الفهرس

الفصل الاول التكامل Integratio

الاول: معكوس المشتقة

تعريف

اذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة [أ،ب] فإن م(س) يسمى معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) اذا كان م′(س) = ق(س) لكل س ∈ (أ،ب) .

الامثلة

جد معكوسا لكل من مشتقة الاقترانات التالية :

١) ق(س) = ٥س^{٤}

الحل

م(س) = س^{٥}

٢) ق(س) = ٧س^{٦} − ٣س^{٢}

الحل

م(س) = س^{٧} − س^{٣}

٣) ق(س) = قا^{٢}س

الحل

م(س) = ظاس

٤) ق(س) = جاس + جتاس

الحل

م(س) = −جتاس + جاس

٥) ق(س) = قاس ظاس

الحل

م(س) = قاس

٦) ق(س) = قتا^{٢}س

الحل

م(س) = −ظتاس

ملاحظة مهمة : لكل اقتران متصل عدد لا نهائي من الاقترانات التي مشتقتها تعطي الاقتران المتصل تختلف هذه الاقترانات في الثابت **جـ**

تعريف

اذا كان م(س) اقترانا معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) على[أ،ب] فإن الصورة العامة لقاعدة اي معكوس لمشتقة الاقتران ق هي م (س) **+جـ** ويسمى اي معكوس للمشتقة بالتكامل غير المحدود ل ق(س) بالنسبة الى س ويرمز له على النحو التالي : $\int \text{ق(س)ءس}$

الاسئلة

جد كلا مما ياتي :

١	٢	٣
$\int \text{٧س}^{٦}\ \text{ءس}$	$\int \text{١٠س}^{٩}\ \text{ءس}$	$\int \text{قا}^{٢}\text{س ءس}$
الحل	الحل	الحل
$\text{س}^{٧}+\text{جـ}$	$\text{س}^{١٠}+\text{جـ}$	ظاس+جـ

تعريف

$\int \text{ق}'\text{(س)ءس} = \text{ق(س)}+\text{جـ}$ ، $\int \text{ق}''\text{(س)ءس} = \text{ق}'\text{(س)}+\text{جـ}$

الأسئلة

١

اذا كان ق(س) = $\int$ (٣س^{٢} + ٦س + ٤) ءس

جد (١) ق$'$(س) (٢) ق$''$(٢)

الحل

ق$'$(س) = ٣س^{٢} + ٦س + ٤

ق$''$(س) = ٦س + ٦

ق$''$(٢) = ٦×٢ + ٦

ق$''$(٢) = ١٨

٢

اذا كان ق(س) = $\int$ (٣س^{٢} + ٦س + ٣)^{٤} ءس ، جد ق$''$(١)؟

الحل

ق$'$(س) = (٣س^{٢} + ٦س + ٣)^{٤}

ق$''$(س) = ٤(٣س^{٢} + ٦س + ٣)^{٣} (٦س + ٦)

ق$''$(١) = ٤(٣ + ٦ + ٣)^{٣} (٦ + ٦)

ق$''$(١) = ٤(١٢)^{٣} (١٢)

ق$''$(١) = ٤(١٢)^{٤}

٣

اذا كان $\int$ ن′(س) ءس = جاس + جتاس ، جد ن″(π).

الحل

ن(س) = جاس + جتاس

ن′(س) = جتاس − جاس

ن″(س) = − جاس − جتاس

ن″(π) = − جاπ − جتاπ

ن″(π) = ٠ + ١ = ١

٤

اذا كان $\int$ ن′(س) ءس = جا٢ ٢س ، جد ن′($\frac{\pi}{٢}$)؟

الحل

ن(س) = جا٢ ٢س

ن′(س) = ٤ جا٢س جتا٢س

ن′($\frac{\pi}{٢}$) = ٤ جاπ جتاπ

ن′($\frac{\pi}{٢}$) = ٠

٥

اذا كان $\int$ ن(س) ءس = ٢س٣ − ٨س٢ ، جد ن′(١)؟

الحل

نشتق الطرفين

ن(س) = ٦س٢ − ١٦س

ق′(س) = ١٢س − ١٦

ق(١) = ١٢ − ١٦ = −٤

٦

اذا كان $\int$ ق(س)ءس = جا^{٢} ٢س + ظاس + جـ ، جد ق′$(\frac{\pi}{٤})$؟

الحل

نشتق الطرفين

ق(س) = ٤ جا٢س جتا٢س + قا^{٢} س ← ق(س) = ٢ جا٤س + قا^{٢} س

ق′(س) = ٨ جتا٤س + ٢ قا^{٢} س ظاس

ق′$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٨ جتاπ + ٢ قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$

ق′$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = −٨ + ٤ ← ق′$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = −٤

٧

اذا كان $\int$ ق′(س)ءس = ٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤ وكان ق(١) = ٢ جد ق′(٢)؟

الحل

ق(س) = ٢س^{٣} + ٢س^{٢} + ٤ + جـ

ق(١) = ٢ + ٢ + ٤ + جـ

٢ = ٨ + جـ ← جـ = −٦

$\therefore$ ق(س) = ٢س^{٣} + ٢س^{٢} − ٢

$\therefore$ ق′(س) = ٦س^{٢} + ٤س

$\therefore$ ق′(٢) = ٦ × ٤ + ٤ × ٢ = ٣٢

٨

اذا كان ∫ (ن′(س) + ٢س) ءس = س^{٣} + أس^{٢} + ١ وكان ن(٢) = ٧ ، ن′(١) = ٥

جد (١) قيمة أ (٢) ن(٠) (٣) ن′(٤) .

الحل

∫ ن′(س) ءس + ∫ ٢س ءس = س^{٣} + أس^{٢} + ١

ن(س) = س^{٣} + أس^{٢} − س^{٢} + ١ + جـ

ن(٢) = ٨ + ٤أ − ٤ + ١ + جـ

٧ = ٨ + ٤أ − ٤ + ١ + جـ ← ٢ = ٤أ + جـ ....(١)

ن′(س) = ٣س^{٢} + ٢أس − ٢س

ن′(١) = ٣ + ٢أ − ٢

٥ = ٣ + ٢أ − ٢ ← أ = ٢

∴ ٢ = ٤ × ٢ + جـ ← جـ = −٦

٢ = ٨ + جـ ← جـ = −٦

ن(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥

ن(٠) = −٥

ن′(س) = ٣س^{٢} + ٢س

ن′(٤) = ٤٨ + ٨ = ٥٦

٩

اذا كان $\int$ ق $''$(س) ءس =جاس + ٢جتاس ، جد ق $''(\pi)$.

الحل

ق $''$(س) =جتاس − ٢جاس

ق $''(\pi)$ =جتاπ − ٢جاπ

ق $''(\pi)$ = −١ − ٠

ق $''(\pi)$ = −١

١٠

اذا كان ق $'$(س)+قا^{٢}س = ٣س^{٢} ، جد ق(س) ، حيث ق$(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi^{٣}}{٦٤}$.

الحل

ق $'$(س) = ٣س^{٢} −قا^{٢}س

$\int$ ق $'$(س) ءس = $\int$ (٣س^{٢} −قا^{٢}س) ءس

ق(س) = س^{٣} −ظاس+جـ

ق$\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٣}$ −ظا$\frac{\pi}{٤}$+جـ

$\frac{\pi^{٣}}{٦٤} = \left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٣}$ −ظا$\frac{\pi}{٤}$+جـ

$\cancel{\frac{\pi^{٣}}{٦٤}} = \cancel{\frac{\pi^{٣}}{٦٤}}$ −١+جـ ← جـ = ١

ق(س) = س^{٣} −ظاس + ١

١١

اذا كان م(س) = ٤س ^٣^ − ٣س ^٢^ + ٢س + ٥ هو معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) جد ق(−١)؟

الحل

م′(س) = ق(س)

∴ م′(س) = ١٢س ^٢^ − ٦س + ٢

ق(−١) = ١٢ + ٦ + ٢

ق(−١) = ٢٠

تمارين ومسائل (١)

١) اذا كان ق(س) = $\int$ جتا^{٢}س ءس ، جد ق$''$(٠) ؟

٢) اذا كان $\int$ (ق$'$(س) + جاس) ءس = أجتاس + ٤س^{٣} + ٢أ + ٢ ، وكان ق(٠)=٤ ،
ق$'$($\frac{\pi}{٢}$) = ٣$\pi^{٢}$؟

جد　(١) أ　　(٢) ق$''$($\frac{\pi}{٦}$)

٣) اذا كان $\int$ ق(س) ءس = (٣س^{٢} + ٦س + ١)^{٨} + جـ ، جد ق$'$(−١)؟

٤) اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) جد :
(٢م − هـ)$'$(س) بدلالة ق(س)؟

٥) اذا كان الاقتران ق(س) = أس + ب وكان م(س) اقتران معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) بحيث ان م$'$(٢)=١٨ ، م$''$(٢)=٢ جد قيمة أ ، ب.

٦) اذا كان م(س) معكوسا لمشتقة الاقتران المتصل ق(س)، حيث ق(س) = ٣س^{٢} + ١، وكان
م(٢) = ٥ جد قيمة م$''$(١) × م(١)؟

٧) اذا كان $\int$ ق(س) ءس = أس^{٣} + جـس حيث ق(س) اقتران متصل وكان
ق(−١) = ٤ ، ق$'$(٢) = ٢٤ جد قيمة أ ، ب .

٨) اذا كان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة ق (س) وكان م(س) = س^{٢} − ٤س + ٦
هـ(٣) = ٤ جد هـ(١)؟

٩) اذا كان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة ق (س) وكان ق(٤) = ٧، ق$'$(٤) = ١٠ فما
قيمة (٣م - هـ)$'$(٤) ؟

١٠) بين فيما اذا كان الاقتران م(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ معكوسا لمشتقة الاقتران
ق(س) = ١ + $\frac{٢}{س^{٣}}$ ، س≠٠.

الدرس الثاني:قواعد التكامل غير المحدودالدرس

قاعدة ١

$$\int \text{ا}\, \text{ءس} = \text{اس} + \text{جـ}$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int ٤\, \text{ءس}$

الحل :

$٤\text{س} + \text{جـ}$

(٢) $\int -٣\, \text{ءس}$

الحل :

$-٣\text{س} + \text{جـ}$

(٣) $\int \frac{١}{٢}\, \text{ءس}$

الحل :

$\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جـ}$

قاعدة ٢

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ} \quad \text{، حيث } \text{ن} \neq -١$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int \text{س}^{٦}\, \text{ءس}$

الحل :

$\frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

(٢) $\int \text{س}^{-٤}\, \text{ءس}$

الحل :

$\frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$

(٣) $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\, \text{ءس}$

الحل :

$\frac{٢}{٣} \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

قاعدة ٣

$$\int أ\,ق(س)\,ءس = أ\int ق(س)\,ءس$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int ٥س^{٦}\,ءس$

الحل :

$$\frac{٥س^{٧}}{٧} + جـ$$

(٢) $\int ٩س^{-٤}\,ءس$

الحل :

$$\frac{٩س^{-٣}}{-٣} + جـ \leftarrow -٣س^{-٣} + جـ$$

قاعدة ٤

$$\int (ق(س) \pm هـ(س))\,ءس = \int ق(س)\,ءس \pm \int هـ(س)\,ءس$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int (٢س^{-٣} + ٤س^{٥} + ٦س + ١)\,ءس$

الحل :

$$\frac{٢س^{-٢}}{-٢} + \frac{٤س^{٦}}{٦} + \frac{٦س^{٢}}{٢} + س + جـ$$

$$-\text{س}^{-٢} + \frac{٢\text{س}^{٦}}{٣} + ٣\text{س}^{٢} + \text{س} + \text{جـ}$$

(٢) $\int \left(\frac{١}{٢}\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} - ٨\text{س}^{\frac{١}{٢}}\right) \text{ءس}$

الحل :

$$\frac{\text{س}^{٥}}{١٠} - \text{س}^{٤} - \frac{١٦\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$$

(٣) $\int \left(\text{س}^{-٤} - ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ٨\text{س}^{\frac{-٤}{٧}}\right) \text{ءس}$

الحل :

$$\frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} - \frac{٨\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \frac{٥٦\text{س}^{\frac{٣}{٧}}}{٣} + \text{جـ}$$

(٤) $\int \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل :

$$\int \text{س}^{\frac{٢}{٥}} \text{ءس} = \frac{٥}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$$

(٥) $\int \left(\sqrt[٧]{\text{س}^{٣}} + \sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

الحل :

$$\int \left(\text{س}^{\frac{٣}{٧}} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}\right) \text{ءس} = \frac{٧}{١٠}\text{س}^{\frac{١٠}{٧}} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

(٦) $\int \frac{٣}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}} \text{ءس}$

الحل :

$$\therefore \int \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٥}}}}\,\text{ءس} = \int \text{٣س}^{\frac{-\text{٢}}{\text{٥}}}\,\text{ءس} = \text{٥س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٥}}} + \text{جـ}$$

(٧) $$\int \frac{\text{٢س}^{\text{٦}} - \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٧س}}{\text{س}^{\text{٣}}}\,\text{ءس}$$

توزيع البسط على المقام

الحل :

$$\int \left(\frac{\text{٢س}^{\text{٦}}}{\text{س}^{\text{٣}}} - \frac{\text{٤س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٣}}} + \frac{\text{٧س}}{\text{س}^{\text{٣}}}\right)\text{ءس}$$

$$\int \left(\text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٤} + \text{٧س}^{-\text{٢}}\right)\text{ءس}$$

$$\left(\frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٢}} - \text{٤س} - \text{٧س}^{-\text{١}}\right) + \text{جـ}$$

(٨) $$\int \frac{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٣س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$$

توزيع البسط على المقام

الحل :

$$\int \left(\text{٢س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \text{٣س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right)\text{ءس}$$

$$\frac{\text{٤}}{\text{٥}}\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}} - \text{٢س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

قاعدة ٥

(١) $$\int \text{جا أس}\,\text{ءس} = -\frac{\text{جتا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

(٢) $$\int \text{جتا أس}\,\text{ءس} = \frac{\text{جا أس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

(٣) $\int \text{قا}^{٢}\text{أس}\,\text{ءس} = \frac{\text{ظاأس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

(٤) $\int \text{قتا}^{٢}\text{أس}\,\text{ءس} = -\frac{\text{ظتاأس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

(٥) $\int \text{قاأس ظاأس}\,\text{ءس} = \frac{\text{قاأس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

(٦) $\int \text{قتاأس ظتاأس}\,\text{ءس} = -\frac{\text{قتاأس}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

الامثلة

جد التكاملات التالية:

(١) $\int (\text{جا٣س} + \text{جتا٦س})\,\text{ءس}$

الحل :

$-\frac{\text{جتا٣س}}{٣} + \frac{\text{جا٦س}}{٦} + \text{جـ}$

(٢) $\int (\text{قا}^{٢}\text{٥س} + \text{جتا٨س})\,\text{ءس}$

الحل :

$\frac{\text{ظا٥س}}{٥} + \frac{\text{جا٨س}}{٨} + \text{جـ}$

(٣) $\int (\text{قتا}^{٢}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جا٦س})\,\text{ءس}$

الحل :

$-٢\,\text{ظتا}\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{\text{جتا٦س}}{٦} + \text{جـ}$

$جا٢س = ٢ جاس جتاس$

(٤) $\int (جاس جتاس) ءس$

الحل :

$\int (جاس جتاس) ءس = \frac{١}{٢} \int جا٢س ءس$

$- \frac{١}{٢} \times \frac{جتا٢س}{٢} + جـ$

---

(٥) $\int (٤ جا \frac{١}{٢} س جتا \frac{١}{٢} س) ءس$

الحل :

$\int ٢ جاس ءس$

$- ٢ \times جتاس + جـ$

$جتا٢س = جتا^٢ س - جا^٢ س$

(٦) $\int (جتا^٢ ٣س - جا^٢ ٣س) ءس$

الحل :

$\int جتا٦س ءس = \frac{جا٦س}{٦} + جـ$

$جا^٢ س + جتا^٢ س = ١$

(٧) $\int (جا^٢ س + جتا^٢ س) ءس$

الحل :

$\int ١ ءس$

$س + جـ$

$جا^٢ س = \frac{١}{٢} (١ - جتا٢س)$

(٨) $\int جا^٢ س ءس$

الحل :

$\frac{1}{2}\int(1-\text{جتا}2\text{س})\text{ءس}$

$\frac{1}{2}(\text{س}-\frac{\text{جا}2\text{س}}{2})+\text{جـ}$

(٩) $\int \text{جتا}^2\text{س ءس}$

$\text{جتا}^2\text{س}=\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{س})$

الحل :

$\frac{1}{2}\int(1+\text{جتا}2\text{س})\text{ءس}$

$\frac{1}{2}(\text{س}+\frac{\text{جا}2\text{س}}{2})+\text{جـ}$

(١٠) $\int \text{جتا}^4\text{س ءس}$

الحل :

$\int \text{جتا}^2\text{س جتا}^2\text{س ءس}$

$\frac{1}{4}\int(1+\text{جتا}2\text{س})(1+\text{جتا}2\text{س})\text{ءس}$

$\frac{1}{4}\int(1+2\text{جتا}2\text{س}+\text{جتا}^2 2\text{س})\text{ءس}$

$\frac{1}{4}\int(1+2\text{جتا}2\text{س}+\frac{1}{2}(1+\text{جتا}4\text{س}))\text{ءس}$

$\frac{1}{4}(\text{س}+\frac{2\text{جا}2\text{س}}{2}+\frac{1}{2}\text{س}+\frac{1}{2}\times\frac{\text{جا}4\text{س}}{4})+\text{جـ}$

$\frac{1}{4}(\text{س}+\text{جا}2\text{س}+\frac{1}{2}\text{س}+\frac{1}{8}\times\text{جا}4\text{س})+\text{جـ}$

(١١) $\int \text{ظا}^2\text{س ءس}$

$\text{ظا}^2\text{س}=(\text{قا}^2\text{س}-1)$

الحل :

$\int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{ءس}$

$(\text{ظاس} - \text{س}) + \text{جـ}$

(١٢) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل :

$\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} - \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$\int \text{قتا}^{٢}\text{س ءس} - \int \text{قا}^{٢}\text{س ءس}$

$-\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

(١٣) $\int \text{جتا٣س}(\text{جتا٢س جتاس} - \text{جا٢س جاس})\,\text{ءس}$

$\text{جتا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \text{جتاس جتاص} \mp \text{جاس جاص}$

الحل :

$\int \text{جتا}^{٢}\text{٣س ءس} \leftarrow \frac{١}{٢}\int (١ + \text{جتا٦س})\,\text{ءس}$

$\frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{\text{جا٦س}}{٦}) + \text{جـ}$

(١٤) $\int \frac{١}{١ + \text{جاس}}\,\text{ءس}$

الضرب بالعامل المرافق

الحل :

$\int \frac{١}{١ + \text{جاس}} \times \frac{١ - \text{جاس}}{١ - \text{جاس}}\,\text{ءس}$

$\int \frac{١ - \text{جاس}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{١ - \text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} \leftarrow \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظاس قاس})\,\text{ءس} = \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{جـ}$

قاعدة مهمة جدا

$$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ءس} = \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ} \quad ، \quad \text{ن}+١ \neq ٠$$

الامثلة

جد التتكاملات التالية :

(١) $\int (٢\text{س} + ٧)^{٦} \, \text{ءس}$

الحل :

$$\frac{(٢\text{س} + ٧)^{٧}}{١٤} + \text{جـ}$$

---

(٢) $\int (-٤\text{س} + ٨)^{٢} \, \text{ءس}$

الحل :

$$\frac{(-٤\text{س} + ٨)^{٣}}{-١٢} + \text{جـ}$$

---

(٣) $\int (٢ - ٤\text{س})^{-٦} \, \text{ءس}$

الحل :

$$\frac{(٢ - ٤\text{س})^{-٥}}{٢٠} + \text{جـ}$$

تمارين ومسائل (٢)

١) جد كلا من التكاملات التالية :

(١) $\int \left(\text{س}^{-٤} + ٨\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \sqrt[٣]{\text{س}}\right) \text{ءس}$

(٢) $\int \left(-٣\text{س} + ٨\right)^{-\frac{١}{٢}} \text{ءس}$

(٣) $\int \frac{٣}{\text{جتا}٢\text{س} + ١} \text{ءس}$

(٤) $\int \frac{\left(\text{س}^{٥} - ٤\text{س}^{٣} + \text{س}\right)}{\sqrt[٤]{\text{س}}} \text{ءس}$

