الفهرس

الفصل الاول:القطوع المخروطية ....(٢)

القطع المخروطي..(٢)

المحل الهندسي..(٣)

الدائرة ....(١١)

القطع المكافئ..(٢٦)

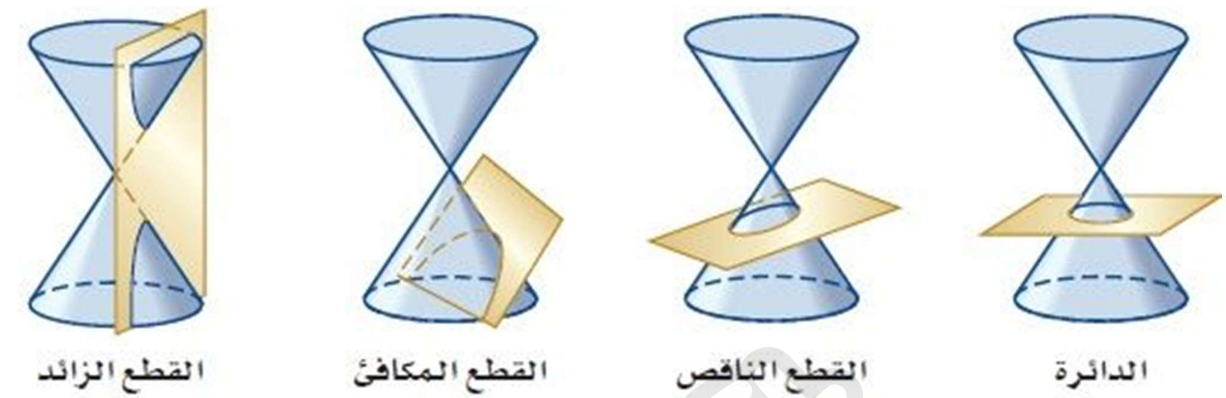
القطع الناقص...(٤٢)

القطع الزائد...(٦١)

ايجاد معادلة القطوع المخروطية من خلال الاشكال.....................................(٨٢)

الفصل الاول القطوع المخروطية CONIC SECTIONS

أولا القطع المخروطي Conic sections



(١) اذا كان المستوى القاطع عموديا على المحور ولا يمر بالراس فإن الشكل الناتج يسمى دائرة .

(٢) اذا كان المستوى القاطع مائلا قليلا على المحور ويقطع احد المخروطين دون الاخر فإن الشكل الناتج يسمى قطعا ناقصا.

(٣) اذا زاد الميل القاطع ليصبح موازيا لراسم المخروط ويقطع احد المخروطين دون الاخر فإن الشكل الناتج يسمى قطعا مكافئا .

(٤) اذا قطع المستوى فرعي المخروط كان القطع لا يحتوي على نقطة الراس فإن الشكل الناتج يسمى قطعا زائدا .

ثانيا المحل الهندسي Locus

Adel Awwad

تعريف

يسمى المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة بالمحل الهندسي لهذه النقطة .

قوانين مهمة جدا :

(١) قانون المسافة بين نقطتين

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

(٢) قانون بعد نقطة عن خط مستقيم

$$ف = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

الامثلة

(١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٣ وحدات عن النقطة م (٣،−٢)؟

الحل :

نجد البعد بين النقطتين م (٣،−٢) ، ن (س،ص)

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$٣ = \sqrt{(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢}$$

$$\therefore (س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٩$$

(٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٤ وحدات عن النقطة م (١،٥)؟

الحل :

نجد البعد بين النقطتين م(١،٥) ، ن(س،ص)

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$٤ = \sqrt{(س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢}$$

$$\therefore (س - ١)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$$

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٣ وحدات عن المستقيم ٤س − ٣ص = ٣ وتمر اثناء حركتها بالنقطة ب(٠،٤)؟

الحل:

نجد البعد بين النقطة ب(٠،٤) ، والمستقيم ٤س − ٣ص = ٣

$$ف = \frac{|أس_١ + بص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

$$٣ = \frac{|٤س - ٣ص - ٣|}{\sqrt{١٦ + ٩}} \leftarrow ١٥ = |٤س - ٣ص - ٣|$$

$$١٥ = |٤س - ٣ص - ٣|$$

اما $١٥ = ٤س - ٣ص - ٣ \leftarrow ٤س - ٣ص = ١٨$ تهمل لانها لا تحقق النقطة ب(٠،٤)

او $-١٥ = ٤س - ٣ص - ٣ \leftarrow ٤س - ٣ص = -١٢$ ✓✓

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٤ وحدات عن المستقيم س = ٤ وتمر اثناء حركتها بالنقطة ب(٨،٠)

الحل:

$$ف = \frac{|أس_١ + بص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

$٤ = \frac{|\text{س} - ٤|}{\sqrt{١}} \leftarrow ٤ = |\text{س} - ٤|$

$٤ = |\text{س} - ٤|$

إما $٤ = \text{س} - ٤ \leftarrow \text{س} = ٨$ ✓✓ تهمل لانها لا تحقق النقطة ب(٠،٤)

او $-٤ = \text{س} - ٤ \leftarrow \text{س} = ٠$ تهمل لانها لا تحقق النقطة ب(٨،٠)

(٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة (٢،−٢) مساويا دائما بعدها عن المستقيم س = ٤ .

الحل

$\sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢} = |\text{س} - ٤|$

$\therefore (\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ = (\text{س} - ٤)^٢ \leftarrow \cancel{\text{س}^٢} - ٤\text{س} + ٤ + (\text{ص} + ٢)^٢ = \cancel{\text{س}^٢} - ٨\text{س} + ١٦$

$\therefore (\text{ص} + ٢)^٢ = -٤\text{س} + ١٢ \leftarrow (\text{ص} + ٢)^٢ = -٤(\text{س} - ٣)$

(٦) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة (−١،٢) مساويا دائما بعدها عن المستقيم ص = ٣ .

الحل

$\sqrt{(\text{س} + ١)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢} = |\text{ص} - ٣|$

$\therefore (\text{س} + ١)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ = (\text{ص} - ٣)^٢ \leftarrow (\text{س} + ١)^٢ + \cancel{\text{ص}^٢} - ٤\text{ص} + ٤ = \cancel{\text{ص}^٢} - ٦\text{ص} + ٩$

$\therefore (\text{س} + ١)^٢ = -٢\text{ص} + ٥ \leftarrow (\text{س} + ١)^٢ = -٢(\text{ص} - \frac{٥}{٢})$

(٧) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة (−١،١) مساويا دائما بعدها عن المستقيم س = ٢ ؟.

الحل

$\sqrt{(\text{س} + ١)^٢ + (\text{ص} - ١)^٢} = |\text{س} - ٢|$

$\therefore (\text{س}+١)^٢ + (\text{ص}-١)^٢ = (\text{س}-٢)^٢ \leftarrow \cancel{\text{س}^٢} + ٢\text{س} + ١ + (\text{ص}-١)^٢ = \cancel{\text{س}^٢} - ٤\text{س} + ٤$

$\therefore (\text{ص}-١)^٢ = -٦\text{س} + ٣ \leftarrow (\text{ص}-١)^٢ = -٦(\text{س} - \frac{١}{٢})$.

(٨) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين (٣،٠) (−٣،٠)؟

الحل

$\sqrt{(\text{س}-٣)^٢ + \text{ص}^٢} = \sqrt{(\text{س}+٣)^٢ + \text{ص}^٢}$ تربيع الطرفين

$\therefore (\text{س}-٣)^٢ + \cancel{\text{ص}^٢} = (\text{س}+٣)^٢ + \cancel{\text{ص}^٢} \leftarrow \cancel{\text{س}^٢} - ٦\text{س} + \cancel{٩} = \cancel{\text{س}^٢} + ٦\text{س} + \cancel{٩}$

$\therefore ١٢\text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠$

(٩) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين (٠،٤) (٠،−٤)؟

الحل

$\sqrt{\text{س}^٢ + (\text{ص}-٤)^٢} = \sqrt{\text{س}^٢ + (\text{ص}+٤)^٢}$ تربيع الطرفين

$\therefore \cancel{\text{س}^٢} + (\text{ص}-٤)^٢ = \cancel{\text{س}^٢} + (\text{ص}+٤)^٢ \leftarrow \cancel{\text{ص}^٢} - ٨\text{ص} + \cancel{١٦} = \cancel{\text{ص}^٢} + ٨\text{ص} + \cancel{١٦}$

$١٦\text{ص} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٠$

(١٠) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تتحرك على بعدين متساويين من المحورين الاحداثيين .

الحل :

المقصود بالمحورين الاحداثيين ، محور السينات ومحور الصادات ؟

$|\text{س}| = |\text{ص}|$

$\text{ص} = \text{س} \quad ، \quad \text{ص} = -\text{س}$

(١١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ى(س،ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين $ب_١(١،٠)$ $ب_٢(-١،٠)$ مساويا دائما ٤ وحدات ؟

الحل

$ىب_١ + ىب_٢ = ٤$ وحدات

$$\sqrt{(س-١)^٢+ص^٢}+\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}=٤ \Leftarrow \sqrt{(س-١)^٢+ص^٢}=٤-\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}$$

$$\sqrt{(س-١)^٢+ص^٢}=٤-\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}$$

تربيع الطرفين

$$(س-١)^٢+ص^٢=١٦-٨\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}+((س+١)^٢+ص^٢)$$

$$(س-١)^٢+\cancel{ص^٢}=١٦-٨\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}+((س+١)^٢+\cancel{ص^٢})$$

$$(س-١)^٢=١٦-٨\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}+(س+١)^٢$$

$$\cancel{س^٢}-٢س+\cancel{١}=١٦-٨\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}+\cancel{س^٢}+٢س+\cancel{١}$$

$$٨\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}=٤س+١٦ \Leftarrow ٢\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}=س+٤$$

$$٢\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}=س+٤$$

تربيع الطرفين

$$٤\left(س^٢+٢س+١+ص^٢\right)=س^٢+٨س+١٦ \Leftarrow ٤س^٢+٨س+٤+٤ص^٢=س^٢+٨س+١٦$$

$$٣س^٢+٤+٤ص^٢=١٦ \Leftarrow ٣س^٢+٤ص^٢=١٢$$

$$\therefore \frac{س^٢}{٤}+\frac{ص^٢}{٣}=١$$

---

(١٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ى(س،ص) بحيث يكون الفرق المطلق من بعدي النقطة ى(س،ص) عن النقطتين $ب_١(٠،٤)$ $ب_٢(٠،-٤)$ مساويا دائما ٤ وحدات ؟

الحل

$|ىب_١ - ىب_٢| = ٤$ وحدات

$$\sqrt{س^2+(ص-٤)^2}-\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}=٤ \leftarrow \sqrt{س^2+(ص-٤)^2}=٤+\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}$$

$$\sqrt{س^2+(ص-٤)^2}=٤+\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}$$ تربيع الطرفين

$$\cancel{س^2}+(ص-٤)^2=١٦+٨\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}+\cancel{س^2}+(ص+٤)^2$$

$$\cancel{س^2}-٨ص+\cancel{١٦}=١٦+٨\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}+\cancel{س^2}+٨ص+\cancel{١٦}$$

$$٨\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}=١٦ص+١٦ \leftarrow \sqrt{س^2+(ص+٤)^2}=(٢ص+٢)$$

$$\sqrt{س^2+(ص+٤)^2}=(٢ص+٢)$$ تربيع الطرفين

$$س^2+(ص+٤)^2=(٤ص^2+٨ص+٤) \leftarrow س^2+ص^2+\cancel{٨ص}+١٦=(٤ص^2+\cancel{٨ص}+٤)$$

$$س^2+ص^2+١٦=(٤ص^2+٤) \leftarrow س^2-٣ص^2=-١٢$$

$$\therefore \frac{ص^2}{٤}-\frac{س^2}{١٢}=١$$

(١٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن المستقيم س = ٩ مساويا دائما ٣ امثال بعدها عن عن النقطة (١،٠)؟

الحل

$$٣\sqrt{(س-١)^2+ص^2}=|س-٩|$$ تربيع الطرفين

$$\therefore ٩((س-١)^2+ص^2)=(س-٩)^2 \leftarrow ٩(س^2-٢س+١+ص^2)=س^2-١٨س+٨١$$

$$(٩س^2-\cancel{١٨س}+٩+٩ص^2)=س^2-\cancel{١٨س}+٨١ \leftarrow ٨س^2+٩ص^2=٧٢.$$

$$\therefore \frac{س^2}{٩}+\frac{ص^2}{٨}=١$$

(١٤) ا،ب،جـ مثلث محيطه ٣٠ وحدة فيه احداثيات الرأسين ا،ب هما ا(٠،٥) ب(٠،−٥) والرأس جـ يتحرك في المستوى، جد معادلة المحل الهندسي الناتج من تحرك الراس جـ .

الحل : محيط المثلث = ٣٠ وحدة

∴ $\overline{\text{أجـ}} + \overline{\text{ب جـ}} = ٢٠$

$\sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} - ٥)^{٢}} + \sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢}} = ٢٠ \Leftarrow \sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} - ٥)^{٢}} = ٢٠ - \sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢}}$

$\sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} - ٥)^{٢}} = ٢٠ - \sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢}}$ تربيع الطرفين

$\cancel{\text{س}^{٢}} + (\text{ص} - ٥)^{٢} = ٤٠٠ - ٤٠\sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢}} + \cancel{\text{س}^{٢}} + (\text{ص} + ٥)^{٢}$

$\cancel{\text{س}^{٢}} - ١٠\text{ص} + \cancel{٢٥} = ٤٠٠ - ٤٠\sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢}} + \cancel{\text{س}^{٢}} + ١٠\text{ص} + \cancel{٢٥}$

$٢\sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{ص} + ٥)^{٢}} = (\text{ص} + ٢٠)$ تربيع الطرفين

$٤\text{س}^{٢} + ٤(\text{ص} + ٥)^{٢} = (\text{ص}^{٢} + ٤٠\text{ص} + ٤٠٠)$

$٤\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} + ٤٠\text{ص} + ١٠٠ = \text{ص}^{٢} + ٤٠\text{ص} + ٤٠٠ \Leftarrow ٤\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} = ٣٠٠$

∴ $\frac{\text{س}^{٢}}{٧٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٠٠} = ١$

تمرين

١

(١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٧وحدات عن النقطة م(−٢،٣)؟

الحل:

....

....

....

....

(٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره ٤ وحدات عن المستقيم ٤س + ٥ص = ٢ ؟

الحل:

....

....

....

....

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ(س،ص) التي تبعد بعدا ثابتا قدره وحدة واحدة عن المستقيم س = ٧ ؟

الحل:

....

....

....

....

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين $ب_١$(٠،٣)　$ب_٢$(٠،–٣) مساويا دائما ٣ وحدات؟

الحل:

....

....

....

....

EQUATIONES OF CONIC SECTIONS

معادلات القطوع المخروطية

الفصل الثاني

THE CIRCL

الدائرة

أولا

Adel Awwad

تعريف

هي المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص) التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى المركز يساوي مقدار ثابت وهو نصف القطر .

معادلة الدائرة

١ الصورة القياسية .

مركزها (د،هـ) ونصف قطرها (ر).

$$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$$

١ الصورة العامة.

