إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين وتدريبات

كتاب الرياضيات

للصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الثاني

إدارة المناهج والكتب المدرسية
إجابات وحلول التدريبات والتمارين

الصف : الثاني الثانوي العلمي **الكتاب : الرياضيات** **الفصل : الثاني**

الوحدة : الرابعة / تطبيقات التكامل

الفصل الأول : التكامل

أولًا : معكوس المشتقة

تدريب (١) :-

ق(س) متصل على ح لأنه طرح اقترانين متصلين

م َ(س) = ٤ س^{٣} − جتاس

∴ م (س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

تدريب (٢) :-

م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

∴ م َ(س) = ق(س)

هـ(س) معكوس لمشتقة ق(س)

∴ هـ َ(س) = ق(س)

ل َ(س) = ٣ م َ(س) − ٥ هـ َ(س)

ل َ(س) = ٣ ق(س) − ٥ ق(س)

= − ٢ ق(س)

تدريب (٣) :

∫ ق(س) جا $\frac{٣\pi}{٢}$ دس = ١ + س^{٣} ، جد ق(س)

ق(س) × جا $\frac{٣\pi}{٢}$ = ٣س^{٢}

ق(س) × −١ = ٣س^{٢}

∴ ق(س) = −٣س^{٢}.

تدريب (٤)

ق َ(س) = ٢جاس جتاس + أ جاس

ق َ($\frac{\pi}{٤}$) = صفر ⟸ ١ + أ جا $\frac{\pi}{٤}$ = صفر

$\boxed{أ = -\sqrt{٢}}$

تمارين ومسائل صفحة ٢٢٧ :

١) ق(س) متصل على ح − {−١} لأنه اقتران نسبي.

م َ(س) = $\frac{(س+١) - س}{(س+١)^{٢}}$

= $\frac{١}{(س+١)^{٢}}$ = ق(س)

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

٢) ق(س) متصل لأنه اقتران مثلثي

م َ(س) = ٢ جاس جتاس = جا٢س = ق(س)

∴ م (س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

٣) م (س) معكوس لمشتقة ق(س)

م َ(س) = ق(س)

م َ(س) = ٣س^{٢} + ١٠س − ٣ = ق(س)

ق(−٢) = ٣ × ٤ + ١٠ × −٢ − ٣

= − ١١

٤) م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

م َ(س) = ق(س)

ق(س) = ٨ س^{٣} + $\frac{٣س}{٢\sqrt{س^{٢}+٣}}$

ق(١) = ٨ + $\frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\times ٢}$ = ٨,٥

٥) ق(س) = ٣س^{٢}

م(س) = س^{٣} + جـ

م(٢) = ٥ ⇐ ٥ = ٨ + جـ ⇐ جـ = -٣

∴ م(س) = س^{٣} − ٣

٦) بما أن م$_{١}$(س) ، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق.

∴ م$_{١}$ − م$_{٢}$ = جـ

٣س^{٢} − ٢س + ٥ − م$_{٢}$(س) = جـ

م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٥ − جـ

ولكن م$_{٢}$(٢) = ٤ ⇐ ١٢ − ٤ + ٥ − جـ = ٤

$\boxed{\text{جـ} = ٩}$

م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س − ٤

٧) ص = ∫ $\sqrt[٥]{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$ دس ، $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-٢}$ = ؟

نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٥]{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$

عندما س = -٢ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٢}$

= $\sqrt[٥]{٣٢}$ = ٢

٨) ∫ ق(س) دس = س^{٣} − س^{٢} + ٢س + ١ ، قَ(-٣) = ؟

نشتق الطرفين

ق(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٢

قَ(س) = ٦س − ٢

قَ(-٣) = -١٨ − ٢ = -٢٠

٩) ∫ ق(س) دس = جاس − جتاس + ٣

اثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

ق(س) = جتاس + جاس

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ١

قَ(س) = − جاس + جتاس

قَ($\frac{\pi}{٢}$) = −١

ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ١ − −١ = ٢

١٠) أ) ق(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

م(س) = $\frac{١}{س}$ + جـ

ب) ق(س) = قاس جتاس

ق(س) = ١

م(س) = س + جـ

جـ) ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

م(س) = $\sqrt{س}$ + جـ

د) ق(س) = ٥ + ٥ ظا^{٢}س = ٥(١ + ظا^{٢}س)

ق(س) = ٥ قا^{٢}س

∴ م(س) = ٥ ظاس + جـ

١١) م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق

مَ(س) = ق(س) = ظتاس + ١

م″(س) = − قتا^{٢}س

م″($\frac{\pi}{٤}$) = − قتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$

= −٢

ثانياً: التكامل غير المحدود

تدريب (١)

١) $\int \text{دس} = \text{س} + \text{ج}$

٢) $\int -\frac{1}{4}\,\text{دل} = -\frac{1}{4}\,\text{ل} + \text{ج}$

تدريب (٢):

١) $\int 10\,\text{دس} = 10\text{س} + \text{ج}$

٢) $\int \frac{1}{\sqrt[7]{\text{س}^2}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{2}{7}}\,\text{دس}$

$= \frac{7}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{7}} + \text{ج}$

تدريب (٣):

١) $\int \frac{\text{س}^2 - 9\text{س}}{\sqrt{\text{س}} - 3}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}(\text{س} - 9)}{\sqrt{\text{س}} - 3}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}\cancel{(\sqrt{\text{س}} - 3)}(\sqrt{\text{س}} + 3)}{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - 3)}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{\frac{3}{2}} + 3\text{س}\,\,\text{دس}$

$\frac{2}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{2}} + \frac{3\text{س}^2}{2} + \text{ج} = \frac{2}{5}\sqrt{\text{س}^5} + \frac{3}{2}\text{س}^2 + \text{ج}$

٢) $\int \frac{(2 - \text{س})^3}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{8 + 6\text{س}^2 - 12\text{س} - \text{س}^3}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int 8\,\text{س}^{-\frac{3}{2}} + 6\,\text{س}^{\frac{1}{2}} - 12\,\text{س}^{-\frac{1}{2}} - \text{س}^{\frac{3}{2}}\,\text{دس}$

$= 8 \times \frac{-2}{1}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}} + 6 \times \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} - 12 \times \frac{2}{1}\,\text{س}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{ج}$

$= \frac{-16}{\sqrt{\text{س}}} + 4\sqrt{\text{س}^3} - 24\sqrt{\text{س}} - \frac{2}{5}\sqrt{\text{س}^5} + \text{ج}$

تدريب (٤)

$\int \frac{3}{(7\text{س} + 5)^4}\,\text{دس} = \int 3\,(7\text{س} + 5)^{-4}\,\text{دس}$

$\frac{3\,(7\text{س} + 5)^{-3}}{-3 \times 7} + \text{ج}$

$= \frac{-1}{7\,(7\text{س} + 5)^3} + \text{ج}$

٢) $\int \text{س}^4 \left(5 - \frac{3}{\text{س}}\right)^4 \text{دس}$

$= \int \text{س}^4 \left(\frac{5\text{س} - 3}{\text{س}}\right)^4 \text{دس} = \int \cancel{\text{س}^4}\,\frac{(5\text{س} - 3)^4}{\cancel{\text{س}^4}}\,\text{دس}$

$= \frac{(5\text{س} - 3)^5}{5 \times 5} + \text{ج} = \frac{(5\text{س} - 3)^5}{25} + \text{ج}$

تدريب (٥):

١) $\int (\text{قتا}\,4\text{س}\;\text{ظتا}\,4\text{س} + \text{قتا}^2\,3\text{س})\,\text{دس}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{قتا}\,4\text{س} - \frac{1}{3}\,\text{ظتا}\,3\text{س} + \text{ج}$

٢) $\int \left(\text{جتا}\,4\text{س}\;\text{ظا}\,4\text{س} + \frac{1}{\text{جتا}^2\,6\text{س}}\right)\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{جتا}\,4\text{س}} \times \frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\cancel{\text{جتا}\,4\text{س}}} + \text{قا}^2\,6\text{س}\;\,\text{دس}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{جتا}\,4\text{س} + \frac{1}{6}\,\text{ظا}\,6\text{س} + \text{ج}$

تدريب (٦) :

١) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^{٢} \, \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{قاس ظاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س} \;\; \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س دس} + ٢\int \text{قاس ظاس دس} + \int \text{ظا}^{٢}\text{س دس}$

$= \text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} + \int \text{قا}^{٢}\text{س} - ١ \;\text{دس}$

$= \text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{ج}$

$٢\,\text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} - \text{س} + \text{ج}$

٢) $\int \frac{٣}{١ - \text{جتا}٢\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{٣}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس} = \frac{٣}{٢} \int \text{قتا}^{٢}\text{س دس}$

$= -\frac{٣}{٢}\,\text{ظتاس} + \text{ج}$

٣) $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س}) \, \text{دس}$

$= -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{ج}$

٤) $\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^{٢} \, \text{دس}$

$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس} + \text{جا}^{٢}\text{س} \;\; \text{دس}$

$= \int ١ - \text{جا}٢\text{س} \;\; \text{دس}$

$\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{س} + \text{ج}$

تمارين ومسائل (صفحة ٢٣٦)

١) أ) $\int \text{س}^{٦} + \frac{٣}{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} \;\; \text{دس}$

$= \int \text{س}^{٦} + ٣\,\text{س}^{-٥} - \text{س}^{\frac{٢}{٥}} \;\; \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \frac{٣\,\text{س}^{-٤}}{-٤} - \frac{٥}{٧}\,\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{ج}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤\,\text{س}^{٤}} - \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{\text{س}^{٧}} + \text{ج}$

ب) $\int (٥ + ٣\text{ص})^{٤} \, \text{دص} = \frac{(٥ + ٣\text{ص})^{٥}}{١٥} + \text{ج}$

جـ) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} \, \text{دس} = \int \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}} \, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \text{ج}$

د) $\int (٤\text{س}^{٢} + ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٥} \, \text{دس}$

$= \int ((٢\text{س} + ٥)^{٢})^{٥} \, \text{دس} = \int (٢\text{س} + ٥)^{١٠} \, \text{دس}$

$\frac{(٢\text{س} + ٥)^{١١}}{٢٢} + \text{ج}$

هـ) $\int \frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}} \, \text{دس}$

$\int \frac{\cancel{(\text{س} + ٣ - ٣)}(\text{س} + ٣ + ٣)}{\cancel{\text{س}}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{س} + ٦) \, \text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + \text{ج}$

و) $\int (١ - \text{ع})(\text{ع} - ١)^{٥} \, \text{دس}$

$\int -(\text{ع} - ١)(\text{ع} - ١)^{٥} \, \text{دس} = \int -(\text{ع} - ١)^{٦} \, \text{دس}$

$- \frac{(\text{ع} - ١)^{٧}}{٧} + \text{ج}$

ز) $\int \text{س}\sqrt[3]{\frac{5}{\text{س}^3}-\frac{1}{\text{س}^2}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\sqrt[3]{\frac{5-\text{س}}{\text{س}^3}}\,\text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}}\,\frac{(5-\text{س})^{\frac{1}{3}}}{\cancel{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\frac{(5-\text{س})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}\times -1}+\text{جـ} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(5-\text{س})^4}+\text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{س}-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}-1}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}-1)}{\sqrt{\text{س}}-1}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$= \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}+\text{جـ} = \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3}+\text{جـ}$

ط) $\int \sqrt[3]{\text{س}}\left(\sqrt[3]{\text{س}}+\frac{5}{\sqrt[3]{\text{س}}}\right)\text{دس}$

$= \int \left(\text{س}^{\frac{2}{3}}+5\right)\text{دس}$

$= \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}}+5\text{س}+\text{جـ} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\text{س}^5}+5\text{س}+\text{جـ}$

ي) $\int \frac{5\text{س}}{\sqrt{7\text{س}+3}+\sqrt{2\text{س}+3}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{5\text{س}}{\sqrt{7\text{س}+3}+\sqrt{2\text{س}+3}}\times\frac{\sqrt{7\text{س}+3}-\sqrt{2\text{س}+3}}{\sqrt{7\text{س}+3}-\sqrt{2\text{س}+3}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{5\text{س}}{7\text{س}+\cancel{3}-2\text{س}-\cancel{3}}\times\left((7\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}-(2\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}\right)\text{دس}$

$\int \frac{\cancel{5}\cancel{\text{س}}}{\cancel{5}\cancel{\text{س}}}\times\left((7\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}-(2\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}\right)\text{دس}$

$\frac{2}{21}\sqrt{(7\text{س}+3)^3}-\frac{1}{3}\sqrt{(2\text{س}+3)^2}+\text{جـ}$

س٢) $\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2-2$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (3\text{س}^2-2)\,\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3-2\text{س}+\text{جـ}$

$\text{ق}(0)=1 \Leftarrow 1 = \text{جـ}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3-2\text{س}+1$

* * *

س٣) $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{6}{\sqrt{\text{س}}} = 6\text{س}^{-\frac{1}{2}}$

$\text{ق}(4)=0 \qquad \text{ق}'(4)=1$

$\int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int 6\text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 12\text{س}^{\frac{1}{2}}+\text{جـ}_1$

$\text{ق}'(4)=1 \Leftarrow 1 = 12\sqrt{4}+\text{جـ}_1$

$\text{جـ}_1 = -23$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (12\text{س}^{\frac{1}{2}}-23)\,\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = 8\sqrt{\text{س}^3}-23\text{س}+\text{جـ}$

$\text{ق}(4)=0 \Leftarrow 64-92+\text{جـ}=0 \Leftarrow \text{جـ}=28$

$\text{ق}(\text{س}) = 8\sqrt{\text{س}^3}-23\text{س}+28$

* * *

س٤) $\int (\text{ق}'(\text{س})+2\text{س})\,\text{دس} = \text{س}^3+\text{ب}\text{س}^2+1$

$\text{ق}'(1)=5 \text{ ، } \text{ق}(2)=7 \qquad \text{ق}(-2)=?$

نشتق الطرفين:

$\text{ق}'(\text{س})+2\text{س} = 3\text{س}^2+2\text{ب}\text{س}$

$\text{ق}'(1)=5 \Leftarrow 5+2 = 3+2\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=2$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2+4\text{س}-2\text{س}$

$\int \text{ق}'(\text{س}) = \int 3\text{س}^2+2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3+\text{س}^2+\text{جـ}$

$\text{ق}(2)=7 \Leftarrow 8+4+\text{جـ}=7 \Leftarrow \text{جـ}=-5$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3+\text{س}^2-5$

$\text{ق}(-2) = -8+4-5$

$= -9$

٥) $\text{د}''(\text{س}) = -\text{٤}\,\text{جتا}\,\text{٢س}$

$\text{د}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{صفر}$ $\quad$ $\text{د}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = -\text{٢}$

$\int \text{د}''(\text{س}) = \int -\text{٤}\,\text{جتا}\,\text{٢س}\;\text{دس}$

$\text{د}'(\text{س}) = -\text{٢}\,\text{جا}\,\text{٢س} + \text{جـ}_{\text{١}}$

$\text{د}'\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = \text{صفر} \Leftarrow -\text{٢}\,\text{جا}\,\pi + \text{جـ} = \text{صفر}$

$\text{جـ}_{\text{١}} = \text{صفر}$

$\int \text{د}'(\text{س}) = \int -\text{٢}\,\text{جا}\,\text{٢س}\;\text{دس}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{٢س} + \text{جـ}$

$\text{د}\left(\frac{\pi}{\text{٢}}\right) = -\text{٢} \Leftarrow \text{جتا}\,\pi + \text{جـ} = -\text{٢}$

$\text{جـ} = -\text{١}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{جتا}\,\text{٢س} - \text{١}$

سٓ أ) $\int \frac{\text{٥}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} - \frac{\text{٣}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{دس}$

$= \int \text{٥}\,\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣}\,\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\;\text{دس}$

$= -\text{٥}\,\text{ظتاس} - \text{٣}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١} + \text{جتا}\,\text{٢س}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{٢}\,\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\;\text{دس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

جـ) $\int (\text{ظتاس} - \text{قتاس})^{\text{٢}}\;\text{دس}$

$= \int (\text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}\,\text{ظتاس}\,\text{قتاس} + \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س})\;\text{دس}$

$= \int (\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{١} - \text{٢}\,\text{ظتاس}\,\text{قتاس} + \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س})\;\text{دس}$

$= \int (\text{٢}\,\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}\,\text{ظتاس}\,\text{قتاس} - \text{١})\;\text{دس}$

$-\text{٢}\,\text{ظتاس} + \text{٢}\,\text{قتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} + \frac{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{دس}$

$\int \text{ظاس}\,\text{قاس} + \text{١}\;\text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{س} + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\,\text{جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\left(\text{جا}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}}\;\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{جاس}\right)^{\text{٢}}}\;\text{دس}$

$= \int \text{٤}\,\text{ظتا}^{\text{٢}}\text{س}\;\text{دس} = \int \text{٤}(\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{١})\;\text{دس}$

$= \text{٤}(-\text{ظتاس} - \text{س}) + \text{جـ}$

و) $\int \frac{\text{١} - \text{جا}\,\text{٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جا}\,\text{٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\;\text{دس}$

$\int \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}\,\text{جاس}\,\text{جتاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^{\text{٢}}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\;\text{دس}$

$= \int \text{جاس} - \text{جتاس}\;\text{دس}$

$= -\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا(س+٢س)}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس جتا٢س} - \text{جاس جا٢س}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}\ \text{جتا٢س}}{\cancel{\text{جتاس}}} - \frac{\text{جاس} \times \text{٢جاس}\ \cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{دس}$

$\int \text{جتا٢س دس} - ٢\int \text{جا}^{٢}\text{س دس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} - \int \cancel{٢} \times \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٢س})\ \text{دس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} - (\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}) + \text{جـ}$

$= \text{جا٢س} - \text{س} + \text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}}$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\frac{١}{٤}\text{جا}^{٢}\text{٢س}}\ \text{دس} = \int ٤\ \text{قتا}^{٢}\text{٢س دس}$

$= -٢\ \text{ظتا٢س} + \text{جـ}$

ط) $\int \text{قاس (ظاس + جتاس) دس}$

$= \int \text{قاس ظاس} + ١\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{س} + \text{جـ}$

ي) $\int \text{جا٦س جا٤س دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا٢س} - \text{جتا١٠س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٢}\text{جا٢س} - \frac{١}{١٠}\text{جا١٠س}\right) + \text{جـ}$

ك) $\int \text{جتا}^{٢}\text{س دس} = \int \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا٢س})\ \text{دس}$

$\frac{١}{٢}\left(\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جا٢س}\right) + \text{جـ}$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس} - ٥\ \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$\text{جاس} - ٥\ \text{ظاس} + \text{جـ}$

م) $\int \text{جتا٣س جتا٧س دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا(-٤س)} + \text{جتا١٠س})\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا٤س} + \text{جتا١٠س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤}\text{جا٤س} + \frac{١}{١٠}\text{جا١٠س}\right) + \text{جـ}$

ن) $\int (\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س})\ \text{دس}$

$= \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س})\ \text{دس}$

$= \int \text{جتا٢س دس} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س} + \text{جـ}$

س) $\int \frac{١}{\text{قاس} - ١}\ \text{دس} \times \frac{\text{قاس} + ١}{\text{قاس} + ١} = \int \frac{\text{قاس} + ١}{\text{قا}^{٢}\text{س} - ١}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قاس} + ١}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس} = \int (\text{قاس ظتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتا}^{٢}\text{س})\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\cancel{\text{جتاس}}} \times \frac{\text{جتا}^{\cancel{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١\ \text{دس}$

$= \int \text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١\ \text{دس}$

$= -\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

ع) $\int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}}\ \text{دس} \times \frac{١ + \text{جاس}}{١ + \text{جاس}} = \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \int (\text{ظاس قاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{دس} = \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

ثالثاً: التكامل المحدود

تدريب (١)

$$\int_{١}^{٢} أ\,ق'(س)\,دس = أ\,ق(س)\Big|_{١}^{٢}$$

$$= أ\,ق(٢) - أ\,ق(١)$$

$$١٦ = ١٢أ - ٤أ \Rightarrow أ = ٢$$

تدريب (٢)

$$\int_{٢}^{٧} ٤س\,دس = ٢س^{٢}\Big]_{٢}^{٧} = ٢\times(٧)^{٢} - ٢(٢)^{٢}$$

$$= ٩٠$$

٢) $$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,دس = ظاس\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= ظا\frac{\pi}{٤} - ظا\frac{\pi}{٦} = ١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

تدريب (٣):

$$\int_{ب+١}^{٢+٣ب} ٥\,دس = ٤٠$$

$$٥(٢+٣ب-١-ب) = ٤٠ \Rightarrow ب = +\frac{٧}{٢}$$

تدريب (٤)

$$\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = ٢$$

$$\therefore \int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -٢$$

تدريب (٥)

$$\int_{١}^{٣} ٤ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ٧هـ(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,دس = ٩ \Rightarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٣$$

$$\therefore ٤\times٣ + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١ \Rightarrow \int_{٣}^{١} ٥هـ(س)\,دس = ٥\times -١$$

$$= -٥$$

تدريب (٦)

$$ع = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس \quad ، \quad ل = \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$ع + ل = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس - \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س\,دس = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ١\,دس$$

$$= ١\left(\frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi}{٢}$$

تدريب (٧)

$$\int_{٩}^{٢} ٢ق(س)\,دس + \int_{٩}^{٢} ٣\,دس = -١٧$$

$$٢\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس + ٣(٢-٩) = -١٧$$

$$\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس = ٢$$

$$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢ \Rightarrow \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = -٦$$

$$\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس =$$

$$\int_{٥}^{٩} ٤ق(س) - \int_{٥}^{٩} ١\,دس$$

$$= ٤\left(\int_{٥}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٩} ق(س)\,دس\right) - ١(٩-٥)$$

$$= ٤\,(٦ + -٢) - ٤$$

$$= ١٢$$

تدريب (٨)

$$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{٢}}\ \text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{٢\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢}}\ \text{دس} = \int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\ \text{دس}$$

$+$ ، $-$: ٠ ، π ، ٢π

$$= \int_{٠}^{\pi} \text{جاس دس} + \int_{\pi}^{٢\pi} -\text{جاس دس}$$

$$-\text{جتاس}\Big]_{٠}^{\pi} + \text{جتاس}\Big]_{\pi}^{٢\pi}$$

$$(-\text{جتا}\pi + \text{جتاصفر}) + \text{جتا}٢\pi - \text{جتا}\pi$$

$$(١ + ١) + (١ - -١)$$

$$= ٤$$

تدريب (٩)

$\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس}$ موجبة لأن $\text{ق(س)} > \text{صفر}$

إشارة $\int_{٣}^{٦} \text{ق(س) دس}$ سالبة لأن $\text{ق(س)} < ٠$

تدريب (١٠)

١) $\int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس} \geq \int_{٠}^{١} \text{هـ(س) دس}$

لأن $\text{ق(س)} \geq \text{هـ(س)}$ حسب الشكل

٢) من الشكل المجاور

$\text{هـ(س)} \leq \text{ق(س)}$ لكل $\text{س} \in [-١، ٠]$

$\therefore \int_{-١}^{٠} \text{هـ(س) دس} \leq \int_{-١}^{٠} \text{ق(س) دس}$

أي أن $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س) دس} \geq \int_{-١}^{٠} \text{هـ(س) دس}$

تدريب (١١)

$$\text{م} \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq \text{ك}$$

$$٠ \leq \text{س} \leq ١$$

$$٠ \leq \text{س}^{٢} \leq ١$$

$$١ \leq ١+\text{س}^{٢} \leq ٢ \Rightarrow ١ \geq \frac{١}{١+\text{س}^{٢}} \geq \frac{١}{٢}$$

$$٢ \geq \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}} \geq \frac{٢}{٢}$$

$$\int_{٠}^{١} ١\ \text{دس} \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq \int_{٠}^{١} ٢\ \text{دس}$$

$$١ \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq ٢$$

$$\text{م} = ١ \ ،\ \text{ك} = ٢$$

تمارين ومسائل صفحة (٢٥٠ - ٢٥١)

س١) أ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \int_{٢}^{٨} \text{س}^{-٢}\ \text{دس}$

$$= \frac{-١}{\text{س}}\Big]_{٢}^{٨} = \frac{-١}{٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$$

ب) $\int_{٠}^{٣} \left(\text{س}^{٢} - |\text{س} - ١|\right)\ \text{دس}$

$$= \int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢}\ \text{دس} - \int_{٠}^{٣} |\text{س} - ١|\ \text{دس}$$

$-$ ، $+$: ٠ ، ١ ، ٣

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big]_{٠}^{٣} - \left(\int_{٠}^{١} ١ - \text{س}\ \text{دس} + \int_{١}^{٣} (\text{س} - ١)\ \text{دس}\right)$$

$$(٩ - ٠) - \left(\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big]_{٠}^{١} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \text{س}\Big]_{١}^{٣}\right)$$

$$٩ - \left(\left(١ - \frac{١}{٢}\right) - \text{صفر} + \left(\frac{٩}{٢} - ٣\right) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right)$$

$$٩ - \frac{٥}{٢} = \frac{١٣}{٢}$$

ج) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}\,٢\text{س}\ \text{د س}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,٢\text{س}\Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = -\frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,\pi + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢}$

$= \frac{١}{٢}$

د) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} (\text{س} + \text{جتا س})\ \text{د س}$

$\left[\frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{جا س}\right]_{\frac{\pi}{٢}}^{\text{صفر}}$

$= (\text{صفر} + \text{جا صفر}) - \left(\frac{\frac{\pi^٢}{٤}}{٢} + \text{جا}\,\frac{\pi}{٢}\right)$

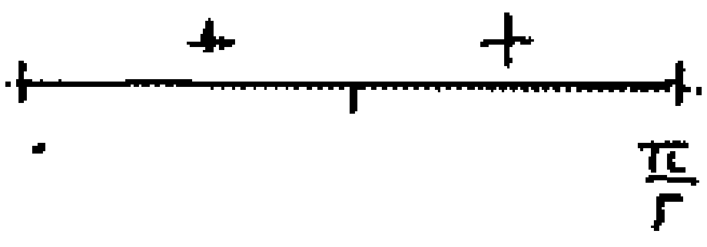
$= -\frac{\pi^٢}{٨} - ١$

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جا}\,٢\text{س}}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{\text{جا}^٢\text{س} + ٢\,\text{جا س جتا س} + \text{جتا}^٢\text{س}}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{(\text{جا س} + \text{جتا س})^٢}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|\text{جا س} + \text{جتا س}|}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\ \text{د س}$



$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\ \text{د س} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ١\ \text{د س}$

$= ١\left(\frac{\pi}{٢} - ٠\right) = \frac{\pi}{٢}$.

و) $\int_{٢}^{٢} (٩\text{س} - ٧)^٥\ \text{د س} = \text{صفر}$

ز) $\int_{-١}^{٣} (\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)\ \text{د س}$

$\int_{-}^{٣} (\text{س}^٣ - ١)\ \text{د س}$

$= \left[\frac{\text{س}^٤}{٤} - \text{س}\right]_{-١}^{٣}$

$= \left(\frac{٨١}{٤} - ٣\right) - \left(\frac{١}{٤} + ١\right) = ١٦$

ح) $\int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}}\ (\sqrt{\text{س}} + ٢)^٢\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}}\ (\text{س} + ٤\sqrt{\text{س}} + ٤)\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{١} \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٤\text{س} + ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د س}$

$\left[\frac{٢}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + ٢\text{س}^٢ + \frac{٨}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$

$\left(\frac{٢}{٥} + ٢ + \frac{٨}{٣}\right) - (\text{صفر})$

$= \frac{٧٦}{١٥}$

ط) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{(\text{س} - ١)^٢}\ \text{د س} = \int_{٢}^{٤} (\text{س} - ١)^{-٢}\ \text{د س}$

$\left[\frac{-١}{\text{س} - ١}\right]_{٢}^{٤} = \frac{-١}{٣} + ١ = \frac{٢}{٣}$

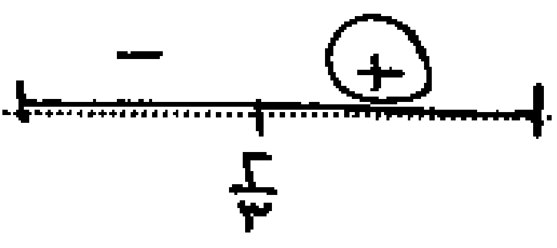
ي) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + ٥}{\text{س}^٢}\ \text{د س}$

$= \int_{١}^{٣} ٢\text{س} - ٤ + ٥\text{س}^{-٢}\ \text{د س}$

$\left[\text{س}^٢ - ٤\text{س} - \frac{٥}{\text{س}}\right]_{١}^{٣}$

$\left(٩ - ١٢ - \frac{٥}{٣}\right) - (١ - ٤ - ٥) = \frac{١٠}{٣}$

ك) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٤}\ \text{د س} = \int_{٢}^{٣} \sqrt{(٣\text{س} - ٢)^٢}\ \text{د س}$



$= \int_{٢}^{٣} |٣\text{س} - ٢|\ \text{د س}$

$= \int_{٢}^{٣} ٣\text{س} - ٢\ \text{د س}$

$\left[\frac{٣\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س}\right]_{٢}^{٣}$

$\left(\frac{٢٧}{٢} - ٦\right) - (٦ - ٤) = \frac{١١}{٢}$

ل) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{دس}$

$= [\text{جاس} + \text{جتاس}]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (1 + \text{صفر}) - (\text{صفر} + 1) = \text{صفر}$

* * *

س٢) $\text{ق}(\text{س}) = \int \left(\int_{0}^{-2} 4\,\text{دس} - 3\text{س}^2 \right) \text{دس}$

$\text{قَ}(-1) = ?$

$\text{قَ}(\text{س}) = \int_{0}^{-2} 4\,\text{دس} - 3\text{س}^2$

$= 4(-2 - 0) - 3\text{س}^2$

$\text{قَ}(\text{س}) = -8 - 3\text{س}^2$

$\text{قَ}(-1) = -8 - 3 = -11$

* * *

س٣) $\int_{\text{ب}}^{2} 2\text{ب}\,\text{دس} = -30$

$2\text{ب}(2 - \text{ب}) = -30$

$-2\text{ب}^2 + 4\text{ب} + 30 = \text{صفر}$

$\text{ب}^2 - 2\text{ب} - 15 = \text{صفر}$

$(\text{ب} - 5)(\text{ب} + 3) = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 5}$ ، $\boxed{\text{ب} = -3}$

* * *

س٤) $\int_{0}^{\text{جـ}} \text{س}(1 - \text{س})\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\int_{0}^{\text{جـ}} (\text{س} - \text{س}^2)\,\text{دس} = \left[\frac{\text{س}^2}{2} - \frac{\text{س}^3}{3}\right]_{0}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جـ}^2}{2} - \frac{\text{جـ}^3}{3} - \text{صفر} = \text{صفر}$

$\frac{3\text{جـ}^2 - 2\text{جـ}^3}{6} = \text{صفر} \Leftarrow \text{جـ}^2(3 - 2\text{جـ}) = \text{صفر}$

$\text{جـ} = \text{صفر}$ ، $\text{جـ} = \frac{3}{2}$

* * *

س٥) $\int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - 2\int_{0}^{\text{جـ}} 3\text{م}\,\text{دم}\right) \text{دس} = -20$

$= \int_{-1}^{3} \left(3\text{س}^2 - \cancel{2} \times \frac{3\text{جـ}^2}{\cancel{2}}\right) \text{دس} = -20$

$[\text{س}^3 - 3\text{جـ}^2\text{س}]_{-1}^{3} = -20$

$(27 - 9\text{جـ}^2) - (-1 + 3\text{جـ}^2) = -20$

$28 - 12\text{جـ}^2 = -20$

$\text{جـ}^2 = 4 \Leftarrow \text{جـ} = \pm 2$

* * *

س٦) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} & ، -3 < \text{س} \leqslant 0 \\ \text{س} & ، 0 < \text{س} \leqslant 4 \end{cases}$

$\int_{-3}^{4} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-3}^{0} -\text{س}\,\text{دس} + \int_{0}^{4} \text{س}\,\text{دس}$

$= \left[-\frac{\text{س}^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{\text{س}^2}{2}\right]_{0}^{4}$

$(\text{صفر} + \frac{9}{2}) + (8 - \text{صفر}) = 12{,}5$

* * *

س٧) $\int_{2}^{\text{ب}} (2\text{س} - 3)\,\text{دس} = 20$

$[\text{س}^2 - 3\text{س}]_{2}^{\text{ب}} = 20$

$\text{ب}^2 - 3\text{ب} - 4 + 6 - 20 = \text{صفر}$

$\text{ب}^2 - 3\text{ب} - 18 = \text{صفر}$

$(\text{ب} - 6)(\text{ب} + 3) = \text{صفر}$ $\boxed{\text{ب} = 6}$ ، $\boxed{\text{ب} = -3}$

* * *

س٨) $\int_{1}^{3} 2\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{1}^{3} \text{س}^{-2}\,\text{دس} - \int_{1}^{3} 6\,\text{دس} = 12$

$2\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \left[\frac{-1}{\text{س}}\right]_{1}^{3} - 6(3 - 1) = 12$

$2\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{70}{3} \Leftarrow \int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{35}{3}$

$\int_{1}^{3} \frac{\text{ق}(\text{س})}{2}\,\text{دس} - \int_{1}^{3} \text{س}^2\,\text{دس} = \frac{35}{6} - \left[\frac{\text{س}^3}{3}\right]_{1}^{3}$

$= \frac{35}{6} - (9 - \frac{1}{3}) = -\frac{17}{6}$

س٩) $\int_{9}^{2} 2\,\text{د}(\text{س})\,\text{دس} + 3(2-9) = -17$

$\int_{9}^{2} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = 2$

$\int_{2}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = -6$

$\int_{5}^{9} (4\,\text{د}(\text{س}) - 1)\,\text{دس} =$

$\left(\int_{5}^{2} 4\,\text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{9} 4\,\text{د}(\text{س})\,\text{دس}\right) - 1(9-5)$

$24 - 8 - 4 = 12$

س١٠) $-1 \le \text{جتاس} \le 1$ لكل $\text{س} \in [0 ، \pi]$

$\text{صفر} \le \text{جتا}^2\text{س} \le 1$

$\text{صفر} \le 3\,\text{جتا}^2\text{س} \le 3$

$2 \le 2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س} \le 5$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س}} \le \frac{1}{2}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5}\,\text{دس} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\,\text{دس}$

$\frac{\pi}{5} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2 + 3\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} \le \frac{\pi}{2}$

س١١) $-3 \le \text{س} \le 3$

$(0 \le \text{س}^2 \le 9) \times -1$

$-9 \le -\text{س}^2 \le \text{صفر}$

$\text{صفر} \le 9 - \text{س}^2 \le 9$

$\text{صفر} \le \sqrt{9 - \text{س}^2} \le \sqrt{9}$

$\int_{-3}^{3} \text{صفر}\,\text{دس} \le \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^2}\,\text{دس} \le \int_{-3}^{3} 3\,\text{دس}$

$\text{صفر} \le \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - \text{س}^2}\,\text{دس} \le 18$

$\text{م} = \text{صفر}$ ، $\text{ل} = 18$

س١٢) $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{ج}$

$\text{د}'(\text{س}) = 2\,\text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$\text{د}''(\text{س}) = 2\,\text{أ}$

$\text{د}''(\text{س}) = 4 \Rightarrow 2\,\text{أ} = 4 \Rightarrow \boxed{\text{أ} = 2}$

$\text{د}(0) = 5 \Rightarrow \boxed{\text{ج} = 5}$

$\int_{0}^{1} \text{د}'(\text{س})\,\text{دس} = 3 \Rightarrow \int_{0}^{1} 4\text{س} + \text{ب}\,\text{دس}$

$\left[2\text{س}^2 + \text{ب}\text{س}\right]_{0}^{1} = 3$

$2 + \text{ب} = 3 \Rightarrow \boxed{\text{ب} = 1}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = 2\text{س}^2 + \text{س} + 5$

س١٣) $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\int_{-1}^{1} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\,\text{دس} = \left[\frac{\text{أ}\text{س}^2}{2} + \text{ب}\text{س}\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{\text{أ}}{2} + \text{ب}\right) - \left(\frac{\text{أ}}{2} - \text{ب}\right) = 4$

$2\,\text{ب} = 4 \Rightarrow \boxed{\text{ب} = 2}$

$\int_{1}^{3} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\,\text{دس} = \left[\frac{\text{أ}\text{س}^2}{2} + 2\text{س}\right]_{1}^{3}$

$= \left(\frac{9\,\text{أ}}{2} + 6\right) - \left(\frac{\text{أ}}{2} + 2\right) = 2$

$4\,\text{أ} + 4 = 2 \Rightarrow \boxed{\text{أ} = -\frac{1}{2}}$

$\text{د}(\text{س}) = -\frac{1}{2}\text{س} + 2$

رابعاً: اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

تدريب (1)

1) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(2 - \text{جتا}\,\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{جا}\,\text{س}}{2 - \text{جتا}\,\text{س}}$

2) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س} + 5|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2}{2\text{س} + 5}$

تدريب (2):

1) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{1}{9 - 2\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$= \dfrac{1}{-2}\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{-2}{9-2\text{س}}\,\text{د}\text{س} = \frac{1}{-2}\text{لو}_{\text{هـ}}|9-2\text{س}|\Big|_{2}^{4}$

$= \dfrac{1}{-2}\text{لو}_{\text{هـ}}1 + \dfrac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}5 = \dfrac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}5$

2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{قا}^2\text{س}}{2 + \text{ظا}\,\text{س}}\,\text{د}\text{س} = \Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|2 + \text{ظا}\,\text{س}|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}3 - \text{لو}_{\text{هـ}}1 = \text{لو}_{\text{هـ}}3$

تمارين ومسائل صفحة (256 - 257)

حل)

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}2\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2}{2\text{س}} = \dfrac{1}{\text{س}}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^3 5\text{س} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,5\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3 \times \dfrac{5\,\text{جتا}\,5\text{س}}{\text{جا}\,5\text{س}} = 15\,\text{ظتا}\,5\text{س}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2 + 4\text{س} - 5|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}$

د) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 5\text{س} + 3)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 5\text{س} + 3}$

هـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^3 \times \dfrac{1}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times 3\text{س}^2$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^2\,(1 + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

و) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(2 + \sqrt{\text{س}})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{2 + \sqrt{\text{س}}} = \dfrac{1}{4\sqrt{\text{س}} + 2\text{س}}$

ز) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3\,\text{ظا}\,\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}\,\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{3\text{س}^2}{\text{س}^3} + \dfrac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}}$

$= \dfrac{3}{\text{س}} + \dfrac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}}$

ح) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}} - \dfrac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$

ط) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^3$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \times \dfrac{1}{\text{س}}$

ي) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{(\text{٤س}^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-\text{٢س})^{٥}}$

$\text{د}(\text{س}) = ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٤س}^{٢}+٥) - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٧-\text{٢س})$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{٦ \times \text{٨س}}{\text{٤س}^{٢}+٥} - \dfrac{٥ \times -٢}{٧-\text{٢س}}$

$= \dfrac{\text{٤٨س}}{\text{٤س}^{٢}+٥} + \dfrac{١٠}{٧-\text{٢س}}$

ك) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{\text{٥س}^{٣}+\text{٤س}}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{٥س}^{٣}+\text{٤س})$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٣} \times \dfrac{\text{١٥س}^{٢}+٤}{\text{٥س}^{٣}+\text{٤س}}$

ل) $\text{د}(\text{س}) = \text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}\,\text{قا}^{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$.

م) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢}-١})$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{١ + \dfrac{\text{٢س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}}{\text{س}+\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\sqrt{\text{س}^{٢}-١} + \text{س}}}{\cancel{(\text{س}+\sqrt{\text{س}^{٢}-١})}(\sqrt{\text{س}^{٢}-١})}$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢}-١}}$

س٣) $\int (\text{د}'(\text{س}) - \text{س})\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}+\text{ظاس}| + \text{س}^{٢}$

نشتق الطرفين

$\text{د}'(\text{س}) - \text{س} = \dfrac{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{قاس}+\text{ظاس}} + \text{٢س}$

$\text{د}'(\text{س}) - \text{س} = \dfrac{\text{قاس}\cancel{(\text{قاس}+\text{ظاس})}}{\cancel{\text{قاس}+\text{ظاس}}} + \text{٣س}$

$\text{د}'(\text{س}) = \text{قاس} + \text{٣س}$ ✻

س٤) $\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ $\quad \text{د}(\text{س}) = \text{ظتاس}$

د(س) متصل على مجاله

$\text{م}'(\text{س}) = \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس} = \text{د}(\text{س})$)

∴ م(س) هو معكوس لمشتقة للاقتران د

س٥)

أ) $\int \dfrac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}+٣}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+٣| + \text{جـ}$

ب) $\int \dfrac{١+\text{جتاس}}{\text{س}+\text{جاس}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{جاس}| + \text{جـ}$

جـ) $\int \dfrac{٥+٥\,\text{ظتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \dfrac{٥(١+\text{ظتا}^{٢}\text{س})}{\text{ظتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \dfrac{٥\,\text{قتا}^{٢}\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{دس} = -٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}| + \text{جـ}$

د) $\int \dfrac{\text{٣س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+٥}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٣}+٥| + \text{جـ}$

هـ) $\int \dfrac{\text{س}+٥}{\text{س}}\,\text{دس} = \int \left(١ + \dfrac{٥}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$= \text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

و) $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} \, \text{دس}$

$= \int_{٣}^{٥} \frac{\cancel{\text{س} - ٢}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)} \, \text{دس} = \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٢| \right]_{٣}^{٥}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} ٧ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

ز) $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢\text{س}|}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{دس}$

$\underset{-١}{|} \overset{-}{\rule{1em}{0.4pt}} \underset{٠}{\cdot} \overset{+}{\rule{1em}{0.4pt}} \underset{٢}{|}$

$= \int_{-١}^{٠} \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{دس} + \int_{٠}^{٢} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{دس}$

$- \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} + ١| \right]_{-١}^{٠} + \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} + ١| \right]_{٠}^{٢}$

$- \text{لو}_{\text{هـ}} ١ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ \quad + \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ - \text{لو}_{\text{هـ}} ١$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

ح) $\int \frac{\text{جا} ٣\text{س}}{١ + \text{جتا} ٣\text{س}} \, \text{دس}$

$= \frac{-١}{٣} \int \frac{-٣ \, \text{جا} ٣\text{س}}{١ + \text{جتا} ٣\text{س}} \, \text{دس}$

$= -\frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |١ + \text{جتا} ٣\text{س}| + \text{جـ}$

ط) $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}(\text{س} - ١)} \, \text{دس}$

$= \int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \, \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} - \text{س}| + \text{جـ}$

ي) $\int \text{ظاس} \, \text{دس}$

$= - \int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس} = - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| + \text{جـ}$

س٦)

١) $\text{م}(\text{س}) = \int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس}$

$= \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} + ٤| + \text{جـ}$

ب) $\text{م}(\text{س}) = \int \frac{٣ \, \text{جتا} ٣\text{س}}{٥ + \text{جا} ٣\text{س}} \, \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |٥ + \text{جا} ٣\text{س}| + \text{جـ}$

خامساً: مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

تدريب (١):

١) ق(س) = هـ^{جاس}

ق$'$(س) = جتاس × هـ^{جاس}

٢) ق(س) = س^{٤} هـ^{٣س}

ق$'$(س) = س^{٤} × ٣هـ^{٣س} + هـ^{٣س} × ٤س^{٣}

٣س^{٣} هـ^{٣س} (س + ٢)

تدريب (٢)

١) ق(س) = س لو$_{هـ}$ هـ$^{س^٢}$

= س × س^{٢} لو$_{هـ}$ هـ

ق(س) = س^{٣} ⇐ ق$'$(س) = ٣س^{٢}

٢) ق(س) = هـ$^{٣ لو_{هـ}(١+جاس)}$

= هـ$^{لو_{هـ}(١+جاس)^٣}$

ق(س) = (١+جاس)^{٣}

ق$'$(س) = ٣(١+جاس)^{٢} × جتاس

= ٣جتاس (١+جاس)^{٢}

تدريب (٣)

١) $\int_{٠}^{١}$ (١+هـ^{س})^{٢} دس

= $\int_{٠}^{١}$ ١ + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س} دس

= [س + ٢هـ^{س} + $\frac{١}{٢}$هـ^{٢س}]$_{٠}^{١}$

= (١ + ٢هـ + $\frac{١}{٢}$هـ^{٢}) − (صفر + ٢ + $\frac{١}{٢}$)

= $-\frac{٣}{٢}$ + ٢هـ + $\frac{١}{٢}$هـ^{٢}.

