقِش الطلبة فـي حلِّ المثـال 3، مُوضِّحًا لهم كيفية إيجاد الحد العام باسـتخدام المقادير الجبرية، وذلك باسـتخدام المتغير n للدلالة على رتبة الحد، والرمز $T(n)$ للدلالة على الحد نفسه.

مثال إضافي

- جد الحد العام لكل متتالية ممّا يأتي:

1) 5 , 9 , 13 , 17 , ...

2) 3 , 8 , 15 , 24 ...

3) 0 , 6 , 24 , 60 ...

4) 0 , 42 , 336 , 2394 ...

الحل:

1) $7n + 1$

2) $n^2 + 2n$

3) $n^3 - n$

4) $7^n - 7$

إرشاد:

- قد يتمكَّن بعض الطلبة من التعبير عن الحد العام لفظيًّا، من دون القدرة على التعبير عنه بالرموز؛ لذا سـاعد هؤلاء الطلبة على إتقان مهارة التعبير عن المقادير الجبرية باسـتعمال الرموز. فمثلًا، ثلاثة أضعاف عدد مضاف إليه 5 هي $3x+5$

أتحقق من فهمي

أُبيِّـنُ إذا كانَ المقـدارُ الجبـريُّ المُعطـى بجانبِ كلِّ متتاليـةٍ ممّا يأتي يُمثِّلُ حـدًّا عامًّا لها أمْ لا، ثـمَّ أُصنِّـفُ المتتاليـاتِ إلى خطِّيـةٍ، أوْ تربيعيـةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، أوْ أُسِّـيةٍ، ثـمَّ أَجِدُ الحـدَّ الخامسَ والسـبعينَ في كلٍّ منْها: انظر الهامش

a) $1 , 3 , 5 , 7 , ... , 2n-1$

b) $0 , 3 , 8 , 15 , ... , n^2 - 1$

c) $1.5 , 8.5 , 27.5 , 64.5 , ... , n^3 + 0.5$

d) $\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , ..., 2^{-n}$

يُمكِنُ إيجادُ الحدِّ العامِّ للمتتالياتِ التربيعيةِ والتكعيبيةِ والأُسِّيةِ بملاحظةِ العلاقةِ بينَ الحدودِ ورُتبِها.

مثال 3

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1 **5 , 12 , 19 , 26 , 33 , ...**

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتزايدُ بمقدارِ 7:

$$5 \underbrace{,}_{+7} 12 \underbrace{,}_{+7} 19 \underbrace{,}_{+7} 26 \underbrace{,}_{+7} 33 , \dots$$

يُمكِنُ مبدئيًّـا التعبيرُ عنِ المتتاليةِ بالحدِّ $7n$؛ لأنَّ تزايدَ حـدودِ المتتاليةِ بمقدارِ 7 في كلِّ مرّةٍ يُذكِّرُنـي بحقائقِ ضربِ العددِ 7، ولكنْ عندَ تعويضِ $n = 1$ ينتجُ العددُ 7، وهوَ أكبرُ منَ الحدِّ الأولِ بـ 2؛ لذا أطرحُ العددَ 2 منْ $7n$ ، وبذلكَ يصبحُ الحدُّ العامُّ: $T(n) = 7n - 2$.

2 **5 , 8 , 13 , 20 , 29 , ...**

أُلاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتالييْنِ غيرُ ثابتٍ. إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعٍ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها. أُلاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ.

أُفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ:

1	4	9	16	25 ... n^2
5	8	13	20	29 ... ?

بالنظـرِ إلى ناتجِ تربيعِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ، أُلاحِظُ أنَّهُ إذا أُضيفَ 4 إلى مُربَّعِ رُتبةِ الحدِّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ. وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n)= n^2 + 4$

إرشادٌ

يُمكِـنُ فهـمُ المتتاليةِ بصورةٍ أفضـلَ بتحليلِ حدودِها إلـى العواملِ الأوليةِ.

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية خطية.

b) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تربيعية.

c) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية تكعيبية.

d) الحد العام يُمثِّل المتتالية، وهي متتالية أسية.

3 $0 , 7 , 26 , 63 , 124 , \ldots$

ألاحِظُ أنَّ الفرقَ بينَ كلِّ حدَّيْنِ متتاليَيْنِ غيرُ ثابتٍ.

إذنْ، المتتاليةُ غيرُ ناتجةٍ منْ جمعِ (أوْ طرحِ) عددٍ ثابتٍ لحدودِها.

ألاحِظُ أيضًا أنَّ المتتاليةَ غيرُ ناتجةٍ منْ ضربِ حدودِها في عددٍ ثابتٍ، وأنَّها غيرُ ناتجةٍ منْ تربيعِ كلِّ حدٍّ.

أفسِّرُ المتتاليةَ عنْ طريقِ تكعيبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ n^3:

1	8	27	64	125 … n^3
0	7	26	63	124 … ?

ألاحِظُ أنَّهُ عندَ طرحِ 1 منْ مكعبِ رُتبةِ كلِّ حدٍّ تنتجُ المتتاليةُ المطلوبةُ.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $T(n) = n^3 - 1$

4 $11 , 12.1 , 13.31 , 14.641 , \ldots$

ألاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتضاعفُ بنسبةٍ ثابتةٍ؛ لأنَّ:

$$\frac{12.1}{11} = 1.1 \qquad \frac{13.31}{12.1} = 1.1 \qquad \frac{14.641}{13.31} = 1.1$$

منْ هذا التناسبِ بينَ الحدودِ المتتاليةِ، أستنتجُ أنَّهُ عندَ ضربِ كلِّ حدٍّ في 1.1 ينتجُ الحدُّ التالي.

وبذلكَ، فإنَّ الحدَّ العامَّ هوَ: $a \times (1.1)^n$، حيثُ a عددٌ ثابتٌ (لماذا؟).

لحسابِ a، أُعوِّضُ بالحدِّ العامِّ $n = 1$، وبمساواتِهِ معَ الحدِّ الأولِ في المتتاليةِ ينتجُ:

$$a(1.1)^1 = 11$$

$$a = \frac{11}{1.1} = 10$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = 10 \times (1.1)^n$

أتذكَّرُ

الصيغةُ العامةُ للاقترانِ الأُسِّيِّ: $y = a(b)^x$، حيثُ: a, b: عددانِ حقيقيانِ. $a \neq 0, b \neq 1 , b>0$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $8 , 15 , 22 , 29 , 36 , \ldots$

b) $4 , 7 , 12 , 19 , 28 , \ldots$

c) $-1, 6, 25, 62, 123, \ldots$

d) $0.2, 0.02, 0.002, 0.0002, \ldots$

تُستخدَمُ المتتالياتُ في العديدِ منَ التطبيقاتِ الحياتيةِ، مثلِ: التطبيقاتِ العلميةِ، والهندسيةِ، والتجاريةِ.

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) $7n + 1$ b) $n^2 + 3$

c) $n^3 - 2$ d) $2 \times (0.1)^n$

- اكتب على اللوح قاعدة الحد العام لكل فروع المثال 3، ثم اطلب إلى أحد الطلبة إيجاد أول أربعة حدود للمتتالية الأولى، بتعويض الأعداد 1,2,3,4، ثم اطلب إلى ثلاثة طلبة آخرين إيجاد أول أربعة حدود للمتتاليات الثانية، والثالثة، والرابعة؛ للتأكد أن كل حد عام يُمثِّل متتاليته.
- ناقِش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ حتى يتقنوا كتابة الحد العام للمتتالية باستخدام المقادير الجبرية، وإيجاد الحدود المطلوبة بالتعويض في القاعدة.
- وجِّه الطلبة في هذه الأثناء، مُقدِّمًا لهم التغذية الراجعة المناسبة.

تعزيز اللغة ودعمها

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: المتتالية Sequence، والحد term، والحد العام n^{th} term .

إرشادات:

- يُعَدُّ إيجاد الحد العام من أصعب التحديات التي يواجهها الطلبة؛ لذا اكتب خطوات الحل على نحوٍ مرتب ومتسلسل ومفهوم.
- اجعل الطلبة يعتادون على تحليل حدود المتتاليات إلى العوامل الأولية بوصف ذلك خطوة أُولى لإيجاد الحد العام.

مثال 4: من الحياة

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 4 الذي يُمثِّل موقفًا حياتيًّا تظهر فيه المتتاليات.
- وضِّح للطلبة أنَّه يمكن استعمال أي حد من حدود المتتالية مع رتبته لإيجاد قيمة الثابت a

تنويع التعليم

قد يواجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في فهم المثال 4؛ لذا قدِّم لهم المثال الآتي بوصفه مراجعة للاقتران الأسي.

مثال إضافي

يزداد سعر مُنتَج ما سنويًّا بحسب المعادلة: $y = c(1.05)^n$ ، حيث تُمثِّل c السعر قبل أن تطرأ عليه أي زيادة. إذا كان سعر المُنتَج بعد 3 سنوات 111.132 دينارًا، فجد:

1) قيمة الثابت c

2) سعر المُنتَج بعد 7 سنوات.

الحل:

1) 96 **2)** 122.52303

أخطاء مفاهيمية:

قد يخطئ بعض الطلبة عند تعويض $n = 5$ في الحد العام في المثال 4، وذلك بترك الناتج كما هو من دون تقريب إلى أقرب عدد صحيح؛ لذا نبِّههم إلى أن الناتج يُمثِّل عدد المنازل، وأنه لا يمكن أن يكون كسرًا.

مثال 4: من الحياة

طاقةٌ مُتجدِّدةٌ: يزدادُ عددُ المنازلِ التي تعتمدُ على الطاقةِ الشمسيةِ في توليدِ الكهرباءِ بإحدى المدنِ عامًا تلوَ الآخرِ كما يظهرُ في الجدولِ الآتي:

العامُ	1	2	3	4	5
عددُ المنازلِ	7000	9800	13720		

الطاقةُ المُتجدِّدةُ

حقَّقَ الأردنُّ إنجازاتٍ كبيرةً في مجالِ الطاقةِ المُتجدِّدةِ؛ إذْ بلغَتْ نسبةُ مساهمةِ الطاقةِ المُتجدِّدةِ 13% منَ الطاقةِ الكهربائيةِ المُولَّدةِ في المملكةِ نهايةَ عامِ 2019م، مقارنةً بـ 1% عامَ 2014م.

1 أَجِدُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ التي تُمثِّلُ عددَ المنازلِ.