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$$

المركز م(−ل،−ك)

$$ر = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ}$$

ملاحظة

في معادلة الدائرة دائما معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

الامثلة

١ جد مركز ونصف القطر في الدوائر التالية :

١) $س^٢ + ص^٢ = ٩$

الحل :

المركز (٠،٠) $ر = \sqrt{٩} = ٣$

٢) $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ٨١$

الحل :

المركز (٢،٠) $ر = \sqrt{٨١} = ٩$

٣) $(س + ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٥$

الحل :

المركز (-١،-٣) $ر = \sqrt{١٥}$

٤) $(٢س + ٢)^٢ + (٢ص - ٦)^٢ = ١٦$

الحل :

$٤(س + ١)^٢ + ٤(ص - ٣)^٢ = ١٦ \leftarrow (س + ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٤$

المركز (-١،٣) $ر = \sqrt{٤} = ٢$

٥) $س^٢ + ص^٢ - ٤س = ٥$

الحل :

س^{٢} + ص^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

٢ل = −٤ ← ل = −٢   ٢ك = ٠ ← ل = ٠

م(−ل، −ك) = م(٢، ٠)   ر = $\sqrt{٤ + ٠ + ٥}$ = ٣

٦) س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٦ص = ٣

الحل :

س^{٢} + ص^{٢} + ٤س − ٦ص − ٣ = ٠

٢ل = ٤ ← ل = ٢   ٢ك = −٦ ← ل = −٣

م(−ل، −ك) = م(−٢، ٣)   ر = $\sqrt{٤ + ٩ + ٣}$ = ٤

٧) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} − ٤س + ٨ص = ١٠

الحل :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٤ص = ٥ ← س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٤ص − ٥ = ٠

٢ل = −٢ ← ل = −١   ٢ك = ٤ ← ل = ٢

م(−ل، −ك) = م(١، −٢)   ر = $\sqrt{١ + ٤ + ٥}$ = $\sqrt{١٠}$

٢ جد معادلة الدائرة التي مركزها (−٢، ٣) ونصف قطرها ٤ وحدات .

الحل :

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ر^{٢}

(س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٦

٣ جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها ٧ وحدات؟

الحل :

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$

$س^2 + ص^2 = 49$

٤ جد معادلة الدائرة التي مركزها (١،٤) وتمر بالنقطة (٣،٥)؟

الحل :

نصف القطر : هي المسافة بين مركز الدائرة واي نقطة على محيط الدائرة

المسافة بين النقطتين (١،٤) (٣،٥)تمثل نصف القطر

$ر = \sqrt{(3-1)^2 + (5-4)^2}$

$ر = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$

$(س - 1)^2 + (ص - 4)^2 = 5$

٥ جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها هما (٢،٤) (٦،٢) .

الحل :

احداثيات منتصف قطعة مستقيمة $(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2})$

$(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2})$

$م(\frac{2+6}{2} ، \frac{4+2}{2}) = م(4،3)$

$ر = \sqrt{(4-2)^2 + (3-4)^2}$

$ر = \sqrt{5}$

$(س - 4)^2 + (ص - 3)^2 = 5$

٦ جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢،٣) وتمس محور السينات

اذا كانت الدائرة تمس محور السينات فإن ر = ص (الاحداثي الصادي لمركز الدائرة)

اذا كانت الدائرة تمس محور الصادات فإن ر = س (الاحداثي السيني لمركز الدائرة)

الحل :

$(س - ٢)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ٩$

٧ جد معادلة الدائرة التي مركزها (-٢،٢) وتمس محور الصادات.

الحل :

$(س + ٢)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٤$

٨ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (١،٢) وتمس محور السينات عند (٧،٠) .

الحل :

بما ان الدائرة تمس محور السينات عند (٧،٠) فإن الاحداثي الصادي لمركز الدائرة = طول نصف القطر

$(س - ٧)^{٢} + (ص - ر)^{٢} = ر^{٢}$

(١،٢) تحقق المعادلة

$(١ - ٧)^{٢} + (٢ - ر)^{٢} = ر^{٢} \leftarrow ٣٦ + ٤ - ٤ر + \cancel{ر^{٢}} = \cancel{ر^{٢}} \leftarrow ٤٠ = ٤ر$

$٤٠ = ٤ر \leftarrow ١٠ = ر$

$(س - ٧)^{٢} + (ص - ١٠)^{٢} = ١٠٠$

٩ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٢،٣) وتمس محور الصادات عند (٠،٥) .

الحل :

$(س - ر)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ر^{٢}$

(٢،٣) تحقق المعادلة

(٢ − نق)^{٢} + (٣ − ٥)^{٢} = نق^{٢} ← ٤ − ٤نق + ٤ = نق^{٢} ← ٨ = ٤نق

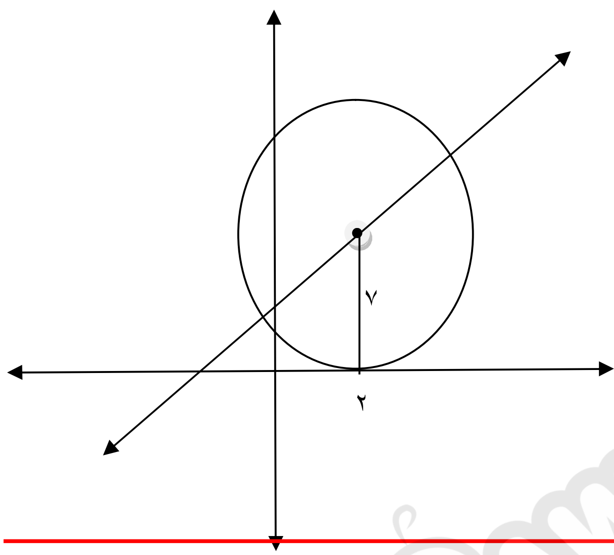
٨ = ٤نق ← ٢ = نق

(س − ٢)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٤

١٠ جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٣س + ١ وتمس محور السينات عند النقطة (٢،٠).

الحل :

(س − ٢)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٤٩



١١ جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٢س + ٥ وتمس محور السينات عند النقطة (٣،٠).

الحل :

(س − ٣)^{٢} + (ص − ١١)^{٢} = ١٢١

١٢ جد معادلة الدائرة التي مركزها (٤،٤) وتمس المستقيم ص = ٢س − ٣ .

الحل :

٢س − ص − ٣ = ٠ ، (٤،٤)

نصف القطر: يمثل المسافة بين نقطة (مركز الدائرة) ومستقيم (المماس) .

$$نق = \frac{|٤\times٢ - ٤\times١ - ٣|}{\sqrt{٤+١}} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$$

$$(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = \frac{١}{٥}$$

١٣ جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢،٣) وتمس المستقيم ٣س + ٤ص + ٢ = ٠

الحل :

٣س + ٤ص + ٢ = ٠　　،　　(٢،٣)

نصف القطر: يمثل المسافة بين نقطة (مركز الدائرة) ومستقيم (المماس)

$$نق = \frac{|٣\times٢ + ٤\times٣ + ٢|}{\sqrt{٩+١٦}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

$$(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٦$$

١٤ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠،٠) ، (٨،٠) ، (٤،-٤)

الحل :

يجب ان نستخدم الصورة العامة في الحل الصورة العامة.

$$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$$

(٠،٠)

٠ + ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ٠ ← جـ = ٠ .... (١)

(٨،٠)

٦٤ + ٠ + ١٦ل + ٠ + ٠ = ٠ ← ل = -٤ .... (٢)

(٤،-٤)

١٦+١٦+٨ل – ٨ك =٠ ← ٣٢ – ٣٢ – ٨ك =٠ ← ك =٠ ....(٣)

∴ س^{٢} + ص^{٢} – ٨س = ٠

١٥ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠،٠) ، (٢،٠) ، (٣،–١)

الحل :

يجب ان نستخدم الصورة العامة في الحل .

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص+جـ = ٠

(٠،٠)

٠+٠+٠+٠+جـ = ٠ ← جـ = ٠ ....(١)

(٢،٠)

٤+٠+٤ل+٠+٠ = ٠ ← ل = –١ ....(٢)

(٣،–١)

٩+١+٦ل – ٢ك =٠ ← ٤ – ٢ك =٠ ← ك= ٢ ....(٣)

∴ س^{٢} + ص^{٢} – ٢س + ٤ص = ٠

١٦ جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على الخط المستقيم ٣س + ٤ص = ٧ و تمر بالنقاط (١،–٢) (٤،–٣) .

الحل :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص+جـ = ٠

(١،–٢)

١+٤+٢ل – ٤ك+جـ = ٠ ← ٢ل – ٤ك+جـ = –٥ ....(١)

(٤، −٣)

١٦ + ٩ + ٨ل − ٦ك + جـ = ٠ ← ٨ل − ٦ك + جـ = −٢٥ ....(٢)

المركز (−ل، −ك) يقع على المستقيم ٣س + ٤ص = ٧

∴ −٣ل − ٤ك = ٧ ....(٣)

(١) مع (٢)

− ٢ل + ٤ك − ~~جـ~~ = ٥

٨ل − ٦ك + ~~جـ~~ = −٢٥

٦ل − ٢ك = −٢٠

٦ل − ٢ك = −٢٠ ← ٣ل − ك = −١٠ ....(٤)

(٣) ، مع (٤)

− ~~٣~~ل − ٤ك = ٧

~~٣~~ل − ك = −١٠

− ٥ك = −٣

− ٥ك = −٣ ← ك = $\frac{٣}{٥}$

٣ل = $\frac{٣}{٥}$ − ١٠ ← ٣ل = $\frac{-٤٧}{٥}$ ← ل = $\frac{-٤٧}{١٥}$

٢ل − ٤ك + جـ = −٥ ← ٢ × $\frac{-٤٧}{١٥}$ − ٤ × $\frac{٣}{٥}$ + جـ = −٥

$\frac{-٩٤}{١٥}$ − $\frac{٣٦}{١٥}$ + جـ = −٥ ← $\frac{-٢٦}{٣}$ + جـ = −٥ ← جـ = $\frac{-١٥}{٣}$ + $\frac{٢٦}{٣}$ ← جـ = $\frac{١١}{٣}$

س^{٢} + ص^{٢} − $\frac{٩٤}{١٥}$س + $\frac{٦}{٥}$ص + $\frac{١١}{٣}$ = ٠

١٧ تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى بحيث س = ٥ + ٣جتاهـ ، ص = ٢ + ٣جتاهـ حيث هـ زاوية متغيرة جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) وبين نوعه .

الحل :

س = ٥ + ٣جاهـ ← جاهـ = $\frac{(س - ٥)}{٣}$ ص = ٢ + ٣جتاهـ ← جتاهـ = $\frac{ص - ٢}{٣}$

جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = $\frac{(س - ٥)^{٢}}{٩} + \frac{(ص - ٢)^{٢}}{٩}$

٩ = (س − ٥)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} دائرة

١٨ تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى بحيث س = ٧ + ٤جاهـ ، ص = ٥ + ٤جتاهـ حيث هـ زاوية متغيرة جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) وبين نوعه .

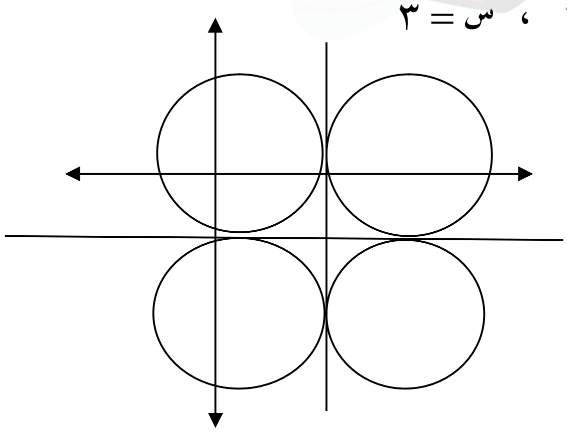
الحل :

س = ٧ + ٤جاهـ ← جاهـ = $\frac{(س - ٧)}{٤}$ ص = ٥ + ٤جتاهـ ← جتاهـ = $\frac{ص - ٥}{٤}$

جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = $\frac{(س - ٧)^{٢}}{١٦} + \frac{(ص - ٥)^{٢}}{١٦}$

١٦ = (س − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} دائرة

١٩ جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ص = −١ ، س = ٣ علما بإن نصف قطرها ٣ وحدات



الحل : (س − ٦)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩

س^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩

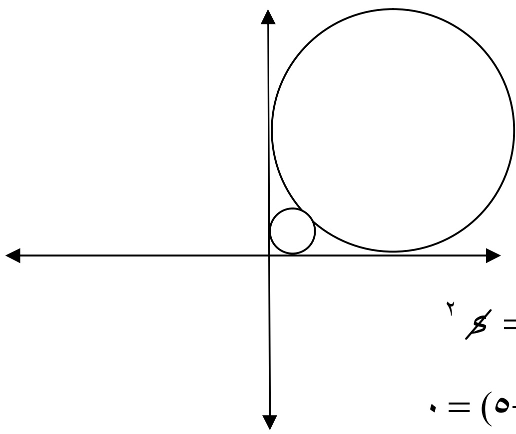
س^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩

(س − ٦)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩

٢٠ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (١،٢).

الحل :

بما ان الدائرة تمس المحورين وتمر بالنقطة (١،٢)، اذن الدائرة تقع في الربع الاول



المركز (د،د) ونصف القطر = د

$$(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{د})^{٢}=\text{د}^{٢}$$

(١،٢) تحقق معادلة الدائرة

$$(١-\text{د})^{٢}+(٢-\text{د})^{٢}=\text{د}^{٢} \leftarrow ١-٢\text{د}+\text{د}^{٢}+٤-٤\text{د}+\cancel{\text{د}^{٢}}=\cancel{\text{د}^{٢}}$$

$$١-٢\text{د}+\text{د}^{٢}+٤-٤\text{د}=٠ \leftarrow \text{د}^{٢}-٦\text{د}+٥=٠ \leftarrow (\text{د}-١)(\text{د}-٥)=٠$$

$$(\text{د}-١)(\text{د}-٥)=٠ \leftarrow \text{د}=٥ \ ، \ \text{د}=١$$

$$(\text{س}-٥)^{٢}+(\text{ص}-٥)^{٢}=٢٥$$

$$(\text{س}-١)^{٢}+(\text{ص}-١)^{٢}=١$$

تمرين

٢

(١) جد نصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ + ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

الحل:

....

....

....

....

(٢) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣،٥) وتمس المستقيم $٢س + ٣ص + ٤ = ٠$

الحل:

....

....

....

(٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م(س،ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا مقداره ٣ وحدات عن المستقيم الذي معادلته $٣س + ٤ص = ٥$ وتمر اثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها $(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩$

الحل:

....

....

....

....

(٤) جد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند (٢،٠)ويقع مركوها على المستقيم ص = ٢س

الحل:

....

....

....

....

(٥) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٣،٤) وتمس المستقيم ٣س + ٢ص + ٤ = ٠

الحل:

....

....

....

....

(٦) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين ويقع مركزها على المستقيم ص = ٢ .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

(٧) جد معادلة الدائرة التي تقع في الربع الثاني وتمس محور الصادات ومركزها يقع على المستقيم ٢س + ص = ٦ ونصف قطرها ٤ وحدات ,

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٨) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (–١،٨).