(٥) $\int \frac{٢}{\text{جتاس} - ١} \text{ءس}$

(٦) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}} \text{ءس}$

(٧) $\int \left(\text{جا}\frac{١}{٣}\text{س جتا}\frac{١}{٣}\text{س}\right) \text{ءس}$

(٨) $\int \left(\text{جتا}^{٢}٢\text{س} - \text{جا}^{٢}٢\text{س}\right) \text{ءس}$

(٩) $\int \text{جتا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right) \text{ءس}$

(١٠) $\int \text{س}^{٤} \left(٣ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٤} \text{ءس}$

(١١) $\int \frac{١}{\text{س}} \sqrt{٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$ ، $\text{س} > ٠$

(١٢) $\int \frac{\left(١ - \text{جا}^{٣}\text{س}\right)}{١ - \text{جاس}} \text{ءس}$

(١٣) $\int \frac{\left(\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢}\right)}{\sqrt{\text{س}} - ٢} \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\left(\text{س}^{٢} - \text{س}\right)}{\sqrt{\text{س}} - ٣} \text{ءس}$

(١٥) $\int \frac{١}{\text{قاس} - ١} \text{ءس}$

(١٦) $\int \frac{٦\text{س}}{\sqrt{٩\text{س} + ٥} + \sqrt{٣\text{س} + ٥}} \text{ءس}$

٢) اذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\text{ق}'(\pi) = -١$ ، $\text{ق}(\pi) = ٠$ فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

إيجاد التكامل في حالة اختلاف الزوايا

تذكير

(١) جتاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ − ب)+جتا(أ + ب)]

(١) جاأ جاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ − ب)−جتا(أ + ب)]

(٣) جاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جا(أ − ب)+جا(أ + ب)]

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int$ جا٢س جتا٨س ءس

الحل :

$\frac{١}{٢}\int$ (جا-٦س+جا١٠س) ءس

$\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{جتا٦س}}{٦}$ − $\frac{\text{جتا١٠س}}{١٠}$)+جـ

---

(٢) $\int$ جتا١٠س جتا٤س ءس

الحل :

$\frac{١}{٢}\int$ (جتا١٤س+جتا٦س) ءس

$\frac{١}{٢}(\frac{جا١٤س}{١٤}+\frac{جا٦س}{٦})+جـ$

(٣) $\int$ جا٦س جا٢س ءس

الحل :

$\frac{١}{٢}\int$(جتا٤س − جتا٨س) ءس

$\frac{١}{٢}(\frac{جا٤س}{٤}-\frac{جا٨س}{٨})+جـ$

(٤) $\int$ جتا١٠س × [جتا(٤س)جتا(س) − جا(٤س)جا(س)] ءس

الحل :

$\int$ جتا١٠س × جتا٥س ءس

$\frac{١}{٢}\int$(جتا٥س + جتا١٥س) ءس

$\frac{١}{٢}(\frac{جا٥س}{٥}+\frac{جا١٥س}{١٥})+جـ$

الدرس الثالث: التكامل المحدود

Adel Awwad

تعريف

اذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة [أ،ب] م(س) معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) ، يسمى $\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ءس لكل س∈(أ،ب) بالتكامل المحدود حيث :

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ءس = م(س)$]_{أ}^{ب}$ = م(ب) − م(أ) حيث أ : الحد السفلي ب : الحد العلوي

الامثلة

س١ جد التكاملات التالية :

(١) $\int_{٢}^{٤}$ (٢س + ٤)ءس

الحل :

(س^{٢} + ٤س)$]_{٢}^{٤}$ = ((٤)^{٢} + ٤(٤)) − ((٢)^{٢} + ٤(٢))

٣٢ − ١٢ = ٢٠

(٢) $\int_{-٢}^{٢}$ (٣س^{٢} + ٤س)ءس

الحل :

$$\left[\left(س^{3}+2س^{2}\right)\right]_{-2}^{2}=8+8-(-8+8)=16$$

(٣) $\int_{0}^{16}\sqrt{س}\,ءس$

الحل :

$$\int_{0}^{16}س^{\frac{1}{2}}ءس \leftarrow \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{16} \leftarrow \frac{2}{3}\sqrt{(س)^{3}}\Big|_{0}^{16}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(16)^{3}}-\sqrt{(0)^{3}}\right)=\frac{128}{3}$$

(٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(جاس+جتاس\right)ءس$

الحل :

$$\left(-جتاس+جاس\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-جتا\frac{\pi}{2}+جا\frac{\pi}{2}-\left(-جتا0+جا0\right)=2$$

$س^{2}$

اذا كان $\int_{2}^{ا}4ءس=20$ فما قيمة الثابت ا .

قاعدة :

$\int_{ا}^{ب}جـءس=جـ(ب-ا)$ حيث جـ ثابت

الحل :

$4(ا-2)=20 \leftarrow ا=7$

$س^{3}$

اذا كان $\int_{2ا}^{3}5ءس=8$ فما قيمة الثابت ا.

الحل :

$$ه(٣ - ٢أ) = ٨ \leftarrow أ = \frac{٧}{١٠}$$

س٤

اذا كان $\int_{١+أ}^{٢+٣أ} ه\,ءس = ٤٠$ فما قيمة الثابت أ .

الحل :

$$ه((٢+٣أ)-(١+أ)) = ٤٠ \leftarrow (١+٢أ) = ٨ \leftarrow \therefore أ = \frac{٧}{٢}$$

س٥

اذا كان $\int_{٠}^{٣} (٢أس + ٤)\,ءس = ٢١$ فما قيمة الثابت أ.

الحل :

$$أس^{٢} + ٤س \Big|_{٠}^{٣} = ٢١ \leftarrow ٩أ + ١٢ = ٢١ \leftarrow أ = ١$$

تمارين ومسائل (٣)

(١) اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ق(٠) = ق(١) = ٠ ، $\int_{٠}^{١} (٢أس + ٤)\,ءس = ١$

جد قاعدة الاقتران ق .

الحل:

....

....

....

خصائص التكامل المحدود

خاصية(١)　　الخواص الخطية

(١) $\int_{أ}^{ب}$ جـ ن(س) ءس = جـ $\int_{أ}^{ب}$ ن(س) ءس

(٢) $\int_{أ}^{ب}$ (ن(س) ± هـ(س)) ءس = $\int_{أ}^{ب}$ ن(س) ءس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ءس

الامثلة

(١) اذا كان $\int_{٢}^{٤}$ ٣ن(س) ءس = ١٢ ، جد $\int_{٢}^{٤}$ (٤ن(س) + ١٠) ءس

الحل :

$\int_{٢}^{٤}$ ٣ن(س) ءس = ١٢ ← $\int_{٢}^{٤}$ ن(س) ءس = ٤

∴ $\int_{٢}^{٤}$ (٤ن(س) + ١٠) ءس = ٤ $\int_{٢}^{٤}$ ن(س) ءس + $\int_{٢}^{٤}$ ١٠ ءس

١٦ + ١٠ × ٢ = ٣٦

(٢) اذا كان $\int_{١}^{٥}$ (٢ن(س) − ٢س) ءس = ٢٠ ، جد $\int_{١}^{٥}$ ن(س) ءس .

الحل :

$$\int_{1}^{5} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \int_{1}^{5} ٢\text{س}\,\text{ءس} = ٢٠ \longrightarrow \int_{1}^{5} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - \text{س}^{٢}\Big|_{1}^{5} = ٢٠$$

$$\int_{1}^{5} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} - (٢٥ - ١) = ٢٠ \longrightarrow \int_{1}^{5} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤٤$$

$$\int_{1}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢٢$$

---

(٣) جد كثير حدود من الدرجة الاولى بحيث يكون $\int_{-1}^{1} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤$ ، $\int_{1}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$.

الحل :

$\text{د}(\text{س}) = \text{أس} + \text{ب}$

$$\int_{-1}^{1} (\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = ٤ \longrightarrow \left(\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + \text{ب س}\right)\Big|_{-1}^{1} = ٢ \longrightarrow \left(\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}\right) - \left(\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}\right) = ٢$$

$٢\text{ب} = ٤ \longrightarrow \text{ب} = ٢$ .... (١)

$$\int_{1}^{3} (\text{أس} + ٢)\,\text{ءس} = ٢ \longrightarrow \left(\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right)\Big|_{1}^{3} = ٢ \longrightarrow \left(\frac{٩\text{أ}}{٢} + ٦\right) - \left(\frac{\text{أ}}{٢} + ٢\right) = ٢$$

$\left(\frac{٩\text{أ}}{٢} + ٦\right) - \left(\frac{\text{أ}}{٢} + ٢\right) = ٢ \longrightarrow ٤\text{أ} + ٤ = ٢ \longrightarrow \text{أ} = \frac{-١}{٢}$ .... (٢)

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{-١}{٢}\text{س} + ٢$

تمارين ومسائل (٤)

(١) جد $\int_{-١}^{٢} \left(٢س^{٤} + \int_{١}^{٢} (٣ص^{٢} + ٢)\,دص\right) دس$

(٢) $\int_{٠}^{\pi} \left(جتا٢س + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جاص\,دص\right) دس$

(٢) اذا كان $\int_{-١}^{٣} \left(٣س^{٢} - ٢\int_{٠}^{جـ} ٣م^{٢}\,دم\right) دس = -٢٠$ ، جد قيمة الثابت **جـ**

خاصية (٢) خاصية الاضافة

اذا كان ق قابلا للتكامل على فترة تنتمي اليها الاعداد أ ، ب ، جـ فإن :

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$$

ليس شرطا ان تقع **ب** بين **جـ** ، **أ**

الامثلة

(١) اذا كان ق متصل على ح وكان $\int_{٢أ+١}^{٥ب-٢} ق(س)\,دس - \int_{٣}^{٧} ق(س)\,دس = \int_{٧}^{١٢} ق(س)\,دس$ جد قيمة أ ، ب

الحل :

$$\int_{2أ+1}^{5ب-2} ق(س)\,دس = \int_{3}^{7} ق(س)\,دس + \int_{7}^{12} ق(س)\,دس$$

$$\therefore \int_{2أ+1}^{5ب-2} ق(س)\,دس = \int_{3}^{12} ق(س)\,دس$$

$$5ب - 2 = 12 \leftarrow ب = \frac{14}{5}$$

$$2أ + 1 = 3 \leftarrow أ = 1$$

---

(٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} 3س^2 + 2س & ، 1 \le س < 3 \\ 4س + 2 & ، 3 \le س \le 5 \end{cases}$ ، جد $\int_{1}^{5} ق(س)\,دس$ ؟

الحل :

$$\int_{1}^{5} ق(س)\,دس = \int_{1}^{3} (3س^2 + 2س)\,دس + \int_{3}^{5} (4س + 2)\,دس$$

$$\int_{1}^{5} ق(س)\,دس = (س^3 + س^2)\Big|_{1}^{3} + (2س^2 + 2س)\Big|_{3}^{5}$$

$$\int_{1}^{5} ق(س)\,دس = (27 + 9) - (2) + (60) - (24) = 70$$

---

(٣) جد $\int_{2}^{6} |س - 3|\,دس$

الحل :

$$س - 3 = 0 \leftarrow س = 3$$

$$\int_{2}^{6} |س - 3|\,دس = \int_{2}^{3} (3 - س)\,دس + \int_{3}^{6} (س - 3)\,دس$$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| \, ءس = \left(٣س - \frac{س^{٢}}{٢}\right)\Big|_{٢}^{٣} + \left(\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س\right)\Big|_{٣}^{٦}$$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| \, ءس = \left(٩ - \frac{٩}{٢}\right) - (٦ - ٢) + (١٨ - ١٨) - \left(\frac{٩}{٢} - ٩\right)$$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| \, ءس = ٥$$

---

(٤) جد $\int_{-١}^{٣} [س - ٢] \, ءس$

الحل :

$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$　　طول الدرجة $= \frac{١}{|١|} = ١$

$$ق(س) = \begin{cases} -٣ ، & -١ \le س < ٠ \\ -٢ ، & ٠ \le س < ١ \\ -١ ، & ١ \le س < ٢ \\ ٠ ، & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

$$\int_{-١}^{٣} [س - ٢] \, ءس = \int_{-١}^{٠} -٣ \, ءس + \int_{٠}^{١} -٢ \, ءس + \int_{١}^{٢} -١ \, ءس + \int_{٢}^{٣} ٠ \, ءس$$

$$\int_{-١}^{٣} [س - ٢] \, ءس = -٣ \times (١) + -٢ \times (١) + -١ \times (١) + ٠ \times (١) = -٦$$

---

(٥) جد $\int_{٢}^{٥} [٣ - س] \, ءس$

الحل :

$\text{٣} - \text{س} = \text{٠} \leftarrow \text{س} = \text{٣}$ طول الدرجة $= \frac{\text{١}}{|-\text{١}|} = \text{١}$

$$\text{ن(س)} = \begin{cases} \text{٠} & \text{،}\ \text{٢} < \text{س} \leq \text{٣} \\ -\text{١} & \text{،}\ \text{٣} < \text{س} \leq \text{٤} \\ -\text{٢} & \text{،}\ \text{٤} < \text{س} \leq \text{٥} \end{cases}$$

$$\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} [\text{٣} - \text{س}]\, \text{ءس} = \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{٠}\, \text{ءس} + \int_{\text{٣}}^{\text{٤}} -\text{١}\, \text{ءس} + \int_{\text{٤}}^{\text{٥}} -\text{٢}\, \text{ءس}$$

$$\int_{-\text{١}}^{\text{٣}} [\text{س} - \text{٢}]\, \text{ءس} = \text{٠} \times (\text{١}) + -\text{١} \times (\text{١}) + -\text{٢} \times (\text{١}) = -\text{٣}$$

---

(٦) جد $\int_{\text{٣}}^{\text{٧}} \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}\right] \text{ءس}$

الحل :

$\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \text{٢} = \text{٠} \leftarrow \text{س} = \text{٤}$ طول الدرجة $= \frac{\text{١}}{\left|\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right|} = \text{٢}$

$$\text{ن(س)} = \begin{cases} -\text{١} & \text{،}\ \text{٣} \leq \text{س} < \text{٤} \\ \text{٠} & \text{،}\ \text{٤} \leq \text{س} < \text{٦} \\ \text{١} & \text{،}\ \text{٦} \leq \text{س} < \text{٧} \end{cases}$$

$$\int_{\text{٣}}^{\text{٧}} \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}\right] \text{ءس} = \int_{\text{٣}}^{\text{٤}} -\text{١}\, \text{ءس} + \int_{\text{٤}}^{\text{٦}} \text{٠}\, \text{ءس} + \int_{\text{٦}}^{\text{٧}} \text{١}\, \text{ءس} = -\text{١} + \text{٠} + \text{١} = \text{٠}$$

تمارين ومسائل (٥)

(١) جد $\int_{0}^{2} \sqrt{\text{س}^{2} - 2\text{س} + 1}\ \text{ءس}$

(٢) اذا كان $\int_{2}^{\text{ب}} \left[\frac{1}{2}\text{س} + 3\right] \text{ءس} = 24$ ، ب > ٠ جد قيمة الثابت ب .

(٣) جد التكامل التالي :

$$\int_{0}^{2} \left(\text{س}^{2} - |\text{س} - 1|\right) \text{ءس}$$

(٤) اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان $\int_{-1}^{3} \left(\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right) \text{ءس} = 12$ جد $\int_{0}^{4} 2\text{س}\,\text{م}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{4}^{0} 2\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$ ؟

خاصية (٣) خاصية التكامل على نفس النقطة

اذا كان ق قابلا للتكامل على [أ،ب] فإن :

(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{٠}$

(٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الامثلة

(١) جد $\int_{\text{٥}}^{\text{٥}} \sqrt{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}\,\text{دس}$

الحل :

$\int_{\text{٥}}^{\text{٥}} \sqrt{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}\,\text{دس} = \text{٠}$

---

(٢) اذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{١٠}$ ، $\int_{\text{٧}}^{\text{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{٣}$ ، جد $\int_{\text{١}}^{\text{٧}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$ ؟

الحل :

$\int_{\text{١}}^{\text{٧}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{٤}}^{\text{٧}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$\int_{\text{١}}^{\text{٧}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{١٠} + -\text{٣} = \text{٧}$

---

(٣) اذا كان $\int_{٢}^{٥} ٤\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٤$ ، $\int_{٩}^{٥} \frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٨$ ، جد $\int_{٢}^{٩} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟

الحل :

$$\int_{٢}^{٩} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٩} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$\int_{١}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -١ + -١٦ = -١٧$$

---

(٤) اذا كان $\int_{٣}^{٤} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{دس} = ١٠$ ، جد $\int_{٣}^{٤} ٣\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ؟

الحل :

$$\int_{٣}^{٤} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{دس} = \int_{٣}^{٤} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٣}^{٤} ٢\text{س}\,\text{دس} = ١٠$$

$$\int_{٣}^{٤} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \text{س}^{٢}\Big|_{٣}^{٤} = ١٠$$

$$\int_{٣}^{٤} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + ٧ = ١٠ \leftarrow \int_{٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \int_{٣}^{٤} ٣\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{٩}{٢}$$

---

(٥) اذا كان $\int_{-٢}^{\text{جـ}} ٢\text{س}\,\text{دس} = ٠$ جد قيمة **جـ** ؟

الحل :

$$س^{2}\Big|_{-2}^{ج} = 0 \leftarrow ج^{2} - 4 = 0 \leftarrow ج = \pm 2$$

(٦) اذا كان $\int_{1}^{3} \left(2ن(س) + \frac{1}{س^{2}} - 6\right)ءس = 6$ ، جد $\int_{1}^{3} \left(3ن(س) - 2س\right)ءس$ ؟

الحل :

$$\int_{1}^{3} 2ن(س)ءس + \int_{1}^{3} \frac{1}{س^{2}} - 6ءس = 6 \leftarrow \int_{1}^{3} 2ن(س)ءس + \int_{1}^{3} (س^{-2} - 6)ءس = 6$$

$$\int_{1}^{3} 2ن(س)ءس + (-س^{-1} - 6س)\Big|_{1}^{3} = 6 \leftarrow \int_{1}^{3} 2ن(س)ءس + \left(-\frac{1}{س} - 6س\right)\Big|_{1}^{3} = 6$$

$$\int_{1}^{3} 2ن(س)ءس - \frac{1}{س} - 6س\Big|_{1}^{3} = 6 \leftarrow \int_{1}^{3} 2ن(س)ءس - \frac{1}{3} - 18 + 7 = 6$$

$$\int_{1}^{3} 2ن(س)ءس = \frac{52}{3} \leftarrow \int_{1}^{3} ن(س)ءس = \frac{52}{6}$$

$$\therefore \int_{1}^{3} 3ن(س)ءس - \int_{1}^{3} 2س ءس \leftarrow \int_{1}^{3} 3ن(س)ءس - س^{2}\Big|_{1}^{3}$$

$$3 \times \frac{52}{6} - 8 = 18$$

(٧) اذا كان $\int_{2}^{3} \left(2ن(س) - 3س^{2}\right)ءس = 10$ ، وكان $\int_{5}^{3} ن(س)ءس = -2$ جد $\int_{2}^{5} ن(س)ءس$ ؟

الحل :

$$\int_{2}^{3} \left(2ن(س) - 3س^{2}\right)ءس = 10 \leftarrow \int_{2}^{3} 2ن(س)ءس - \int_{2}^{3} 3س^{2}ءس = 10$$

$$\int_{٢}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س})\right) \text{ءس} - \text{س}^{٣} \Big|_{٢}^{٣} = ١٠ \leftarrow \int_{٢}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س}) \text{ءس} - ١٩ = ١٠$$

$$\int_{٢}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = ٢٩ \leftarrow \int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = \frac{٢٩}{٢}$$

$$\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س}) \text{ءس} = \frac{٢٩}{٢} + ٢ = \frac{٣٣}{٢}$$

خاصية (٤) خاصية المقارنه

اذا كان ق ، هـ قابلين للتكامل على [أ،ب] وكان ق(س) ≤ هـ(س) لكل س∈[أ،ب] فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \text{ءس} \leq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س}) \text{ءس}$$

نتيجة

اذا كان ق قابل للتكامل على [أ،ب] وكان ق(س) > ٠ لكل س∈[أ،ب] فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \text{ءس} > ٠$$

نتيجة

اذا كان ق قابل للتكامل على [أ،ب] وكان ق(س) < ٠ لكل س∈[أ،ب] فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \text{ءس} < ٠$$

الامثلة

(١) دون اجراء التكامل ابحث في اشارة

$$\int_{٢}^{٦} \frac{س^{٢}+٤}{٢س+٦} ءس$$

الحل :

$س^{٢}+٤ > ٠$ لكل س∈[٢،٦]

$٢س+٦ > ٠$ لكل س∈[٢،٦]

∴ $\frac{س^{٢}+٤}{٢س+٦} > ٠$ لكل س∈[٢،٦]

∴ $\int_{٢}^{٦} \frac{س^{٢}+٤}{٢س+٦} ءس > ٠$ حسب خاصية المقارنة .