أُلاحِظُ أنَّ حدودَ المتتاليةِ تتضاعفُ بنسبةٍ ثابتةٍ؛ لأنَّ:

$$\frac{9800}{7000} = 1.4 \qquad \frac{13720}{9800} = 1.4$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = a \times (1.4)^n$ ، حيثُ a عددٌ ثابتٌ.

لحسابِ a ، أُعوِّضُ بالحدِّ العامِّ $n = 1$، وبمساواتِهِ معَ الحدِّ الأولِ في المتتاليةِ ينتجُ:

$$a(1.4)^1 = 7000$$

$$a = \frac{7000}{1.4} = 5000$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = 5000 \times (1.4)^n$.

2 أَجِدُ عددَ المنازلِ التي تعتمدُ على الطاقةِ الشمسيةِ في توليدِ الكهرباءِ في العاميْنِ: الرابعِ، والخامسِ.

أُعوِّضُ القيمتيْنِ: $n = 4$، وَ $n = 5$ في الحدِّ العامِّ:

$T(4) = 5000 \times (1.4)^4 = 19208$ بتعويضِ $n = 4$ في الحدِّ العامِّ

$T(5) = 5000 \times (1.4)^5 = 26891.2$ بتعويضِ $n = 5$ في الحدِّ العامِّ

≈ 26891 بالتقريبِ إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ

أتحققُ من فهمي انظر الهامش

يتزايدُ سعرُ مُنتَجٍ سنويًّا كما يظهرُ في الجدولِ الآتي:

عددُ السنواتِ	1	2	3	4	5
السعرُ	15	22.5	33.75		

a) أَجِدُ الحدَّ العامَّ للمتتاليةِ التي تُمثِّلُ السعرَ السنويَّ للمُنتَجِ.

b) أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ.

تظهرُ المتتالياتُ أيضًا في كثيرٍ منَ الأنماطِ الهندسيةِ.

48

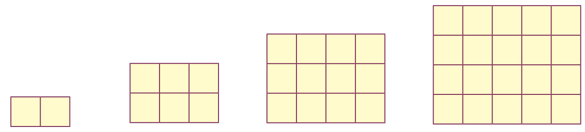
إجابة أتحقق من فهمي 4:

a) 50.625, 75.9375

b) $T(n) = 10 \times (1.5)^n$

مثال 5

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ المُربَّعاتِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



النموذجُ (1). النموذجُ (2). النموذجُ (3). النموذجُ (4).

بالنظرِ إلى النمطِ، أُلاحِظُ أنَّ عددَ المُربَّعاتِ يُشكِّلُ المتتاليةَ الآتيةَ: ... ,2, 6, 12, 20

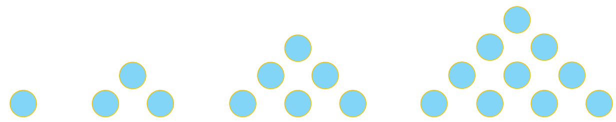
بالنظرِ إلى الحدودِ الأولى منَ المتتاليةِ، أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ فيها يساوي حاصلَ ضربِ رُتبَتِهِ في رُتبةِ الحدِّ الذي يليهِ:

$$\underset{1\times 2}{2}\ ,\ \underset{2\times 3}{6}\ ,\ \underset{3\times 4}{12}\ ,\ \underset{4\times 5}{20}\ ,\ \dots$$

إذنْ، الحدُّ العامُّ هوَ: $T(n) = n(n+1) = n^2 + n$

أتحقق من فهمي انظر الهامش

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ عددُ الدوائرِ في نماذجِهِ متتاليةً. أَجِدُ الحدَّ العامَّ لهذهِ المتتاليةِ.



1 3 6 10

أبحثُ

تُسمّى الأعدادُ 1, 3, 6, 10 أعدادًا مثلثيةً. لماذا؟

أتدرب وأحل المسائل

أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1) $6, 11, 16, 21, \dots$
26, 31, 36

2) $-1, 6, 13, 20, \dots$
27, 34, 41

3) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$
5.5, 6.5, 7.5

4) $-8, -7, -6, -5, \dots$
$-4, -3, -2$

5) $-2, 1, 6, 13, \dots$
22, 33, 46

6) $4, 16, 36, 64, \dots$
100, 144, 196

7) $7, 14, 33, 70, \dots$
131, 222, 349

8) $-11, -4, 15, 52, \dots$
113, 204, 331

9) $5, 40, 135, 320, \dots$
625, 1080, 1715

10) $3, 9, 27, 81, \dots$
243, 729, 2187

11) $\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \frac{1}{216}, \frac{1}{1296}, \dots$
$\frac{1}{7776}, \frac{1}{46656}, \frac{1}{279936}$

12) $2.6, 3.38, 4.394, 5.7122, \dots$
7.42586, 9.653618, 12.5497034

إجابة أتحقق من فهمي 5:

$$T(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

مثال 5

- ناقِش الطلبة في حلِّ المثال 5 على اللوح، وتدرَّج معهم في إيجاد قاعدة الحد العام للمتتالية التي يُشكِّلها عدد المربعات في النمط الهندسي الوارد في المثال؛ وذلك باتباع ما يأتي:
  - » تحليل الحدود إلى العوامل الأولية.
  - » ملاحظة ناتج ضرب رتبة الحد نفسه في رتبة الحد الذي يليه.

تنويع التعليم

وضِّح للطلبة أنه يمكن حل المثال 5 بطريقة أُخرى، وذلك بتمثيل كل حد بأنه عدد أضلاع المربعات الأفقية مضروبًا في عدد أضلاع المربعات العمودية.

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها.
- تجوَّل بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا، وقدِّم لهم التغذية الراجعة.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاختر طالبًا تمكَّن من حل المسألة، واطلب إليه كتابة حله على اللوح.

أَجِدُ أولَ خمسةِ حدودٍ لكلِّ متتاليةٍ مُعطى حدُّها العامُّ في ما يأتي، ثمَّ أُصنِّفُها إلى متتاليةٍ خطِّيةٍ، أوْ تربيعيةٍ، أوْ تكعيبيةٍ، أوْ أُسِّيةٍ:

13) $n + 3$
خطية : 4,5,6,7,8.

14) $3n - 1$
خطية : 2,5,8,11,14.

15) $4n + 5$
خطية : 9,13,17,21,25.

16) $n^2 - 1$
تربيعية : 0, 3, 8, 15, 24.

17) $n^2 + 2$
تربيعية : 3,6,11,18,27.

18) $200 - n^2$
تربيعية 199,196,191,184,175.

19) $n^3 + 1$
تكعيبية : 2,9,28,65,126

20) $\frac{n^3}{2}$
تكعيبية : 0.5,4,13.5,32,62.5.

21) $3n^3 - 1$
تكعيبية : 2,23,80,191,374.

22) 6^n
أسية : 6,36,216,1296,7776.

23) 8×2^n
أسية : 16,32,64,128,256.

24) 5×3^n
أسية : 15,45,135,405,1215.

أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

25) $21, 24, 27, 30, 33, \ldots$
$T(n) = 3n + 18$

26) $1, 9, 17, 25, 33, \ldots$
$T(n) = 8n - 7$

27) $10, 13, 18, 25, 34, \ldots$
$T(n) = n^2 + 9$

28) $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \ldots$
$T(n) = 0.5n^2 - 3$

29) $6, 13, 32, 69, 130, \ldots$
$T(n) = n^3 + 5$

30) $1, 15, 53, 127, 249, \ldots$
$T(n) = 2n^3 - 1$

31) $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$
$T(n) = 1.5(2)^n$

32) $120, 60, 30, 15, \ldots$
$T(n) = 240(0.5)^n$

33) $80, 100, 125, \ldots$
$T(n) = 64(1.25)^n$

يُمثِّلُ الجدولُ الآتي نظامَ المعادلاتِ الذي تستعملُهُ إحدى الشركاتِ لإيجادِ تكلفةِ نقلِ n وحدةً بالدينارِ الأردنيِّ:

قيمةُ n	التكلفةُ بالدينارِ الأردنيِّ
$n \leq 5$	$c = 40n + 50$
$6 \leq n \leq 10$	$c = 40n + 25$
$n \geq 11$	$c = 40n$

34) أَجِدُ تكلفةَ نقلِ 7 وحداتٍ. 305

35) أَجِدُ تكلفةَ نقلِ 15 وحدةً. 600

36) أَجِدُ عددَ الوحداتِ التي نقلتْها الشركةُ لقاءَ مبلغِ 170 دينارًا. 3

37) تستعملُ شركةٌ منافسةٌ المعادلةَ: $c = 50n$ لإيجادِ تكلفةِ نقلِ الوحداتِ بالدينارِ الأردنيِّ، بِغَضِّ النظرِ عنْ عددِها.
أَجِدُ عددَ الوحداتِ التي تتساوى فيها التكلفةُ في الشركتيْنِ. $n = 5$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة الثانية عشرة من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.
- في اليوم التالي، اطَّلِع على حلول الطلبة، وناقِشهم في أي صعوبات واجهوها في أثناء الحل.

مهارات التفكير العليا

- أشرِك الطلبة كافةً في حل هذه المسائل؛ لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.
- تذكَّر أنه ليس شرطًا أن يتمكَّن الطلبة كافةً من حل المسائل جميعها، وإنَّما يتعيَّن عليهم أن يحاولوا حلها.
- اطلب إلى الطلبة حل المسائل في بند (**مهارات التفكر العليا**) ضمن مجموعات، ثم اطلب إلى افراد بعضها توضيح كيفية توصُّلهم إلى الحل في كل مسألة، وامنح بقية الطلبة فرصة نقد حلول زملائهم وتقويمها.
- شجِّع الطلبة على تبرير حلولهم.

5 الإثراء

- وجِّه الطلبة إلى البحث في شبكة الإنترنت أو مكتبة المدرسة عن تطبيقات حياتية للمتتاليات، مثل المثال الوارد في بند الاستكشاف بداية الدرس.

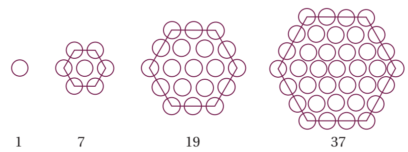
- وجِّه الطلبة إلى البحث عن أسماء بعض المتتاليات المشهورة، وذكر تطبيق حياتي عليها، مثل متتالية فيبوناشي (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,...) إذ يُعَدُّ عدد الحلزونات الظاهرة في أثناء نمو زهرة الكاميليا من أفضل التطبيقات على هذه المتتالية.
- نبِّه الطلبة على ضرورة توثيق المعلومة دائمًا.