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٩) جد طول الوتر العمودي على محور السينات المار بالنقطة (٤،٠)في الدائرة التي معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

(١٠) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٢،٠)وتمس محور الصادات وتمس المستقيم ص = ١.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

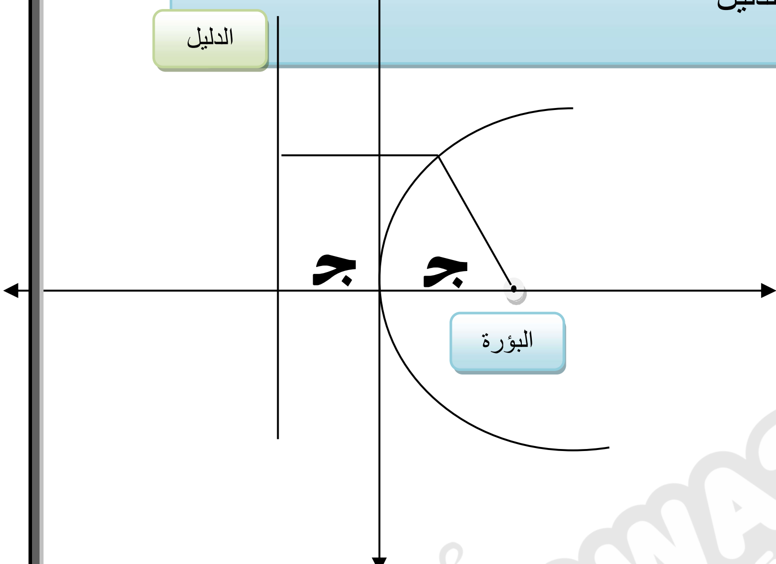
....

ثانيا القطع المكافئ THE PARABOLA

Adel Awwad

تعريف

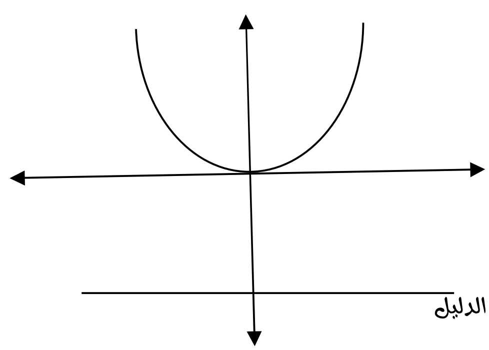
هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص) التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة يساوي بعدها عن مستقيم يسمى الدليل



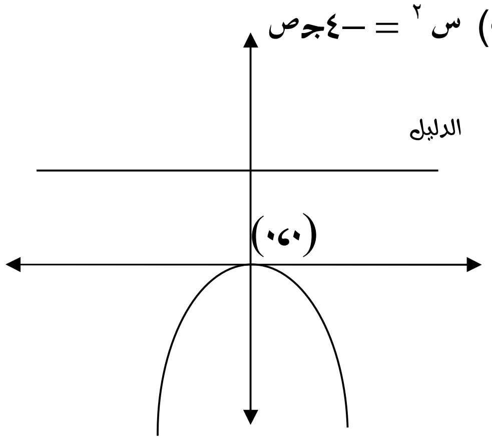
معادلة القطع المكافئ

اذا كان احداثيات رأس القطع (٠،٠)

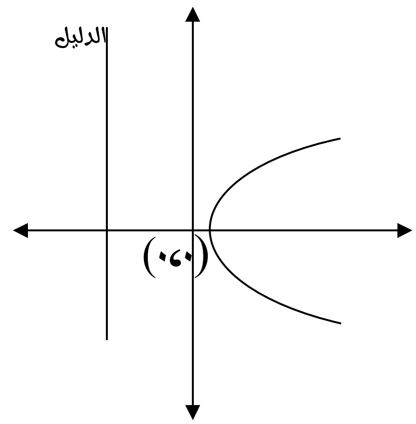
(أ) $س^{٢} = ٤جـص$



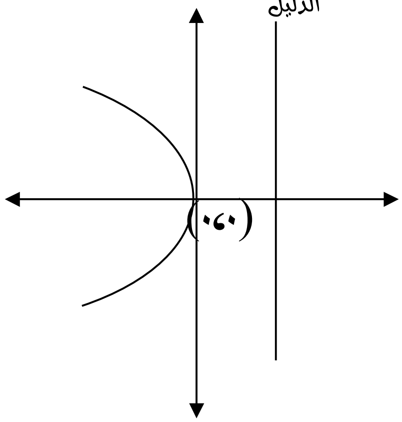
(ب) $س^{٢} = -٤جـص$



(ج) ص^{٢} = ٤جس

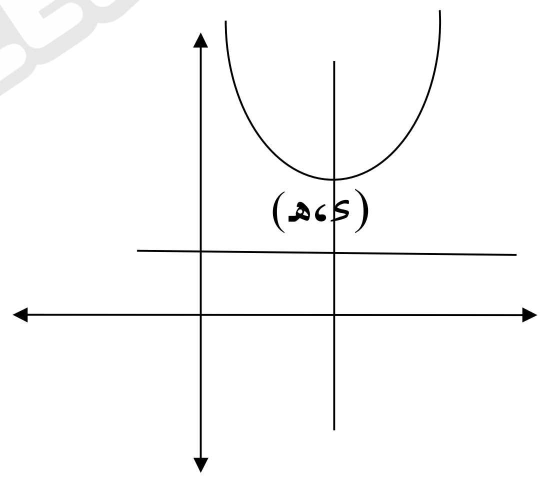


(د) ص^{٢} = −٤جس

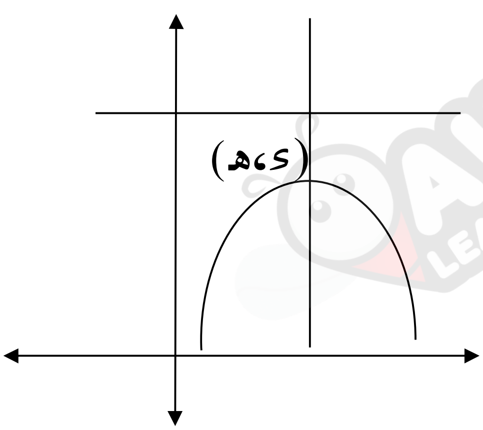


اذا كان احداثيات رأس القطع (د،هـ)

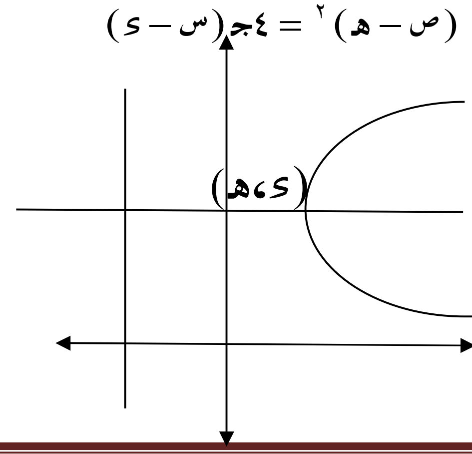
(أ) (س − د)^{٢} = ٤جـص(س − هـ)



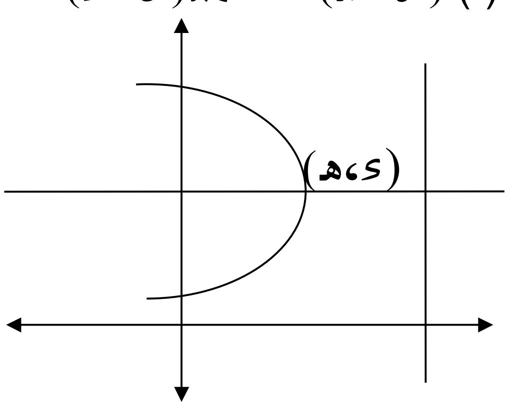
(ب) (س − د)^{٢} = −٤جـص(س − هـ)



(ج) (ص − هـ)^{٢} = ٤جـ(س − د)



(د) (ص − هـ)^{٢} = −٤جـ(س − د)



ملاحظات مهمة جدا

١) مايميز معادلة القطع المكافئ هو أن أحد المتغيرين يكون مربع والاخر يكون غير مربع .
٢) المسافة بين البؤرة والرأس تساوي جـ والمسافة بين الرأس والدليل تساوي جـ .
٣) البؤرة دائما داخل الشكل والدليل خلف الشكل .
٤) البؤرة = الرأس + جـ.

الامثلة

(١) جد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل

(أ) $ص^٢ = ٤س$

الحل :

احداثيات الرأس (٠،٠)		٤جـ = ٤ ← جـ = ١

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (٠،٠) +١

احداثيات البؤرة = (١،٠)

معادلة المحور ص= ٠		معادلة الدليل س= -١

(ب) $س^٢ = ١٦ص$

الحل :

احداثيات الرأس (٠،٠)		٤جـ = ١٦ ← جـ = ٤

احداثيات البؤرة = الرأس+ جـ

احداثيات البؤرة = (٠،٠)+١

احداثيات البؤرة = (٠،٤)

معادلة المحور س= ٠ معادلة الدليل ص= -٤

(جـ) (ص − ١)^{٢} = ٢٤(س + ١)

الحل:

احداثيات الرأس (−١،١) ٤جـ = ٢٤ ← جـ = ٦

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (−١،١) + ٦

احداثيات البؤرة = (٥،١)

معادلة المحورص= ١ معادلة الدليل س= -٧

(د) (ص + ١)^{٢} = −٨(س − ٢)

الحل:

احداثيات الرأس (٢،-١) ٤جـ = −٨ ← جـ = −٢

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (٢،-١) − ٢

احداثيات البؤرة = (٠،-١)

معادلة المحورص= -١ معادلة الدليل س = ٤

(هـ) س^{٢} + ٨س − ٤ص = ٤

الحل:

س^{٢} + ٨س − ٤ص = ٤ ← س^{٢} + ٨س = ٤ص + ٤

اكمال المربع

$\left(\frac{٨}{٢}\right)^{٢}$ = ١٦

س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٤ص + ٤ + ١٦ ← س^{٢} + ٨س + ١٦ = ٤ص + ٢٠

(س + ٤)^{٢} = ٤(ص + ٥)

احداثيات الرأس (−٤، −٥)   ٤جـ = ٤ ← جـ = ١

احداثيات البؤرة = الرأس + ج

احداثيات البؤرة = (−٤، −٥) + ١

احداثيات البؤرة = (−٤، −٤)

معادلة المحور س = −٤   معادلة الدليل ص = −٦

(و) ص^{٢} − ٤ص + ٤س − ٤ = ٠

الحل:

ص^{٢} − ٤ص + ٤س − ٤ = ٠ ← ص^{٢} − ٤ص = −٤س + ٤

اكمال المربع

$\left(\frac{-٤}{٢}\right)^{٢}$ = ٤

ص^{٢} − ٤ص + ٤ = −٤س + ٨ ← ص^{٢} − ٤ص + ٤ = −٤(س − ٢)

(ص − ٢)^{٢} = −٤(س − ٢)

احداثيات الرأس (٢،٢)	٤جـ = −٤ ←جـ = −١

احداثيات البؤرة = الرأس+ ج

احداثيات البؤرة = (٢،٢) − ١

احداثيات البؤرة = (١،٢)

معادلة المحور ص=٢	معادلة الدليل س =٣

(٢) جد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات رأسه(٢،٣) واحداثيات بؤرته = (-١،٣).

الحل:

جـ = المسافة بين البؤرة والرأس

جـ = ٣

(ص − ٣)^٢ = −١٢(س − ٢)

(٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات رأسه(١،١) ومعادلة دليله ص = -٢ .

الحل:

جـ = ٣

(س − ١)^٢ = ١٢(ص − ١)

(٤) جد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات بؤرته (٣،١) ومعادلة دليله ص = -٣.

الحل:

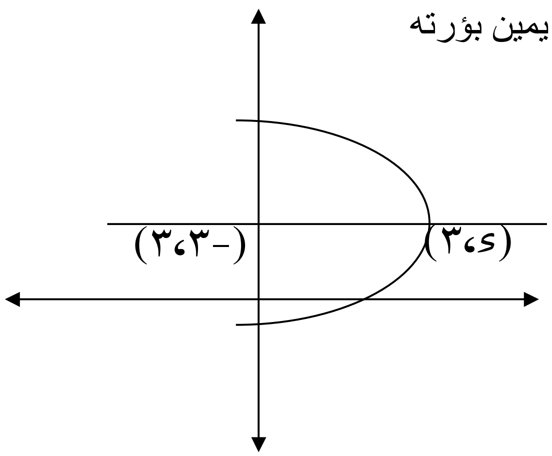
احداثيات الراس = (٣،-١)

جـ = ٢

(س − ٣)^٢ = ٨(ص + ١)

(٥) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات و احداثيات بؤرته (−٣،٣) ويمر بالنقطة (٠،−١) ويقع راسه على يمين بؤرته.

الحل :



بما ان محوره يوازي محور السينات وراسه على يمين بؤرته

(ص − هـ)^{2} = −٤ج(س − د)

هـ = ٣   د − ج = −٣ ← د = ج − ٣

(ص − ٣)^{2} = −٤ج(س − ج + ٣)

ويمر بالنقطة (٠،−١)

∴ ١٦ = −٤ج(٣ − ج) ← ٤ = −٣ج + ج^{2} ← ٤ = ج^{2} − ٣ج − ٤ = ٠

ج^{2} − ٣ج − ٤ = ٠ ← ج = ٤ ، ج = −١

(ص − ٣)^{2} = −١٦(س − ١)

(ص − ٣)^{2} = ٤(س + ٤) تهمل

---

(٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات و احداثيات راسه (٢،١) ويمر بالنقطة (٤،٥).

الحل :

احداثيات راسه (٢،١)

(س − د)^{2} = ٤ج(ص − هـ)

(س − ٢)^{2} = ٤ج(ص − ١)

ويمر بالنقطة (٤،٥)

$(٤-٢)^٢ = ٤جـ(٥-١) \leftarrow ٤ = ١٦جـ \leftarrow جـ = \frac{١}{٤}$

$\therefore (س-٢)^٢ = (ص-١)$

ملاحظات مهمة

(أ) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات هي:

$ص = أس^٢ + ب س + جـ \quad ، أ \neq ٠ \quad ، أ،ب،جـ \in ح$

(ب) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات هي:

$س = أص^٢ + ب ص + جـ \quad ، أ \neq ٠ \quad ، أ،ب،جـ \in ح$

(٧) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٣،٢)، (٦،١)، (٠،١) ودليله يوازي محور السينات

الحل:

بما ان دليله يوازي محور السينات

∴ محوره يوازي محور الصادات

$ص = أس^٢ + ب س + جـ$

(٣،٢)

$٢ = ٩أ + ٣ب + جـ$ ......(١)

(٦،١)

$١ = ٣٦أ + ٦ب + جـ$ ....(٢)

(٠،١)

$١ = ٠ + ٠ + جـ \leftarrow جـ = ١$

$$٩أ + ٣ب = ١ \qquad -١٨أ - ٦ب = -٢$$

$$٣٦أ + ٦ب = ٠ \leftarrow ٣٦أ + ٦ب = ٠$$

$$١٨أ = -٢$$

$$١٨أ = -٢ \leftarrow \frac{-١}{٩}$$

$$١ = ٣٦ \times \frac{-١}{٩} + ٦ب + ١ \leftarrow ٠ = -٤ + ٦ب \leftarrow ب = \frac{٢}{٣}$$

$$ص = \frac{-١}{٩}س^{٢} + \frac{٢}{٣}س + ١$$

---

(٨) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم ص=س+١ ويمر بالنقطتين (٠،٢)، (٤،٢) .

الحل:

$$(س - د)^{٢} = ٤جـ(ص - هـ)$$

احداثيات الرأس (د،د+١)

$$(س - د)^{٢} = ٤جـ(ص - د - ١)$$

(٠،٢)، (٤،٢) تحقق المعادلة

$$د^{٢} = ٤جـ(١ - د) \ldots\ldots\ldots(١)$$

$$(٤ - د)^{٢} = ٤جـ(١ - د) \ldots\ldots\ldots(٢)$$

$$\frac{د^{٢}}{(٤ - د)^{٢}} = \frac{٤جـ(١ - د)}{٤جـ(١ - د)} \leftarrow د^{٢} = (٤ - د)^{٢}$$

$$د^{٢} = (٤ - د)^{٢} \leftarrow \cancel{د^{٢}} = ١٦ - ٨د + \cancel{د^{٢}} \leftarrow د = ٢$$

$$\therefore (س - ٢)^{٢} = ٤جـ(ص - ٣)$$

$$\therefore ٤ = -٤جـ \leftarrow جـ = -١ \qquad \therefore (س - ٢)^{٢} = -٤(ص - ٣)$$

(٩) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور السينات ويمر بالنقطتين (٨،١٠)، (٤،٤) .