٢) $\int$ هـ^{٣س} (١+ هـ^{٢س}) دس

= $\int$(هـ^{٣س} + هـ^{٥س}) دس

= $\frac{١}{٣}$هـ^{٣س} + $\frac{١}{٥}$هـ^{٥س} + جـ

تمارين ومسائل صفحة (٢٦٢ - ٢٦٣)

(١)

أ) ص = س + هـ^{٩س}

$\frac{دص}{دس}$ = ١ + ٩ هـ^{٩س}

ب) ص = س^{٣} + هـ$^{٦-٥س^٤}$

ص$'$ = ٣س^{٢} − ٢٠س^{٣} هـ$^{٦-٥س^٤}$

جـ) ص = جاهـ^{٣س}

ص$'$ = ٣ هـ^{٣س} جتاهـ^{٣س}

د) ص = $\sqrt{١+هـ^{٢س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{\cancel{٢}هـ^{٢س}}{\cancel{٢}\sqrt{١+هـ^{٢س}}}$ = $\frac{هـ^{٢س}}{\sqrt{١+هـ^{٢س}}}$

هـ) ص = هـ$^{\frac{١}{س}}$ + لو$_{هـ}$$\sqrt{س}$

ص = هـ$^{\frac{١}{س}}$ + $\frac{١}{٢}$لو$_{هـ}$س

ص$'$ = $\frac{-١}{س^٢}$هـ$^{\frac{١}{س}}$ + $\frac{١}{٢س}$

و) ص = هـ^{٥} + لو$_{هـ}$قاس

ص$'$ = صفر + $\frac{قاس ظاس}{قاس}$

= ظاس.

ز) ص = هـ$^{لو_{هـ}(س^٣+٢)^٤}$ ⇐ ص = (س^{٣}+٢)^{٤}

$\frac{دص}{دس}$ = ٤(س^{٣}+٢)^{٣} × ٣س^{٢} ⇐ ص$'$ = ١٢س^{٢}(س^{٣}+٢)^{٣}

ح) $\text{ص} = \frac{1 + \text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{5\text{س}}}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{-5\text{س}} + \text{هـ}^{-3\text{س}}$

$\text{ص}' = -5\,\text{هـ}^{-5\text{س}} - 3\,\text{هـ}^{-3\text{س}}$

ط) $\text{ص} = \text{هـ}^{2} + \text{س}^{3}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}$

$\text{ص}' = \text{صفر} + \text{س}^{3} \times \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{هـ}^{\text{جاس}} \times 3\text{س}^{2}$

$\text{ص}' = \text{س}^{2}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,(\text{س}\,\text{جتاس} + 3)$

ي) $\text{ص} = \left(\text{هـ}^{4\text{س}+5}\right)^{6}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{24\text{س}+30}$

$\text{ص}' = 24\,\text{هـ}^{24\text{س}+30}$

* * *

س٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{م}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{دس}}{1+\text{ظا}^{2}\text{س}}$

$\text{ص}' = \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{م} \times \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \text{صفر}$

عندما $\text{س} = \frac{\pi}{4} \Leftarrow$

$2\text{هـ} + 1 = \text{قا}^{2}\frac{\pi}{4}\,\text{هـ}^{1} + -\text{م} \times \text{ظا}\frac{\pi}{4}$

$2\text{هـ} + 1 = 2\text{هـ} - \text{م}$

$\boxed{\text{م} = -1}$

* * *

س٣) $\text{د}''(\text{س}) = \text{جاس} + \text{هـ}^{2\text{س}}$

$\int \text{د}''(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{جاس} + \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{د}'(\text{س}) = -\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ج}_{1}$

$\text{د}'(0) = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} + \text{ج}_{1}$

$\text{ج}_{1} = 1$

$\text{د}'(\text{س}) = -\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + 1$

$\int \text{د}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \left(-\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + 1\right)\text{دس}$

$\text{د}(\text{س}) = -\text{جاس} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س} + \text{ج}_{2}$

$\text{د}(0) = \frac{1}{4} \Leftarrow \text{صفر} + \frac{1}{4} + \text{صفر} + \text{ج}_{2} = \text{صفر}$

$\text{ج}_{2} = \text{صفر}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = -\text{جاس} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}.$

* * *

س٤) $\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}} = \text{س} - \text{ص}$

$(\text{ص} + \text{س}\text{ص}')\,\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}} = 1 - \text{ص}'$

$\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}}\,\text{ص} + \text{س}\text{ص}'\,\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}} + \text{ص}' = 1$

$\text{ص}'\,(\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}} + 1) = 1 - \text{هـ}^{\text{س}\text{ص}}\,\text{ص}$

$\text{ص}' = \frac{1 - \text{ص}(\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - \text{ص}) + 1}$

$\text{ص}' = \frac{\text{ص}^{2} - \text{س}\text{ص} + 1}{\text{س}^{2} - \text{س}\text{ص} + 1}$ ✱.

* * *

س٥) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{م}\text{س}}$

$\text{ص}' = \text{م}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}}$

$\text{ص}'' = \text{م}^{2}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}}$

$\text{م}^{2}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} - 5\text{م}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} + 6\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} = \text{صفر}$

$\text{هـ}^{\text{م}\text{س}}\,(\text{م}^{2} - 5\text{م} + 6) = \text{صفر}$

$(\text{م} - 2)(\text{م} - 3) = \text{صفر}$

$\boxed{\text{م} = 2}$ ، $\boxed{\text{م} = 3}$

* * *

س٦) $\text{د}(\text{س}) = 3^{\text{ل}(\text{س})} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}3^{\text{ل}(\text{س})}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{د}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}3$

$\frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})} = \text{ل}'(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}3 \Leftarrow \text{د}'(\text{س}) = 3^{\text{ل}(\text{س})} \times \text{ل}'(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}3$

✱

٧) $\int \text{د}'(\text{س})\,\text{دس} = \text{هـ}^{١-\text{س}^٢} + ٤\text{هـ}$

$\text{د}'(\text{ب}) = -٢\text{ب}$

نشتق الطرفين

$-٢\text{س}\,\text{هـ}^{١-\text{س}^٢} = \text{د}'(\text{س})$

$-٢\text{ب}\,\text{هـ}^{١-\text{ب}^٢} = -٢\text{ب}$

$\text{هـ}^{١-\text{ب}^٢} = ١ \Leftarrow ١-\text{ب}^٢ = \text{صفر}$

$\text{ب} = \mp ١$

ش) م١ $\int \text{هـ}^{٧\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٧}\text{هـ}^{٧\text{س}} + \text{ج}$

ب) $\int_{٠}^{١} ٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}\,\text{دس} = \left[\text{هـ}^{٣\text{س}}\right]_{٠}^{١} = \text{هـ}^{٣} - ١$

جـ) $\int_{١}^{٣} \text{هـ}^{٤}\,\text{دس} = \text{هـ}^{٤}(٣-١)$

$= ٢\,\text{هـ}^{٤}$

د) $\int \frac{٤\,\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣}{\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{٤\text{س}} - ٣\text{س}\right| + \text{ج}$

هـ) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢٧}{\text{هـ}^{\text{س}} - ٣}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}} - ٣)}(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٩)}{\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}} - ٣)}}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٣\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٩\text{س} + \text{ج}$

و) $\int \text{هـ}^{٥ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا}\,\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{٥} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتا}\,\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{٥}\,\text{جتا}\,\text{س}\,\text{دس}$

$= \text{هـ}^{٥}\,\text{جا}\,\text{س} + \text{ج}$

ط) $\int \text{هـ}^{٥\text{س}}\sqrt{(\text{هـ}^{\text{س}}+٢)^{٢}}\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{٥\text{س}}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+٢\right|\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{٥\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}}+٢)\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{٦\text{س}} + ٢\,\text{هـ}^{٥\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٦}\text{هـ}^{٦\text{س}} + \frac{٢}{٥}\text{هـ}^{٥\text{س}} + \text{ج}$

ي) $\int (\text{هـ}^{٢\text{س}+٥})^{٢}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{٤\text{س}+١٠}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٤\text{س}+١٠} + \text{ج}$

الفصل الثاني : طرائق التكامل

أولاً : التكامل بالتعويض

تدريب (١)

١) $\int س^٢ (٦س^٣+٥)^٣ \, دس$

$ص = ٦س^٣ + ٥$ $\quad$ $دص = ١٨س^٢ \, دس$

$\int س^٢ (٦س^٣+٥)^٣ \, دس = \frac{١}{١٨}\int (٦س^٣+٥)^٣ (١٨س^٢ \, دس)$

$= \frac{١}{١٨}\int ص^٣ \, دص = \frac{١}{١٨} \frac{ص^٤}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{٧٢} (٦س^٣+٥)^٤ + جـ$

٢) $\int (س+٣) \sqrt[٥]{س^٢+٦س-٤} \, دس$

$ص = س^٢ + ٦س - ٤$ $\quad$ $دص = (٢س+٦) \, دس$

$\int (س+٣)(س^٢+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}} \, دس$

$= \frac{١}{٢}\int (س^٢+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}} ((٢س+٦) \, دس)$

$= \frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٥}} \, دص = \frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٦} ص^{\frac{٦}{٥}} + جـ$

$\frac{٥}{١٢} \sqrt[٥]{(س^٢+٦س-٤)^٦} + جـ$

٣) $\int \frac{١٠س - ٥}{\sqrt[٣]{(س^٢-س+١)^٢}} \, دس$

$ص = س^٢ - س + ١$ $\quad$ $دص = (٢س - ١) \, دس$

$\int (١٠س-٥)(س^٢-س+١)^{\frac{-٢}{٣}} \, دس$

$= ٥\int (س^٢-س+١)^{\frac{-٢}{٣}} ((٢س-١) \, دس)$

$= ٥\int ص^{\frac{١}{٣}} \, دص = ٥\times٣ \, ص^{\frac{١}{٣}} + جـ$

$= ١٥ \sqrt[٣]{س^٢-س+١} + جـ$

تدريب (٢)

١) $\int س^٧ \sqrt{س^٤-٣} \, دس$

$ص = س^٤ - ٣$ $\quad$ $دص = ٤س^٣ \, دس$

$\int س^٧ (س^٤-٣)^{\frac{١}{٢}} \, دس = \frac{١}{٤}\int س^٤ ص^{\frac{١}{٢}} (٤س^٣ \, دس)$

$= \frac{١}{٤}\int س^٤ ص^{\frac{١}{٢}} \, دص$

$= \frac{١}{٤}\int (ص+٣) ص^{\frac{١}{٢}} \, دص$

$= \frac{١}{٤}\int (ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ص^{\frac{١}{٢}}) \, دص$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + ٣\times\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢}{٥}\sqrt{(س^٤-٣)^٥} + ٢\sqrt{(س^٤-٣)^٣}\right) + جـ$

٢) $\int ٢س^٥ (س^٢+٥)^٤ \, دس$

$ص = س^٢ + ٥$ $\quad$ $دص = ٢س \, دس$

$\int س^٤ ص^٤ (٢س) \, دس$

$\int (ص-٥)^٢ ص^٤ \, دص$

$\int (ص^٢ - ١٠ص + ٢٥) ص^٤ \, دص$

$\int ص^٦ - ١٠ص^٥ + ٢٥ص^٤ \, دص$

$\frac{ص^٧}{٧} - \frac{١٠ص^٦}{٦} + \frac{٢٥ص^٥}{٥} + جـ$

$= \frac{(س^٢+٥)^٧}{٧} - \frac{٥(س^٢+٥)^٦}{٣} + ٥(س^٢+٥)^٥ + جـ$

تدريب (٣)

١) $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\,دس$

$= \int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٥}\times س^{٢}}\,دس$

$= \int \frac{١}{س^{٢}}\left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٥}دس$

$ص = \frac{٢س+١}{س}$ ، $ص = ٢ + \frac{١}{س}$

$دص = \frac{-١}{س^{٢}}\,دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}}\,(ص)^{٥}\,دس = -\int ص^{٥}\,دص$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + ج$

$= -\frac{١}{٦}\left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} + ج$

٢) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٧}+٥س^{٣}}\,دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٣}}\;\sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\,دس$

$\int س^{٣}\sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\,دس$

$ص = س^{٤}+٥$ $\quad دص = ٤س^{٣}\,دس$

$\int س^{٣}(س^{٤}+٥)^{\frac{١}{٣}}\,دس = \frac{١}{٤}\int ص^{\frac{١}{٣}}\,دص$

$= \frac{١}{٤}\times\frac{٣}{٤}\,ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{(س^{٤}+٥)^{٤}} + ج$

٣) $\int \sqrt[٣]{٤س^{٥}+٣س^{٣}}\,دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س\sqrt[٣]{٤س^{٢}+٣}\,دس$

$ص = ٤س^{٢}+٣$ $\quad دص = ٨س\,دس$

$\int س\,(٤س^{٢}+٣)^{\frac{١}{٣}}\,دس = \frac{١}{٨}\int ص^{\frac{١}{٣}}\,دص$

$= \frac{١}{٨}\times\frac{٣}{٤}\,ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٣٢}\sqrt[٣]{(٤س^{٢}+٣)^{٤}} + ج$

٤) $\int (٧س^{٥}-٢س)^{٣}\,دس$

$\int س^{٣}(٧س^{٤}-٢)^{٣}\,دس$

$ص = ٧س^{٤}-٢$ $\quad دص = ٢٨س^{٣}$

$\int \frac{١}{٢٨}\,ص^{٣}\,دص = \frac{١}{٢٨}\,\frac{ص^{٤}}{٤} + ج$

$= \frac{١}{١١٢}(٧س^{٤}-٢)^{٤} + ج$

تدريب (٤)

١) $\int_{٠}^{٤} س\sqrt{س^{٢}+٩}\,دس$

$ص = س^{٢}+٩$ $\quad دص = ٢س\,دس$

$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} ص^{\frac{١}{٢}}\,دص$ $\qquad س=٠ \quad ص=٩$; $س=٤ \quad ص=٢٥$

$\frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{ص^{٣}}\right]_{٩}^{٢٥}$

$\frac{١}{٣}(١٢٥-٢٧) = \frac{٩٨}{٣}$

٢) $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٧}} \, \text{دس}$

$\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٥}\,\text{س}^{٢}} \, \text{دس}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{\text{س}^{٢}} \left(\frac{\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٥} \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\text{س}+١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ١ + \frac{١}{\text{س}}$ $\quad \text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} \, \text{دس}$

$-\int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} \text{ص}^{٥} \, \text{دص}$ $\quad$ س = ١ ، ص = ٢

س = ٢ ، ص = $\frac{٣}{٢}$

$-\left[\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}\right]_{٢}^{\frac{٣}{٢}}$

$-\frac{١}{٦}\left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٦} - (٢)^{٦}\right) = \frac{٣٣٦٧}{٣٨٤}$

<u>تدريب (٥)</u>

١) $\int (\text{س}^{٢}+١)\, \text{جا}(\text{س}^{٣}+٣\text{س}+١) \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}+٣\text{س}+١ \qquad \text{دص} = (٣\text{س}^{٢}+٣)\,\text{دس}$

$\int \frac{١}{٣} \, \text{جا ص} \, \text{دص} = -\frac{١}{٣} \, \text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣} \, \text{جتا}(\text{س}^{٣}+٣\text{س}+١) + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س} \, \text{ظا}^{٢}(\text{س}^{٢}+٥) \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٥ \qquad \text{دص} = ٢\text{س} \, \text{دس}$

$\int \frac{١}{٢} \, \text{ظا}^{٢}\text{ص} \, \text{دص} = \frac{١}{٢} \int (\text{قا}^{٢}\text{ص} - ١) \, \text{دص}$

$\frac{١}{٢}(\text{ظا ص} - \text{ص}) + \text{جـ} = \frac{١}{٢}\left(\text{ظا}(\text{س}^{٢}+٥) - (\text{س}^{٢}+٥)\right) + \text{جـ}$

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{\text{هـ}^{\frac{٣}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}} \qquad \text{دص} = -\frac{٣}{\text{س}^{٢}} \, \text{دس}$

س = ١ ← ص = ٣

س = ٢ ← ص = $\frac{٣}{٢}$

$\int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \frac{-١}{٣} \, \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص}$

$= -\frac{١}{٣}\left[\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{٣}^{\frac{٣}{٢}} = -\frac{١}{٣}\left(\text{هـ}^{\frac{٣}{٢}} - \text{هـ}^{٣}\right)$

<u>تدريب (٦)</u> :

١) $\int \text{ظا}^{٥}٣\text{س} \, \text{قا}^{٢}٣\text{س} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}\,٣\text{س} \qquad \text{دص} = ٣\,\text{قا}^{٢}٣\text{س} \, \text{دس}$

$\int \frac{١}{٣} \, \text{ص}^{٥} \, \text{دص} = \frac{١}{٣} \, \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٨} \, \text{ظا}^{٦}٣\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{\text{جتا}\,٢\text{س}}{\text{قتا}^{٥}٢\text{س}} \, \text{دس} = \int \text{جا}^{٥}٢\text{س} \, \text{جتا}\,٢\text{س} \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}\,٢\text{س} \qquad \text{دص} = ٢\,\text{جتا}\,٢\text{س} \, \text{دس}$

$\int \frac{١}{٢} \, \text{ص}^{٥} \, \text{دص} = \frac{١}{٢} \, \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$\frac{١}{١٢} \, \text{جا}^{٦}٢\text{س} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جا}^{٣}\text{س} \, \text{دس} = \int \text{جاس} \times \text{جا}^{٢}\text{س} \, \text{دس}$

$\int \text{جاس}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}) \, \text{دس} \qquad \text{ص} = \text{جتاس}$

$-\int (١ - \text{ص}^{٢}) \, \text{دص} \qquad \text{دص} = -\text{جاس} \, \text{دس}$

$= -\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = -\text{جتاس} + \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{جا}^{٤}\,٥\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\,٥\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}\,٥\text{س}$ ، $\text{دص} = ٥\,\text{جتا}\,٥\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{١}{٥}\ \text{ص}^{٤} \times \text{جتا}^{٢}\,٥\text{س}\ \text{دص}$

$\leftarrow (١ - \text{جا}^{٢}\,٥\text{س})$

$\int \frac{١}{٥}\ \text{ص}^{٤}(١ - \text{ص}^{٢})\ \text{دص}$

$= \int \frac{١}{٥}\ (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦})\ \text{دص}$

$\frac{١}{٥}\left(\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٧}}{٧}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^{٥}\,٥\text{س}}{٢٥} - \frac{\text{جا}^{٧}\,٥\text{س}}{٣٥} + \text{جـ}$

تمارين ومسائل صفحة (٢٧٣ ، ٢٧٤)

حـل)

أ) $\int_{٠}^{٢} (\text{س}+٣)\sqrt{\text{س}^{٢}+٦\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢}+٦\text{س}$ ، $\text{دص} = (٢\text{س}+٦)\ \text{دس}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠$

$\int_{٠}^{١٦} \frac{١}{٢}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص}$ $\quad$ $\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ١٦$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\ \left[\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١٦}$

$\frac{١}{٣}\left(\sqrt{١٦^{٣}} - \sqrt{٠^{٣}}\right) = \frac{٦٤}{٣}$

ب) $\int \frac{٢\text{س} - ٣}{٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٥}\ \text{دس}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٥$ ، $\text{دص} = (٤\text{س} - ٦)\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٥| + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{٢}{(٤\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٧}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{٢}{((٢\text{س} - ٥)^{٢})^{٧}}\ \text{دس}$

$= \int ٢\,(٢\text{س} - ٥)^{-١٤}\ \text{دس}$

$= \frac{٢\,(٢\text{س} - ٥)^{-١٣}}{٢ \times -١٣} + \text{جـ} = \frac{-١}{١٣\,(٢\text{س} - ٥)^{١٣}} + \text{جـ}$

د) $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}\ \text{دس}$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{(\text{س} - ٢)^{٢}}\ \text{دس} = \int_{٣}^{٤} ٧(\text{س} - ٢)^{-٢}\ \text{دس}$

$\left[\frac{-٧}{\text{س} - ٢}\right]_{٣}^{٤} = \frac{-٧}{٢} + \frac{٧}{١} = \frac{٧}{٢}$

هـ) $\int \frac{\text{ظتا}^{٢}\frac{١}{\text{س}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$= \int -\,\text{ظتا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص}$

$= \int -\,(\text{قتا}^{٢}\text{ص} - ١)\ \text{دص}$

$= -\,(-\,\text{ظتا}\,\text{ص} - \text{ص}) + \text{جـ}$

$= \text{ظتا}\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$

و) $\int \frac{(٥ + \sqrt{\text{س}})^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + ٥$ $\quad$ $\text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\int ٢\,\text{ص}^{٧}\ \text{دص} = \frac{٢\,\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

$\frac{(٥ + \sqrt{\text{س}})^{٨}}{٤} + \text{جـ}$

ن) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\sqrt{\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ٢ + \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\;\text{دس}$

$\int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}} \,.\, \text{دس} = -\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\;\text{دص}$

$= -\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= -\frac{٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٣}} + \text{جـ}$

ع) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١}{\text{س}\sqrt{١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\;\text{دس}$

$\text{ص} = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دص} = \frac{١}{\text{س}}\;\text{دس}$

$\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ١$

$\text{س} = \text{هـ}^{٣}$ ، $\text{ص} = ٤$

$\int_{١}^{٤} \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\;\text{دص} = \left[٢\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\right]_{١}^{٤}$

$٢\left(\sqrt{٤} - \sqrt{١}\right) = ٢$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\;\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \text{هـ}^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\;\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}}\;\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}$ $\qquad$ $\text{دص} = ٣\text{س}^{٢}\;\text{دس}$

$\int \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\;\text{دص} = \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}+١)^{٥}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}} \times \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}+١)^{٣}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+١}\right)^{٣}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ ، $\text{دص} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}\;\text{دس}$

$= \int \text{ص}^{٣}\;\text{دص} = \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$

$\frac{١}{٤}\left(\frac{\text{س}}{١+\text{س}}\right)^{٤} + \text{جـ}$

ك) $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\;\text{دس}$

$= \int \sqrt[٣]{\frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}} + ١}\;\text{دس} = \int \sqrt[٣]{\frac{١ + \text{س}^{\frac{٣}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}\sqrt[٣]{١+\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}\;\text{دس}$

$\text{ص} = ١ + \text{س}^{\frac{٣}{٤}}$ ، $\text{دص} = +\frac{٣}{٤}\,\text{س}^{-\frac{١}{٤}}\;\text{دس}$

$= +\frac{٤}{٣}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\;\text{دص} = +\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \sqrt[٣]{\left(١+\text{س}^{\frac{٣}{٤}}\right)^{٤}} + \text{جـ}$

ل) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\,(١+\text{جاس})^{٧}\;\text{دس}$

$\text{ص} = ١ + \text{جاس}$ ، $\text{دص} = \text{جتاس}\;\text{دس}$

$\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\;\text{ص}^{٧}\;\text{دص} = \int (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{ص}^{٧}\;\text{دص}$

$= \int \left(١ - (\text{ص}-١)^{٢}\right)\text{ص}^{٧}\;\text{دص}$

$= \int ٢\text{ص}^{٨} - \text{ص}^{٩}\;\text{دص} = \frac{٢\text{ص}^{٩}}{٩} - \frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

$= \frac{٢(١+\text{جاس})^{٩}}{٩} - \frac{(١+\text{جاس})^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

س٣) إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{د(س)}\ \text{دس} = ١٨$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}$ $\qquad$ $\text{دص} = ٣\,\text{س}^{٢}\ \text{دس}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{ص} = ٢ \qquad \text{ص} = ٨$

$\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\ \text{د}(\text{س}^{٣})\ \text{دس} = \frac{١}{٣}\int_{١}^{٨} \text{د(ص)}\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٣} \times ١٨ = ٦$

س٣) $\int_{٠}^{١} \text{د(س)}\ \text{دس} = ٨$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$ ، $\text{دص} = ٢\,\text{جتا٢س}\ \text{دس}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٠$

$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \qquad \text{ص} = ١$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣\,\text{جتا٢س}\ \text{د(جا٢س)}\ \text{دس}$

$= \frac{٣}{٢}\int_{٠}^{١} \text{د(ص)}\ \text{دص} = \frac{٣}{٢} \times ٨ = ١٢$

س٤) أ) $\int \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{لوهـ جتاس}}\ \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{لوهـ جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\ \text{هـ}^{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ $\qquad$ $\text{دص} = \text{جتاس}\ \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

ب) $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{(\text{س}^{٢} + ٩)^{٣}}}\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٣}\ (\text{س}^{٢} + ٩)^{-\frac{٣}{٢}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩$ ، $\text{دص} = ٢\text{س}\ \text{دس}$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ٩$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ١٣$

$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{١٣} \text{س}^{٢}\ \text{ص}^{-\frac{٣}{٢}}\ \text{دص}$

$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{١٣} (\text{ص} - ٩)\ \text{ص}^{-\frac{٣}{٢}}\ \text{دص} = \frac{١}{٢}\int_{٩}^{١٣} (\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} - ٩\,\text{ص}^{-\frac{٣}{٢}})\ \text{دص}$

$= \frac{١}{٢}\left[(٢\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - ٩ \times -٢\,\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}) \right]_{٩}^{١٣}$

$= \frac{١}{٢}\left((٢\sqrt{١٣} + \frac{١٨}{\sqrt{١٣}}) - (٢ \times ٣ + \frac{١٨}{٣}) \right)$

$= \frac{١}{٢}\left(٢\sqrt{١٣} + \frac{١٨}{\sqrt{١٣}} - ١٢ \right)$

جـ) $\int \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س}\ (١ - \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int ١ - \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$

$= \text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{\text{جاس}\sqrt{\text{جا}^2\text{س}+4}}{\text{قاس}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جاس جتاس}\sqrt{\text{جا}^2\text{س}+4}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} + 4$ ، $\text{دص} = 2\,\text{جاس جتاس دس}$

$\frac{1}{2}\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\text{دص} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\,\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(\text{جا}^2\text{س}+4)^3} + \text{جـ}$

هـ) $\int \text{قتا}^4 6\text{س}\ \text{ظتا}^3 6\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتا}\,6\text{س}$ ، $\text{دص} = -6\,\text{قتا}^2 6\text{س}\,\text{دس}$

$= -\frac{1}{6}\int \text{قتا}^2 6\text{س}\ \text{ص}^3\,\text{دص}$

$= -\frac{1}{6}\int (\text{ظتا}^2 6\text{س}+1)\,\text{ص}^3\,\text{دص}$

$= -\frac{1}{6}\int (\text{ص}^5 + \text{ص}^3)\,\text{دص}$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{\text{ص}^6}{6} + \frac{\text{ص}^4}{4}\right) + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{\text{ظتا}^6 6\text{س}}{6} + \frac{\text{ظتا}^4 6\text{س}}{4}\right) + \text{جـ}$

و) $\int \text{جتا}^4\text{س}\,\text{دس}$

$\int (\text{جتا}^2\text{س})^2\,\text{دس} = \int \left(\frac{1}{2}(1+\text{جتا}\,2\text{س})\right)^2\text{دس}$

$= \int \frac{1}{4}(1+2\,\text{جتا}\,2\text{س}+\text{جتا}^2 2\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{4}\left(1+2\,\text{جتا}\,2\text{س} + \frac{1}{2}(1+\text{جتا}\,4\text{س})\right)\text{دس}$

$= \frac{1}{4}\left(\text{س} + \text{جا}\,2\text{س} + \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{1}{4}\,\text{جا}\,4\text{س}\right)\right) + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{(1+\text{جتا}^2\text{س})^5}\,\text{دس}$

$\int \text{جا}\,2\text{س}\,(1+\text{جتا}^2\text{س})^{-5}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 1 + \text{جتا}^2\text{س}$ ، $\text{دص} = -2\,\text{جتاس جاس دس}$

$\int -\text{ص}^{-5}\,\text{دص} = -\frac{\text{ص}^{-4}}{-4} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4(1+\text{جتا}^2\text{س})^4} + \text{جـ}$

ح) $\int \text{جا}\,2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{جتا}\,2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتا}\,2\text{س}$ ، $\text{دص} = -2\,\text{جا}\,2\text{س}\,\text{دس}$

$-\frac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{جتا}\,2\text{س}} + \text{جـ}$

ط) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{5 - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 5 - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{ص} = 5 - \text{س}^{\frac{4}{3}}$

$\text{دص} = -\frac{4}{3}\,\text{س}^{\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$\int -\frac{3}{4} \times \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{3}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= -\frac{3}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|5 - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}| + \text{جـ}$

ي) $\int \text{قا}^4\text{س}\,\text{دس} = \int \text{قا}^2\text{س} \times \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\,(\text{ظا}^2\text{س}+1)\,\text{دس}$

$= \int \text{ص}^2+1\,\text{دص}$ $\quad \text{ص} = \text{ظاس}$

$\text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

ك) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٣+\sqrt{\text{س}})}\ \text{دس}$

$\text{ص} = ٣ + \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\int \frac{٢}{\text{ص}}\ \text{دص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣+\sqrt{\text{س}}| + \text{ج}$

ل) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس} + ٣}}{٢ - ٢\,\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢\,(١-\text{جتا}^٢\text{س})}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢\,\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\int \text{قتا}^٢\text{س}\,\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس}+٣$ ، $\text{دص} = -\text{قتا}^٢\text{س}\ \text{دس}$

$-\frac{١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\ \text{دص} = -\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{ج}$

$= -\frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{ظتاس}+٣)^٤} + \text{ج}$

م) $\int \text{جاس}\,(١+\text{جتا}٢\text{س})^٥\ \text{دس}$

$= \int \text{جاس}\,(٢\,\text{جتا}^٢\text{س})^٥\ \text{دس}$

$= ٣٢\int \text{جاس}\,\text{جتا}^{١٠}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{دص} = -\text{جاس}\ \text{دس}$

$-٣٢\int \text{ص}^{١٠}\ \text{دص}$

$= -٣٢\,\frac{\text{ص}^{١١}}{١١} + \text{ج}$

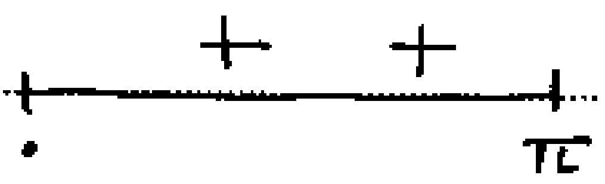
$= -٣٢\,\frac{\text{جتا}^{١١}\text{س}}{١١} + \text{ج}$

ن) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^٣\text{س}}\ \text{دس}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}\,(١-\text{جتا}^٢\text{س})}\ \text{دس}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}} \times \sqrt{\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جاس}|\,\sqrt{\text{جتاس}}\ \text{دس}$



$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\,(\text{جتاس})^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{دص} = -\text{جاس}\ \text{دس}$

$-\int_{١}^{٠} \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص}$ $\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = ٠$

$= -\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{\text{ص}^٣}\right]_{١}^{٠}$

$= \text{صفر} + \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

س) $\int \frac{١}{\text{س}^٢}\sqrt{\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ٢ + \frac{١}{\text{س}}$ $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^٢}\ \text{دس}$

$-\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص}$

$-\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ج} = -\frac{٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^٣} + \text{ج}$

ع) $\int \text{جتا}٢\text{س}\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٨\ \text{دس}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س})\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٨\ \text{دس}$

$= \int (\text{جتاس} + \text{جاس})\,(\text{جتاس} - \text{جاس})\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٨\ \text{دس}$

$= \int (\text{جتاس} + \text{جاس})\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٩\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس} - \text{جتاس}$ ، $\text{دص} = (\text{جتاس} + \text{جاس})\ \text{دس}$

$= -\int \text{ص}^٩\ \text{دص} = -\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{ج}$

$= -\frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^{١٠}}{١٠} + \text{ج}$

س٥) $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س} - ١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{٢}} \, \text{دس}$

$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}^{٢}} \left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س}} \right)^{\text{ن}} \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ١ - \frac{١}{\text{س}}$

$\text{دص} = + \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{س} = \frac{١}{٢}$ $\text{ص} = -١$

$\text{س} = ١$ $\text{ص} = ٠$

$\int_{-١}^{٠} \text{ص}^{\text{ن}} \, \text{دص} = \left[\frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} \right]_{-١}^{٠}$

$= \text{صفر} - \frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$

ن: فردي ⟸ ن+١ زوجي $(-١)^{\text{ن}+١} = ١$

$= \frac{-١}{\text{ن}+١}$

ن: زوجي ⟸ ن+١ فردي $(-١)^{\text{ن}+١} = -١$

$= - \times \frac{-١}{\text{ن}+١} = \frac{١}{\text{ن}+١}$.

$$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س} - ١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}} \, \text{دس} = \begin{cases} \frac{-١}{\text{ن}+١} & \text{، ن: فردي} \\ \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{ن: زوجي} \end{cases}$$

س٦)

أ) $\int \text{جتا}^{١٠}\text{س} \; \text{جا}^{٧}\text{س} \; \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{جتا س}$

ب) $\int \text{جتا}^{٥}\text{س} \; \text{جا}^{٧}\text{س} \; \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{جا س}$

جـ) $\int \text{ظا}^{٥}\text{س} \; \text{قا}^{٤}\text{س} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا س}$

د) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س} \; \text{قا}^{٥}\text{س} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{قا س}$

هـ) $\int \text{ظتا}^{٦}\text{س} \; \text{قتا}^{٤}\text{س} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتا س}$

و) $\int \text{ظتا}^{٧}\text{س} \; \text{قتا}^{٤}\text{س} \; \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتا س}$

ثانياً: التكامل بالأجزاء

تدريب (١)

١) ∫ س جتاس د س

ع = س   د ع = د س

د هـ = جتاس د س   هـ = جاس

∫ س جتاس د س = س جاس − ∫ جاس د س

= س جاس + جتاس + جـ

٢) ∫ س جا٥س د س

ع = س   د ع = د س

د هـ = جا٥س د س   هـ = $-\frac{1}{5}$ جتا٥س

∫ س جا٥س د س = $-\frac{1}{5}$ س جتا٥س + $\frac{1}{5}$ ∫ جتا٥س د س

= $-\frac{1}{5}$ س جتا٥س + $\frac{1}{25}$ جا٥س + جـ

٣) ∫ (٢س − ٣) هـ^{س} د س

ع = ٢س − ٣   د ع = ٢ د س

د هـ = هـ^{س} د س   هـ = هـ^{س}

∫ (٢س − ٣) هـ^{س} د س = (٢س − ٣) هـ^{س} − ∫ ٢ هـ^{س} د س

= (٢س − ٣) هـ^{س} − ٢ هـ^{س} + جـ

٤) ∫ س قا^{٢}س د س

ع = س   د ع = د س

د هـ = قا^{٢}س د س   هـ = ظاس

∫ س قا^{٢}س د س = س ظاس − ∫ ظاس د س

= س ظاس + لو$_{هـ}$ | جتاس | + جـ

تدريب (٣)

٤) ∫ س جا^{٢}س د س

ع = س   د ع = د س

د هـ = جا^{٢}س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا٢س) د س   هـ = $\frac{1}{2}$ (س − $\frac{1}{2}$ جا٢س)

∫ س جا^{٢}س د س = $\frac{1}{2}$ س (س − $\frac{1}{2}$ جا٢س) − ∫ $\frac{1}{2}$ (س − $\frac{1}{2}$ جا٢س) د س

= $\frac{1}{2}$ س (س − $\frac{1}{2}$ جا٢س) − $\frac{1}{2}$ ($\frac{س^{٢}}{٢}$ + $\frac{1}{4}$ جتا٢س) + جـ

٢) ∫ س لو$_{هـ}$ س^{٣} د س = ∫ ٣س لو$_{هـ}$ س د س

ع = لو$_{هـ}$ س   د ع = $\frac{1}{س}$ د س

د هـ = ٣ س د س   هـ = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$

∫ ٣س لو$_{هـ}$ س د س = $\frac{3}{2}$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س − ∫ $\frac{3}{2}$ س د س

= $\frac{3}{2}$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س − $\frac{3}{4}$ س^{٢} + جـ

٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ٣ س جاس د س

ع = ٣س   د ع = ٣ د س

د هـ = جاس د س   هـ = − جتاس

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ٣س جاس د س = $\Big[$ −٣س جتاس $\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ + $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ٣ جتاس د س

= (−٣ × $\frac{\pi}{2}$ جتا $\frac{\pi}{2}$ + ٣ × ٠ جتا ٠) + $\Big[$ ٣ جاس $\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= صفر + ٣ جا $\frac{\pi}{2}$ − ٣ جا ٠

= ٣

٤) $\int \frac{\text{س}}{١ - \text{جتا}٢\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}}{٢\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{و} = \frac{١}{٢}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دو} = \frac{١}{٢}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\text{ظتاس}$

$\int \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} = -\frac{١}{٢}\text{س}\ \text{ظتاس} + \int \frac{١}{٢}\text{ظتاس}\ \text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{س}\ \text{ظتاس} + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| + \text{جـ}$

تدريب (٣) :

١) $\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{و} = \text{س}^{٢}$ $\qquad$ $\text{دو} = ٢\text{س}\ \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

أجزاء مرة أخرى

$\text{و} = ٢\text{س}$ $\qquad$ $\text{دو} = ٢\ \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس}$

$\text{و} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}$ $\qquad$ $\text{دو} = ٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\int \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \underbrace{\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}}_{\text{أجزاء مرة أخرى}}$

$\text{و} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دو} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤}$

$\therefore \int \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$

تدريب (٤)

١) $\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

و		د هـ
$\text{س}^{٣}$		$\text{هـ}^{\text{س}}$
$٣\text{س}^{٢}$	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٦س	−	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٦	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر	−	$\text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٣\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٦\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}^{٢}\,\text{جتا}٤\text{س}\ \text{دس}$

و		د هـ
$\text{س}^{٢}$		$\text{جتا}٤\text{س}$
٢س	+	$\frac{١}{٤}\text{جا}٤\text{س}$
٢	−	$-\frac{١}{١٦}\text{جتا}٤\text{س}$
صفر	+	$-\frac{١}{٦٤}\text{جا}٤\text{س}$

$\int \text{س}^{٢}\,\text{جتا}٤\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}\,\text{جا}٤\text{س} + \frac{١}{٨}\text{س}\ \text{جتا}٤\text{س} - \frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\text{س} + \text{جـ}$

٣) ∫ (س^{٢} − س) جا٢س دس

ع		د هـ
س^{٢} − س	+	جا٢س
٢س − ١	−	− $\frac{١}{٢}$ جتا٢س
٢	+	− $\frac{١}{٤}$ جا٢س
صفر		$\frac{١}{٨}$ جتا٢س

∫ (س^{٢} − س) جا٢س دس = − $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} − س) جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ (٢س − ١) جا٢س

+ $\frac{١}{٤}$ جتا٢س + جـ

٤) ∫ س^{٢} (٢س + ١)^{٥} دس

ع		د هـ
س^{٢}	+	(٢س + ١)^{٥}
٢س	−	$\frac{(٢س + ١)^{٦}}{١٢}$
٢	+	$\frac{(٢س + ١)^{٧}}{١٦٨}$
صفر		$\frac{(٢س + ١)^{٨}}{٢٦٨٨}$

∫ س^{٢} (٢س + ١)^{٥} دس = $\frac{س^{٢}}{١٢}$ (٢س + ١)^{٦} − $\frac{س}{٨٤}$ (٢س + ١)^{٧}

+ $\frac{(٢س + ١)^{٨}}{١٣٤٤}$ + جـ

تدريب (٥) :

١) ∫ قا^{٢}س هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ دس

ص = $\sqrt{ظاس}$ ، ص^{٢} = ظاس ، ٢ص دص = قا^{٢}س دس

∫ ٢ص هـ^{ص} دص

ع = ٢ص   د ع = ٢ دص

د هـ = هـ^{ص} دص   هـ = هـ^{ص}

∫ ٢ص هـ^{ص} دص = ٢ص هـ^{ص} − ٢هـ^{ص} + جـ

= ٢$\sqrt{ظاس}$ هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ − ٢هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ + جـ

٢) ∫ جا٢س هـ^{جاس} دس

ص = جاس ، دص = جتاس دس

∫ ٢ جاس هـ^{جاس} جتاس دس

∫ ٢ص هـ^{ص} دص (تكامل بالأجزاء)