6 الختام

- اطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:
  - » ما مجال المتتاليات؟
  - » ما مداها؟
  - » ما العلاقة بين المتتاليات والاقترانات؟
  - » أيهما تُعَدُّ حالة خاصة من الأُخرى: الاقترانات من المتتاليات أم المتتاليات من الاقترانات؟ لماذا؟

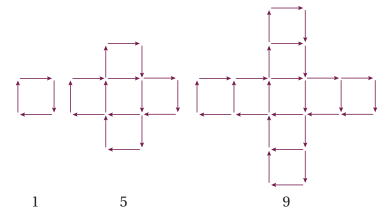
أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلٍّ منَ الأنماطِ الهندسيةِ الآتيةِ:

38



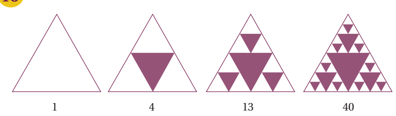
$T(n) = 3n^2 - 3n + 1$

39



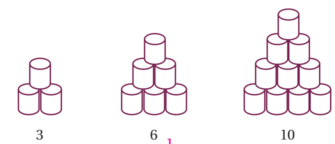
$T(n) = 4n - 3$

40



$T(n) = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

41



$T(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

مهارات التفكير العليا

42 **تحدٍّ**: إذا كانَ الحدُّ العامُّ للمتتاليةِ: ... ,70 ,48 ,30 ,16 ,6 هوَ: $T(n) = an + bn^2$، حيثُ a, b عددانِ حقيقيانِ، فأَجِدُ قيمَ a, b. $a = 4, b = 2$

43 **تحدٍّ**: أَجِدُ أولَ ثلاثةِ حدودٍ لمتتاليةٍ خطِّيةٍ، مجموعُها 12، وحاصلُ ضربِها 28   1, 4, 7

44 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أَجِدُ أربعَ متتالياتٍ تبدأُ بـِ 1، بحيثُ تكونُ الأولى خطِّيةً، والثانيةُ تربيعيةً، والثالثةُ تكعيبيةً، والرابعةُ أُسِّيةً.

$T(n) = 2n - 1$ خطية، $T(n) = 2n^2 - 1$ تربيعية، $T(n) = 2n^3 - 1$ تكعيبية، $T(n) = 2^n - 1$ أسية، تُقبَل أي أربع متتاليات تبدأ بالعدد 1، وتكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية، والرابعة أسية.

45 **أيُّها لا ينتمي**: أُحدِّدُ المتتاليةَ المختلفةَ عنْ غيرِها في ما يأتي:

2 , 8 , 18 , ...	1 , 4 , 9 , ...
4 , 7 , 12 , ...	2 , 16 , 54 , ...

المتتالية تكعيبية، والمتتاليات الأُخريات كلها تربيعية.

التقويم الختامي:

- راجع الطلبة في الأفكار الأساسية لدروس الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعــات، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة حل جزء من الأســئلة، ثم عرض إجاباتهم أمام الزملاء.
- عيِّن بعض الأســئلة ليحلها الطلبة واجبًــا منزليًّا، ثم ناقِشهم في إجاباتها في اللقاء التالي.
- الفت انتباه الطلبة إلى أنَّ الأســئلة (26–23) وردت ضمن الاختبارات الدولية، أو هي مسائل مشابهة لها.

ملحوظـة: تُخصَّــص حصتان (90 دقيقــة) للإجابة عن أسئلة الاختبار.

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 الحدُّ العامُّ (T_n) للمتتاليةِ: $2, 6, 18, 54, \ldots$ هوَ:

a) $T_n = 2 \times 3^n$ b) $T_n = 2 \times 3^{n-1}$
c) $T_n = 6 \times 3^n$ d) $T_n = 6 \times 3^{n-1}$

2 إذا كانَ $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$، فإنَّ قيمةَ $f(-2)$ هيَ:

a) -22 b) -15
c) 9 d) 29

3 إذا كانَ $f(x)=2x^3-4x^2+6,\ g(x)=5x^2-7x+4$، فإنَّ ناتجَ $f(x) - g(x)$ هوَ:

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$
c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$
d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كانَ $g(x)$ كثيرَ حدودٍ منَ الدرجةِ السادسةِ، وَ $h(x)$ كثيــرَ حدودٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، فإنَّ درجةَ ناتجِ قســمةِ $g(x)$ على $h(x)$ هيَ:

a) الأولى. b) الثالثةُ.
c) الرابعةُ. d) الثامنةُ.

5 إذا كانَ $f(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2 - 2$، فــإنَّ قيمةَ $(g \circ f)(3)$ هيَ:

a) 4 b) 7
c) 14 d) 16

6 إذا كانَ $f(x) = 8 - 2x$، فإنَّ قيمةَ $f^{-1}(4)$ هيَ:

a) 0 b) -6 c) -2 d) 2

7 خطُّ التقاربِ الأفقيِّ للاقترانِ $r(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4} + 7$ هوَ:

a) $y = 0$ b) $y = 7$
c) $y = 4$ d) $y = -1$

8 الحدُّ العاشرُ في المتتاليةِ $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ هوَ:

a) 90 b) 95
c) 97 d) 99

9 مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x-3}{x^2 - 3x - 10}$ هوَ:

a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$
b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$
c) $\{x \mid x \neq 5\}$
d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

10 إذا كانَ $f(x)=2x^2-4x+1,\ g(x)=6x^3-7x+3$، فأَجِدُ $x^2 f(x) + g(x)$ $2x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 3$

11 إذا كانَ $h(x) = 3x^2 - 4x,\ j(x) = 4x^3 + 2x + 5$، فأَجِدُ $h(x) \cdot j(x)$ $12x^5 - 16x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 20x$

12 أَقْسِمُ $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$

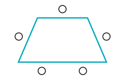
$8x^3 + 12x - 5 = 4x^2 - 6x + 15 + \frac{-50}{2x+3}$

13 أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لمنحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{4}{2-x}$، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ، ومداهُ.

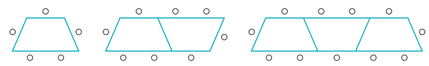
انظر ملحق الإجابات

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

يوجدُ في قاعةِ طعامِ إحدى المدارسِ طاولاتٌ على شكلِ شبهِ منحرفٍ. وكلُّ طاولةٍ تتَّسِعُ لخمسةِ طلبةٍ كما في الشكلِ الآتي:



لاحظَ مُشرِفُ القاعةِ أنَّ عددَ الطلبةِ يتغيَّرُ تبعًا لعددِ الطاولاتِ المُلاصِقِ بعضُها لبعضٍ كما في الشكلِ الآتي:



1 2 3

14 أملأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ في الجدولِ الآتي:

عددُ الطاولاتِ المُتلاصِقةِ	1	2	3	4	5
عددُ الطلبةِ	5	8	11	14	17

15 أَجِدُ الحدَّ العامَّ. $T(n) = 3n + 2$

16 ما عددُ الطلبةِ الذينَ يُمكِنُهُمُ الجلوسُ حولَ 13طاولةً مُتلاصِقةً؟ 41

17 تنوي إدارةُ المدرسةِ عملَ حفلٍ لـ 200 طالبٍ. كمْ طاولةً مُتلاصِقةً تَلزمُ لذلكَ؟ 66 طاولة

إذا كانَ $f(x) = 4x - 3,\ g(x) = \frac{1}{x+1} + 2,\ x \neq -1$ ، فأَجِدُ: 21–18) انظر ملحق الإجابات

19 $(f \circ f)(x)$ 18 $g^{-1}(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

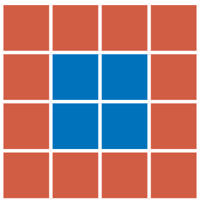
21 أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$ ، مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ منْ: $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$.

22 يبيعُ محلُّ عصائرَ ما مُعدَّلُهُ 3500 علبةِ عصيرٍ أسبوعيًّا، سعرُ الواحدةِ منْها 0.75 قرشًا. وجدَ صاحبُ المحلِّ أنَّ مبيعاتِهِ ستقلُّ 100 علبةٍ مُقابِلَ كلِّ زيادةٍ مقدارُها 0.05 دينارٍ على سعرِ العلبةِ. أكتبُ اقترانًا يُمثِّلُ الدخْلَ الأسبوعيَّ للمحلِّ إذا طُبِّقَتِ الزيادةُ على السعرِ x مرَّةً، ثمَّ أَجِدُ السعرَ الذي يُحقِّقُ للمحلِّ أعلى دخْلٍ أسبوعيٍّ.
انظر ملحق الإجابات

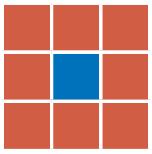
تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

23 في بيتِ خضرٍ بركةُ سباحةٍ مستطيلةٌ، بُعْداها 13 m, 8 m، وقدْ أرادَ أنْ يُحيطَ بها ممرًّا منتظمًا بحيثُ تصبحُ المِساحةُ الإجماليةُ لسطحِ البركةِ والممرِّ معًا $176\ m^2$، ما عرضُ الممرِّ؟
عرض الممر هو: 1.5 m

رتَّبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءَ وزرقاءَ كما في الشكليْنِ الآتيينِ:



الشكلُ (2).



الشكلُ (1).

24 إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراءِ في الشكلِ n؟ عدد البطاقات الحمراء في الشكل رقم n هو: $4n+4$

25 ما عددُ البطاقاتِ الزرقاءِ فيهِ؟ عدد البطاقات الزرقاء في الشكل نفسه هو: n^2

26 استعملَتْ فدوى 64 بطاقةً لتكوينِ أحدِ أشكالِ هذا النمطِ. كمْ عددُ كلٍّ منَ البطاقاتِ الحمراءِ والزرقاءِ المُستعمَلةِ؟ عدد البطاقات الزرقاء هو: 36
عدد البطاقات الحمراء هو: 28

53

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

يتقدَّم طلبة الصفين: الرابع والثامن في المدارس الأردنية إلى اختبار (TIMSS): كل أربع سنوات. ويهدف هذا الاختبار إلى قياس مستوى تقدم الطلبة في التحصيل الدراسي في مادتي الرياضيات والعلوم. ولهذا الاختبار أهمية في تقييم جودة التعليم في الأردن مقارنةً بالدول الأُخرى التي يتقدَّم طلبتها لهذا الاختبار، والمساعدة على رسم السياسة التربوية على المستوى الوطني بما يخدم تطوير النظام التربوي، والارتقاء بنوعية مخرجاته.