(٢) دون اجراء التكامل ابحث في اشارة

$$\int_{-٧}^{-١} \frac{س^{٣}-٢}{س^{٢}+٥} ءس$$

الحل :

$س^{٣}-٢ < ٠$ لكل س∈[−٧،−١]

$س^{٢}+٥ > ٠$ لكل س∈[−٧،−١]

∴ $\frac{س^{٣}-٢}{س^{٢}+٥} < ٠$ لكل س∈[−٧،−١]

∴ $\int_{-٧}^{-١} \frac{س^{٣}-٢}{س^{٢}+٥} ءس < ٠$ حسب خاصية المقارنة

(٣) دون اجراء التكامل بين ان :

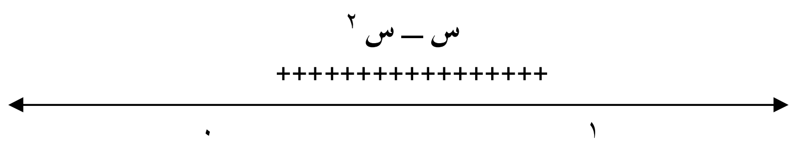
$$\int_{٠}^{١} س \, ءس \geq \int_{٠}^{١} س^{2} \, ءس$$

الحل :

نفرض ان $ق(س) = س$ ، $هـ(س) = س^{2}$

$ل(س) = ق(س) - هـ(س)$

ندرس اشارة $ل(س)$



$\therefore ل(س) > ٠$ لكل $س \in [٠ ، ١]$

$\therefore س \geq س^{2}$ لكل $س \in [٠ ، ١]$

$\therefore \int_{٠}^{١} س \, ءس \geq \int_{٠}^{١} س^{2} \, ءس$ حسب خاصية المقارنة

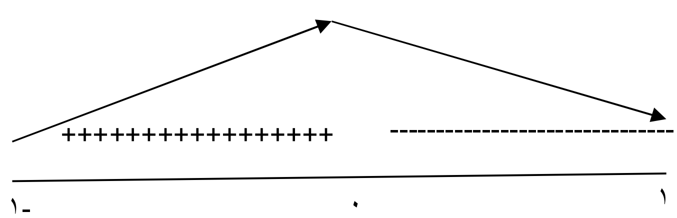
---

(٤) بين ان $٠ \leq \int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{2}} \, ءس \leq ٢$ دون اجرا ء التكامل للمقدار $\int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{2}} \, ءس$.

الحل :

نفرض ان $ن(س) = \sqrt{١ - س^{2}}$

نجد القيم القصوى المطلقة



$$ن'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١ - س^{2}}}$$

$$٠ \leq \sqrt{١ - س^{2}} \leq ٢$$

$\int_{-1}^{1} \cdot\, ds \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, ds \le \int_{-1}^{1} 1\, ds$ حسب خاصية المقارنة

$\cdot \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, ds \le 2$

(٥) اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للتكامل وكان ق(س) $\ge$ ٧ لكل س∈[٢،٥] ما اصغر قيمة للمقدار

$\int_{2}^{5}$ ق(س) ءس ؟

الحل :

بما أن ق(س) $\ge$ ٧

∴ اصغر قيمة للمقدار ق(س) = ٧

∴ $\int_{2}^{5}$ ق(س) ءس = $\int_{2}^{5}$ ٧ ءس حسب خاصية المقارنة

∴ $\int_{2}^{5}$ ق(س) ءس = ٧(٥ − ٢) = ٢١

(٦) اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للتكامل وكان ق(س) $\le$ ٦ لكل س∈[٢،٦] ما اكبر قيمة للمقدار

$\int_{2}^{6}$ ق(س) ءس

الحل :

بما أن ق(س) $\le$ ٦

∴ اكبر قيمة للمقدار ق(س) = ٦

∴ $\int_{2}^{6}$ ق(س) ءس = $\int_{2}^{6}$ ٦ءس حسب خاصية المقارنة ∴ $\int_{2}^{6}$ ق(س) ءس = ٦(٦ − ٢) = ٢٤

(٧) اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للتكامل على [١،٤] وكان $٣ \le$ ق(س) ≤ ٥ فما قيمة أ، ب التي تحقق

$$أ \le \int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس \le ب$$

الحل :

∴ اصغر قيمة للمقدار ق(س) = ٣　　　∴ اكبر قيمة للمقدار ق(س) = ٥

∴ $٣ \le$ ق(س) ≤ ٥

∴ $\int_{١}^{٤} ٣\,ءس \le \int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس \le \int_{١}^{٤} ٥\,ءس$ حسب خاصية المقارنة ∴ $٩ \le \int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس \le ١٥$

تمارين ومسائل (٦)

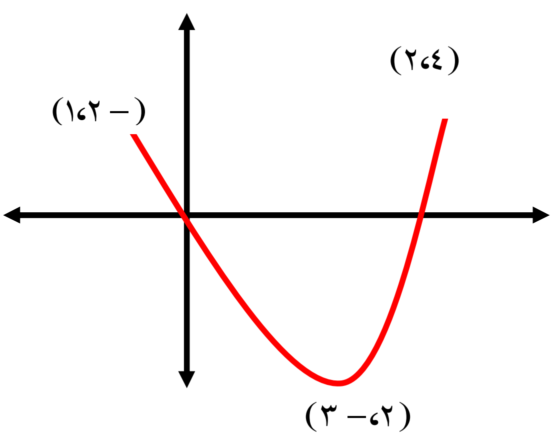
(١) بين ان $٦ \le \int_{١}^{٣} (٢س+١)\,ءس \le ١٤$ دون اجرا ء التكامل للمقدار $\int_{١}^{٣} (٢س+١)\,ءس$

(٢) اذا علمت $م \le \int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}+١}\,ءس \le ك$ ، بدون حساب قيمة التكامل $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}+١}\,ءس$ جد قيمة كل من الثابتين م ، ك.

(٣) بين ان $\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س+٢}\,ءس \le \frac{\pi}{٢}$ دون اجرا ء التكامل للمقدار $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س+٢}\,ءس$

(٤) بين ان $\int_{٠}^{٢\pi} (٣+جتا^{٢}س)\,ءس$ ينحصر بين العددين ٦π ، ٨π ؟

(٥) يمثل الشكل المجاور منحنى ق(س) المعرف على الفترة [−٢،٤] اذا علمت ان :



$$أ \le \int_{-٢}^{٤} \sqrt{(ق(س))^{٢}+٦}\,ءس \le ب$$

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

الفصل الثاني | طرائق التكامل | Integratio

الدرس الاول: التكامل بالتعويض

الفكرة العامة للتكامل بالتعويض هو حاصل ضرب اقترانين أحدهما مشتق من الاخر ويكون على الصورة

$$\int ق'(س)\left(ق(س)\right)^{ن} ءس = \frac{\left(ق(س)\right)^{ن+١}}{ن+١} + جـ \quad ، \quad ن+١ \neq ٠$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int (٢س+٢)(س^{٢}+٢س+٢)^{٧} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = س^{٢}+٢س+٢$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢س+٢ \leftarrow ءص = (٢س+٢)ءس \leftarrow \frac{ءص}{٢س+٢} = ءس$$

$$\therefore \int (٢س+٢)(ص)^{٧}\frac{ءص}{٢س+٢} \leftarrow \int (ص)^{٧} ءص$$

$$\frac{(ص)^{٨}}{٨} + جـ \leftarrow \frac{\left(س^{٢}+٢س+٢\right)^{٨}}{٨} + جـ$$

---

(٢) $\int (س^{٢}+١)(س^{٣}+٣س+١)^{\frac{١}{٢}} ءس$

الحل :

نفرض ان ص = $\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} + ٣ \leftarrow \text{ءص} = (٣\text{س}^{٢} + ٣)\text{ءس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^{٢} + ٣}$$

$$\therefore \int (\text{س}^{٢} + ١)(\text{ص})^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{ءص}}{٣(\text{س}^{٢} + ١)} \leftarrow \frac{١}{٣}\int (\text{ص})^{\frac{١}{٢}} \text{ءص}$$

$$\frac{١}{٣} \frac{(\text{ص})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} \leftarrow \frac{٢}{٩}(\text{س}^{٣} + ٣\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

---

(٣) $\int (٩\text{س}^{٢} + ٥)\text{جا}(٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س})\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان ص = $٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٩\text{س}^{٢} + ٥ \leftarrow \text{ءص} = (٩\text{س}^{٢} + ٥)\text{ءس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٩\text{س}^{٢} + ٥}$$

$$\therefore \int (٩\text{س}^{٢} + ٥)\text{جا}(\text{ص}) \frac{\text{ءص}}{٩\text{س}^{٢} + ٥} \leftarrow \int \text{جا}(\text{ص})\,\text{ءص}$$

$$-\text{جتاص} + \text{جـ} \leftarrow -\text{جتا}(٣\text{س}^{٣} + ٥\text{س}) + \text{جـ}$$

---

(٤) $\int \frac{\text{جاس}}{(٢ + \text{جتاس})^{٥}}\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان ص = ٢+جتاس

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{ءص} = (-\text{جاس})\text{ءس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$$

$$\therefore \int \text{جاس}\,(\text{ص})^{-٥} \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} \leftarrow -\int (\text{ص})^{-٥}\,\text{ءص}$$

$$\frac{-(ص)^{-4}}{-4}+جـ \leftarrow \frac{(2+جتاس)^{-4}}{4}+جـ$$

(٥) $\int \frac{1}{س^2}\times قا^2(\frac{2}{س})\,ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = \frac{2}{س}$

$$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{2}{س^2} \leftarrow س^2 ءص = -2ءس \leftarrow ءس = -\frac{س^2}{2}$$

$$\int \frac{1}{س^2}\times قا^2(ص)\times -\frac{س^2}{2}ءص \leftarrow -\frac{1}{2}\int قا^2(ص)ءص$$

$$-\frac{1}{2}ظا(ص)+جـ \leftarrow -\frac{1}{2}ظا(\frac{2}{س})+جـ$$

(٦) $\int س\times جاس^2\,جتاس^2\,ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = س^2$

$$\frac{ءص}{ءس} = 2س \leftarrow ءس = \frac{ءص}{2س}$$

$$\int س\times جا(ص)جتا(ص)\times\frac{ءص}{2س} \leftarrow \int جا(ص)جتا(ص)\times ءص \leftarrow \frac{1}{4}\int جا2ص ءص$$

$$-\frac{1}{4}\times\frac{جتا2ص}{2}+جـ \leftarrow -\frac{1}{4}\times\frac{جتا2س^2}{2}+جـ$$

(٧) $\int 4س\times قا(2+2س^2)ظا(2+2س^2)\,ءس$

الحل :

نفرض ان ص = ٢ + ٢س ^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٤س}}$

$\int \text{٤س}\times\text{قا(ص)ظا(ص)} \times \frac{\text{ءص}}{\text{٤س}} \leftarrow \int \text{قا(ص)ظا(ص)} \times \text{ءص}$

$\int \text{قا(ص)ظا(ص)} \times \text{ءص} = \text{قا(ص)} + \text{جـ} \leftarrow \text{قا}(\text{٢} + \text{٢س}^{٢}) + \text{جـ}$

---

(٨) $\int \text{جاس}\times\text{جتا}^{٥}\text{س ءس}$

الحل :

نفرض ان ص =جتاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\int \text{جاس} \times (\text{ص})^{٥} \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} \leftarrow -\int (\text{ص})^{٥}\, \text{ءص}$

$-\int (\text{ص})^{٥}\, \text{ءص} = -\frac{(\text{ص})^{٦}}{٦} + \text{جـ} \leftarrow -\frac{(\text{جتاس})^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

---

(٩) $\int \text{جتا}^{٥}\text{٤س}(\text{جتا٣س جاس} + \text{جتاس جا٣س})\text{ءس}$

الحل :

إنتبه

جتا٣س جاس+جتاس جا٣س =جا(س + ٣س) =جا٤س

$\int \text{جتا}^{٣}\text{٤س جا٤س ءس}$

نفرض ان ص =جتا٤س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٤ جا٤س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{٤ جا٤س}}$

$$\int جا٤س \times (ص)^٣ \frac{ءص}{-٤ جا٤س} \leftarrow -\frac{١}{٤}\int (ص)^٣ ءص$$

$$-\int (ص)^٣ ءص = -\frac{(ص)^٤}{١٦} + جـ \leftarrow -\frac{(جتا٤س)^٤}{١٦} + جـ$$

(١٠) $\int جا^٣ س ءس$

الحل :

$$\int جاس جا^٢ س ءس = \int جاس (١ - جتا^٢ س) ءس$$

نفرض ان ص = جتاس

$$\frac{ءص}{ءس} = -جاس \leftarrow \frac{ءص}{-جاس} = ءس$$

$$\int جاس \times (١ - ص^٢) \frac{ءص}{-جاس} \leftarrow \int (ص^٢ - ١) ءص$$

$$\left(\frac{ص^٣}{٣} - ص\right) + جـ \leftarrow \left(\frac{(جتاس)^٣}{٣} - جتاس\right) + جـ$$

(١١) $\int س^٥ \sqrt{س^٣ + ٢} ءس$

الحل :

نفرض ان ص = س^٣ + ٢ $\leftarrow$ ص − ٢ = س^٣

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢ \leftarrow \frac{ءص}{٣س^٢} = ءس$$

$$\int س^٥ \sqrt{ص} \frac{ءص}{٣س^٢} \leftarrow \frac{١}{٣}\int (ص - ٢) \sqrt{ص} ءص \leftarrow \frac{١}{٣}\int (ص^{\frac{٣}{٢}} - ٢ص^{\frac{١}{٢}}) ءص$$

$$\frac{١}{٣}\int (ص^{\frac{٣}{٢}} - ٢ص^{\frac{١}{٢}}) ءص = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}) + جـ$$

$$\frac{١}{٣}\left(\frac{٢}{٥}\sqrt{(\text{س}^{٣}+٢)^{٥}}-\frac{٤}{٣}\sqrt{(\text{س}^{٣}+٢)^{٣}}\right)+\text{جـ}$$

---

(١٢) $\int \text{س}^{٥}\ \sqrt[٣]{٢\text{س}^{٣}+٣}\ \text{دس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = ٢\text{س}^{٣}+٣ \leftarrow \frac{\text{ص}-٣}{٢} = \text{س}^{٣}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س}^{٢} \leftarrow \frac{\text{دص}}{٦\text{س}^{٢}} = \text{دس}$$

$$\int \text{س}^{٥}\ \sqrt[٣]{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{٦\text{س}^{٢}} \leftarrow \frac{١}{١٢}\int(\text{ص}-٣)\ \sqrt[٣]{\text{ص}}\ \text{دص} \leftarrow \frac{١}{١٢}\int(\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}-٣\text{ص}^{\frac{١}{٣}})\text{دص}$$

$$\frac{١}{١٢}\int(\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}-٢\text{ص}^{\frac{١}{٣}})\text{دص} = \frac{١}{١٢}\left(\frac{٣}{٧}\text{ص}^{\frac{٧}{٣}}-\frac{٩}{٤}\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}\right)+\text{جـ}$$

$$\frac{١}{١٢}\left(\frac{٣}{٧}\sqrt[٣]{(٢\text{س}^{٣}+٣)^{٧}}-\frac{٩}{٤}\sqrt[٣]{(٢\text{س}^{٣}+٣)^{٤}}\right)+\text{جـ}$$

---

(١٣) $\int \text{س}^{٢} \times \sqrt[٣]{\text{س}^{٧}-\text{س}^{٣}}\ \text{دس}$

الحل :

$$\int \text{س}^{٢} \times \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(\text{س}^{٤}-١)}\ \text{دس} \leftarrow \int \text{س}^{٣} \times \sqrt[٣]{(\text{س}^{٤}-١)}\ \text{دس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \text{س}^{٤}-١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\text{س}^{٣} \leftarrow \frac{\text{دص}}{٤\text{س}^{٣}} = \text{دس}$$

$$\int \text{س}^{٣}\ \sqrt[٣]{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{٤\text{س}^{٣}} \leftarrow \frac{١}{٤}\int \sqrt[٣]{\text{ص}}\ \text{دص} \leftarrow \frac{١}{٤}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\ \text{دص}$$

$$\frac{١}{٤}\times\frac{٣}{٤}\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}+\text{جـ} \leftarrow \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{(\text{س}^{٤}-١)^{٤}}+\text{جـ}$$

---

(١٤) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س} - \text{س}^{3}}}{\text{س}^{4}}\,\text{ءس}$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}^{3}\left(\frac{1}{\text{س}^{2}}-1\right)}}{\text{س}^{4}}\,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{\text{س} \times \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\text{س}^{2}}-1\right)}}{\text{س}^{4}}\,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\text{س}^{2}}-1\right)}}{\text{س}^{3}}\,\text{ءس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}^{2}} - 1$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-2\text{س}}{\text{س}^{4}} = \frac{-2}{\text{س}^{3}} \leftarrow \frac{\text{س}^{3}}{-2}\,\text{ءص} = \text{ءس}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{ص}}}{\text{س}^{3}} \times \frac{\text{س}^{3}}{-2}\,\text{ءص} \leftarrow \frac{-1}{2}\int \sqrt[3]{\text{ص}}\,\text{ءص} \leftarrow \frac{-1}{2}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{ءص}$$

$$\frac{-1}{2} \times \frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ} \leftarrow \frac{-3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\text{س}^{2}}-1\right)^{4}} + \text{جـ}$$

(١٥) $\int \frac{(\text{س}+1)^{7}}{(\text{س})^{9}}\,\text{ءس}$

الحل :

$$\int \frac{(\text{س}+1)^{7}}{(\text{س})^{7}(\text{س})^{2}}\,\text{ءس} \leftarrow \int \left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}}\right)^{7} \times \frac{1}{(\text{س})^{2}}\,\text{ءس}$$

$$\int \left(\frac{1}{\text{س}}+1\right)^{7} \times \frac{1}{(\text{س})^{2}}\,\text{ءس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} + 1 \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-1}{\text{س}^{2}} \leftarrow -\text{س}^{2}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$$\int (\text{ص})^{7} \times \frac{1}{(\text{س})^{2}} \times -\text{س}^{2}\,\text{ءص} \leftarrow -\int (\text{ص})^{7}\,\text{ءص}$$

$$-\int (ص)^{٧}\, ءص \leftarrow -\frac{(ص)^{٨}}{٨}+جـ \leftarrow -\frac{\left(\frac{١}{س}+١\right)^{٨}}{٨}+جـ$$

---

(١٦) $\int \frac{(٢+٣س)^{٩}}{(س)^{١١}}\, ءس$

الحل :

$$\int \frac{(٢+٣س)^{٩}}{(س)^{٩}\,(س)^{٢}}\, ءس \leftarrow \int \left(\frac{٢+٣س}{س}\right)^{٩} \times \frac{١}{(س)^{٢}}\, ءس$$

$$\int \left(\frac{٢}{س}+٣\right)^{٧} \times \frac{١}{(س)^{٢}}\, ءس$$

نفرض ان $ص = \frac{٢}{س}+٣ \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢}{س^{٢}} \leftarrow \frac{س^{٢}}{-٢}\, ءص = ءس$

$$\int (ص)^{٩} \times \frac{١}{(س)^{٢}} \times \frac{س^{٢}}{-٢}\, ءص \leftarrow -\frac{١}{٢}\int (ص)^{٩}\, ءص$$

$$-\frac{١}{٢}\int (ص)^{٩}\, ءص = ص = -\frac{١}{٢} \times \frac{(ص)^{١٠}}{١٠}+جـ \leftarrow -\frac{\left(\frac{٢}{س}+٣\right)^{١٠}}{٢٠}+جـ$$

---

(١٧) $\int \frac{(س^{٤}+٢س^{٢}+١)^{٥}}{(س)^{٢٣}}\, ءس$

الحل :

$$\int \frac{(س^{٢}+١)^{١٠}}{(س)^{٢٠}\,(س)^{٣}}\, ءس \leftarrow \int \left(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}}\right)^{١٠} \times \frac{١}{(س)^{٢}}\, ءس$$

$$\int \left(١+\frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠} \times \frac{١}{(س)^{٢}}\, ءس$$