= ٢ص هـ^{ص} − ٢هـ^{ص} + جـ

= ٢جاس هـ^{جاس} − ٢هـ^{جاس} + جـ

٣) ∫ جتا $\sqrt{٢س + ١}$ دس

ص = $\sqrt{٢س + ١}$ ، ص^{٢} = ٢س + ١ ، ٢ص دص = ٢دس

∫ ص جتاص دص

ع = ص   د ع = دص

د هـ = جتاص دص   هـ = جاص

∫ ص جتاص دص = ص جاص + جتاص + جـ

= $\sqrt{٢س+١}$ جا $\sqrt{٢س+١}$ + جتا $\sqrt{٢س+١}$ + جـ

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٣ قا^{٤}س لو$_{هـ}$ ظاس دس

ص = ظاس   دص = قا^{٢}س دس

س = $\frac{\pi}{٤}$ ص = ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ ص = $\sqrt{٣}$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}}$ ٣ قا^{٢}س لو$_{هـ}$ص دص = $\int_{١}^{\sqrt{٣}}$ ٣(ص^{٢}+١) لو$_{هـ}$ص دص

(ظا^{٢}س+١)

ع = لو$_{هـ}$ص   د ع = $\frac{١}{ص}$ دص

د هـ = ٣(ص^{٢}+١) دص   هـ = ٣($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص)

= $\left[٣(\frac{ص^{٣}}{٣}+ص)\right.$ لو$_{هـ}$ص$\left.\right]_{١}^{\sqrt{٣}}$ − $\int_{١}^{\sqrt{٣}}$ ٣($\frac{ص^{٢}}{٣}$ + ١) دص

= $\left[٣(\frac{ص^{٣}}{٣}+ص)\right.$ لو$_{هـ}$ص$\left.\right]_{١}^{\sqrt{٣}}$ − $\left[٣(\frac{ص^{٣}}{٩} + ص)\right]_{١}^{\sqrt{٣}}$

= (٣($\frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٣}$ + $\sqrt{٣}$) لو$_{هـ}$ $\sqrt{٣}$) − (صفر) − ٣(($\frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٩}$ + $\sqrt{٣}$) − ($\frac{١}{٩}$ + ١))

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٢

س١) أ) $\int_{٠}^{\pi} (٢\text{س}+١)\,\text{جتا}٣\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ع} = ٢\text{س}+١$ $\qquad$ $\text{دع} = ٢\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جتا}٣\text{س}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{١}{٣}\text{جا}٣\text{س}$

$\int_{٠}^{\pi} (٢\text{س}+١)\text{جتا}٣\text{س}\,\text{دس} =$

$\frac{١}{٣}(٢\text{س}+١)\text{جا}٣\text{س}\Big]_{٠}^{\pi} - \int_{٠}^{\pi} \frac{٢}{٣}\text{جا}٣\text{س}\,\text{دس}$

$\left(\frac{١}{٣}(٢\pi+١)\text{جا}٣\pi\right) - \left(\frac{١}{٣}(٢\times٠+١)\text{جا}٠\right) + \frac{٢}{٩}\text{جتا}٣\text{س}\Big]_{٠}^{\pi}$

$\text{صفر} + \frac{٢}{٩}\text{جتا}٣\pi - \frac{٢}{٩}\text{جتا صفر}$

$-\frac{٢}{٩} - \frac{٢}{٩} = -\frac{٤}{٩}$

ب) $\int \text{س}^٢ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{س}^٢\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^٣}{٣}$

$\int \text{س}^٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^٣}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}^٢}{٣}\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^٣}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٩} + \text{جـ}$

جـ) $\int_{-٢}^{١} ٥\text{س}\sqrt{\text{س}+٣}\,\text{دس}$

$\text{ع} = ٥\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = ٥\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{٢}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}$

$\int_{-٢}^{١} ٥\text{س}\sqrt{\text{س}+٣}\,\text{دس} = \frac{١٠\text{س}}{٣}\sqrt{(\text{س}+٣)^٣}\Big]_{-٢}^{١} - \int_{-٢}^{١}\frac{١٠}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{دس}$

$\left(\frac{١٠}{٣}\times٨ + \frac{٢٠}{٣}\times١\right) - \frac{١٠}{٣}\times\frac{٢}{٥}\sqrt{(\text{س}+٣)^٥}\Big]_{-٢}^{١}$

$\frac{١٠٠}{٣} - \left(\frac{٤}{٣}\times٣٢ - \frac{٤}{٣}\times١\right)$

$\frac{١٠٠}{٣} - \frac{١٢٤}{٣} = -٨$

د) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^٣\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{س ظاس قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{ظاس قا}^٢\text{س}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{١}{٢}\text{قا}^٢\text{س}$

تكامل بالتعويض

$\int \text{س ظاس قا}^٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س قا}^٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\text{قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\text{س قا}^٢\text{س} - \frac{١}{٢}\text{ظاس} + \text{جـ}$

هـ) $\int \text{قا}^٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = \text{قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{١}{\text{ص}}\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{دص}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{ص}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص} = \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{دص}$

$= \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

و) $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{دس} = \int \text{س هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}}$

$\int \text{س هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{دس} = -\frac{١}{٢}\text{س هـ}^{-٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{س هـ}^{-٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \text{جـ}$

ن) ∫ جتا $\sqrt[3]{س}$ دس

ص = $\sqrt[3]{س}$ ، ص^{3} = س ⟸ ٣ص^{2} دص = دس

∫ ٣ص^{2} جتاص دص

ع		د هـ
٣ص^{2}	+	جتاص
٦ص	−	جاص
٦	+	− جتاص
صفر		− جاص

= ٣ص^{2} جاص + ٦ص جتاص − ٦جاص + ج

= ٣ $(\sqrt[3]{س})^{2}$ جا $\sqrt[3]{س}$ + ٦ $\sqrt[3]{س}$ جتا $\sqrt[3]{س}$ − ٦جا $\sqrt[3]{س}$ + ج

ح) ∫ جتاس لو$_{هـ}$ جاس دس

ص = جاس   دص = جتاس دس

∫ لو$_{هـ}$ص دص

ع = لو$_{هـ}$ص   دع = $\frac{1}{ص}$ دص

دهـ = دص   هـ = ص

∫ لو$_{هـ}$ص دص = ص لو$_{هـ}$ص − ص + ج

= جاس لو$_{هـ}$جاس − جاس + ج

ط) ∫ س (جاس + جتاس)^{2} دس

= ∫ س (١ + جا٢س) دس

ع = س   دع = دس

دهـ = ١ + جا٢س دس   هـ = س − $\frac{1}{2}$ جتا٢س

∫ س(١ + جا٢س) دس = س^{2} − $\frac{1}{2}$س جتا٢س − ∫ (س − $\frac{1}{2}$ جتا٢س) دس

= س^{2} − $\frac{1}{2}$س جتا٢س − ($\frac{س^{2}}{2}$ − $\frac{1}{4}$ جا٢س) + ج

= $\frac{س^{2}}{2}$ − $\frac{1}{2}$ س جتا٢س + $\frac{1}{4}$ جا٢س + ج

ي) ∫ هـ^{س} جتا٣س دس

ع = هـ^{س} دع = هـ^{س} دس

دهـ = جتا٣س دس   هـ = $\frac{1}{3}$ جا٣س

∫ هـ^{س} جتا٣س دس = $\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا٣س − ∫ $\frac{1}{3}$ جا٣س هـ^{س} دس

أجزاء مرة أخرى

ع = هـ^{س} دع = هـ^{س}

دهـ = $\frac{1}{3}$ جا٣س   هـ = −$\frac{1}{9}$ جتا٣س

∫ هـ^{س} جتا٣س دس =

$\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا٣س + $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا٣س − ∫ $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا٣س دس

$\frac{10}{9}$ ∫ هـ^{س} جتا٣س دس = $\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا٣س + $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا٣س

∴ ∫ هـ^{س} جتا٣س دس = $\frac{9}{10}$ ($\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا٣س + $\frac{1}{9}$ هـ^{س} جتا٣س) + ج

ك) ∫ $\frac{لو_{هـ}(س+٣)}{\sqrt{س+٣}}$ دس

نفرض ص = $\sqrt{س+٣}$ ، ص^{2} = س + ٣

٢ص دص = دس

∫ $\frac{لو_{هـ}ص^{2}}{ص}$. ٢ص دص = ٤ ∫ لو$_{هـ}$ص دص

ع = لو$_{هـ}$ص   دع = $\frac{1}{ص}$ دص

دهـ = ٤ دص   هـ = ٤ص

٤ ∫ لو$_{هـ}$ص دص = ٤ ص لو$_{هـ}$ص − ٤ص + ج

= ٤$\sqrt{س+٣}$ لو$_{هـ}$ $\sqrt{س+٣}$ − ٤$\sqrt{س+٣}$ + ج

ل) $\int (س^2 - 2س)\sqrt{س+3}\ دس$

ع		د هـ
$س^2 - 2س$	+	$(س+3)^{\frac{1}{2}}$
$2س - 2$	−	$\frac{2}{3}(س+3)^{\frac{3}{2}}$
2	+	$\frac{4}{15}(س+3)^{\frac{5}{2}}$
صفر		$\frac{8}{105}(س+3)^{\frac{7}{2}}$

$\int (س^2 - 2س)\sqrt{س+3}\ دس =$

$\frac{2}{3}(س^2 - 2س)\sqrt{(س+3)^3} - \frac{4}{15}(2س-2)\sqrt{(س+3)^5}$

$+ \frac{16}{105}\sqrt{(س+3)^7} + جـ$

م) $\int قا^2س\ لو_{هـ} جاس\ دس$

$ع = لو_{هـ} جاس$ $\qquad دع = \frac{جتاس}{جاس}\ دس$

$دهـ = قا^2س\ دس$ $\qquad هـ = ظاس$

$\int قا^2س\ لو_{هـ} جاس\ دس = ظاس\ لو_{هـ} جاس - \int ظاس \times \frac{جتاس}{جاس}\ دس$

$= ظاس\ لو_{هـ} جاس - س + جـ$

ن) $\int 2\ هـ^{س}\ جاس\ جتاس\ دس$

$= \int هـ^{س}\ جا2س\ دس$

$ع = جا2س$ $\qquad دع = 2\ جتا2س\ دس$

$دهـ = هـ^{س}\ دس$ $\qquad هـ = هـ^{س}$

$\int هـ^{س} جا2س\ دس = هـ^{س} جا2س - \int 2هـ^{س} جتا2س\ دس$

أجزاء مرة أخرى

$ع = 2\ جتا2س$ $\qquad دع = -4\ جا2س\ دس$

$دهـ = هـ^{س}\ دس$ $\qquad هـ = هـ^{س}$

$\int هـ^{س} جا2س\ دس = هـ^{س} جا2س - 2هـ^{س} جتا2س - \int 4هـ^{س} جا2س\ دس$

$5\int هـ^{س} جا2س\ دس = هـ^{س} جا2س - 2هـ^{س} جتا2س$

$\therefore \int هـ^{س} جا2س\ دس = \frac{1}{5}(هـ^{س} جا2س - 2هـ^{س} جتا2س) + جـ$

س) $\int (س^3 + 2س)\ هـ^{س}\ دس$

ع		د هـ
$(س^3 + 2س)$	+	$هـ^{س}$
$3س^2 + 2$	−	$هـ^{س}$
$6س$	+	$هـ^{س}$
6	−	$هـ^{س}$
صفر		$هـ^{س}$

$\int (س^3 + 2س)\ هـ^{س}\ دس =$

$(س^3 + 2س)هـ^{س} - (3س^2 + 2)هـ^{س} + 6س\ هـ^{س} - 6هـ^{س} + جـ$

ع) $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(1+س)^2}\ دس = \int س\ هـ^{س} (س+1)^{-2}\ دس$

$ع = س\ هـ^{س}$ $\qquad دع = هـ^{س}(س+1)\ دس$

$دهـ = (س+1)^{-2}$ $\qquad هـ = \frac{-1}{س+1}$

$\int س\ هـ^{س}(س+1)^{-2}\ دس = \frac{-س\ هـ^{س}}{س+1} + \int هـ^{س}\ دس$

$= \frac{-س\ هـ^{س}}{س+1} + هـ^{س} + جـ$

س٢) $\int_{1}^{2}$ ق(س) دس = ٣

ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ٨

$\int_{1}^{2}$ س قَ(س) دس

ع = س   دع = دس

دهـ = قَ(س) دس   هـ = ق(س)

$\int_{1}^{2}$ س قَ(س) دس = $\Big[$س ق(س)$\Big]_{1}^{2}$ − $\int_{1}^{2}$ ق(س) دس

= ٢ ق(٢) − ١ ق(١) − ٣

= ١٦ − ٥ − ٣ = ٨

س٣) $\int_{1}^{2}$ ق(س) دس = ١٠

ق(٢) = ٣ ، ق(١) = −١

$\int_{0}^{1}$ س^{٥} قَ(س^{٣} + ١) دس

نفرض ص = س^{٣} + ١   دص = ٣س^{٢} دس

س = ٠ ، ص = ١

س = ١   ص = ٢

$\int_{1}^{2}$ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} قَ(ص) دص

= $\int_{1}^{2}$ $\frac{١}{٣}$ (ص − ١) قَ(ص) دص

ع = $\frac{١}{٣}$ (ص − ١)   دع = $\frac{١}{٣}$ دص

دهـ = قَ(ص) دص   هـ = ق(ص)

$\int_{1}^{2}$ $\frac{١}{٣}$ (ص − ١) قَ(ص) دص =

$\Big[\frac{١}{٣}$ (ص − ١) ق(ص)$\Big]_{1}^{2}$ − $\int_{1}^{2}$ $\frac{١}{٣}$ ق(ص) دص

= $\frac{١}{٣}$ × ١ ق(٢) − $\frac{١}{٢}$ × ٠ × ق(١) − $\frac{١}{٣}$ × ١٠

= $\frac{٣}{٣}$ − $\frac{١٠}{٣}$ = − $\frac{٧}{٣}$.

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية

تدريب (١)

$$\int \frac{٥}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}\,\text{دس}$$

$$\frac{٥}{(\text{س}-٣)(\text{س}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١}$$

$$٥ = \text{أ}(\text{س}-١) + \text{ب}(\text{س}-٣)$$

$\text{س} = ١$	$\text{س} = ٣$
$٥ = -٢\text{ب}$	$٥ = ٢\text{أ}$
$\text{ب} = \frac{-٥}{٢}$	$\text{أ} = \frac{٥}{٢}$

$$\int \frac{٥}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}\,\text{دس} = \int \frac{+\frac{٥}{٢}}{\text{س}-٣}\,\text{دس} + \int \frac{-\frac{٥}{٢}}{\text{س}-١}\,\text{دس}$$

$$= \frac{٥}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣| - \frac{٥}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$$

تدريب (٢)

$$\int \frac{\text{س} - ١٣}{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ٣}\,\text{دس}$$

$$\frac{\text{س}-١٣}{(٢\text{س}-١)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{٢\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$$

$$\text{س} - ١٣ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(٢\text{س}-١)$$

$\text{س} = ٣$	$\text{س} = \frac{١}{٢}$
$-١٠ = ٥\text{ب}$	$-١٢{,}٥ = -٢{,}٥\,\text{أ}$
$\text{ب} = -٢$	$\text{أ} = ٥$

$$\int \frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^٢-٧\text{س}+٣}\,\text{دس} = \int \frac{٥}{٢\text{س}-١}\,\text{دس} + \int \frac{-٢}{\text{س}-٣}\,\text{دس}$$

$$= \frac{٥}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س}-١| - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣| + \text{جـ}$$

تدريب (٣)

١) $$\int \frac{\text{س}^٢ + \text{س} + ٥}{\text{س}^٢ + \text{س}}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{س}^٢ + \text{س} + ٥ & \text{س}^٢ + \text{س} \\ -(\text{س}^٢ + \text{س}) & \\ \hline ٥ & \end{array}$$

$$\int ١\,\text{دس} + \int \frac{٥}{\text{س}^٢ + \text{س}}\,\text{دس}$$

← كسور جزئية

$$\frac{٥}{\text{س}(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$$

$$٥ = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}\,\text{س}$$

$\text{س} = -١$	$\text{س} = \text{صفر}$
$-\text{ب} = ٥$	$\boxed{\text{أ} = ٥}$
$\boxed{\text{ب} = -٥}$	

$$\int ١\,\text{دس} + \int \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس} + \int \frac{-٥}{\text{س}+١}\,\text{دس}$$

$$\text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١| + \text{جـ}$$

٢) $$\int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س} - ١}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^٢ + \text{س} + ٢ & \\ \hline \text{س}^٣ + \text{س} & \text{س} - ١ \\ -(\text{س}^٣ - \text{س}^٢) & \\ \hline \text{س}^٢ + \text{س} & \\ -(\text{س}^٢ - \text{س}) & \\ \hline ٢\text{س} & \\ -(٢\text{س} - ٢) & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$= \int_{٢}^{٣} (\text{س}^٢ + \text{س} + ٢)\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} \frac{٢}{\text{س}-١}\,\text{دس}$$

$$\left[\frac{\text{س}^٣}{٣} + \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١|\right]_{٢}^{٣}$$

٩ + $\frac{٩}{٢}$ + ٦ + ٢لو$_{هـ}$٢ − $\frac{٨}{٣}$ − ٢ − ٤ − ٢لو$_{هـ}$١

$\frac{٦٥}{٦}$ + ٣لو$_{هـ}$٢

* * *

تدريب (٤)

١) ∫ $\frac{قا^{٢}س}{٥ظا^{٢}س - ٣ظاس - ٢}$ دس

نفرض ص = ظاس   دص = قا^{٢}س دس

∫ $\frac{١}{٥ص^{٢} - ٣ص - ٢}$ دص

$\frac{١}{(٥ص + ٢)(ص - ١)} = \frac{أ}{٥ص + ٢} + \frac{ب}{ص - ١}$

١ = أ(ص − ١) + ب(٥ص + ٢)

ص = ١	ص = $-\frac{٢}{٥}$
٧ب = ١	$-\frac{٧}{٥}$أ = ١
ب = $\frac{١}{٧}$	أ = $\frac{-٥}{٧}$

∫ $\frac{١}{٥ص^{٢} - ٣ص - ٢}$ دص = ∫ $\frac{-\frac{٥}{٧}}{٥ص + ٢}$ دص + ∫ $\frac{\frac{١}{٧}}{ص - ١}$ دص

= $-\frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}$|٥ص + ٢| + $\frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}$|ص − ١| + جـ

= $-\frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}$|٥ظاس + ٢| + $\frac{١}{٧}$ لو$_{هـ}$|ظاس − ١| + جـ

* * *

٢) ∫ $\frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤}$ دس

ص = $\sqrt[٣]{س}$ ، ص^{٣} = س ، ٣ص^{٢} دص = دس

∫ $\frac{٣ص^{٢}(ص - ١)}{ص^{٢} - ٤}$ دص = ∫ $\frac{٣ص^{٣} - ٣ص^{٢}}{ص^{٢} - ٤}$ دص

$$\begin{array}{r|l} & ٣ص - ٣ \\ \hline ص^{٢} - ٤ & ٣ص^{٣} - ٣ص^{٢} \\ & -(٣ص^{٣} - ١٢ص) \\ \hline & -٣ص^{٢} + ١٢ص \\ & -(-٣ص^{٢} + ١٢) \\ \hline & ١٢ص - ١٢ \end{array}$$

∫ (٣ص − ٣) دص + ∫ $\frac{١٢ص - ١٢}{ص^{٢} - ٤}$ دص
← كسور جزئية

$\frac{١٢ص - ١٢}{(ص - ٢)(ص + ٢)} = \frac{أ}{ص - ٢} + \frac{ب}{ص + ٢}$

١٢ص − ١٢ = أ(ص + ٢) + ب(ص − ٢)

ص = ٢	ص = −٢
١٢ = ٤أ	−٣٦ = −٤ب
أ = ٣	ب = ٩

∫ (٣ص − ٣) دص + ∫ $\frac{٣}{ص - ٢}$ دص + ∫ $\frac{٩}{ص + ٢}$ دص

$\frac{٣ص^{٢}}{٢}$ − ٣ص + ٣لو$_{هـ}$|ص − ٢| + ٩لو$_{هـ}$|ص + ٢| + جـ

= $\frac{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}{٢}$ − ٣$\sqrt[٣]{س}$ + ٣لو$_{هـ}$|$\sqrt[٣]{س}$ − ٢| + ٩لو$_{هـ}$|$\sqrt[٣]{س}$ + ٢| + جـ

٣) $\int_{٠}^{٣}$ $\frac{\sqrt{س + ١} - ١}{\sqrt{س + ١} + ١}$ دس

نفرض ص = $\sqrt{س + ١}$ ، ص^{٢} = س + ١   ٢ص دص = دس

$\int_{١}^{٢}$ $\frac{٢ص(ص - ١)}{ص + ١}$ دص

$$\begin{array}{r|l} & ٢ص - ٤ \\ \hline ص + ١ & ٢ص^{٢} - ٢ص \\ & -(٢ص^{٢} + ٢ص) \\ \hline & -٤ص \\ & -(-٤ص - ٤) \\ \hline & ٤ \end{array}$$

$\int_{١}^{٢}$ (٢ص − ٤) دص + $\int_{١}^{٢}$ $\frac{٤}{ص + ١}$ دص

$[ص^{٢} - ٤ص]_{١}^{٢}$ + ٤$[$لو$_{هـ}$|ص + ١|$]_{١}^{٢}$

−١ + ٤لو$_{هـ}$٣ − ٤لو$_{هـ}$٢

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٩

١) $\int \frac{٧}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-١٠}\,\text{دس}$

$$\frac{٧}{(\text{س}-٥)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٥} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$٧ = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س}-٥)$

$\text{س} = -٢$ $\qquad$ $\text{س} = ٥$

$٧ = -٧\text{ب}$ $\qquad$ $٧ = ٧\text{أ}$

$\text{ب} = -١$ $\qquad$ $\text{أ} = ١$

$$\int \frac{٧}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}-١٠}\,\text{دس} = \int \frac{١}{\text{س}-٥}\,\text{دس} + \int \frac{-١}{\text{س}+٢}\,\text{دس}$$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٥| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢| + \text{جـ}$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-٤\text{س}-١٢}\,\text{دس}$

$$\frac{٢\text{س}}{(\text{س}-٦)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٦} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$٢\text{س} = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س}-٦)$

$\text{س} = -٢$ $\qquad$ $\text{س} = ٦$

$-٤ = -٨\text{ب}$ $\qquad$ $١٢ = ٨\text{أ}$

$\text{ب} = \frac{١}{٢}$ $\qquad$ $\text{أ} = \frac{٣}{٢}$

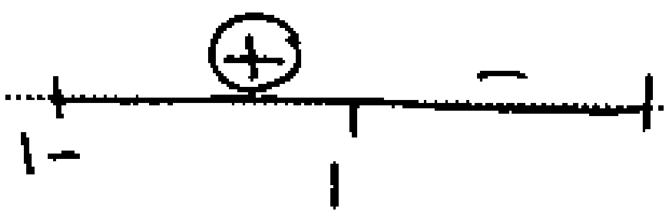
$$\int_{١}^{٣} \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س}-٦}\,\text{دس} + \int_{١}^{٣} \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س}+٢}\,\text{دس}$$

$= \frac{٣}{٢}\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٦|\Big]_{١}^{٣} + \frac{١}{٢}\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢|\Big]_{١}^{٣}$

$\frac{٣}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \frac{٣}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}٥ + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

$\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}٥$.

٣) $\int_{-١}^{١} \frac{|١-\text{س}|}{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٦}\,\text{دس}$



$\int_{-١}^{١} \frac{١-\text{س}}{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٦}\,\text{دس}$

$$\frac{١-\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$$

$١-\text{س} = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(\text{س}-٢)$

$\text{س} = ٣$ $\qquad$ $\text{س} = ٢$

$\boxed{-٢ = \text{ب}}$ $\qquad$ $-١ = -\text{أ}$

$\boxed{\text{أ} = ١}$

$$\int_{-١}^{١} \frac{١-\text{س}}{\text{س}^{٢}-٥\text{س}+٦}\,\text{دس} = \int_{-١}^{١} \frac{١}{\text{س}-٢}\,\text{دس} + \int_{-١}^{١} \frac{-٢}{\text{س}-٣}\,\text{دس}$$

$= \Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٢|\Big]_{-١}^{١} + -٢\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣|\Big]_{-١}^{١}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}١ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٤$

$= ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٤ - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣$.

٤) $\int \frac{\text{س}^{٣}+٤\text{س}-٨}{\text{س}^{٢}-٩}\,\text{دس}$

بالقسمة الطويلة $\Leftarrow \int \text{س}\,\text{دس} + \int \frac{١٣\text{س}-٨}{\text{س}^{٢}-٩}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{٣١}{٦}}{\text{س}-٣}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{٤٧}{٦}}{\text{س}+٣}\,\text{دس}$

$\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٣١}{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-٣| + \frac{٤٧}{٦}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٣| + \text{جـ}$

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣\text{س}^٢+٣}{٣\text{س}^٢-\text{س}-٤}\,\text{دس}$

بالقسمة الطويلة ⟸ $\int_{٠}^{١} ١\,\text{دس} + \int_{٠}^{١}\frac{\text{س}+٧}{٣\text{س}^٢-\text{س}-٤}\,\text{دس}$

↲ كسور جزئية

$= \int_{٠}^{١} ١\,\text{دس} + \int_{٠}^{١}\frac{\frac{٢٥}{٧}}{(٣\text{س}-٤)}\,\text{دس} + \int_{٠}^{١}\frac{\frac{-٦}{٧}}{\text{س}+١}\,\text{دس}$

$\text{س}]_{٠}^{١} + \frac{٢٥}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}|٣\text{س}-٤|]_{٠}^{١} + \frac{-٦}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+١|]_{٠}^{١}$

$١ + \cancel{\frac{٢٥}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}١} - \frac{٢٥}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}٤ - \frac{٦}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}٢ + \cancel{\frac{٦}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}١}$

$١ - \frac{٢٥}{٢١}\text{لو}_{\text{هـ}}٤ - \frac{٦}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

٦) $\int \frac{\text{ظاس}}{٢٥-(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس})^٢}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}$ ، $\text{دص} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$\int\frac{١}{\text{ص}^٢-٢٥}\,\text{دص}$

$\frac{١}{(\text{ص}-٥)(\text{ص}+٥)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-٥}+\frac{\text{ب}}{\text{ص}+٥}$

$١ = \text{أ}(\text{ص}+٥)+\text{ب}(\text{ص}-٥)$

$\text{ص} = ٥ \quad \text{أ} = \frac{١}{١٠}$

$\text{ص} = -٥ \quad \text{ب} = -\frac{١}{١٠}$

$\int\frac{\frac{١}{١٠}}{\text{ص}-٥}\,\text{دص} + \int\frac{-\frac{١}{١٠}}{\text{ص}+٥}\,\text{دص}$

$= \frac{١}{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٥| - \frac{١}{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+٥| + \text{جـ}$

$\frac{١}{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}-٥| - \frac{١}{١٠}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}+٥| + \text{جـ}$

٧) $\int\frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad \text{دص}=\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\int\frac{١}{\text{ص}(\text{ص}+١)}\,\text{دص} = \int\frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}+\int\frac{-١}{\text{ص}+١}\,\text{دص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + \text{جـ}$

٨) $\int\frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}-٣\text{هـ}^{\text{س}}-٤}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad \text{دص}=\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\int\frac{\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢-٣\text{ص}-٤}\,\text{دص}$ بالقسمة الطويلة

$= \int ١\,\text{دص} + \int\frac{٣\text{ص}+٤}{\text{ص}^٢-٣\text{ص}-٤}\,\text{دص}$

↲ كسور جزئية

$= \int ١\,\text{دص} + \int\frac{\frac{١٦}{٥}}{\text{ص}-٤}\,\text{دص} + \int\frac{\frac{-١}{٥}}{\text{ص}+١}\,\text{دص}$

$\text{ص} + \frac{١٦}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٤| - \frac{١}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١| + \text{جـ}$

$\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{١٦}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-٤| - \frac{١}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + \text{جـ}$

٩) $\int_{٩}^{١٦}\frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-٤}\,\text{دس}$ نفرض $\text{ص}=\sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^٢=\text{س}$ ، $٢\text{ص}\,\text{دص}=\text{دس}$

$\int_{٣}^{٤}\frac{٢\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢-٤}\,\text{دص} = \int_{٣}^{٤}٢\,\text{دص} + \int_{٣}^{٤}\frac{٨}{\text{ص}^٢-٤}\,\text{دص}$

$= \int_{٣}^{٤}٢\,\text{دص} + \int_{٣}^{٤}\frac{٢}{\text{ص}-٢}\,\text{دص} + \int_{٣}^{٤}\frac{-٢}{\text{ص}+٢}\,\text{دص}$

$= ٢(٤-٣) + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٢|]_{٢}^{٤} - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+٢|]_{٢}^{٤}$

$٢ + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٦ + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٥$

١٠) $\int \frac{\text{جتاس}}{1+3\,\text{جاس}-\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{2\,\text{جا}^2\text{س}+3\,\text{جاس}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{جاس}$ $\qquad \text{دص} = \text{جتاس دس}$

$\int \frac{1}{2\text{ص}^2+3\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}}\,\text{دص} + \int \frac{-\frac{2}{3}}{2\text{ص}+3}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}+3| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\,\text{جاس}+3| + \text{جـ}$

١١) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9)\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) \qquad \text{دع} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9)\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - \int 2\,\text{دس} - \int \frac{18}{\text{س}^2-9}\,\text{دس}$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - 2\text{س} - \left(\int \frac{3}{\text{س}-3}\,\text{دس} + \int \frac{-3}{\text{س}+3}\,\text{دس}\right)$

$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-9) - 2\text{س} - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{جـ}$

١٢) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^4(1+\text{س}^{-2})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}^{-3}}{1+\text{س}^{-2}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = 1+\text{س}^{-2}$

$\text{دص} = -2\,\text{س}^{-3}\,\text{دس}$

$= \int -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{س}^{-2}| + \text{جـ}$

١٣) $\int_{9}^{16} \frac{\text{دس}}{\text{س}-3\sqrt{\text{س}}+2}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int_{3}^{4} \frac{2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{ص}^2-3\text{ص}+2} = \int_{3}^{4} \frac{4}{\text{ص}-2}\,\text{دص} + \int_{3}^{4} \frac{-2}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$\left[4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2|\right]_{3}^{4} + \left[-2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1|\right]_{3}^{4}$

$4\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - \cancel{4\,\text{لو}_{\text{هـ}}1} - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$

$6\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

١٤) $\int \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{\sqrt{4\text{س}-8}-2}\,\text{دس} = \int \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{2\sqrt{\text{س}-2}-2}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}-2}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}-2 \Leftarrow 2\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int \frac{\text{ص}+1}{2\text{ص}-2} \times 2\text{ص}\,\text{دص} = \int \frac{2\text{ص}^2+2\text{ص}}{2\text{ص}-2}\,\text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}^2+\text{ص}}{\text{ص}-1}\,\text{دص} = \int (\text{ص}+2)\,\text{دص} + \int \frac{2}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} + 2\text{ص} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}-2)}{2} + 2\sqrt{\text{س}-2} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}-2}-1| + \text{جـ}$

١٥) $\int \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، $\text{ص}^2 = 1-\text{هـ}^{\text{س}}$

$2\,\text{ص د ص} = -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{د س}$

$\int \frac{2\,\text{ص}^2}{\text{ص}^2-1}\,\text{د ص} = \int 2\,\text{د ص} + \int \frac{2}{\text{ص}^2-1}\,\text{د ص}$

$= \int 2\,\text{د ص} + \int \frac{-1}{\text{ص}+1}\,\text{د ص} + \int \frac{1}{\text{ص}-1}\,\text{د ص}$

$2\,\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$

$2\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}+1\right| + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}-1\right| + \text{جـ}$

١٦) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-\text{قا}^2\text{س}}\,\text{د س} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-(\text{ظا}^2\text{س}+1)}\,\text{د س}$

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{4-\text{ظا}^2\text{س}}\,\text{د س}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظا س}$ ، $\text{د ص} = \text{قا}^2\text{س د س}$

$\int \frac{1}{4-\text{ص}^2}\,\text{د ص} = \int \frac{\frac{1}{4}}{2+\text{ص}}\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{2-\text{ص}}\,\text{د ص}$

$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ص}| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ظا س}| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ظا س}| + \text{جـ}$

١٧) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{8+\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{د س} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{8+1-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{د س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{9-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{د س}$

نفرض $\text{ص} = \text{جا س}$ ، $\text{د ص} = \text{جتا س د س}$

$\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 0$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{2}$ ، $\text{ص} = 1$

$\int_{0}^{1} \frac{1}{9-\text{ص}^2}\,\text{د ص} = \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3-\text{ص}}\,\text{د ص} + \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3+\text{ص}}\,\text{د ص}$

$= -\frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|3-\text{ص}|\Big]_{0}^{1} + \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|3+\text{ص}|\Big]_{0}^{1}$

$-\frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}2 + \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}3 + \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}4 - \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}3$

$= \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}2$

١٨) $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}(\text{لو س})^2-4\text{س}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س}((\text{لو س})^2-4)}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{د ص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$

$= \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^2-4} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{\text{ص}+2}\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{\text{ص}-2}\,\text{د ص}$

$= -\frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| + \text{جـ}$

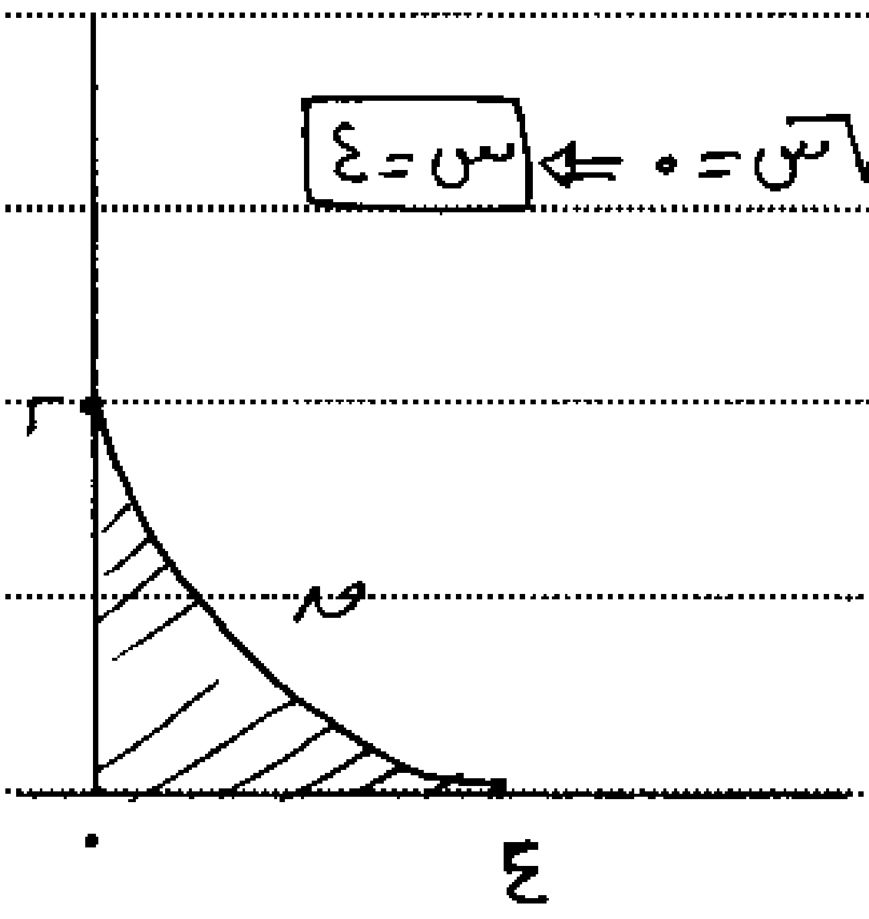
$= -\frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+2| + \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-2| + \text{جـ}$

الفصل الثالث : تطبيقات التكامل

أولاً : المساحة

تدريب (١)

$\text{ق}(\text{س}) = ٢ - \sqrt{\text{س}}$ ، $٢ - \sqrt{\text{س}} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٤}$



$\text{م} = \int_{٠}^{٤} ٢ - \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

$= \left[٢\text{س} - \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{س}^٣} \right]_{٠}^{٤}$

$(٢ \times ٤ - \frac{٢}{٣} \times ٨) - \text{صفر}$

$= \frac{٨}{٣}$ وحدة مساحة

تدريب (٢) :

$\int_{أ}^{ب} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \int_{أ}^{٠} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} + \int_{٠}^{ب} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس}$

$= -٨ + ٥ = -٣$

تدريب (٣)

$\int_{٠}^{٢} \left| \text{جتا}\ \pi\text{س} - ٠ \right| \text{دس} = \int_{٠}^{٢} \left| \text{جتا}\ \pi\text{س} \right| \text{دس}$

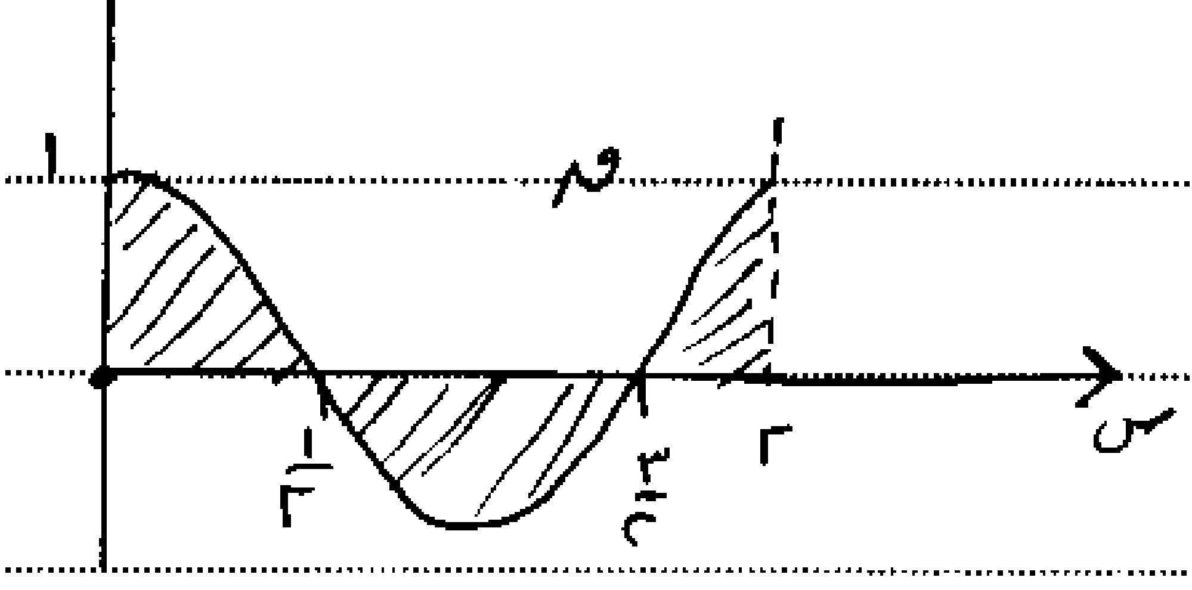
$= \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{جتا}\ \pi\text{س}\ \text{دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} -\text{جتا}\ \pi\text{س}\ \text{دس} + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} \text{جتا}\ \pi\text{س}\ \text{دس}$

$\left[+\frac{١}{\pi} \text{جا}\ \pi\text{س} \right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} \oplus \left[-\frac{١}{\pi} \text{جا}\ \pi\text{س} \right]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \oplus \left[\frac{١}{\pi} \text{جا}\ \pi\text{س} \right]_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

$(\frac{١}{\pi} - \text{صفر}) \oplus (\frac{١}{\pi} + \frac{١}{\pi}) \oplus (\text{صفر} - \frac{-١}{\pi})$

$\frac{١}{\pi} + \frac{٢}{\pi} + \frac{١}{\pi} = \frac{٤}{\pi}$ وحدة مساحة

انظر الشكل المجاور



تدريب (٤) :

$\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^٢ - ٣\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٥\text{س}$

نجد نقاط التقاطع ⟸ ق = هـ

$٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} = ٥\text{س} \Leftarrow \text{س} = \text{صفر}$ ، $\text{س} = ٢$

$\text{م} = \int_{٠}^{٢} \text{هـ}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})\ \text{دس}$

$\text{م} = \int_{٠}^{٢} ٥\text{س} - ٤\text{س}^٢ + ٣\text{س}\ \text{دس} = \int_{٠}^{٢} (٨\text{س} - ٤\text{س}^٢)\ \text{دس}$

$\left[٤\text{س}^٢ - \frac{٤}{٣}\text{س}^٣ \right]_{٠}^{٢} = (١٦ - \frac{٣٢}{٣}) - \text{صفر}$

$= \frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة.