يتقدَّم أيضًا طلبة الصف العاشر في الأردن لاختبار البرنامج الدولي لتقييم أداء الطلبة PISA)

The Program for International Students Assessment: في مجالات القراءة، والرياضيات، والعلوم. وفي ما يخص الرياضيات، فإن المعرفة الرياضية – وفق هذا البرنامج– يُعبَّر عنها بمدى قدرة الفرد على صياغة الرياضيات، وتوظيفها، وتفسيرها في أوضاع مختلفة؛ إذ تتضمن القدرة على التفكير الرياضي، واستعمال المفاهيم والإجراءات والحقائق والأدوات لوصف الظواهر، والتنبُّؤ بها. وهي تسعى لمساعدة صانعي القرارات وراسمي السياسات التربوية في الدول المشاركة على تحديد معايير حقيقية وواقعية لأداء نظمها التربوية، وتُعِينهم على تقييم النجاحات أو الإخفاقات، علمًا بأن الأردن يشارك في دورات هذه الدراسات والبرامج بانتظام منذ أوائل تسعينيات القرن العشرين.

يتعيَّن عليك – عزيزي المعلِّم– تشجيع الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وتضمين امتحاناتك المدرسية نوعية هذه الأسئلة.

الدرسُ 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ، ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ: 8–1) انظر ملحق الإجابات

1 $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$

2 $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$

3 $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$

4 $j(x) = \sqrt{x^2 + 16} - 4x$

أُمثِّلُ بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5 $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \le x \le 3$

6 $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \le x \le 2$

7 $g(x) = 12 - 4x - x^2$

8 $h(x) = (2x-5)^2 - 10$

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$، وَ $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$، وَ $h(x) = 2x - 4$، فأَجِدُ ناتجَ ما يأتي:

9 $f(x) + g(x)$
$-3x^3 + 7x^2 + 5x - 8$

10 $f(x) - g(x)$
$-5x^3 - 3x^2 + 5x + 6$

11 $g(x) - x(h(x))$
$x^3 + 3x^2 + 4x - 7$

12 $h(x) \cdot f(x)$
$-8x^4 + 20x^3 + 2x^2 - 22x + 4$

13 $(h(x))^2 + f(x)$
$-4x^3 + 6x^2 - 11x + 15$

14 $f(x) \cdot g(x)$
$-4x^6 - 18x^5 + 15x^4 + 52x^3 - 19x^2 - 35x + 7$

15 هلِ العددُ 2− صفرٌ للاقترانِ $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$؟ أُبرِّرُ إجابتي.
نعم ، لأن $f(-2) = -16 + 40 - 14 - 10 = 0$

16 أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$
$(x-1)^2(x-1-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$

17 لدى مُزارعٍ 24 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يُسيِّجَ بِهِ حظيرةً مستطيلةً لدواجنِهِ؛ على أنْ يجعلَ جدارَ مخزنٍ في مزرعتِهِ أحدَ جوانبِ الحظيرةِ منْ دونِ سياجٍ. ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ التي يُمكِنُ تسييجُها بهذا السياجِ؟ انظر ملحق الإجابات

18 يزيدُ ارتفاعُ أسطوانةٍ 3 وحداتٍ على طولِ نصفِ قُطْرِ قاعدتِها. أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ حجمِ الأسطوانةِ بدلالةِ x إذا كانَ طولُ نصفِ قُطْرِ قاعدتِها $(2x+1)$ وحدةً.
(حجمُ الأسطوانةِ التي نصفُ قُطْرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها h، هوَ $V = \pi r^2 h$).
$V(x) = \pi(2x+1)^2(2x+4) = \pi(8x^3 + 24x^2 + 18x + 4)$

الدرسُ 2

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5; h(x) = x + 4$ الناتج $2x^2 - 12x + 36$، والباقي -139

2 $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12; h(x) = 2x^2 - 5x + 2$ الناتج $2x^2 + 2x + 3$ ، والباقي $2x + 6$

3 أَجِدُ قيمةَ k بحيثُ يكونُ باقي قسمةِ $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هوَ 8

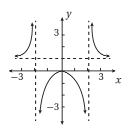
4 أَجِدُ قيمةَ c بحيثُ يكونُ $h(x) = x - 3$ أحدَ عواملِ $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$ 6–3) انظر ملحق الإجابات

أَجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلِّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأُمثِّلُهُ بيانيًّا، ثمَّ أَجِدُ مجالَهُ ومداهُ:

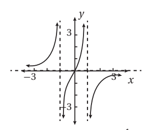
5 $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$

6 $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أَجِدُ المجالَ والمدى وخطوطَ التقاربِ لكلٍّ منَ الاقترانيْنِ المُمثَّليْنِ بيانيًّا في ما يأتي:

7 

10–7) انظر ملحق الإجابات

8 

أَجِدُ المجالَ والمدى لكلٍّ ممّا يأتي:

9 $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$

10 $j(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

يُعطى تركيزُ مضادٍّ حيويٍّ (بالميليغرامِ لكلِّ ديسيلترٍ) في دمِ مريضٍ بعدَ t ساعةً منْ تناولِهِ بالاقترانِ: $C(t) = \frac{50t}{t^2 + 25}$:

11 أَجِدُ تركيزَ هذا المضادِّ بعدَ 5 ساعاتٍ منْ تناولِهِ.

15–11) انظر ملحق الإجابات

12 متى يكونُ تركيزُ هذا المضادِّ 4 mg/dL؟

نُقِلَتْ فصيلةٌ نادرةٌ منَ الحشراتِ إلى محميةٍ خاصةٍ لمنعِ انقراضِها. وقدْ بلغَ عددُ أفرادِ هذهِ الفصيلةِ بعدَ t شهرًا منْ نقلِها $P(t) = \frac{72(1+0.6t)}{3+0.02t}$:

13 كمْ كانَ عددُ الحشراتِ عندَ نقلِها إلى المحميةِ؟

14 كمْ سيبلغُ عددُها بعدَ 30 شهرًا منْ نقلِها؟

15 بعدَ كمْ شهرٍ سيصلُ عددُها إلى 558 حشرةً؟

الدرسُ 3

تركيبُ الاقتراناتِ

أَجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مُستعمِلًا القيمَ المُبيَّنةَ في الجدوليْنِ الآتيينِ:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	−1	0	3	8

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−7	−5	−3	−1	3	5	7

1 $(f \circ g)(1)$ -1

2 $(f \circ g)(-2)$ 7

3 $(g \circ f)(1)$ 8

4 $(g \circ f)(0)$ 0

5 $(g \circ g)(-1)$ -1

6 $(f \circ f)(-1)$ -7

إذا كانَ $f(x) = 2x + 1$، وَ $g(x) = 3x - 4$، فأَجِدُ:

7 $(f \circ g)(2)$ 5

8 $(f \circ g)(0)$ -7

9 $(f \circ g)(8)$ 41

10 $(g \circ f)(1)$ 5

11 $(f \circ g)(x)$ $6x - 7$

12 $(g \circ f)(x)$ $6x - 1$

إذا كانَ $k(x) = \frac{1}{x+1}$، وَ $h(x) = \frac{2}{x}$، فأَجِدُ:

13 $(h \circ k)(3)$ 8

14 $(k \circ h)(3)$ $\frac{3}{5}$

15 $(h \circ h)(6)$ 6

16 $(k \circ k)(-3)$ 2

17 $(k \circ h)(x)$

18 $(h \circ k)(x)$

23–17) انظر ملحق الإجابات

أَجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$، وَ $g(x)$، بحيثُ يكونُ $h(x) = (g \circ f)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

19 $h(x) = x^6 + 1$

20 $h(x) = 4(x+1)^2$

21 $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$

22 $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$

23 يرتبطُ سعرُ سلعةٍ مُعيَّنةٍ وعددُ الوحداتِ المبيعةِ منْها بالعلاقةِ $p = 100 - \frac{x}{4}, 0 \le x \le 400$، حيثُ p السعرُ بالدينارِ، وَ x عددُ الوحداتِ المبيعةِ. إذا كانَتِ التكلفةُ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً هيَ $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$، فأَجِدُ التكلفةَ C في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى السعرِ p، ثمَّ أَجِدُ التكلفةَ إذا كانَ سعرُ الوحدةِ الواحدةِ 19 دينارًا.

كتاب التمارين

الدرس 4
الاقترانُ العكسيُّ

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

إذا كانَ $g(x) = 80 - \frac{100}{1+x}$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(9)$ 70
2. $g(4)$ 60
3. $g^{-1}(70)$ 9
4. $g^{-1}(60)$ 4

5. إذا كانَ $f(x)$ اقترانَ واحدٍ لواحدٍ، وَ $f(3) = 8$، فماذا يُستنتَجُ منْ هذهِ المعطياتِ؟
يمكن استنتاج أن $f^{-1}(8) = 3$

6. إذا كانَ $f(x)$ يُمثِّلُ عددَ الوحداتِ المُنتَجةِ في x ساعةَ عملٍ لمُنتَجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $f^{-1}(2540)$؟
عدد ساعات العمل التي ينتج فيها 2540 وحدة.

أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلٍّ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: 7–16) انظر ملحق الإجابات

7. $f(x) = 3x - 5$
8. $f(x) = 4 - 7x$
9. $f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$
10. $f(x) = 5 - 9x^2, x \geq 0$
11. $f(x) = \frac{x}{2x+6}$
12. $f(x) = \frac{x}{8-4x}$
13. $f(x) = \sqrt{2x-1} + 3$
14. $f(x) = \sqrt{3x+2} - 5$
15. $f(x) = \sqrt[3]{3x-2} - 1$
16. $f(x) = \sqrt[3]{3-4x} + 1$

أُبيِّنُ إذا كانَ كلٌّ منَ الاقترانينِ $f(x)$، وَ $h(x)$ اقترانًا عكسيًّا للآخرِ أمْ لا:

17. $f(x) = 2x - 5, h(x) = 5x + 2$
18. $f(x) = \frac{2x}{3x+5}, \ h(x) = \frac{5x}{2-3x}$

17–21) انظر ملحق الإجابات

19. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{6+3x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$، وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

20. **هندسةٌ:** تُعطى مِساحةُ الدائرةِ بالاقترانِ $A(r) = \pi r^2$، حيثُ A المِساحةُ، وَ r نصفُ القُطْرِ. أُعبِّرُ عنْ r في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المِساحةِ A، ثمَّ أَجِدُ طولَ نصفِ قُطْرِ دائرةٍ مِساحتُها $250\ cm^2$

21. **فيزياءُ:** يُعطى زمنُ الدورةِ T ثانيةً لبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ $T(\ell) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيثُ ℓ طولُ البندولِ بالأمتارِ. أُعبِّرُ عنْ ℓ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ T، ثمَّ أَجِدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتِهِ 3 s

الدرس 5
المتتالياتُ

AWA2EL LEARN 2 BE

الوحدةُ 5: الاقتراناتُ

أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1. 4, 6, 8, 10, …
12,14,16
2. 3, 30, 300, 3000, …
30000,300000,3000000
3. 1, 4, 9, 16, …
25,36,49
4. 2, 4, 8, 16, …
32,64,128
5. 3, 10, 17, 24, …
31,38,45
6. 0, 4, 18, 48, …
100,180,294

أُصنِّفُ المتتالياتِ الآتيةَ إلى خطِّيةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ، ثمَّ أَجِدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلٍّ منْها:

7. $T(n) = 3n + 1$
خطية. 4, 7, 10 $T(20) = 61$
8. $T(n) = 2n^2 + 1$
تربيعية. 3, 9, 19 $T(20) = 801$
9. $T(n) = 3(2)^n - 5$
أسية. 1, 7, 19 $T(20) = 3145723$
10. $T(n) = n(n^2 + 1)$
تكعيبية. 2, 10, 30 $T(20) = 8020$

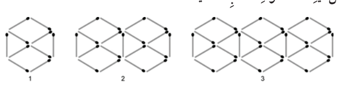
أَجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

11. 6, 11, 16, 21, 26, … $T(n) = 5n+1$
12. −4, 3, 22, 59, 120, … $T(n) = n^3 - 5$
13. 5, 15, 45, 135, … $T(n) = 5(3)^{n-1}$
14. 5, 11, 21, 35, 53, … $T(n) = 2n^2 + 3$

استثمرَ خالدٌ 20000 دينارٍ في مشروعٍ تجاريٍّ، وتوقَّعَ أنْ تبلغَ نسبةُ الربحِ منْهُ 15% سنويًّا:

15. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يُمثِّلُ قيمةَ استثمارِ خالدٍ بعدَ n منَ السنواتِ. $T(n) = 20000(1.15)^n$
16. أَجِدُ قيمةَ استثمارِ خالدٍ بعدَ 12 سنةً. 107005.0021

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ فيهِ عددُ أعوادِ الثقابِ متتاليةً:



17. أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ. انظر ملحق الإجابات
18. أَجِدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ. 181
19. ما أكبرُ مجموعةٍ منَ الأشكالِ السداسيةِ يُمكِنُ بناؤُها باستعمالِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟ 11

الدرس 1 ، إجابة أتحقق من فهمي 6:

افترض أن سعر البطاقة x دينارًا، حيث $x < 11$، فيكون مقدار التخفيض $(11 - x)$ دينارًا، وسيزيد عدد البطاقات المبيعة بمقدار $4000(11 - x)$، وبذلك يصبح عددها:

$(28000 + 4000(11-x))$، ويساوي الدخل $R(x)$ سعر البطاقة مضروبًا في عدد البطاقات:

$$R(x) = x(28000 + 4000(11-x))$$

$$= -4000x^2 + 72000x$$

الإحداثي x لرأس هذا القطع المكافئ هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-72000}{-8000} = 9$$

إذن، يكون الدخل أعلى ما يمكن إذا أصبح ثمن بطاقة الدخول 9 دنانير.

وأعلى دخل هو قيمة $R(x)$ عندما $x = 9$:

$$R(9) = -4000\,(9)^2 + 72000(9) = 324000$$

الدرس 1:

1) كثير حدود، صورته القياسية: $f(x) = -x + 4$، درجته 1، معامله الرئيس: -1، حده الثابت: 4

2) ليس كثير حدود؛ لأن فيه عاملًا أسه سالب (x الموجودة في المقام).

3) كثير حدود، صورته القياسية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$، ودرجته 2، ومعامله الرئيس: 12، وحده الثابت: -12

4) كثير حدود، صورته القياسية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$، ودرجته 3، ومعامله الرئيس: 5.3، وحده الثابت: 0

5) كثير حدود، صورته القياسية: $j(x) = -16t^2 + \sqrt{7}\,t$، ودرجته 2، ومعامله الرئيس: -16، وحده الثابت: 0

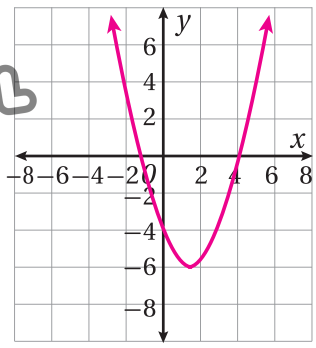
6) ليس كثير حدود؛ لأن فيه أسًا كسريًا.

7) ليس كثير حدود؛ لأن الأس فيه متغير، فهو اقتران أسي.

8) كثير حدود، صورته القياسية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$، ودرجته 7، ومعامله الرئيس: 1، وحده الثابت: 0

9)

x	-2	0	1.5	3	5
$y = f(x)$	6	-4	-6.25	-4	6

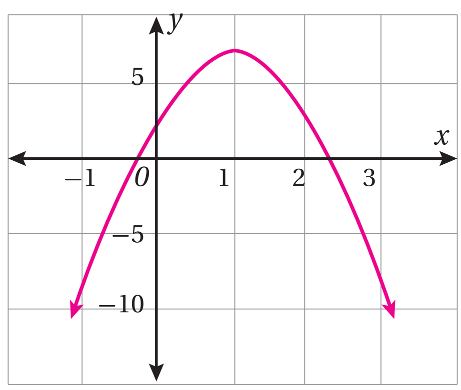


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \geq 6.25$، أو الفترة $[6.25, \infty)$.

10)

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-9	3	7	3	-9

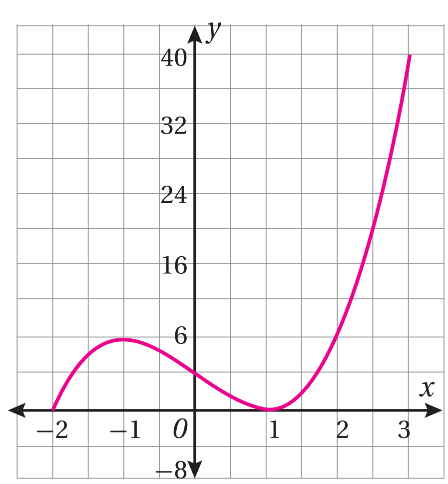


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \leq 7$، أو الفترة $(-\infty, 7]$.

11)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	8	4	0	8	40



المجال: $-2 \le x \le 3$ ، أو الفترة $[-2, 3]$

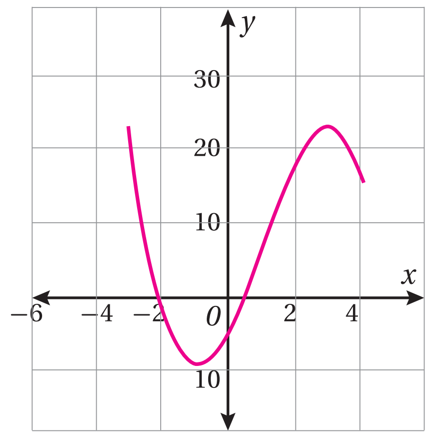
المدى: $0 \le y \le 40$، أو الفترة $[0, 40]$.

12)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	23	-2	-9	-4	7	18	23	16

المجال: $-3 \le x \le 4$ ، أو الفترة $[-3, 4]$

المدى: $-9 \le y \le 23$، أو الفترة $[-9, 23]$.



13) $h(x) + g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$

14) $g(x) - h(x) = -x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 10$

15) $f(x) \cdot h(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x - 6$

16) $x(f(x)) + h(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$

17) $(f(x))^2 - g(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$

18) $h(x) - x(g(x)) = 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - x - 6$

19) أقصى ارتفاع للصاروخ هو ارتفاعه عندما

$t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-229}{2(-4.9)} \approx 23.4$ ، وهو يساوي

$h(23.4) \approx 2910\ \text{m}$

20) ليكن عدد الأشجار x (حيث $x > 75$)، فيكون ما يجنيه من كل شجرة: $21 + 3(75 - x)$

المحصول الكلي: $P(x) = x(21 + 3(75 - x))$

$= 21x + 3x(75) - 3x^2$

$P(x) = -3x^2 + 246x$

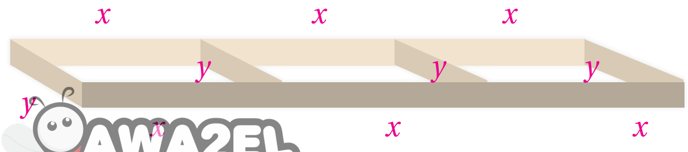
لهذا القطع المكافئ قيمة عظمى عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-246}{2(-3)} = 41$$

إذن، عدد الأشجار الذي يحقق أعلى محصول هو 41 شجرة في البستان.

أعلى محصول هو: $P(41) = 5043$

21) ليكن طول كل حظيرة x، وعرضها y، فيكون طول السياج الكلي للحظائر الثلاث:



$6x + 4y = 120$، ومنه ينتج أن:

$$y = \frac{120 - 6x}{4}$$

المساحة الكلية للحظائر الثلاث:

$$A = 3xy = 3x\left(\frac{120 - 6x}{4}\right)$$

$$A(x) = 90x - 4.5x^2$$

تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-9} = 10$$

إذن، أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظائر هي: $A(10) = 450\ \text{m}^2$

22) حجم ما تبقى من المكعب يساوي حجم المكعب الأصلي مطروحًا منه حجم التجويف.

