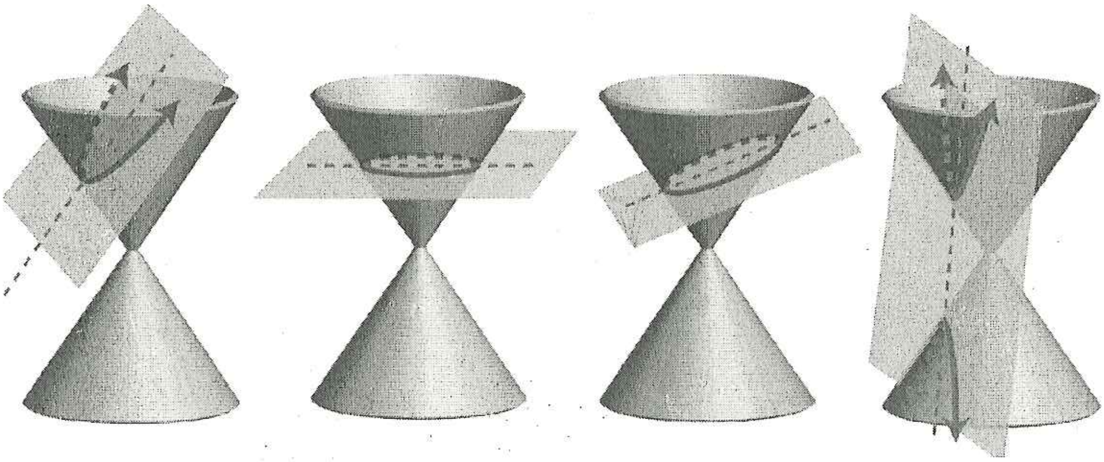
وقل ربِّ زدني علما

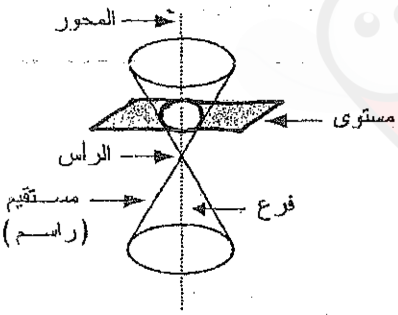


القطوع المخروطية

عثمان حنفية

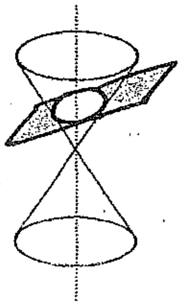
القطـــوع المخروطيـــة

هي منحنيات مستوية تنتج عن تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم مزدوج في أوضاع مختلفــة ، وهذه المنحنيـات هي :

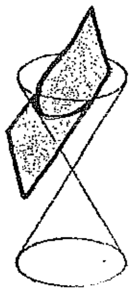


أولا : الدائــرة : هي منحنى مستوي ينتج عن قطع المخروط بمســتوى عمودي على المحور (يوازي قاعدة المخروط) ولا يمر بالرأس .

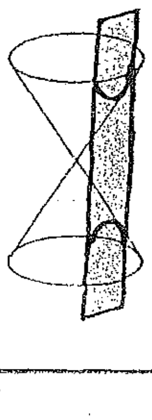
ثانيـا : **القطـع الناقص** : هو منحنى مستوي ينتج عن قطع المخروط بمســتوى مائل قليلا على المحور ويقطع فرعا واحدا .



ثالثــا : **القطـع المكافئ** : هو منحنى مستوي ينتج عن قطع المخروط بمســتوى يوازي مســتقيم على ســطح المخروط ويقطع فرعا واحدا .



رابعــا : **القطـع الزائـد** : هو منحنى مستوي ينتج عن قطع فرعي المخروط بمســتوى لا يمر بالرأس .

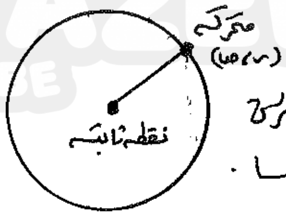


الدائرة

هي المنحنى الذي ترسمه نقطة متحركة في المستوى بالشرط التالي:

بعدها عن نقطة ثابتة = مقدار ثابت

وتسمى:



النقطة الثابتة: مركز الدائرة

البعد الثابت: نصف قطرها.

لإيجاد معادلتها:

$\boxed{١}$ الصورة القياسية:

← يلزم: مركزها (د، هـ)

نصف قطرها = ر

القانون: $(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{ر}^{٢}$.

* جد معادلة الدائرة في الحالات التالية:

١) مركزها (٢، −٣) ونصف قطرها ٤ وحدات

الحل: $(\text{س}-٢)^{٢}+(\text{ص}+٣)^{٢}=١٦$

٢) مركزها (−١، ٤) وتمر بالنقطة (٢، ٣)

الحل:

$(\text{س}+١)^{٢}+(\text{ص}-٤)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

$\overset{\text{س}}{(٢}،\overset{\text{ص}}{٣)}$

← $(٢+١)^{٢}+(٣-٤)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

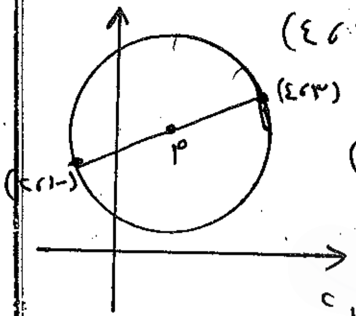
$٩+١=\text{ر}^{٢}$

∴ $\text{ر}^{٢}=١٠$

∴ معادلة الدائرة هي:

$(\text{س}+١)^{٢}+(\text{ص}-٤)^{٢}=١٠$

٣) نهايتا قطر فيها هما النقطتان: (−١، ٢) ، (٣، ٤)



الحل:

$\text{م}=\left(\frac{-١+٣}{٢}،\frac{٢+٤}{٢}\right)$

∴ م = (١، ٣)

$(\text{س}-١)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

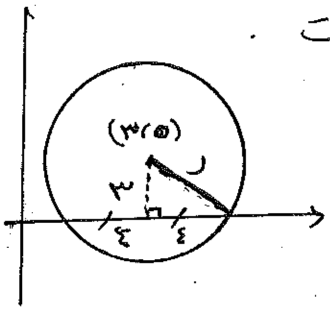
$\overset{\text{س}}{(٣}،\overset{\text{ص}}{٤)}$

← $(٣-١)^{٢}+(٤-٣)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

$٤+١=\text{ر}^{٢}$ ← $\text{ر}^{٢}=٥$.

∴ معادلة الدائرة: $(\text{س}-١)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}=٥$

٤) مركزها (٥، ٣) وتقطع من محور السينات وترا طوله ٨ وحدات.



الحل:

$\text{ر}^{٢}=(٣)^{٢}+(٤)^{٢}$

$\text{ر}^{٢}=٢٥$

ر = ٥

معادلتها: $(\text{س}-٥)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}=٢٥$

حل آخر:

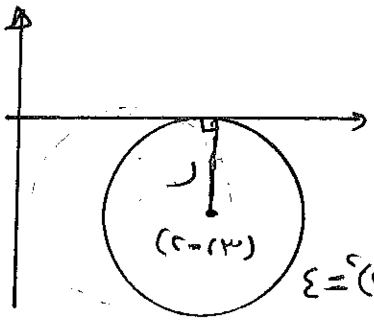
النقطة $\overset{\text{س}}{(٩}،\overset{\text{ص}}{٠)}$ تقع على الدائرة

$(\text{س}-٥)^{٢}+(\text{ص}-٣)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

$(٩-٥)^{٢}+(٠-٣)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

$١٦+٩=\text{ر}^{٢}$ ← ر = ٥.