تدريب (٥)

$\text{ق}(\text{س}) = ١ + \text{جاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ١ + \text{جتاس}$

نجد نقاط التقاطع ⟸ $١ + \text{جاس} = ١ + \text{جتاس}$

$\text{س} = \frac{٥\pi}{٤} \in \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢} \right]$

$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \notin \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢} \right]$ نهمل

$\text{م} = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (\text{ق} - \text{هـ})\ \text{دس} + \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (\text{هـ} - \text{ق})\ \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (\text{جاس} - \text{جتاس})\ \text{دس} \oplus \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} \text{جتاس} - \text{جاس}\ \text{دس}$

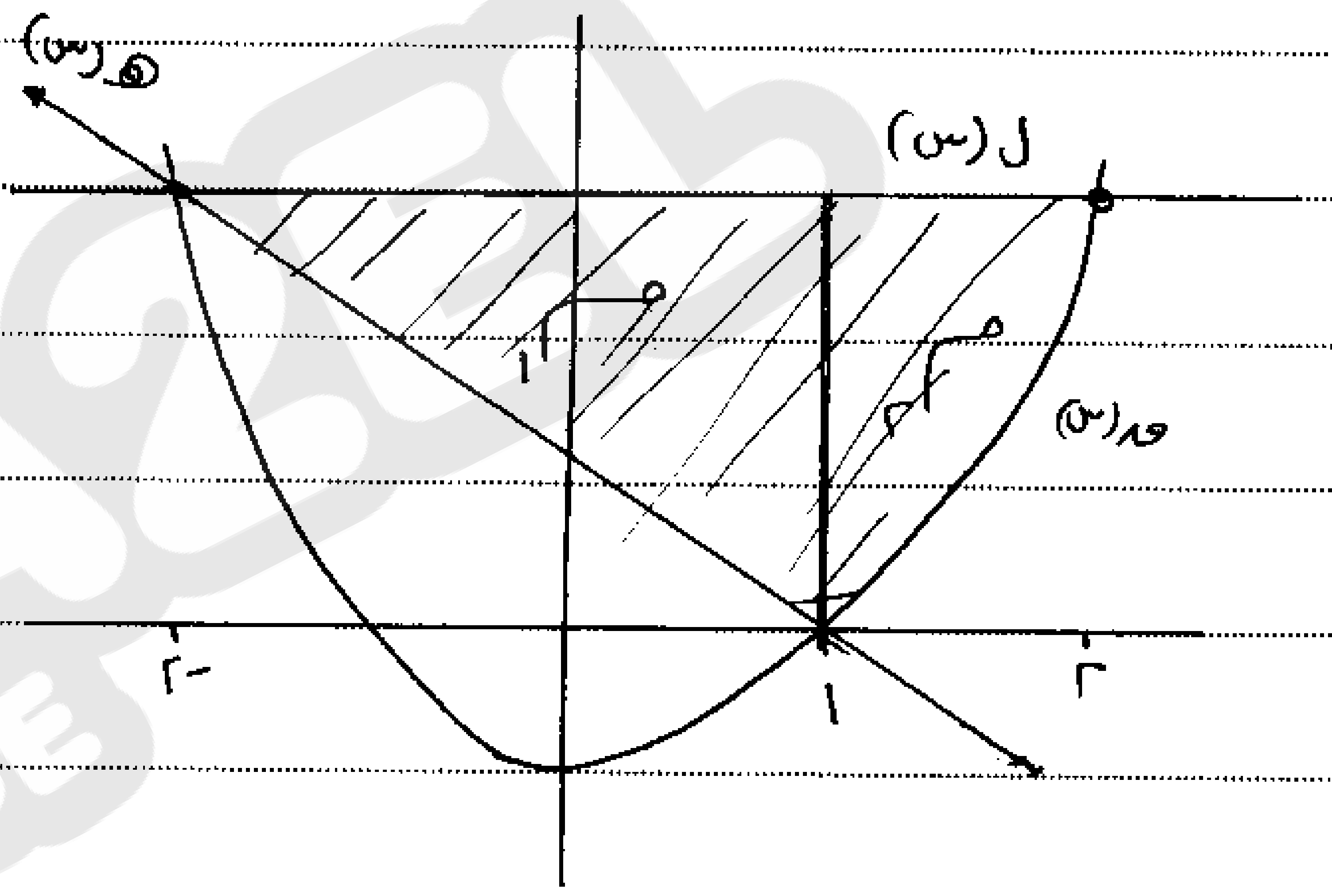
$\left[-\text{جتاس} - \text{جاس} \right]_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} \oplus \left[\text{جاس} + \text{جتاس} \right]_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$

$(+\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) - (-١) \oplus (-١ + ٠) - (-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}})$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} + ١ - ١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

تدريب (٦)

ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
$س^{٢} - ١ = ١ - س$	$س^{٢} - ١ = ٣$	$١ - س = ٣$
$س^{٢} + س - ٢ = ٠$	س = ٢ ، (٢، ٣)	س = -٢
$(س + ٢)(س - ١) = ٠$	س = -٢ (-٢، ٣)	(-٢، ٣)
س = -٢ (-٢، ٣)		
س = +١ (١، ٠)		



$$م = \int_{-٢}^{١} (ل - هـ)\, دس + \int_{١}^{٢} (ل - ق)\, دس$$

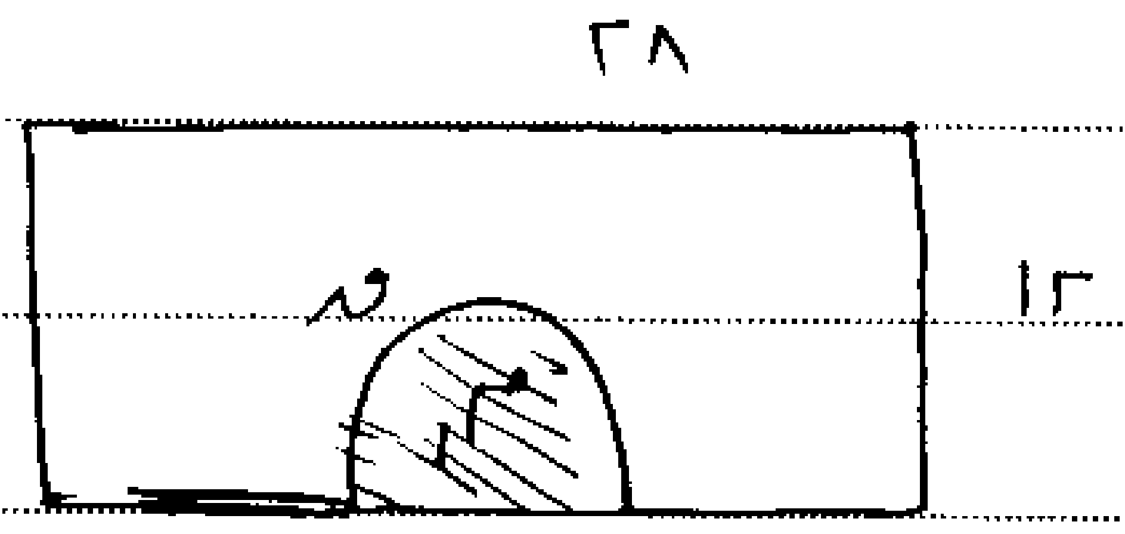
$$م = \int_{-٢}^{١} (٢ + س)\, دس \oplus \int_{١}^{٢} (٤ - س^{٢})\, دس$$

$$\left[٢س + \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{-٢}^{١} \oplus \left[٤س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{١}^{٢}$$

$$(٢ + \frac{١}{٢}) - (-٤ + ٢) \oplus (٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣})$$

$$٤,٥ + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦}$$ وحدة مساحة

تدريب (٧)



أولاً نجد مساحة المنطقة الملونة بالأزرق

= مساحة المستطيل - مساحة المنطقة المظللة

$$= ١٢ \times ٢٨ - \int_{-٤}^{٤} ٨ - \frac{س^{٢}}{٢}\, دس$$

لإيجاد حدود التكامل نضع $٨ - \frac{س^{٢}}{٢} =$ صفر

$$م = ٣٣٦ - \left(٨س - \frac{س^{٣}}{٦} \right]_{-٤}^{٤}$$

$$٣٣٦ - \left((٣٢ - \frac{٦٤}{٦}) - (-٣٢ + \frac{٦٤}{٦}) \right)$$

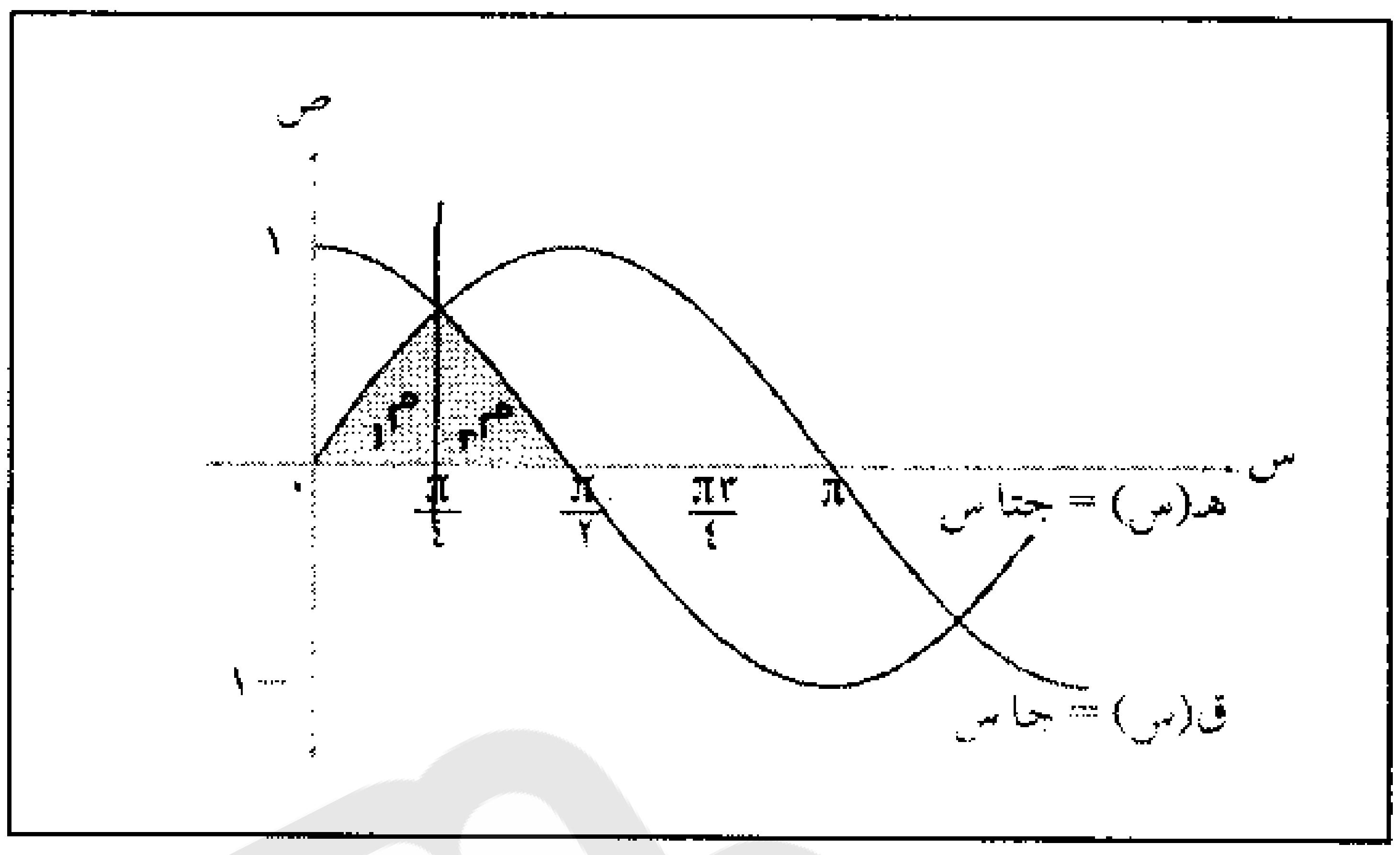
$$م = \frac{٨٨٠}{٣}$$

التكلفة الكلية للدهان = $\frac{٨٨٠}{٣} \times ٤٠$

= $\frac{٣٥٢٠٠}{٣}$ قرشاً.

تمارين ومسـائل صفحة (٣٠١ _ ٣٠٣)

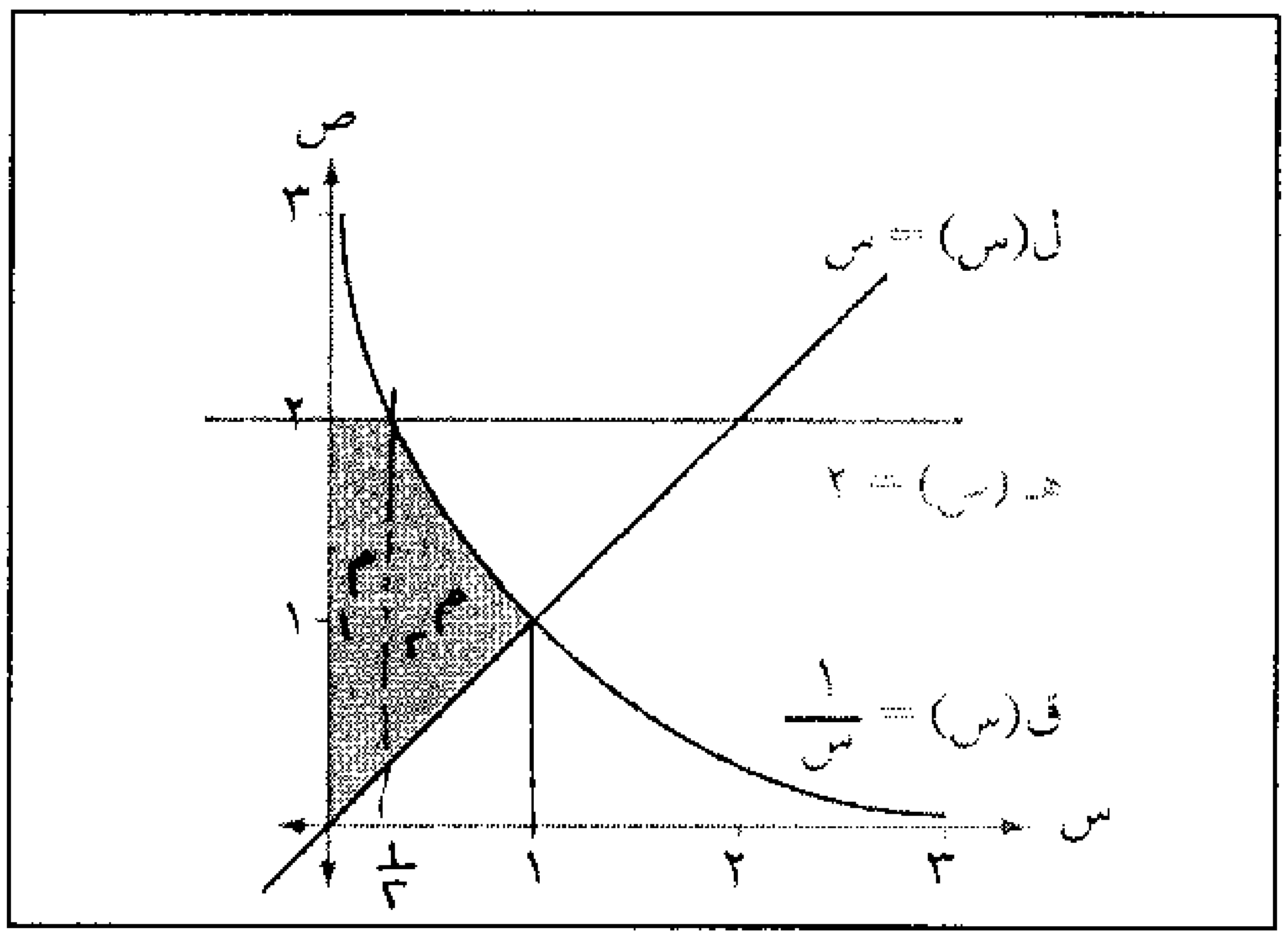
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



الشكل (٤ ــ ٢٤)

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق(س) دس} + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{هـ(س) دس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جاس دس} + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس دس}$$



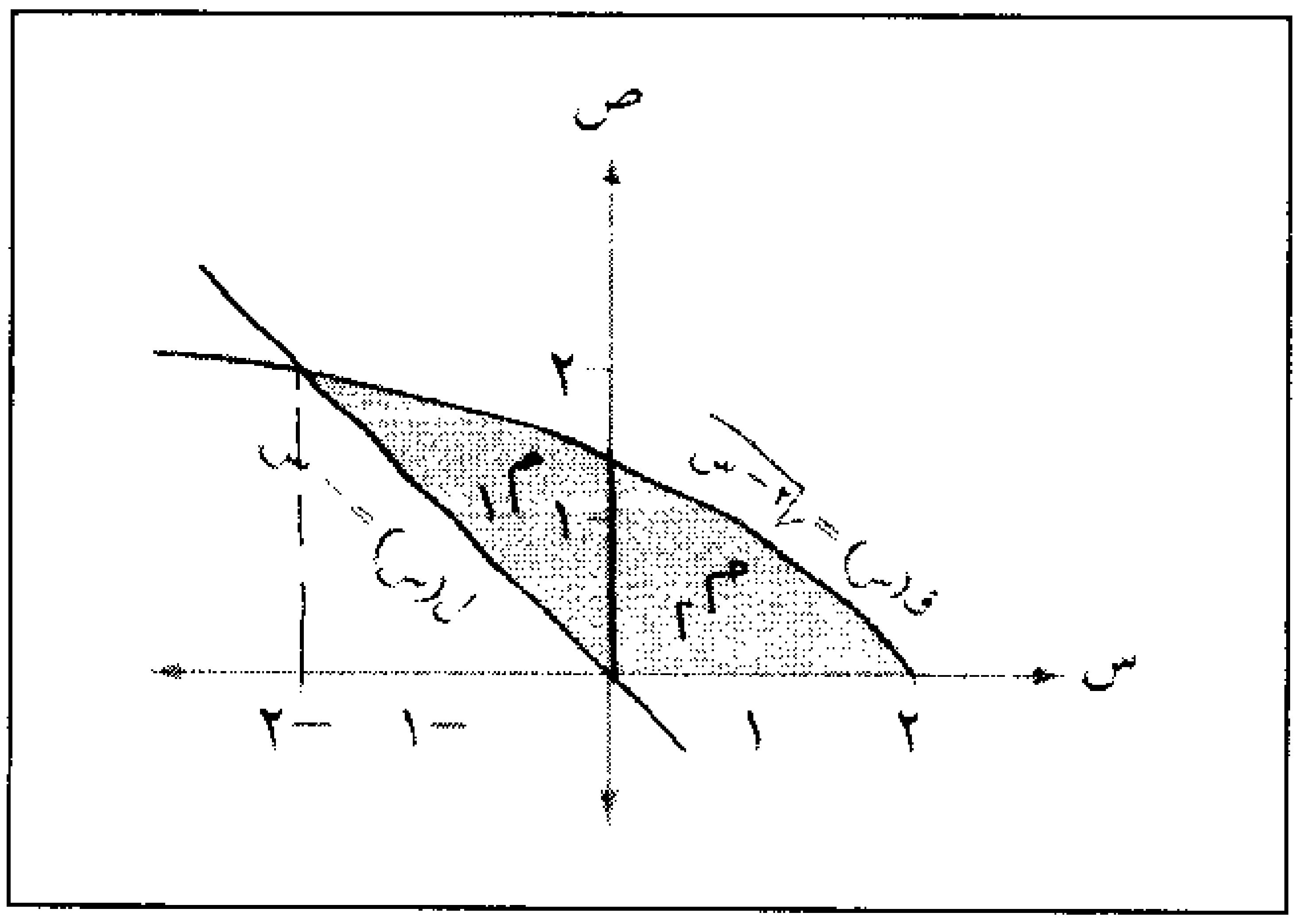
الشكل (٤ ــ ٢٥)

$$\text{هـ(س)} = \text{ق(س)} \Leftarrow \frac{١}{\text{س}} = ٢ \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$$

$$= \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{هـ(س)} - \text{ل(س) دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \text{ق(س)} - \text{ل(س) دس}$$

$$= \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} ٢ - \text{س دس} \oplus \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{\text{س}} - \text{س دس}$$

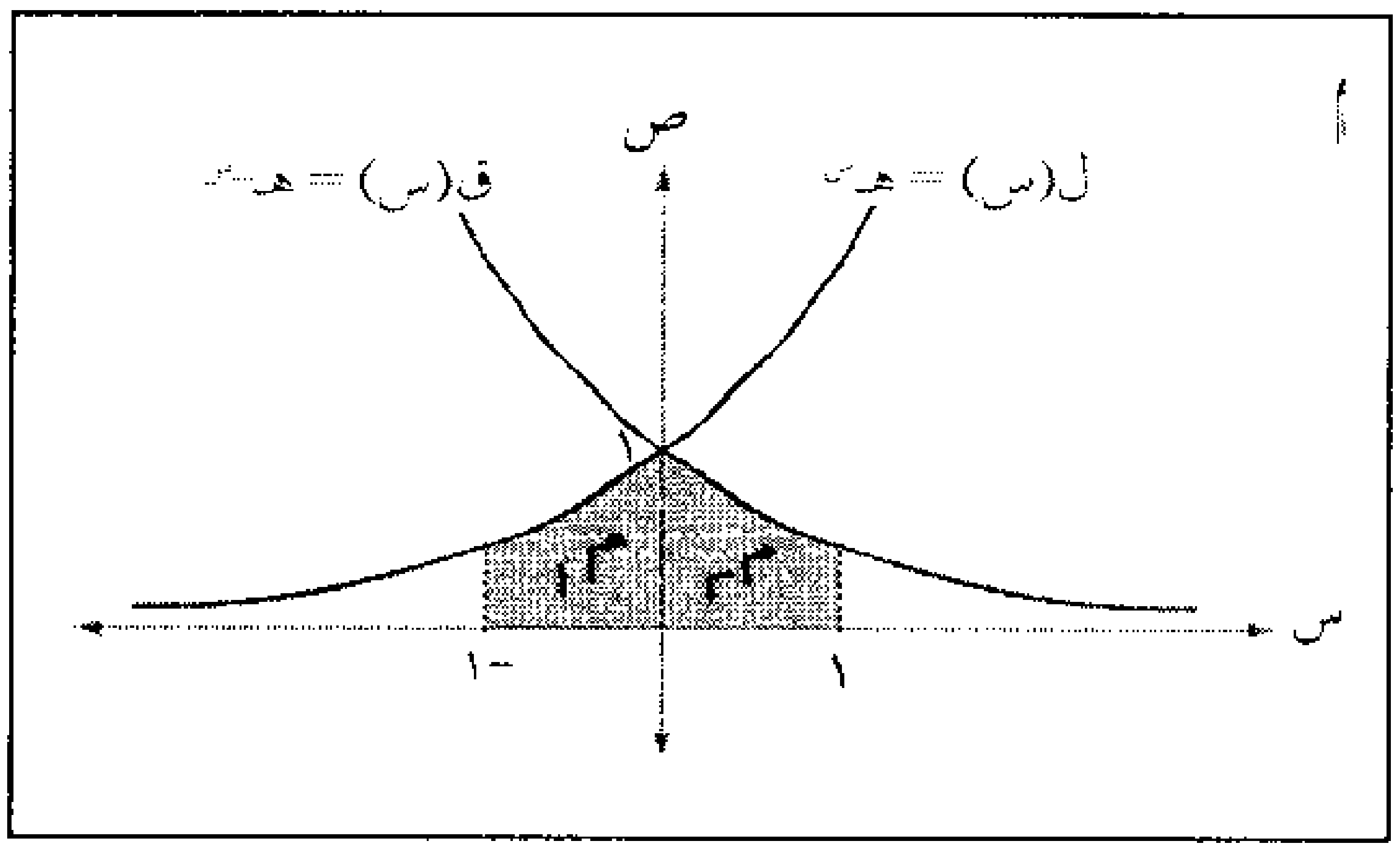


الشكل (٤ ــ ٢٦)

$$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$$

$$= \int_{-٢}^{٠} (\text{ق} - \text{ل}) \text{ دس} + \int_{٠}^{٢} (\text{ق} - \text{صفر}) \text{ دس}$$

$$= \int_{-٢}^{٠} \sqrt{٢ - \text{س}} + \text{س دس} \oplus \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - \text{س}} \text{ دس}$$

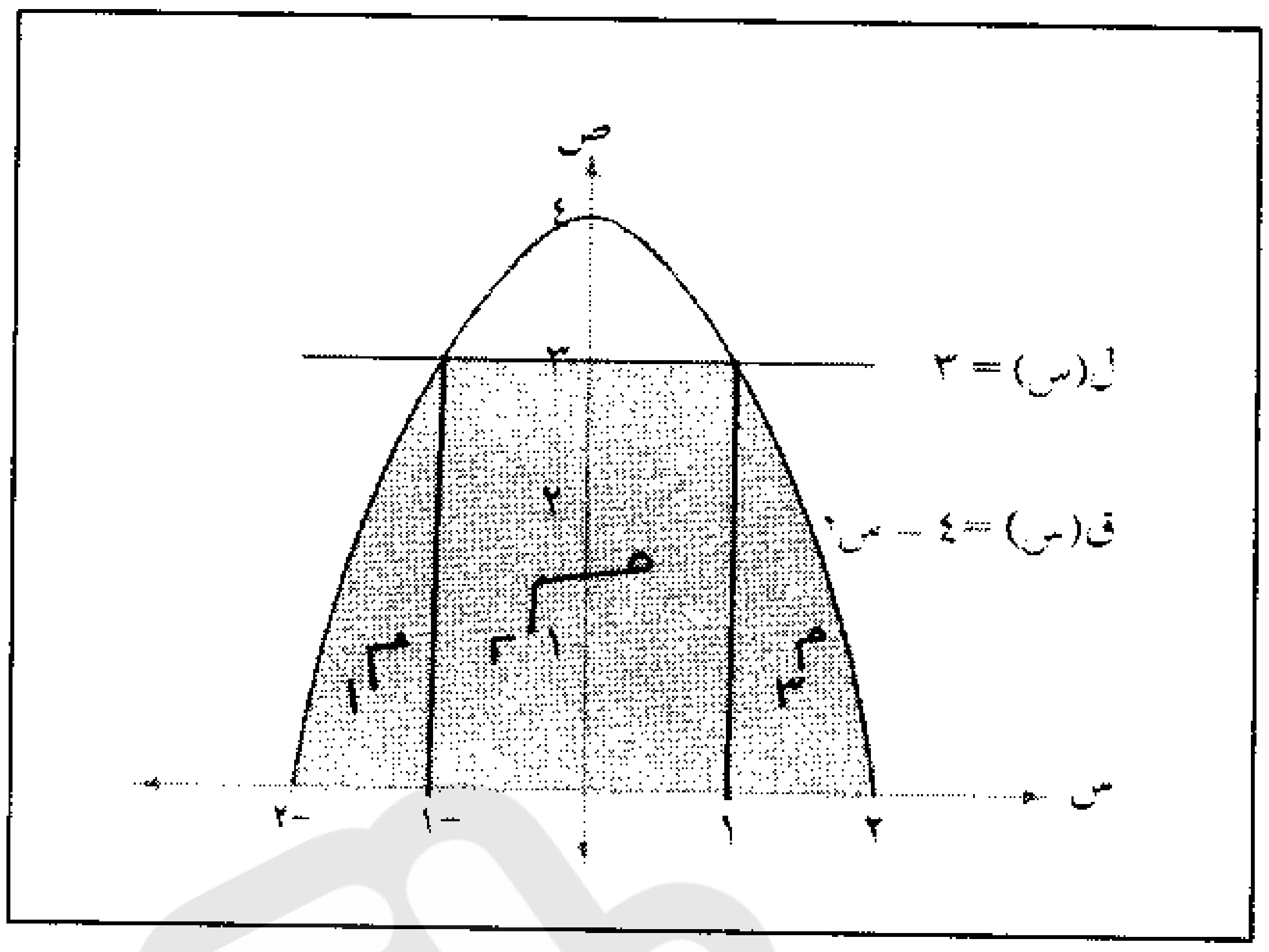


الشكل (٤ ــ ٢٧)

$$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$$

$$= \int_{-١}^{٠} \text{ل(س) دس} + \int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس}$$

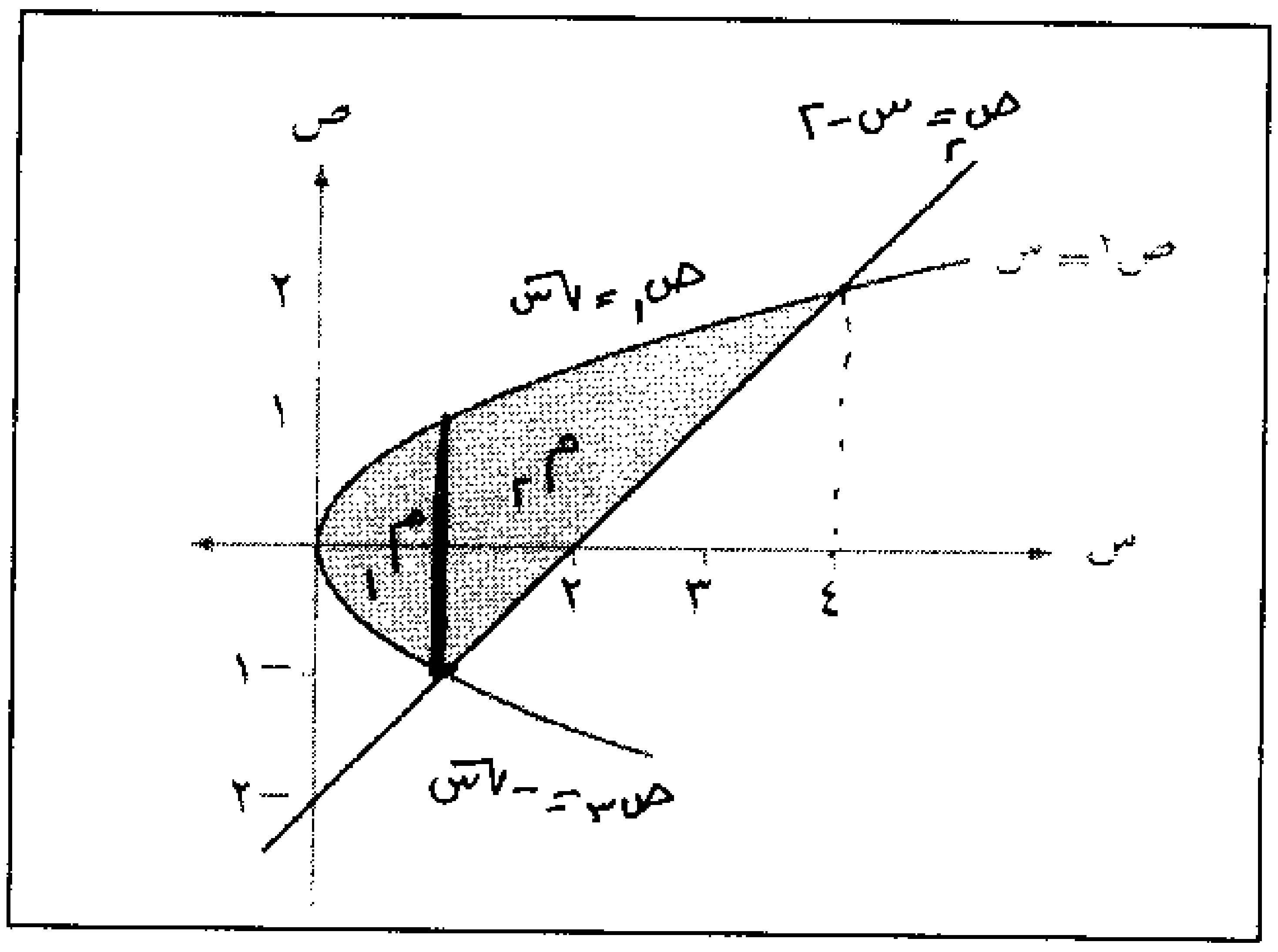
$$= \int_{-١}^{٠} \text{هـ}^{\text{س}} \text{ دس} + \int_{٠}^{١} \text{هـ}^{-\text{س}} \text{ دس}$$



الشكل (٤ ـ ٢٨)

$م = \int_{-٢}^{-١} ق(س)\,دس + \int_{-١}^{١} ل(س)\,دس + \int_{١}^{٢} ق(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{-١} (٤ - س^{٢})\,دس + \int_{-١}^{١} ٣\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - س^{٢})\,دس$



الشكل (٤ ـ ٢٩)

$م = م_{١} + م_{٢}$

$= \int_{٠}^{١} (\sqrt{س} - -\sqrt{س})\,دس + \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)\,دس$

$= \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{س}\,دس + \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} - س + ٢)\,دس$

٢) $ق(س) = ٤س^{٣} - ٤س$ محور السينات $ص = ٠$

$٤س^{٣} - ٤س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ١ ، س = -١$

$م = \int_{-١}^{٠} (٤س^{٣} - ٤س)\,دس + \int_{٠}^{١} (-٤س^{٣} + ٤س)\,دس$

$= \Big[س^{٤} - ٢س^{٢}\Big]_{-١}^{٠} \oplus \Big[-س^{٤} + ٢س^{٢}\Big]_{٠}^{١}$

$(صفر) - (١ - ٢) \oplus (-١ + ٢) - (صفر)$

$١ \oplus ١ = ٢$ وحدة مساحة

٣) أولاً نجد نقاط التقاطع

$٤س^{٣} - ٣س = ٥س \Leftarrow ٤س^{٣} - ٨س = صفر$

$س = ٠ ، س = \sqrt{٢} ، س = -\sqrt{٢}$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (ق - هـ)\,دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (هـ - ق)\,دس$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (٤س^{٣} - ٨س)\,دس \oplus \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (٨س - ٤س^{٣})\,دس$

$= \Big[س^{٤} - ٤س^{٢}\Big]_{-\sqrt{٢}}^{٠} \oplus \Big[٤س^{٢} - س^{٤}\Big]_{٠}^{\sqrt{٢}}$

$(صفر) - (٤ - ٨) \oplus (٨ - ٤) - صفر$

$٤ + ٤ = ٨$ وحدة مساحة

٤) $ق(س) = ٣س^{٢} - ٣$ محور السينات ← $ص = ٠$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠ \Leftarrow س = \mp ١$

$م = \int_{-٣}^{-١} (٣س^{٢} - ٣)\,دس \oplus \int_{-١}^{١} (٣ - ٣س^{٢})\,دس \oplus \int_{١}^{٢} (٣س^{٢} - ٣)\,دس$

$= \Big[س^{٣} - ٣س\Big]_{-٣}^{-١} \oplus \Big[٣س - س^{٣}\Big]_{-١}^{١} \oplus \Big[س^{٣} - ٣س\Big]_{١}^{٢}$

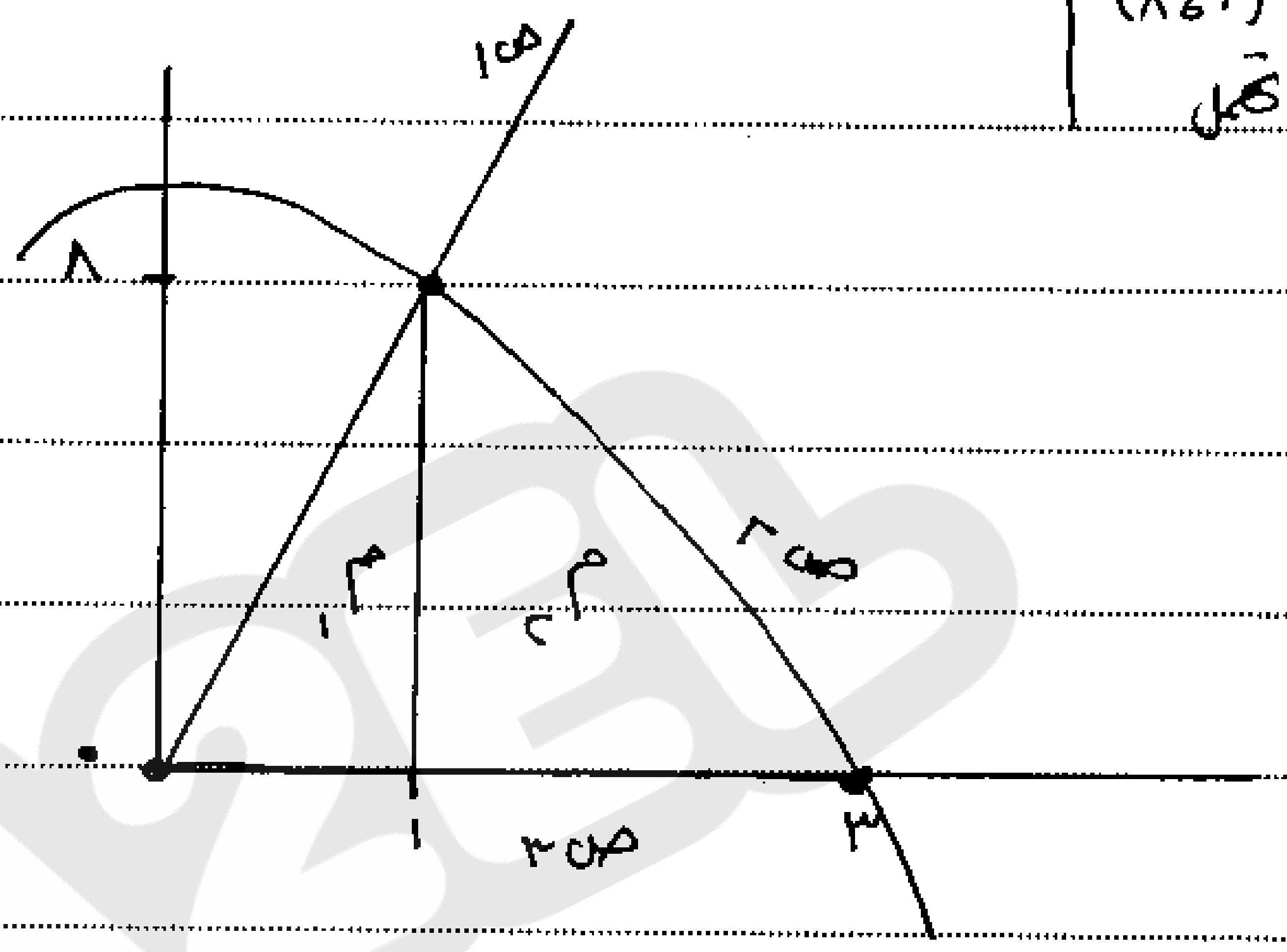
$(-١ + ٣) - (-٢٧ + ٩) \oplus (٣ - ١) - (-٣ + ١) \oplus (٨ - ٦) - (١ - ٣)$

$٢٠ \oplus ٤ \oplus ٤$

$= ٢٨$ وحدة مساحة

س٥) ص١ = ٨س ، ص٢ = ٩ - س² ، ص٣ = ٠

ص١ = ص٢	ص١ = ص٣	ص٢ = ص٣
٩ - س² = ٨س	٨ س = صفر	٩ - س² = ٠
س² + ٨س - ٩ = ٠	$\boxed{س = صفر}$	$\boxed{س = ٣}$ (٣، ٠)
(س - ١)(س + ٩) = ٠		س = -٣ تهمل
س = ١ (١، ٨) س = -٩ تهمل		



$م = \int_{0}^{1} ص_1 - ص_3 \, دس + \int_{1}^{3} ص_2 - ص_3 \, دس$

$= \int_{0}^{1} ٨س \, دس + \int_{1}^{3} ٩ - س^2 \, دس$

$\left[٤س^2\right]_{0}^{1} \oplus \left[٩س - \frac{س^3}{٣}\right]_{1}^{3}$

$٤ - صفر \oplus (٢٧ - ٩) - (٩ - \frac{1}{3})$

$٤ \oplus ٩ + \frac{1}{3} = ١٣\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

س٦) $س \in [٠ ، \frac{\pi}{2}]$

نجد نقاط التقاطع

جاس = جا٢س ⟸ جاس - ٢جاس جتاس = ٠

جاس = ٠   جتاس = $\frac{1}{2}$

س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{3}$

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (جا٢س - جاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (جاس - جا٢س)\, دس$

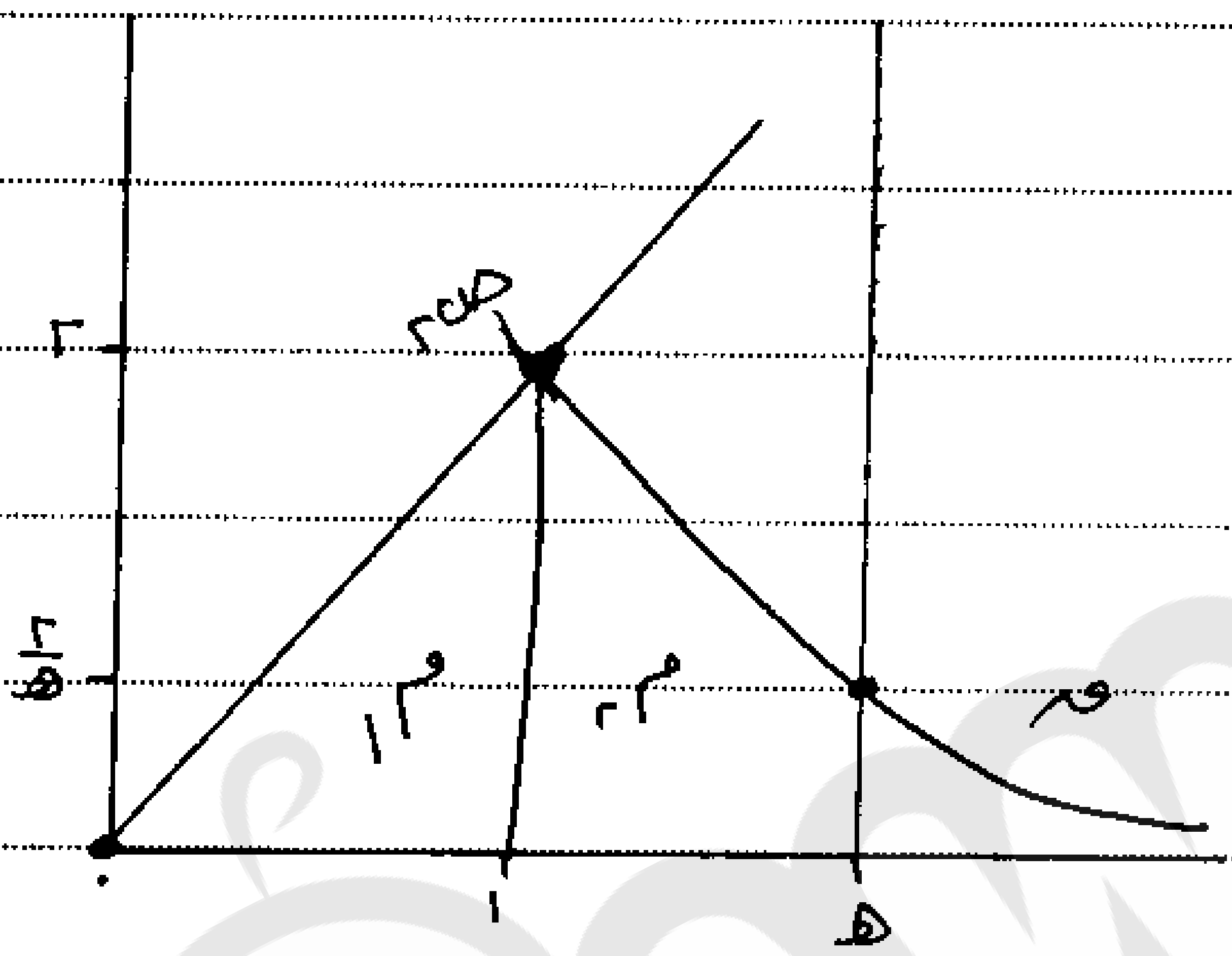
$\left[-\frac{1}{2} جتا٢س + جتاس\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \oplus \left[- جتاس + \frac{1}{2} جتا٢س\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2} + ١) \oplus (٠ - \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة.