حجم المكعب الأصلي هو $(2x + 1)^3$ ، وحجم التجويف هو $x^2(2x+1)$

إذا كان حجم الجزء المتبقي هو $R(x)$، فإن:

$R(x) = (2x + 1)^3 - x^2(2x + 1)$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + x^2) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

23) $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

24) كلتا الإجابتين غير صحيحة. لم يُغيِّر طه إشارات المطروح عندما حوَّل الطرح إلى جمع. وبالرغم من أن قاسمًا غيَّر إشارات المطروح، فإنه أخطأ في نتيجة جمع بعض الحدود المتشابهة. النتيجة الصحيحة لهذه العملية هي: $-2x^3 - 13x^2 - 9x + 3$

25) إجابة محتملة:

$f(x) = 2x - 1,\ h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f(x) \cdot h(x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

$= 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$

$= 8x^3 - 1$

26) لإيجاد الأصفار، تُحَل المعادلة: $f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$$

$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 1, x = 2, x = -2$$

إذن، أصفار هذا الاقتران هي: -2، 2، 1

27) إذا كانت درجة f أكبر من درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة f؛ أي الدرجة العليا. أمّا إذا كانت درجة f تساوي درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة كلٍّ منهما، أو تقل عنها؛ لأن ناتج جمع المعاملين الرئيسين قد يكون صفرًا. وأمّا درجة $f \cdot g$ فإنها تساوي دائمًا مجموع درجتي الاقترانين f, g

الدرس 2:

9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{x | x \neq 0\}$

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $\frac{1}{2}$ ؛ أي $\{x | x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1\}$

11) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

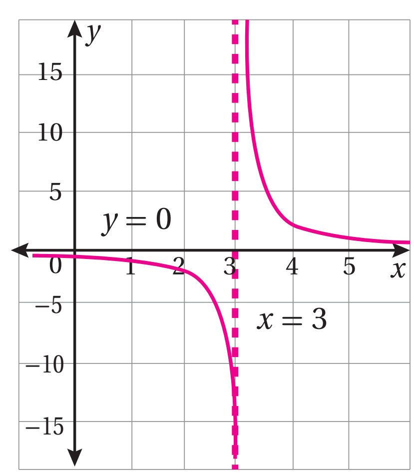
12)

x	-1	0	1	2	2.8	3.2	3.5	4	6
$y = f(x)$	-0.5	-0.67	-1	-2	-10	10	4	2	0.67

له خط تقارب رأسي هو $x = 3$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x \mid x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 أي $\{y \mid y \neq 0\}$



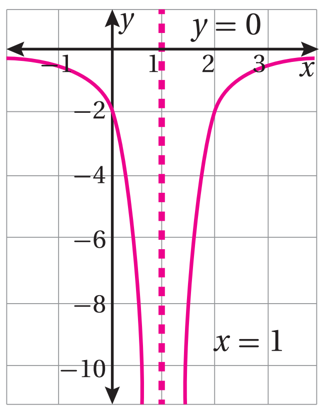
13)

x	-2	-1	0	0.5	1.5	2	3	4
$y = h(x)$	-0.22	-0.5	-2	-8	8	-2	-0.5	-0.22

له خط تقارب رأسي هو $x = 1$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1؛ أي $\{x | x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية السالبة؛ أي $\{y \mid y < 0\}$



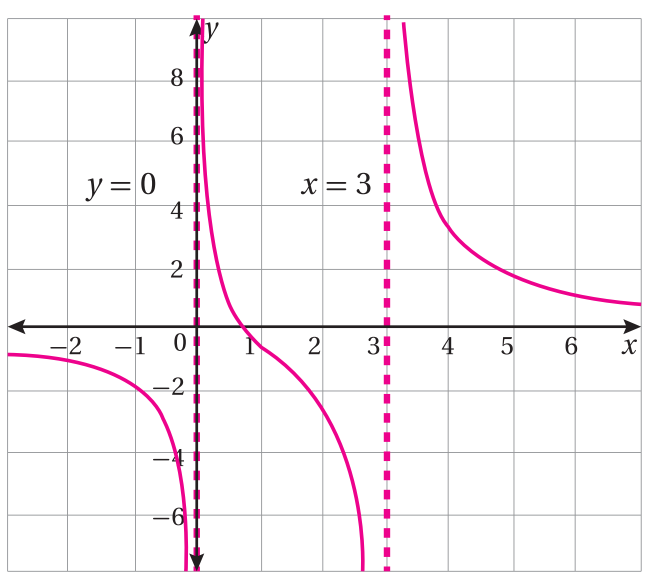
14)

x	-2	-1	-0.5	0.5	0.75	1	2.5	3.5	5
$y = w(x)$	-1.1	-1.75	2.9	0.8	0	-0.5	-5.6	6.3	1.7

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = 3, x = 0$ ، وله خط تقارب أفقي هو: $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $0, 3$ ؛ أي $\{x | x \neq 0, x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية.



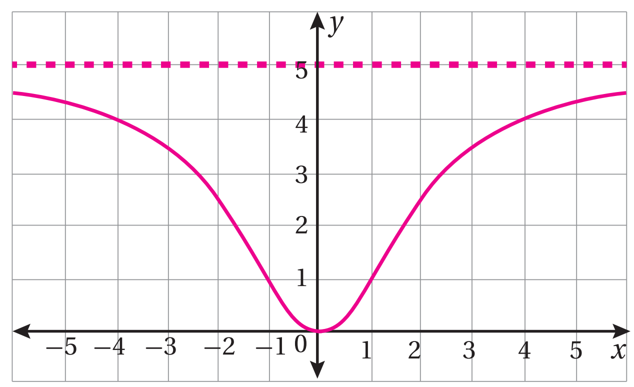
15) بقسمة البسط على المقام، يمكن كتابة الاقتران بالصورة:

$$g(x) = 5 + \frac{-20}{x^2+4}$$

إذن، لــه خط تقــارب أفقي هو $y = 5$، وليس لــه خطوط تقارب رأسية لعدم وجود أصفار حقيقية للمقام.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $0 \le y < 5$، أو الفترة $[0, 5)$.



x	-5	-2	-1	0	1	2	5
$y = g(x)$	4.3	2.5	1	0	1	2.5	4.3

17) عرض هذه الورقــة $(x+2)^2$، وهو أحد عاملي مســاحتها. فإذا قسمت المساحة على $(x+2)^2$، كان الباقي صفرًا.

باقــي قسـمة المســاحة علــى $(x+2)^2$، أو (x^2+4x+4) هو $(a-20)x$. وبمساواته بالصفر، ينتج أن $a = 20$

$$\begin{array}{r}
3x + 2 \\
x^2+4x+4 \overline{)\, 3x^3 + 14x^2 + ax + 8} \\
(-)\ 3x^3 + 12x^2 + 12x \\
\hline
2x^2 + (a-12)x + 8 \\
(-)\ 2x^2 + \ 8x \quad + 8 \\
\hline
(a-20)x
\end{array}$$

18) حجم البركة يساوي مساحة قاعدتها ضرب ارتفاعها.

ويمكــن حســاب الارتفــاع h بقسـمة الحجـم V علـى مساحة القاعــدة A:

$h = V \div A$

$h = (3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x) \div (3x^2 - 6x) = x^2 + x - 9 + 0$

إذن، ارتفاع البركة هو: $(x^2 + x - 9)$

19) الاقتران المختلف هــو $h(x) = \frac{9}{x^2+1}$ ؛ إذ ليس لمقامه أصفار وليس له خطوط تقارب رأســية. أمّا مقامات الاقترانات الأُخرى فلها صفر واحد أو أكثر؛ أي إن لها خط تقارب رأســي واحدًا على الأقل.

20) إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{1}{x^2+5x-14} + 3$، أو $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+5x-14} + 3$،

حيث a و b عددان حقيقيان؛ شرط أن يكون صفر المقدار $ax + b$ لا يساوي 7 أو -2

21) العامل المعطى $(x-1)^2$ هــو اقتران تربيعي، والاقتران المطلوب من الدرجــة الثالثة، فيكون العامــل الثاني اقترانـًـا خطيًّا بصورة $(ax + b)$.

وعليه، فإن:

$$f(x) = (x-1)^2(ax+b) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)\,x + b$$

من تقســيم $ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)\,x + b$ على $(x+2)$، ثم مساواة الباقي بـ 9، فتنتج المعادلة: $-18a + 9b = 9$

ومــن ثــم تقســيم $ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)\,x + b$ على $(x-3)$، ثم مساواة الباقي بـ 44، فتنتج المعادلة: $12a + 4b = 44$

وبقســمة طرفي المعادلة الأولى على 9، وطرفــي المعادلة الثانية على 4، وحل نظام المعادلتين:

$-2a + b = 1,\ 3a + b = 11$، فإن: $a = 2, b = 5$

إذن، الاقتران المطلوب هو: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$

الدرس 3:

9) $(a \circ b)(x) = a(x-7) = x - 7 + 4 = x - 3$

$(b \circ a)(x) = b(x+4) = x + 4 - 7 = x - 3$

$(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x) = x - 3$

10) $(f \circ g)(x) = f(3x+4) = 2^{3x+4}$

$(f \circ g)(-3) = 2^{3(-3)+4} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

11) $(g\circ f)(x) = 2(\frac{1}{x-4}) - 10 = \frac{2}{x-4} - 10\,(\frac{x-4}{x-4})$

$$= \frac{2-10x+40}{x-4}$$

$$= \frac{42-10x}{x-4}$$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{x | x \neq 4\}$

19) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{4}{3-\sqrt{x}}$ ، $g(x) = 4 + x^2$

أو $f(x) = \frac{4}{3-x}$ ، $g(x) = \sqrt{4+x^2}$، وغيرها.

20) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^3$ ، $g(x) = \frac{1}{2x-3}$

أو $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ، $g(x) = 2x - 3$، وغيرها.

21) مدى $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة، وهي غير موجودة في مجال $f(x)$؛ لأن مجال $f(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 2، فلا يمكن تكوين $f\circ g(x)$.

22) عندما $t = 2$ يكون طول نصف قطر الموجة:

$$r(2) = 25\sqrt{2+2}$$

$$= 50 \text{ cm}$$

مساحة الموجة تساوي $\pi(50)^2$، أو 7854 cm^2 تقريبًا.

23)

$$(N\circ T)(t) = N(T(t)) = 23(5t + 1.5)^2 - 56(5t + 1.5) + 1$$

$$= 575t^2 + 65t - 31.25$$

24) الزمن الذي يكون عنده عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية هو حل المعادلة الآتية:

$$575t^2 + 65t - 31.25 = 6752$$

$$575t^2 + 65t - 6783.25 = 0$$

$$t = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 + 4(575)(6783.25)}}{2(575)}$$

$$t = 3.38,\ t = -3.49$$

الإجابة السالبة مرفوضة (لا يكون الزمن سالبًا).

إذن، يكون عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية بعد 3.38 h من لحظة إخراج الطعام من الثلاجة.