٥) مركزها (٣، −٢) وتمس محور السينات



الحل:

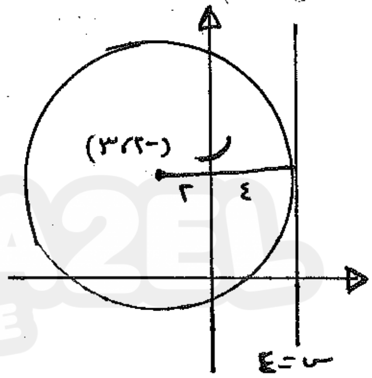
من الرسم:

ر = ٢

معادلتها:

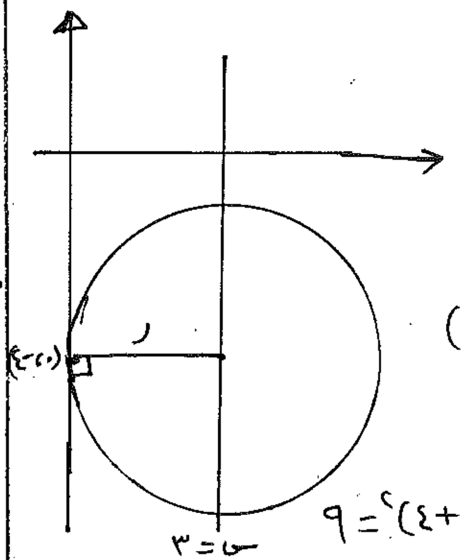
$(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}+٢)^{٢}=٤$

٦) مركزها (−٢، ٣) وتمس المستقيم
س = ٤



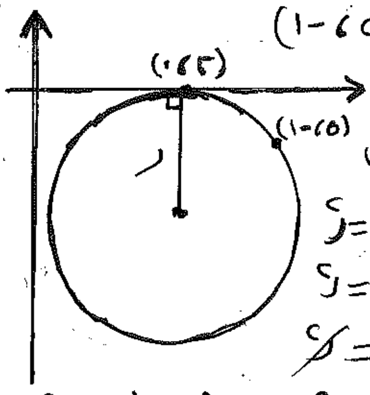
الحل:
من الرسم
ر = ٤ + ٢
ر = ٦
معادلتها:
(س+٢)^{2} + (ص−٣)^{2} = ٣٦

٧) يقع مركزها على المستقيم س = ٣
وتمس محور الصادات عند النقطة (٠، −٤)



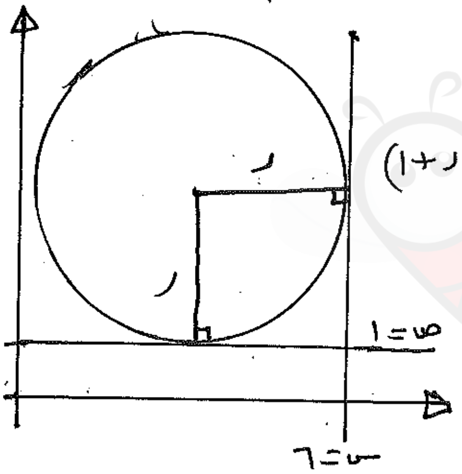
الحل:
من الرسم
ر = ٣
م = (٣، −٤)
معادلتها:
(س−٣)^{2} + (ص+٤)^{2} = ٩

٨) تمس محور السينات عند النقطة (٢، ٠)
وتمر بالنقطة (٥، −١)



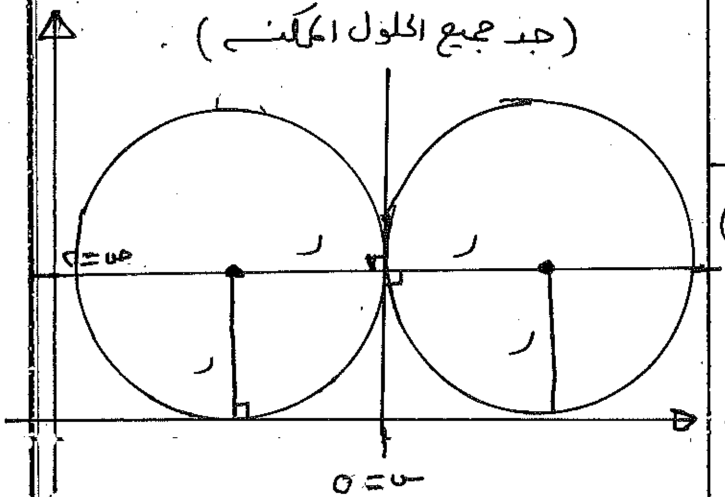
م = (٢، −ر)
(٥، −١) تحقق معادلتها
(س−٢)^{2} + (ص+ر)^{2} = ر^{2}
(٥−٢)^{2} + (−١+ر)^{2} = ر^{2}
٩ + $\cancel{ر^{2}}$ − ٢ر + ١ = $\cancel{ر^{2}}$
١٠ = ٢ر ← ر = ٥ ← م = (٢، −٥)
معادلتها:
(س−٢)^{2} + (ص+٥)^{2} = ٢٥

٩) الدائرة المرسومة في الشكل علما بأن
مركزها يقع على المستقيم ٣س − ٢ص = ٦



الحل:
م = (٦−ر، ر+١)
لكن مركزها تحقق معادلة المستقيم.
٣(٦−ر) − ٢(ر+١) = ٦
١٨ − ٣ر − ٢ر − ٢ = ٦
١٦ − ٥ر = ٦ ← ٥ر = ١٠ ← ر = ٢
∴ م = (٤، ٣)
معادلتها: (س−٤)^{2} + (ص−٣)^{2} = ٤

١٠) تمس محور السينات والمستقيم س = ٥
ويقع مركزها على المستقيم ص = ٢
(جد جميع الحلول الممكنة).



الحل: ر = ٢
الدائرة الأولى: م = (٥−ر، ٢) = (٣، ٢)
معادلتها: (س−٣)^{2} + (ص−٢)^{2} = ٤
الدائرة الثانية: م = (٥+ر، ٢) = (٧، ٢)
معادلتها: (س−٧)^{2} + (ص−٢)^{2} = ٤

١١) مركزها (١،-١) وتمس المستقيم
١٢ص = ٥س + ٩

الحل :

ترتيب المعادلة : ١٢ص - ٥س - ٩ = ٠

ر = |١٢×-١ - ٥×١ - ٩| ÷ √((١٢)² + (-٥)²)

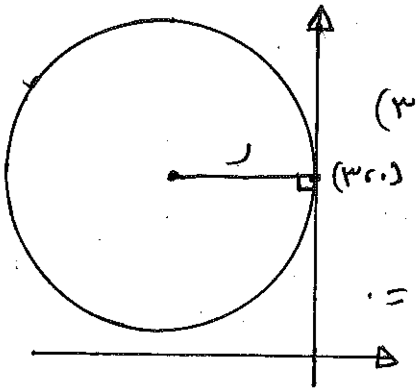
ر = |-٢٦| ÷ ١٣ = ٢٦ ÷ ١٣ = ٢

∴ معادلتها : (س - ١)² + (ص + ١)² = ٤

١٢) تمس محور الصادات عند النقطة (٠،٣) في الربع الثاني وتمس المستقيم
٣س + ٤ص = ٤

الحل :

مركزها = (-ر، ٣)



معادلة المماس :
٣س + ٤ص - ٤ = ٠

لكن

ر = |-٣ر + ١٢ - ٤| ÷ √(٩ + ١٦)

ر = |٨ - ٣ر| ÷ ٥

|٨ - ٣ر| = ٥ر

٨ - ٣ر = ٥ر أو ٨ - ٣ر = -٥ر

٨ = ٨ر ، ٨ = -٢ر

ر = ١ ، ر = -٤ X

∴ مركزها (-١، ٣)

معادلتها : (س + ١)² + (ص - ٣)² = ١

١٣) تمس المحورين ونصف قطرها ٣ وحدات وتقع تحت محور السينات
(جد جميع الحلول الممكنة)

الحل :

ر = ٣

الدائرة الأولى : في الربع الثالث

م = (-٣، -٣)

معادلتها : (س + ٣)² + (ص + ٣)² = ٩

الدائرة الثانية : في الربع الرابع

م = (٣، -٣)

معادلتها : (س - ٣)² + (ص + ٣)² = ٩

١٤) تمس المحورين وتمر بالنقطة (-٢، ١)

الحل :

م = (-ر، ر) لأنها تقع في الربع الثاني

(-٢، ١) تحقق معادلتها

(س + ر)² + (ص - ر)² = ر²

(-٢ + ر)² + (١ - ر)² = ر²

ر² - ٤ر + ٤ + ١ - ٢ر + ~~ر²~~ = ~~ر²~~

ر² - ٦ر + ٥ = ٠

(ر - ٥)(ر - ١) = ٠

ر = ٥ ، ر = ١

(س + ٥)² + (ص - ٥)² = ٢٥ ، (س + ١)² + (ص - ١)² = ١

١٥) تمس المحورين في الربع الرابع وتمس المستقيم ٣س - ٤ص = ١٢

← ٣س - ٤ص - ١٢ = ٠

الحل :

م = (ر، -ر)

ر = |٣ر + ٤ر - ١٢| ÷ √(٩ + ١٦)