س٧) ق(س) = $\frac{2}{س}$ ، ص١ = صفر ، ص٢ = ٢س

ق = ص١	ق = ص٢	ص١ = ص٢
$\frac{2}{س}$ = ٠ لا يوجد	$\frac{2}{س}$ = ٢س	٠ = ٢س
نقط تقاطع	س² = ١	$\boxed{س = ٠}$
	س = ١ ، س = -١ تهمل (١، ٢)	(٠، ٠)



$م = \int_{0}^{1} (ص_2 - ص_1)\, دس + \int_{1}^{هـ} (ق - ص_1)\, دس$

$= \int_{0}^{1} ٢س \, دس \oplus \int_{1}^{هـ} \frac{2}{س} \, دس$

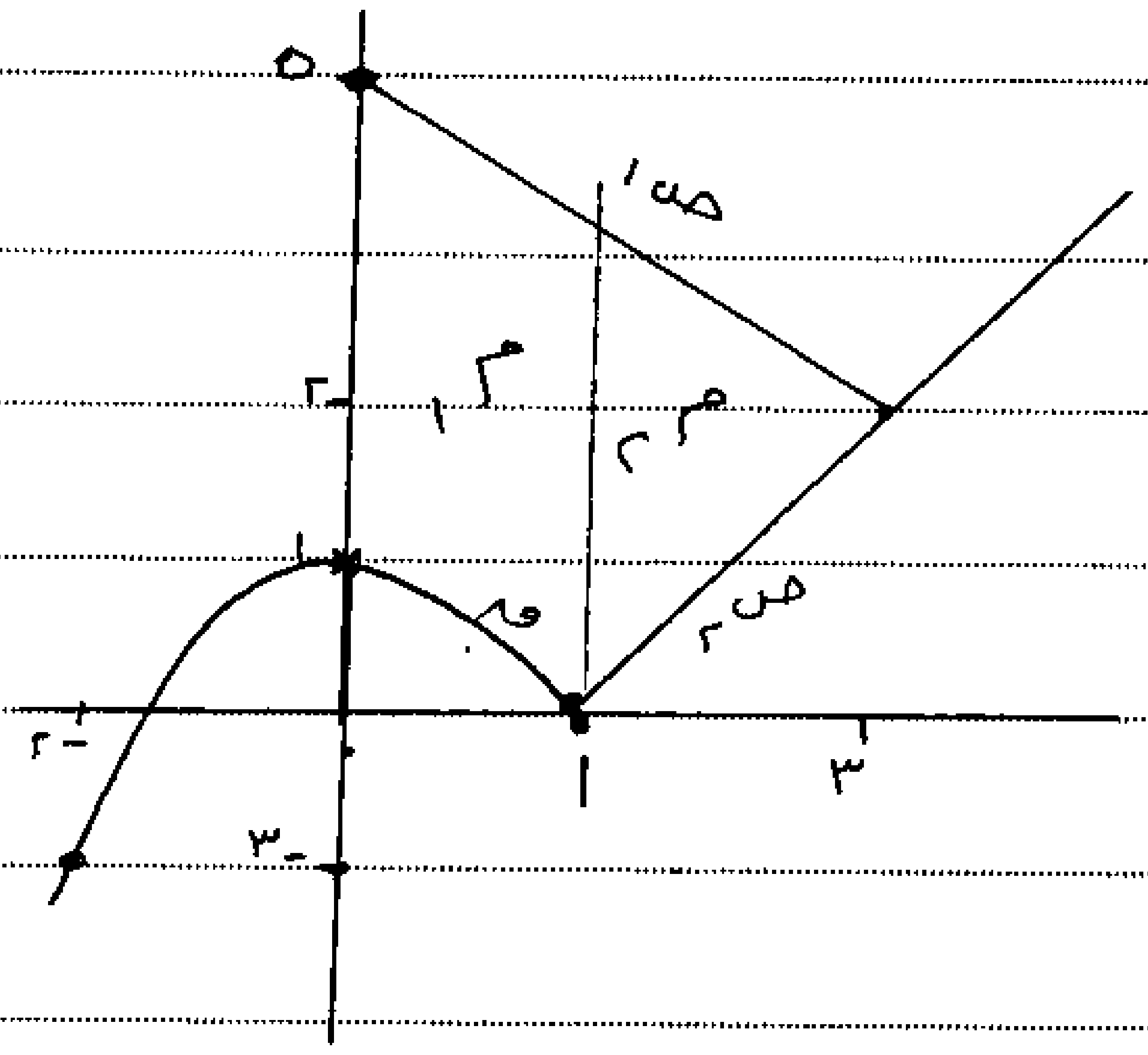
$\left[س^2\right]_{0}^{1} \oplus ٢\left[لو_{هـ}|س|\right]_{1}^{هـ}$

$١ \oplus ٢لو_{هـ} هـ - ٢لو_{هـ} ١$

١ + ٢ = ٣ وحدة مساحة

س٨) ق(س) = ١ - س² ، ص١ = ٥ - س ، ص٢ = س - ١

ق = ص١	ق = ص٢	ص١ = ص٢
١ - س² = ٥ - س	١ - س² = س - ١	٥ - س = س - ١
س² - س + ٤ = ٠	س² + س - ٢ = ٠	٢س = ٦
~~ليس~~ لا تحل	(س + ٢)(س - ١) = ٠	س = ٣
	س = ١ (١، ٠)	(٣، ٢)
	س = -٢	



$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{0}^{1} ص_1 - ه \; دس + \int_{1}^{3} ص_1 - ص_2 \; دس$$

$$= \int_{0}^{1} ٥ - س - ١ + س^٢ \; دس + \int_{1}^{3} ٥ - س - س + ١ \; دس$$

$$= \int_{0}^{1} س^٢ - س + ٤ \; دس \oplus \int_{1}^{3} ٦ - ٢س \; دس$$

$$\left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{0}^{1} \oplus \left[٦س - س^٢\right]_{1}^{3}$$

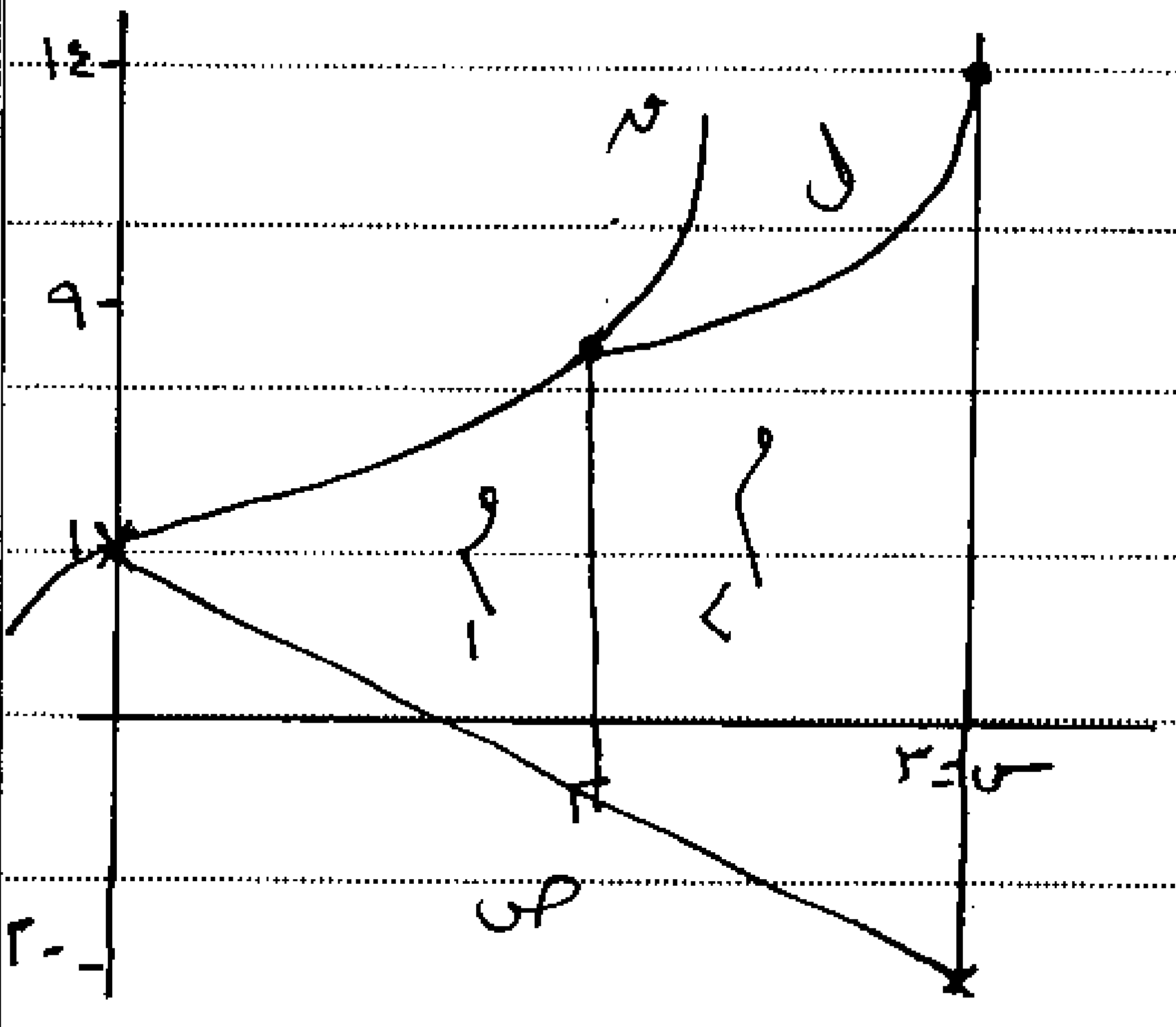
$$\left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤\right) - صفر \oplus (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$$

$$\frac{٢٣}{٦} + ٤ = \frac{٤٧}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

* * *

س٩) $ه(س) = ١ + س^٣$ ، $ل(س) = س^٢ + ٥$ ، $ص = ١ - س$

ه = ل	ه = ص	ل = ص
$١ + س^٣ = س^٢ + ٥$	$١ + س^٣ = ١ - س$	$س^٢ + ٥ = ١ - س$
$س^٣ - س^٢ - ٤ = ٠$	$س^٣ + س = ٠$	$س^٢ + س + ٤ = ٠$
$\boxed{س = ٢}$	$س(س^٢ + ١) = ٠$	لا تحلل
(٢ ، ٩)	$\boxed{س = ٠}$ (٠ ، ١)	



$$م = \int_{0}^{2} (ه - ص) \; دس + \int_{2}^{3} (ل - ص) \; دس$$

$$= \int_{0}^{2} ١ + س^٣ - ١ + س \; دس \oplus \int_{2}^{3} س^٢ + ٥ - ١ + س \; دس$$

$$= \int_{0}^{2} (س^٣ + س) \; دس \oplus \int_{2}^{3} س^٢ + س + ٤ \; دس$$

$$\left[\frac{س^٤}{٤} + \frac{س^٢}{٢}\right]_{0}^{2} \oplus \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{2}^{3}$$

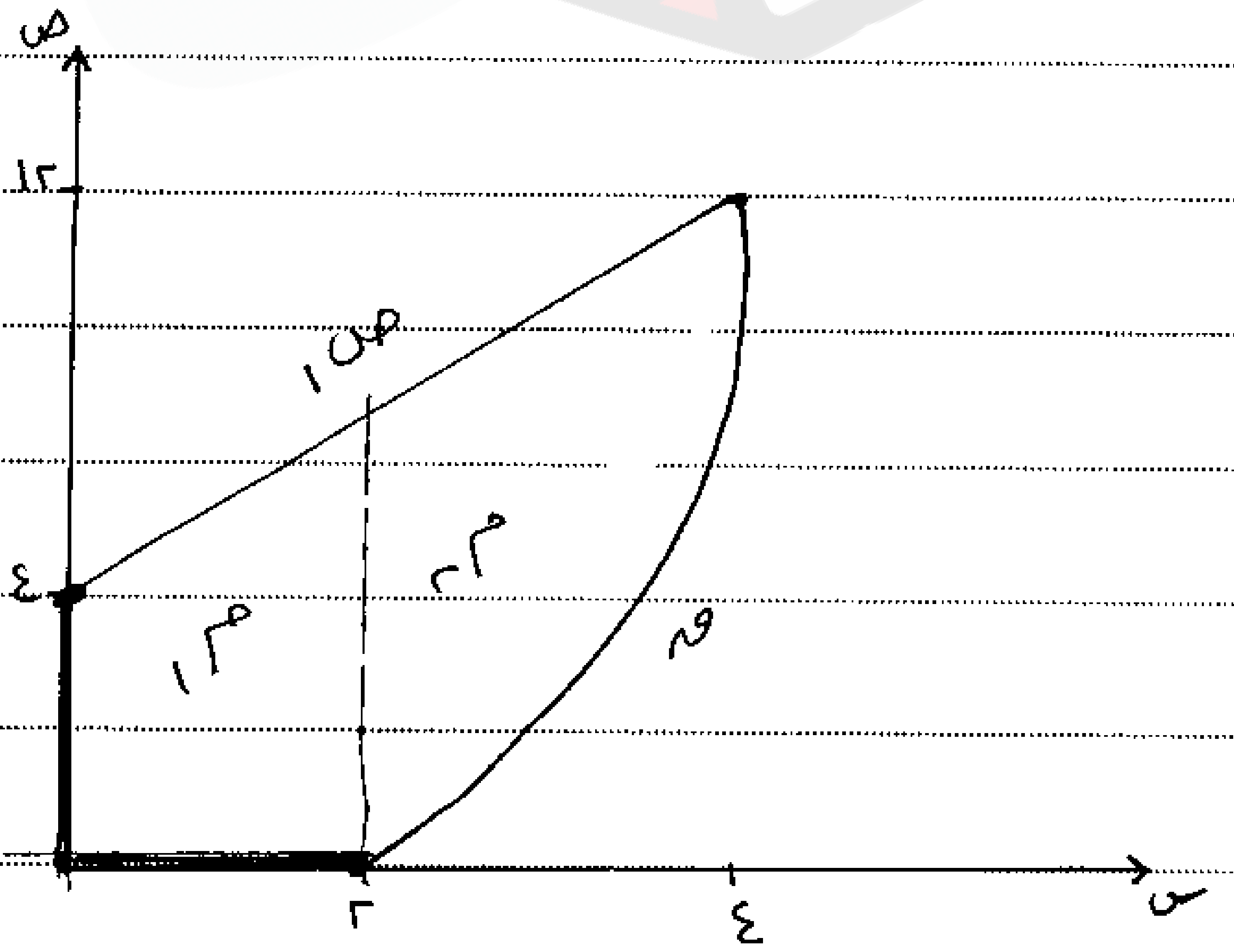
$$(٤ + ٢) - صفر \oplus \left(٩ + \frac{٩}{٢} + ١٢\right) - \left(\frac{٨}{٣} + ٢ + ٨\right)$$

$$٦ + \frac{٧٧}{٦} = \frac{١١٣}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

* * *

ن١) $ه(س) = س^٢ - ٤$ ، $ص_1 = ٢س + ٤$ ، $ص_2 = ٠$

ه = ص١	ص١ = ص٢	ه = ص٢
$س^٢ - ٤ = ٢س + ٤$	$٢س + ٤ = ٠$	$س^٢ - ٤ = ٠$
$س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$	$س = -٢$	$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$
$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$	تُهمل	$س = ٢$ (٢ ، ٠)
$س = ٤$ (٤ ، ١٢)		$س = -٢$ تُهمل
$س = -٢$ تُهمل		



$$م = \int_{0}^{2} ص_1 - ص_2 \; دس + \int_{2}^{4} (ص_1 - ه) \; دس$$

$$م = \int_{0}^{2} ٢س + ٤ \; دس \oplus \int_{2}^{4} ٢س + ٤ - س^٢ + ٤ \; دس$$

$$\left[س^٢ + ٤س\right]_{0}^{2} \oplus \int_{2}^{4} ٢س - س^٢ + ٨ \; دس$$

$$٤ + ٨ \oplus \left[\left(س^٢ - \frac{س^٣}{٣} + ٨س\right)\right]_{2}^{4}$$

$$١٢ \oplus \left(١٦ - \frac{٦٤}{٣} + ٣٢\right) - \left(٤ - \frac{٨}{٣} + ١٦\right)$$

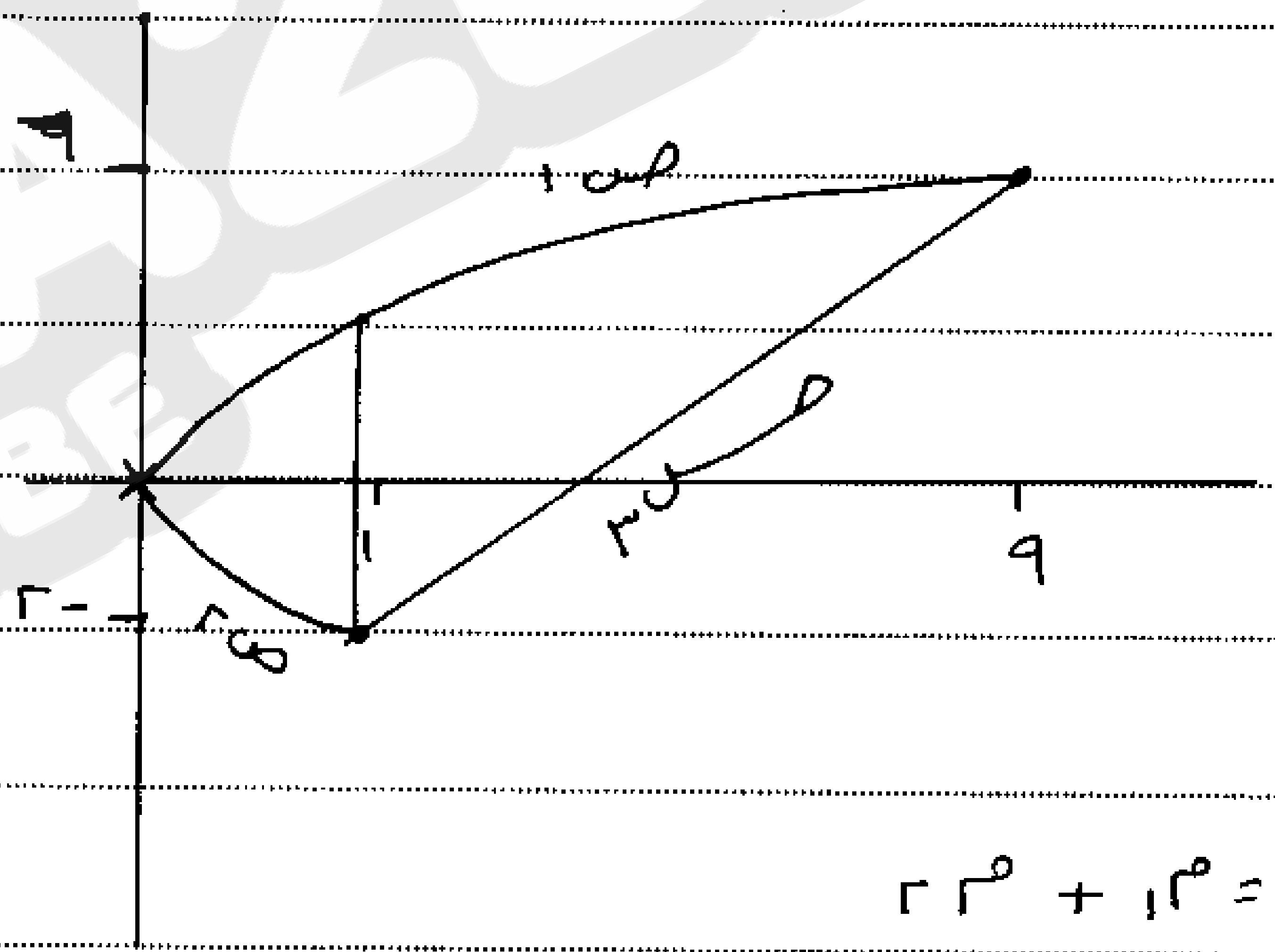
$$١٢ \oplus \frac{٢٨}{٣} = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

١١) $ص^٢ = ٤س$ ، $ص = س - ٣$

$ص_١ = ٢\sqrt{س}$ ، $ص_٣ = س - ٣$

$ص_٢ = -٢\sqrt{س}$

$ص_١ = ص_٢$	$ص_١ = ص_٣$	$ص_٢ = ص_٣$
$٢\sqrt{س} = -٢\sqrt{س}$	$٢\sqrt{س} = س - ٣$	$-٢\sqrt{س} = س - ٣$
$س = \text{صفر}$	$س - ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$	$س + ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$
$(٠ ، ٠)$	$(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ١) = ٠$	$(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ٣) = ٠$
	$\sqrt{س} = ٣ \rightarrow \boxed{س = ٩}$	$\sqrt{س} = ١ \Leftarrow \boxed{س = ١}$
	$\sqrt{س} = -١$ تُهمل	$\sqrt{س} = -٣$ تُهمل



$م = م_١ + م_٢$

$= \int_٠^١ (ص_١ - ص_٢)\,دس + \int_١^٩ (ص_١ - ص_٣)\,دس$

$= \int_٠^١ (٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{س})\,دس \oplus \int_١^٩ ٢\sqrt{س} - س + ٣\,دس$

$= \int_٠^١ ٤ س^{\frac{١}{٢}}\,دس \oplus \left[٢ \times \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٣س\right]_١^٩$

$= ٤ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\Big]_٠^١ \oplus (\frac{٤}{٣} \times ٢٧ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧) - (\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣)$

$= \frac{٨}{٣} \oplus \frac{٥٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

١٢) $و(س) = \begin{cases} ٢ - س & ، س < ٢ \\ س - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \sqrt{س}$

$و_١ = هـ$

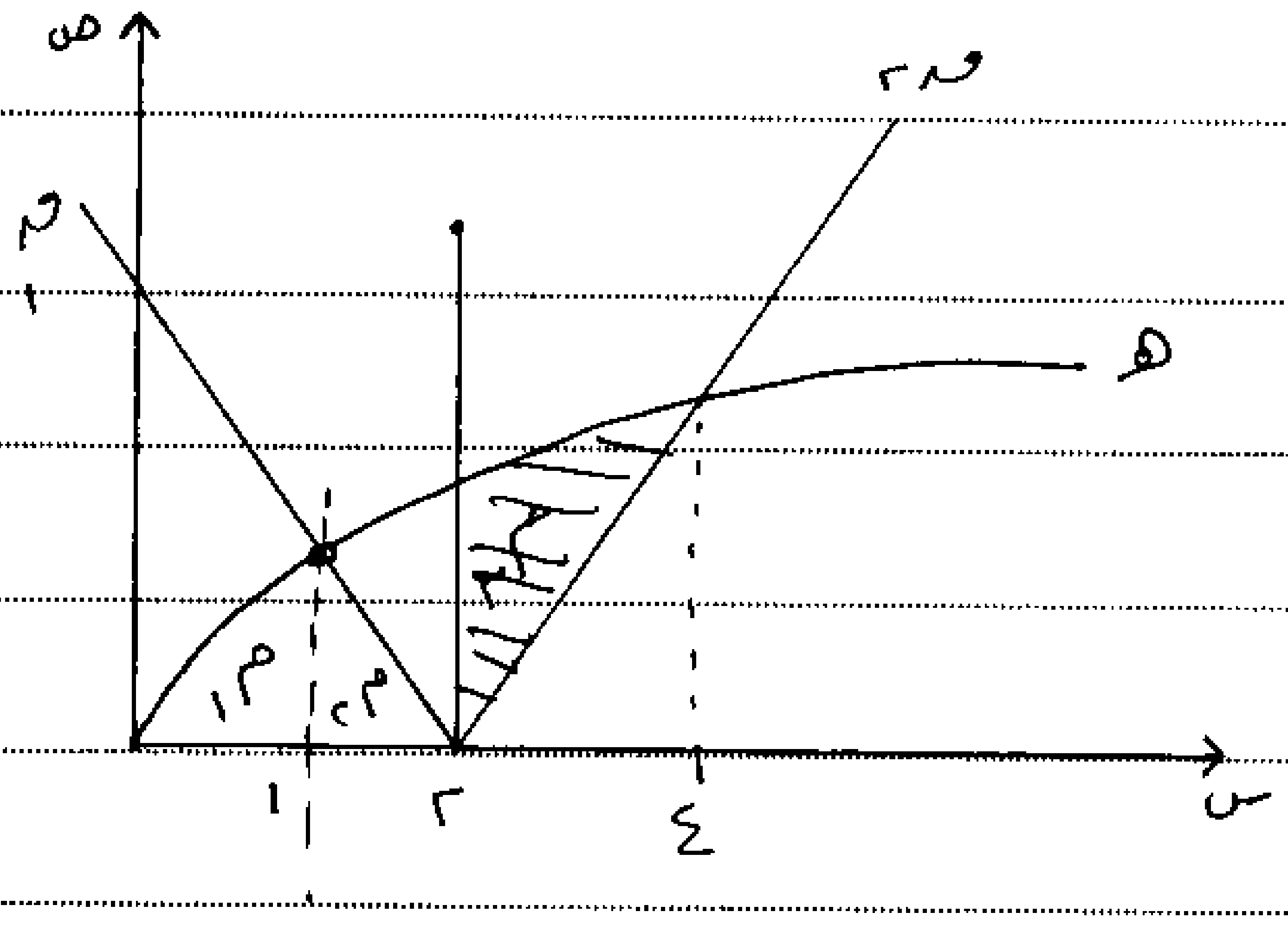
$\sqrt{س} = ٢ - س$

$\boxed{س = ١}$

$هـ = و_٢$

$\sqrt{س} = س - ٢$

$\boxed{س = ٤}$



$م = م_١ + م_٢ + م_٣$

$= \int_٠^١ (هـ - \text{صفر})\,دس + \int_١^٢ (و_١ - \text{صفر})\,دس + \int_٢^٤ هـ - و_٢$

$= \int_٠^١ س^{\frac{١}{٢}}\,دس \oplus \int_١^٢ (٢ - س)\,دس \oplus \int_٢^٤ س^{\frac{١}{٢}} - س + ٢\,دس$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} \oplus \left[٢س - \frac{س^٢}{٢}\right]_١^٢ \oplus \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٢س$

$= \frac{٢}{٣} \oplus (٤ - ٢) - (٢ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨) - (\frac{٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢ + ٤)$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} + \frac{١٦}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} + -٢$

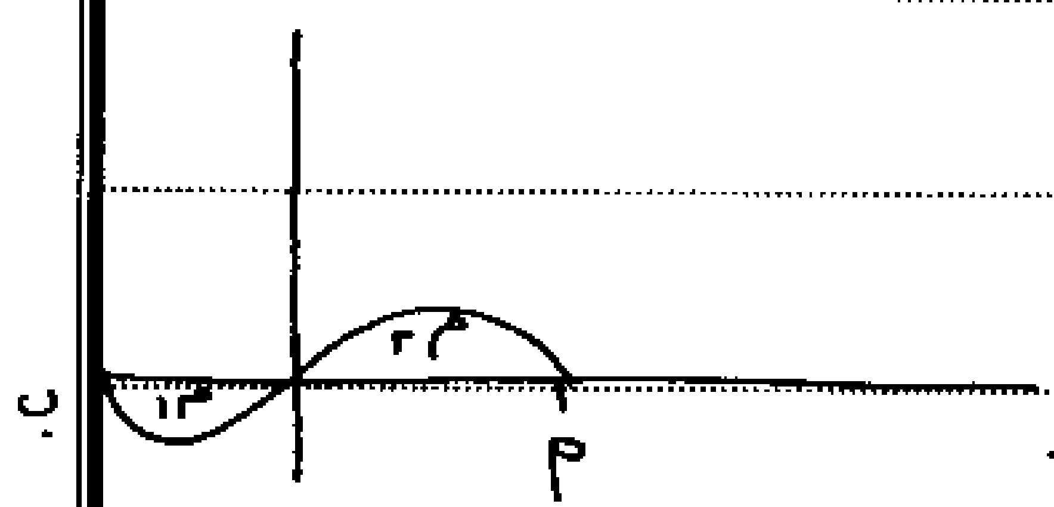
$= \frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$

١٣) $\int_٠^٣ (٢ - و(س))\,دس$

$= \int_٠^٣ ٢\,دس - \int_٠^٣ و(س)\,دس$

$٢(٣ - ٠) - -٦ = ١٢$

١٤) $\int_ب^٠ و(س)\,دس = -م_١$



$\int_٠^ب و(س)\,دس = م_١ = ٦$

$م = م_١ + م_٢ \Leftarrow ١٤ = ٦ + م_٢ \Leftarrow \boxed{م_٢ = ٨}$

$\int_٠^أ و(س)\,دس = ٨ \Leftarrow \int_أ^٠ و(س)\,دس = -٨$

ثانياً : المعادلات التفاضلية

تدريب (١) :

$(س^٢ - ٣س)\ دص = هـ^{-ص}(س^٢ + س - ١٢)\ دس$

$هـ^{ص}\ دص = \frac{(\cancel{س-٣})(س+٤)}{س(\cancel{س-٣})}\ دس$

$\int هـ^{ص}\ دص = \int \frac{س+٤}{س}\ دس$

$هـ^{ص} = \int ١ + \frac{٤}{س}\ دس$

$هـ^{ص} = س + ٤\ لو_{هـ}|س| + جـ$

$ص = لو_{هـ}(س + ٤\ لو_{هـ}|س| + جـ)$

تدريب (٢) ميل العمودي $= س\sqrt{٣ + لو_{هـ}س}$

ميل المماس $= \frac{-١}{ميل\ العمودي}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س\sqrt{٣ + لو_{هـ}س}}$

$\int دص = \int \frac{-١}{س\sqrt{٣ + لو_{هـ}س}}\ دس$ $\qquad ع = \sqrt{٣ + لو_{هـ}س}$

$ع^٢ = ٣ + لو_{هـ}س$

$ص = \int \frac{-٢ع}{ع}\ دع$ $\qquad ٢ع\ دع = \frac{١}{س}\ دس$

$ص = \int -٢\ دع \Leftarrow ص = -٢\sqrt{٣ + لو_{هـ}س} + جـ$

$(هـ ، ٤) \Leftarrow ٤ = -٢\sqrt{٣ + لو_{هـ}هـ} + جـ$

$\boxed{جـ = ٨}$

$ص = -٢\sqrt{٣ + لو_{هـ}س} + ٨$

تدريب (٣)

$ت = \sqrt{ع} \Leftarrow \frac{دع}{دن} = \sqrt{ع}$ $\qquad ع(٠) = ٩$

$\int ع^{-\frac{١}{٢}}\ دع = \int دن$ $\qquad ف(٤) = ٨٠$

$٢ع^{\frac{١}{٢}} = ن + جـ$ $\qquad ف(٣) = ؟$

$٢\sqrt{٩} = ٠ + جـ$

$\boxed{جـ = ٦}$

$٢ع^{\frac{١}{٢}} = ن + ٦$

$\sqrt{ع} = \frac{ن+٦}{٢} \Leftarrow ع = \frac{(ن+٦)^٢}{٤}$

$\int دف = \int \frac{(ن+٦)^٢}{٤}\ دن$

$ف = \frac{(ن+٦)^٣}{١٢} + جـ$

$ف(٤) = ٨٠ \Leftarrow ٨٠ = \frac{١٠٠٠}{١٢} + جـ$

$جـ = -\frac{٤٠}{١٢}$

$ف(ن) = \frac{(ن+٦)^٣}{١٢} - \frac{٤٠}{١٢}$

$ف(٣) = \frac{٥١٢}{١٢} - \frac{٤٠}{١٢} = \frac{٤٧٢}{١٢} = \frac{١١٨}{٣}$ م

تدريب (٤) $\qquad ع(٠) = ٤٠$ م/ث

$ت = -١٠$

$\int دع = \int -١٠\ دن \Leftarrow ع = -١٠ن + جـ$

$ع(٠) = ٤٠ \Leftarrow جـ = ٤٠$

$\frac{دف}{دن} = -١٠ن + ٤٠ \Leftarrow \int دف = \int -١٠ن + ٤٠\ دن$

$ف = -٥ن^٢ + ٤٠ن + جـ$

$ف(٠) = ٤٥ \Leftarrow جـ = ٤٥$

$ف(ن) = -٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥$

ف = صفر $\qquad$ ن = ؟؟

$-٥ن^٢ + ٤٠ن + ٤٥ = ٠$

$ن^٢ - ٨ن - ٩ = ٠$ $\qquad (ن+١)(ن-٩) = ٠$

ن = −١ يهمل $\qquad \boxed{ن = ٩}$

تمارين ومسائل صفحة (٣٠٨ - ٣٠٩)

س٤)

أ) $\text{س}^{٣}\,\text{دص} - \text{ص}\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\text{س}^{٣}\,\text{دص} = \text{ص}\,\text{دس}$

$\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \text{س}^{-٣}\,\text{دس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$

$|\text{ص}| = \text{هـ}^{\frac{١}{-٢\text{س}^{٢}} + \text{جـ}}$

ب) $\text{دس} - ٣\,\text{دص} = \text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int ٣\,\text{دص} = \int \text{دس} - \text{جتاس}\,\text{دس}$

$٣\,\text{ص} = \text{س} - \text{جاس} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ص} = \frac{١}{٣}\,\text{س} - \frac{١}{٣}\,\text{جاس} + \text{جـ}$.

جـ) $\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{جاس} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\,\text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{صفر}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \text{قاس}\,\text{ظاس}\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{قاس} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قاس} + \text{جـ})$.

د) $\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{دص} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{دص} = \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس}$

$\text{دص} \quad \frac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس}$

$\text{دص} = (\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢})^{٢}\,\text{دس}$

$\int \text{دص} = \int \frac{١}{٤}\,\text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \int \frac{١}{٨}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{١}{٨}(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س}) + \text{جـ}$

هـ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - \text{ص} + \text{س}^{٢} - \text{ص}\,\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (١ - \text{ص}) + \text{س}^{٢}(١ - \text{ص})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (١ - \text{ص})\,(\text{س}^{٢} + ١)$

$\int \frac{١}{١ - \text{ص}}\,\text{دص} = \int (\text{س}^{٢} + ١)\,\text{دس}$

$-\text{لو}_{\text{هـ}}|١ - \text{ص}| = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س} + \text{جـ}$

و) $(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س}+١)(\text{س}^{٢} - ٩)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س}+١)(\text{س}^{٢}-٩)}{\text{س}\,(\text{س}+٣)}$

$\text{هـ}^{٢\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{(\text{س}+١)(\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}+٣)}}{\text{س}\,\cancel{(\text{س}+٣)}}\,\text{دس}$

$\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{ص}} = \int \text{س} - ٢ - \frac{٣}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢\text{ص}} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} - ٣\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

$\text{هـ}^{٢\text{ص}} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٦\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

$٢\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٦\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ})$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ٦\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ})$

س٢) $\frac{دع}{دن} = -\frac{٥٠٠}{(ن+١)^{٢}}$

$\int دع = \int -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\,دن$

$ع = \frac{٥٠٠}{ن+١} + جـ$

$ع(٠) = ٢٥٠٠ \Rightarrow ٢٥٠٠ = \frac{٥٠٠}{١} + جـ$

$جـ = ٢٠٠٠$

$ع(ن) = \frac{٥٠٠}{ن+١} + ٢٠٠٠$

$ع(٣) = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار

س٣) $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س}+١}$

$دص = \frac{هـ^{س} \times هـ^{-ص}}{هـ^{س}+١}\,دس$

$\int هـ^{ص}\,دص = \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١}\,دس$

$هـ^{ص} = لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + جـ$

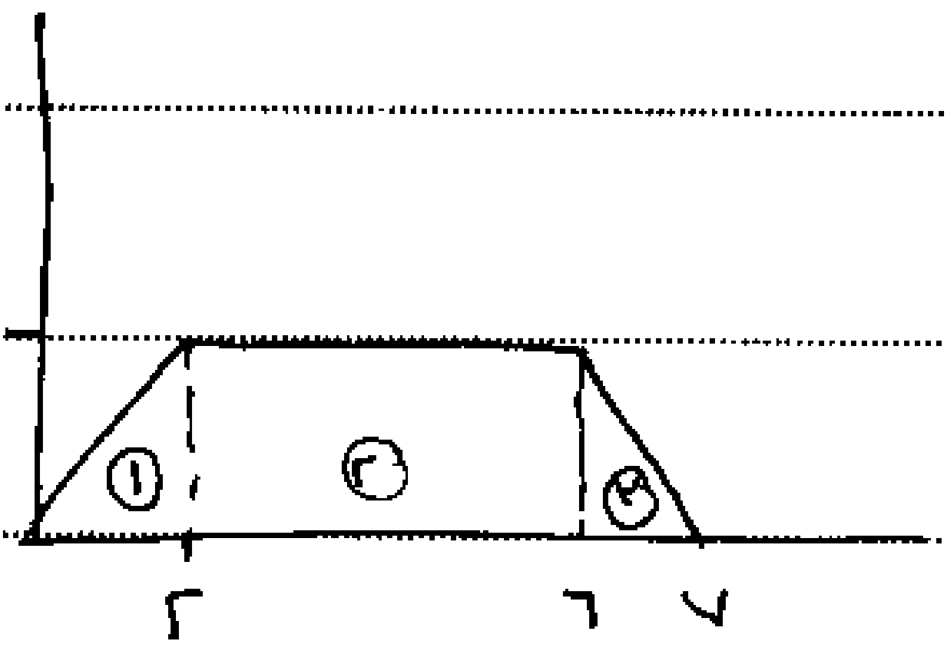
$(١،٠) \Rightarrow هـ^{٠} = لو_{هـ}|هـ+١| + جـ$

$جـ = ١ - لو_{هـ}|هـ+١|$

$هـ^{ص} = لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + ١ - لو_{هـ}|هـ+١|$

$ص = لو_{هـ}\left(لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + ١ - لو_{هـ}|هـ+١|\right)$

س٤)



المسافة المقطوعة في [٠، ٧]

= المساحة تحت المنحنى

$ف_{١} =$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}\times٢\times٣٠ = ٣٠$

$ف_{٢} =$ مساحة المستطيل $= (٦-٢)\times٣٠ = ١٢٠$

$ف_{٣} =$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}\times١\times٣٠ = ١٥$

المسافة المقطوعة $= ٣٠ + ١٢٠ + ١٥ = ١٦٥$ م

س٥) $ت = -٤ع^{\frac{٣}{٢}} \Rightarrow \frac{دع}{دن} = -٤ع^{\frac{٣}{٢}}$

$\int ع^{-\frac{٣}{٢}}\,دع = \int -٤\,دن$

$-٢ع^{-\frac{١}{٢}} = -٤ن + جـ \Rightarrow \frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن + جـ$

$ع(٠) = ٤ \Rightarrow \frac{-٢}{\sqrt{٤}} = -٤\times٠ + جـ \Rightarrow \boxed{جـ = -١}$

$\frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن - ١ \Rightarrow \sqrt{ع} = \frac{٢}{٤ن+١}$

$ع = \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}} \Rightarrow \int دف = \int \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}}\,دن$

$ف = \frac{-٤(٤ن+١)^{-١}}{٤} + جـ$

$ف(٠) = ٠ \Rightarrow \frac{-١}{١} + جـ = ٠ \Rightarrow \boxed{جـ = ١}$

$ف(ن) = \frac{-١}{٤ن+١} + ١ \Rightarrow ف(ن) = \frac{٤ن}{٤ن+١}$

$ف(ن) = \frac{٢}{٤ن+١} \times ٢ن \Rightarrow ف(ن) = ٢ن\sqrt{ع}$ #

س٦) ع(٠) = ٤٠ م/ث

ف(١) = ٨٠   ف = ؟؟ عندما ع = ٠

ت(ن) = −١٠ م/ث^{٢}

∫دع = ∫−١٠ دن

ع = −١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ⟸ ٤٠ = جـ

∫دف = ∫(−١٠ن + ٤٠) دن

ف = −٥ن^{٢} + ٤٠ن + جـ

ف(١) = ٨٠ ⟸ ٨٠ = −٥ + ٤٠ + جـ

جـ = ٤٥

ف(ن) = −٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥

عند أقصى ارتفاع ع = ٠

−١٠ن + ٤٠ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{ن = ٤}}$

ف(٤) = −٥×١٦ + ٤٠×٤ + ٤٥

= ١٢٥ م

س٧) $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٠.٢٥ ع

ع(٠) = ٢×١٠^{٥} ع(٤٠) = ؟؟

∫$\frac{\text{دع}}{\text{ع}}$ = ∫٠.٢٥ دن

لو$_{\text{هـ}}$|ع| = ٠.٢٥ن + جـ$_{١}$

|ع| = هـ$^{٠.٢٥ن + جـ_{١}}$ ⟸ ع = هـ$^{٠.٢٥ن}$ × هـ$^{جـ_{١}}$

ع = جـ هـ$^{٠.٢٥ن}$

ع(٠) = ٢×١٠^{٥} ⟸ ٢×١٠^{٥} = جـ × هـ^{٠}

جـ = ٢×١٠^{٥}

ع(ن) = ٢×١٠^{٥} هـ$^{٠.٢٥ن}$

ع(٤٠) = ٢×١٠^{٥} هـ$^{٠.٢٥×٤٠}$

= ٢×١٠^{٥} هـ

= ٥٤٠٠٠٠ نسمة

أسئلة الوحدة

س١) أ) $\int_{٢}^{٣} (٤\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = \frac{٢}{٣}\left[\frac{(٤\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤}\right]_{٢}^{٣}$

$\frac{٢}{١٢}\sqrt{١٣^{٣}} - \frac{٥٤}{١٢} = \frac{١}{٦}\left(\sqrt{١٣^{٣}} - ٢٧\right)$

ب) $\int \frac{\text{س قا}^{٢}\text{س} - \text{س ظا}^{٢}\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}\,(\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س})}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\,\text{دس}$

$= \frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٦} - \text{س}^{٤}}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس}$ إخراج $\text{س}^{٤}$ عامل مشترك

$\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤}(\text{س}^{٢}-١)}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٥}}\sqrt{\text{س}^{-٢} - ١}\,\text{دس}$