نفرض ان $ص = ١+\frac{١}{س^{٢}} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢س}{س^{٤}} = \frac{-٢}{س^{٣}} \leftarrow \frac{س^{٣}}{-٢}\, ءص = ءس$

$$\int (\text{ص})^{10} \times \frac{1}{(\text{س})^{3}} \times \frac{\text{س}^{3}}{-2}\,\text{ءص} \leftarrow -\frac{1}{2}\int (\text{ص})^{10}\,\text{ءص}$$

$$-\frac{1}{2}\int (\text{ص})^{10}\,\text{ءص} \leftarrow \text{ص} = -\frac{1}{2} \times \frac{(\text{ص})^{11}}{11} + \text{جـ} \leftarrow -\frac{\left(1+\frac{1}{\text{س}^{2}}\right)^{11}}{22} + \text{جـ}$$

---

(١٨) $\int \text{جا}^{3}\text{س} \times \text{جتا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$

الحل :

$$\int \text{جا}^{2}\text{س} \times \text{جاس} \times \text{جتا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$$

نفرض ان ص =جتاس

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} = \text{ءس}$$

$$\int \text{جا}^{2}\text{س}\,\text{جاس} \times (\text{ص})^{2}\,\frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} \leftarrow -\int (1-\text{ص}^{2})(\text{ص})^{2}\,\text{ءص}$$

$$-\int (1-\text{ص}^{2})(\text{ص})^{2}\,\text{ءص} \leftarrow -\int (\text{ص}^{2}-\text{ص}^{4})\,\text{ءص}$$

$$-\int (\text{ص}^{2}-\text{ص}^{4})\,\text{ءص} = -\left(\frac{(\text{ص})^{3}}{3} - \frac{(\text{ص})^{5}}{5}\right) + \text{جـ} \leftarrow -\left(\frac{(\text{جتاس})^{3}}{3} - \frac{(\text{جتاس})^{5}}{5}\right) + \text{جـ}$$

---

(١٩) $\int \text{ظا}^{4}\text{س} \times \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان ص =ظاس

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{2}\text{س} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}} = \text{ءس}$$

$$\int \text{قا}^{2}\text{س} \times (\text{ص})^{4}\,\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}} \leftarrow \int (\text{ص})^{4}\,\text{ءص}$$

$$\int \text{ص}^{٤}\, \text{ءص} = \frac{(\text{ص})^{٥}}{٥} + \text{جـ} \leftarrow \frac{(\text{ظاس})^{٥}}{٥} + \text{جـ}$$

---

(٢٠) $$\int_{٠}^{\sqrt{١٥}} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{\sqrt{١٥}} ٢\text{س}\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{-\frac{١}{٢}} \text{ءس}$$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$$

$$\int_{٠}^{\sqrt{١٥}} ٢\text{س}\,(\text{ص})^{-\frac{١}{٢}} \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} \leftarrow \int_{٠}^{\sqrt{١٥}} (\text{ص})^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ءص}$$

$$\int (\text{ص})^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ءص} = \left[٢(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\right]_{١}^{١٦} = \left[٢\sqrt{\text{ص}}\right]_{١}^{١٦} = (٨-٢) = ٦$$

---

(٢١) $$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\text{جاس جتاس}}{\sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س}+١}}\, \text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٢\text{جاس جتاس}\left(\text{جا}^{٢}\text{س}+١\right)^{-\frac{١}{٢}} \text{ءس}$$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \text{جا}^{٢}\text{س} + ١$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{جاس جتاس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{جاس جتاس}}$$

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٢\text{جاس جتاس}\left(\text{جا}^{٢}\text{س}+١\right)^{-\frac{١}{٢}} \text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٢\text{جاس جتاس}\,(\text{ص})^{-\frac{١}{٢}} \frac{\text{ءص}}{٢\text{جاس جتاس}}$$

$$\int (\text{ص})^{-\frac{١}{٢}}\, \text{ءص} = \left[٢(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\right]_{١}^{٢} = \left[٢\sqrt{\text{ص}}\right]_{١}^{٢} = (٢\sqrt{٢}-٢)$$

تمارين ومسائل (٧)

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \text{ظا}^{٦}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

(٢) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{ءس}$

(٣) $\int \left(\text{جا}^{١٢}\text{س} \times \text{جتا}^{١٠}\text{س} - \text{جا}^{١٠}\text{س} \times \text{جتا}^{١٢}\text{س}\right) \text{ءس}$

(٤) $\int \frac{\left(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١\right)^{٥}}{\left(\text{س}\right)^{١٢}}\ \text{ءس}$

(٥) $\int \left(١ + \sqrt{٢\text{س} - ١}\right)^{٩} \text{ءس}$

(٦) $\int \text{جا}^{٥}\text{س} \times \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$

(٧) $\int \sqrt[٥]{\frac{\text{س} - ١}{\text{س}^{١١}}}\ \text{ءس}$

(٨) $\int_{٠}^{٢} \left(\text{س} + ٣\right) \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}\ \text{ءس}$

(٩) $\int \sqrt[٥]{٢ - \sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

(١٠) $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الدرس الثاني: التكامل بالاجزاء

$(ق \times هـ)'(س) = ق\,هـ' + هـ\,ق'$

$هـ\,ق' = (ق \times هـ)'(س) - ق\,هـ' \leftarrow \int هـ\,ق'\,دس = \int (ق \times هـ)'(س)\,دس - \int ق\,هـ'\,دس$

$\therefore \int هـ\,ق'\,دس = (ق \times هـ) - \int هـ.\,دق$

الامثلة

اذا كان الاقتران عبارة عن حاصل ضرب اقتران كثير حدود في اقتران مثلثي فإن الاقتران الكثير حدود هي ق

(١) $\int$ س جتاس دس

الحل :

ق = س　　　دق = دس

دهـ = جتاس　　　هـ = جاس

= س جاس − $\int$ جاس.دس

= س جاس + جتاس + جـ

---

(٢) $\int$ (٤س + ١) جا٢س.دس

الحل :

ق = ٤س + ١　　　دق = ٤دس

دهـ = جا٢س　　　هـ = $\frac{-جتا٢س}{٢}$

= (٤س + ١) × $\frac{-جتا٢س}{٢}$ + ٢ $\int$ جتا٢س.دس

$$= (\text{٤س}+\text{١}) \times \frac{-\text{جتا٢س}}{\text{٢}} + \text{جا٢س} + \text{جـ}$$

---

(٣) $\int \text{٢س}\sqrt{\text{٣س}+\text{٥}}\ .\text{ءس}$

الحل :

$\text{ن} = \text{٢س}$ ، $\text{ءن} = \text{٢ءس}$

$\text{ءهـ} = (\text{٣س}+\text{٥})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$ ، $\text{هـ} = \frac{\text{٢}}{\text{٩}}(\text{٣س}+\text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

$$= \text{٢س} \times \frac{\text{٢}}{\text{٩}}(\text{٣س}+\text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \frac{\text{٤}}{\text{٩}}\int (\text{٣س}+\text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}\ .\text{ءس}$$

$$= \text{٢س} \times \frac{\text{٢}}{\text{٩}}(\text{٣س}+\text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \frac{\text{٤}}{\text{٩}} \times \frac{\text{٢}}{\text{١٥}}(\text{٣س}+\text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

---

(٤) $\int \text{٤س جا٢س جتا٢س}\ .\text{ءس}$

الحل :

$\int \text{٢س جا٤س}\ .\text{ءس}$

$\text{ن} = \text{٢س}$ ، $\text{ءن} = \text{٢ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جا٤س}$ ، $\text{هـ} = \frac{-\text{جتا٤س}}{\text{٤}}$

$$= \text{٢س} \times \frac{-\text{جتا٤س}}{\text{٤}} + \frac{\text{٢}}{\text{٤}}\int \text{جتا٤س}\ .\text{ءس}$$

$$= \frac{-\text{س جتا٤س}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٨}}\text{جا٤س} + \text{جـ}$$

(٥) $\int \frac{\text{٣س}}{\text{قا٤س}}\,\text{ءس}$

$\int \text{٣س جتا٤س ءس}$

الحل :

$\text{ق} = \text{٣س}$ ، $\text{ءق} = \text{٣ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتا٤س}$ ، $\text{هـ} = \frac{\text{جا٤س}}{٤}$

$= \frac{\text{٣س جا٤س}}{٤} - \int \frac{٣}{٤} \times \text{جا٤س.ءس}$

$= \frac{\text{٣س جا٤س}}{٤} + \frac{٣}{١٦}\text{جتا٤س} + \text{جـ}$

(٦) $\int \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{جاس.ءس}$

اجزاء مرتين

الحل :

$\text{ق} = \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢}$ ، $\text{ءق} = \text{س ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جاس}$ ، $\text{هـ} = -\text{جتاس}$

$-\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} \times \text{جتاس} + \int \text{س جتاس.ءس}$

$\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{ءق} = \text{١ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس}$ ، $\text{هـ} = \text{جاس}$

$= \text{س جاس} - \int \text{جاس.ءس}$

$= \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

$\therefore -\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} \times \text{جتاس} + \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

(٧) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\;\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+١}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+١}} \leftarrow ٢\sqrt{\text{س}+١}\;\text{ءص} = \text{ءس}$$

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+١}\;\text{ءس} = \int ٢\text{ص جاص ءص}$$

$\text{ن} = ٢\text{ص}$ $\qquad$ $\text{ءن} = ٢\text{ءص}$

$\text{ءه} = \text{جاص}$ $\qquad$ $\text{ه} = -\text{جتاص}$

$$= -٢\text{ص}\times\text{جتاص} + \int ٢\,\text{جتاص.ءص}$$

$$= -٢\sqrt{\text{س}+١}\times\text{جتا}\sqrt{\text{س}+١} + ٢\,\text{جا}\sqrt{\text{س}+١} + \text{ج}$$

---

(٨) $\int \text{س}^{٣}\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right)\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{س}} = \text{ءس}$$

$$\int \text{س}^{٣}\,\text{جا}\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right)\text{ءس} = \int \text{س}^{٢}\,\text{جا(ص)ءص} = \int ٢\text{ص جا(ص)ءص}$$

$\text{ن} = ٢\text{ص}$ $\qquad$ $\text{ءن} = ٢\text{ءص}$

$\text{ءه} = \text{جاص}$ $\qquad$ $\text{ه} = -\text{جتاص}$

$$= -٢\text{ص}\times\text{جتاص} + \int ٢\,\text{جتاص.ءص}$$

$= -٢ص \times جتاص + ٢جاص + جـ$

$= -س^{٢} \times جتا\frac{س^{٢}}{٢} + ٢جا\frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

(٩) $\int س^{٥} \times \left(٢ - \frac{١}{س}\right)^{٤} ءس$

الحل :

$\int س^{٥} \times \left(٢ - \frac{١}{س}\right)^{٤} ءس \leftarrow \int س^{٥} \times \left(\frac{٢س - ١}{س}\right)^{٤} ءس \leftarrow \int س^{٥} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{(س)^{٤}} ءس$

$\int س^{٥} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{(س)^{٤}} ءس = \int س \times (٢س - ١)^{٤} ءس$

$ن = س$　　$ءن = ءس$

$ءهـ = (٢س - ١)^{٤}$　　$هـ = \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠}$

$= س \times \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} - \int \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} .ءس$

$= س \times \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} - \frac{(٢س - ١)^{٦}}{١٢٠} + جـ$

---

(١٠) $\int \frac{س جتاس}{جا^{٣}س} ءس$

$\int س ظتاس قتا^{٢}س ءس$

الحل :

$\text{ن} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{ءن} = \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{ظتاس قتا}^{٢}\text{س}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \dfrac{-\left(\text{ظتاس}\right)^{٢}}{٢}$ من (١)

بالتعويض

$\text{ص} = \text{ظتاس} \leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}^{٢}\text{س} \leftarrow \text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{س ظتاس قتا}^{٢}\text{س ءس} \leftarrow \int \text{ص قتا}^{٢}\text{س} \dfrac{\text{ءص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

$-\int \text{ص ءص} = \dfrac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ} = \dfrac{-\left(\text{ظتاس}\right)^{٢}}{٢} + \text{جـ}$ ....(١)

$= -\text{س} \dfrac{\left(\text{ظتاس}\right)^{٢}}{٢} + \int \dfrac{\left(\text{ظتاس}\right)^{٢}}{٢} \text{ءس}$

$= -\text{س} \dfrac{\left(\text{ظتاس}\right)^{٢}}{٢} + \int \dfrac{\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١}{٢} \text{ءس}$

$= -\text{س} \dfrac{\left(\text{ظتاس}\right)^{٢}}{٢} + \dfrac{-\text{ظتاس} - \text{س}}{٢} + \text{جـ}$

---

(١١) $\int \text{س}\left(\text{جتا٥س جتا٣س} - \dfrac{١}{٢}\text{جتا٨س}\right)\text{ءس}$

الحل :

$\text{جتا٥س جتا٣س} = \dfrac{١}{٢}\left(\text{جتا٨س} + \text{جتا٢س}\right)$

$\int \text{س}\left(\dfrac{١}{٢}\left(\text{جتا٨س} + \text{جتا٢س}\right) - \dfrac{١}{٢}\text{جتا٨س}\right)\text{ءس} = \int \text{س}\left(\dfrac{١}{٢}\text{جتا٨س} + \dfrac{١}{٢}\text{جتا٢س} - \dfrac{١}{٢}\text{جتا٨س}\right)\text{ءس}$

$\int \dfrac{١}{٢}\text{س}\left(\text{جتا٢س}\right)\text{ءس}$

$ق = \frac{1}{2}س$ $\qquad$ $ءق = \frac{1}{2}ءس$

$ءهـ = جتا٢س$ $\qquad$ $هـ = \frac{جا٢س}{٢}$

$= \frac{1}{2}س \times \frac{جا٢س}{٢} - \int \frac{جا٢س}{٤}.ءس$

$= \frac{1}{2}س \times \frac{جا٢س}{٢} + \frac{جتا٢س}{٨} + جـ$

الدرس الثالث: مشتقة الاقتران اللوغاريتم الطبيعي

قاعدة

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ل}(\text{س})|$ وكان ل(س) قابلا للاشتقاق فإن

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$$

الامثلة

جد $\text{ق}'(\text{س})$ فيما يلي :

(١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٣} + ٤\text{س}|$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢} + ٤}{\text{س}^{٣} + ٤\text{س}}$$

---

(٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} |٢\text{س}^{٦}|$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١٢\text{س}^{٥}}{٢\text{س}^{٦}}$$

---

(٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}|$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس}$$

(٤) $\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جتا}^{٢}\text{س}\right|$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س})=\frac{-٢\text{جاس جتاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}=-٢\text{ظاس}$$

---

(٥) $\text{ق}(\text{س})=٢\text{س}^{٢}\times\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|٤\text{س}+٦\right|$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س})=٢\text{س}^{٢}\times\frac{٤}{٤\text{س}+٦}+٤\text{س}\times\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|٤\text{س}+٦\right|$$

---

(٦) $\text{ق}(\text{س})=\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\right)^{٥}$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س})=\frac{٥\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٤}}{\text{س}}$$

---

(٧) $\text{ق}(\text{س})=\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س})=\frac{\frac{١}{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}=\frac{١}{٢\text{س}\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}$$

قوانين مهمة

(١) $\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}\times\text{ص})=\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}+\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

(٢) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\frac{\text{س}}{\text{ص}}=\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}-\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

(٣) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ن}}=\text{ن}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

(٤) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}=١$　　(٥) $\text{لـو}_{\text{هـ}}١=٠$

(٨) $\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}-٢}}\right)$

الحل :

نستطيع تطبيق قوانين اللوغاريتمات قبل ايجاد المشتقة من اجل تبسيط السؤال؟

$$\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)-\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{\text{س}-2}\right)$$

$$\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)-\frac{1}{2}\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}-2)$$

$$\text{ق}'(\text{س})=\frac{1}{\text{س}+1}-\frac{1}{2(\text{س}-2)}=\frac{\text{س}-5}{2(\text{س}+1)(\text{س}-2)}$$

---

(٩) $\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}^{\frac{3}{4}}\sqrt{\text{س}^{2}+1}}{(3\text{س}+2)^{5}}\right)$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{\frac{3}{4}}\right)+\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\sqrt{\text{س}^{2}+1}\right)-\text{لـو}_{\text{هـ}}(3\text{س}+2)^{5}$$

$$\text{ق}(\text{س})=\frac{3}{4}\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}+\frac{1}{2}\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+1)-5\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(3\text{س}+2)$$

$$\text{ق}(\text{س})=\frac{3}{4\text{س}}+\frac{\text{س}}{(\text{س}^{2}+1)}-\frac{15}{(3\text{س}+2)}$$

تمارين ومسائل (٨)

(١) جد $\text{ق}'(\text{س})$ فيما يلي :

(أ) $\text{ق}(\text{س})=\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ (ب) $\text{ق}(\text{س})=\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جا}^{2}\text{س}$

(٢) اذا كان $\text{ص}=\text{س}^{2}\times\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$ أثبت ان $\text{ص}''=\frac{2\text{ص}}{\text{س}^{2}}+3$

(٣) اذا كان $\int(\text{ق}'(\text{س})-\text{س})\,\text{ء}\text{س}=\text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{قتاس}+\text{ظتاس}|-2$ فاثبت ان $\text{ق}'(\text{س})=\text{س}-\text{قتاس}$

الدرس الرابع : تكامل الاقتران اللوغاريتم الطبيعي

نظرية

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} \, ءس = لـو_{هـ} |ق(س)| + جـ$$

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٣س^{٢}+٢}{س^{٣}+٢س} . ءس$

الحل :

$لـو_{هـ}|س^{٣}+٢س|+جـ$

---

(٢) $\int \frac{س}{س^{٢}+٦} . ءس$

الحل :

$\frac{١}{٢} لـو_{هـ}|س^{٢}+٦|+جـ$

---

(٣) $\int لـو_{هـ}|س| . ءس$

اجزاء

الحل :

$ق = لـو_{هـ} س$ $\qquad$ $ءق = \frac{١}{س} ءس$

$ءهـ = ءس$ $\qquad$ $هـ = س$

$س لـو_{هـ} س - \int ١ . ءس$ $\qquad$ $\therefore س لـو_{هـ} س - س + جـ$

(٤) $\int \text{س لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| . \text{ءس}$

اجزاء

الحل :

$\text{ن} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}$ $\qquad$ $\text{ءن} = \frac{١}{\text{س}} \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{س ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\frac{\text{س}^{٢}}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} - \int \frac{\text{س}}{٢} . \text{ءس}$

$\frac{\text{س}^{٢}}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$

---

(٥) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}|}{\text{س}} \text{ءس}$

بالتعويض

الحل :

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}} \leftarrow \text{س ءص} = \text{ءس}$

$\int \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{س ءص} \leftarrow \int \text{ص ءص}$

$\int \text{ص ءص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ} \leftarrow \frac{\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س}\right)^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

---

(٦) $\int \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}} |\text{س}|} \text{ءس}$

الحل :

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ س} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{س}} \leftarrow \text{س ءص} = \text{ءس}$

$\int \frac{١}{\text{س ص}} \text{س ءص} \leftarrow \int \frac{١}{\text{ص}} \text{ءص}$

$\int \frac{1}{ص}ءص = لـو_{هـ}|ص| + جـ = لـو_{هـ}|لـو_{هـ}س| + جـ$

(٧) $\int جتاس لـو_{هـ}|جاس| . ءس$

بالتعويض

الحل :

$ص = جاس \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = جتاس \leftarrow \frac{ءص}{جتاس} = ءس$

$\int جتاس لـو_{هـ}|ص| . \frac{ءص}{جتاس} \leftarrow \int لـو_{هـ}|ص| . ءص$

$\int لـو_{هـ}|ص| . ءص$

اجزاء

$ن = لـو_{هـ}ص$ $ءن = \frac{1}{ص}ءص$

$ءهـ = ءص$ $هـ = ص$

$ص لـو_{هـ}ص - \int ١ . ءص$

$ص لـو_{هـ}ص - ص + جـ$

$جاس لـو_{هـ}جاس - جاس + جـ$

(٨) $\int (لـو_{هـ}س)^{٢} . ءس$

بالتعويض

الحل :