ر = |٧ر - ١٢| ÷ ٥ ← |٧ر - ١٢| = ٥ر

٧ر − ١٢ = ٥ر   أو   ٧ر − ١٢ = −٥ر

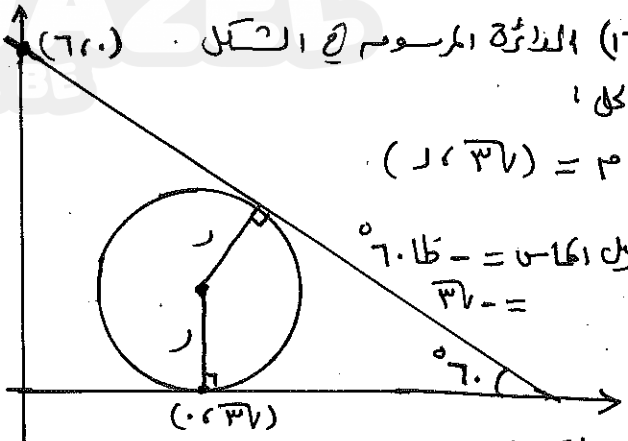
٢ر = ١٢   ١٢ر = ١٢

ر = ٦   أو   ر = ١

م = (٦ ، −٦)   أو   م = (١ ، −١)

(س − ٦)² + (ص + ٦)² = ٣٦   أو   (س − ١)² + (ص + ١)² = ١

(١٦) الدائرة المرسومة في الشكل



الحل:

م = (√٣ ، ر)

ميل المماس = − ظا ٦٠° = −√٣

معادلته:

ص − ٦ = −√٣ (س − ٠)

∴ ص + √٣ س − ٦ = ٠

∴ ر = |ر + ٣ − ٦| / √(١ + ٣) = |ر − ٣| / ٢

∴ ٢ر = |ر − ٣|

ر − ٣ = ٢ر   أو   ر − ٣ = −٢ر

ر = −٣ ✗   ٣ر = ٣

ر = ١

∴ معادلتها:

م = (√٣ ، ١)

(س − √٣)² + (ص − ١)² = ١

(١٧) نصف قطرها = ٤√٢ سم وتمس المستقيم ص = س − ٤ ويقع مركزها على المستقيم ص + س = ٤

الحل:

مركزها = (د ، هـ) يحقق معادلة المستقيم

∴ هـ + د = ٤

∴ هـ = ٤ − د

∴ م = (د ، ٤ − د)

معادلة المماس: س − ص − ٤ = ٠

لكن ر = |د − ٤ + د − ٤| / √(١ + ١)

٤√٢ = |٢د − ٨| / √٢

٨ = |٢د − ٨|

٢د − ٨ = ٨   أو   ٢د − ٨ = −٨

٢د = ١٦   أو   ٢د = ٠

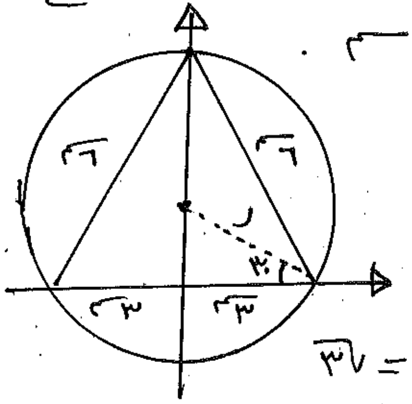
د = ٨   د = ٠

هـ = −٤   هـ = ٤

م = (٨ ، −٤)   م = (٠ ، ٤)

(س − ٨)² + (ص + ٤)² = ٣٢   أو   س² + (ص − ٤)² = ٣٢

(١٨) الدائرة المرسومة في الشكل والتي تمر برؤوس المثلث أ ب جـ المتساوي الأضلاع وطول ضلعه ٦ سم.



الحل:

م = (٠ ، هـ)

ظا ٣٠ = هـ / ٣

١ / √٣ = هـ / ٣

∴ هـ = ٣ / √٣ = √٣

∴ م = (٠ ، √٣)

لكن ر² = (٣)² + (√٣)² = ١٢

∴ معادلتها: س² + (ص − √٣)² = ١٢

تدريب: جد معادلة الدائرة:

١) تمس المستقيمين: ص = ١ ، ص = ٩ ويقع مركزها على المستقيم ٣س + ٤ص = ٣٢

٢) تمس المستقيم ص = ٢ عند النقطة (٤ ، ٢) وتمر بالنقطة (٥ ، ٣)

٣) نصف قطرها ٥ وحدات وتمس المستقيم س = −١ عند النقطة (−١ ، ٣). (جد جميع الحلول الممكنة)

ثانيا : الصورة العامة :

اذا كانت : ل ، ك ، جـ اعدادا حقيقية

فإن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + جـ = 0$

حيث :

1) مركزها $= (-ل ، -ك)$

$= (-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص$)$

2) معامل $س^2 =$ معامل $ص^2 = 1$

3) $نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ} > 0$

ونستخدم هذه الصورة لإيجاد معادلة الدائرة اذا كانت :

أ) تمر بثلاث نقط

أو

ب) تمر بنقطتين + موقع المركز
(على أي خط)

$\boxed{1}$ جد معادلة الدائرة التي :

1) تمر بالنقط : (0،0) ، (2،0) ، (3،-1)

الحل:

$س^2 + ص^2 + 2ل س + 2ك ص + جـ = 0$

$(0،0) \longrightarrow \boxed{جـ = 0}$

$(2،0) \longrightarrow 4 + 4ل = 0 \longrightarrow \boxed{ل = -1}$

$(3،-1) \longrightarrow 9 + 1 + 6ل - 2ك = 0$

$10 - 6 = 2ك$

$\therefore \boxed{ك = 2}$

$\therefore$ معادلة الدائرة هي :

$س^2 + ص^2 - 2س + 4ص = 0$

2) تمر بالنقطتين (0،-3) ، (1،-4)
ويقع مركزها على المستقيم س = 2

الحل :

$م = (-ل ، -ك) \longrightarrow -ل = 2$

$\boxed{ل = -2}$

معادلتها :

$س^2 + ص^2 - 4س + 2ك ص + جـ = 0$

(0،-3)

$\leftarrow 0 + 9 - 0 - 6ك + جـ = 0$

$-6ك + جـ = -9 \longrightarrow (1)$

(1،-4)

$\leftarrow 1 + 16 - 4 - 8ك + جـ = 0$

$-8ك + جـ = -13 \longrightarrow (2)$

نحذف جـ :

$6ك - \cancel{جـ} = 9$

$-8ك + \cancel{جـ} = -13$

$-2ك = -4 \longrightarrow \boxed{ك = 2}$

$\therefore -12 + جـ = -9 \longrightarrow \boxed{جـ = 3}$

$\therefore$ معادلتها :

$س^2 + ص^2 - 4س + 4ص + 3 = 0$

3) تمر بالنقطتين : (4،2) ، (-1،3)
ويقع مركزها على محور السينات .

الحل :

$م = (-ل ، -ك) \longrightarrow \boxed{ك = 0}$

معادلتها : $س^2 + ص^2 + 2ل س + جـ = 0$

$(4،2) \longrightarrow 16 + 4 + 8ل + جـ = 0$

$8ل + جـ = -20 \longrightarrow (1)$

$(-1،3) \longrightarrow 1 + 9 - 2ل + جـ = 0$

$-2ل + \cancel{جـ} = -10 \longrightarrow (2)$

$-8ل - \cancel{جـ} = 20$

$-10ل = 10 \longrightarrow \boxed{ل = -1} \longrightarrow \boxed{جـ = -12}$

$\therefore$ معادلتها : $س^2 + ص^2 - 2س - 12 = 0$

٤) تمر بالنقطتين $(2,3)$ ، $(-1,1)$
ويقع مركزها على المستقيم $\text{س}-3\text{ص}=11$

الحل: $\text{م}=(-\text{ل},-\text{ك})$

$\to -\text{ل}+3\text{ك}=11 \leftarrow ①$

معادلتها:

$\text{س}^2+\text{ص}^2+2\text{ل}\text{س}+2\text{ك}\text{ص}+\text{ج}=0$

$(2,3) \to 4+9+4\text{ل}+6\text{ك}+\text{ج}=0$

$4\text{ل}+6\text{ك}+\text{ج}=-13 \leftarrow ②$

$(-1,1) \to 1+1-2\text{ل}+2\text{ك}+\text{ج}=0$

$-2\text{ل}+2\text{ك}+\text{ج}=-2 \leftarrow ③$

نحذف ج:

$-2\text{ل}+2\text{ك}+\cancel{\text{ج}}=-2$

$-4\text{ل}-6\text{ك}-\cancel{\text{ج}}=13$

$\cancel{-6\text{ل}}-4\text{ك}=11 \leftarrow ④$

$\cancel{6\text{ل}}-18\text{ك}=-66 \leftarrow ①$

$-22\text{ك}=-55 \leftarrow \boxed{\text{ك}=\frac{5}{2}}$

$\therefore -\text{ل}+\frac{15}{2}=11$

$\text{ل}=-11+\frac{15}{2} \leftarrow \boxed{\text{ل}=\frac{-7}{2}}$

$-2\times\frac{-7}{2}+2\times\frac{5}{2}+\text{ج}=-2 \leftarrow \boxed{\text{ج}=-14}$

$\therefore$ معادلتها:

$\text{س}^2+\text{ص}^2-7\text{س}+5\text{ص}-14=0$

تدريب:

جد معادلة الدائرة التي:

① تمر بالنقطتين $(-1,3)$ ، $(5,1)$
ويقع مركزها على محور الصادات.