الحل :

احداثيات الرأس (ى،٠)

$ص^٢ = ٤جـ (س - ى)$

(٨،١٠) تحقق المعادلة

$١٠٠ = ٤جـ (٨ - ى)$ ....(١)

(٤،٤) تحقق المعادلة

$١٦ = ٤جـ (٤ - ى)$ ....(٢)

$\frac{٤}{٢٥} = \frac{(٤ - ى)}{(٨ - ى)} \leftarrow ١٠٠ - ٢٥ى = ٣٢ - ٤ى$

$١٠٠ - ٢٥ى = ٣٢ - ٤ى \leftarrow ٦٨ = ٢١ى$

$٦٨ = ٢١ى \leftarrow ى = \frac{٦٨}{٢١}$ $\therefore جـ = \frac{٢١}{٤}$

$\therefore ص^٢ = ٢١\left(س - \frac{٦٨}{٢١}\right)$

(١٠) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره هو محور السينات ويمر بنقطتي تقاطع المستقيم ص = س مع الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٦س = ٠$.

الحل :

احداثيات الرأس (ى،٠)

$(ص - هـ)^٢ = ٤جـ (س - ى)$

$ص^٢ = ٤جـ (س - ى)$

$س^٢ + ص^٢ + ٦س = ٠$

∴ ٢س^{٢}+٦س=٠ ← ٢س(س+٣)=٠ ← س = ٠ ، س = −٣

(٠،٠) تحقق المعادلة

٠ = ٤جـ × د ← د = ٠

(-٣،-٣) تحقق المعادلة

٩ = ٤جـ(−٣) ← جـ = $\frac{-٣}{٤}$ ∴ ص^{٢} = −٣س

---

(١١) تتحرك النقطة و(س،ص) على منحنى قطع مكافئ ينطبق محوره على محور الصادات ومعادلته ص = ق(س) بحيث يتحدد موقعها في اللحظة ن ≥ ٠ بالمعادلتين ص =جا٢ن ، س =جتان−جان

الحل :

ص =جا٢ن

س =جتان−جان ← س^{٢} =جتا^{٢}ن−٢جانجتان+جا^{٢}ن

س^{٢} = ١−جا٢ن ← س^{٢} = ١− ص ← س^{٢} = −(ص −١)

∴ س^{٢} = −(ص −١) قطع مكافئ .

---

(١٢) اذا كان المستقيم ص = س +١ مماسا لمنحنى القطع المكافئ س^{٢} + ٢س=٨ص+جـ جد الثابت جـ ثم عين معادلته .

الحل :

$\frac{دص}{دس}$ = ١ س^{٢} + ٢س=٨ص+جـ ← ٢س + ٢=٨$\frac{دص}{دس}$ ← ٢س + ٢=٨

٢س + ٢=٨ ← ٢س=٦ ← س = ٣ ← (٣،٣)

س^{٢} + ٢س=٨ص+جـ ← ٩ + ٦=٢٤+جـ ←جـ = −٩

س^{٢} + ٢س=٨ص − ٩

(١٣) قذف جسم رأسيا الى الاعلى خسب العلاقة $ف(ن) = ٦ن - ن^{٢}$ ، حيث ن : الزمن ، ف :المسافة
جد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم مستخدما تعريف القطع المكافئ .

الحل :

$ف(ن) = ٦ن - ن^{٢} \leftarrow ن^{٢} - ٦ن = -ف$

اكمال المربع $ن^{٢} - ٦ن + ٩ = -ف + ٩ \leftarrow (ن - ٣)(ن - ٣) = -(ف - ٩)$

$(ن - ٣)^{٢} = -(ف - ٩)$

اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم هو ف =٩ عندما ن = ٣ .

تمرين

٣

(١) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٢،٣)، (-١،٦)، (١،٠) ومحوره يوازي محور الصادات

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٢) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٣،١)، (٦،٣)، (٣،-٣) ومحوره يوازي محور السينات.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقاط (٣،٢٩)، (-٥،٥)، (-٧،٤) ومحوره يوازي محور الصادات.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٤) قذف جسم رأسيا الى الاعلى خسب العلاقة ف(ن) = ٨ن − ٢ن^{٢} ، حيث ن : الزمن ، ف :المسافة جد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم مستخدما تعريف القطع المكافئ .

الحل:

(٥) تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوى الديكارتي بحيث ان ص =جاهـجتاهـ ، س =جتاهـ+جاهـ حيث قياس زاوية حادة ، ما معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص).

الحل:

(٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات ورأسه يقع على المستقيم ص=س+٢ ويمر بالنقطتين (٣،٥)، (٣،٢) .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٧) جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره س=٢ ومعادلة دليله ص=١ ويمر منحناه بالنقطة (٦،٦) .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٨) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٤،٢) ويقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(ص + ٢)^{٢} = ١٢(س - ٢)$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٩) اثبت ان معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ $ص^{٢} = ٤جـس$ عند النقطة $(س_{١}، ص_{١})$ هي $ص_{١}ص = ٢جـ(س + س_{١})$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

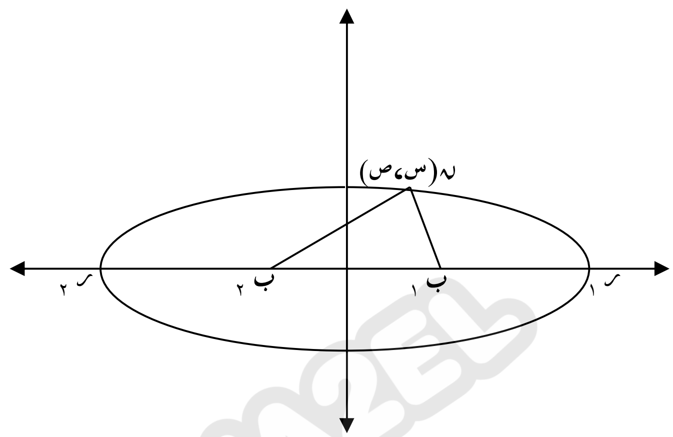
....

ثالثا — القطع الناقص — THE ELLIPSE

Adel Awwad

تعريف

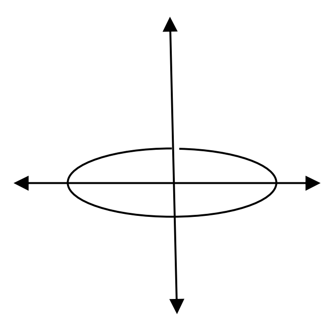
هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص) التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين $ب_1$،$ب_2$ تسميان البؤرتين يساوي مقدار ثابت و هو ٢أ .



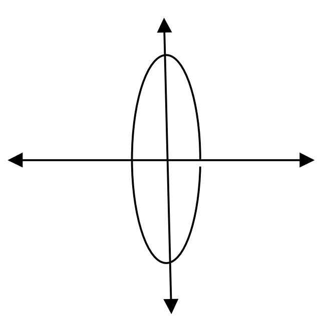
معادلة القطع الناقص

اذا كان احداثيات المركز (٠،٠)

(أ) $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$

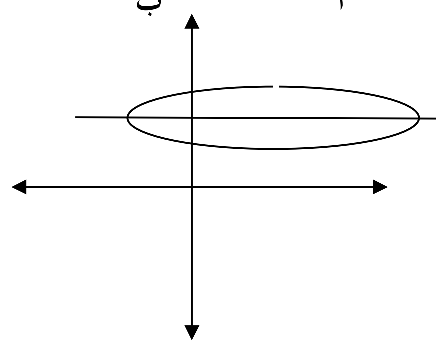


(ب) $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1$

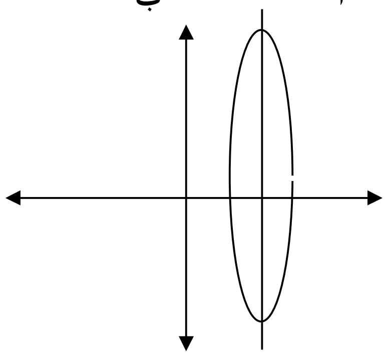


اذا كان احداثيات المركز (د،هـ)

أ) $\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$



ب) $\frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$



ملاحظات مهمة جدا

(١) ما يميز معادلة القطع الناقص ان المتغيرين مربعين وبينهما اشارة + والمعاملات مختلفة .

(٢) أ : المسافة بين المركز والراس

جـ : المسافة بين المركز والبؤرة .

(٣) $أ^{٢}$: دائما هو العدد الاكبر .

$ب^{٢}$: دائما هو العددالاصغر.

(٤) طول المحور الاكبر = ٢أ

طول المحور الاصغر = ٢ب

(٥) $جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

(٦)الاختلاف المركزي هـ $= \frac{جـ}{أ} < ١$

(٧) البعد البؤري = ٢جـ

الامثلة

المحور الاول : ايجاد االعناصر من خلال المعادلة

(١) جد عناصر القطوع الناقصة فيما يلي :

(أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦}+\frac{\text{ص}^{٢}}{٩}=١$

الحل :

المركز (٠،٠)

$\text{ا}^{٢}=١٦ \leftarrow \text{ا}=٤$

$\text{ب}^{٢}=٩ \leftarrow \text{ب}=٣$

$\text{جـ}^{٢}=\text{ا}^{٢}-\text{ب}^{٢} \leftarrow \text{جـ}^{٢}=١٦-٩ \leftarrow \text{جـ}=\sqrt{٧}$

الرأسين= المركز $\pm$ ا

الرأسين = (٠،٠) $\pm$ ا ∴ رأساه ($\pm$ ٤،٠)

البؤرتين = (٠،٠) $\pm$ جـ ∴ البؤرتين ($\pm \sqrt{٧}$،٠)

طول المحور الاكبر = ٢ا ∴ طول المحور الاكبر = ٨

طول المحور الاصغر = ٢ب ∴ طول المحور الاصغر = ٦

البعد البؤري = ٢جـ ∴ البعد البؤري = ٢ $\sqrt{٧}$

الاختلاف المركزي = $\frac{\text{جـ}}{\text{ا}}$ ∴ هـ = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ < ١

(ب)

$$\frac{(ص-١)^{٢}}{١٤٤}+\frac{(س+١)^{٢}}{٢٥}=١$$

الحل :

المركز $(-١،١)$

$أ^{٢}=١٤٤ \leftarrow أ=١٢$

$ب^{٢}=٢٥ \leftarrow ب=٥$

$جـ^{٢}=أ^{٢}-ب^{٢} \leftarrow جـ^{٢}=١٤٤-٢٥ \leftarrow جـ=\sqrt{١١٩}$

الرأسين= المركز $\pm أ$

الرأسين = $(-١،١) \pm أ$ ∴ رأساه $(-١،١٣)،(-١،-١١)$

البؤرتين = $(-١،١) \pm جـ$ ∴ البؤرتين $(-١،١+\sqrt{١١٩})،(-١،١-\sqrt{١١٩})$

طول المحور الاكبر = **٢أ**   ∴ طول المحور الاكبر = ٢٤

طول المحور الاصغر = **٢ب**   ∴ طول المحور الاصغر = ١٠

البعد البؤري = **٢جـ**   ∴ البعد البؤري = $٢\sqrt{١١٩}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ $هـ=\frac{\sqrt{١١٩}}{١٢}<١$

(جـ) ٩ص^{٢} + ١٦س^{٢} = ١٤٤

الحل :

٩ص^{٢} + ١٦س^{٢} = ١٤٤ نقسم على ١٤٤

$\frac{٩ص^{٢}}{١٤٤} + \frac{١٦س^{٢}}{١٤٤} = ١ \leftarrow \frac{ص^{٢}}{١٦} + \frac{س^{٢}}{٩} = ١$

المركز (٠،٠)

أ^{٢} = ١٦ ← أ = ٤

ب^{٢} = ٩ ← ب = ٣

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} ← جـ^{٢} = ١٦ − ٩ ← جـ = $\sqrt{٧}$

الرأسين= المركز ± أ

الرأسين = (٠،٠) ± أ　　∴ رأساه (٠، ±٤)

البؤرتين = (٠،٠) ± جـ　　∴ البؤرتين (٠، ± $\sqrt{٧}$)

طول المحور الاكبر = ٢أ　　∴ طول المحور الاكبر = ٨

طول المحور الاصغر = ٢ب　　∴ طول المحور الاصغر = ٦

البعد البؤري = ٢جـ　　∴ البعد البؤري = ٢ $\sqrt{٧}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$　　∴ هـ = $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ < ١

(د) $\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} + ٦\text{س} - ٨\text{ص} + ٩ = ٠$

الحل :

$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤\text{ص}^{٢} - ٨\text{ص} = -٩$

$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤\left(\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص}\right) = -٩$

إكمال المربع للسينات $= \left(\frac{٦}{٢}\right)^{٢} = ٩$ إكمال المربع للصادات $= \left(\frac{-٢}{٢}\right)^{٢} = ١$

$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩ + ٤\left(\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} + ١\right) = -٩ + ٩ + ٤$

$(\text{س} + ٣)^{٢} + ٤(\text{ص} - ١)^{٢} = ٤ \leftarrow \frac{(\text{س} + ٣)^{٢}}{٤} + \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{١} = ١$

المركز $(-٣،١)$

$\text{أ}^{٢} = ٤ \leftarrow \text{أ} = ٢$ $\text{ب}^{٢} = ١ \leftarrow \text{ب} = ١$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \leftarrow \text{جـ}^{٢} = ٤ - ١ \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{٣}$

الرأسين= المركز $\pm$ أ

الرأسين $= (-٣،١) \pm ٢$ $\therefore$ رأساه $(-١،١)$،$(-٥،١)$

البؤرتين $= (-٣،١) \pm \text{جـ}$ $\therefore$ البؤرتين $(-٣ + \sqrt{٣}،١)$،$(-٣ - \sqrt{٣}،١)$

طول المحور الاكبر = ٢أ $\therefore$ طول المحور الاكبر $= ٤$

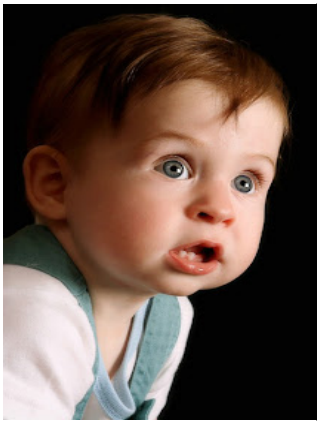
طول المحور الاصغر = ٢ب $\therefore$ طول المحور الاصغر $= ٢$

البعد البؤري = ٢جـ $\therefore$ البعد البؤري $= ٢\sqrt{٣}$

الاختلاف المركزي $= \frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ $\therefore \text{هـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} < ١$

المحور الثاني : ايجاد المعادلة من خلال العناصر

(١) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٣،٠)،(-٣،٠) ويتقاطع مع محور السينات عند س = ٤ ، -٤ .