$ن = (لـو_{هـ}س)^{٢}$ $ءن = ٢(لـو_{هـ}س) \times \frac{1}{س}ءس$

$ءهـ = ءس$ $هـ = س$

$س(لـو_{هـ}س)^{٢} - ٢\int لـو_{هـ}س . ءس$

اجزاء

$$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \,.\, \text{ءس}$$

الحل :

$$\text{ن} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \qquad \text{ءن} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\text{ءهـ} = \text{ءس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$$

$$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int 1 \,.\, \text{ءس}$$

$$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$$

$$\therefore\ \text{س}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{2} - 2\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + 2\text{س} + \text{جـ}$$

(٩) $$\int \frac{\text{ظتا}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)}{\text{س}}\,\text{ءس}$$

الحل :

$$\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{س}\,\text{ءص} = \text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{ظتاص}}{\text{س}}\,\text{س}\,\text{ءص} \leftarrow \int \text{ظتاص}\,\text{ءص}$$

$$\int \text{ظتاص}\,\text{ءص} = \int \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}\,\text{ءص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{جا}\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)\right| + \text{جـ}$$

(١٠) $$\int \text{ظا}^{3}\,\text{س} \,.\, \text{ءس}$$

الحل :

$$\int \text{ظا}^{3}\,\text{س} \,.\, \text{ءس} = \int \text{ظاس}\,\text{ظا}^{2}\,\text{س} \,.\, \text{ءس}$$

$$\int \text{ظاس}\left(\text{قا}^{2}\,\text{س} - 1\right) .\, \text{ءس}$$

$\int$ ظاس(قا^{٢}س $-$ ١).ءس $=$ $\int$ ظاس قا^{٢}س.ءس $-$ $\int$ ظاس ءس

$\int$ ظاس قا^{٢}س.ءس

بالتعويض

ص=ظاس $\leftarrow$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =قا^{٢}س $\leftarrow$ ءس $=$ $\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int$ ص قا^{٢}س.$\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ $=$ $\int$ ص ءص $=$ $\frac{(\text{ص})^{٢}}{٢}$ +جـ $\leftarrow$ $\frac{(\text{ظاس})^{٢}}{٢}$ +جـ.....................(١)

$\int$ ظاس ءس $=$ $\int$ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ءس $=$ $-$لــو$_{هـ}$ جتاس+جـ...................................(٢)

من (١) ، (٢)

$\frac{(\text{ظاس})^{٢}}{٢}$ +لــو$_{هـ}$ جتاس+جـ

(١١) $\int$ قاس.ءس

حالة خاصة في التكامل

الحل :

$\int$ $\frac{\text{قاس(قاس+ظاس)}}{\text{(قاس+ظاس)}}$ ءس $=$ $\int$ $\frac{\text{(قا}^{٢}\text{س+قاس ظاس)}}{\text{(قاس+ظاس)}}$ ءس $=$لــو$_{هـ}$ (قاس+ظاس)+جـ

(١٢) $\int$ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٥+\sqrt{\text{س}})}$ ءس

الحل :

ص=$\sqrt{\text{س}}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $=$ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ $\leftarrow$ ٢$\sqrt{\text{س}}$ ءص $=$ ءس

$\int$ $\frac{١}{\text{ص}(٥+\text{ص})}$ ٢ص ءص $=$ $\int$ $\frac{٢}{(٥+\text{ص})}$ ءص $=$ ٢لــو$_{هـ}$ $(٥+\sqrt{\text{س}})$+جـ.

(١٣) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+١}\,\text{ءس}$

الحل :

$\text{ص}=\sqrt{\text{س}} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} \leftarrow ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{ءص}=\text{ءس}$

$\int \frac{٢(\text{ص})^{٢}}{(\text{ص})^{٣}+١}\,\text{ءص}=\frac{٢}{٣}\text{لـوهـ}\left((\text{ص})^{٣}+١\right)+\text{جـ}=\frac{٢}{٣}\text{لـوهـ}\left((\sqrt{\text{س}})^{٣}+١\right)+\text{جـ}.$

---

(١٤) $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}^{٤}+\text{س}^{٢})}\,\text{ءس}=\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})}\,\text{ءس}=\int \frac{١}{\text{س}^{٣}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})}\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص}=١+\frac{١}{\text{س}^{٢}} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=-٢\text{س}^{-٣} \leftarrow \frac{\text{س}^{٣}\,\text{ءص}}{-٢}=\text{ءس}$

$\int \frac{١}{\text{س}^{٣}(\text{ص})}\,\frac{\text{س}^{٣}\,\text{ءص}}{-٢}=\frac{١}{-٢}\int \frac{١}{(\text{ص})}\,\text{ءص}$

$\frac{١}{-٢}\int \frac{١}{(\text{ص})}\,\text{ءص}=\frac{١}{-٢}\text{لـوهـ}(\text{ص})+\text{جـ}$

$\frac{١}{-٢}\text{لـوهـ}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})+\text{جـ}$

تمارين ومسائل (٩)

(١) جد التكاملات التالية

(١) $\int \text{س}^{٤}\left(\text{لـوهـ}\,\text{س}\right)^{٢}\text{ءس}$ (٢) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

(٣) $\int \frac{\text{لـوهـ}\,\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$ (٤) $\int \text{قتاس}\,\text{ءس}$

الدرس الخامس: مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي

نظرية

اذا كان ص = هـ$^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{س}}$

البرهان

ص = هـ$^{\text{س}}$ ← لو$_{\text{هـ}}$ ص = لو$_{\text{هـ}}$ هـ$^{\text{س}}$ ← لو$_{\text{هـ}}$ ص = س لو$_{\text{هـ}}$ هـ

لو$_{\text{هـ}}$ ص = س ← $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = ١ ← ص$'$ = ص

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{\text{س}}$

نظرية

اذا كان ص = أ$^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ$^{\text{س}}$ لو$_{\text{هـ}}$ أ

البرهان

ص = أ$^{\text{س}}$ ← لو$_{\text{هـ}}$ ص = لو$_{\text{هـ}}$ أ$^{\text{س}}$ ← لو$_{\text{هـ}}$ ص = س لو$_{\text{هـ}}$ أ

لو$_{\text{هـ}}$ ص = س لو$_{\text{هـ}}$ أ ← $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = لو$_{\text{هـ}}$ أ ← ص$'$ = ص لو$_{\text{هـ}}$ أ   ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ$^{\text{س}}$ لو$_{\text{هـ}}$ أ

الامثلة

١) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي :

(١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢هـ}^{\text{٢س}}$$

(٢) $\text{ص} = \text{٣س}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{٣س+٧}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٩س}^{٢} \times \text{هـ}^{\text{٣س+٧}} + \text{٦س} \times \text{هـ}^{\text{٣س+٧}}$$

(٣) $\text{ص} = \text{٢س}^{٥} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{هـ}^{\text{٤س+٦}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{١٠س}^{٤} - \frac{١}{\text{س}} + \text{٤هـ}^{\text{٤س+٦}}$$

(٤) $\text{ص} = \text{جا}(\text{هـ}^{\text{٢س}})$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢هـ}^{\text{٢س}}\,\text{جتا}(\text{هـ}^{\text{٢س}})$$

(٥) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل :

$$ص = ١ + \frac{١}{هـ^{س}} = ١ + هـ^{-س}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -هـ^{-س}$$

(٦) $ص = جا^{٢}(هـ^{٤س})$

الحل :

$$ص = ٨هـ^{٤س} جا(هـ^{٤س}) جتا(هـ^{٤س})$$

(٧) $ص = ٢^{س}$

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢^{س} لو_{هـ} ٢$$

(٨) $ص = ٧^{س}$

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٧^{س} لو_{هـ} ٧$$

(٩) $ص = ٣^{(٢س+٤)}$

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢ \times ٣^{٢س+٤} لو_{هـ} ٣$$

(١٠) $ص = لو_{هـ} هـ^{س^{٢}}$

الحل :

$\text{ص} = \text{س}^{٢} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} \leftarrow \text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

---

(١١) $\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{(٣\text{س}^{٣} - ٦)}$

الحل :

$\text{ص} = (٣\text{س}^{٣} - ٦)\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} \leftarrow \text{ص} = (٣\text{س}^{٣} - ٦)$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٩\text{س}^{٢}$

---

(١٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}}$

الحل :

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}} \leftarrow \text{ص} = \text{س}^{٣}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢}$

---

(١٣) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}}$

الحل :

$\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٣}} \leftarrow \text{ص} = \text{س}^{٥}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}^{٤}$

---

٢) اذا كان $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + أ\,لـو_{هـ}\sqrt{س}$ وكان $ق'(١) = هـ$ جد قيمة أ .

الحل :

$$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{أ}{٢}\,لـو_{هـ}\,س \leftarrow ق'(س) = \frac{-١}{س^{٢}} \times هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{أ}{٢س}$$

$$ق'(١) = -١ \times هـ^{١} + \frac{أ}{٢} = هـ \leftarrow أ = ٤هـ$$

٣) اذا كان $هـ^{س\times ص} = س + ص$ اثبت ان :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١ - س\,ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س\,ص - ١}$$

الحل :

$$هـ^{س\times ص} = (س + ص)$$

$$(س \times ص' + ص)\,هـ^{س\times ص} = ١ + ص'.$$

$$س \times ص' \times هـ^{س\times ص} + ص\,هـ^{س\times ص} = ١ + ص'$$

$$س \times ص' \times هـ^{س\times ص} - ص' = ١ - ص\,هـ^{س\times ص}$$

$$ص' \times (س \times هـ^{س\times ص} - ١) = ١ - ص\,هـ^{س\times ص} \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١ - ص\,هـ^{س\times ص}}{(س \times هـ^{س\times ص} - ١)}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١ - ص(س + ص)}{(س \times (س + ص) - ١)}$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{١ - س\,ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س\,ص - ١}$$

٤) اذا كان ص = هـ^(أس) فجد قيمة أ التي تحقق المعادلة ص″ − ٥ص′ + ٦ص = ٠

الحل :

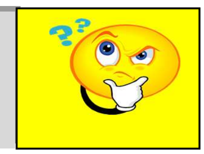
ص = هـ^(أس) ← ص′ = أهـ^(أس) ← ص″ = أ^٢ هـ^(أس)

أ^٢ هـ^(أس) − ٥أهـ^(أس) + ٦هـ^(أس) = ٠ ← هـ^(أس) (أ^٢ − ٥أ + ٦) = ٠

هـ^(أس) ≠ ٠

(أ^٢ − ٥أ + ٦) = ٠ ← (أ − ٢)(أ − ٣) = ٠

أ = ٢ ، أ = ٣



تمارين ومسائل (١٠)

(١) اذا كان ص = أهـ^(٢س) + جا(لـو_هـ س) حيث ا عدد ثابت وكان $\frac{dص}{dس}\Big|_{س=١}$ = هـ^٣ + ١

جد قيمة أ.

(٢) اذا كان ص = هـ^(٢س) اثبت ان ص″ − ٣ص′ + ٢ص = ٠

(٣) اذا كان ق″(س) = جاس + هـ^(٢س) وكان ق(٠) = $\frac{١}{٤}$ ، ق′(٠) = $\frac{١}{٢}$ فجد قاعدة الاقتران ق(س).

(٤) اذا كان ص = هـ^(ظاس) + أ لـو_هـ جتاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{dس}{١ + ظا^٢ س}$ وكان $\frac{dص}{dس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١ فجد قيمة

الثابت أ

الدرس السادس: تكامل الاقتران الاسي الطبيعي

نظرية

أ. عادل عواد

$$\int هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} + جـ$$

الابداع في الرياضيات

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int هـ^{٢س+٤} \, ءس$

الحل :

$$\frac{هـ^{٢س+٤}}{٢} + جـ$$

---

(٢) $\int ٢س هـ^{س^٢+٦} \, ءس$

بالتعويض

الحل :

$ص = س^٢ + ٦ \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٢س \leftarrow \frac{ءص}{٢س} = ءس$

$$\int ٢س هـ^{ص} \frac{ءص}{٢س} = \int هـ^{ص} ءص \leftarrow هـ^{س^٢+٦} + جـ$$

---

(٣) $\int قا^٢ س هـ^{ظاس} \, ءس$

بالتعويض

الحل :

$ص = ظاس \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = قا^٢ س \leftarrow \frac{ءص}{قا^٢ س} = ءس$

$$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \text{د س} = \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{د ص} \leftarrow \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{جـ}$$

(٤) $\int \text{س هـ}^{٢\text{س}}\,\text{د س}$

الحل :

$\text{ق} = \text{س}$		$\text{د ق} = \text{د س}$

$\text{د هـ} = \text{هـ}^{٢\text{س}}$		$\text{هـ} = \dfrac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢}$

$$\frac{\text{س هـ}^{٢\text{س}}}{٢} - \frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{د س} \leftarrow \frac{\text{س هـ}^{٢\text{س}}}{٢} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{جـ}$$

(٥) $\int \text{جا٢س هـ}^{\text{جتاس}}\,\text{د س}$

بالتعويض

الحل :

$$\int ٢\,\text{جاس جتاس هـ}^{\text{جتاس}}\,\text{د س}$$

$\text{ص} = \text{جتاس} \leftarrow \dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{د س} = \dfrac{\text{د ص}}{-\text{جاس}}$

$$\int ٢\,\text{جاس ص هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{-\text{جاس}} = -\int ٢\,\text{ص هـ}^{\text{ص}}\,\text{د ص}$$

اجزاء

$\text{ق} = -٢\text{ص}$		$\text{د ق} = -٢\text{د ص}$

$\text{د هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$		$\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$$-٢\text{ص هـ}^{\text{ص}} + \int ٢\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{د ص} \leftarrow -٢\text{ص هـ}^{\text{ص}} + ٢\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$-٢\,\text{جتاس هـ}^{\text{جتاس}} + ٢\text{هـ}^{\text{جتاس}} + \text{جـ}$$

(٦) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس}$

اجراء مرتين ثم نقل

الحل :

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{ءن} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جاس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\text{جتاس}$

$-\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}.\text{ءس}$ ....(١)

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}.\text{ءس}$

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{ءن} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{جاس}$

$\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس}$ ....(٢)

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس}$$

$$٢\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس} = \frac{-\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جتاس}}{٢} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{جاس}}{٢} + \text{جـ}$$

تمارين ومسائل (١١)

١) جد التكاملات التالية :

(١) $\int هـ^{س} جتاس .ءس$

(٢) $\int \frac{هـ^{س}}{قاس} .ءس$

(٣) $\int جا(لو_{هـ} س) .ءس$

(٤) $\int \frac{٢س^{٢} هـ^{-٣س}}{٩س^{٢} - ١٢س + ٤} .ءس$

٢) أثبت ان : $\frac{٢}{هـ} \le \int_{٠}^{٢} هـ^{س^{٢}-٢س} .ءس \le ٢$

الدرس السابع : طريقة الجدول

طريقة الجدول

حالات استخدام طريقة الجدول :

حاصل ضرب اقترانين أحدهما كثير حدود والاقتران الاخر على احدى الصور الاتية:

١) جاأس ٢) جتاأس ٣) $هـ^{أس}$ ٤) $(أس+ب)^{ن}$ ، ن≠−١ ، أ≠٠

الامثلة

جد التكاملات التالية

١) $\int س^٢ هـ^{س} ءس$

الحل :

ق(اجراء التفاضل)		ءهـ (اجراء التكامل)
$س^٢$	+	$هـ^{س}$
٢س	-	$هـ^{س}$
٢	+	$هـ^{س}$
٠	-	$هـ^{س}$

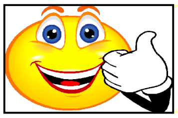
$$\int س^٢ هـ^{س} ءس = س^٢ هـ^{س} - ٢س هـ^{س} + ٢هـ^{س} + جـ$$

٢) $\int$ س ^٢^ جاس ءس

الحل :

ق(اجراء التفاضل)		ءهـ (اجراء التكامل)
س ^٢^	+	جاس
٢س	−	−جتاس
٢	+	−جاس
٠	-	جتاس

$\int$ س ^٢^ جاس ءس = −س ^٢^ جتاس + ٢س جاس + ٢جتاس+جـ



الدرس الثامن : التكامل بالكسور الجزئية

في التكامل بالكسور الجزئية اذا كان:

١) الاقتران نسبيا

٢) وليس لبسطه علاقة بمشتقة مقامه .

٣) وامكن تحليل مقامه الى عوامل مختلفة

فإنه يمكن ايجاد تكامله بطريقة تسمى التكامل بالكسور الجزئية .

اولا اذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٤}{س^{٢} - ٩}$ ءس

الحل :

$$\frac{٤}{س^{٢} - ٩} = \frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ٣}$$

$$٤ = أ(س + ٣) + ب(س - ٣)$$

عند س = ٣

$$٤ = ٦أ \leftarrow أ = \frac{٢}{٣}$$

عند س = -٣

$٤ = -٦ب \leftarrow ب = \frac{-٢}{٣}$

$\therefore \frac{٢}{٣}\int \frac{١}{س - ٣} ءس - \frac{٢}{٣}\int \frac{١}{س + ٣} ءس$

$\therefore \frac{٢}{٣}لــو_{هـ}(س - ٣) - \frac{٢}{٣}لــو_{هـ}(س + ٣) + جـ$

(٢) $\int \frac{٣}{س^{٢} - ٤س + ٣} ءس$

الحل :

$\frac{٣}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س - ٣}$

$٣ = أ(س - ٣) + ب(س - ١)$

عند س = ٣

$٣ = ٦ب \leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

عند س = ١

$٣ = -٢أ \leftarrow أ = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore \frac{-٣}{٢}\int \frac{١}{س - ١} ءس + \frac{٣}{٢}\int \frac{١}{س - ٣} ءس$

$\therefore \frac{-٣}{٢}لــو_{هـ}(س - ١) + \frac{٣}{٢}لــو_{هـ}(س - ٣) + جـ$

(٣) $\int \frac{٢س + ١}{س^{٢} - ١٦} ءس$

الحل :

$\frac{٢س + ١}{س^{٢} - ١٦} = \frac{أ}{س - ٤} + \frac{ب}{س + ٤}$

٢س + ١ = أ(س + ٤) + ب(س − ٤)

عند س = ٤

$٩ = ٨أ \leftarrow أ = \frac{٩}{٨}$

عند س = -٤

$-٧ = -٨ب \leftarrow ب = \frac{٧}{٨}$

$\therefore \frac{٩}{٨}\int \frac{١}{س - ٤}\,ءس + \frac{٧}{٨}\int \frac{١}{س + ٤}\,ءس$

$\therefore \frac{٩}{٨}لـو_{هـ}(س - ٤) + \frac{٧}{٨}لـو_{هـ}(س + ٤) + جـ$

---

(٤) $\int \frac{٢}{س^{٢} - ٢س}\,ءس$

الحل :

$\frac{٢}{س^{٢} - ٢س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ٢}$

٢ = أ(س − ٢) + ب س

عند س = ٢

$٢ = ٢ب \leftarrow ب = ١$

عند س = ٠

$٢ = -٢أ \leftarrow أ = -١$

$\therefore \int \frac{-١}{س}\,ءس + \int \frac{١}{س - ٢}\,ءس$

$\therefore -لـو_{هـ}(س) + لـو_{هـ}(س - ٢) + جـ$

(٥) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٨١} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = هـ^{س} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س} \leftarrow \frac{ءص}{هـ^{س}} = ءس$

$\int \frac{ص}{ص^{٢} - ٨١} ءص$

$\frac{ص}{ص^{٢} - ٨١} = \frac{أ}{ص - ٩} + \frac{ب}{ص + ٩}$

$ص = أ(ص + ٩) + ب(ص - ٩)$

عند ص=-٩

$ص = أ(ص + ٩) + ب(ص - ٩) \leftarrow -٩ = -١٨ب \leftarrow ب = \frac{-١}{٢}$

عند ص= ٩

$ص = أ(ص + ٩) + ب(ص - ٩) \leftarrow ٩ = ١٨أ \leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢}\int \frac{١}{ص - ٩} ءس - \frac{١}{٢}\int \frac{١}{ص + ٩} ءس$

$\therefore \frac{١}{٢} لــو_{هـ} (ص - ٩) - \frac{١}{٢} لــو_{هـ} (ص + ٩) + جـ$

$\therefore \frac{١}{٢} لــو_{هـ} (هـ^{س} - ٩) - \frac{١}{٢} لــو_{هـ} (هـ^{س} + ٩) + جـ$

---

(٦) $\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٤}} + ٤س + ٣\sqrt[٣]{س^{٢}}} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = \sqrt[3]{س} \leftarrow ص^{٣} = س \leftarrow ٣ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٣ص^{٢} ءص = ءس$