② تمر بالنقط التالية:
$(-2,6)$ ، $(3,1)$ ، $(-5,-3)$

الإجابة: $\text{ل}=2$ ، $\text{ك}=-1$ ، $\text{ج}=-20$

③ جد إحداثيات المركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها:

١) $(\text{س}-3)^2+(\text{ص}+1)^2=16$

الحل: $\text{م}=(3,-1)$

$\text{ر}=4$

٢) $(\text{ص}-2)^2=9-(7-\text{س})^2$

الحل:

$(\text{ص}-2)^2+(7-\text{س})^2=9$

$(\text{ص}-2)^2+(\text{س}-7)^2=9$

$\text{م}=(7,2)$

$\text{ر}=3$

٣) $(2\text{س}-4)^2+(2\text{ص}+10)^2=20$

الحل:

$\left(2(\text{س}-2)\right)^2+\left(2(\text{ص}+5)\right)^2=20$

$4(\text{س}-2)^2+4(\text{ص}+5)^2=20$

$(\text{س}-2)^2+(\text{ص}+5)^2=5$

$\text{م}=(2,-5)$

$\text{ر}=\sqrt{5}$

٤) $\text{س}^2+\text{ص}^2-11=8\text{س}+6\text{ص}$

الحل: $\text{س}^2+\text{ص}^2-8\text{س}-6\text{ص}-11=0$

$\text{م}=\left(-\frac{1}{2}\times-8,\ -\frac{1}{2}\times-6\right)$

$=(4,3)$

$\text{ر}=\sqrt{16+9+11}=6$

طريقة أخرى: نحول الى الصورة القياسية.

$(\text{س}^2-8\text{س})+(\text{ص}^2-6\text{ص})=11$

$+16 \qquad +9 \qquad +16+9$

$(\text{س}-4)^2+(\text{ص}-3)^2=36$

$\text{م}=(4,3)$ ، $\text{ر}=6$

٥) $(٢س+٢)^٢ - ١٦ص = ٦٤ - ٤ص^٢$

الحل :

نحول الى قياسية :

$(٢(س+١))^٢ - ١٦ص + ٤ص^٢ = ٦٤$

$٤(س+١)^٢ + ٤ص^٢ - ١٦ص = ٦٤ \quad /٤$

$(س+١)^٢ + ص^٢ - ٤ص = ١٦$

$\qquad\qquad +٤ \qquad\quad +٤$

$(س+١)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٢٠$

م $= (-١ ، ٢)$ ، ر $= \sqrt{٢٠}$

---

[٣] جد قيم الثابت جـ التي تجعل المعادلة :

$س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٤ص + جـ = ٠$

معادلة دائرة .

الحل : م $= (-\frac{١}{٢} \times ٨ ، -\frac{١}{٢} \times -٤)$

$= (-٤ ، ٢)$

ر $= \sqrt{١٦ + ٤ - جـ} > ٠$.

$٢٠ - جـ > ٠ \leftarrow جـ < ٢٠$

تدريب :

(١) جد احداثيات المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها :

١) $(س-٣)^٢ + ٩ = ٤س - ص^٢$

٢) $(٢ص-٢)(ص+٥) = ١٢س - ٢س^٢$

(٢) جد قيم الثابت أ التي تجعل المعادلة

$س^٢ + ص^٢ - أس + ٩ = ٠$

معادلة دائرة .

تمارين [1]

[1] جد معادلة الدائرة :

١) تمس المستقيم ص = −١ عند النقطة (٣ ، −١) ونصف قطرها ٥ وحدات . (جد جميع الحلول الممكنة)

٢) يقع مركزها على المستقيم ص = ٥ وتمس محور السينات عند النقطة (٣ ، ٠)

٣) مركزها (−٢ ، ٥) وتمر بمركز الدائرة التي معادلتها $(س-٣)^٢ + (ص+١)^٢ = ٨$

٤) تمر بالنقطتين (١ ، −٣) ، (٤ ، −٣) ويقع مركزها على المستقيم $٣س + ٤ص = ٥$

٥) مركزها (١ ، ٣) وتمس الدائرة التي معادلتها : $س^٢ + ص^٢ + ٨س - ٦ص + ٩ = ٠$

٦) تمس المستقيمين : س = ٣ ، ص = ١ وتمر بالنقطة (٥ ، ٢)

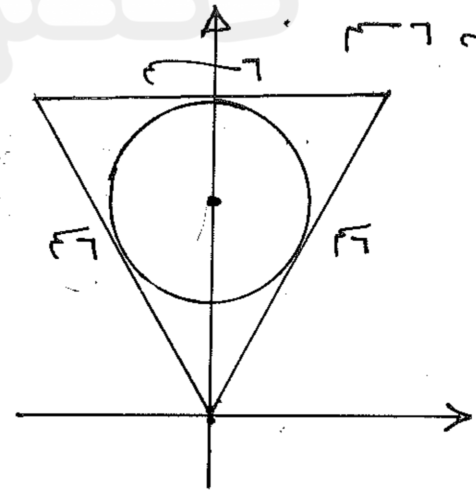
٧) يقع مركزها على المستقيم س = −٤ وتقطع محور الصادات في النقطتين (٠ ، ٣) ، (٠ ، ٩)

٨) تمس كلاً من محور الصادات والمستقيم ص = ٣ في الربع الاول ويقع مركزها على المستقيم ص = ٢س − ١ (جد جميع الحلول الممكنة)

٩) تمر بالنقط : (١ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، (٥ ، −٣)

١٠) نصف قطرها ٣ وحدات ويقع مركزها فوق محور السينات وتمس كلا من المستقيمين : س = ٣ ، ص = −١
(جد جميع الحلول الممكنة)

١١) الدائرة المرسومة في الشكل والتي تمس أضلاع مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم



[٢] جد احداثيات المركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها :

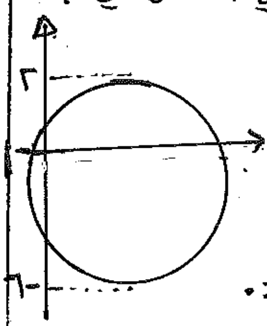
١) ٩ س^{٢} = ١٨ − (٣ص − ٩)^{٢}

٢) ص^{٢} + ٦س = ٢ص − س^{٢} − ٦

٣) ٢س^{٢} = ٨ − ٢ص^{٢} + ٤س

٤) $\dfrac{\text{٨ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س} + ٣}$ = س − ٥ .

[٣] معادلة الدائرة المرسومة في الشكل هي :



أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ص − ٩ = ٠

ب) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ص + ٩ = ٠

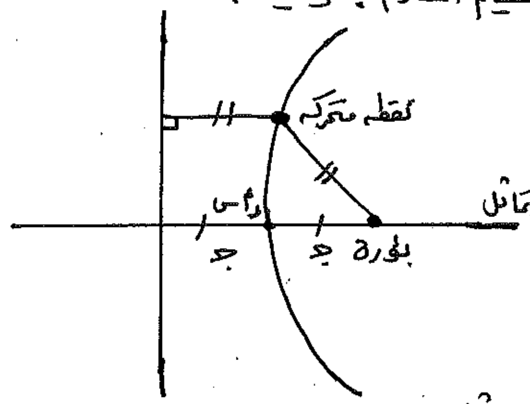
جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س − ٤ص − ٣ = ٠

د) س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ص − ٣ = ٠

القطع المكافئ

هو المنحنى الذي ترسمه نقطة متحركة في المستوى بالشرط التالي:
بعدها عن نقطة ثابتة = بعدها عن مستقيم معلوم لا يمر بالنقطة الثابتة

تسمى:
النقطة الثابتة: بؤرته.
المستقيم المعلوم: دليله



محور التماثل: يقسم القطع الى قسمين متماثلين.

رأس القطع: نقطة تقاطع محور التماثل مع القطع ويقع في منتصف البؤرة والدليل.

جـ: بعد الرأس عن البؤرة = بعد الرأس عن الدليل وهي أقل مسافة بين القطع المكافئ وبؤرته أو دليله

حيث جـ > ٠ دائماً.

بعد البؤرة عن الدليل = ٢جـ.

محور التماثل دائماً عمودياً على الدليل.