$\int \text{س}^{-٣}(\text{س}^{-٢}-١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{-٢} - ١$

$-\frac{١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$ $\quad$ $\text{دص} = -٢\,\text{س}^{-٣}\,\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣}\sqrt{\text{ص}^{٣}} + \text{جـ} = -\frac{١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{-٢}-١)^{٣}} + \text{جـ}$

د) $\int \text{ظتاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ ، $\text{دص} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{ظتاس}\,\text{دس}$

$\int \text{ص}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

هـ) $\int (\text{س}^{٨} - ٤\text{س})^{٦}\,\text{دس}$

$= \int \left(\text{س}(\text{س}^{٧}-٤)\right)^{٦}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٦}(\text{س}^{٧}-٤)^{٦}\,\text{دس}$ $\quad$ نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٧} - ٤$

$\text{دص} = ٧\,\text{س}^{٦}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٧}\int \text{ص}^{٦}\,\text{دص} = \frac{١}{٤٩}\,\text{ص}^{٧} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}^{٧}-٤)^{٧}}{٤٩} + \text{جـ}$

و) $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$ $\quad$ $\text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص}$

له $(\text{ظا}^{٢}\text{س}+١)$

$\int (\text{ص}^{٢}+١)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\quad$ $\text{دع} = \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = (\text{ص}^{٢}+١)\,\text{دص}$ $\quad$ $\text{هـ} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص}$

$\int (\text{ص}^{٢}+١)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص} = \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}+\text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \left(\frac{\text{ص}^{٢}}{٣}+١\right)\text{دص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}+\text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٩} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \left(\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}+\text{ظاس}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٩} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

ز) $\int \sqrt[٣]{٢\text{س}^{٥} - \text{س}^{٣}}\,\text{دس} = \int \text{س}\sqrt[٣]{٢\text{س}^{٢}-١}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} - ١ \Leftarrow \text{دص} = ٤\text{س}\,\text{دس}$

$\frac{١}{٤}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص} = \frac{١}{٤}\times\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{٣\sqrt[٣]{(٢\text{س}^{٢}-١)^{٤}}}{١٦} + \text{جـ}$

ح) $\int_{0}^{1} \frac{هـ^{س}}{هـ^{2س}+2هـ^{س}+1}\,دس$

$= \int_{0}^{1} \frac{هـ^{س}}{(هـ^{س}+1)^{2}}\,دس$

$ص = هـ^{س}+1 \qquad دص = هـ^{س}\,دس$

$س = 0 \qquad ص = 2$

$س = 1 \qquad ص = هـ+1$

$\int_{2}^{هـ+1} ص^{-2}\,دص = \left[\frac{-1}{ص}\right]_{2}^{هـ+1}$

$= \frac{-1}{هـ+1} + \frac{1}{2} = \frac{هـ-1}{2(هـ+1)}$

ط) $\int جا(لو_{هـ}س)\,دس$

نفرض $ص = لو_{هـ}س \leftarrow دص = \frac{1}{س}\,دس$

$\leftarrow س = هـ^{ص}$

$\int هـ^{ص} جاص\,دص$

$ع = هـ^{ص} \qquad دع = هـ^{ص}\,دص$

$دهـ = جاص \qquad هـ = -جتاص$

$\int هـ^{ص}جاص\,دص = -هـ^{ص}جتاص + \underbrace{\int هـ^{ص}جتاص\,دص}_{\text{أجزاء مرة أخرى}}$

$\int هـ^{ص}جاص\,دص = -هـ^{ص}جتاص + هـ^{ص}جاص - \int هـ^{ص}جاص\,دص$

$2\int هـ^{ص}جاص\,دص = -هـ^{ص}جتاص + هـ^{ص}جاص$

$\int هـ^{ص}جاص\,دص = \frac{1}{2}\left(-هـ^{ص}جتاص + هـ^{ص}جاص\right) + جـ$

$= \frac{1}{2}\left(-س\,جتا(لو_{هـ}س) + س\,جا(لو_{هـ}س)\right) + جـ$

$= \frac{1}{2}\left(س\,جا(لو_{هـ}س) - س\,جتا(لو_{هـ}س)\right) + جـ$

ي) $\int \frac{س^{3}}{2س^{4}+س^{8}}\,دس$

$\int \frac{س^{3}}{س^{8}(2س^{-4}+1)}\,دس = \int \frac{س^{-5}}{2س^{-4}+1}\,دس$

$ص = 2س^{-4}+1 \qquad دص = -8س^{-5}\,دس$

$\int \frac{-1}{8} \times \frac{1}{ص}\,دص = -\frac{1}{8}لو_{هـ}|ص| + جـ$

$= -\frac{1}{8}لو_{هـ}|2س^{-4}+1| + جـ$

ك) $\int \frac{\sqrt{4س+12}-3}{\sqrt{س+3}+3}\,دس$

$\int \frac{2\sqrt{س+3}-3}{\sqrt{س+3}+3}\,دس$

$ص = \sqrt{س+3} \text{ ، } ص^{2} = س+3 \leftarrow 2ص\,دص = دس$

$\int \frac{(2ص-3)}{ص+3} \times 2ص\,دص = \int \frac{4ص^{2}-6ص}{ص+3}\,دص$

$= \int 4ص-18\,دص + \int \frac{54}{ص+3}\,دص$

$2ص^{2} - 18ص + 54لو_{هـ}|ص+3| + جـ$

$= 2(س+3) - 18\sqrt{س+3} + 54لو_{هـ}|\sqrt{س+3}+3| + جـ$

ل) $\int لو_{هـ}(س^{2}+2س)\,دس$

$ع = لو_{هـ}(س^{2}+2س) \qquad دع = \frac{2س+2}{س^{2}+2س}\,دس$

$دهـ = دس \qquad هـ = س$

$\int لو_{هـ}(س^{2}+2س)\,دس = س\,لو_{هـ}(س^{2}+2س) - \int \frac{2س+2}{س+2}\,دس$

$= س\,لو_{هـ}(س^{2}+2س) - \int 2\,دس + \int \frac{2}{س+2}\,دس$

$= س\,لو_{هـ}(س^{2}+2س) - 2س + 2لو_{هـ}|س+2| + جـ$

س٢) $٣ \text{ ظاص} - \frac{دص}{دس} \text{ قاس} = ٠$

$\frac{دص}{دس} \text{ قاس} = ٣ \text{ ظاص}$

$\frac{١}{\text{ظاص}} \text{ دص} = \frac{٣}{\text{قاس}} \text{ دس}$

$\int \text{ظتاص دص} = ٣ \int \text{جتاس دس}$

$= ٣ \text{ جاس} + \text{جـ}$

٣) $ص^{٢} = لو_{هـ} س ص - هـ^{س^{٢}}$ ، $\frac{دص}{دس} = ؟$

$ص^{٢} = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص - هـ^{س^{٢}}$

$٢ ص ص' = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص} - ٢ س هـ^{س^{٢}}$

$٢ ص ص' - \frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س} - ٢ س هـ^{س^{٢}}$

$ص' \left(٢ ص - \frac{١}{ص}\right) = \frac{١}{س} - ٢ س هـ^{س^{٢}}$

$ص' = \frac{\frac{١}{س} - ٢ س هـ^{س^{٢}}}{٢ ص - \frac{١}{ص}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص\,(١ - ٢ س^{٢} هـ^{س^{٢}})}{س\,(٢ ص^{٢} - ١)}$

س٤) $م(س) = س^{٣} + ب س^{٢} - ١$

$م'(س) = ع(س) = ٣ س^{٢} + ٢ ب س$

$ع(٢) = ٢٤ \Leftarrow ١٢ + ٤ ب = ٢٤$

$\boxed{ب = ٣}$

س٥) م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة ع(س)

$م(س) - هـ(س) = \text{ثابت} = جـ$

$\int_{-١}^{٣} جـ \, دس = ١٢ \Leftarrow جـ(٣ - -١) = ١٢$

$\boxed{جـ = ٣}$

$\int_{٠}^{٤} ٢ س\, م(س)\, دس + \int_{٤}^{٠} ٢ س\, هـ(س)\, دس$

$= \int_{٠}^{٤} ٢ س\, م(س)\, دس - \int_{٠}^{٤} ٢ س\, هـ(س)\, دس$

$= \int_{٠}^{٤} ٢ س \underbrace{(م(س) - هـ(س))}_{\text{ثابت} = جـ = ٣} دس$

$\int_{٠}^{٤} ٦ س\, دس = ٣ س^{٢} \Big]_{٠}^{٤} = ٤٨$

س٦) $\int_{٣}^{١} \left(٢ ع(س) \cancel{+} \int_{٠}^{٢} ٢ م\, دم\right) دس = ١٤$

$\leftarrow م^{٢} \Big]_{٠}^{٢} = ٤$

$\int_{٣}^{١} (٢ ع(س) + ٤)\, دس = ١٤$

$\int_{٣}^{١} ٢ ع(س)\, دس + ٤ \times -٢ = ١٤$

$\int_{٣}^{١} ع(س)\, دس = ١١ \Leftarrow \int_{١}^{٣} ٣ ع(س)\, دس = -٣٣$

س٧) $ع(س) = س^{٢} - \int \left(٣ س^{٢} - \int_{٠}^{١} ٢ ص\, دص\right) دس$

$\leftarrow ص^{٢} \Big]_{٠}^{١} = ١$

$ع'(س) = ؟$

$ع(س) = س^{٢} - \int ٣ س^{٢} - ١ \, دس$

$ع'(س) = ٢ س - (٣ س^{٢} - ١)$

$ع'(س) = ٢ س - ٣ س^{٢} + ١$

س٨) $\int_{-١}^{١}(٤\text{ق}(\text{س})+٣)\,\text{دس}=١٨$

$\int_{-١}^{١}٤\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+٦=١٨$

$\therefore \int_{-١}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٣$

$\int_{١}^{٤}٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=٢٠ \Rightarrow \int_{١}^{٤}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=١٠$

$\int_{٤}^{-١}٢\text{س}\,\text{دس}-\int_{٤}^{-١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}=$

$[\text{س}^٢]_{٤}^{-١}-\left(\int_{٤}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}+\int_{١}^{-١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right)$

$١-١٦-(-١٠+-٣)$

$-١٥+١٣=-٢$

س٩) $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}=\text{أ}\sqrt[٣]{\text{ع}}$ $\quad \text{ع}(٠)=٠$

أ = ؟ عندما ع(٣) = ٨

$\int \text{ع}^{-\frac{١}{٣}}\,\text{دع}=\int \text{أ}\,\text{دن}$

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{\text{ع}^٢}=\text{أن}+\text{جـ}$

$\text{ع}(٠)=٠ \Rightarrow \frac{٣}{٢}\times ٠=\text{أ}\times ٠+\text{جـ}$

جـ = صفر

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{\text{ع}^٢}=\text{أن}$

عندما ن = ٣ ، ع = ٨

$\frac{٣}{٢}\times ٤=\text{أ}\times ٣$

$٦=٣\text{أ} \Rightarrow \boxed{\text{أ}=٢}$

س١٠) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=\frac{\sqrt{\text{هـ}^{\text{ص}}}}{١-\text{جا}^٢\text{س}}$

$\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}\,\text{دص}=\frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}=\int \text{قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$-٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}=-\text{ظاس}+\text{جـ}$

$(\frac{\pi}{٤}،٠) \Rightarrow -٢\times\text{هـ}^{٠}=-\text{ظا}\frac{\pi}{٤}+\text{جـ}$

$\text{جـ}=-١$

$-٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}=-\text{ظاس}-١$

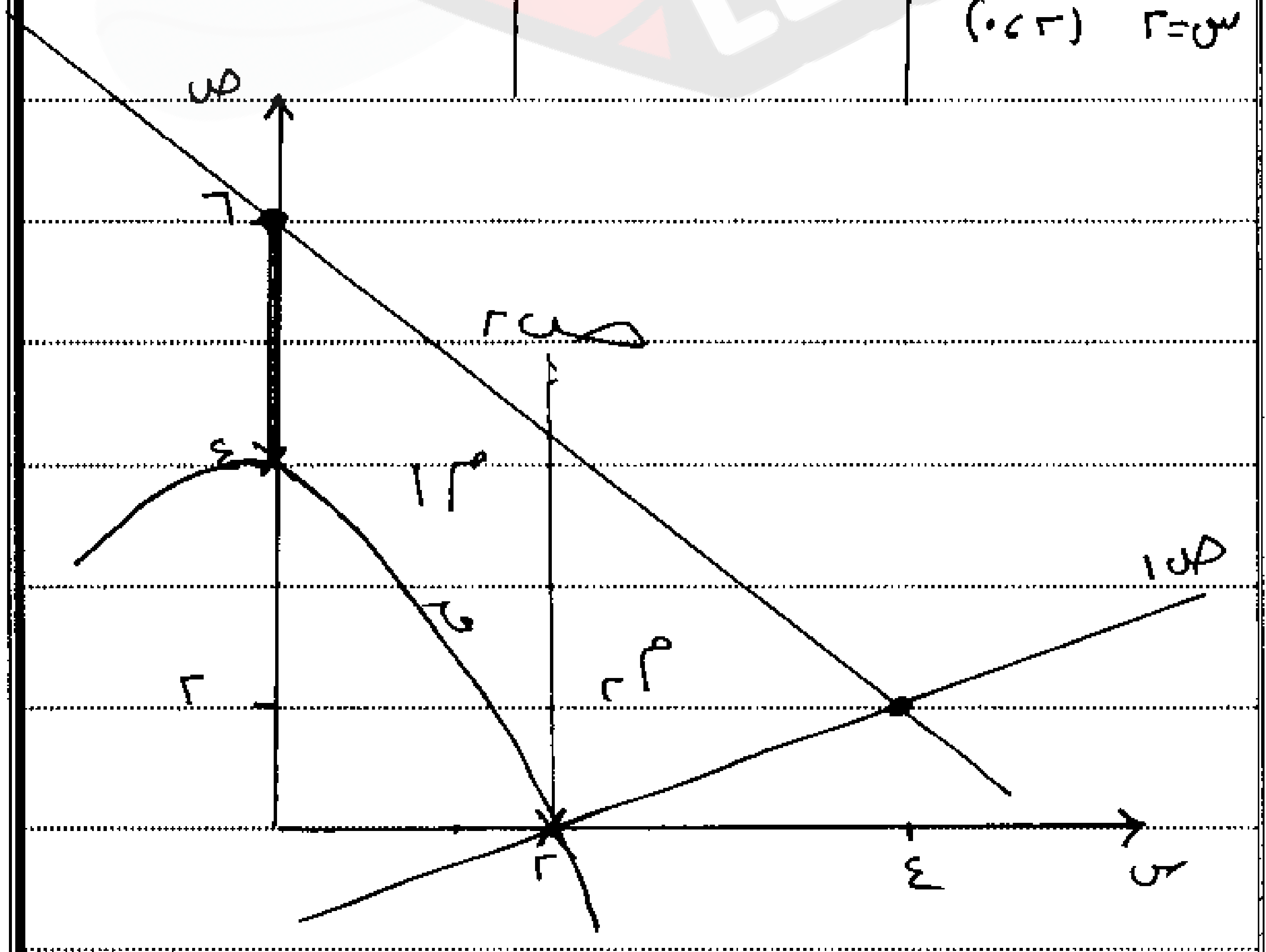
$\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}=\frac{١}{٢}\text{ظاس}+\frac{١}{٢}$

$-\frac{١}{٢}\text{ص}=\text{لو}_{\text{هـ}}(\frac{١}{٢}\text{ظاس}+\frac{١}{٢})$

$\text{ص}=-٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\frac{١}{٢}\text{ظاس}+\frac{١}{٢})$

س١١) $\text{ق}(\text{س})=٤-\text{س}^٢$ ، $\text{ص}_١=\text{س}-٢$ ، $\text{ص}_٢=٦-\text{س}$

$\text{ق}=\text{ص}_١$	$\text{ق}=\text{ص}_٢$	$\text{ص}_١=\text{ص}_٢$
$٤-\text{س}^٢=\text{س}-٢$	$٤-\text{س}^٢=٦-٢\text{س}$	$\text{س}-٢=٦-\text{س}$
$\text{س}^٢+\text{س}-٦=٠$	$\text{س}^٢-٢\text{س}+٢=٠$	$٢\text{س}=٨ \leftarrow \boxed{\text{س}=٤}$
$(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)=٠$	لا تحل	$(٤ ، ٢)$
$\text{س}=-٣$ تهمل		
$\text{س}=٢$ $\quad(٢ ، ٠)$		



$\text{م}=\text{م}_١+\text{م}_٢ \Rightarrow \text{م}=\int^{٢}\text{ص}_٢-\text{ق}\,\text{دس}+\int^{٤}(\text{ص}_٢-\text{ص}_١)\,\text{دس}$

$=\int_{٠}^{٢}(\text{س}^٢-\text{س}+٢)\,\text{دس} \oplus \int_{٢}^{٤}(٨-٢\text{س})\,\text{دس}$

$\left[\frac{\text{س}^٣}{٣}-\frac{\text{س}^٢}{٢}+٢\text{س}\right]_{٠}^{٢}+\left[٨\text{س}-\text{س}^٢\right]_{٢}^{٤}$

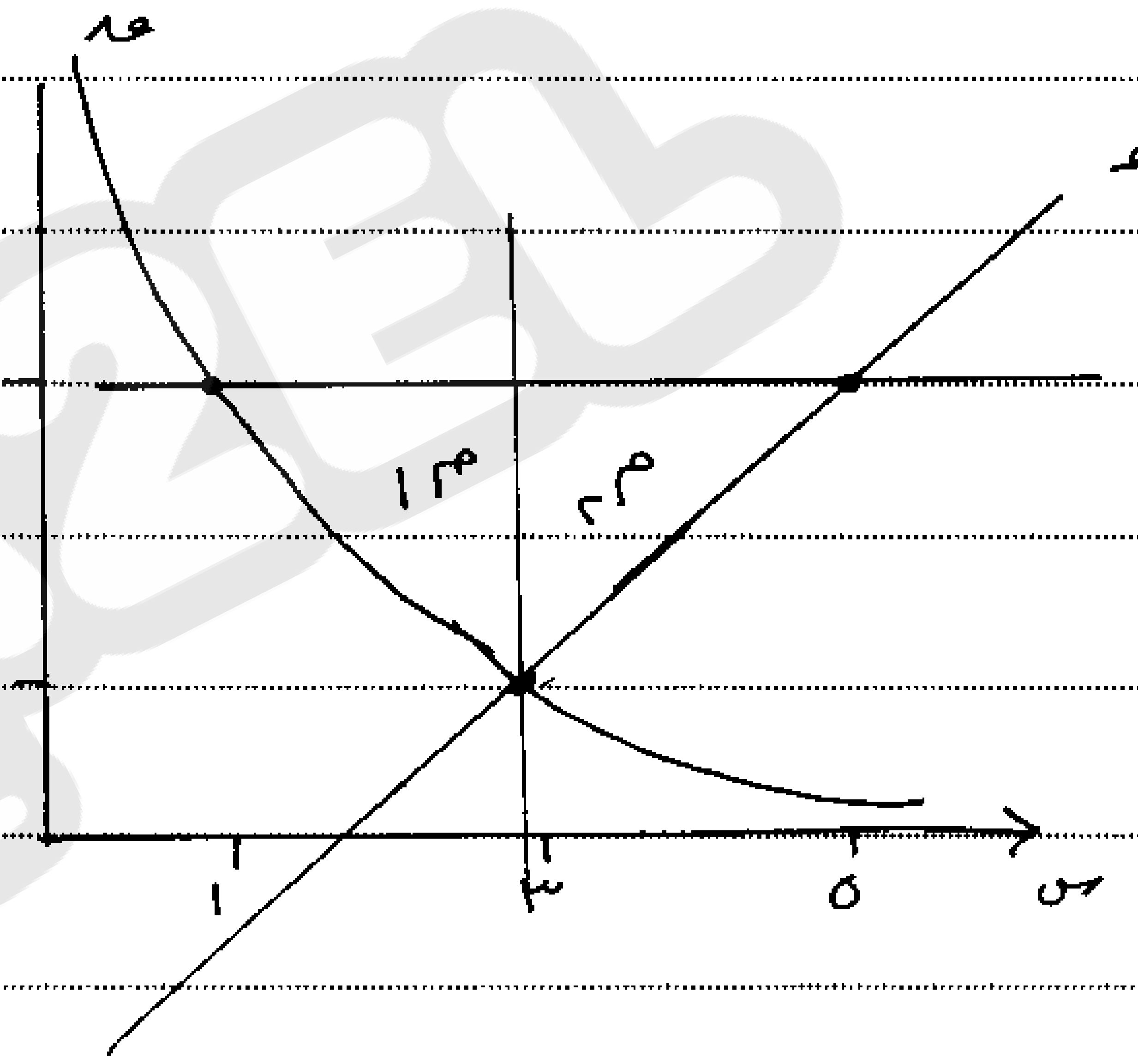
$\frac{٨}{٣}-٢+٤ \oplus (٣٢-١٦)-(١٦-٤)$

$\frac{١٤}{٣}+٤=\frac{٢٦}{٣}$ وحدة مساحة

س١٢) $ق(س) = \frac{٣}{س}$ ، $هـ(س) = س - ٢$

$ل(س) = ٣$

ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
$\frac{٣}{س} = س - ٢$	$\frac{٣}{س} = ٣$	$س - ٢ = ٣$
	$س = ١$	$س = ٥$
$س = ٣$ (٣ ، ١)	(١ ، ٣)	(٥ ، ٣)
$س = -١$ (−١ ، −٣)		



$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{١}^{٣} (ل - ق)\, دس + \int_{٣}^{٥} (ل - هـ)\, دس$

$= \int_{١}^{٣} ٣ - \frac{٣}{س}\, دس \oplus \int_{٣}^{٥} ٣ - س + ٢\, دس$

$[٣س - ٣ لو_{هـ}|س|]_{١}^{٣} \oplus [٥س - \frac{س^٢}{٢}]_{٣}^{٥}$

$٩ - ٣لو_{هـ}٣ - (٣ - صفر) \oplus (٢٥ - \frac{٢٥}{٢}) - (١٥ - \frac{٩}{٢})$

$٦ - ٣لو_{هـ}٣ \oplus ٢$

$٨ - ٣لو_{هـ}٣$

س١٣) مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث − $\int_{-٢}^{٢} ق(س)\, دس$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$

$٢ - \frac{١}{٢}س^٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢ ، -٢$

$م = \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{١}{٢}س^٢)\, دس$

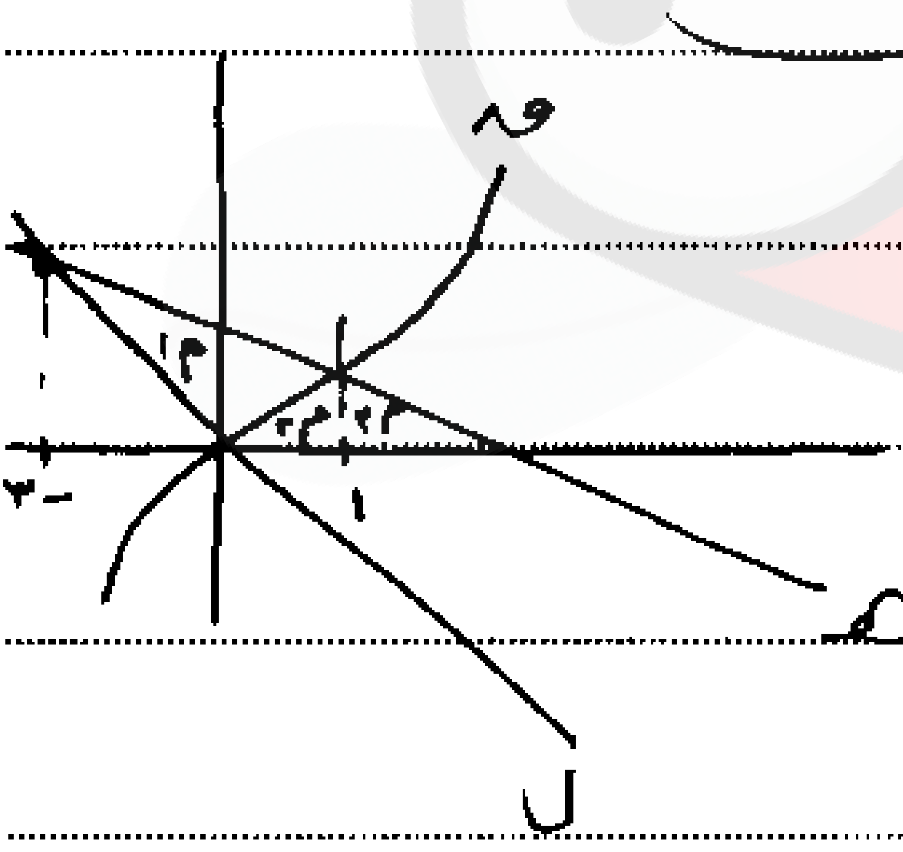
$= [٢س - \frac{١}{٦}س^٣]_{-٢}^{٢}$

$(٤ - \frac{٨}{٦}) - (-٤ + \frac{٨}{٦}) = \frac{١٦}{٣}$

مساحة المنطقة المظللة = $١٢ - \frac{١٦}{٣}$

$= \frac{٢٠}{٣}$

التكلفة = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢٠}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ من الدينار.



س١٤) $م_١ = \int_{-٣}^{٠} (هـ - ل)\, دس$

$= \int_{-٣}^{٠} ٣ - س + ٢س\, دس$

$= [٣س + \frac{س^٢}{٢}]_{-٣}^{٠}$

$(صفر) - (-٩ + \frac{٩}{٢}) = \frac{٩}{٢}$

$م_٢ = \int_{٠}^{١} ق(س)\, دس \leftarrow م_٢ = \int_{٠}^{١} ٢س^٣\, دس = [\frac{س^٤}{٢}]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$

$م_٣ = \int_{١}^{٣} ٣ - س\, دس$

$= [٣س - \frac{س^٢}{٢}]_{١}^{٣}$

$(٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٢$

$م = م_١ + م_٢ + م_٣$

$= \frac{٩}{٢} + \frac{١}{٢} + ٢ = ٧$ وحدة مساحة

س١٥) $م_1 = ١٠ \Leftarrow \int_{-٣}^{٠} ق(س)\,دس = ١٠$

$م_2 = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} ق(س)\,دس = -٤$

$\int_{٠}^{٢} س\, ق(١-س^2)\,دس$

$ص = ١ - س^2 \qquad دص = -٢س\,دس$

$س = ٠ \qquad ص = ١$

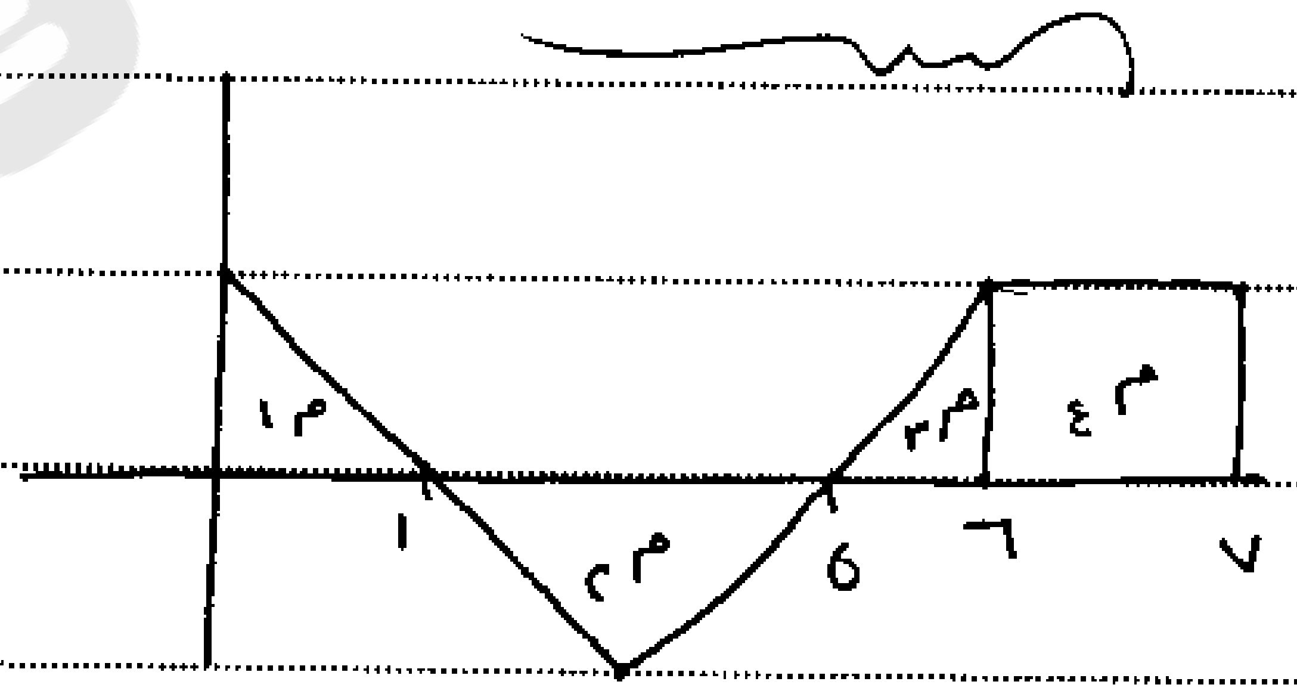
$س = ٢ \qquad ص = -٣$

$\int_{١}^{-٣} -\frac{١}{٢}\, ق(ص)\,دص$

$= -\frac{١}{٢}\left(\int_{١}^{٠} ق(ص)\,دص + \int_{٠}^{-٣} ق(ص)\,دص \right)$

$= -\frac{١}{٢}\left(+٤ + -١٠\right) = ٣$

س١٦)



$م_1$ = مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{١} ق(س)\,دس = \frac{١}{٢}$

$م_2 = \frac{١}{٢} \times ٢ \times (٥-١) = ٤$

$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = -٤$

$م_3 = \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$

$\int_{٥}^{٦} ق(س)\,دس = \frac{١}{٢}$

$م_4 = ١ \times ١ = ١$ ، $\int_{٦}^{٧} ق(س)\,دس = ١$

$\int_{٥}^{٧} ق(س)\,دس = \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$

أ) $\int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٥}^{٧} ق(س)\,دس$

$= \frac{١}{٢} + -٤ + \frac{٣}{٢} = -٢$

ب) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)|\,دس$ = المساحة

$= م_1 + م_2 + م_3 + م_4 = \frac{١}{٢} + ٤ + \frac{١}{٢} + ١$

= ٦ وحدة مساحة

جـ) $\left| \int_{٠}^{٧} ق(س)\,دس \right|$

$= \left| \int_{٠}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٥}^{٧} ق(س)\,دس \right|$

$= \left| \frac{١}{٢} + \bar{٤} + \frac{٣}{٢} \right| = |-٢| = ٢$

س١٧) أ) $\int جا\sqrt{س}\; جتا^3\sqrt{س}\,دس$

نفرض $ص = \sqrt{س} \qquad ص^2 = س \qquad ٢ص\,دص = دس$

$\int ٢ص\, جاص\, جتا^3ص\,دص$

$= \int ٢ص\, جاص\, جتاص\, جتا^2ص\,دص$

$= \int ٢ص \times \frac{١}{٢} جا٢ص \times \frac{١}{٢}(١ + جتا٢ص)\,دص$

$= \int \frac{١}{٢}ص\,(جا٢ص + جا٢ص\,جتا٢ص)\,دص$

$= \int \frac{١}{٢}ص\,(جا٢ص + \frac{١}{٢} جا٤ص)\,دص$

$ع = \frac{١}{٢}ص \qquad دع = \frac{١}{٢}\,دص$

$دهـ = (جا٢ص + \frac{١}{٢} جا٤ص)\,دص \qquad هـ = (-\frac{١}{٢} جتا٢ص - \frac{١}{٨} جتا٤ص)$

$= \frac{١}{٢}ص(-\frac{١}{٢} جتا٢ص - \frac{١}{٨} جتا٤ص) + \int \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢} جتا٢ص + \frac{١}{٨} جتا٤ص)\,دص$

$= \frac{١}{٢}ص(-\frac{١}{٢} جتا٢ص - \frac{١}{٨} جتا٤ص) + \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤} جا٢ص + \frac{١}{٣٢} جا٤ص) + جـ$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{س}(-\frac{١}{٢} جتا٢\sqrt{س} + \frac{١}{٨} جتا٤\sqrt{س}) + \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤} جا٢\sqrt{س} + \frac{١}{٣٢} جا٤\sqrt{س}) + جـ$

ب) $\int \text{س}^{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}+١}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢}+١ \qquad \text{دص} = ٣\text{س}\;\text{دس}$

$\int \frac{١}{٢}\,\text{ص}^{\frac{١}{٣}}\;\text{دص} = \frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{س}^{٤}+١)^{٤}} + \text{جـ}$

جـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} \frac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\,\text{ظاس} + ٢}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \qquad \text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\;\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \rightarrow \text{ص} = ٠ \qquad \text{س} = \frac{\pi}{٦}\text{،}\ \text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\;\text{دص} = \int \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}+١}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\;\text{دص}$

$= \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{\text{ص}^{٢}+١}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\;\text{دص}$

$= \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} ١\;\text{دص} + \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{٣\text{ص} - ١}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢}\;\text{دص}$

$\int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} ١\;\text{دص} + \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{٥}{(\text{ص}-٢)}\;\text{دص} + \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{-٢}{(\text{ص}-١)}\;\text{دص}$

$\text{ص}\Big]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-٢|\Big]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-١|\Big]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٣}}-٢\right| - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٣}}-١\right| + \cancel{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}١}$

$= \frac{١}{\sqrt{٣}} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٣}}-٢\right| - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{١}{\sqrt{٣}}-١\right|$

د) $\int \frac{\text{ظتاس}\;\text{قتاس}}{٩ - ٤\,\text{قتا}^{٢}\text{س}}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \text{قتاس} \qquad \text{دص} = -\,\text{قتاس}\;\text{ظتاس}\;\text{دس}$

$= \int \frac{-١}{٩ - ٤\text{ص}^{٢}}\;\text{دص} = \int \frac{١}{٤\text{ص}^{٢} - ٩}\;\text{دص}$

$= \int \frac{\frac{١}{٦}}{٢\text{ص} - ٣}\;\text{دص} + \int \frac{-\frac{١}{٦}}{٢\text{ص} + ٣}\;\text{دص}$

$= \frac{١}{١٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{ص} - ٣| + \frac{-١}{١٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{ص} + ٣| + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{٢\,\text{قتاس} - ٣}{٢\,\text{قتاس} + ٣}\right| + \text{جـ}$

هـ) $\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٤}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\;\text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٤} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\;\text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٥}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} \qquad \text{دص} = ٣\text{س}^{٢}\;\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \quad \text{ص} = ٠ \text{،} \quad \text{س} = ٢ \quad \text{ص} = ٨$

$\int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\;\text{دص} = \int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣}\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\;\text{دص}$

$\text{ع} = \frac{١}{٣}\text{ص} \qquad \text{دع} = \frac{١}{٣}\;\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}\;\text{دص} \qquad \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣}\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\;\text{دص} = \left[\frac{١}{٣}\,\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{٠}^{٨} - \int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\;\text{دص}$

$= \left(\frac{٨}{٣}\,\text{هـ}^{٨} - \text{صفر}\right) - \frac{١}{٣}\left[\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{٠}^{٨}$

$\frac{٨}{٣}\,\text{هـ}^{٨} - \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{٨} + \frac{١}{٣} = \frac{٧}{٣}\,\text{هـ}^{٨} + \frac{١}{٣}$

و) $\int \text{جا}3\text{س}\ \text{قتا}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{جا}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}(2\text{س}+\text{س})}{\text{جا}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}2\text{س}\ \text{جتا}\text{س} + \text{جا}\text{س}\ \text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{2\text{جا}\text{س}\ \text{جتا}\text{س}\ \text{جتا}\text{س} + \text{جا}\text{س}\ \text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جا}\text{س}}\left(2\times\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{س}) + \text{جتا}2\text{س}\right)}{\cancel{\text{جا}\text{س}}}\ \text{دس}$

$= \int 1 + 2\text{جتا}2\text{س}\ \text{دس}$

$= \text{س} + \text{جا}2\text{س} + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{2\text{جا}3\text{س}\ \text{جتا}\text{س}}{\text{جتا}2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}(\text{جا}4\text{س}+\text{جا}2\text{س})}{\text{جتا}2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{2\text{جا}2\text{س}\ \text{جتا}2\text{س} + \text{جا}2\text{س}}{\text{جتا}2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int 2\text{جا}2\text{س} + \text{ظا}2\text{س}\ \text{دس}$

$= -\text{جتا}2\text{س} - \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}2\text{س}| + \text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{س}+\text{جا}\text{س}}{1+\text{جتا}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{1+\text{جتا}\text{س}}\ \text{دس} + \int \frac{\text{جا}\text{س}}{1+\text{جتا}\text{س}}\ \text{دس}$

⊛ $\int \frac{\text{س}}{1+\text{جتا}\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{س}}{2\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}}\ \text{دس}$

$\int \frac{1}{2}\text{س}\ \text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \frac{1}{2}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{1}{2}\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = 2\text{ظا}\frac{\text{س}}{2}$

$\int \frac{1}{2}\text{س}\ \text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}\ \text{دس} = \text{س}\ \text{ظا}\frac{\text{س}}{2} - \int \text{ظا}\frac{\text{س}}{2}\ \text{دس}$

$= \text{س}\ \text{ظا}\frac{\text{س}}{2} + 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}| + \text{جـ}$

⊛ $\int \frac{\text{جا}\text{س}}{1+\text{جتا}\text{س}}\ \text{دس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{جتا}\text{س}|$

$\therefore \int \frac{\text{س}+\text{جا}\text{س}}{1+\text{جتا}\text{س}}\ \text{دس} = \text{س}\ \text{ظا}\frac{\text{س}}{2} + 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|1+\text{جتا}\text{س}| + \text{جـ}$

ط) $\int \frac{4\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-1)^2}\ \text{دس}$

$\text{ع} = 4\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{4}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}-1)^{-2}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{-1}{\text{س}-1}$

$\int \frac{4\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-1)^2}\ \text{دس} = \frac{-4\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-1} + \int \frac{4}{\text{س}(\text{س}-1)}\ \text{دس}$

$= \frac{-4\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-1} + \int \frac{-4}{\text{س}}\ \text{دس} + \int \frac{4}{\text{س}-1}\ \text{دس}$

$= \frac{-4\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-1} - 4\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + 4\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}$

ي) $\int \text{قا}\text{س}(\text{قا}\text{س}+\text{ظا}\text{س})^{10}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{قا}\text{س} + \text{ظا}\text{س}$ ، $\text{دص} = (\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س} + \text{قا}^2\text{س})\ \text{دس}$

$\int \text{ص}^{10}\ \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^{9}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{10}}{10} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{قا}\text{س}+\text{ظا}\text{س})^{10}}{10} + \text{جـ}$

س١٨)

١) $\int \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{جا}٢\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} - ١$

$\text{د}(\text{س}) = ٢\text{جتا}٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جا}٢\text{س}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\text{د}(٠) = ٢$ (د)

٢) $\int \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = \text{س}^٥ + \text{جاس} + ٣$

$\text{د}(\text{س}) = ٥\text{س}^٤ + \text{جتاس}$ (أ)

٣) $١ \le \text{د}(\text{س}) \le ٤ \leftarrow ٢ \le ٢\text{د}(\text{س}) \le ٨$

$\int_{-١}^{٢} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{-١}^{٢} ٨\,\text{دس}$

$\int_{-١}^{٢} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} \le ٢٤$ (ب)

٤) $\int_{-٣}^{٣} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ١٠$ ، $\int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٥$

$\int_{-٢}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$

$\int_{١}^{٣} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٣} ٣\,\text{دس}$

$= ٢\left(\int_{١}^{-٢} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{دس}\right) + ٣(٣ - ١)$

$= ٢(-٤ + ٥) + ٦ = ٨$ (جـ)

٥) $\int_{أ}^{ب} \text{د}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}(\text{س})$ $\qquad \text{دص} = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{س} = أ \quad \text{ص} = \text{هـ}(أ)$ ، $\text{س} = ب \quad \text{ص} = \text{هـ}(ب)$

$\int_{\text{هـ}(أ)}^{\text{هـ}(ب)} \text{د}'(\text{ص})\,\text{دص} = \Big[\text{د}(\text{ص})\Big]_{\text{هـ}(أ)}^{\text{هـ}(ب)}$

$= \text{د}(\text{هـ}(ب)) - \text{د}(\text{هـ}(أ))$ (جـ)

٦) $\int_{-١}^{٢} (\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\,\text{دس} = ١٢$

$(\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))(٢ - -١) = ١٢ \Leftarrow \text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) = ٤$

$\int_{-١}^{٢} ٨\text{س}\,\text{دس} = \Big[٤\text{س}^٢\Big]_{-١}^{٢} = ١٦ - ٤ = ١٢$ (جـ)

٧) $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س}\,\text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$ ، $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د}(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، $\text{ص}^٢ = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad ٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \quad \text{ص} = ١ \qquad \text{س} = ٢ \quad \text{ص} = \text{هـ}$

$\int_{١}^{\text{هـ}} ٢\text{ص}\,\text{د}(\text{ص})\,\text{دص} = ٢ \times ٤ = ٨$ (ب)

٨) $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس}$ (أ)

٩) $\int_{أ}^{ب} (\text{هـ}(\text{س}) - \text{د}(\text{س}))\,\text{دس} = ٦$

$\int_{أ}^{ب} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} - ١٠ = ٦ \Leftarrow \int_{أ}^{ب} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = ٦ + ١٠$

$\int_{أ}^{ب} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = ١٦$ (جـ)

١٠) $\int_{-٢}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-٢}^{٢} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٣}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{دس}$

$= ٤٫٨ + -٠٫٨ + ٢ = ٦$ (ب)

١١) $\text{م} = \int_{٠}^{١} ٣\text{س} - \text{س}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤ - \text{س} - \text{س}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} ٢\text{س}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤ - ٢\text{س}\,\text{دس}$

(ب)

رقم الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
رمز الإجابة	د	أ	ب	جـ	جـ	جـ	ب	أ	جـ	ب	ب

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة الرياضيات

الصف: الثاني عشر (العلمي).

الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها

الفصل الأول: القطوع المخروطية:

أولاً: القطع المخروطي:

س١ الشكل (٥-٣):

أ) قطع زائد ب) قطع ناقص جـ) دائرة د) قطع مكافئ

س٢ أ) قطع زائد ب) دائرة جـ) قطع مكافئ د) قطع ناقص

ثانياً: الحل الهندسي:

تدريب (١): الحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى هو دائرة مركزها النقطة ك (٣، -٤)، ونصف قطرها = ١ وحدة.

∴ معادلة المحل الهندسي = معادلة الدائرة

$\Leftarrow (\text{س}-٣)^٢ + (\text{ص}+٤)^٢ = (١)^٢$

$\Leftarrow (\text{س}-٣)^٢ + (\text{ص}+٤)^٢ = ١$

تدريب (٢): الحل الهندسي الناتج هو خط مستقيم، ولإيجاد معادلته:

البعد = √٥

م: ص + ٢س = ٠

النقطة (س، ص)

$$\text{البعد} = \left|\frac{\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^٢+\text{ب}^٢}}\right|$$

$$\sqrt{٥} = \left|\frac{٢\times\text{س} + ١\times\text{ص} + ٠}{\sqrt{(٢)^٢+(١)^٢}}\right| = \frac{|٢\text{س}+\text{ص}|}{\sqrt{٥}}$$

$٥ = |٢\text{س}+\text{ص}|$

∴ $٢\text{س}+\text{ص} = ٥$

أو $٢\text{س}+\text{ص} = -٥$

وبما أن النقطة المتحركة تمر أثناء حركتها بالنقطة (-١، -٣) فإن معادلة المستقيم هي $\boxed{٢\text{س}+\text{ص}=-٥}$

تابع المحل الهندسي :

تدريب (٣) : معادلة المحل الهندسي هي :

$$٣ \times \sqrt{(\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}+١)^{٢}} = \left|\frac{\text{س}}{\sqrt{١}}\right|$$ (محور الصادات معادلته س = ٠)

$$٩ \times \left((\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}+١)^{٢}\right) = \left(|\text{س}|\right)^{٢}$$

$$٩\left(\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٤+\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}+١\right) = \text{س}^{٢}$$

$$٨\text{س}^{٢}+٩\text{ص}^{٢}-٣٦\text{س}+١٨\text{ص}+٤٥=٠$$

★ تمارين ومسائل المحل الهندسي :

س١ معادلة المحل الهندسي هي : $(\text{س}+٢)^{٢}+(\text{ص}-٦)^{٢}=(٧)^{٢}$

س٢ معادلة المحل الهندسي هي :

$$\text{البعد}=٤=\left|\frac{\text{س}-١}{\sqrt{(١)^{٢}+(٠)^{٢}}}\right| \Leftarrow ٤=|\text{س}-١| \Leftarrow \text{س}=٥$$ تهمل

أو $\boxed{\text{س}=-٣}$ إذن النقطة (-٣، ٢) تقع عليه .

س٣ معادلة المحل الهندسي هي :

$$\sqrt{(\text{س}-٥)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}} = ٢\left|\frac{\text{ص}-٤}{\sqrt{٠+(١)^{٢}}}\right|$$ وبتربيع الطرفين

$$(\text{س}-٥)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢} = ٤(\text{ص}-٤)^{٢}$$

$$\text{س}^{٢}-١٠\text{س}+٢٥+\text{ص}^{٢}-٦\text{ص}+٩ = ٤\text{ص}^{٢}-٣٢\text{ص}+٦٤$$

$$\text{س}^{٢}-٣\text{ص}^{٢}-١٠\text{س}+٣٦\text{ص}-٣٠=٠$$

س٤ بعد النقطة عن المستقيم = ٣ وحدات ، معادلة المستقيم $٣\text{س}+٤\text{ص}-٥=٠$ ، النقطة مركز الدائرة ∴ (٤، ٢) تقع على المحل الهندسي

∴ معادلة المحل هي البعد = $٣=\left|\frac{٣\text{س}+٤\text{ص}-٥}{\sqrt{(٣)^{٢}+(٤)^{٢}}}\right|$

$$٣=\frac{|٣\text{س}+٤\text{ص}-٥|}{٥} \Leftarrow ١٥=|٣\text{س}+٤\text{ص}-٥|$$

∴ $٣\text{س}+٤\text{ص}-٥=-١٥ \Leftarrow ٣\text{س}+٤\text{ص}=-١٠$

أو $٣\text{س}+٤\text{ص}-٥=١٥ \Leftarrow ٣\text{س}+٤\text{ص}=٢٠$

لكن النقطة (٤، ٢) تقع على منحنى المستقيم الذي معادلته $٣\text{س}+٤\text{ص}=٢٠$

∴ معادلة المحل الهندسي هي $\boxed{٣\text{س}+٤\text{ص}=٢٠}$

الفصل الثاني : معادلات القطوع المخروطية :

أولاً : الدائرة :.

تدريب ١ : ١) معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان (٧، ٣) ، (٥، -١)

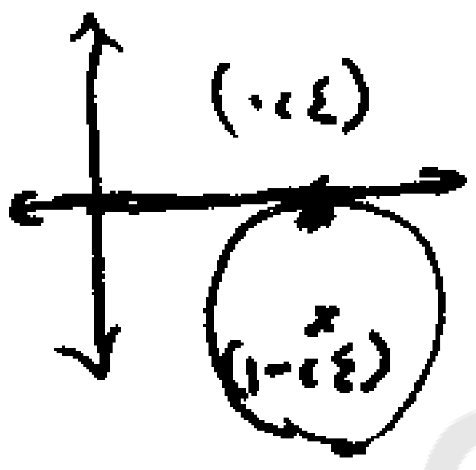
نجد إحداثيات المركز = $\left(\frac{٧+٥}{٢} ، \frac{٣+-١}{٢}\right) = (٦ ، ١)$ إحداثيات منتصف قطعة $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

نجد قطر الدائرة = $\sqrt{(٧-٥)^٢+(٣--١)^٢} = \sqrt{٤+١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول ⇐ نق = $\sqrt{٥}$ وحدة

∴ معادلة الدائرة هي $(س-٦)^٢+(ص-١)^٢ = ٥$

تدريب ١ : ٢) معادلة الدائرة على الصورة القياسية :

∴ مركز الدائرة هو (-١، ٤) ، نق = $\sqrt{٣٠}$ وحدة



تدريب ٢ : بما أن الدائرة تمس محور السينات ، فإن نقطة التماس (٤، ٠) ، وبما أن المركز (٤، -١)

نجد نق = $\sqrt{(٤-٤)^٢+(٠--١)^٢} = ١$ وحدة

∴ المعادلة $(س-٤)^٢+ص^٢ = ١$ ——— وهي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

تدريب ٣ :

أ) المركز (٤، -١) ، وتمس المستقيم ص = -٢ ،

نجد نق = البعد بين نقطة ومستقيم = $\left|\frac{أس_١+ب ص_١+جـ}{\sqrt{(أ)^٢+(ب)^٢}}\right|$ حيث $(\overset{س_١}{٤} ، \overset{ص_١}{-١})$

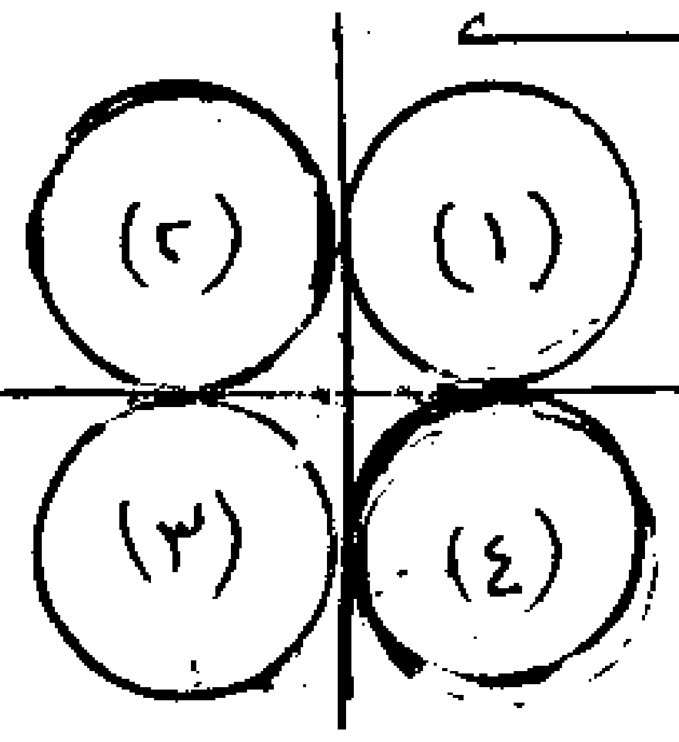
أ = ٠ = معامل س في المستقيم

ب = ١ = معامل ص

جـ = ٢ = الحد الثابت لأن المعادلة ص+٢ = ٠

$= \left|\frac{\cancel{٠×٤} + ١×-١ + ٢}{\sqrt{(٠)^٢+(١)^٢}}\right| = \frac{١}{١} = ١$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : $(س-٤)^٢+(ص+١)^٢ = ١$



تدريب ٣ ب) بما أن الدائرة تمس المحورين ، ونصف قطرها = ٣ وحدات ، لاحظ الشكل

(١) الحل الأول: الدائرة تقع في الربع الأول ⇐ مركزها (٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي : $(س-٣)^٢+(ص-٣)^٢ = ٩$

(٢) الحل الثاني : الدائرة تقع في الربع الثاني ⇐ المركز (-٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي : $(س+٣)^٢+(ص-٣)^٢ = ٩$

(٣) الحل الثالث : الدائرة تقع في الربع الثالث ⇐ معادلة الدائرة $(س+٣)^٢+(ص+٣)^٢ = ٩$

(٤) الحل الرابع : الدائرة تقع في الربع الرابع ⇐ معادلة الدائرة $(س-٣)^٢+(ص+٣)^٢ = ٩$.

تدريب ٤ : ١) بما أن المعادلة على الصورة العامة ، فإن المركز = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص)

∴ إحداثيا المركز = $\left(\frac{-(-٢)}{٢} ، -\frac{(٦)}{٢}\right) = (١ ، -٣)$

د = ١
هـ = −٣
جـ = الحد الثابت = −٦

طول نصف القطر = $\sqrt{(د)^٢ + (هـ)^٢ - جـ} = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - (-٦)}$

$= \sqrt{١ + ٩ + ٦} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

حل آخر: يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية بإكمال مربع ثم إيجاد المركز و نصف القطر.

تدريب ٤: ٢) $(٣س + ٦)^٢ + (٣ص - ١٢)^٢ = ٣٦$

يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية على الصورة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$\left(\frac{٣س}{٣} + \frac{٦}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{٣ص}{٣} - \frac{١٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٣٦}{(٣)^٢}$ بالقسمة على ٣ ، ولاحظ أنه داخل $(\ )^٢$

ومنه $(س + ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٤$.

∴ المركز (−٢ ، ٤) ، نق = ٢ وحدة طول .

تدريب (٥) : الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + جـ = ٠$ ، فنعوض النقاط الثلاثة

$(٠ ، ٠) \Leftarrow \boxed{جـ = ٠}$

$(٠ ، ٢) \Leftarrow \cancel{(٠)}^٢ + (٢)^٢ + \cancel{أ × ٠} + ب × ٢ + \cancel{جـ} = ٠ \Leftarrow ٢ب + ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{ب = -٢}$

$(-١ ، ٣) \Leftarrow (-١)^٢ + (٣)^٢ + أ × -١ + ب × ٣ + \cancel{جـ} = ٠ \Leftarrow ١٠ - أ + ٣ب = ٠$

$١٠ - أ - ٦ = ٠ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

∴ معادلة الدائرة $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص = ٠}$

إحداثيا مركز الدائرة = $\left(\frac{- معامل س}{٢} ، \frac{- معامل ص}{٢}\right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{-(-٢)}{٢}\right) = (-٢ ، ١)$

نق = $\sqrt{د^٢ + هـ^٢ - جـ} = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ - ٠} = \sqrt{٥}$ وحدة طول .

تدريب (٦) : بما أن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + جـ = ٠$ ، مركزها على محور الصادات ⟸ إحداثياته $\left(٠ ، \frac{-ب}{٢}\right)$

وبما أن النقاط (−١ ، ٣) ، (٥ ، ١) تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها ، ومنه

$-أ + ٣ب + جـ = -١٠$ —— ①
$٥أ + ب + جـ = -٢٦$ —— ②

وبما أن المركز = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص) = $\left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}\right) = \left(٠ ، \frac{-ب}{٢}\right)$

∴ $\boxed{أ = ٠}$

وبحل نظام المعادلتين ① ، ② نجد أن $\boxed{ب = ٨}$ ، $\boxed{جـ = -٣٤}$

∴ الصورة النهائية لمعادلة الدائرة هي : $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٨ص - ٣٤ = ٠}$

ملاحظة : يمكن حل السؤال على المسافة بين نقطتين. $س^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ ، المركز (٠ ، −٤) ، نق = $\sqrt{٥٠}$ وحدة طول

تمارين ومسائل الدائرة :

س١ أ) معادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ = (٨)^٢$

ب) معادلة الدائرة $(س + ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٤٩$ لأن نق = $\sqrt{(-٢-٥)^٢ + (١-١)^٢} = ٧$ وحدة طول

جـ) معادلة الدائرة $(س - ٣)^٢ + (ص + ٧)^٢ = ٤٩$ لأن نق = البعد بين المركز والمماس = $|-٧| = ٧$ وحدة طول

د) معادلة الدائرة $(س-٥)^٢ + (ص-١)^٢ = (\sqrt{٥})^٢$ لأن المركز = $\left(\frac{٦+٤}{٢} ، \frac{-١+٣}{٢}\right) = (٥ ، ١)$

نق = $\sqrt{(٦-٥)^٢ + (-١-١)^٢} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

هـ) معادلة الدائرة $(س-٥)^٢ + (ص+٥)^٢ = (٥)^٢$ لأن الدائرة تقع في الربع الرابع وتمس المحورين فإن المركز (٥ ، -٥)

و) الدائرة يقع مركزها على محور السينات ⟸ المركز $\left(\frac{-أ}{٢} ، ٠\right)$ ⟸ $\boxed{ب = ٠}$

تمر بالنقطة (٠ ، -٢) ⟸ $\boxed{جـ = -٤}$

تمر بالنقطة (٤ ، ٤) ⟸ ٤أ + جـ = -٣٢ ⟸ $\boxed{أ = -٧}$

∴ معادلة الدائرة هي $\boxed{س^٢ + ص^٢ - ٧س - ٤ = ٠}$

ز) تمر بالنقاط (-٥ ، ٠) ، (-٣ ، ٤) ، (١ ، ٢) فنكون نظامًا من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات ونحله

النظام : -٥أ + جـ = -٢٥ —— ①

-٣أ + ٤ب + جـ = -٢٥ —— ②

أ + ٢ب + جـ = -٥ —— ③

ومن الحل نجد أن

أ = ٤

ب = -٢

جـ = -٥

∴ المعادلة هي : $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص - ٥ = ٠}$

ح) الدائرة تمس محور السينات عند النقطة (٧ ، ٠) ⟸ مركز الدائرة = $\left(\frac{-أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}\right) = \left(٧ ، \frac{-ب}{٢}\right)$ ⟸ $\boxed{أ = -١٤}$

وتمس النقطة (٧ ، ٠) ⟸ $\boxed{جـ = ٤٩}$

وتمر بالنقطة (١ ، ٢) ⟸ $\boxed{ب = -٢٠}$

∴ معادلة الدائرة هي $\boxed{س^٢ + ص^٢ - ١٤س - ٢٠ص + ٤٩ = ٠}$

س٢ أ) المركز (٠ ، ٠) ، نق = $\sqrt{١٤٤} = ١٢$ وحدة طول

س٢ ب) نكتب المعادلة على الصورة القياسية $(س+١١)^٢ + (ص+٤)^٢ = ١٣$ ⟸ المركز (-١١ ، -٤) ، نق = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

س٢ جـ) المركز (٠ ، ٧) ، نق = $\sqrt{٨١} = ٩$ وحدة طول.

س٢ د) نكتب المعادلة على الصورة العامة $س^٢ + ص^٢ - ٨س - ٦ص - ٩ = ٠$

المركز $\left(\frac{+٨}{٢} ، \frac{+٦}{٢}\right) = (٤ ، ٣)$

نق = $\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢ - -٩} = \sqrt{١٦ + ٩ + ٩} = \sqrt{٣٤}$ وحدة طول.

تابع الدائرة:

ح هـ) نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$٣س^٢ + ٣ص^٢ + ٦ص - ٢٧ = ٠$ نقسم على ٣

$س^٢ + ص^٢ + ٢ص - ٩ = ٠$

المركز $(٠ ، -١)$ ، نق $= \sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢ - -٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول.

و) $\left(\frac{٢}{٢}س - \frac{٢}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{٢ص}{٢} + \frac{١٠}{٢}\right)^٢ = \frac{١٠٠}{(٢)^٢}$

$(س-١)^٢ + (ص+٥)^٢ = ٢٥ \Leftarrow$ المركز $(١ ، -٥)$ ، نق $= ٥$ وحدة طول.

ز) نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$(س+٤)^٢ + ص^٢ = ١٦ \Leftarrow$ المركز $(-٤ ، ٠)$ ، نق $= ٤$ وحدة طول.

ح) مركزها يقع على المستقيم $ص - ٢س = ٤$ وتمس محور السينات عند النقطة $(١ ، ٠)$

المركز $(د ، هـ) = (١ ، هـ)$

وبما أن المركز يقع على المستقيم $ص - ٢س = ٤ \Leftarrow$ تحقق معادلته $\Leftarrow هـ - ٢ \times ١ = ٤ \Leftarrow هـ = ٦$

∴ إحداثيا المركز $(١ ، ٦)$

نق = المسافة بين $(١ ، ٦)$ ، $(١ ، ٠)$ $= ٦$ وحدات

∴ معادلة الدائرة هي $(س-١)^٢ + (ص-٦)^٢ = ٣٦$

ط) مركز الدائرة $= (-٢ ، -٢)$ ، نق = البعد بين المركز والمماس الذي معادلته $٣س - ص + ١٠ = ٠$.

نق $= \left| \frac{٣ \times -٢ - ١ \times (-٢) + ١٠}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}} \right| = \left| \frac{-٦ + ٢ + ١٠}{\sqrt{١٠}} \right| = \frac{٦}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي: $(س+٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = \frac{٣٦}{١٠}$

تابع الدائرة :

هـ بما أن س = ٣ + ٢ جاهـ ⇐ جاهـ = $\frac{س - ٣}{٢}$ ـــ ①

ص = ٤ + ٢ جتاهـ ⇐ جتاهـ = $\frac{ص - ٤}{٢}$ ـــ ②

لكن جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ (متطابقة مثلثية)

∴ $\left(\frac{س - ٣}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{ص - ٤}{٢}\right)^{٢} = ١$ ⇐ $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٤$ وهي معادلة الحل الهندسي

∴ الحل الهندسي هو دائرة مركزها (٣، ٤)، وطول نصف قطرها = ٢ وحدة .

ك بما أن س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٤ ص + جـ = ٠ معادلة دائرة فإن $\left(\frac{-أ}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{-ب}{٢}\right)^{٢} - جـ >$ صفر

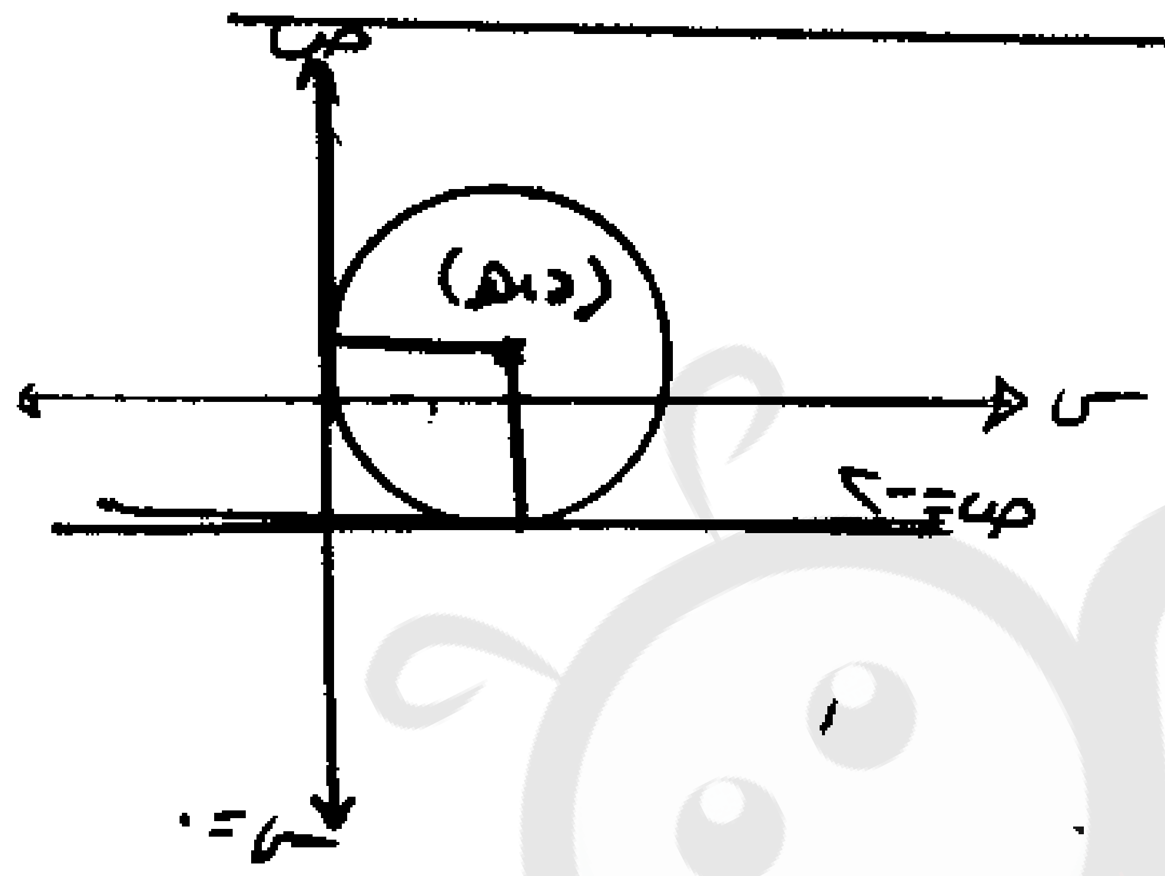
مركز الدائرة (−٤ ، ٢)

أ = ٨ ⟵ $\frac{-أ}{٢} = -٤$

ب = −٤ ⟵ $\frac{-ب}{٢} = ٢$

∴ $(-٤)^{٢} + (٢)^{٢} - جـ > ٠$

١٦ + ٤ > جـ ⇐ ٢٠ > جـ ⇐ قيم جـ = (−∞، ٢٠)



ل معادلة الدائرة هي $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

د = ر ⇐ هـ = ر − ٢

∴ $(س - ر)^{٢} + (ص - ر + ٢)^{٢} = ر^{٢}$

بما أن (٤، ٠) تقع على الدائرة ⇐ $(٤ - ر)^{٢} + (-ر + ٢)^{٢} = ر^{٢}$

ومنه ر^{٢} − ١٢ ر + ٢٠ = ٠ ⇐ (ر − ١٠) (ر − ٢) =

∴ ر = ١٠ أو ر = ٢ ترفض

عندما ر = ١٠ ⇐ المركز (١٠، ٨) ⇐ معادلة الدائرة $(س - ١٠)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} = ١٠٠$

م الدائرة تمس المحورين ∴ المركز (د ، د)

بعد الدائرة عن المستقيم أجـ = نق

نجد معادلة $\overleftrightarrow{أجـ}$ ⇐ ص = −س + ٤ ⇐ س + ص − ٤ = ٠

البعد = د = $\left|\frac{د + د - ٤}{\sqrt{(١)^{٢} + (١)^{٢}}}\right| = \left|\frac{٢د - ٤}{\sqrt{٢}}\right|$

∴ $\sqrt{٢}$ د = |٢د − ٤| وبتربيع الطرفين

$(\sqrt{٢}\,د)^{٢} = (٢د - ٤)^{٢}$ ⇐ ٢د^{٢} = ٤د^{٢} − ١٦د + ١٦ ⇐ ٢د^{٢} − ١٦د + ١٦ = ٠ ⟵ د^{٢} − ٨د + ٨ = ٠

∴ نجد د = $\frac{٨ \mp \sqrt{(-٨)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٨}}{٢}$ ⟵ ٤ + ٢$\sqrt{٢}$ تهمل لأن نق < ٤ حسب الشكل المعطى

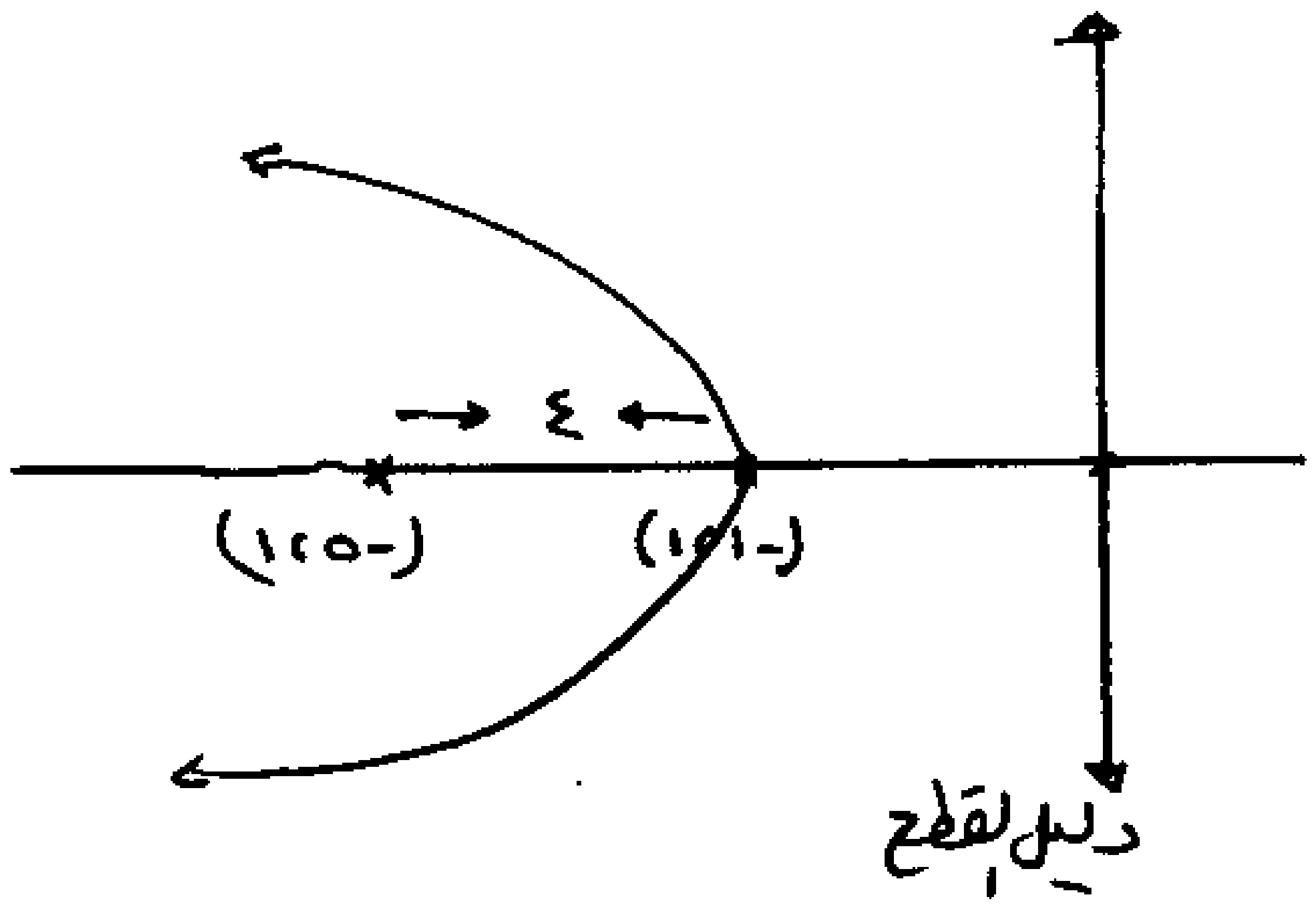
٤ − ٢$\sqrt{٢}$

∴ معادلة الدائرة هي :

$(س - ٤ + ٢\sqrt{٢})^{٢} + (ص - ٤ + ٢\sqrt{٢})^{٢} = (٤ - ٢\sqrt{٢})^{٢}$

ثانيًا : القطع المكافئ :

تدريب ١ : ١) رأس القطع المكافئ (-١، ١)، بؤرته النقطة (-٥، ١) .



نلاحظ أن القطع مفتوح نحو اليسار

∴ معادلة القطع هي $(ص - هـ)^{٢} = -٤ جـ (س - د)$

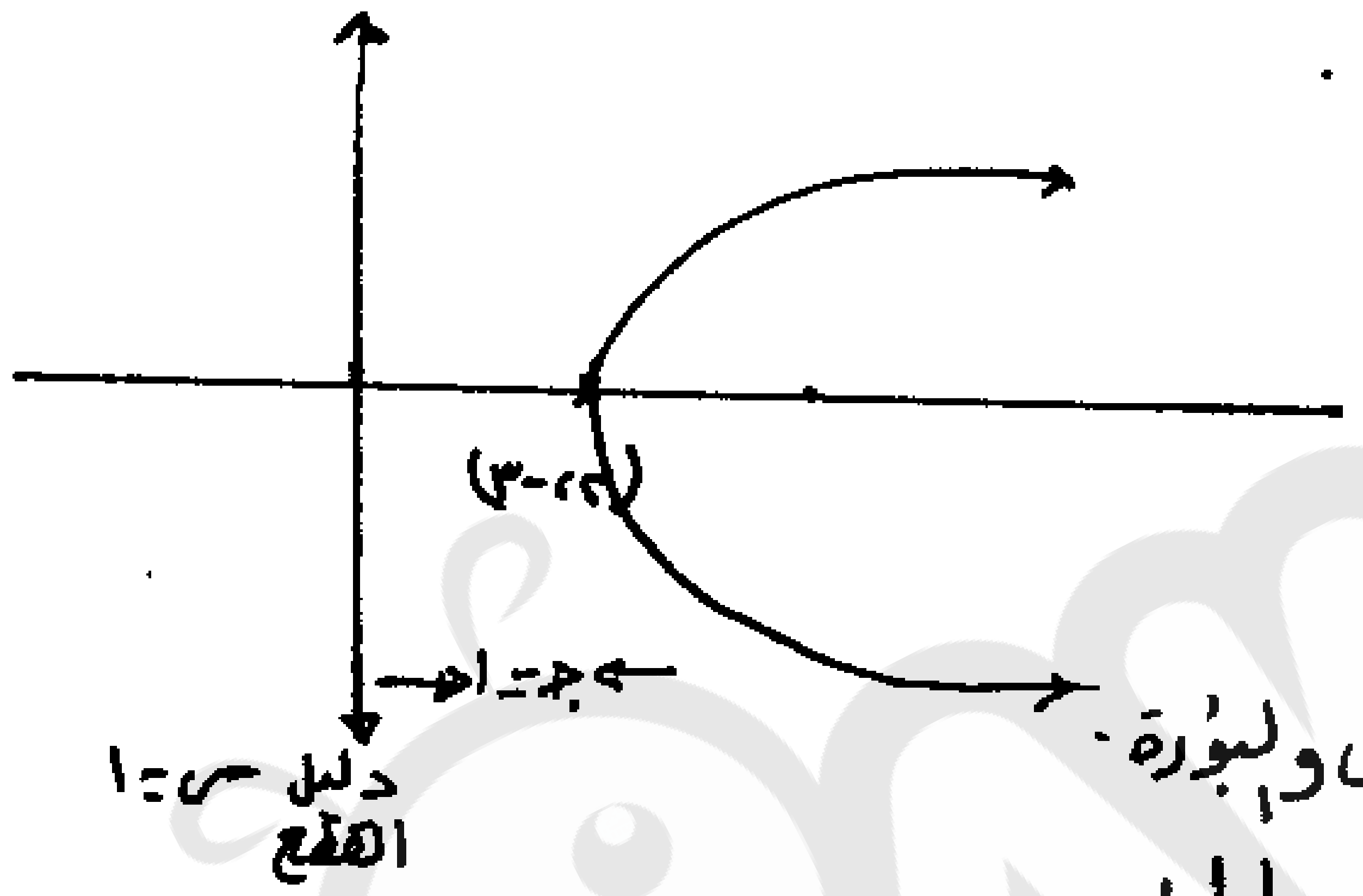
وحيث أن الرأس $(د، هـ) = (-١، ١)$

وبعد الرأس عن البؤرة = جـ = ٤ وحدات

∴ المعادلة $(ص - ١)^{٢} = -٤ × ٤ (س + ١)$

$(ص - ١)^{٢} = -١٦ (س + ١)$

تدريب ١ : ٢) رأس القطع المكافئ (٢، -٣)، معادلة دليله س = ١ .



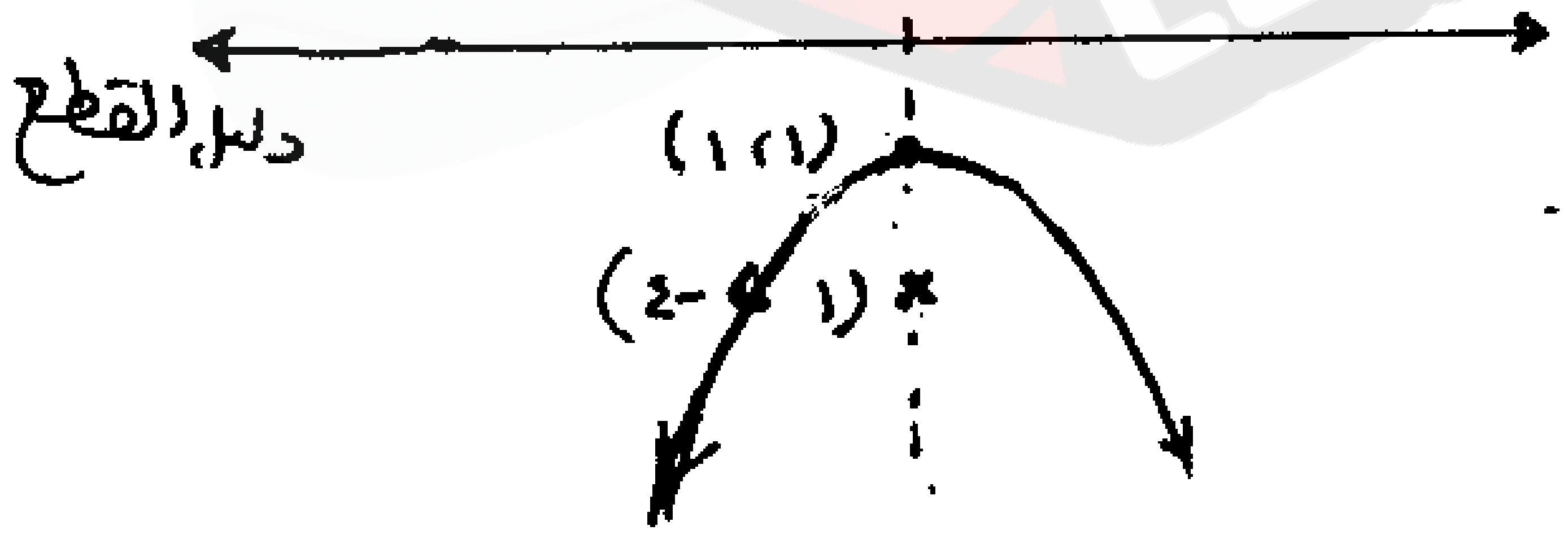
معادلة القطع المكافئ هي :

$(ص + ٣)^{٢} = ٤ × ١ (س - ٢)$

$(ص + ٣)^{٢} = ٤ (س - ٢)$

حيث جـ = البعد بين الرأس والبؤرة .
= البعد بين الرأس والدليل

تدريب ٢ : ١) بما أن البؤرة تقع أسفل الرأس ⇐ القطع مفتوح للأسفل ، و جـ = البعد بين الرأس والبؤرة = ٥ وحدات

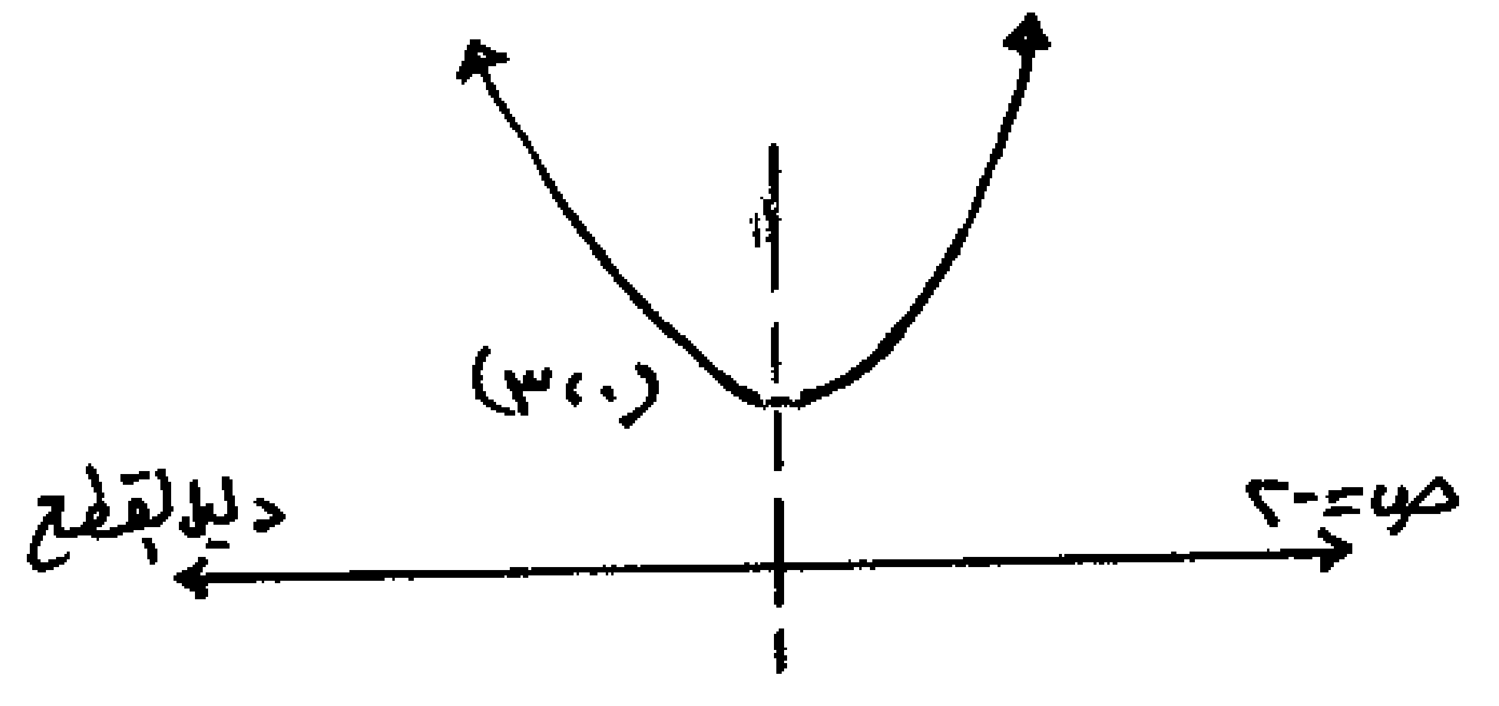


∴ معادلة القطع المكافئ هي :

$(س - ١)^{٢} = -٤ × ٥ (ص - ١)^{٢}$

$(س - ١)^{٢} = -٢٠ (ص - ١)^{٢}$

٢) الرأس (٠، ٣)، ومعادلة دليله ص + ٣ = ٠ ⇐ ص = -٣



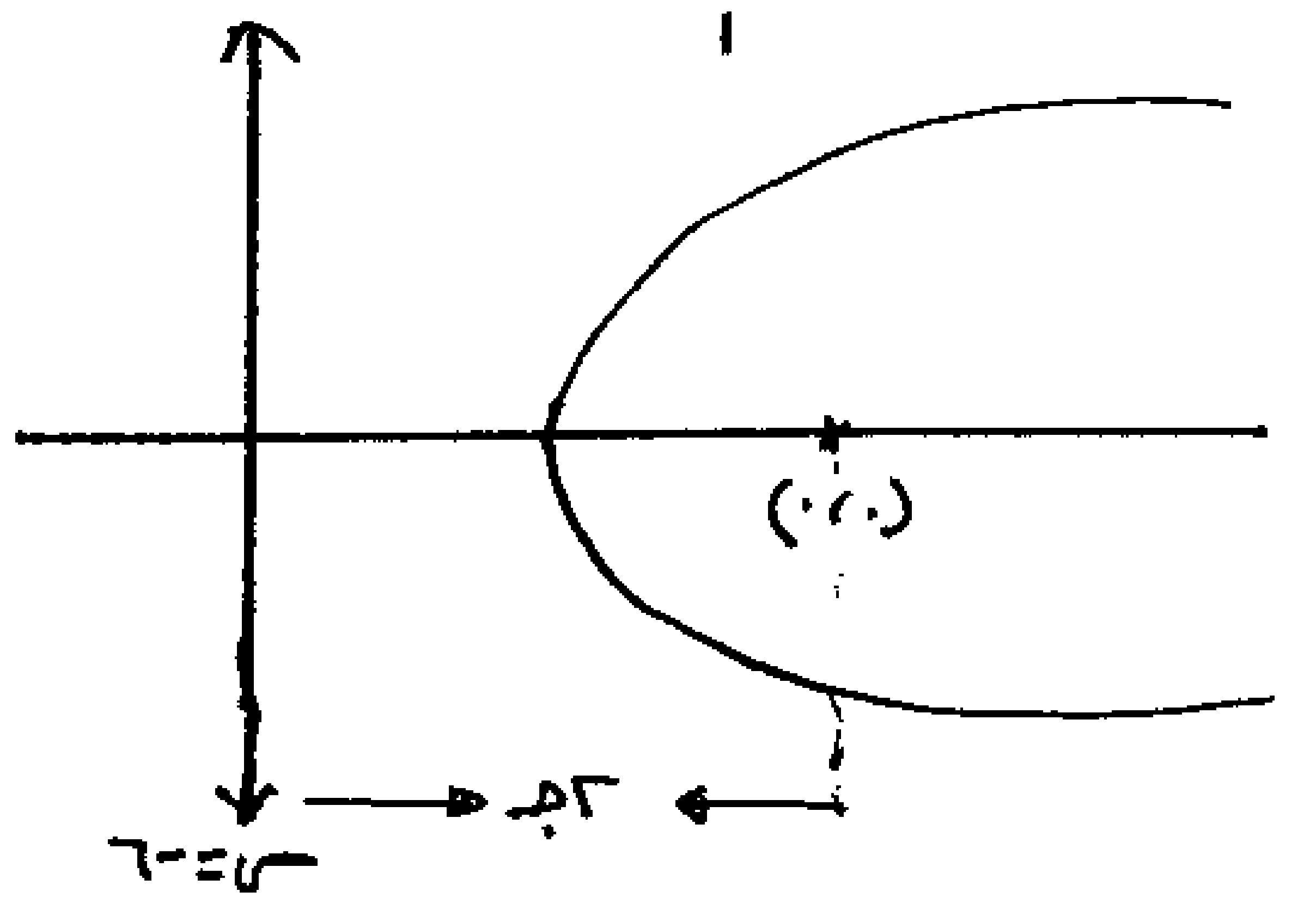
معادلة القطع المكافئ هي :