يستفاد من البؤرتين في ايجاد :

١) المركز
٢) ايجاد جـ
٣) تحديد نوع القطع سيني ام صادي

الحل :

المركز = (٠،٠)

سيني

$\text{٢جـ} = ٦ \leftarrow \text{جـ} = ٣$

البؤرتين = (±٣،٠)

الراسين = (±٤،٠)

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \leftarrow ٩ = ١٦ - \text{ب}^{٢} \leftarrow \text{ب} = \sqrt{٧}$

$\therefore \frac{\text{س}^{٢}}{١٦} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٧} = ١$

---

(٢) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (٠،٠) ومحوره الاكبر على محور الصادات وطول محوره الاصغر ٤ وحدات وبعده البؤري $٢\sqrt{٥}$.

الحل :

مركزه (٠،٠) صادي لإن محوره الاكبر على محور الصادات

$\text{٢ب} = ٤ \leftarrow \text{ب} = ٢$ ، $\text{٢جـ} = ٢\sqrt{٥} \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{٥}$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \leftarrow ٥ = \text{أ}^{٢} - ٤ \leftarrow \text{أ} = ٣$

$\therefore \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} + \frac{\text{س}^{٢}}{٤} = ١$

(٣) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (−٣،٢) واحد رأسيه النقطة(−٣،−٤) واختلافه المركزي يساوي ٠,٥ .

أ=المسافة بين احد الرأسين والمركز

الحل:

مركزه (−٣،٢)   واحد رأسيه النقطة(−٣،−٤)

$ا = ٢ + ٤ \leftarrow ا = ٦$

$هـ = \frac{جـ}{ا} = \frac{١}{٢} \leftarrow ا = ٢\,جـ$

$٦ = ٢\,جـ \leftarrow جـ = ٣$

$جـ^{٢} = ا^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٩ = ٣٦ - ب^{٢} \leftarrow ب = \sqrt{٢٧}$

$$\frac{(ص-٢)^{٢}}{٣٦} + \frac{(س+٣)^{٢}}{٢٧} = ١$$

---

(٤) قطع ناقص اختلافه المركزي يساوي $\frac{٢}{٣}$ واحد رأسيه النقطة(٣،١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (١،١) جد معادلته .

في القطع الناقص

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة $= ا - جـ$

المسافة بين الرأس والبؤرة البعيدة $= ا + جـ$

الحل:

$\frac{جـ}{ا} = \frac{٢}{٣} \leftarrow ٣\,جـ = ٢ا$ ....(١)

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة $= ا - جـ \leftarrow ٢ = ا - جـ \leftarrow جـ = ا - ٢$

نعوض جـ في (١)

$٣\,جـ = ٢ا \leftarrow ٣(ا-٢) = ٢ا \leftarrow ا = ٦$

$\therefore جـ = ٤$

$جـ^{٢} = ا^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ١٦ = ٣٦ - ب^{٢} \leftarrow ب = \sqrt{٢٠}$

المركز = الرأس − أ

$(د،هـ) = (٣،١) - أ \leftarrow (د،١) = (٣،١) - ٦$

المركز $= (-٣،١)$

$$\frac{(س+٣)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٠} = ١$$

---

(٥) اذا كان طول المحور الاكبر لقطع ناقص يساوي ضعف طول محوره الاصغر فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص ؟

الحل :

$٢أ = ٤ب \leftarrow أ = ٢ب$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٤ب^٢ - ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ٣ب^٢ \leftarrow جـ = \sqrt{٣}ب$

$$\therefore هـ = \frac{\sqrt{٣}ب}{٢ب} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

---

(٦) قطع ناقص البعد بين بؤرتيه يساوي طول محوره الاصغر جد الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص .

الحل :

$٢جـ = ٢ب \leftarrow جـ = ب$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow ب^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow أ^٢ = ٢ب^٢ \leftarrow أ = \sqrt{٢}ب$

$$\therefore هـ = \frac{ب}{\sqrt{٢}ب} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

(٧) قطع ناقص يقع محوره الاكبر على محور السينات ومعادلته $\frac{س^{٢}}{٤٩} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

اختلافه المركزي $\frac{٥}{٧}$

جد : (أ) $ب^{٢}$　　(ب) اذا كانت ك نقطة على منحنى القطع الناقص جد محيط المثلث $ك ف_{١} ف_{٢}$

حيث $ف_{١}$،$ف_{٢}$ بؤرتا القطع الناقص .

الحل :

سيني لان محوره الاكبر على محور السينات

$$\frac{س^{٢}}{٤٩} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

من المعادلة السابقة $أ^{٢} = ٤٩ \leftarrow أ = ٧$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٧} \leftarrow ٧جـ = ٥أ \leftarrow جـ = ٥$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٢٥ = ٤٩ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٢٤ \leftarrow ب = \sqrt{٢٤}$

(ب)

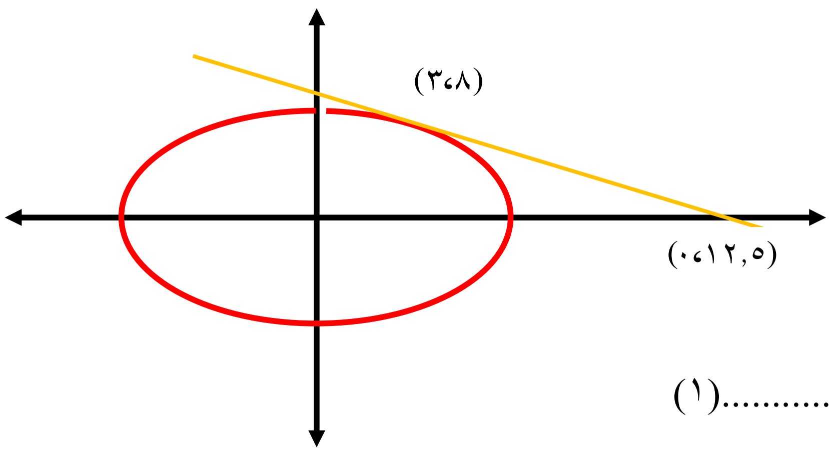
محيط المثلث $ك ف_{١} ف_{٢} = ٢أ + ٢جـ$

محيط المثلث $ك ف_{١} ف_{٢} = ١٤ + ١٠$

محيط المثلث $ك ف_{١} ف_{٢} = ٢٤$

محيط المثلث $ك ف_{١} ف_{٢} = ٢أ + ٢جـ$

(٨) اذا كان المستقيم المار بالنقطة (١٢,٥ ،٠) يمس منحنى قطع ناقص بالنقطة (٣،٨)جد طول كلا من محوري القطع الناقص واختلافه المركزي علما ان محوري القطع ينطبقان على محوري السينات والصادات .



الحل :

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ا}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

(٣،٨) تحقق المعادلة

$$\frac{٦٤}{\text{ا}^{٢}} + \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١ \;\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{(٠-٣)}{(١٢,٥-٨)} = \frac{-٣}{٤,٥} = -\frac{٢}{٣} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\frac{٢\text{س}}{\text{ا}^{٢}} + \frac{٢\text{ص}\,\text{ص}'}{\text{ب}^{٢}} = ٠ \rightarrow \frac{١٦}{\text{ا}^{٢}} - \frac{٤}{\text{ب}^{٢}} = ٠ \rightarrow \text{ا}^{٢} = ٤\text{ب}^{٢}$$

$$\frac{٦٤}{٤\text{ب}^{٢}} + \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١ \rightarrow \frac{١٦}{\text{ب}^{٢}} + \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١ \rightarrow \frac{٢٥}{\text{ب}^{٢}} = ١ \rightarrow \text{ب}^{٢} = ٢٥ \rightarrow \text{ب} = ٥$$

$$\therefore \text{ا}^{٢} = ١٠٠ \rightarrow \text{ا} = ١٠$$

طول المحور الاكبر $= ٢\text{ا} = ٢٠$

طول المحور الاصغر $= ٢\text{ب} = ١٠$

$$\text{ج}^{٢} = \text{ا}^{٢} - \text{ب}^{٢} \rightarrow \text{ج}^{٢} = ١٠٠ - ٢٥ \rightarrow \text{ج}^{٢} = ٧٥ \rightarrow \text{ج} = \sqrt{٧٥}$$

الاختلاف المركزي $\therefore \text{هـ} = \frac{\sqrt{٧٥}}{١٠}$

(١٠) اثبت ان معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{س^٢}{أ^٢}+\frac{ص^٢}{ب^٢}=١$ عند النقطة $(س_١،ص_١)$ هي :

$$\frac{س_١ س}{أ^٢}+\frac{ص_١ ص}{ب^٢}=١$$

الحل:

$(س_١،ص_١)$ تحقق المعادلة

$$\therefore \frac{س_١^٢}{أ^٢}+\frac{ص_١^٢}{ب^٢}=١ \;..(١)$$

نجد الميل

$$\frac{٢س}{أ^٢}+\frac{٢ص ص'}{ب^٢}=٠ \rightarrow \frac{٢س_١}{أ^٢}+\frac{٢ص_١ ص'}{ب^٢}=٠ \rightarrow م=-\frac{٢ب^٢ س_١}{٢أ^٢ ص_١} \rightarrow م=-\frac{ب^٢ س_١}{أ^٢ ص_١}$$

معادلة المماس $(ص-ص_١)=م(س-س_١)$

$$(ص-ص_١)=-\frac{ب^٢ س_١}{أ^٢ ص_١}(س-س_١) \rightarrow (أ^٢ ص_١ ص-أ^٢ ص_١ ص_١)=(-ب^٢ س_١ س+ب^٢ س_١ س_١)$$

$$(أ^٢ ص_١ ص+ب^٢ س_١ س)=(أ^٢ ص_١ ص_١+ب^٢ س_١ س_١)$$

$$\left(\frac{أ^٢ ص_١ ص}{أ^٢ ب^٢}+\frac{ب^٢ س_١ س}{أ^٢ ب^٢}\right)=\left(\frac{أ^٢ ص_١ ص_١}{أ^٢ ب^٢}+\frac{ب^٢ س_١ س_١}{أ^٢ ب^٢}\right)$$

$$\left(\frac{ص_١ ص}{ب^٢}+\frac{س_١ س}{أ^٢}\right)=\left(\frac{(ص_١)^٢}{ب^٢}+\frac{(س_١)^٢}{أ^٢}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{ص_١ ص}{ب^٢}+\frac{س_١ س}{أ^٢}\right)=١$$

مساحة القطع الناقص

مساحة القطع الناقص = π أ × ب

الأمثلة

(١) جد مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحل:

أ^٢ = ١٦ ← أ = ٤ ب^٢ = ٩ ← ب = ٣

مساحة القطع الناقص = π أ × ب

مساحة القطع الناقص = ١٢π

---

(٢) قطع ناقص مساحته ٣٠π وحدة مربعة ورأساه النقطتان (– ٦،٠)،(٦،٠) جد معادلته ؟

الحل:

المركز = (٠،٠)

٢أ = ١٢ ← أ = ٦

مساحة القطع الناقص = π أ × ب ← ٣٠π = ٦π ب ← ب = ٥

∴ $\frac{س^٢}{٣٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

(٣) قطع ناقص بؤرتاه (٤،٠)،(-٤،٠) والنقطة و (س،ص) تقع على منحنى القطع بحيث ان محيط المثلث و ب$_{١}$ب$_{٢}$ يساوي ٢٤ جد معادلته علما ان ب$_{١}$ب$_{٢}$ بؤرتا القطع .

الحل :

المركز = (٠،٠)

من البؤرتين = **٢جـ = ٨ ← جـ = ٤**

محيط المثلث كف$_{١}$ف$_{٢}$ = ٢أ + ٢جـ

٢٤ = ٢أ + ٨ ← ٢أ = ١٦ ← أ = ٨

$$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \leftarrow ١٦ = ٦٤ - \text{ب}^{٢} \leftarrow \text{ب}^{٢} = ٤٨ \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{٤٨}$$

$$\therefore \frac{\text{س}^{٢}}{٦٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٤٨} = ١$$

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س،ص) المتحركة في المستوى الديكارتي بحيث س = ٢جاهـ ، ص = ٣جتاهـ ؟

الحل :

$$\text{س} = ٢\text{جاهـ} \leftarrow \text{جا}^{٢}\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٤}$$

$$\text{ص} = ٣\text{جتاهـ} \leftarrow \text{جتاهـ} = \frac{\text{ص}}{٣} \leftarrow \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٩}$$

$$\text{جا}^{٢}\text{هـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩}$$

$$١ = \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩}$$

(٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و (س،ص) المتحركة في المستوى الديكارتي بحيث

$\frac{س - ٣}{٥} = جاهـ$ ، $ص = -٢ + ٤جتاهـ$.

الحل :

$\frac{س - ٣}{٥} = جاهـ \leftarrow جا^{٢}هـ = \frac{(س - ٣)^{٢}}{٢٥}$

$(ص + ٢) = ٤جتاهـ \leftarrow جتاهـ = \frac{(ص + ٢)}{٤} \leftarrow جتا^{٢}هـ = \frac{(ص + ٢)^{٢}}{١٦}$

$جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = \frac{(س - ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{١٦}$

$\therefore \frac{(س - ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{١٦} = ١$

تمرين

٤

(١) جد معادلة القطع الناقص الذي احد بؤرتيه مركز الدائرة $(٢س - ٦)^{٢} + (٢ص - ٤)^{٢} = ٣٦$ وطول محوره الاصغر يساوي طول قطر الدائرة ومعادلة محوره الاصغر هي س = -١.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٢) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (٢،٣)و احدى بؤرتيه النقطة (٢،-١) وطول محوره الاصغر ٦ وحدات .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

(٣) جد معادلة القطع الناقص الذي راساه (٢،٠)،(-٨،٠) وطول محوره الاصغر يساوي اربعة امثال المسافة بين احد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

(٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) المتحركة بحيث ان مجموع بعديها عن النقطتين (٠،±٣) يساوي ١٠ .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٥) جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلا من المستقيمات :

س = ٣ ، ص = −١
س = ١٣ ، ص = ٧

الحل:

....
....
....
....
....
....
....

(٦) اذا كانت المعادلة ك س ٢ + ٥ ص ٢ = ١٧ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الاكبر موازٍ لمحور السينات ، اثبت ان :

$$ك = \frac{١٧}{ب^٢ + ج^٢}$$

الحل:

....
....
....
....
....
....
....

(٧) اذا كانت م، ن نقطتان ماديتان والنقطة م تدور في مدار على شكل قطع ناقص يحيث تقع النقطة ن في احدى بؤرتي هذا المدار فإذا كان طول المحور الاكبر = ١٠ وحدات والاختلاف المركزي =٠,٣ . جد :

(أ) اطول مسافة بين م، ن .

(ب) اقصر مسافة بين م، ن .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

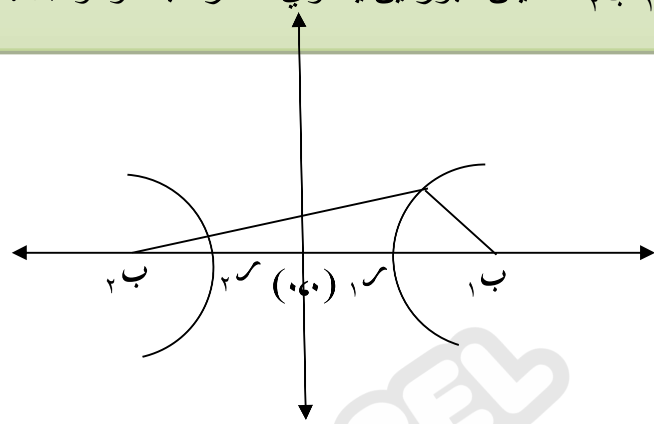
....

رابعا القطع الزائد THE HYPERBOLIC

Adel Awwad

تعريف

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية ن(س،ص) التي يكون الفرق المطلق لبعديها عن نقطتين ثابتتين $ب_1$،$ب_2$ تسميان البؤرتين يساوي مقدار ثابت وهو ٢أ .