لإيجاد معادلته:

[1] الصورة القياسية

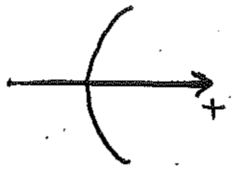
له يلزم: ١) نوعه.
٢) رأسه (د، هـ)
٣) قيمة جـ

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ

① محور تماثله يوازي محور السينات:

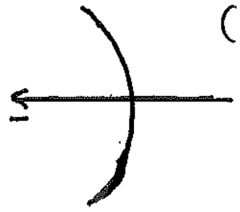
أ) اتجاه فتحته باتجاه محور س^{+}
يسمى سيني موجب ومعادلته:

$$(\text{ص} - \text{هـ})^2 = 4\text{جـ}(\text{س} - \text{د})$$



ب) اتجاه فتحته باتجاه محور س^{-}
يسمى سيني سالب ومعادلته:

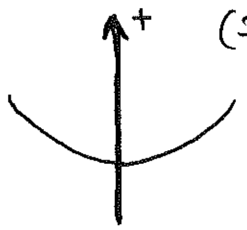
$$(\text{ص} - \text{هـ})^2 = -4\text{جـ}(\text{س} - \text{د})$$



② محور تماثله يوازي محور الصادات.

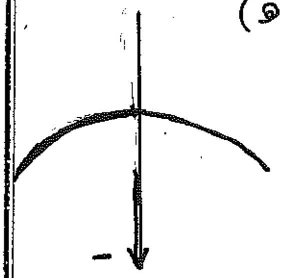
أ) اتجاه فتحته باتجاه محور ص^{+}
يسمى صادي موجب ومعادلته:

$$(\text{س} - \text{د})^2 = 4\text{جـ}(\text{ص} - \text{هـ})$$



ب) اتجاه فتحته باتجاه محور ص^{-}
يسمى صادي سالب ومعادلته:

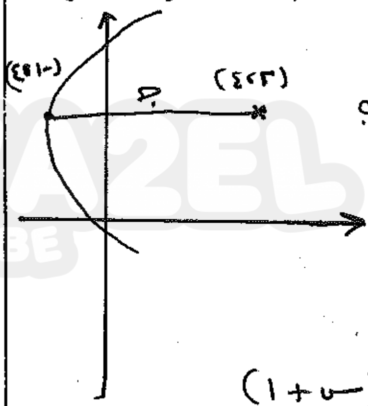
$$(\text{س} - \text{د})^2 = -4\text{جـ}(\text{ص} - \text{هـ})$$



ملاحظة:
التربيع في معادلة القطع يكون عكس نوعه

١ جد معادلة القطع المكافئ :

١) رأسه (-١، ٤) وبؤرته (٢، ٤)



الحل :

القطع سيني موجب

رأسه (-١، ٤)

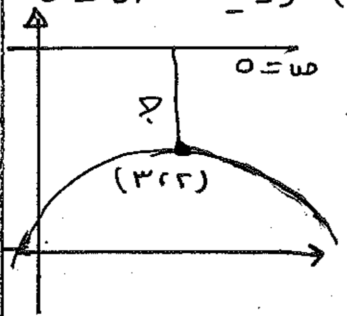
جـ = ٢ - -١

= ٣

معادلته :

$(\text{ص} - ٤)^{٢} = ١٢\,(\text{س} + ١)$

٢) رأسه (٢، ٣) ودليله ص = ٥



الحل :

القطع صادي سالب

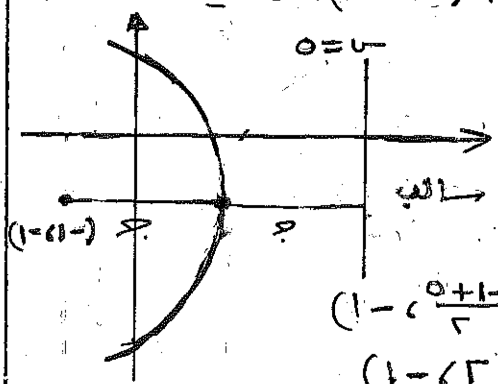
رأسه (٢، ٣)

جـ = ٥ - ٣ = ٢

معادلته :

$(\text{س} - ٢)^{٢} = -٨\,(\text{ص} - ٣)$

٣) بؤرته (-١، -١) ودليله س = ٥



الحل :

القطع سيني سالب

رأسه = $\left(\frac{-١ + ٥}{٢}\,،\,-١\right)$

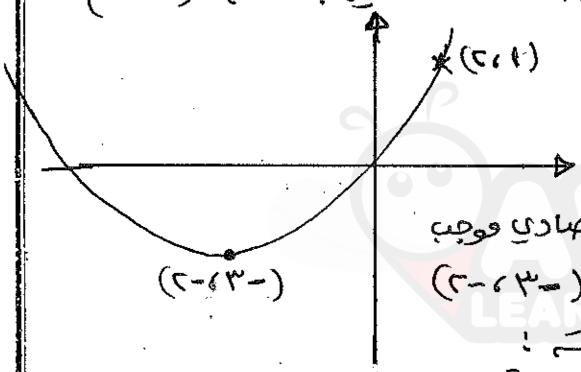
= (٢، -١)

جـ = ٥ - ٢ = ٣

معادلته :

$(\text{ص} + ١)^{٢} = -١٢\,(\text{س} - ٢)$

٤) رأسه (-٣، -٢) ومحور تماثله يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (١، ٢)



القطع صادي موجب

رأسه (-٣، -٢)

معادلته :

$(\text{س} + ٣)^{٢} = ٤\text{جـ}\,(\text{ص} + ٢)$

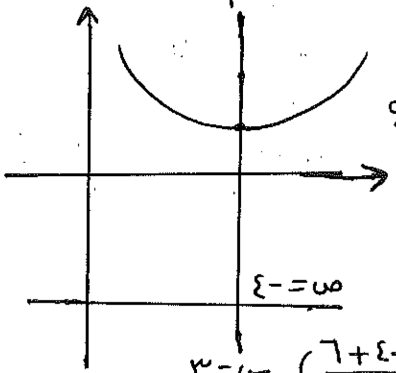
(١، ٢) تحقق معادلته :

$(١ + ٣)^{٢} = ٤\text{جـ}\,(٢ + ٢)$

١٦ = ١٦جـ ⟵ جـ = ١

∴ معادلته : $(\text{س} + ٣)^{٢} = ٤\,(\text{ص} + ٢)$

٥) معادلة محور تماثله هي س = ٣ ومعادلة دليله هي ص = -٤ وتقع بؤرته على المستقيم ص = ٢س



الحل :

القطع صادي موجب

بؤرته

(٣، ٢×٣)

= (٣، ٦)

رأسه = $\left(٣\,،\,\frac{-٤ + ٦}{٢}\right)$ س = ٣

= (٣، ١)

جـ = ٦ - ١ = ٥

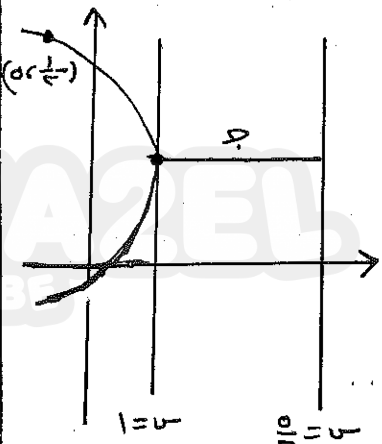
معادلته :

$(\text{س} - ٣)^{٢} = ٢٠\,(\text{ص} - ١)$

تدريب : جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره س = ٢ ومعادلة دليله ص = ٥ وتبعد بؤرته ٨ وحدات عن دليله ومفتوح نحو الأسفل.

٦) يمس المستقيم س = ١ ومعادلة دليله س = $\frac{٥}{٢}$ ويمر بالنقطة $(-\frac{١}{٢}، ٥)$

الحل :



القطع سيني سالب

رأسه (١ ، هـ)

$جـ = \frac{٥}{٢} - ١$

$جـ = \frac{٣}{٢}$

معادلته :

$(ص - هـ)^{٢} = -٤ \times \frac{٣}{٢} (س - ١)$

$(ص - هـ)^{٢} = -٦ (س - ١)$

لكن $(-\frac{١}{٢}، ٥)$ تحقق معادلته :

$(٥ - هـ)^{٢} = -٦ \times -\frac{٣}{٢}$

$(٥ - هـ)^{٢} = ٩$

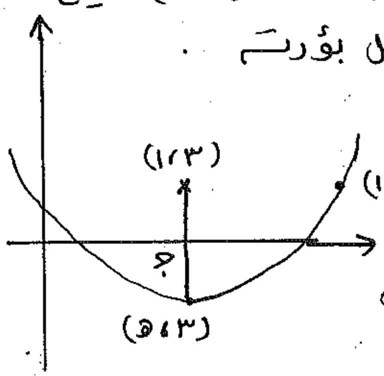
٥ - هـ = ٣ أو ٥ - هـ = -٣

هـ = ٢ أو هـ = ٨

$(ص - ٢)^{٢} = -٦(س - ١)$ أو $(ص - ٨)^{٢} = -٦(س - ١)$

٧) محوره يوازي محور الصادات وبؤرته (٣،١) ويمر بالنقطة (٥،١) ويقع رأسه أسفل بؤرته .