$\int \frac{٦ص^{٢}}{ص^{٤} + ٤ص^{٣} + ٣ص^{٢}} ءص \leftarrow \int \frac{٦ص^{٢}}{ص^{٢}(ص^{٢} + ٤ص + ٣)} ءص \leftarrow \int \frac{٦}{(ص^{٢} + ٤ص + ٣)} ءص$

$\int \frac{٦}{(ص^{٢} + ٤ص + ٣)} ءص$

$\frac{٦}{ص^{٢} + ٤ص + ٣} = \frac{أ}{ص + ٣} + \frac{ب}{ص + ١}$

$٦ = أ(ص + ١) + ب(ص + ٣)$

عند ص=-١

$٦ = أ(ص + ١) + ب(ص + ٣) \leftarrow ٦ = ٢ب \leftarrow ب = ٣$

عند ص= -٣

$٦ = أ(ص + ١) + ب(ص + ٣) \leftarrow ٦ = -٢أ \leftarrow أ = -٣$

$\therefore -٣\int \frac{١}{ص + ٣} ءس + ٣\int \frac{١}{ص + ١} ءس$

$\therefore -٣لـو_{هـ}(ص + ٣) + ٣لـو_{هـ}(ص + ١) + جـ$

$\therefore -٣لـو_{هـ}(\sqrt[3]{س} + ٣) + ٣لـو_{هـ}(\sqrt[3]{س} + ١) + جـ$

---

(٧) $\int \frac{٢}{س - ٤\sqrt{س} + ٣} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^{٢} = س \leftarrow ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٢صءص = ءس$

$\int \frac{٤ص}{ص^{٢} - ٤ص + ٣} ءص \leftarrow \int \frac{٤ص}{(ص - ٣)(ص - ١)} ءص$

$$\frac{\text{٤ص}}{(\text{ص}-٣)(\text{ص}-١)} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص}-٣)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}-١)}$$

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(\text{ص}-٣)$$

عند ص=١

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(\text{ص}-٣) \leftarrow ٤ = -٢\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -٢$$

عند ص= ٣

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(\text{ص}-٣) \leftarrow ١٢ = ٢\text{أ} \leftarrow \text{أ} = ٦$$

$$\therefore ٦\int \frac{١}{\text{ص}-٣}\,\text{ءس} - ٢\int \frac{١}{\text{ص}-١}\,\text{ءس}$$

$$\therefore ٦\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}-٣) - ٢\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}-١) + \text{جـ}$$

$$\therefore ٦\text{لـو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}}-٣) - ٢\text{لـو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}}-١) + \text{جـ}$$

---

(٨) $\displaystyle\int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{(٥\text{ظا}^٢\text{س} - ٣\text{ظاس} - ٢)}\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \text{ظاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^٢\text{س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$

$$\int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{(٥\text{ظا}^٢\text{س} - ٣\text{ظاس} - ٢)}\,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{(٥\text{ص}^٢ - ٣\text{ص} - ٢)}\cdot\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^٢\text{س}} \leftarrow \int \frac{١}{(٥\text{ص}^٢ - ٣\text{ص} - ٢)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{(٥\text{ص}^٢ - ٣\text{ص} - ٢)} = \frac{\text{أ}}{(٥\text{ص}+٢)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}-١)}$$

$$\text{ص} = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(٥\text{ص}+٢)$$

عند ص=١

$$١ = \text{أ}(\text{ص}-١) + \text{ب}(٥\text{ص}+٢) \leftarrow ١ = ٧\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٧}$$

عند ص $= \frac{-٢}{٥}$

$١ = ا(ص - ١) + ب(٥ص + ٢) \leftarrow ١ = \frac{-٧}{٥} ا \leftarrow ا = \frac{-٥}{٧}$

$\therefore \frac{-٥}{٧} \int \frac{١}{٥ص + ٢} ءص + \frac{١}{٧} \int \frac{١}{ص - ١} ءص$

$\therefore \frac{-٥}{٧}$ لــو$_هـ$ $(٥ص + ٢) + \frac{١}{٧}$ لــو$_هـ$ $(ص - ١) +$ جـ

$\therefore \frac{-٥}{٧}$ لــو$_هـ$ $(٥ظاس + ٢) + \frac{١}{٧}$ لــو$_هـ$ $(ظاس - ١) +$ جـ

---

(٩) $\int \frac{\text{لــو}_{هـ} س}{(س + ١)^٢} ءس$

الحل :

بالاجزاء

ق = لــو$_هـ$ س　　　ءق $= \frac{١}{س} ءس$

ءهـ $= (س + ١)^{-٢}$　　　هـ $= \frac{-١}{(س + ١) \times س}$

$-(س + ١)^{-١} \times$ لــو$_هـ$ س $+ \int \frac{١}{(س + ١) \times س} .ءس$

بالكسور الجزئية

$\int \frac{١}{(س + ١) \times س} .ءس$

$\frac{١}{س(س + ٢)} = \frac{ا}{س} + \frac{ب}{(س + ٢)}$

$١ = ا(س + ١) + ب س$

عند س = ٠

$١ = ا(س + ١) + ب س \leftarrow ا = ١$

عند س =-١

$\text{١} = \text{أ}(\text{س} + \text{١}) + \text{ب س} \leftarrow \text{ب} = -\text{١}$

$\therefore \int \frac{\text{١}}{\text{س}} \,\text{ءس} - \int \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{١}} \,\text{ءس}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + \text{١}) + \text{جـ}$

$\therefore -(\text{س} + \text{١})^{-\text{١}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + \text{١}) + \text{جـ}$

---

(١٠) $\int \frac{\text{جاس}}{(\text{٢جتا٢س} + \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{١})} \,\text{ءس}$

الحل :

$\text{٢جتا٢س} = \text{٤جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}$

$\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

بالتعويض

$\int \frac{\text{جاس}}{(\text{٤جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢} + \text{٢} - \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{١})} \,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{\text{جاس}}{(\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{١})} \,\text{ءس}$

نفرض ان $\text{ص} = \text{جتاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$\int \frac{\text{جاس}}{(\text{٢ص}^{\text{٢}} - \text{ص} - \text{١})} \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} \leftarrow \int \frac{-\text{١}}{(\text{٢ص} + \text{١})(\text{ص} - \text{١})} \,\text{ءص}$

$\frac{-\text{١}}{(\text{٢ص} + \text{١})(\text{ص} - \text{١})} = \frac{\text{أ}}{(\text{٢ص} + \text{١})} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص} - \text{١})}$

$-\text{١} = \text{أ}(\text{ص} - \text{١}) + \text{ب}(\text{٢ص} + \text{١})$

$\text{ص} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}}$

$-\text{١} = \text{أ}(\frac{-\text{١}}{\text{٢}} - \text{١}) \leftarrow \text{أ} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

$\text{ص} = \text{١}$

$$-١ = ٣\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-١}{٣}$$

$$\frac{٢}{٣}\int \frac{١}{(٢\text{ص}+١)}\,\text{ءص} - \frac{١}{٣}\int \frac{١}{(\text{ص}-١)}\,\text{ءص}$$

$$\therefore \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(٢\text{ص}+١) - \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{ص}-١)+\text{جـ}$$

$$\therefore \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(٢\text{جتاس}+١) - \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{جتاس}-١)+\text{جـ}$$

---

(١١) $\displaystyle\int_{٢}^{٣} \frac{(\text{س}+١)}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢}\,\text{ءس}$

الحل :

$$\frac{\text{س}+١}{\text{س}^{٢}+\text{س}-٢} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١}$$

$$\text{س}+١ = \text{أ}(\text{س}-١)+\text{ب}(\text{س}+٢)$$

عند س = ١

$$\text{س}+١ = \text{أ}(\text{س}-١)+\text{ب}(\text{س}+٢) \leftarrow ٢ = ٣\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{٢}{٣}$$

عند س = −٢

$$\text{س}+١ = \text{أ}(\text{س}-١)+\text{ب}(\text{س}+٢) \leftarrow -١ = -٣\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \frac{١}{٣}\int \frac{١}{\text{س}+٢}\,\text{ءس} + \frac{٢}{٣}\int \frac{١}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$\therefore \left[\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}+٢) + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}-١)\right]_{٢}^{٣}$$

$$\therefore \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(٥) + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(٢) - \left(\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(٤) + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}\,(١)\right)$$

تمارين ومسائل (١٢)

جد التكاملات التالية

(١) $\int \frac{\text{٦جتاس}}{(\text{٢جتاس} - ١)(\text{جتاس} + ١)} \, \text{ءس}$

(٢) $\int \frac{٢}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - ٢)(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - ٣)} \, \text{ءس}$

(٣) $\int_{١}^{٤} \frac{|١ - \text{س}|}{\text{س}^{٢} - \text{٥س} + ٦} \, \text{ءس}$

ثانيا اذا كانت درجة البسط اكبر او تساوي من درجة المقام

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{(\text{س} - ١)} \, \text{ءس}$

الحل :

$\int (\text{س} + ٢)\,\text{ءس} + \int \frac{٢}{(\text{س} - ١)} \, \text{ءس}$

$\therefore \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{٢س} + \text{٢لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - ١) + \text{جـ}$

$$
\begin{array}{r|l}
\text{س} + ٢ & \\
\hline
\cancel{\text{س}^{٢}} + \text{س} & \text{س} - ١ \\
- \cancel{\text{س}^{٢}} + \text{س} & \\
\hline
\cancel{٢}\text{س} & \\
- ٢\cancel{\text{س}} + ٢ & \\
\hline
٢ &
\end{array}
$$

(٢) $\int \frac{س^{٣} + س}{(س + ١)} ءس$

الحل :

اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$\int (س^{٣} - س + ٢) ءس - \int \frac{٢}{(س + ١)} ءس$

$\therefore \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} + ٢س - ٢ لـو_{هـ} (س + ١) + جـ$

(٣) $\int \frac{٢س^{٣} - س^{٢} + ٣س}{(س^{٢} - ٣س - ٤)} ءس$

الحل :

اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$\int (٢س + ٥) ءس + \int \frac{٢٦س + ٢٠}{(س^{٢} - ٣س - ٤)} ءس$

$\int \frac{٢٦س + ٢٠}{(س^{٢} - ٣س - ٤)} ءس$

$\frac{٢٦س + ٢٠}{(س^{٢} - ٣س - ٤)} = \frac{أ}{(س - ٤)} + \frac{ب}{(س + ١)}$

$٢٦س + ٢٠ = أ(س + ١) + ب(س - ٤)$

عند س = ٤

$٢٦س + ٢٠ = أ(س + ١) + ب(س - ٤) \leftarrow ١٢٤ = ٥أ \leftarrow أ = \frac{١٢٤}{٥}$

عند س =-١

$٢٦س + ٢٠ = أ(س + ١) + ب(س - ٤) \leftarrow -٦ = -٥أ \leftarrow أ = \frac{٦}{٥}$

$\therefore \frac{١٢٤}{٥}\int \frac{١}{(س-٤)}ءس + \frac{٦}{٥}\int \frac{١}{(س+١)}ءس$

$\therefore \frac{١٢٤}{٥}لـو_هـ(س-٤) + \frac{٦}{٥}لـو_هـ(س+١)+جـ$

$\therefore س^٢ + ٤س + \frac{١٢٤}{٥}لـو_هـ(س-٤) + \frac{٦}{٥}لـو_هـ(س+١)+جـ$

---

(٤) $\int \frac{س^٣ + ٤س - ٨}{(س^٢ - ٤)}ءس$

الحل :

اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$\int سءس + \int \frac{٨س - ٨}{(س^٢-٤)}ءس$

$\int \frac{٨س - ٨}{(س^٢-٤)}ءس$

$\frac{٨س-٨}{(س^٢-٤)} = \frac{أ}{(س-٢)} + \frac{ب}{(س+٢)}$

$٨س - ٨ = أ(س+٢) + ب(س-٢)$

عند س =-٢

$٨س - ٨ = أ(س+٢) + ب(س-٢) \leftarrow -٢٤ = -٤ب \leftarrow ب = ٦$

عند س =٤

$٨س - ٨ = أ(س+٢) + ب(س-٢) \leftarrow ٨ = ٤أ \leftarrow أ = ٢$

$\therefore ٢\int \frac{١}{(س-٢)}ءس + ٦\int \frac{١}{(س+٢)}ءس$

$\therefore \frac{س^٢}{٢} + ٢لـو_هـ(س-٢) + ٦لـو_هـ(س+٢)+جـ$

(٥) $\int \frac{\sqrt{س}}{(س-٤)} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^{٢} = س \leftarrow ٢ص\frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٢صءص = ءس$

$\int \frac{٢ص^{٢}}{(ص^{٢}-٤)} ءس$ اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$$\frac{٨}{(ص^{٢}-٤)} = \frac{ا}{(ص-٢)} + \frac{ب}{(ص+٢)}$$

$٨ = ا(ص+٢) + ب(ص-٢)$

عند ص =٢

$٨ = ا(ص+٢) + ب(ص-٢) \leftarrow ٨ = ٤ا \leftarrow ا = ٢$

عند ص =-٢

$٨ = ا(ص+٢) + ب(ص-٢) \leftarrow ٨ = -٤ب \leftarrow ب = -٢$

$\therefore ٢\int \frac{١}{(ص-٢)} ءص - ٢\int \frac{١}{(ص+٢)} ءص$

$\therefore ٢ص + ٢لـو_{هـ}(ص-٢) - ٢لـو_{هـ}(ص+٢) + جـ$

$\therefore ٢\sqrt{س} + ٢لـو_{هـ}(\sqrt{س}-٢) - ٢لـو_{هـ}(\sqrt{س}+٢) + جـ$

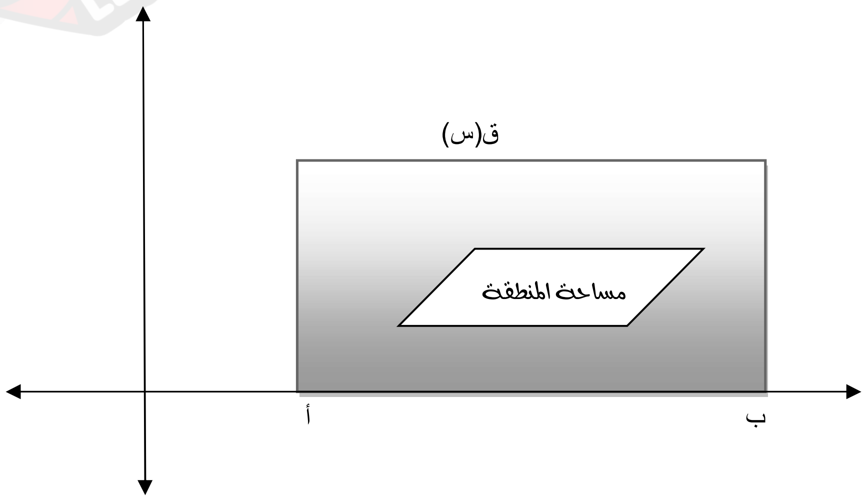
الفصل الثالث

تطبيقات التكامل

Integratio

اولا : حساب المساحة باستخدام التكامل

الدرس الأول:مساحة منطقة محصورة بين منحى ق(س) ومحور السينات



قاعدة

اذا كان ق اقترانا قابلا للتكامل في [أ،ب] فإن مساحة المنطقة (م) المحدودة بمنحنى ق ومحور السينات في [أ،ب] تعطى بالقاعدة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, ءس$$

الامثلة

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ن}(\text{س}) = ٢\text{س} - ١$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س}_١ = ٠$ ، $\text{س}_٢ = ١$

الحل :

$٢\text{س} - ١ = ٠ \leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}$

```
-------------------------------    ++++++++++++++++++
٠                 ١/٢                              ١
```

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} |١ - ٢\text{س}|\, \text{دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} |٢\text{س} - ١|\, \text{دس}$$

$$\left[\text{س} - \text{س}^٢\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + \left[\text{س}^٢ - \text{س}\right]_{\frac{١}{٢}}^{١}$$

$$\text{م} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} - (٠ - ٠) + ١ - ١ - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right)$$

$$\text{م} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} \leftarrow \text{م} = \frac{١}{٢} \text{ وحدة مساحة}$$

---

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^٢$ ومحور السينات والمستقيمين $\text{س}_١ = -٢$ ، $\text{س}_٢ = ٢$

الحل :

$\text{س}^٢ = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$

```
++++++++++++++++++    ++++++++++++++++++
-٢                ٠                  ٢
```

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٠} |\text{س}^٢|\, \text{دس} + \int_{٠}^{٢} |\text{س}^٢|\, \text{دس}$$

$$\left[\frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{٠}^{٢}$$

$م = -(-\frac{٨}{٣}) + \frac{٨}{٣} - ٠ \leftarrow م = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ ومحور السينات في [١،٥]

الحل :

$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠ \leftarrow (س - ١)(س - ٣) = ٠ \leftarrow س = ١ \;،\; س = ٣$

------------------------------ ++++++++++++++++++

١ ٣ ٥

$$م = \int_{١}^{٣} \left| س^٢ - ٤س + ٣ \right| ءس + \int_{٣}^{٥} \left| س^٢ - ٤س + ٣ \right| ءس$$

$$- \left[\left(\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} + ٣س\right) \right]_{١}^{٣} + \left[\left(\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} + ٣س\right) \right]_{٣}^{٥}$$

$$م = -(\frac{٢٧}{٣} - ١٨ + ٩) - (\frac{١}{٢} - ٢ + ٣) + \frac{١٢٥}{٣} - ٥٠ + ١٥ - (٩ - ١٨ + ٩)$$

$م = \frac{٢٤}{٣} = ٨$ وحدة مساحة

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) =$ جتا٢س ومحور السينات في $\left[\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢}\right]$

الحل :

جتا٢س $= ٠ \leftarrow ٢س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

$$م = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \left| \text{جتا٢س} \right| ءس$$

$$- \left[\frac{\text{جا٢س}}{٢} \right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \leftarrow -(\frac{\text{جا}\pi}{٢} - \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{٢}) = \frac{١}{٢}$$ وحدة مساحة .