25) $a = 4,\ b = -3$

26) $(f\circ g\circ h)(x) = f(g(x+3))$

$$= f(\frac{1}{x+3}) = (\frac{1}{x+3})^2 + 1 = \frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}$$

27) إجابة هدى صحيحة. عوضت وفاء x^2 مكان x في الحد الثاني من قاعدة $f(x)$، ونسيت 5

28) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^2 + 3$ ، $g(x) = x-2$

29) $(f\circ g)(x) = f\,(\frac{1}{x+2}) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = 1 \div (\frac{1}{x+2} - 3)$

$$= 1 \div \frac{1-3(x+2)}{x+2} = 1\times \frac{x+2}{-3x-5} = -\frac{x+2}{3x+5}$$

مجاله هو مجال $g(x)$ باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0؛ أي $x = -\frac{5}{3}$، فمجاله هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 و $-\frac{5}{3}$؛ أي $\{x \mid x \neq -2, x \neq = -\frac{5}{3}\}$

30)

$$(f\circ g)(x) = f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{3}\right)-2}{\frac{2x-1}{3}-1}$$

$$= \frac{\frac{4x-8}{3}}{\frac{2x-13}{3}} = \frac{4x-8}{2x-13}$$

$$(f\circ g)(x) = \frac{4x-8}{2x-13} = -4 \Rightarrow 4x-8 = -8x+52 \Rightarrow x = 5$$

الدرس 4:

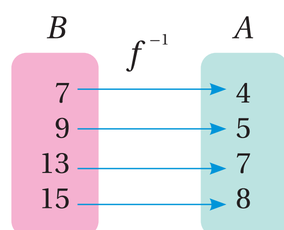
1) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

الزوجان الأول والثاني فيهما المسقط الثاني نفسه 6

2) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.

$$h^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (16, 2), (81, 3)\}$$

3) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.



4) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

العنصران -3 و 3 لهما الصورة نفسها 3

17) $(f\circ g)(x) = (-3+\sqrt{x-2}+3+2 = x-2+2 = x$

$(g\circ f)(x) = -3+\sqrt{(x+3)^2+2-2} = -3+(x+3) = x$

إذن، كل من الاقترانين $f(x), g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

18) $y = \frac{x}{x-1}$

$xy - y = x \Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y$

$x = \frac{y}{y-1}$

$y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} = f(x)$

يمكن إثبات أن $f(x)$ هو اقتران عكسي لنفسه ببيان أن:

$(f\circ f)(x) = x$

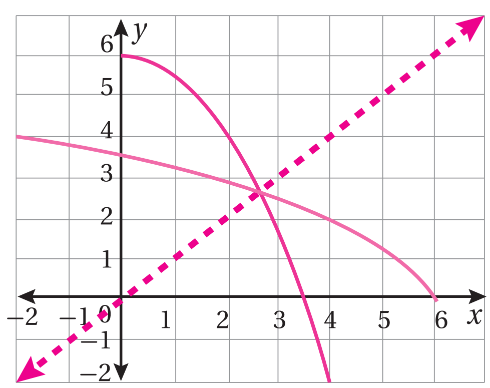
$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-1} \div \left(\frac{x}{x-1}-1\right) =$$

$$= \frac{x}{x-1} \div \frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{1} = x$$

20) رسم المستقيم $y = x$، ثم تعيين صور بعض النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$، مثل: $(0, 6)$ وانعكاسها $(6, 0)$، والنقطة $(4, -2)$ وانعكاسها $(-2, 4)$، والنقطة $(2, 4)$ وانعكاسها $(4, 2)$، ثم الوصل بينها بخط متصل، فينتج الشكل المجاور.

مجال $f(x)$: $0 \le x \le 4$ ، ومداه: $-2 \le x \le 6$

مجال $f^{-1}(x)$: $-2 \le x \le 6$، ومداه: $0 \le y \le 4$



21)

$$f(x) = x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4\ ,\ -3 \le x \le 1$$

$$y = (x-1)^2 + 4$$

$$y-4 = (x-1)^2$$

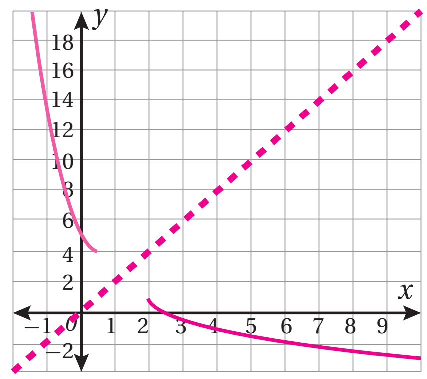
$$-\sqrt{y-4} = x-1$$

(أُخِذ الجذر السالب لأننا نتعامل هنا مع الجزء الأيسر من القطع المكافئ).

$$1-\sqrt{y-4} = x$$

$$y = 1-\sqrt{x-4}$$

مجال $f^{-1}(x)$: $4 \le x \le 20$، ومداه: $-3 \le y \le 1$



22)

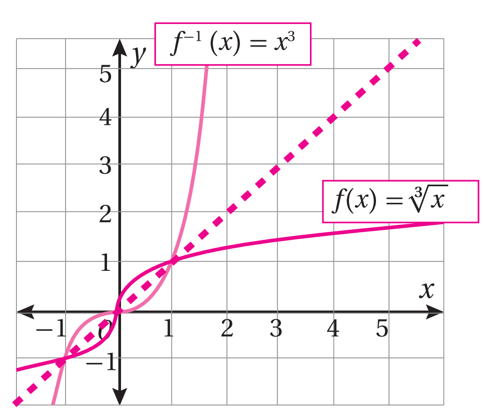
$$n(C) = \frac{100C-25}{0.6-C}\ ;\ n(0.5) = \frac{100(0.5)-25}{0.6-0.5} = \frac{25}{0.1} = 250 \text{ mL}$$

23) نعم؛ فالاقتران العكسي يُبيِّن كتلة الجسم بدلالة طول الزنبرك، وهو: $w = 2(l-3)$

24) $r(A) = -20 + \sqrt{\dfrac{A+800\pi}{2\pi}}$;

$$r(2000) = -20 + \sqrt{\frac{2000+800\pi}{2\pi}} \approx 6.8 \text{ cm}$$

25) $f^{-1}(x) = x^3$



26) بما أن للاقتران $f(x)$ صفرًا عندما $x = 3$، فإن منحنى $f(x)$ يمر بالنقطة $(3, 0)$؛ لذا فإن منحنى الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ يمر بالنقطة $(0, 3)$.

27) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$g(x) = 9x+7\ ,\ g^{-1}(x) = \frac{x-7}{9}$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g\left(\frac{x-7}{9}\right) = 9\left(\frac{x-7}{9}\right)+7 = x-7+7 = x$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(9x+7) = \frac{9x+7-7}{9} = \frac{9x}{9} = x$$

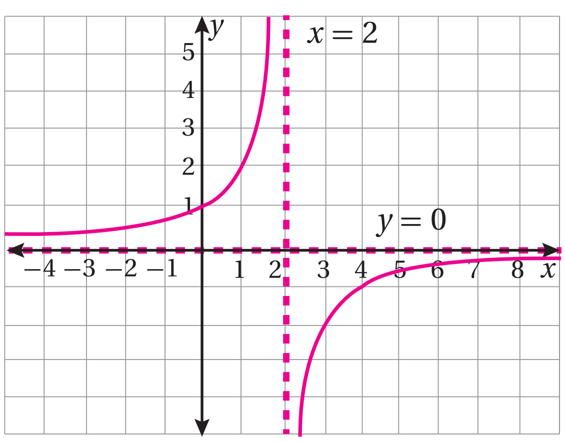
إذن، كلٌّ من الاقترانين $g(x)$ وَ $g^{-1}(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

28) $x = 0.6$

اختبار نهاية الوحدة:

13) لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

x	-1	0	1	1.5	2.5	3	4	5
$y = f(x)$	1.33	2	4	8	-8	-4	-2	-1.33



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2؛ أي $\{x | x \neq 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{y | y \neq 0\}$.

18) $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1\ ,\ x \neq 2$

19) $(f \circ f)(x) = 16x - 15$

20) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{4x-2} + 2$

21) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$

مجال $f(x)$ هو $x \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$، ومداه هو $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$

مجال $f^{-1}(x)$ هو $x \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$، ومداه هو $y \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$

22) عند تنفيذ الزيادة x مرَّة ستقل مبيعات المحل بمقدار $100x$، وتصبح كمية المبيعات $3500 - 100x$، وسعر العلبة الواحدة $0.75 + 0.05x$، ويكون الدخل:

$$R(x) = (0.75 + 0.05x)(3500 - 100x)$$

$$R(x) = 2625 + 100x - 5x^2$$

وهذا قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل، وله قيمة عظمى عند رأسه.

الإحداثي x للرأس هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10$$

إذن، سعر العلبة الذي يحقق أعلى دخل أسبوعي هو:

$$0.75 + 10(0.05) = 1.25$$

إجابات كتاب التمارين–الدرس 1:

1) ليس كثير حدود لأن أس المتغير x في الحد الثاني سالب.

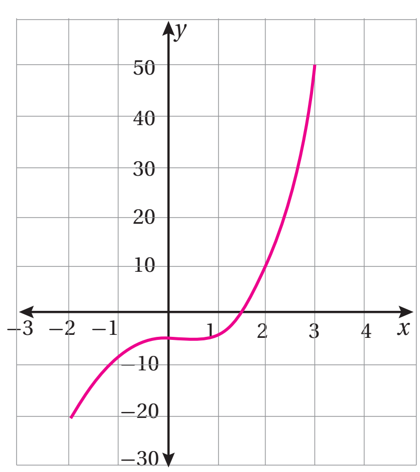
2) كثير حدود، درجته 3، معامله الرئيس -5، الحد الثابت -1، صورته القياسية هي: $f(x) = -5x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 + 7x - 1$

3) كثير حدود، درجته 1، معامله الرئيس $-\frac{16}{5}$، الحد الثابت $\frac{24}{5}$، صورته القياسية هي: $f(x) = -\frac{16}{5}x + -\frac{24}{5}$

4) ليس كثير حدود لأنه يحتوي مقدار جذري.