الحل :



القطع صادي موجب

رأسه (٣ ، هـ)

جـ = ١ - هـ

معادلته :

$(س - ٣)^{٢} = ٤ جـ (ص - هـ)$

$(س - ٣)^{٢} = ٤ (١ - هـ)(ص - هـ)$

لكن (٥،١) تحقق معادلته

$(٥ - ٣)^{٢} = ٤ (١ - هـ)(١ - هـ)$

$١ = (١ - هـ)^{٢}$

١ - هـ = ١ أو ١ - هـ = -١

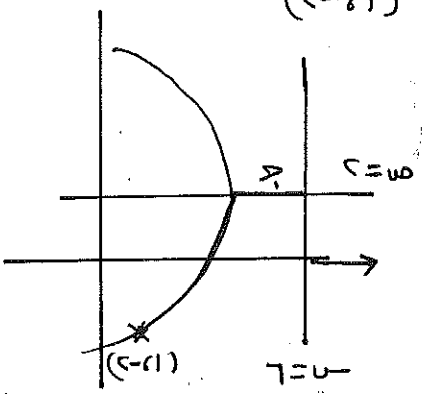
هـ = ٠ أو هـ = ٢ ✗ لأنها تجعل جـ = -١

معادلته :

$(س - ٣)^{٢} = ٤ ص$.

٨) معادلة محوره ص = ٢ ومعادلة دليله س = ٦ ويمر بالنقطة (١، -٢)

الحل :



القطع سيني سالب

رأسه (د ، ٢)

جـ = ٦ - د

معادلته :

$(ص - ٢)^{٢} = -٤ جـ (س - د)$

$(ص - ٢)^{٢} = -٤ (٦ - د)(س - د)$

(١،-٢) تحقق معادلته :

$١٦ = -٤ (٦ - د)(١ - د)$ $\div -٤$

$-٤ = ٦ - ٦د - د + د^{٢}$

$د^{٢} - ١٠ د + ١٠ = ٠$.

$(د - ٥)(د - ٢) = ٠$.

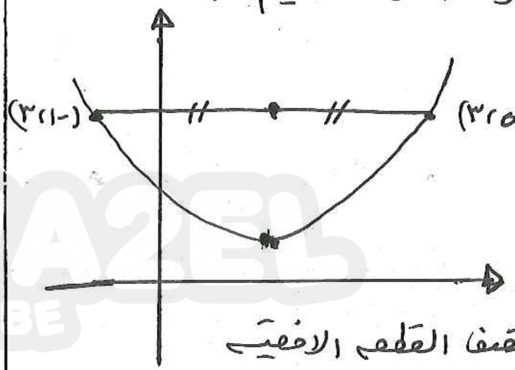
د = ٥   د = ٢

$(ص - ٢)^{٢} = -٤ (س - ٥)$ $(ص - ٢)^{٢} = -١٦ (س - ٢)$

تدريب : ما معادلة قطع مكافئ يقع رأسه على محور السينات الموجب ودليله محور الصادات ويمر بالنقطة (٥، -٤)

٩) يمر بالنقطتين (-١، ٣)، (٥، ٣) ويقع رأسه على المستقيم ص = ٥ - ٢س

الحل:



نقطة منتصف القطعة الأفقية $= \left(\frac{-١+٥}{٢}، ٣\right) = (٢، ٣)$

∴ رأس القطع = (٢، هـ)

ويحقق معادلة المستقيم.

∴ هـ = ٥ - ٢ × ٢ ⟵ هـ = ١

∴ رأس (٢، ١) والقطع صادي موجب

معادلة القطع المكافئ:

$(س - ٢)^٢ = ٤جـ(ص - ١)$

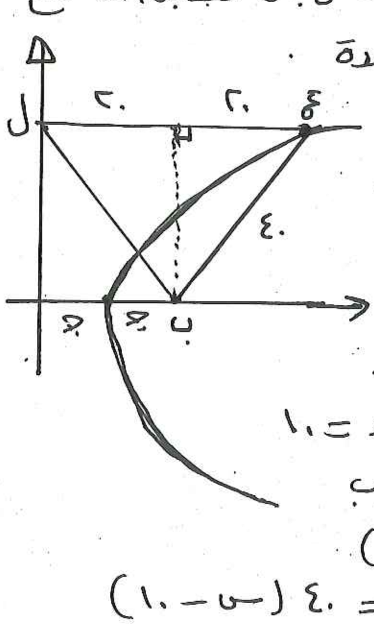
(٥، ٣) تحقق معادلته

∴ $(٥ - ٢)^٢ = ٤جـ(٣ - ١)$

٩ = ٨جـ ⟵ جـ = $\frac{٩}{٨}$

∴ معادلته: $(س - ٢)^٢ = \frac{٩}{٢}(ص - ١)$

١٠) القطع المكافئ المرسوم في الشكل والذي بؤرته ب والمثلث ع ب ل متطابق الأضلاع طول ضلعه ٤٠ وحدة.



الحل:

بما أن ع ب = ع ل

ب: بؤرة القطع

∴ محور الصادات هو دليل القطع.

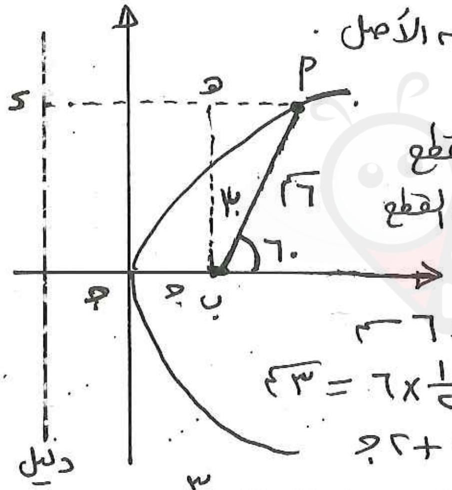
٢جـ = ٢٠ ⟵ جـ = ١٠

القطع سيني موجب

رأسه (١٠، ٠)

معادلته: $ص^٢ = ٤٠(س - ١٠)$

١١) القطع المكافئ المرسوم في الشكل علماً بأن ب: بؤرته، طول أب = ٦ سم ورأسه نقطة الأصل.



الحل:

نرسم دليل القطع وحسب شرط القطع فإن:

أد = أب = ٦ سم

لكن أهـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

∴ ٦ = ٣ + ٢جـ

٣ = ٢جـ ⟵ جـ = $\frac{٣}{٢}$

القطع سيني موجب

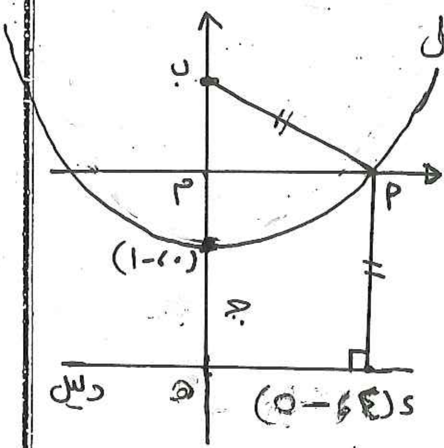
معادلته: $ص^٢ = ٤ \times \frac{٣}{٢} س$

$ص^٢ = ٦س$.