$(س - ٠)^{٢} = ٤ × ٥ (ص - ٣)$

القطع مفتوح نحو الأعلى
و جـ = ٥

$س^{٢} = ٢٠ (ص - ٣)$

٣) بؤرته (٠، ٠) ومعادلة دليله س = -٦



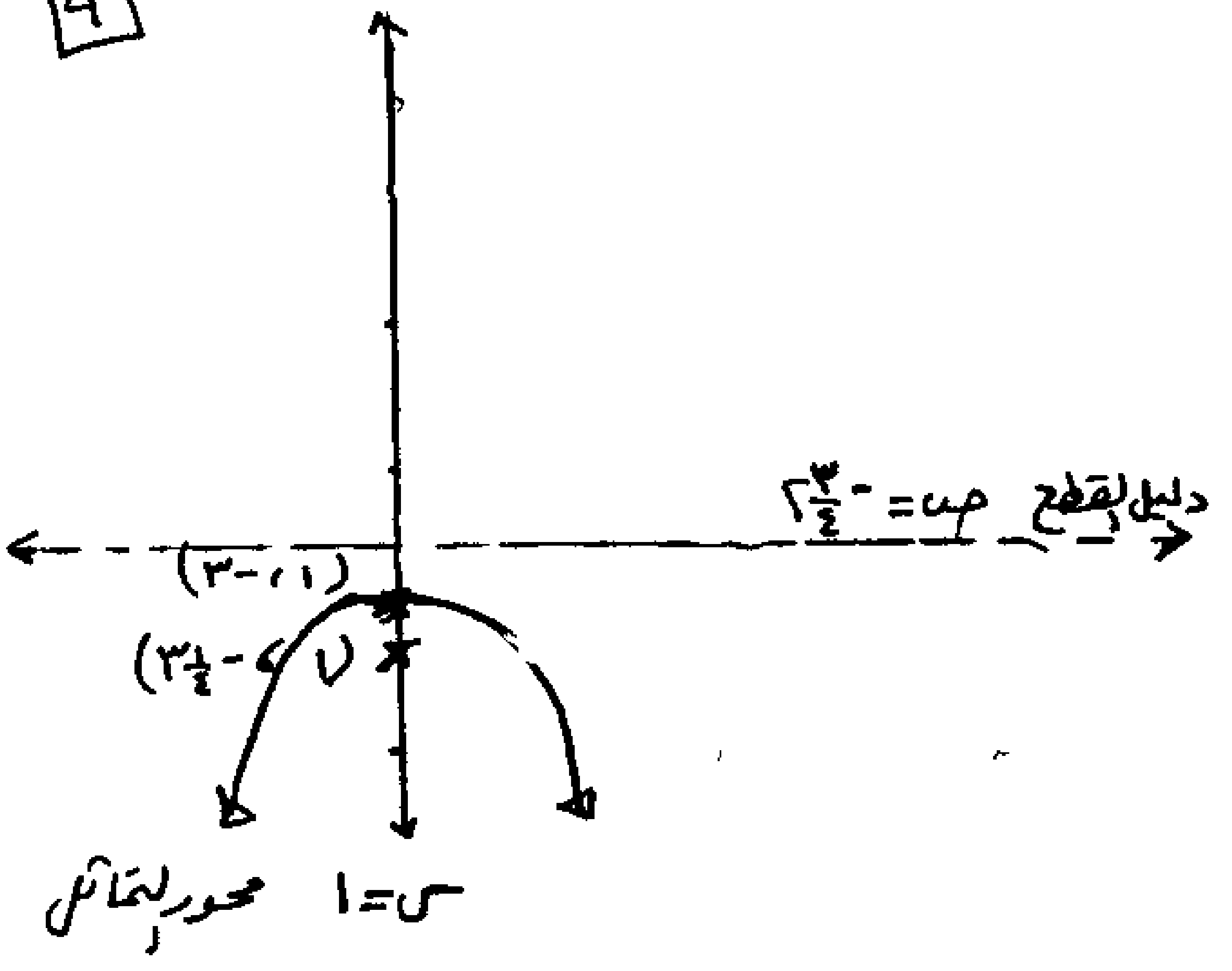
∴ معادلة القطع المكافئ هي :

القطع مفتوح نحو اليمين
و جـ = ٣

$ص^{٢} = ٤ × ٣ س$

$ص^{٢} = ١٢ س$

تابع / القطع المكافئ :



تدريب ٣ : نكتب المعادلة على الصورة القياسية :

$$(س - ١)^{٢} = -(ص + ٣)$$

ومنه نجد أن القطع مفتوح نحو الأسفل

إحداثيات الرأس = (١، -٣) ، جـ = $\frac{١}{٤}$

∴ إحداثيات البؤرة = (١، -٣$\frac{١}{٤}$)

معادلة الدليل هي: ص = -٣ + $\frac{١}{٤}$ = -٢$\frac{٣}{٤}$

معادلة محور التماثل هي : س = ١

تدريب ٤ : نكتب معادلة القطع على الصورة القياسية

$س^{٢} = ٤(ص - ١)$ فيكون منحنى القطع مفتوحاً نحو الأعلى و جـ = ١

- الرأس (٠، ١) ، البؤرة (٠، ٢)

معادلة الدليل هي : ص = ٠

معادلة محور التماثل هي س = ٠

تدريب ٥ : بما أن محور القطع معادلته س = -٢ ⇐ الرأس (-٢، هـ)

∴ معادلة القطع المكافئ هي :

$$(س + ٢)^{٢} = ٤جـ (ص - هـ)$$

النقطة (٠، ٠) تقع على المنحنى ⇐ $\boxed{جـ \times هـ = -١}$

النقطة (١، ٣) تقع على المنحنى ⇐ ٩ = ١٢جـ + ٤ ⇐ جـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، هـ = $-\frac{١٢}{٥}$

∴ المعادلة هي : $(س + ٢)^{٢} = \frac{٥}{٣}\left(ص + \frac{١٢}{٥}\right)$

حل أ) $ص^{٢} = -١٦(س + ١)$ حيث جـ = ٤ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليسار.

ب) $ص^{٢} = ١٦(س + ١)$ حيث جـ = ٤ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليمين.

جـ) $(س - ٢)^{٢} = ٢٠(ص - ٣)$ حيث جـ = ٥ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأعلى.

د) $(س - ٢)^{٢} = -٢٠(ص - ٣)$ حيث جـ = ٥ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأسفل.

هـ) $(س - ١)^{٢} = ٦\left(ص + \frac{٣}{٢}\right)$ حيث ٢جـ = البعد بين البؤرة والدليل = ٣ ⇐ جـ = $\frac{٣}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأعلى.

و) $ص^{٢} = -١٠س$ حيث ٢جـ = ٥ ⇐ جـ = $\frac{٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليسار.

ز) $(ص + ٥)^{٢} = ١٫٥(س - ١٫٦٢٥)$ حيث ٢جـ = ٠٫٧٥ ⇐ جـ = $\frac{٠٫٧٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين، ورأسه (١٫٦٢٥، -٥)

ح) $(ص + ٣)^{٢} = ١٢(س - ٢)$ حيث جـ = ٣ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين.

ط) $(س + ١)^{٢} = -١٢(ص - ٢)$ حيث جـ = ٣ ، والمنحنى مفتوح نحو الأسفل.

القطع الناقص

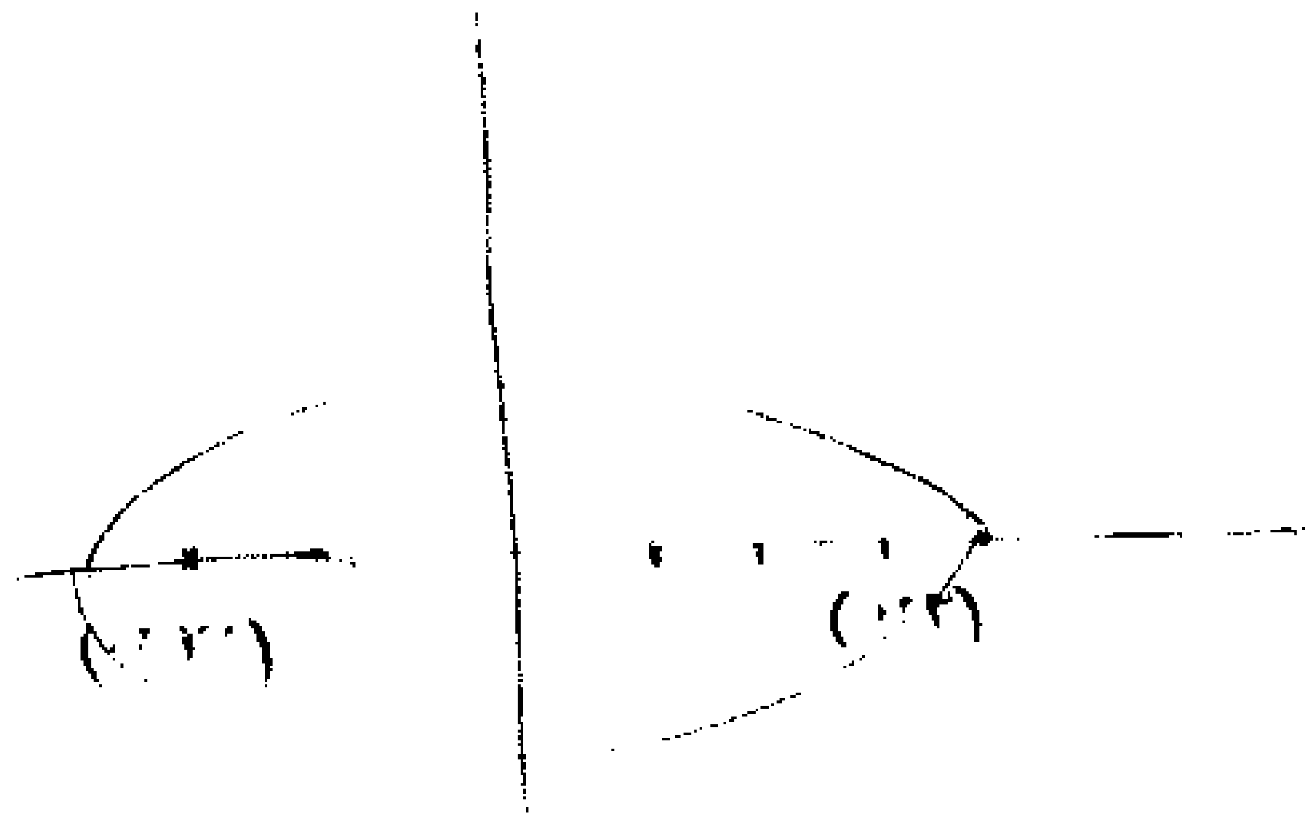
س(١) المركز (٠،٠) محوره الأصغر // محور ص ، ٢ب = ٤ ⟸ $\boxed{ب = ٢}$

احد بؤرتيه (-٣، ٠)

$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ ، (-٣، ٠) = (٠ - جـ، ٠) ⟸ $\boxed{جـ = ٣}$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$٩ = أ^2 - ٤$ ⟸ $أ^2 = ١٣$



∴ $\frac{س^2}{١٣} + \frac{ص^2}{٤} = ١$

س(٢) قطع ناقص بؤرتاه (-٢، ٣)، (-٢، ٩) ⟸ المركز = (-٢، ٦)

∴ $\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - د)^2}{ب^2} = ١$ ⟸ $\frac{(ص - ٦)^2}{أ^2} - \frac{(س + ٢)^2}{ب^2} = ١$

طول محور الأكبر = ١٢ ⟸ ٢أ = ١٢ ⟸ $\boxed{أ = ٦}$

البؤرتان (د، هـ ± جـ) ⟸ (-٢، ٣) = (د، هـ - جـ) ⟸ هـ - جـ = ٣

(-٢، ٩) = (د، هـ + جـ)

هـ + جـ = ٩

هـ = ٦ ، جـ = ٣

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$٩ = ٣٦ - ب^2$ ⟸ $\boxed{ب^2 = ٢٧}$

∴ $\frac{(ص - ٦)^2}{٣٦} + \frac{(س + ٢)^2}{٢٧} = ١$

ت(٣)

$$\frac{\text{س}^٢}{٢٥} + \frac{\text{ص}^٢}{٩} = ١$$

١) المركز (٠، ٠)

$\text{أ}^٢ = ٢٥ \Leftarrow \text{أ} = ٥$

$\text{ب}^٢ = ٩ \Leftarrow \text{ب} = ٣$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢$

$= ٢٥ - ٩$

$\text{جـ}^٢ = ١٦$

$\boxed{\text{جـ} = ٤}$

٢) البؤرتان (٠ ± ٤، ٠)

٣) الرأسان (٠ ± ٥، ٠)

٤) طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٠

٥) = = الأصغر = ٢ب = ٦

٦) طول البعد البؤري = ٢جـ = ٨

٧) طرفي المحور الأصغر (٠، ٠ ± ٣)

ت(٤) احد الرؤوس (٤، ١)، البؤرة القريبة من الرأس (٢، ١)، الاختلاف المركزي = ٠.٥

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^٢}{\text{أ}^٢} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^٢}{\text{ب}^٢} = ١$$

$\text{أ} - \text{جـ} = ٤ - ٢ = ٢$

$\therefore \boxed{\text{أ} - \text{جـ} = ٢}$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠.٥ \Rightarrow \boxed{\text{أ} = ٢\text{جـ}}$

$\Leftarrow ٢\text{جـ} - \text{جـ} = ٢$

$\boxed{\text{جـ} = ٢}$

$\boxed{\text{أ} = ٤}$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ - \text{ب}^٢$

$٤ = ١٦ - \text{ب}^٢ \Rightarrow \boxed{\text{ب}^٢ = ١٢}$

$(\text{د} + \text{أ}، \text{هـ}) = (٤، ١)$

$\text{د} + \text{أ} = ٤$

$\text{د} + ٤ = ٤$

$\boxed{\text{د} = ٠}$ $\boxed{\text{هـ} = ١}$

$$\therefore \frac{(\text{س})^٢}{١٦} + \frac{(\text{ص} - ١)^٢}{١٢} = ١$$

ت(٥)

$$\frac{(\text{س} - ٣)^٢}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٢)^٢}{١٦} = ١$$

ت(٦)

$٤س^٢ + ٣ص^٢ + ١٦س = ١٧٦$

$٤س^٢ + ١٦س + ٣ص^٢ = ١٧٦$

$٤(س^٢ + ٤س) + ٣ص^٢ = ١٧٦$

$٤(س+٢)^٢ + ٣ص^٢ - ١٦ = ١٧٦ \Leftarrow ٤(س+٢)^٢ + ٣ص^٢ = ١٩٢$

$\frac{(س+٢)^٢}{٤٨} + \frac{ص^٢}{٦٤} = ١ \Leftarrow \frac{ص^٢}{٦٤} + \frac{(س+٢)^٢}{٤٨} = ١$

١) المركز (-٢، ٠)　$أ^٢ = ٦٤ \Leftarrow أ = ٨$

$ب^٢ = ٤٨ \Leftarrow ب = \sqrt{٤٨}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ١٦ \Leftarrow جـ = ٤$

٢) الرأسان (-٢، ٠ ± ٨)

٣) البؤرتان (-٢، ٠ ± ٤)

٣) الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٨} = ٠,٥$

تمارين ومسائل

① أ) $\frac{(س-١)^٢}{٩} + \frac{(ص-١)^٢}{٤} = ١$

ب) $\frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{٢١} = ١$

جـ) $\frac{س^٢}{٢٢} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

د) $\frac{س^٢}{١٣} + \frac{٤ص^٢}{٣٩} = ١$

هـ) $\frac{(س-٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^٢}{٦٤} = ١$

و) $\frac{(س+٣)^٢}{٢٥} + \frac{(ص٤)}{١٦} = ١$

ز) $\frac{٥ص^٢}{٨١} + \frac{س^٢}{٩} = ١$

③ $٤(س-٣)^٢ + ٤(ص-٢)^٢ = ٣٦$

$(س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩$ ⇐ مركز الدائرة (٣، ٢)

نصف قطرها نق = ٣ ، القطر = ٦

مركز الدائرة (٣، ٢) هو احد بؤرتي القطع الناقص

طول المحور الأصغر = قطر الدائرة ⇐ ٢ب = ٦ ⇐ $\boxed{ب = ٣}$

معادلة المحور الأصغر هي س = −١ ⇐ $\frac{(س+١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$

المركز (−١، هـ) ⇐ $\boxed{د = -١}$

(٣، ٢) = (د + جـ ، هـ) ⇐ (−١ + جـ ، هـ)

جـ = ٤ ، هـ = ٢

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$١٦ = أ^٢ - ٩$ ⇐ $أ^٢ = ٢٥$

④ $\frac{(س-٣)^٢}{٢٩} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٥} = ١$

⑤ $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٤١} = ١$

⑥ $\frac{س-٥}{٣} = جاهـ$ ، $\frac{ص-٢}{٢} = جتاهـ$ ، $جا^٢هـ + جتا^٢هـ = ١$

$\frac{(س-٥)^٢}{٩} + \frac{(ص-٢)^٢}{٤} = ١$

⑦ $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ ؛ $\boxed{أب\pi = ٤٠\pi}$ ، $\boxed{أ = ٨}$

⑧ نصف القطر = ٦ ؛ $أب\pi = نق^٢\pi$

⑨ ⓐ $هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ⓑ $\frac{س^٢}{٤٠٠} + \frac{ص^٢}{١٠٠} = ١$

⑩ $هـ = \frac{جـ}{أ}$ ⇐ $جـ = أهـ$ ، $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ ⇐ $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$

$= أ^٢ - (أهـ)^٢$

$= أ^٢(١ - هـ^٢)$ هو المطلوب.

⑪ $م = أ + جـ$

$ن = أ - جـ$

بالجمع

$م + ن = ٢أ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{م + ن}{٢}}$

بالطرح $م - ن = ٢جـ \Leftarrow \boxed{جـ = \frac{م - ن}{٢}}$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\left(\frac{م - ن}{\cancel{٢}}\right)}{\left(\frac{م + ن}{\cancel{٢}}\right)} = \frac{م - ن}{م + ن}$ هو المطلوب.

بعاً: القطع الزائد :

ت(١) $\frac{س^٢}{٦٤} - \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

ت(٢) $\frac{٥ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

ت(٣) $أ^٢ = ٢٥ \Leftarrow أ = ٥$

$ب^٢ = ١٤٤ \Leftarrow ب = ١٢$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ = ١٣$

المركز (١ ، ٠)

البؤرتان (١ ، ٠ ± ١٣)

الرأسان (١ ، ٠ ± ٥)

طرفي المحور المرافق (١ ± ١٢ ، ٠)

، طول المحور القاطع = ١٠ ، ومعادلته س = ١

، طول المحور المرافق = ٢٤ ومعادلته ص = ٠

ت(٤) $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

ت(٥) ١) $\frac{(س-١)^2}{٥} - \frac{(ص+٢)^2}{٢} = ١$ والعناصر تطبيق مباشر.

٢) $\frac{س^2}{٤} - \frac{ص^2}{٩} = ١$ والعناصر تطبيق مباشر.

تمارين ومسائل

١) أ) $\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{٤} = ١$

ب) $\frac{ص^2}{٢٥} - \frac{س^2}{١٢١} = ١$

جـ) $\frac{٥س^2}{١٤٤} - \frac{ص^2}{٣٦} = ١$

د) $\frac{(س+١)^2}{٤} - \frac{٥(ص-١)^2}{١٦} = ١$

هـ) $\frac{س^2}{١٦} - \frac{ص^2}{٤} = ١$

و) $٤ص^2 - \frac{س^2}{٢} = ١$

٢) $٤(س-٣)^2 + ٤(ص-٢)^2 = ٣٦ \Leftarrow (س-٣)^2 + (ص-٢)^2 = ٩$ معادلة الدائرة

مركزها (٣، ٢) هو احد بؤرتي القطع الزائد

نق = ٣ ⇐ المرافق = القطر ⇐ ٢ب = ٦

$\boxed{ب = ٣}$

معادلة المحور المرافق هي س = −١

⇐ معادلة القطع هي $\frac{(س+١)^2}{أ^2} - \frac{(ص+هـ)^2}{ب^2} = ١$

احداثيا البؤرة (٣، ٢) ⇐ (−١+جـ، هـ) ⇐ −١+جـ = ٣ ⇐ $\boxed{جـ = ٤}$ ، $\boxed{هـ = ٢}$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2$

$١٦ = أ^2 + ٩ \Leftarrow \boxed{أ = \sqrt{٧}}$

$\therefore \frac{(س+١)^2}{٧} - \frac{(ص-٢)^2}{٩} = ١$

④ $٤(\text{س}-٤)^{٢}+٤(\text{ص}-٣)^{٢}=١٦ \Leftarrow (\text{س}-٤)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}=٤$ معادلة الدائرة ، نق $=٢$

مركزها $(٤ ، ٣)$ احد رأسي القطع الزائد

طول المرافق $٢\text{ب}=$ القطر $=٤ \Leftarrow \boxed{\text{ب}=٢}$

المركز $(\text{د} ، \text{هـ})$ يقع على $\text{س}=-١ \Leftarrow \boxed{\text{د}=-١}$

احد الرأسين $(٤ ، ٣)=(\text{د}+\text{أ} ، \text{هـ}) \Leftarrow -١+\text{أ}=٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ}=٥}$

$\boxed{\text{هـ}=٣}$

$$\frac{(\text{س}+١)^{٢}}{٢٥}-\frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{٤}=١$$

⑤ $\frac{\text{ل}\,\text{س}^{٢}}{٩٠}-\frac{\text{ك}\,\text{ص}^{٢}}{٩٠}=١$ ، $\text{أ}^{٢}=\frac{٩٠}{\text{ل}}$ ، $\text{ب}^{٢}=\frac{٩٠}{\text{ك}}$

طول محور القاطع $=٢\text{أ}=٦\sqrt{٢} \Leftarrow \boxed{\text{أ}=٣\sqrt{٢}} \Leftarrow (٣\sqrt{٢})^{٢}=\frac{٩٠}{\text{ل}}$

$١٨\,\text{ل}=٩٠$

$\text{ل}=\frac{٩٠}{١٨}=\frac{١٠}{٢}=٥$

$\boxed{\text{ل}=٥}$

القطع الناقص $٩\,\text{س}^{٢}+١٦\,\text{ص}^{٢}=٥٧٦$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{٦٤}+\frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦}=١$$

$\text{جـ}^{٢}=٢٨$

$\text{جـ}=\sqrt{٢٨}$

البؤرتان $(\pm\sqrt{٢٨} ، ٠)$

للقطع الزائد

$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}$

$\text{جـ}^{٢}=\frac{٩٠}{\text{ل}}+\frac{٩٠}{\text{ك}}$

البؤرتان $(\pm\text{جـ} ، ٠)=(\pm\sqrt{٢٨} ، ٠)$

$٢٨=\frac{٩٠}{\text{ل}}+\frac{٩٠}{\text{ك}}$

$٢٨=١٨+\frac{٩٠}{\text{ك}}$

$\frac{٩٠}{\text{ك}}=١٠ \Leftarrow \boxed{\text{ك}=٩}$

⑥ $\frac{\text{س}+٤}{٥} = \text{قاهـ}$ ، $\frac{\text{ص}-٢}{-٣} = \text{ظاهـ}$

$\text{ظا}^{٢}\text{هـ} + ١ = \text{قا}^{٢}\text{هـ} \Leftarrow \text{قا}^{٢}\text{هـ} - \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = ١$

$\frac{(\text{س}+٤)^{٢}}{٢٥} - \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٩} = ١$ قطع زائد

(٦) الاحصاء والاحتمالات / علمي

الفصل الأول: الاحصاء

أولاً :- الارتباط

تدريب (٢) ارتباط عكسي ؛ لأنه العلاقة تمثل خط مستقيم ميله سالب.

تمارين ومسائل:

١) طردي

٢) أ) طردي تام في الشكل (٦-٤)   ب) عكسي في الشكل (٦-٥)

ب) لا ؛ لأنه العلاقة ص = ٦+٣س تمثل ارتباطاً طردياً والشكل المرسوم يمثل ارتباطاً عكسياً.

٤) أ) عكسي

ب) قوي جداً (تام).

٥) نعم

٦) أ) طردي:

س	١	٢	٣
ص	٥	٦	٧

ب) عكسي

س	٢	٣	٤
ص	٧	٦	٣

ثانياً :- معامل ارتباط بيرسون

تدريب (١) ر ≃ ٠٫٨٤

تدريب (٢) أ) ١   ب) -١   جـ) ضعيفاً.

تدريب (٣) ١) ٠٫٨٩   ٢) ٠٫٨٩

تدريب (٤) ر ≃ ٠٫٨٤

تمارين ومسائل

١) أ) قوياً   ب) صفر   جـ) الكمية   د) نوع و قوة

٢) ر = ٠٫٩٧

٣) ر = $\frac{-١}{١٠٧١٠٧}$ = -٠٫١

٤) تدل على نوع الارتباط: (موجبة تعني ارتباطاً طردياً وسالبة تعني ارتباطاً عكسياً).

٥) العلاقة بين م، ن أقوى لأنه |-٠٫٩| > |٠٫٨|.

٦) ١) -٠٫١٣   ٢) ٠٫١٣

ثالثاً: معادلة خط الانحدار

تدريب (١) أ) ص = س + ١١ ب) $\hat{ص}$ = س + ١١

ج) ٢١ د) صفر

تمارين ومسائل:

١) أ) $\hat{ص}$ = ٢س + ٢

ب) ١٦

ج) ١

٢) أ) أ = [illegible] و ب = ١

ب) ٥ أخطاء

ج) صفر

٣) تدل على نوع الارتباط.

٤) $\hat{ص}$ = ٠٫٧ س + ٢٫٣

٥) ص الحقيقية = ٩ ، $\hat{ص}$ المتنبأ بها = ٢×٣ + ١ = ٧

الخطأ في التنبؤ = ص − $\hat{ص}$ = ٢

٦)

س	١	٢	٣
ص	٩	٨	٧

الفصل الثاني: الاحتمالات

أولاً: المتغير العشوائي المنفصل

تدريب (١) ١) ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

٢) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

٣) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

تدريب (٢) ١)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

٢)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

تحل بالشجرة أو ذات الحدين بعد دراسته.

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٢١}{٤٦٢}$	$\frac{١٤٠}{٤٦٢}$	$\frac{٢١٠}{٤٦٢}$	$\frac{٨٤}{٤٦٢}$	$\frac{٧}{٤٦٢}$

٤ ٧

بدون إرجاع توافيق

$ل(س = ٠) = \frac{\binom{٤}{٠}\binom{٧}{٥}}{\binom{١١}{٥}} = \frac{٢١}{٤٦٢}$

$ل(س = ١) = \frac{\binom{٤}{١}\binom{٧}{٤}}{\binom{١١}{٥}} = \frac{١٤٠}{٤٦٢}$ وهكذا

$ل(س = ٠) = ل(خخخخخ) = \frac{٣×٤×٥×٦×٧}{٧×٨×٩×١٠×١١}$

ل(س = ١) = ل(ن خ خ خ خ + خ ن خ خ خ + خ خ ن خ خ + خ خ خ ن خ + خ خ خ خ ن)

$= ٥× \frac{٤×٥×٦×٧×٤}{٧×٨×٩×١٠×١١}$

تدريب (٣) ٢ك + ٠٫٣ + ٠٫٤٥ + ٢ك = ١ ومنه، ك = ٠٫٠٥

تمارين ومسائل

١) ٠، ١، ٢، ٣

٢) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

٤)

س	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٦}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٥٦}$	$\frac{٢٠}{٥٦}$

ن	ح
٦	٢

ل(س=١) = $\frac{\binom{٦}{١}\binom{٢}{٢}}{\binom{٨}{٣}}$ = $\frac{٦}{٥٦}$ وهكذا.

ل(ن ح ح + ح ن ح + ح ح ن) = ٣ × ($\frac{\cancel{٦}}{٨}$ × $\frac{٢}{٧}$ × $\frac{١}{\cancel{٦}}$) = $\frac{٦}{٥٦}$

٥) أ) ل(١) + ل(٢) + ل(٣) = ١ ومنه، ٤ن + ٢ن + ٤ن = ١ ⟸ ن = $\frac{١}{١٠}$

ب)

س	١	٢	٣
ل(س)	٠٫٤	٠٫٢	٠٫٤

٦)

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٤}{١٠}$	$\frac{٣}{١٠}$	$\frac{٢}{١٠}$	$\frac{١}{١٠}$
	ح	بح	ببح	بببح

بيضاء	حمراء
٣	٢

ل(س=١) = $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٤}{١٠}$

ل(س=٢) = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ل(س=٣) = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢}{٤}$ × $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢}{١٠}$

ل(س=٤) = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢}{٤}$ × $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

ثانياً: توزيع ذات الحدين

تدريب (١) أ) ل(س=٣) = $\binom{٣}{٣}$$(٠٫٤)^{٣}$$(٠٫٦)^{٠}$ = $(٠٫٤)^{٣}$ = ٠٫٠٦٤

ب) ل(س<١) = ل(س=٠) = $\binom{٣}{٠}$$(٠٫٤)^{٠}$$(٠٫٦)^{٣}$ = ٠٫٢١٦

جـ) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣)

د) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) = ١ − ل(س=٠) = ١ − ٠٫٢١٦ = ٠٫٧٨٤

تدريب (٢) ن = ٧، أ = $\frac{١}{٤}$

١) ل(س=١) = $\binom{٧}{١}$$(\frac{١}{٤})^{١}$$(\frac{٣}{٤})^{٦}$

٢) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣) + ... + ل(س=٧) = ١ − [ل(س=١) + ل(س=٠)] ...

٣) ل(س≤١) = ل(س=١) + ل(س=٠) ......

تدريب (٣) ن = ٢٠، أ = ٠٫٧٥

١) ل(س=٥) = $\binom{٢٠}{٥}$$(٠٫٧٥)^{٥}$$(٠٫٢٥)^{١٥}$ ، ٢) ل(س=٠) = $\binom{٢٠}{٠}$$(٠٫٧٥)^{٠}$$(٠٫٢٥)^{٢٠}$ = $(٠٫٢٥)^{٢٠}$

تمارين ومسائل

١) $\text{ن} = ٥$ ، $\text{م} = ٠٫٧$

$\text{ل}(\text{س} \geq ٣) = \text{ل}(\text{س} = ٣) + \text{ل}(\text{س} = ٤) + \text{ل}(\text{س} = ٥) = \binom{٥}{٣}(٠٫٧)^{٣}(٠٫٣)^{٢} + \binom{٥}{٤}(٠٫٧)^{٤}(٠٫٣)^{١} + \binom{٥}{٥}(٠٫٧)^{٥}(٠٫٣)^{٠}$

٢) $\text{ن} = ٨$ ، $\text{م} = \frac{١}{٢}$

أ) $\text{ل}(\text{س} = ٤) = \binom{٨}{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$

ب) $\text{ل}(\text{س} \geq ٣) = \text{ل}(\text{س} = ٣) + \text{ل}(\text{س} = ٤) + \dots + \text{ل}(\text{س} = ٨) = ١ - \left[\text{ل}(\text{س} = ٢) + \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٠)\right]$

$= ١ - \left[\binom{٨}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦} + \binom{٨}{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٧} + \binom{٨}{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٨}\right]$

٣) $\text{ن} = ٨$ ، $\text{م} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

$\text{ل}(\text{س} \geq ٢) = ١ - \left[\text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٠)\right]$ - - - —

③

حمراء	بيضاء
٥	٣

٤)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٢٧}{٥١٢}$	$\frac{١٣٥}{٥١٢}$	$\frac{٢٢٥}{٥١٢}$	$\frac{١٢٥}{٥١٢}$

$\text{ل}(\text{س} = ٠) = \binom{٣}{٠}\left(\frac{٥}{٨}\right)^{٠}\left(\frac{٣}{٨}\right)^{٣} = \frac{٢٧}{٥١٢}$

وهكذا مع الإرجاع ذات الحدين

٥) $\text{ل}(\text{س} = -٢) + \text{ل}(\text{س} = ٣) + \text{ل}(\text{س} = ٤) = ١$

$٤\text{ك} + ٩\text{ك} + ١٦\text{ك} = ١ \Leftarrow ٢٩\text{ك} = ١ \Leftarrow \text{ك} = \frac{١}{٢٩}$

٦) $\text{ل}(\text{س} \geq ١) = \frac{٣٧}{٦٤}$ ، $\text{ن} = ٣$

أ) $\text{س} = ٠، ١، ٢، ٣$

ب) $\text{ل}(\text{س} \geq ١) = \frac{٣٧}{٦٤} \Leftarrow \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٢) + \text{ل}(\text{س} = ٣) = \frac{٣٧}{٦٤}$

$١ - \text{ل}(\text{س} = ٠) = \frac{٣٧}{٦٤}$

$١ - \frac{٣٧}{٦٤} = \text{ل}(\text{س} = ٠)$

$\frac{٢٧}{٦٤} = \binom{٣}{٠}(\text{م})^{٠}(١ - \text{م})^{٣}$

$\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٣} = (١ - \text{م})^{٢} \Leftarrow ١ - \text{م} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow \boxed{\text{م} = \frac{١}{٤}}$

ثالثاً: العلامة المعيارية

تدريب (١) ١) $\text{ز}_{٤٦} = ٢$ ٢) ٤٤,٥ ٣) ٣٧

تدريب (٢) مستوى الطالب في الفيزياء أفضل ، لأن العلامة المعيارية في الفيزياء أكبر منها في الرياضيات.

تدريب (٣) ١) $\text{ع} = ٤$

٢) $\bar{\text{س}} = ٧٢$

٣) ٨٥

تمارين ومسائل

١) $\bar{\text{س}} = ٥٨$

٢) أ) ٥ ب) ٥

٣) أ) $\text{ع} = ٤$ ب) ٨٠ ، ٧٢ ، ٧١ جـ) ٦٤

٤) $\text{ع} = ٦$

٥) $\bar{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} \Leftarrow \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{ن}\bar{\text{س}}$.

$$\text{الوسط الحسابي للعلامات المعيارية} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ز}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\frac{\text{س}_١ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} + \frac{\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} + \cdots + \frac{\text{س}_{\text{ن}} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \cdots + \text{س}_{\text{ن}} - \overbrace{(\bar{\text{س}} + \bar{\text{س}} + \cdots + \bar{\text{س}})}^{\text{ن من المرات}}}{\text{ن ع}}$$

$$= \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} - \text{ن}\bar{\text{س}}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{ن}\bar{\text{س}} - \text{ن}\bar{\text{س}}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{صفر}}{\text{ن ع}}$$

$$= \text{صفر}$$

وهو المطلوب.

٥) ل(س ≤ ٤٨) = ل(ز ≤ $\frac{٤٨ - ٥}{٠٫٤}$) = ل(ز ≤ −٠٫٥)
= ١ − ل(ز ≤ ٠٫٥)
= ١ − ٠٫٦٩١٥ = ٠٫٣٠٨٥
عدد الصناديق = ١٠٠٠ × ٠٫٣٠٨٥ = ٣٠٨٫٥ ≈ ٣٠٩ صناديق

أسئلة الوحدة

١) طردي تام .   ر = ١
٢)

٣) أ) ر = −١
ب) صَ = $-\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{١١}{٣}$.

٤) ر = −١
٥) ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩
٦) أ) توزيع ذات الحدين .
ب) أ = ٠٫٤ ، ن = ٢
جـ) ل(س = ٢) = $\binom{٢}{٢}$ $(٠٫٤)^{٢}$ $(٠٫٦)^{٠}$ = ٠٫١٦

٧) ل(٣) = $\frac{١}{٧}$
٨) أ) ل(س = ٢) = $\binom{٦}{٢}$ $\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}$ $\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$ = ...

أ = $\frac{١}{٦}$ ، ن = ٦

ب) ل(س ≤ ٢) = ل(س = ٣) + ل(س = ٢) + ل(س = ١) + ل(س = ٠) = ...

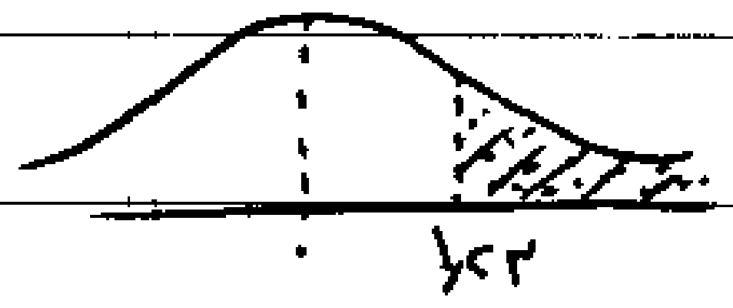
٩) ل(س ≤ ١) = ل(س = ١) + ل(س = ٠)
= $\binom{٢٠}{١}$ $(٠٫٩٥)^{١}$ $(٠٫٠٥)^{١٩}$ + $\binom{٢٠}{٠}$ $(٠٫٩٥)^{٠}$ $(٠٫٠٥)^{٢٠}$

١٠) ل(س = ٣) = $\frac{٤}{١١}$ × $\frac{٣}{١٠}$ × $\frac{٧}{\cancel{٩}_{٣}}$ = $\frac{٢٨}{٣٣٠}$ = $\frac{١٤}{١٦٥}$
١١) ل(س ≥ ٣) = ١ − [ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢)] ، حيث ل(س = ر) = $\binom{٩}{ر}$ $(٠٫١)^{ر}$ $(٠٫٩)^{٩-ر}$.
١٢) أ) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية = صفر   ب) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية = ١
جـ) ز = −٥

رابعاً : التوزيع الطبيعي

تدريب (١) أ] ل (ز ≤ ١٫١٦) = ٠٫٨٧٧٠

ب] ل (ز > ١٫٢٣) = ١ − ل (ز ≤ ١٫٢٣) ثم من الجدول مباشرة .



ج] ل (ز ≤ −٠٫٩٥) = ١ − ل (ز ≤ ٠٫٩٥) " " " "

د] ل (٠٫٠٣ ≤ ز ≤ ٣٫١)

= ل (ز ≤ ٣٫١) − ل (ز ≤ ٠٫٠٣) ثم من الجدول مباشرة .

هـ] ل (−٠٫٨ ≤ ز ≤ صفر) = ل (ز ≤ صفر) − ل (ز ≤ −٠٫٨)

= ل (ز ≤ صفر) − [١ − ل (ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول مباشرة .

تدريب (٢) أ) م = ٠٫٠٨ ب) م = −٠٫٤٧

تدريب (٣) أ) ل (ز ≤ $\frac{٩٥ - ١١٠}{١٠}$) = ل (ز ≤ −١٫٥) = ١ − ل (ز ≤ ١٫٥) ثم من الجدول مباشرة .

ب) ل (ز > $\frac{١٠٥ - ١١٠}{١٠}$) = ل (ز > −٠٫٥) = ل (ز ≤ ٠٫٥) " " " .

ج) ل (−٢ ≤ ز ≤ ٢) = ل (ز ≤ ٢) − ل (ز ≤ −٢) = ل (ز ≤ ٢) − [١ − ل (ز ≤ ٢)]

تدريب (٤) ٢٥ يوماً .

تمارين ومسائل

١) نعم ل (|ز| ≤ ٠٫٨) = ل (−٠٫٨ ≤ ز ≤ ٠٫٨) = ل (ز ≤ ٠٫٨) − ل (ز ≤ −٠٫٨)

= ل (ز ≤ ٠٫٨) − [١ − ل (ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول .

٢) أ) م = −٠٫٢٧ ب) م = ٠٫٩٢

٣) أ] ل (س ≥ ٨٢) = ل (ز ≥ $\frac{٨٢ - ٧٠}{٨}$) = ل (ز ≥ ١٫٥) = ١ − ل (ز ≤ ١٫٥)

= ١ − ٠٫٩٣٣٢ = ٠٫٠٦٦٨

العدد = ٢٠٠٠ × ٠٫٠٦٦٨ = ١٣٣٫٦ ≃ ١٣٤ طالباً .

ب] ل (س > ٨٠) = ل (ز > ١٫٢٥) = ١ − ل (ز ≤ ١٫٢٥) = ١ − ٠٫٨٩٤٤ = ٠٫١٠٥٦

٤) نسبة النجاح = $\frac{٧٥٨٠}{١٠٠٠٠}$ = ٠٫٧٥٨ ل (س ≥ م) = ٠٫٧٥٨

ل (ز ≥ $\frac{م - ٦٠}{٥}$) = ٠٫٧٥٨ ، لتكن $\frac{م - ٦٠}{٥}$ = ك

ل (ز ≥ ك) = ٠٫٧٥٨

١ − ل (ز ≤ ك) = ٠٫٧٥٨

ل (ز ≤ ك) = ٠٫٢٤٢ ⇐ ك = −٠٫٧٠

$\frac{م - ٦٠}{٥}$ = −٠٫٧٠ ⇐ م = −٣٫٥ + ٦٠ ⇐ م = ٥٦٫٥