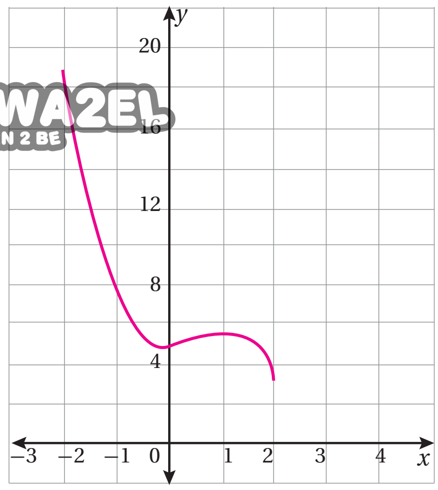
5) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$

المدى: $\{y | -21 \leq y \leq 49\}$



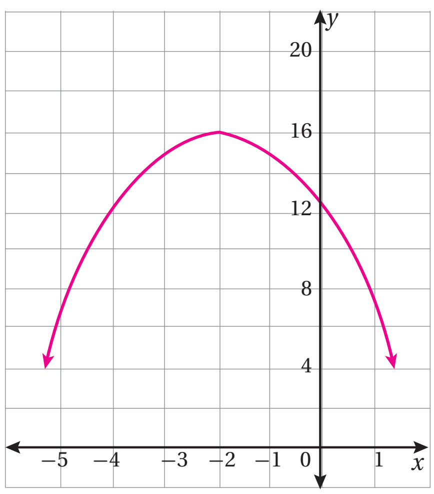
6) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

المدى: $\{y | -3 \leq y \leq 19\}$



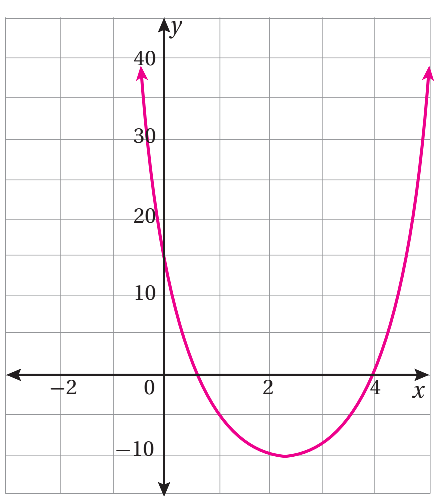
7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y \mid y \leq 16\}$ أو $(-\infty, 16]$

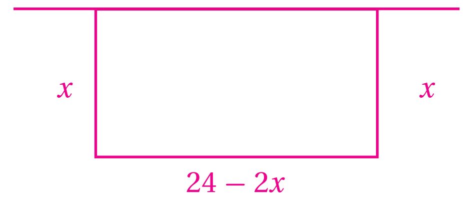


8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y \mid y \geq -10\}$ أو $[-10, \infty)$



17)



$A(x) = x(24-2x) = 24x - 2x^2$

الإحداثي x للرأس هو $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-24}{2(-2)} = 6$

أكبر مساحة ممكنة هي:

$A(6) = 24(6) - 2(6)^2 = 72 \text{ m}^2$

إجابات كتاب التمارين–الدرس **2**:

3) باقي القسمة هو $(k-6)$

$k-6 = 8 \Rightarrow k = 14$

4) باقي القسمة هو $3 + 18- \ (c+9)$، ويجب أن يكون الباقي صفرًا

$(c+9) = 0 - 18 + 3$

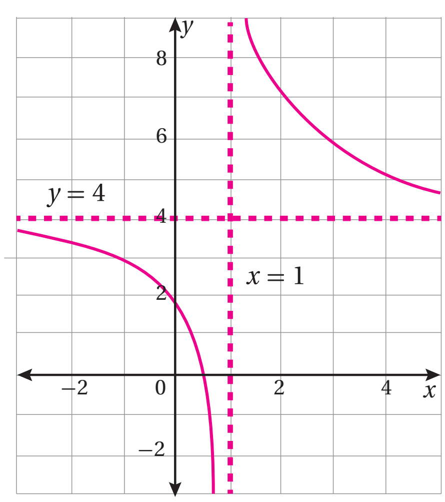
$-6 + (c+9) = 0 \Rightarrow c = -3$

5) له خط تقارب رأسي هو $x = 1$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 4$

المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4 أي $\{y|y \neq 4\}$

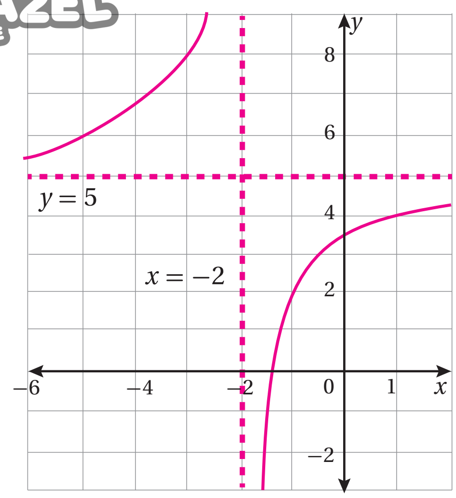


6) له خط تقارب رأسي هو $x = -2$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 5$

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 5 أي $\{y|y \neq 5\}$



7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2, 2$

أي: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $(0, 1]$

أي: $(-\infty,0]$ أو $(1, \infty)$

له خطا تقارب رأسيان هما: $x = -2, x = 2$

له خط تقارب أفقي هو $y = 1$

له خط تقارب هو $y = 0$

8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-1, 1$

أي: $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

له خطا تقارب رأسيان هما: $x = -1, x = 1$

9) المجال : جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x|x \neq 3\}$

المـــدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 5 أي $\{y|y > 5\}$ أو الفترة $(5, \infty)$

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 أي $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 3 أي $\{y|y > 3\}$ أو الفترة $(3, \infty)$

11) $C(5) = \dfrac{50(5)}{5^2 + 25} = 5\text{mg/dL}$

11) $C(t) = 4 \Rightarrow \dfrac{50t}{t^2 + 25} = 4 \Rightarrow 4t^2 - 50t + 100 = 0$

$t = 2.5, t = 10$

إذن، يكون تركيز المضاد الحيوي في دم المريض 4 mg/dL بعد 2.5 ساعة من تناوله، وبعد 10 ساعات من تناوله.

13) a)

$P(0) = \dfrac{72(l + 0.6(0))}{3 + 0.02(0)} = 24$

13) b)

$P(30) = \dfrac{72(l + 0.6(30))}{3 + 0.02(30)} = 380$

13) c) $\dfrac{72(l + 0.6t)}{3 + 0.02t} = 558 \Rightarrow 588(3+0.02t) = 72(1+0.6t)$

$1674 + 11.16t = 72 + 43.2t$

$1602 = 32.04t \Rightarrow t = 50$

إذن، يكون عدد الحشرات 558 بعد 50 شهر من نقلها إلى المحمية.

إجابات كتاب التمارين-الدرس 3:

17) $k \circ h(x) = k(\dfrac{2}{x}) = \dfrac{1}{\dfrac{2}{x} + 1}$

$\dfrac{1}{\dfrac{2+x}{x}} = \dfrac{x}{2+x}$

18) $h \circ k(x) = h(\dfrac{1}{x+1})$

$= \dfrac{2}{\dfrac{1}{x+1}} = 2 \times \dfrac{x+1}{1} = 2x + 2$

19) تتنـوع الإجابات. إجابة محتملـة: $f(x) = x^6 ; g(x) = x + 1$ أو $f(x) = x^3 ; g(x) = x^2 + 1$ وغيرها.

20) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x + 1 ; g(x) = 4x^2$

أو $f(x) = 2x+2 ;\ g(x) = x^2$ وغيرها.

21) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x - 5 ; g(x) = 2x^2$

أو $f(x) = (x-5)^2 ;\ g(x) = 2x$

22) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة:

$f(x) = 2x^2 - 4 ;\ g(x) = \sqrt{x} + 7$

أو $f(x) = 2x^2 ; g(x) = \sqrt{x - 4} + 7$

23) $x = 4(100 - p) \Rightarrow C(p) = \dfrac{8\sqrt{(100-p)}}{0.5} + 600$

$C(19) = 744$

إجابات كتاب التمارين-الدرس 4:

7) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{3}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

8) $f^{-1}(x) = \dfrac{4 + x}{7}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

9) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$

مجاله: $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

10) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{5 - x}}{3}$

مجاله: $(-\infty, 5]$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

11) $f^{-1}(x) = \dfrac{6x}{1 - 2x}$

مجالـه: $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باسـتثناء -3 أو $\{y \mid y \neq -3\}$

12) $f^{-1}(x) = \dfrac{8x}{1 + 4x}$

مجالـه: $\{x \mid x \neq \frac{-1}{4}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باسـتثناء 2 أو $\{y \mid y \neq 2\}$

13) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{2}$

مجاله: جميـع الأعداد الحقيقية التي لا تقـل عن 3 أي $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{1}{2}$ أي $[\frac{1}{2}, \infty)$

14) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 23}{3}$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -5 أي $[-5, \infty)$،

ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{-2}{3}$ أي $[\frac{-2}{3}, \infty)$

15) $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)^3 + 2}{3}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

16) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-(x-1)^3}{4}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

17) $(f \circ h)(x) = 2(5x+2)-5 = 10x-1 \neq x$

لا يكون أي منهما اقترانًا عكسيًا للآخر

18) $(f \circ h)(x) = \dfrac{2\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right)}{3\left(\dfrac{5x}{2-3x}\right) + 5}$

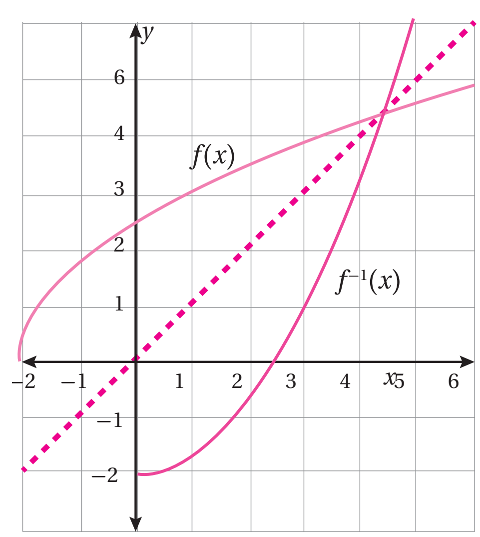
$= \dfrac{10x}{2-3x} \div \dfrac{15x + 10 - 15x}{2-3x}$

$= \dfrac{10x}{2-3x} \div \dfrac{2-3x}{10} = x$

وأيضًا يمكن أن نبين أن $(h \circ f)(x) = x$

إذن، كل من $f(x), h(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

19) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6}{3}$



20) $r(A) = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

$r(250) = \sqrt{\dfrac{250}{\pi}} \approx 8.92 \text{ cm}$

21) $l(T) = \dfrac{9.8\, T^2}{4\pi^2}$

$l(3) = \dfrac{9.8\,(3)^2}{4\pi^2} \approx 2.23 \text{ m}$

إجابات كتاب التمارين–الدرس 5:

17)