١٢ في الشكل المرسوم قطع مكافئ بؤرته ب ورأسه (٠، -١) ودليله د هـ

م: نقطة الأصل

جد محيط الشكل الرباعي أ ب هـ د



الحل:

د هـ = ٤

أد = أب = ٥

لكن

م هـ = جـ + ١

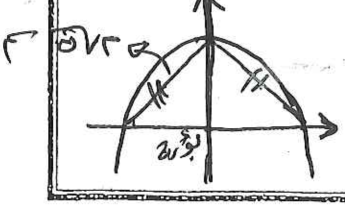
٥ = جـ + ١ ⟵ جـ = ٤

∴ محيط الشكل = ٥ + ٥ + ٢جـ + ٤

= ١٠ + ٢ × ٤ + ٤ = ٢٢

تدريب:

جد معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل حيث بؤرته نقطة الأصل



ثانيا : الصورة العامة

① محور تماثله يوازي محور الصادات

القطع صادي ومعادلته :

ص = أس² + ب س + جـ

ومعادلة محور تماثله : س = $\frac{-ب}{٢أ}$

② محور التماثل يوازي محور السينات

القطع سيني ومعادلته

س = أص² + ب ص + جـ

ومعادلة محور تماثله : ص = $\frac{-ب}{٢أ}$

وتُستخدم هذه الصورة اذا كان القطع :

أ) يمر بثلاث نقط

أو

ب) يمر بنقطتين + معطى معادلة محوره

* جد معادلة القطع المكافئ :

١) يمر بالنقط : (٣،٠) ، (٤،١) ، (٦،-١)
ومحور تماثله يوازي محور السينات

الحل : القطع سيني ومعادلته

س = أص² + ب ص + جـ

(٣،٠) ← ٣ = جـ

(٤،١) ← ٤ = أ + ب + ٣

أ + ب = ١ ---- ①

(٦،-١) ← ٦ = أ - ب + ٣

أ - ب = ٣ --- ②

نحذف ب :

٢أ = ٤ ← أ = ٢

∴ ب = -١

معادلته : س = ٢ص² - ص + ٣

٢) يمر بالنقطتين (٣،-١) ، (٥،٣)
ومعادلة محور تماثله س = ٢

الحل :

$\frac{-ب}{٢أ}$ = ٢ ← ب = -٤أ ← ①

القطع صادي ومعادلته :

ص = أس² + ب س + جـ

(٣،-١) ← -١ = ٩أ + ٣ب + جـ ← ②

(٥،٣) ← ٣ = ٢٥أ + ٥ب + جـ ← ③

نحذف جـ

١ = -٩أ - ٣ب - ~~جـ~~

٣ = ٢٥أ + ٥ب + ~~جـ~~

٤ = ١٦أ + ٢ب ÷٢

٢ = ٨أ + ب لكن ب = -٤أ

٢ = ٤أ ← أ = $\frac{١}{٢}$

ب = -٤ × $\frac{١}{٢}$ = -٢

-١ = $\frac{٩}{٢}$ - ٦ + جـ ← جـ = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلته :

ص = $\frac{١}{٢}$ س² - ٢س + $\frac{١}{٢}$

تدريب :

جد معادلة القطع المكافئ

١) يمر بالنقطتين (٢،-١) ، (-٤،٥)
ومحور تماثله محور الصادات .

٢) يمر بالنقطتين (٣،١) ، (٦،٣)
ومعادلة محور تماثله ص = -١

إيجاد عناصر القطع المكافئ من معادلته .

← يجب أن تكون بالصورة القياسية

← يلزم: ← نوعه ، ← رأس (د، هـ) ، ← قيمة جـ

عناصر القطع المكافئ

← رأس ، بؤرته ، محوره ، دليله

$\boxed{1}$ جد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته

1) $(ص+1)^2 = 8س - 24$

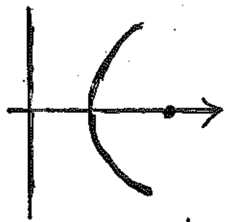
الحل: $(ص+1)^2 = 8(س-3)$

القطع سيني موجب

رأس $(3، -1)$

$4جـ = 8$

$جـ = 2$



معادلة محوره: $ص = -1$

بؤرته $(3+1، -1)$

$(4، -1)$

معادلة دليله: $س = 3 - 1$

$س = 2$

2) $(2س-4)^2 = 2 - \frac{ص}{2}$

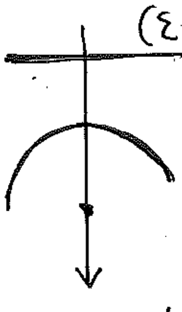
الحل: $(2(س-2))^2 = -\frac{1}{2}(ص-4)$

$4(س-2)^2 = -\frac{1}{2}(ص-4)$

$(س-2)^2 = -\frac{1}{8}(ص-4)$

القطع صادي سالب

رأس $(2، 4)$



$-4جـ = -\frac{1}{8} \leftarrow جـ = \frac{1}{32}$

معادلة محوره: $س = 2$

بؤرته $(2، 4 - \frac{1}{32})$ ، معادلة دليله $ص = 4 + \frac{1}{32}$

3) $(ص+1)^2 + 4س = 6ص + 9$

الحل:

$ص^2 + 2ص + 1 + 4س = 6ص + 9$

$ص^2 - 4ص = -4س + 8$

$\quad +4 \qquad\qquad +4$

$(ص-2)^2 = -4س + 12$

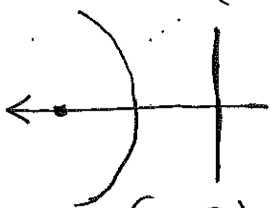
$(ص-2)^2 = -4(س-3)$

القطع سيني سالب .

رأس $(3، 2)$

$-4جـ = -4$

$جـ = 1$



معادلة محوره: $ص = 2$

بؤرته $(3-1، 2) = (2، 2)$

معادلة دليله: $س = 3 + 1 \leftarrow س = 4$

4) $\frac{5}{2ص} = \frac{ص - 10}{س - 3}$

الحل: $2ص^2 - 20ص = 5س - 15$

$2(ص^2 - 10ص) = 5س - 15$

$\quad +25 \qquad\qquad +50$

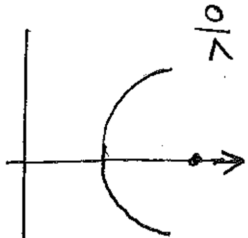
$2(ص-5)^2 = 5س + 35$

$(ص-5)^2 = \frac{5}{2}(س+7)$

القطع سيني موجب

رأس $(-7، 5)$

$4جـ = \frac{5}{2} \leftarrow جـ = \frac{5}{8}$



معادلة محوره

← $ص = 5$

بؤرته $(-7 + \frac{5}{8}، 5)$

$= (-\frac{51}{8}، 5)$

معادلة دليله: $س = -7 - \frac{5}{8}$

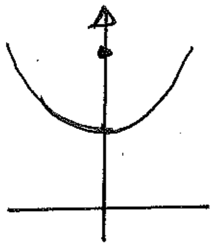
$س = -\frac{61}{8}$

٥) $9\text{س}^2 = 32 + 12\text{س} + 18\text{ص}$

الحل:

$$9\text{س}^2 - 12\text{س} = 18\text{ص} + 32$$
$$9\left(\text{س}^2 - \tfrac{4}{3}\text{س}\right) = 18\text{ص} + 32$$
$$+\tfrac{4}{9} \qquad\qquad +4$$
$$9\left(\text{س} - \tfrac{2}{3}\right)^2 = 18\text{ص} + 36$$
$$\left(\text{س} - \tfrac{2}{3}\right)^2 = 2\left(\text{ص} + \tfrac{3}{2}\right)$$

القطع صادي موجب



رأس $\left(\tfrac{2}{3} ، \tfrac{3}{2}\right)$

$4\text{ج} = 2$

$\text{ج} = \tfrac{1}{2}$

معادلة محوره: $\text{س} = \tfrac{2}{3}$

بؤرته $\left(\tfrac{2}{3} ، \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{2}{3} ، 2\right)$

معادلة دليله: $\text{ص} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} \leftarrow \text{ص} = 1$

$\boxed{2}$ اذا كانت النقطة $(2 ، -3)$ هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته:

$\text{س}^2 - 4\text{س} + 8\text{ص} = \text{ك}$.

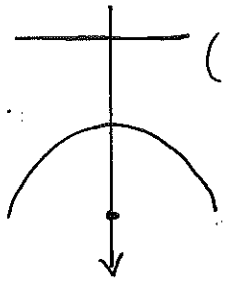
جد: ١) قيمة الثابت ك

٢) بقية عناصره .

الحل: نحول الى الصورة القياسية

$$\text{س}^2 - 4\text{س} = -8\text{ص} + \text{ك}$$
$$+4 \qquad\qquad +4$$
$$(\text{س} - 2)^2 = -8\left(\text{ص} - \frac{\text{ك}+4}{8}\right)$$

القطع صادي سالب



رأس $\left(2 ، \frac{\text{ك}+4}{8}\right)$

$-4\text{ج} = -8$

$\text{ج} = 2$

$\therefore \frac{\text{ك}+4}{8} - 2 = -3$

$\text{ك} + 4 = -8$

$\text{ك} = -12$

---

٢) رأس $= (2 ، -1)$

معادلة محوره: $\text{س} = 2$

معادلة دليله: $\text{ص} = -1 + 2$

$\text{ص} = 1$

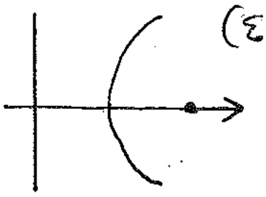
$\boxed{3}$ ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها في بؤرة المكافئ الذي معادلته:

$\text{س} = \tfrac{1}{4}\text{ص}^2 + \text{ص} + 5$

وتمس دليله .