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{٢} + ١$ ومحور السينات والمستقيمين

$س_{١} = -٢$ ، $س_{٢} = ٤$

الحل :

$س^{٢} + ١ = ٠$ لا تحلل في ح

$$م = \int_{-٢}^{٤} \left| س^{٢} + ١ \right| ءس$$

++++++++++++++++++ ++++++++++++++++++

٢- ٤

$$م = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + س \right]_{-٢}^{٤} \leftarrow \frac{٦٤}{٣} + ٤ - \left(\frac{-٨}{٣} + -٢ \right)$$

$$م = \left(\frac{٧٢}{٣} \right) + ٦ \leftarrow م = ٣٠ \text{ وحدة مساحة}$$

---

(٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $٣ - \sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات

الحل :

مجال الاقتران $[٠، \infty)$

$$٣ - \sqrt{س} = ٠ \leftarrow ٣ = \sqrt{س} \leftarrow س = ٩$$

$$م = \int_{٠}^{٩} \left| ٣ - \sqrt{س} \right| ءس$$

$$م = \int_{٠}^{٩} \left| ٣ - س^{\frac{١}{٢}} \right| ءس \leftarrow \left[(٣س - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}) \right]_{٠}^{٩}$$

$$\left[(٣س - \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}}) \right]_{٠}^{٩} \leftarrow (٢٧ - ١٨) - (٠ - ٠) = ٩ \text{ وحدة مساحة}$$

(٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤$ ومحور السينات

الحل :

$\text{س}^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow \text{س} = \pm ٢$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} \left| \text{س}^{٢} - ٤ \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٤\text{س} \right]_{-٢}^{٢} \leftarrow \frac{٨}{٣} - ٨ - \left(\frac{-٨}{٣} + ٨ \right)$$

$$\text{م} = \left| \left(\frac{-٣٢}{٣} \right) \right| \leftarrow \text{م} = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

اذا كانت الفترة غير معطاه ،
فيجب المساواة بالصفر من
اجل تحديد حدود التكامل

(٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤$ ومحور السينات

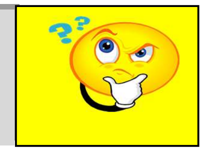
الحل :

$\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤ = ٠ \leftarrow \text{س} = ١$ ، $\text{س} = ٤$

$$\text{م} = \int_{١}^{٤} \left| \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤ \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٤\text{س} \right]_{١}^{٤} \leftarrow \frac{٦٤}{٣} - ٤٠ + ١٦ - \left(\frac{١}{٣} - \frac{٥}{٢} + ٤ \right)$$

$$\text{م} = \left| \left(\frac{-٩}{٢} \right) \right| \leftarrow \text{م} = \frac{٩}{٢} \text{ وحدة مساحة}$$



تمارين ومسائل (١٣)

١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين محنى $ق(س) = هـ^{س}$ والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = لـو_{هـ}٣$

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين محنى $ق(س) = ١ - س^{٣}$ والمستقيمات $ص = ٠$
$س = ٠$ ، $س = لـو_{هـ}٣$ ؟

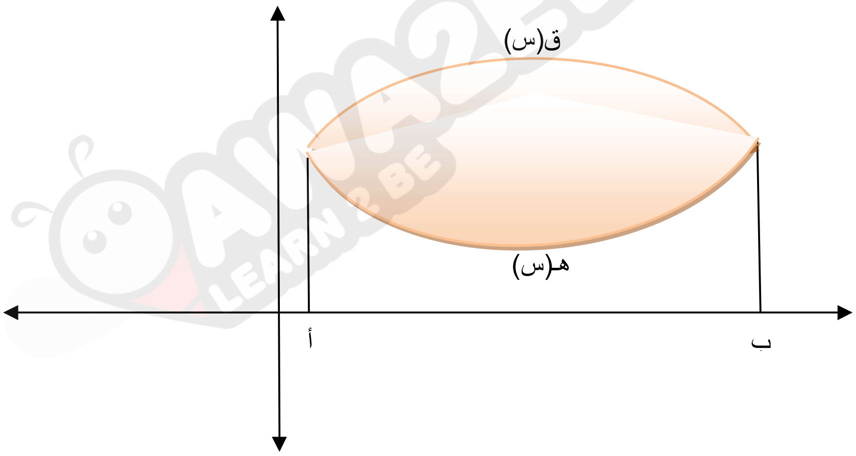
٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين محنى $ق(س) = \sqrt[٣]{س + ٢}$ والمستقيم $س = ٦$ وفوق محور السينات ؟

٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين محنى $ق(س) = \frac{١}{٢}(٩ - س^{٢})$ والمستقيمات
$ص = ٠$ ، $س = -٥$ ، $س = ٤$ وتقع اسفل محور السينات ؟

٥) صمم مهندس مدخل فندق على شكل منحنى معادلته $ص = ٤س - \frac{١}{٢}س^{٢}$ حيث س بالامتار فإذا غطى هذا المدخل بزجاج تكلفة المتر المربع الواحد ١٢ دينار كم تكون تكلفة الزجاج ؟

٦) باستخدام المساحة تحت منحنى الاقتران $ص = \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ جد $\int_{٠}^{٤} \sqrt{١٦ - س^{٢}}\, ءس$

الدرس الثاني : :مساحة منطقة محصورة بين منحنيين



قاعدة

اذا كان ق ، هـ اقترانا قابلا للتكامل في [أ،ب] فإن مساحة المنطقة المحدودة بين بمنحنييها تعطى بالقاعدة (م)

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)| \, ءس$$

الامثلة

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س ٢ – ٤ والمستقيم ص = ٣س.

الحل :

نفرض ان ق(س) = ص

س ٢ – ٤ = ٣س ← س ٢ – ٣س – ٤ = ٠ ← س = ٤　　س = –١ ،

$م = \int_{-1}^{4} |س^{٢} - ٣س - ٤| \, ءس \leftarrow \left[\frac{-س^{٣}}{٣} + ٣ \times \frac{س^{٢}}{٢} + ٤س \right]_{-1}^{4}$

$م = \frac{-٦٤}{٣} + ٣ \times \frac{١٦}{٢} + ١٦ - \left(\frac{١}{٣} + ٣ \times \frac{١}{٢} - ٤\right) = \frac{١٢٥}{٦}$

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س^{٢} - ٤س + ٤$ والمستقيم $هـ(س) = س$.

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$س^{٢} - ٤س + ٤ = س \leftarrow س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤ \quad ، \quad س = ١$

$م = \int_{1}^{4} |س^{٢} - ٥س + ٤| \, ءس \leftarrow \left[\frac{-س^{٣}}{٣} + ٥ \times \frac{س^{٢}}{٢} - ٤س \right]_{1}^{4}$

$م = \frac{-٦٤}{٣} + ٤٠ - ١٦ - \left(\frac{-١}{٣} + \frac{٥}{٢} - ٤\right) = \frac{٩}{٢}$ وحدة مساحة .

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٣س^{٢}$ ومنحنى $هـ(س) = ٦س$.

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$٣س^{٢} = ٦س \leftarrow ٣س^{٢} - ٦س = ٠ \leftarrow س = ٠ \quad ، س = ٢$

$م = \int_{0}^{2} |٣س^{٢} - ٦س| \, ءس \leftarrow \left[-س^{٣} + ٣س^{٢} \right]_{0}^{2} =$

$م = ١٢ - ٨ - (٠ - ٠) = ٤$ وحدة مساحة .

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = \frac{٤}{س}$ ومنحنى $هـ(س) = س$ في الفترة[١،٢] .

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$\frac{٤}{س} = س \leftarrow س^{٢} = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$م = \int_{١}^{٢} \left| \frac{٤}{س} - س \right| ءس \leftarrow \left[٤ لو_{هـ} س - \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٢}$

$م = ٤ لو_{هـ} ٢ - ٢ - (٤ لو_{هـ} ١ - \frac{١}{٢}) = ٤ لو_{هـ} ٢ - \frac{٣}{٢}$ وحدة مساحة .

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) =$ جاس ومنحنى $هـ(س) =$ جتاس في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢} \right]$

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

جاس = جتاس $\leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} |جتاس - جاس| ءس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} |جاس - جتاس| ءس$

$\left[جاس + جتاس \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \left[(-جتاس - جاس) \right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$م = جا\frac{\pi}{٤} + جتا\frac{\pi}{٤} - (جا٠ + جتا٠) - جتا\frac{\pi}{٢} - جا\frac{\pi}{٢} - (-جتا\frac{\pi}{٤} - جا\frac{\pi}{٤})$

$م = \frac{٤}{\sqrt{٢}} - ٢$ وحدة مساحة .

(٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = هـ^{س}$ ومنحنى $هـ(س) = هـ^{-س}$ والمستقيم $س = ٢$ في الربع الاول .

الحل :

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} \left| \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}} \right| \text{ءس}$$

$$\left[\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}} \right]_{٠}^{٢} = \left(\text{هـ}^{٢} + \text{هـ}^{-٢} - ٢ \right)$$ وحدة مساحة .

---

(٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص =جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $\left(٠،١\right)$ ، $\left(\frac{\pi}{٢}،٠\right)$

الحل :

نجد اولا معادلة المستقيم.

$$\text{م} = \frac{١-٠}{٠-\frac{\pi}{٢}} \leftarrow \text{م} = -\frac{٢}{\pi}$$

$$\text{ص} - ٠ = -\frac{٢}{\pi}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right) \leftarrow \text{ص} = -\frac{٢}{\pi}\text{س} + ١$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left| \text{جتاس} + \frac{٢}{\pi}\text{س} - ١ \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\text{جاس} + \frac{١}{\pi}\text{س}^{٢} - \text{س} \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \text{جا}\frac{\pi}{٢} + \frac{١}{\pi} \times \frac{\pi^{٢}}{٤} - \frac{\pi}{٢} = ١ - \frac{\pi}{٤}$$ وحدة مساحة .

تمارين ومسائل (١٤)

١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٤س^{٣} – ٣س ومنحنى هـ(س) = ٥س.

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص^{٢} = ٢٤ – ٨س ومحور السينات الواقعة في الربع الاول

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص$_{١}$ = ٦ – س^{٢} ، ص$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$س^{٢} والمستقيمين س = –١ ، س = ١؟

٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص$_{١}$ = ١٢ – س^{٢} ، ص$_{٢}$ = ٢س^{٢}

٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص$_{١}$ = $\sqrt{س}$ ، ص$_{٢}$ = س – ٢

٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص$_{١}$ = $\sqrt{٢س}$ ، ص$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$س^{٢}

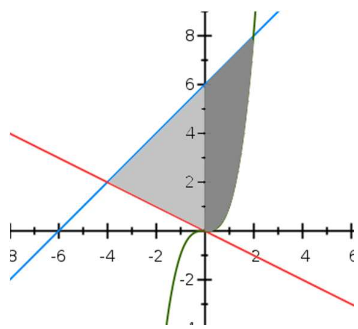
الدرس الثالث ::مساحة منطقة محصورة بين ثلاث منحنيات

ملاحظة مهمة جدا : عند حساب المساحة بين ثلاث منحنيات يجب اولا اجراء الرسم من اجل تحديد المنطقة ثم حساب المساحة

الامثلة

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $\text{ص} - \text{س} = ٦$ ، $\text{ص} = \text{س}^{٣}$ ، $٢\text{ص} + \text{س} = ٠$

الحل :



اولا ترتيب الاقترانات

$\text{ص}_{١} = \text{س} + ٦$ $\qquad$ $\text{ص}_{٢} = \text{س}^{٣}$ $\qquad$ $\text{ص}_{٣} = \frac{-١}{٢}\text{س}$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٢}$

$\text{س} + ٦ = \text{س}^{٣} \leftarrow \text{س} + ٦ = \text{س}^{٣} \leftarrow \text{س}^{٣} - \text{س} - ٦ \leftarrow \text{س} = ٢ \leftarrow (٢،٨)$

$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٣}$

$\text{س} + ٦ = \frac{-١}{٢}\text{س} \leftarrow ٣\text{س} + ١٢ = ٠ \leftarrow \text{س} = -٤ \leftarrow (-٤،٢)$

$\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{٣}$

$\text{س}^{٣} = \frac{-١}{٢}\text{س} \leftarrow ٢\text{س}^{٣} + \text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠ \leftarrow (٠،٠)$

$$\text{م} = \int_{-4}^{0} \left| \text{س} + 6 + \frac{1}{2}\text{س} \right| \text{ءس} + \int_{0}^{2} \left| -\text{س}^{3} + \text{س} + 6 \right| \text{ءس}$$

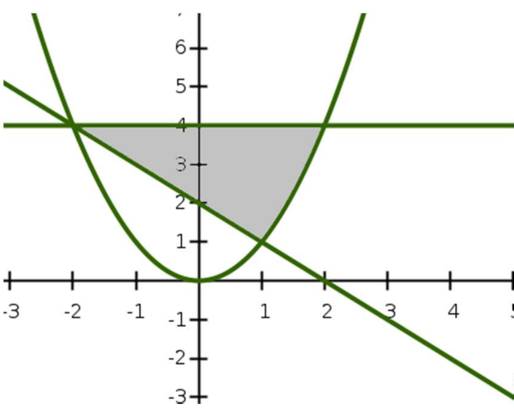
$$\text{م} = \int_{-4}^{0} \left| \frac{3}{2}\text{س} + 6 \right| \text{ءس} + \int_{0}^{2} \left| -\text{س}^{3} + \text{س} + 6 \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{3}{4}\text{س}^{2} + 6\text{س} \right]_{-4}^{0} - \left[\left(\frac{-\text{س}^{4}}{4} + \frac{\text{س}^{2}}{2} + 6\text{س} \right) \right]_{0}^{2}$$

م $= 22$ وحدة مساحة .

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{2}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = 2 - \text{س}$ ، $\text{ل}(\text{س}) = 4$

الحل :



اولا ترتيب الاقترانات

$\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{2}$　　　$\text{هـ}(\text{س}) = 2 - \text{س}$　　　$\text{ل}(\text{س}) = 4$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$\text{ن}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\text{س}^{2} = 2 - \text{س} \leftarrow \text{س}^{2} + \text{س} - 2 = 0 \leftarrow (\text{س} - 1)(\text{س} + 2) =$

$\text{س} = 1$ ، $\text{س} = -2$

$(1،1)$ ، $(-2،4)$

$\text{ن}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

$\text{س}^{2} = 4 \leftarrow \text{س} = \pm 2 \leftarrow (\text{س} - 2)(\text{س} + 2) = 0$

$(2،4)$ ، $(-2،4)$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

$2 - \text{س} = 4 \leftarrow \text{س} = -2 \leftarrow \text{س} = -2 \leftarrow (-2،4)$

$$م = \int_{-٢}^{١} |٤ - ٢ + س| \, ءس + \int_{١}^{٢} |٤ - س^{٢}| \, ءس$$

$$م = \int_{-٢}^{١} |٢ + س| \, ءس + \int_{١}^{٢} |٤ - س^{٢}| \, ءس$$

$$م = \left[٢س + \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{١} + \left[٤س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

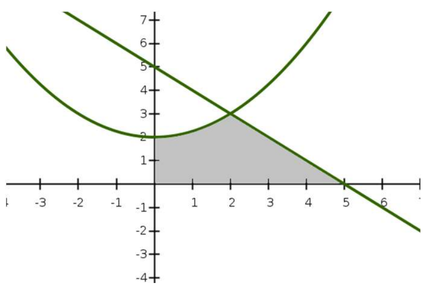
$$م = ٢ + \frac{١}{٢} - (-٤ + ٢) + ٨ - \frac{٨}{٣} - \left(٤ - \frac{١}{٣}\right)$$

$م = \frac{٣٧}{٦}$ وحدة مساحة .

---

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $ص + س = ٥$ ، $٤ص = س^{٢} + ٨$ ، $س = ٠$

$ص = ٠$



الحل :

اولا ترتيب الاقترانات

$ص_{١} = ٥ - س$ ، $ص_{٢} = \frac{س^{٢} + ٨}{٤}$ ، $ص_{٣} = ٠$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$ص_{١} = ص_{٢}$

$٥ - س = \frac{س^{٢} + ٨}{٤} \leftarrow س^{٢} + ٤س - ١٢ = ٠$

$س = ٢ \leftarrow (٢،٣)$ ، $س = -٦ \leftarrow (-٦،١١)$

$ص_{١} = ص_{٣}$

$٥ - س = ٠ \leftarrow س = ٥ \leftarrow (٥،٠)$

$ص_٢ = ص_٣$

$\frac{س^٢ + ٨}{٤} = ٠ \leftarrow س^٢ + ٨ = ٠$ لا تخلل في ح

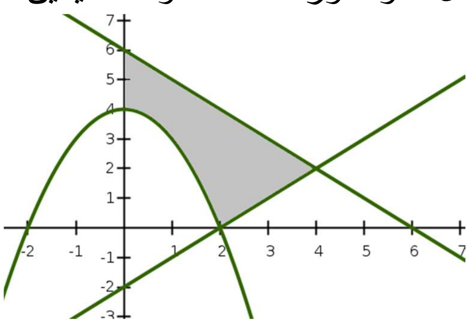
$م = \int_{٠}^{٢} \left| \frac{١}{٤} س^٢ + ٢ \right| ءس + \int_{٢}^{٥} \left| -س + ٥ \right| ءس$

$م = \left[\frac{١}{١٢} س^٣ + ٢س \right]_{٠}^{٢} + \left[\left(\frac{-س^٢}{٢} + ٥س \right) \right]_{٢}^{٥}$

$م = \frac{٢}{٣} + ٤ + \frac{-٢٥}{٢} + ٢٥ - (-٢ + ١٠)$

$م = \frac{٥٥}{٦}$ وحدة مساحة .

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٤ - س^٢$ ومحور الصادات والمستقيمين ، $ص = س - ٢$ ، $ص = ٦ - س$



الحل :

اولا ترتيب الاقترانات

$ق(س) = ٤ - س^٢$　　$ص_١ = س - ٢$　　$ص_٢ = ٦ - س$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$ق(س) = ص_١$

$٤ - س^٢ = س - ٢ \leftarrow س^٢ + س - ٦ = ٠$

$س = ٢ \leftarrow (٢،٠)$　،　$س = -٣ \leftarrow (-٣،-٥)$

$ق(س) = ص_٢$

$٤ - س^٢ = ٦ - س \leftarrow س^٢ - س + ٢ = ٠$ لا تخلل في ح

$ص_١ = ص_٢$

س − ٢ = ٦ − س ← ٢س = ٨ ← س = ٤ ← (٤، ٢)

$\text{م} = \int_{0}^{2} |\text{٦} - \text{س} - (\text{٤} - \text{س}^{2})|\,\text{ءس} + \int_{2}^{4} |\text{٦} - \text{س} - \text{س} + \text{٢}|\,\text{ءس}$

$\text{م} = \int_{0}^{2} |\text{س}^{2} - \text{س} + \text{٢}|\,\text{ءس} + \int_{2}^{4} |\text{٨} - \text{٢س}|\,\text{ءس}$

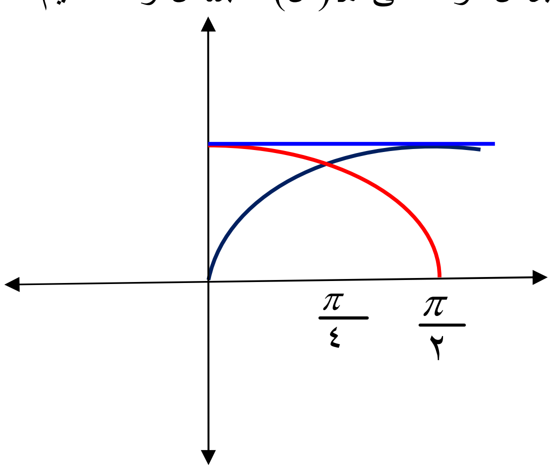
$\text{م} = \left[\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{3} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{2} + \text{٢س}\right]_{0}^{2} + \left[(\text{٨س} - \text{س}^{2})\right]_{2}^{4}$

$\text{م} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}} - \text{٢} + \text{٤} + + \text{٣٢} - \text{١٦} - (\text{١٦} - \text{٤})$

$\text{م} = \frac{\text{٢٦}}{\text{٣}}$ وحدة مساحة .

---

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) =جاس ومنحنى هـ(س) =جتاس والمستقيم ص = ١ في الفترة $\left[\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$



الحل :

اولا ترتيب الاقترانات

ق(س) =جاس　　هـ(س) =جتاس　　ص = ١

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

ق(س) = هـ(س)

جاس =جتاس ← س =← $\frac{\pi}{\text{٤}} \left(\frac{\pi}{\text{٤}}، \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\right)$

ق(س) = ص

جاس = ١ ← س = $\frac{\pi}{\text{٢}}$ ← $\left(\frac{\pi}{\text{٢}}، \text{١}\right)$

هـ(س) = ص

جتاس = ١ ← س = ٠ ← (١،٠)

$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} |١ - \text{جتاس}|\, ءس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} |١ - \text{جاس}|\, ءس$$

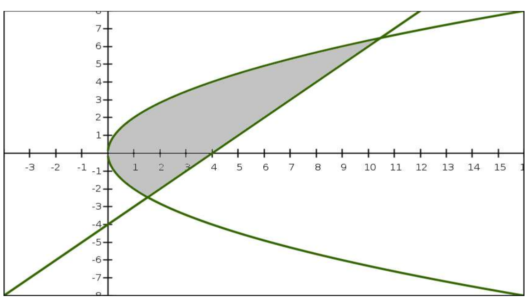
$$\left[س - \text{جاس}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \left[(س + \text{جتاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$م = \frac{\pi}{٤} - \text{جا}\frac{\pi}{٢} - (٠ - ٠) + \frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\frac{\pi}{٢}$$

$$م = \frac{\pi}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}$$ وحدة مساحة .

---

(٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص^{٢} = ٤س$ والمستقيم، س − ص = ٣ .



الحل :

$ص^{٢} = ٤س$ ← ص = $\pm ٢\sqrt{س}$

اولا ترتيب الاقترانات

$ص_{١} = ٢\sqrt{س}$　　$ص_{٢} = -٢\sqrt{س}$　　$ص_{٣} = س - ٣$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$ص_{١} = ص_{٢}$

$٢\sqrt{س} = -٢\sqrt{س}$ ← $٤\sqrt{س} = ٠$ ← س = ٠ ← (٠،٠)

$ص_{١} = ص_{٣}$

$٢\sqrt{س} = س - ٣$ ← $٤س = س^{٢} - ٦س + ٩$

$س^{٢} - ١٠س + ٩ = ٠$ ← س = ١ ، س = ٩

(٩،٦) ، ،(١،٢)

$\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{٣}$

$-٢\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ٣ \leftarrow ٤\text{س} = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩$

$\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٩ = ٠ \leftarrow \text{س} = ١ \text{ ، } \text{س} = ٩$

(٩،٦) ، (١،٢)

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} \left| ٢\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}} \right| \text{ءس} + \int_{١}^{٩} \left| ٢\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٣ \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} \left| ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} \right| \text{ءس} + \int_{١}^{٩} \left| ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{س} + ٣ \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} \left| ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} \right| \text{ءس} + \int_{١}^{٩} \left| ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{س} + ٣ \right| \text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\frac{٨}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١} + \left[\left(\frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٣\text{س} \right) \right]_{١}^{٩}$$

$$\text{م} = \left[\frac{٨}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} \right]_{٠}^{١} + \left[\left(\frac{٤}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٣\text{س} \right) \right]_{١}^{٩}$$

$$\frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٣}\sqrt{٩^{٣}} - \frac{٨١}{٢} + ٢٧ - \left(\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣ \right) = \frac{٦٤}{٣}$$ وحدة مساحة .