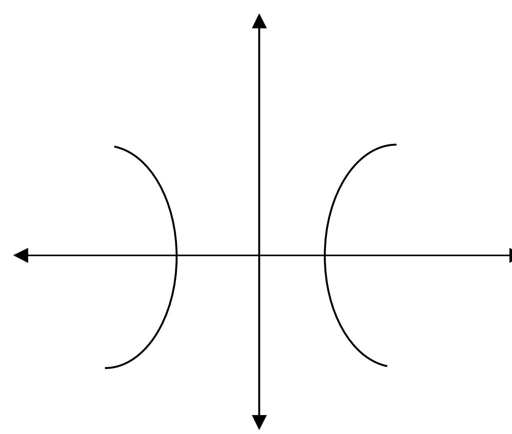


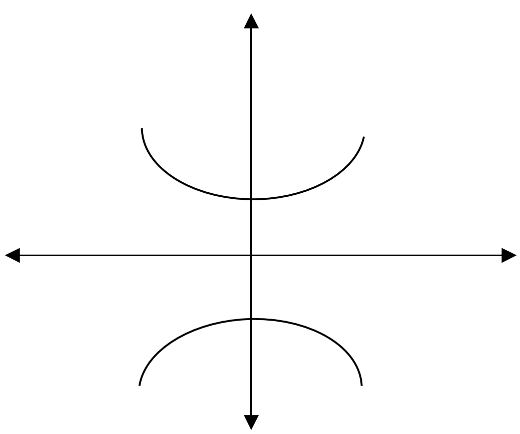
معادلة القطع الزائد

اذا كان احداثيات المركز (٠،٠)

(أ) $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

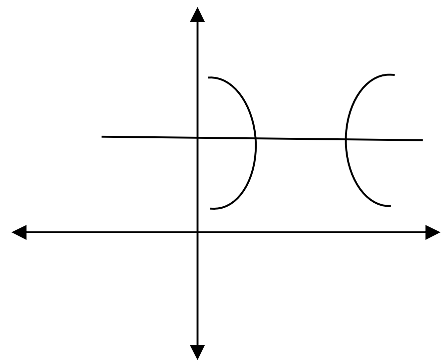
(ب) $\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = ١$



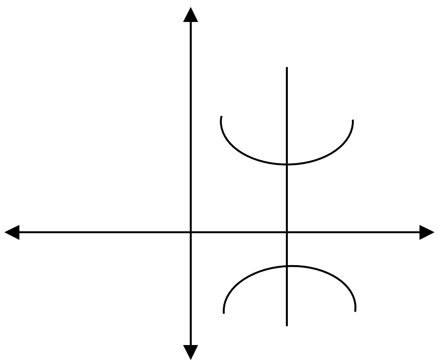


اذا كان احداثيات المركز (د،هـ)

أ) $\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$



ب) $\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$



ملاحظات مهمة جدا

(١) ما يميز معادلة القطع الزائد ان المتغيرين مربعين وبينهما اشارة (-).

(٢) أ : المسافة بين المركز والراس

جـ : المسافة بين المركز والبؤرة .

(٣) $أ^2$: دائما هو العدد الاول .

$ب^2$: دائما هو العدد الثاني.

(٤) طول المحور القاطع = ٢أ

طول المحور المرافق = ٢ب

(٥) $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

(٦) الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} > 1$

(٧) البعد البؤري = ٢جـ

المحور الاول : ايجاد االعناصر من خلال المعادلة

الامثلة

(١) جد عناصر القطوع الزائدة فيما يلي :

(أ) $\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

الحل :

المركز (٠،٠)

$أ^{٢} = ١٦ \leftarrow أ = ٤$

$ب^{٢} = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} \leftarrow جـ^{٢} = ١٦ + ٩ \leftarrow جـ = ٥$

الرأسين= المركز ± أ

الرأسين = (٠،٠) ± أ　　∴ رأساه (±٤،٠)

البؤرتين = (٠،٠) ± جـ　　∴ البؤرتين (±٥،٠)

طول المحور القاطع = ٢أ　　∴ طول المحور القاطع = ٨

طول المحور المرافق = ٢ب　　∴ طول المحور المرافق = ٦

البعد البؤري = ٢جـ　　∴ البعد البؤري = ١٠

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$　　∴ هـ = $\frac{٥}{٤} > ١$

(ب) $\frac{ص^{٢}}{٨١} - \frac{س^{٢}}{٢٥} = ١$

الحل:

المركز (٠،٠)

أ^{٢} = ٨١ ← أ = ٩

ب^{٢} = ٢٥ ← ب = ٥

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← جـ^{٢} = ٨١ + ٢٥ ← جـ = $\sqrt{١٠٦}$

الرأسين= المركز ± أ

الرأسين = (٠،٠) ± أ   ∴ رأساه (٠، ±٩)

البؤرتين = (٠،٠) ± جـ   ∴ البؤرتين (٠، ± $\sqrt{١٠٦}$)

طول المحور القاطع = ٢أ   ∴ طول المحور القاطع = ١٨

طول المحور المرافق = ٢ب   ∴ طول المحور المرافق = ١٠

البعد البؤري = ٢جـ   ∴ البعد البؤري = ٢$\sqrt{١٠٦}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ هـ = $\frac{\sqrt{١٠٦}}{٩}$ > ١

(جـ) $\frac{(س-٢)^{٢}}{٤} - \frac{(ص+٢)^{٢}}{٩} = ١$

الحل:

المركز (٢، -٢)

أ^{٢} = ٤ ← أ = ٢

ب^{٢} = ٩ ← ب = ٣

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← جـ^{٢} = ٤ + ٩ ← جـ = $\sqrt{١٣}$

الرأسين= المركز ± أ

الرأسين = (٢،−٢) ± أ ∴ رأساه (٤،−٢) ، (٠،−٢)

البؤرتين = (٢،−٢) ± جـ ∴ البؤرتين (٢ + $\sqrt{١٣}$ ،−٢) ، (٢ − $\sqrt{١٣}$ ،−٢)

طول المحور القاطع = ٢أ ∴ طول المحور القاطع = ٤

طول المحور المرافق = ٢ب ∴ طول المحور المرافق = ٦

البعد البؤري = ٢جـ ∴ البعد البؤري = ٢ $\sqrt{١٣}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$ > ١

(د) (ص + ١)^{٢} − (س − ٣)^{٢} = ١

الحل:

المركز (٣،−١)

أ^{٢} = ١ ← أ = ١

ب^{٢} = ١ ← ب = ١

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← جـ^{٢} = ١ + ١ ← جـ = $\sqrt{٢}$

الرأسين= المركز ± أ

الرأسين = (٣،−١) ± أ ∴ رأساه (٣،٠) ، (٣،−٢)

البؤرتين = (٣،−١) ± جـ ∴ البؤرتين (٣،−١ + $\sqrt{١٣}$) ، (٣،−١ − $\sqrt{١٣}$)

طول المحور القاطع = ٢أ ∴ طول المحور القاطع = ٢

طول المحور المرافق = ٢ب ∴ طول المحور المرافق = ٢

البعد البؤري = ٢جـ ∴ البعد البؤري = ٢ $\sqrt{٢}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{١} > ١$

(هـ) ٤س^{٢} − ص^{٢} + ١٦س + ١٠ص − ١٧ = ٠

الحل :

٤س^{٢} + ١٦س − ص^{٢} + ١٠ص = ١٧

٤(س^{٢} + ٤س) − (ص^{٢} − ١٠ص) = ١٧

اكمال المربع للسينات = $\left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢}$ = ٤ اكمال المربع للصادات = $\left(\frac{-١٠}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٥

٤(س^{٢} + ٤س + ٤) − (ص^{٢} − ١٠ص + ٢٥) = ١٧ + ١٦ − ٢٥

٤(س + ٢)^{٢} − (ص − ٥)^{٢} = ٨

∴ $\frac{(س+٢)^{٢}}{٢} - \frac{(ص-٥)^{٢}}{٨} = ١$

المركز (−٢،٥)

أ^{٢} = ٢ ← أ = $\sqrt{٢}$

ب^{٢} = ٨ ← ب = $\sqrt{٨}$

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← جـ^{٢} = ٢ + ٨ ← جـ = $\sqrt{١٠}$

الرأسين= المركز ± أ

الرأسين = $(-٢،٥) \pm أ$ $\therefore$ رأساه $(-٢+\sqrt{٢}،٥)$ ، $(-٢-\sqrt{٢}،٥)$

البؤرتين = $(-٢،٥) \pm جـ$ $\therefore$ البؤرتين $(-٢+\sqrt{١٠}،٥)$ ، $(-٢-\sqrt{١٠}،٥)$

طول المحور القاطع = $٢أ$ $\therefore$ طول المحور القاطع $= ٢\sqrt{٢}$

طول المحور المرافق = $٢ب$ $\therefore$ طول المحور المرافق $= ٢\sqrt{٨}$

البعد البؤري = $٢جـ$ $\therefore$ البعد البؤري $= ٢\sqrt{١٠}$

الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ $\therefore$ هـ $= \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٢}} > ١$

---

(٩) $٩س^{٢} - ٤ص^{٢} - ٥٤س - ١٦ص + ٢٩ = ٠$

الحل:

$٩س^{٢} - ٥٤س - ٤ص^{٢} - ١٦ص = -٢٩$

$٩(س^{٢} - ٦س) - ٤(ص^{٢} + ٤ص) = -٢٩$

اكمال المربع للسينات $= \left(\frac{-٦}{٢}\right)^{٢} = ٩$ اكمال المربع للصادات $= \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = ٤$

$٩(س^{٢} - ٦س + ٩) - ٤(ص^{٢} + ٤ص + ٤) = -٢٩ + ٨١ - ١٦$

$٩(س-٣)^{٢} - ٤(ص+٢)^{٢} = ٣٦$

$\therefore \frac{(س-٣)^{٢}}{٤} - \frac{(ص+٢)^{٢}}{٩} = ١$

المركز $(٣،-٢)$

$أ^{٢} = ٤ \leftarrow أ = ٢$

$ب^{٢} = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$ج^٢ = ا^٢ + ب^٢ \leftarrow ج^٢ = ٤ + ٩ \leftarrow ج = \sqrt{١٣}$

الرأسين= المركز $\pm$ ا

الرأسين = (٣،-٢)$\pm$ا ∴ رأساه (٥،-٢) ، (١،-٢)

البؤرتين = (٣،-٢)$\pm$ج ∴ البؤرتين $(٣+\sqrt{١٣}،-٢)$ ، $(٣-\sqrt{١٣}،-٢)$

طول المحور القاطع = ٢ا ∴ طول المحور القاطع = ٤

طول المحور المرافق = ٢ب ∴طول المحور المرافق = ٦

البعد البؤري = ٢ج ∴البعد البؤري = $٢\sqrt{١٣}$

الاختلاف المركزي = $\frac{ج}{ا}$ ∴ هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢} > ١$

المحور الثاني : ايجاد المعادلة من خلال العناصر

(١) النقطة ا(س،ص) تتحرك في المستوى بحيث ان الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين الثابتتين ($\pm$٥،٠) يساوي ٦ وحدات ما نوع المنحنى الذي تصنعه هذه النقطة اثناء حركتها وما معادلته .

✍الحل:

نوع القطع زائد (من التعريف)

المركز (٠،٠)

$٢ج = ١٠ \leftarrow ج = ٥$

$٢ا = ٦ \leftarrow ا = ٣$

$ج^٢ = ا^٢ + ب^٢ \leftarrow ٢٥ = ٩ + ب^٢ \leftarrow ب^٢ = ١٦$

$\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

(٢) اذا علمت ان معادلة قطع زائد هي $٤ص^٢ - ٩س^٢ = ٣٦$ جد الفرق المطلق بين النقطة $(٢، ٣\sqrt{٢})$ وبؤرتي هذا القطع .

الحل :

$$٤ص^٢ - ٩س^٢ = ٣٦$$

$$\frac{٤ص^٢}{٣٦} - \frac{٩س^٢}{٣٦} = ١ \leftarrow \frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٤} = ١$$

المقصود بالفرق المطلق $٢أ$

$$أ^٢ = ٩ \leftarrow أ = ٣$$

$$\therefore ٢أ = ٦$$

---

(٣) قطع زائد معادلته $٢س^٢ - ٣ص^٢ + ١٨ص = ك$ جد قيمة ك التي تجعل المحور القاطع لهذا القطع موازيا لمحور الصادات .

الحل :

$$٢س^٢ - ٣ص^٢ + ١٨ص = ك$$

$$٢س^٢ - ٣\left(ص^٢ - ٦ص\right) = ك$$

اكمال المربع

$$٢س^٢ - ٣\left(ص^٢ - ٦ص + ٩\right) = ك - ٢٧$$

$$٢س^٢ - ٣\left(ص - ٣\right)^٢ = ك - ٢٧$$

$$\frac{س^٢}{\frac{ك-٢٧}{٢}} - \frac{(ص-٣)^٢}{\frac{ك-٢٧}{٣}} = ١$$ بما ان المحور القاطع لهذا القطع موازيا لمحور الصادات

$$\frac{ك-٢٧}{٣} < ٠ \leftarrow ك < ٢٧$$

(٤) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٠،٠) ورأساه (±٣،٠) وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

الحل :

المركزه (٠،٠)

من الراسين نجد (أ)

$\text{أ} = ٣$

$٢\text{ب} = ٤ \leftarrow \text{ب} = ٢$

$$\frac{\text{س}^٢}{٩} - \frac{\text{ص}^٢}{٤} = ١$$

---

(٥) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٥،١) ، (-١،١) وطول محوره القاطع ٣ وحدات.

الحل :

المركز (٢،١)

من البؤرتين

$٢\text{جـ} = ٦ \leftarrow \text{جـ} = ٣$

$٢\text{أ} = ٣ \leftarrow \text{أ} = \frac{٣}{٢}$

$\text{جـ}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ \leftarrow ٩ = \frac{٩}{٤} + \text{ب}^٢ \leftarrow \text{ب}^٢ = \frac{٢٧}{٤}$

$$\therefore \frac{(\text{س} - ٢)^٢}{\frac{٩}{٤}} - \frac{(\text{ص} - ١)^٢}{\frac{٢٧}{٤}} = ١$$

---

(٦) جد معادلة القطع الزائد الذي نهايتا محوره المرافق (٠،٣) ، (٠،-٣) ويمر بالنقطة(٢،٣) .

الحل :

بما ان التغير في الصادات في نهايتا المحور المرافق في القطع الزائد فإن القطع سيني .

المركز (٠،٠)

$٢ب = ٦ \leftarrow ب = ٣$

بما ان القطع يمر بالنقطة (٢،٣) فإنها تحقق المعادلة $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

$\frac{٤}{أ^٢} - \frac{٩}{ب^٢} = ١$ $\therefore \frac{٤}{أ^٢} - \frac{٩}{٩} = ١ \leftarrow \frac{٤}{أ^٢} = ٢ \leftarrow أ^٢ = ٢$

$\frac{س^٢}{٢} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

---

(٧) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (١،٢) واحد رأسيه (-٣،٢) واختلافه المركزي هـ $= \frac{٣}{٢}$.

الحل:

مركزه (١،٢) واحد رأسيه (-٣،٢)

أ= ٤ (أ : المسافة بين المركز والراس)

$هـ = \frac{٣}{٢} = \frac{جـ}{أ} \leftarrow ٣أ = ٢جـ$

$\therefore ١٢ = ٢جـ \leftarrow جـ = ٦$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow ٣٦ = ١٦ + ب^٢ \leftarrow ب^٢ = ٢٠$

$\therefore \frac{(س-١)^٢}{١٦} - \frac{(ص-٢)^٢}{٢٠} = ١$

---

(٨) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره القاطع على محور الصادات وطول محوره المرافق يساوي ٤ وحدات وبعده البؤري $٢\sqrt{٥}$.