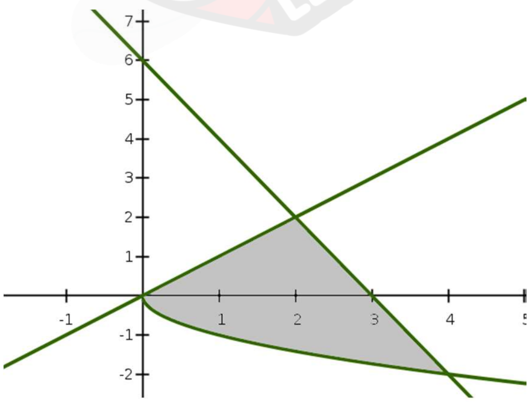
تمارين ومسائل (١٥)

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ١٦ − س^{٢} ، و
هـ(س) = ٢س + ٨ ومحور السينات .

(٢) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الاقترانات
ق(س) = س^{٢} − ١ ، هـ(س) = ٥ − س ، هـ(س) = ١ − س .

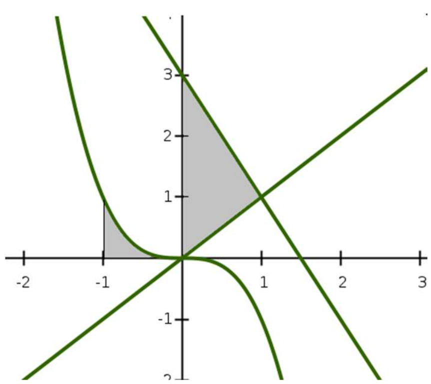
(٣) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث:

ق(س) = − $\sqrt{\text{س}}$ ، هـ(س) = س ، ل(س) = ٦ − ٢س



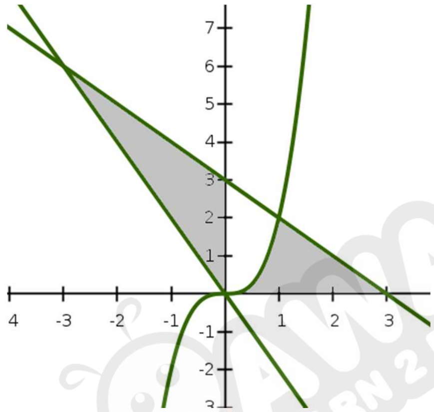
(٤) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث:

ق(س) = −س^{٣} ، هـ(س) = س ، ل(س) = ٣ − ٢س



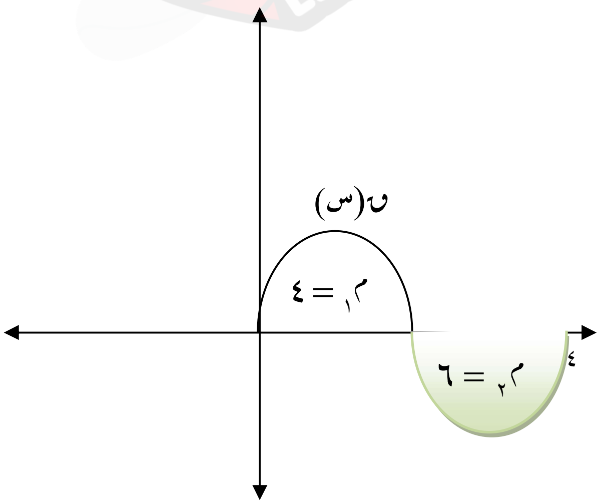
(٥) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبينتين في الشكل المجاور حيث:

ق(س) = ٢س ^{٣} ، هـ(س) = ٣ − س ، ل(س) = −٢س



(٦) من خلال الشكل المجاور جد :

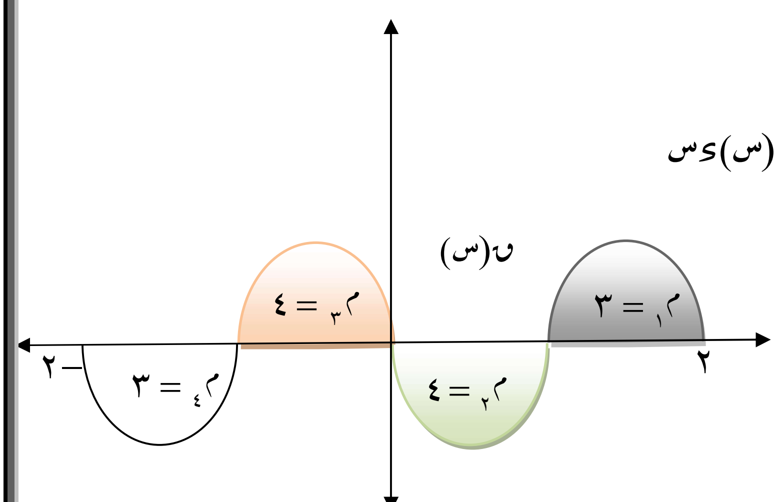
(أ) المساحة على [٠،٤]		(ب) $\int_{٠}^{٤}$ ق(س)ءس



(٧) من خلال الشكل المجاور جد :

(أ) المساحة على [−٢،٢]		(ب) $\int_{-٢}^{٢}$ ق(س)ءس

(ج) المساحة على [−١،٢]



ثانيا : المعادلات التفاضلية

Adel Awwad

تعريف

المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات .

حل المعادلة : يعني ايجاد علاقة تربيط بين المتغير س و المتغير ص بحيث تحقق المعادلة.

الامثلة

جد حل المعادلات التفاضلية التالية :

(١) $\frac{دص}{دس} = \frac{س^{٢}}{ص}$

الحل :

الضرب التبادلي

$ص\,دص = س^{٢}\,دس \leftarrow \int ص\,دص = \int س^{٢}\,دس$

$\frac{ص^{٢}}{٢} = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ \leftarrow ص^{٢} = \frac{٢س^{٣}}{٣} + جـ$

---

(٢) $\frac{دص}{دس} = \frac{س^{٢}}{١+ص^{٢}}$

الحل :

الضرب التبادلي

$(١+ص^{٢})\,دص = س^{٢}\,دس \leftarrow \int (١+ص^{٢})\,دص = \int س^{٢}\,دس$

ص + $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ +جـ

(٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{(١-٢\text{س})}{\text{ص}^{٢}}$

الحل :

الضرب التبادلي

ص^{٢}ءص = (١ - ٢س)ءس ← ∫ص^{٢}ءص = ∫(١ - ٢س)ءس

$\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ = س - س^{٢}+جـ ← ص^{٣} = ٣س - ٣س^{٢}+جـ

(٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{جتاس}}{٢\text{ص}}$

الحل :

الضرب التبادلي

٢صءص =جتاسءس ← ∫٢صءص = ∫جتاسءس

ص^{٢} =جاس+جـ

(٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =قا^{٢}٣س

الحل :

الضرب التبادلي

ءص =قا^{٢}٣سءس ← ∫ءص = ∫قا^{٢}٣سءس

ص = $\frac{\text{ظا٣س}}{٣}$+جـ

(٦) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{٢ص}$

الحل :

الضرب التبادلي

$$\frac{\text{دص}}{\text{جتا}^{٢}\text{٢ص}} = \text{جتا}^{٢}\text{س دس} \leftarrow \int \text{قا}^{٢}\text{٢ص دص} = \int \text{جتا}^{٢}\text{س دس}$$

$$\frac{\text{ظا٢ص}}{٢} = \frac{١}{٢}\int (١+\text{جتا٢س})\text{دس} \leftarrow \frac{\text{ظا٢ص}}{٢} = \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{\text{جا٢س}}{٢}) + \text{جـ}$$

(٧) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}^{٢}\text{جاس} = ٠$

الحل :

الضرب التبادلي

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}^{٢}\text{جاس} = ٠ \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ص}^{٢}\text{جاس} \leftarrow \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{٢}} = \int -\text{جاس دس}$$

$$\int \text{ص}^{-٢}\text{دص} = \int -\text{جاس دس} \leftarrow \frac{\text{ص}^{-١}}{-١} = \text{جتاس} + \text{جـ}$$

$$\therefore \frac{١}{\text{ص}} = -\text{جتاس} + \text{جـ} \leftarrow \text{ص} = -\text{قاس} + \text{جـ}$$

(٨) $\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ص}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٦\text{س} - ١ = ٠$

الحل :

الضرب التبادلي

$$\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ص}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - ٦\text{س} \leftarrow \int \sqrt{\text{ص}}\,\text{دص} = \int (٢ - ١٢\text{س})\text{دس}$$

$$\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\text{دص} = \int (٢ - ١٢\text{س})\text{دس} \leftarrow \frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} = (٢\text{س} - ٦\text{س}^{٢}) + \text{جـ}$$

(٩) ٣ص^{٢} ظا^{٢}س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

الحل :

الضرب التبادلي

٣ص^{٢} ظا^{٢}س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١ ← ٣ص^{٢} ءص = $\frac{\text{ءس}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

∫٣ص^{٢} ءص = ∫$\frac{\text{ءس}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$ ← ص^{٣} = ∫ظتا^{٢}س ءس ← ∫(قتا^{٢}س − ١)ءس

∫(قتا^{٢}س − ١)ءس = −ظتاس − س + جـ

(١٠) جا٢س ءس + جتا٣ص ءص = ٠

الحل :

ترتيب

∫جا٢س ءس = ∫−جتا٣ص ءص ← $\frac{\text{−جتا٢س}}{٢}$ = $\frac{\text{−جا٣ص}}{٣}$ + جـ

(١١) جتا^{٢}ص ءس = جا^{٢}٥س ءص

الحل :

$\frac{\text{ءس}}{\text{جا}^{٢}\text{٥س}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{جتا}^{٢}\text{ص}}$ ← ∫قتا^{٢}٥س ءس = ∫قا^{٢}ص ءص

$\frac{\text{−ظتا٥س}}{٥}$ = ظاص + جـ

(١٢) ءس + ٣ءص = جتاس ءس

الحل :

ءس − جتاس ءس = − ٣ءص ← ءس(١ − جتاس) = − ٣ءص

∫(١ − جتاس) ءس = ∫− ٣ءص ← س − جاس = −٣ص + جـ

(١٣) $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، س،ص> ٠

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} \leftarrow \int \sqrt{ص}\,ءص = \int \sqrt{س}\,ءس$

$\int ص^{\frac{1}{2}}\,ءص = \int س^{\frac{1}{2}}\,ءس \leftarrow \frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} +جـ$

(١٤) $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{1+س+ص+سص}$ ، س،ص> ٠

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{(1+س)+ص(1+س)}$

$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{(1+س)(1+ص)} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \sqrt{(1+س)}\sqrt{(1+ص)}$

$\frac{ءص}{\sqrt{(1+ص)}} = \sqrt{(1+س)}\,ءس \leftarrow \int \frac{ءص}{\sqrt{(1+ص)}} = \int \sqrt{(1+س)}\,ءس$

$\int (1+ص)^{-\frac{1}{2}}\,ءص = \int (1+س)^{\frac{1}{2}}\,ءس \leftarrow 2(1+ص)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(1+ص)^{\frac{3}{2}} +جـ$

تمارين ومسائل (١٦)

(١) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص^{٢} + ٢سص}{س^{٢}}$$ *************

(٢) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س + ص}{س}$$ ********

(٣) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{س - هـ^{-س}}{ص - هـ^{ص}}$$

(٤) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$سءس + صهـ^{-س}ءص = ٠$$

تطبيقات المعادلات التفاضلية

اولا : تطبيقات هندسية

الامثلة

(١) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{\text{جاس}-\text{قا}^{٢}\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}}$ جد قاعدة العلاقة علما ان النقطة $\left(\frac{\pi}{٤},٤\right)$ تقع على منحناها.

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=\frac{\text{جاس}-\text{قا}^{٢}\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}} \leftarrow \int ٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص}=\int(\text{جاس}-\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{ص}^{٣}=-\text{جتاس}-\text{ظاس}+\text{جـ}$$

$$(٤)^{٣}=-\text{جتا}\frac{\pi}{٤}-\text{ظا}\frac{\pi}{٤}+\text{جـ} \leftarrow \text{جـ}=٦٥+\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ص}^{٣}=-\text{جتاس}-\text{ظاس}+٦٥+\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

---

(٢) جد معادلة المنحنى الذي ميله عند النقطة (س،ص) يساوي $٣\text{س}\text{ص}^{٢}$ اذا علمت ان المنحنى يمر بالنقطة $\left(٠،\frac{١}{٢}\right)$.

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=٣\text{س}\text{ص}^{٢} \leftarrow \int\frac{\text{دص}}{\text{ص}^{٢}}=\int ٣\text{س}\,\text{دس}$$

$\int ص^{-٢} ءص = \int ٣س ءس \leftarrow -ص^{-١} = \frac{٣س^٢}{٢} + جـ$

$\frac{-١}{ص} = \frac{٣س^٢}{٢} + جـ \leftarrow -٢ = جـ$

(٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (س،ص) يساوي $\sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، س،ص> ٠ جد قاعدة الاقتران ق علما ان ق(٠) = ٣.

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{\frac{س}{ص}} \leftarrow \int \sqrt{ص} ءص = \int \sqrt{س} ءس \leftarrow \int ص^{\frac{١}{٢}} ءص = \int س^{\frac{١}{٢}} ءس$

$\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ \leftarrow \frac{٢}{٣} \sqrt{ص^٣} = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} + جـ$

$\frac{٢}{٣} \sqrt{٢٧} = \frac{٢}{٣} \sqrt{٠} + جـ \leftarrow جـ = \frac{٢}{٣} \sqrt{٢٧}$

$\frac{٢}{٣} \sqrt{ص^٣} = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} + \frac{٢}{٣} \sqrt{٢٧}$

(٤) جد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (-٢،٨) وميل المماس له عند النقطة (س،ص) يساوي (٣س - ٢)(س + ٢) .

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = (٣س - ٢)(س + ٢) \leftarrow \int ءص = \int (٣س - ٢)(س + ٢) ءس$

$\int ءص = \int (٣س^٢ + ٤س - ٤) ءس \leftarrow ص = س^٣ + ٢س^٢ - ٤س + جـ$

$٨ = ٨ + ٨ - ٨ + جـ \leftarrow جـ = ٠$

$\therefore ص = س^٣ + ٢س^٢ - ٤س$

(٥) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند اي نقطة (س،ص) هو $ق'(س) = ٦س^٢ - ٣٠س + ٣٦$ جد معادلة هذا المنحنى علما ان له قيمة عظمى محلية مقدارها ٢٨ .

الحل :

$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^٢ - ٣٠س + ٣٦ \leftarrow \int ءص = \int (٦س^٢ - ٣٠س + ٣٦) ءس$

$ص = ٢س^٣ - ١٥س^٢ + ٣٦س + جـ$

عند $س_١$ قيمة عظمى محلية فإن $ق'(س_١) = ٠$

$٦س^٢ - ٣٠س + ٣٦ = ٠ \leftarrow س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

$\therefore س_١ = ٢ ، ٣$

$ق''(س) = ١٢س - ٣٠$

$ق''(٢) = ١٢ \times ٢ - ٣٠ = -٦ < ٠$ قيمة عظمى محلية

$ق''(٣) = ١٢ \times ٣ - ٣٠ = ٦ > ٠$ قيمة صغرى محلية

$٢٨ = ٢ \times ٨ - ١٥ \times ٤ + ٣٦ \times ٢ + جـ \leftarrow \therefore جـ = ٠$

تمارين ومسائل (١٧)

(١) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي ٢س ص فجد قيمة (قيم) ص عندما س = ٣ علما ان منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٢،١)

(٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{-ص(س^{٢}-١)}{س^{٢}}$ فجد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة (١،-١)

(٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{هـ^{-ص}(س+٤)(س-٣)}{(س^{٢}-٣س)}$ فجد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة (١،٠)

(٤) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{(١-جتا^{٢}س)}$ فجد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٤}،٠\right)$

ثانيا : تطبيقات فيزيائية

الامثلة

(١) قذف جسم راسيا للاعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره -١٠م/ث^{٢} اذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠ م فجد أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم .

الحل :

ع(٠) = ٤٠ م / ث ، ت(ن) = -١٠ م / ث^{٢} ، ف(١) = ٨٠ م

ت(ن) = -١٠ م / ث^{٢}

ت(ن) = ٠ ← دع/دن = -١٠ ← ∫دع = ∫-١٠ دن

ع = -١٠ن + جـ ← ع(٠) = ٤٠ ← جـ = ٤٠

دف/دن = -١٠ن + ٤٠ ← ∫دف = ∫(-١٠ن + ٤٠)دن

ف = (-٥ن^{٢} + ٤٠ن) + جـ ← ف(١) = (-٥ + ٤٠) + جـ ← جـ = ٤٥

لكن عند اقصى ارتفاع ع(ن) = ٠ ← ن = ٤

ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥ ← ف(٤) = ١٢٥م

(٢) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت =(٦ن+٤) م/ث^{٢} فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة علما ان السرعة الابتدائية للجسم ٢ م / ث وانه قطع مسافة (٢١) م في اول ٢ ثانية من بدء الحركة .

الحل :

ت(ن) = ٦ن + ٤ ← ∫دع = ∫(٦ن + ٤)دن ← ع = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ

ع(٠) = ٠ + ٠ + جـ ← جـ = ٢

∫ءع = ∫(٣ن^{٢} + ٤ن + ٢)ءن ← ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن+جـ

٢١ = ٨ + ٨ + ٤+جـ ← جـ = ١

ف(٣) = ٢٧ + ١٨+٦+١ ← ف(٣) = ٥٢

تمارين ومسائل (١٨)

(١) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = ٤ م/ث^{٢}، اذا كانت سرعة الجسم ١٣م/ث جد سرعته الابتدائية .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٢) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = (٢ ١ن٢ – ٢)م/ث٢، فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٥ ثواني من بدء الحركة علما ان السرعة الابتدائية للجسم ٢٨ م / ث وانه قطع مسافة (٢٨) م في اول ٣ ثانية من بدء الحركة .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

(٣) يتحرك جسم بحيث تسارعه ت = ٢√ع ، ع > ٠، وكانت سرعته الابتدائية ٩م/ث وكانت المسافة عند ن = ٤ ث ، تساوي ٨٠ م جد المسافة عند ن = ٣ ثانية .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثا : تطبيقات عامة

(١) الة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار اذا علمت ان قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{\text{دق}}{\text{دن}} = \frac{-٥٠٠}{(\text{ن}+١)^{٢}}$ حيث ق : قيمة الالة بعد ن سنة من شرائها فاحسب قيمة هذه الالة بعد ٣ سنوات من شرائها .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٢) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = (٠,٠٢٥) \times \text{ع}$ حيث ع : عدد السكان ن: الزمن بالسنوات ، اذا علمت ان عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام ٢٠١٥ فجد عدد سكانها بعد ٤٠ عام .

الحل:

....

....

....

....

....

....

(٣) يتكاثر نوع من الحشرات وفق المعادلة $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٤}\text{ل}$ ، حيث ل : عدد الحشرات ، اذا كان ل = ٢٠٠ حشرة عند البدء جد قيمة ل عندما ن = ٨ ثانية معتبرا ان $\text{هـ}^{٢} = ٧,٥$

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

(٣) يتناقص حجم الماء في بركة سباحة بمعدل ٤٠% من حجمها وكان حجم الماء الحالي هو $\text{هـ}^{٣}$ ، جد حجم الماء بعد ٥ سنوات .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٤) يزداد عدد السمك في بركة سباحة بمعدل ٢٠% من عددها يوميا فإذا كان عدد السمك الان هو ١٠٠ سمكة فكم يصبح عدد السمك بعد ٥٠ يوم .

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

إنهت بحمد الله