الحل:

مركزه (٠،٠)

بما ان محوره القاطع على محور الصادات فإنه صادي

$$\text{٢ب} = \text{٤} \leftarrow \text{ب} = \text{٢}$$

$$\text{٢جـ} = \text{٢}\sqrt{\text{٥}} \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{\text{٥}}$$

$$\text{جـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}} \leftarrow \text{٥} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{٤} \leftarrow \text{أ}^{\text{٢}} = \text{١}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{١}} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٤}} = \text{١}$$

(٩) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق يساوي ٧ وحدات وينطبق محوره المرافق على محور الصادات ويمر القطع بالنقطة (٣، −٢).

الحل:

$$\text{٢ب} = \text{٧} \leftarrow \text{ب} = \frac{\text{٧}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١}$$

$$\therefore \frac{\text{٩}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٤}}{\frac{\text{٤٩}}{\text{٤}}} = \text{١} \leftarrow \frac{\text{٩}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١٦}}{\text{٤٩}} = \text{١} \leftarrow \frac{\text{٩}}{\text{أ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٦٥}}{\text{٤٩}}$$

$$\text{أ}^{\text{٢}} = \frac{\text{٤٩} \times \text{٩}}{\text{٦٥}} \leftarrow \text{أ}^{\text{٢}} = \frac{\text{٤٤١}}{\text{٦٥}}$$

$$\therefore \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\frac{\text{٤٤١}}{\text{٦٥}}} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\frac{\text{٤٩}}{\text{٤}}} = \text{١}$$

(١٠) قطع زائد بعده البؤري يساوي مثلي البعد بين طرفي محوره المرافق جد اختلافه المركزي هـ .

الحل:

$$\text{٢جـ} = \text{٤ب} \leftarrow \text{جـ} = \text{٢ب}$$

$$\text{جـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}} \leftarrow \text{٤ب}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}} \leftarrow \text{٣ب}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} \leftarrow \text{أ} = \sqrt{\text{٣}}\,\text{ب}$$

$$\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{٢ب}}{\sqrt{\text{٣}}\,\text{ب}} = \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٣}}}$$

(١١) قطع مخروطي معادلته (س + ٢ص)(س − ٢ص) = ٤ جد اختلافه المركزي .

الحل:

(س + ٢ص)(س − ٢ص) = ٤

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤ص}^{\text{٢}} = \text{٤} \leftarrow \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٤}} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{١}} = \text{١}$$

المركز (٠،٠)

$$\text{أ}^{\text{٢}} = \text{٤} \leftarrow \text{أ} = \text{٢}$$

$$\text{ب}^{\text{٢}} = \text{١} \leftarrow \text{ب} = \text{١}$$

$$\text{جـ}^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}} \leftarrow \text{جـ}^{\text{٢}} = \text{٤} + \text{١} \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{\text{٥}}$$

$$\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{\text{٥}}}{\text{٢}}$$

(١٢) قطع مخروطي معادلته (س + ٣ص)(س − ٣ص) = ١٨ جد احداثيات بؤرتيه .

الحل:

(س + ٣ص)(س − ٣ص) = ١٨

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩ص}^{\text{٢}} = \text{١٨}$$

$$\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{١٨}} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٢}} = \text{١}$$

المركز (٠،٠)

$$\text{أ}^{\text{٢}} = \text{١٨} \leftarrow \text{أ} = \sqrt{\text{١٨}}$$

$$\text{ب}^{\text{٢}} = \text{٢} \leftarrow \text{ب} = \sqrt{\text{٢}}$$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = ١٨ + ٢ \leftarrow جـ = \sqrt{٢٠}$

البؤرتين = $(٠،٠) \pm جـ$

البؤرتين $(\sqrt{٢٠}، ٠)$ ، $(-\sqrt{٢٠}، ٠)$

---

(١٣) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى القطع الزائد $٤س^٢ - ٣ص^٢ = ١$ عند $(١،١)$.

الحل:

$٨س - ٦ص \frac{ءص}{ءس} = ٠ \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤س}{٣ص}$

$م = \frac{٤}{٣}$

معادلة المماس

$(ص - ص_١) = م(س - س_١)$

$(ص - ١) = \frac{٤}{٣}(س - ١)$

معادلة العمودي على المماس

$(ص - ص_١) = -\frac{١}{م}(س - س_١)$

$(ص - ١) = -\frac{٣}{٤}(س - ١)$

---

(١٤) قطع زائد مركزه $(٠،٠)$ وبؤرتاه تقعان على محور السينات ويمس المستقيم $ص = \sqrt{٣}س + ٢$ عند النقطة $(٢\sqrt{٣}، ٤)$ جد معادلته.

الحل:

مركزه $(٠،٠)$

$$\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١}$$

$(\text{٢}\sqrt{\text{٣}}\text{،}\text{٤})$ تحقق المعادلة

$$\frac{\text{١٢}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١٦}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{١} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{١})$$

من معادلة المستقيم $\text{ص} = \sqrt{\text{٣}}\,\text{س} + \text{٢}$ نستنتج ان ميل المماس $\sqrt{\text{٣}}$

$$\frac{\text{٢س}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٢ص ص}'}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{٠} \leftarrow \frac{\text{٤}\sqrt{\text{٣}}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٨}\sqrt{\text{٣}}}{\text{ب}^{\text{٢}}} = \text{٠} \leftarrow \frac{\text{١}}{\text{أ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{\text{ب}^{\text{٢}}} \leftarrow \text{ب}^{\text{٢}} = \text{٢أ}^{\text{٢}}$$

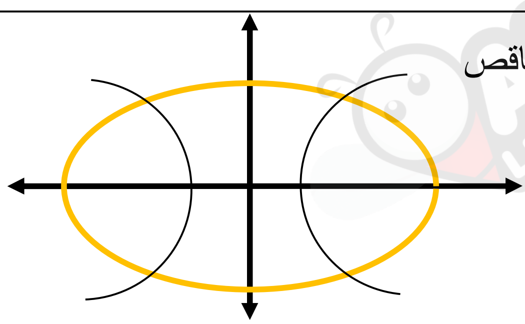
$$\frac{\text{١٢}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١٦}}{\text{٢أ}^{\text{٢}}} = \text{١} \leftarrow \frac{\text{١٢}}{\text{أ}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٨}}{\text{أ}^{\text{٢}}} = \text{١} \leftarrow \frac{\text{٤}}{\text{أ}^{\text{٢}}} = \text{١} \leftarrow \text{أ}^{\text{٢}} = \text{٤}$$

$$\therefore \text{ب}^{\text{٢}} = \text{٢} \times \text{٤} \leftarrow \text{ب}^{\text{٢}} = \text{٨}$$

$$\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٤}} - \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٨}} = \text{١}$$

---

(١٥) جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتاه القطع الناقص $\text{٩س}^{\text{٢}} + \text{١٦ص}^{\text{٢}} = \text{١٤٤}$ وبؤرتاه هما رأسا هذا القطع .



الحل :

القطع الناقص

$$\text{٩س}^{\text{٢}} + \text{١٦ص}^{\text{٢}} = \text{١٤٤}$$

$$\frac{\text{٩س}^{\text{٢}}}{\text{١٤٤}} + \frac{\text{١٦ص}^{\text{٢}}}{\text{١٤٤}} = \text{١} \leftarrow \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{١٦}} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٩}} = \text{١}$$

المركز (٠،٠)

$$\text{أ}^{\text{٢}} = \text{١٦} \leftarrow \text{أ} = \text{٤}$$

$$\text{ب}^{\text{٢}} = \text{٩} \leftarrow \text{ب} = \text{٣}$$

$ج^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow ج^2 = ١٦ - ٩ \leftarrow ج = \sqrt{٧}$

الرأسين= المركز $\pm$ أ

الرأسين = (٠،٠) $\pm$ أ		$\therefore$ رأساه ($\pm$ ٤،٠)

البؤرتين = (٠،٠) $\pm$ ج		$\therefore$ البؤرتين ($\pm \sqrt{٧}$،٠)

القطع الزائد

الرأسين = (٠،٠) $\pm$ أ		$\therefore$ البؤرتين ($\pm$ ٤،٠)

البؤرتين = (٠،٠) $\pm$ ج		$\therefore$ رأساه ($\pm \sqrt{٧}$،٠)

$ج^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow ١٦ = ٧ + ب^2 \leftarrow ب = ٣$

$\frac{س^2}{٧} - \frac{ص^2}{٩} = ١$

---

(١٦) تتحرك نقطة ن(س،ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س =جاهـ+جتاهـ ،
ص = ٢ $\sqrt{جاهـ جتاهـ}$ حيث هـ زاوية متغيرة اثبت ان النقطة ن(س،ص) تتحرك على منحنى قطع زائد .

الحل :

س =جاهـ+جتاهـ $\leftarrow$ $س^2$ =$جا^2$هـ+٢جاهـ جتاهـ+$جتا^2$هـ

$\therefore$ $س^2$ = ١+جا٢هـ .... (١)

ص = ٢ $\sqrt{جاهـ جتاهـ}$ $\leftarrow$ $ص^2$ = ٤جاهـ جتاهـ

$\therefore$ $ص^2$ = ٢جا٢هـ $\leftarrow$ $\frac{ص^2}{٢}$ =جا٢هـ.................................... (٢)

نعوض (٢) في (١)

$\therefore$ $س^2 = ١ + \frac{ص^2}{٢}$ $\leftarrow$ $س^2 - \frac{ص^2}{٢} = ١$ قطع زائد

(١٧) اذا كانت المعادلتين س = قا ن ، ص = ظا ن $\frac{-\pi}{٢} < ن < \frac{\pi}{٢}$ تحددان موقع الجسم أ(س،ص) على المنحنى في اللحظة ن ، جد معادلة المنحنى بدلالة س ، ص .

الحل :

س = قا ن ← س^{٢} = قا^{٢} ن ....(١)

ص = ظا ن ← ص^{٢} = ظا^{٢} ن ....(٢)

من (١) ، (٢)

س^{٢} = قا^{٢} ن

ص^{٢} = ظا^{٢} ن

س^{٢} − ص^{٢} = قا^{٢} ن − ظا^{٢} ن

س^{٢} − ص^{٢} = ١

---

(١٨) اذا كان هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين

$\frac{س^{٢}}{ل^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} = ١$ ، $\frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ل^{٢}} = ١$ ، اثبت ان $\frac{١}{هـ_{١}^{٢}} + \frac{١}{هـ_{٢}^{٢}} = ١$

الحل :

$\frac{س^{٢}}{ل^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} = ١$

المركز (٠،٠)

أ^{٢} = ل^{٢} ← أ = ل

ب^{٢} = ك^{٢} ← ب = ك

جـ^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} ← جـ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢}}$

$$\therefore\ \text{هـ}_{١} = \frac{\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}}{\text{ل}} \leftarrow \text{هـ}_{١}^{٢} = \frac{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}}$$

$$\frac{١}{\text{هـ}_{١}^{٢}} = \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}} \text{..} (١)$$

$$\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ل}^{٢}} = ١$$

المركز (٠،٠)

$$\text{أ}^{٢} = \text{ك}^{٢} \leftarrow \text{أ} = \text{ك}$$

$$\text{ب}^{٢} = \text{ل}^{٢} \leftarrow \text{ب} = \text{ل}$$

$$\text{جـ}^{٢} = \text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢} \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}$$

$$\therefore\ \text{هـ}_{٢} = \frac{\sqrt{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}}{\text{ك}} \leftarrow \text{هـ}_{٢}^{٢} = \frac{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}{\text{ك}^{٢}}$$

$$\frac{١}{\text{هـ}_{٢}^{٢}} = \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}} \text{..} (٢)$$

من (١) ، (٢)

$$\frac{١}{\text{هـ}_{١}^{٢}} + \frac{١}{\text{هـ}_{٢}^{٢}} = \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}} + \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}} = \frac{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}$$

$$\therefore\ \frac{١}{\text{هـ}_{١}^{٢}} + \frac{١}{\text{هـ}_{٢}^{٢}} = ١$$

تمرين

٥

(١) جد معادلة المماس لمنحنى القطع الزائد الذي معادلته $٩س^{٢} - ٥ص^{٢} = ٤$ عند النقطة (١، −١).

الحل:

....

....

....

....

....

....

(٢) جد البعد البؤري للقطع الذي معادلته $\frac{س^{٢}}{٩} - \frac{ص^{٢}}{٧} = ١$.

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(٣) قطع زائد اختلافه المركزي $\frac{٥}{٢}$، واحد رأسيه النقطة (٠، -١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (٣، -١) جد معادلته ؟

الحل :

....

....

....

....

....

....

(٤) قطع زائد معادلته ٩س^{٢} – ١٨س = ٤ص^{٢} + ٨ص + ٣١ جد كلا مما يلي لهذا القطع :

(أ) احداثيات كلا من الرأسين . (ب) احداثيات كلا من البؤرتين

(ج) طول المحور القاطع ومعادلته (د) الاختلاف المركزي .

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

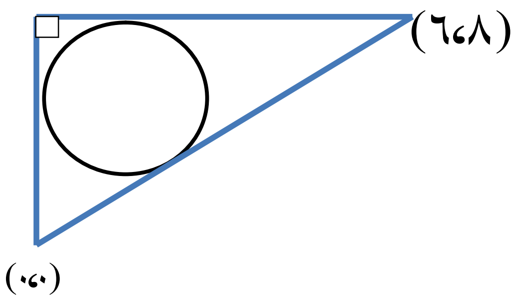
....

(٥) جد معادلة الدائرة التي تمر بمركز القطع الزائد الذي احداثيات بؤرتيه (٣، -١)،(-٧، -١)وتمر بالنقطة (٤،٢) ويقع مركزها على محور الصادات ؟

الحل:

ايجاد معادلة القطوع المخروطية من خلال الاشكال

السؤال الاول : من خلال الشكل المجاور جد معادلة الدائرة ؟



الحل :

....

....

....

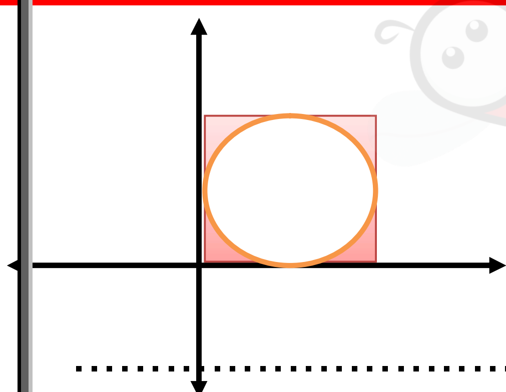
....

....

....

السؤال الثاني: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا اذا علمت ان

مساحة الجزء المظلل $(٣٢ - ٨\pi)$



الحل :

....

....

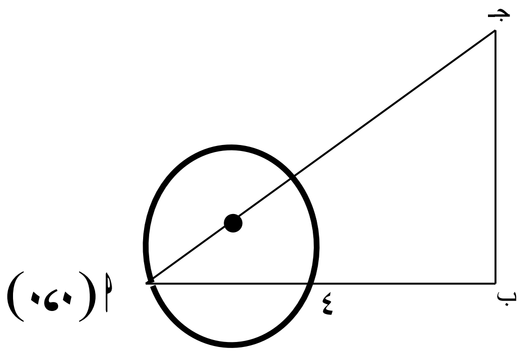
....

....

....

السؤال الثالث: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا حيث

م : مركز الدائرة $\overline{\text{أب}} = ٨$ ، $\overline{\text{ب جـ}} = ٦$

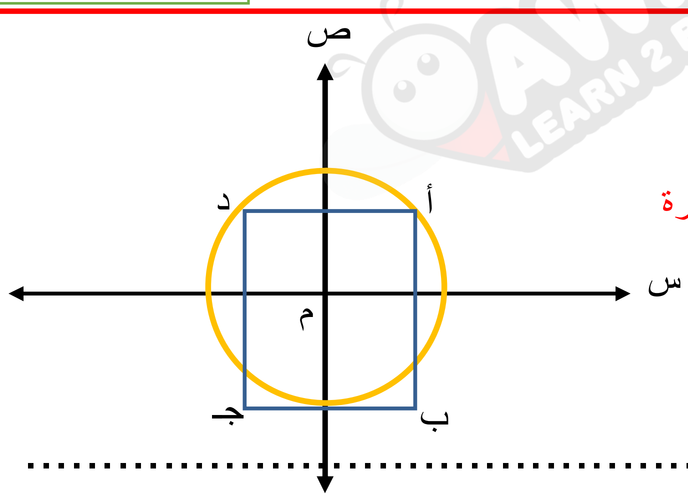


الحل :

السؤال الرابع: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا

حيث : $\overline{\text{أب}} = ١٠$ وحدة طول م : مركز الدائرة

مساحة المستطيل = ٦٠ وحدة مساحة



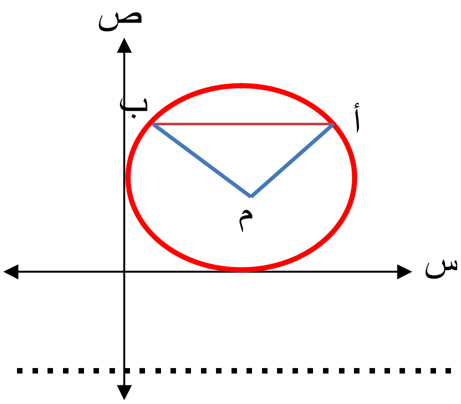
الحل :

السؤال الخامس: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا

حيث : $\overline{أب}$ = ٨ م : مركز الدائرة

مساحة المثلث أ م ب = ١٢ وحدة مساحة

الحل :



....

....

....

....

....

....

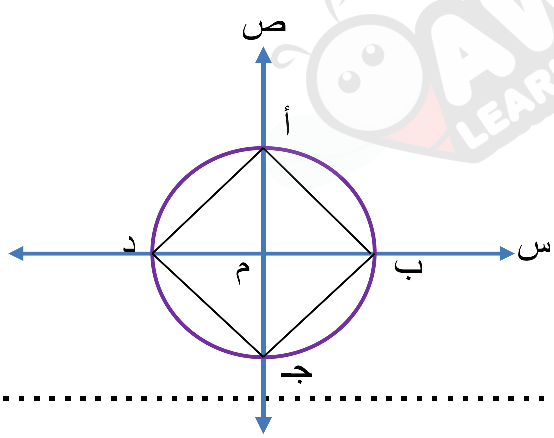
....

السؤال السادس: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا

حيث مساحة المربع أ ب جـ د =١٨

م : مركز الدائرة

الحل :



....

....

....

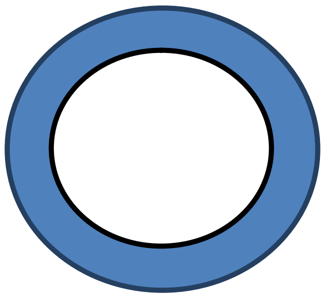
....

....

السؤال السابع: في الشكل المحاور دائرتان متحدتان في المركز وكانت معادلة الدائرة الكبرى

$(س + ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٩$ جد معادلة الدائرة الصغرى علما بان

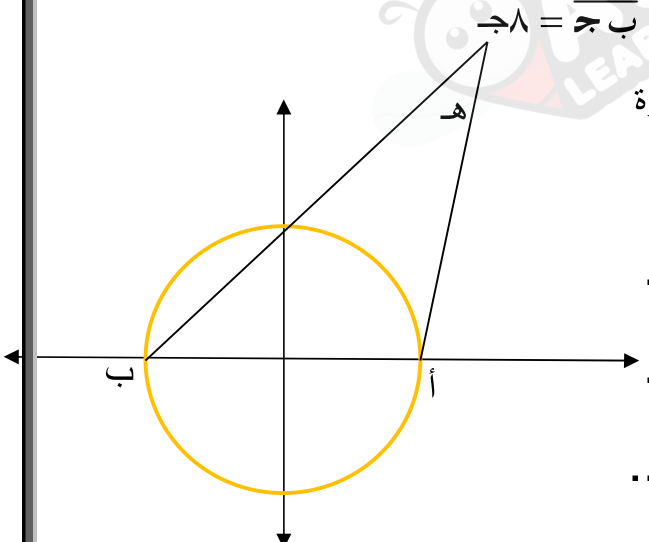
مساحة المنطقة المظللة ٥π سم ٢



الحل :

السؤال الثامن: دائرة مركزها (٠،٠) فيها $\overline{أجـ} = ٥$ ، $\overline{ب جـ} = ٨$جـ

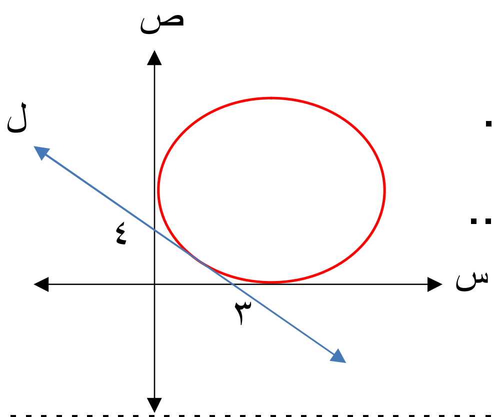
أ ، ب طرفا قطر الدائرة ، ∡هـ = ٦٠° جد معادلة الدائرة



الحل :

السؤال التاسع: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا والتي تمس المحورين والمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$

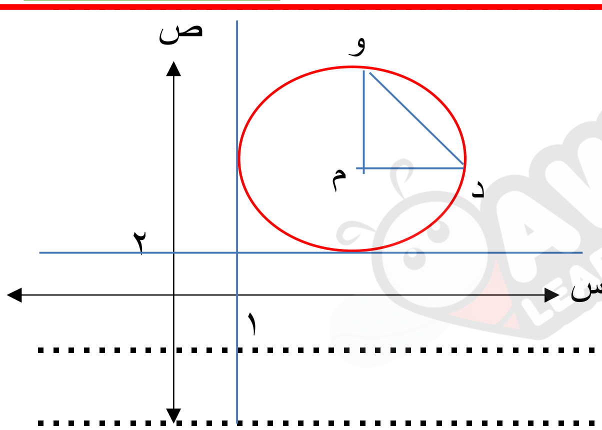
الحل :



السؤال العاشر: جد معادلة الدائرة المرسومة جانبا

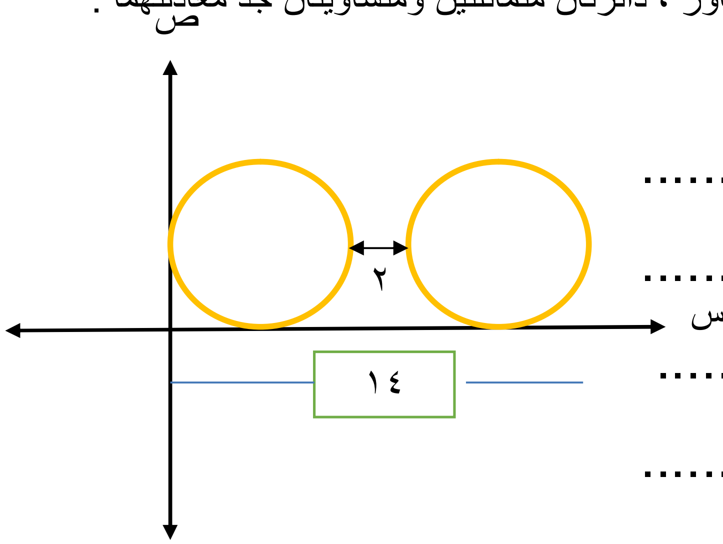
$\overline{دو} = \sqrt{٨}$ م : مركز الدائرة

الحل :



السؤال الحادي عشر: من خلال الشكل المجاور ، دائرتان متماثلتين ومتساويتان جد معادلتهما .

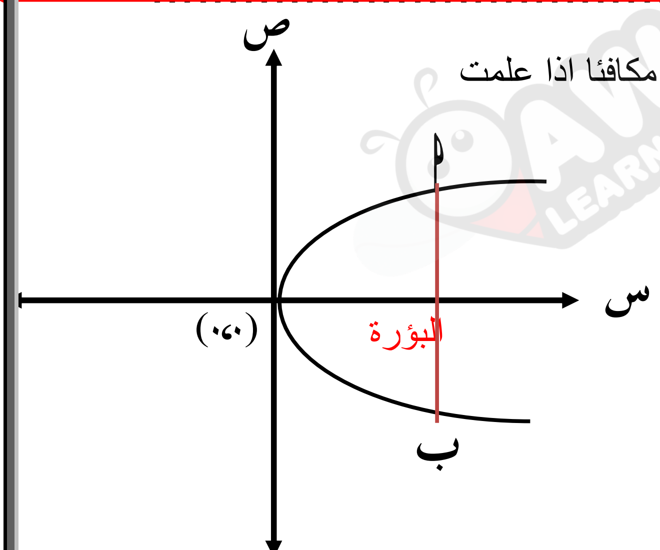
الحل :



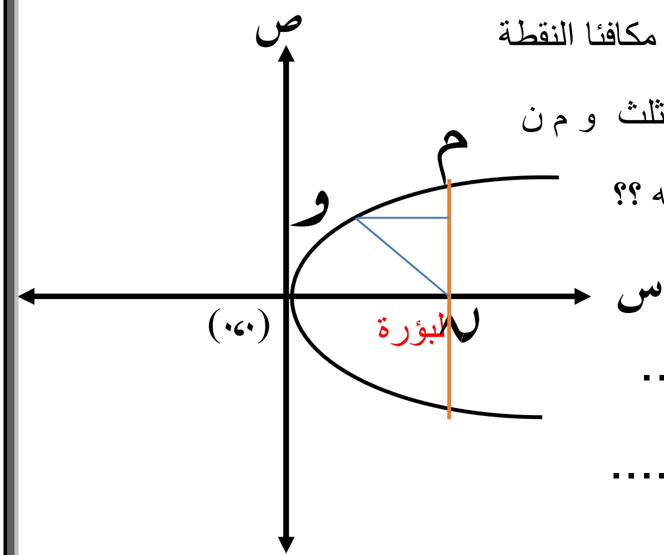
السؤال ١٢: من خلال الشكل المجاور الذي يمثل قطعا مكافئا اذا علمت

ان طول اب = ٨ جد معادلته؟

الحل :

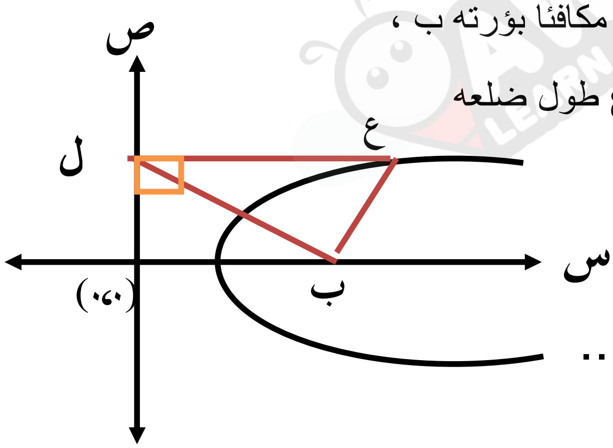


السؤال ١٣: من خلال الشكل المجاور الذي يمثل قطعا مكافئا النقطة و(س،ص) تتحرك على منحنى القطع بحيث يبقى المثلث و م ن قائم الزاوية في م وكان $\overline{\text{م و}} + \overline{\text{و ن}} = ٣$ فجد معادلته ؟؟



الحل :

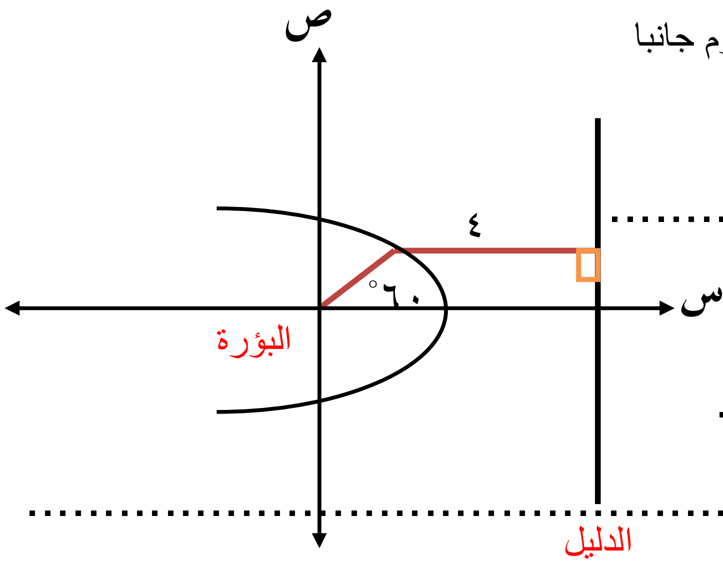
السؤال١٤: من خلال الشكل المجاور الذي يمثل قطعا مكافئا بؤرته ب ، اذا علمت ان المثلث ب ع ل مثلث متطابق الاضلاع طول ضلعه ٤٠ وحدة طول ، جد معادلته ؟



الحل :

السؤال ١٥ : جد معادلة القطع المكافئ المرسوم جانبا

الحل :



....

....

....

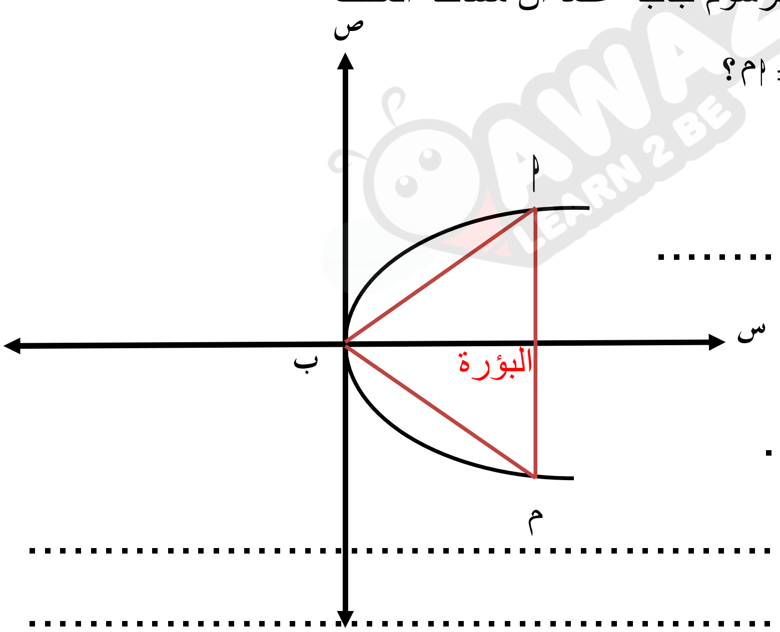
....

....

السؤال ١٦ : جد معادلة القطع المكافئ المرسوم جانبا علما ان مساحة المثلث

أ ب جـ = ١٨ وحدة مساحة ، علما أب = أم ؟

الحل :



....

....

....

....

....

....

....

....