الحل:

$$\text{س} = \tfrac{1}{4}\text{ص}^2 + \text{ص} + 5 \qquad \times 4$$
$$\text{ص}^2 + 4\text{ص} + 20 = 4\text{س}$$
$$\text{ص}^2 + 4\text{ص} = 4\text{س} - 20$$
$$+4 \qquad\qquad +4$$
$$(\text{ص}+2)^2 = 4\text{س} - 16$$
$$(\text{ص}+2)^2 = 4(\text{س} - 4)$$



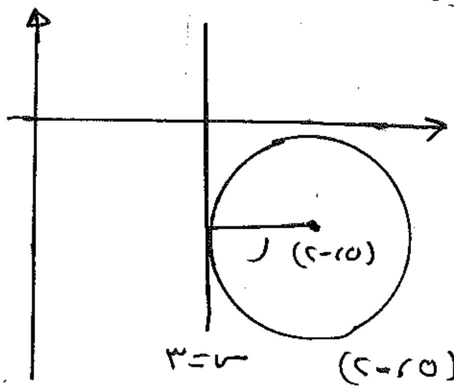
القطع سيني موجب

رأس $(4 ، -2)$

$4\text{ج} = 4 \leftarrow \text{ج} = 1$

بؤرته $(4+1 ، -2) = (5 ، -2)$

معادلة دليله: $\text{س} = 4 - 1 \leftarrow \text{س} = 3$



مركزها $= (5 ، -2)$

$\text{ر} = 5 - 3 = 2$

معادلتها:

$$(\text{س} - 5)^2 + (\text{ص} + 2)^2 = 4$$

تمارين [٢]

[١] جد معادلة القطع المكافئ :

١) يقع رأسه على المستقيم ص = ٢ ومعادلة محور تماثله س = ٤ ويمر بالنقطة (-٢، -١)

٢) رأسه (-٢، ١) وتقع بؤرته في مركز الدائرة التي معادلتها :
$س^2 + ص^2 + ٤س - ١٠ص + ١ = ٠$

٣) يقع رأسه على محور الصادات ويمر بالنقطتين (-١، ٤) ، (-١، ٠)

٤) محور تماثله يوازي محور السينات وبؤرته (-٣، ٣) ويمر بالنقطة (٠، -١) ويقع رأسه يمين بؤرته .

٥) يمر بالنقطتين (١، ٢) ، (-٢، ١) ومحور تماثله محور السينات

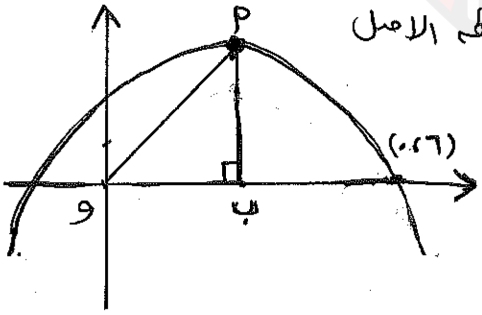
٦) محور تماثله يوازي محور الصادات ورأسه (-٢، ٣) ويمر بمركز الدائرة التي معادلتها :
$(س-٢)^2 = ٢ص - ص^2 + ١$

٧) دليله يوازي محور السينات ويمر بالنقط : (١، ٠) ، (-١، ٤) ، (٢، ٧)

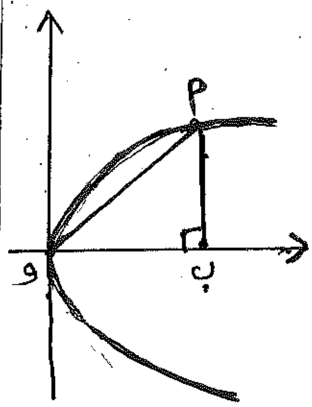
٨) يقع رأسه على محور السينات ومعادلة دليله ص = -٢ ويمر بالنقطة (-١، ٢)

٩) معادلة دليله س = ١ وتقع بؤرته عند رأس القطع الذي معادلته :
$س^2 = ٨س - ٦ص - ٤$

١٠) المرسوم في الشكل علما بأن المثلث م ب و متطابق الضلعين وقائم الزاوية في ب حيث ب : بؤرته
و : نقطة الاصل



١١) المرسوم في الشكل اذا علمت أن مساحة Δ م ب و القائم الزاوية في ب تساوي ٩ وحدات مربعة
ب : بؤرته
و : نقطة الاصل



[٢] جد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته

١) $(٤-٣ص)^2 = ٨ - ١٦س$

٢) $٦ص = ٤س^2 + ٨س - ٥$

٣) $٨س - ٩ص^2 + ١٨ص - ٣٣ = ٠$

[٣] اذا كانت ص = ٥ هي معادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته :

$$\frac{س^2 - ٦س + ٩}{٤ص + ٨} = ك$$

فما قيمة الثابت ك .

القطع الناقص

هو المنحنى الذي ترسمه نقطة متحركة في المستوى بالشرط التالي:

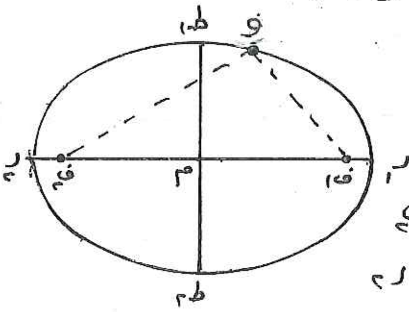
مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين = مقدار ثابت

↓ البؤرتين ↓ طول المحور الأكبر

$$\boxed{و ف_1 + و ف_2 = ٢أ}$$

عناصره:

الشكل المجاور يمثل قطع ناقص وعناصره:



١) البؤرتين: $ف_1$، $ف_2$

٢) الرأسين: $ر_1$، $ر_2$

٣) محوري تماثل متعامدان هما:

$ر_1ر_2$: المحور الأكبر (المحور البؤري)

$ط_1ط_2$: المحور الأصغر.

٤) مركز القطع: م: نقطة منتصف البؤرتين أو الرأسين أو نقطة تقاطع المحورين.

تذكر ما يلي:

① أ: بعد الرأس عن المركز

جـ: بعد البؤرة عن المركز

ب: بعد أحد طرفي المحور الأصغر عن المركز.

$أ > جـ$ ، $أ > ب$

أ: هي البعد الأكبر.

② طول المحور الأكبر = ٢أ

وطول المحور الأصغر = ٢ب

والبعد البؤري (البعد بين البؤرتين) = ٢جـ

③ $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ دائماً

④ الاختلاف المركزي له $هـ = \frac{جـ}{أ} < 1$

⑤ مساحة القطع الناقص = π أ ب

⑥ من شرط القطع الناقص:

$$و ف_1 + و ف_2 = ٢أ$$

⑦ بعد الرأس عن البؤرة القريبة منه = أ − جـ

(أقل مسافة بين القطع والبؤرة)

⑧ بعد الرأس عن البؤرة البعيدة عنه = أ + جـ

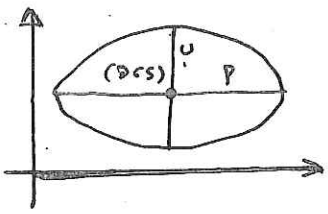
(أكبر مسافة بين القطع والبؤرة)

⑨ أكبر مسافة بين نقطتين على القطع: هي المسافة بين رأسيه = ٢أ

معادلته:

① إذا كان المحور الأكبر // محور السينات (ينطبق عليه) فإن القطع سيني

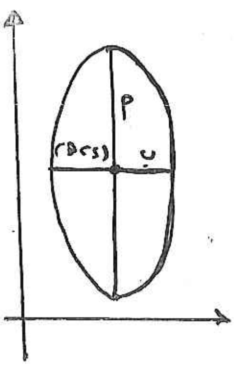
ومعادلته:



$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$$

② إذا كان المحور الأكبر // محور الصادات (ينطبق عليه) فإن القطع صادي

ومعادلته:



$$\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} + \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$$

تذكر أنه:

لإيجاد معادلة القطع الناقص

يلزم: ١) نوعه

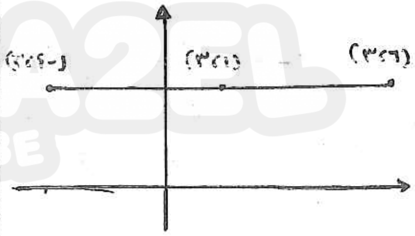
٢) مركزه (د، هـ)

٣) أ، ب

جد معادلة القطع الناقص في الحالات التالية :

① رأساه (-٤، ٣) ، (٦، ٣) وطول محوره الأصغر ٨ وحدات

الحل :



القطع سيني

م = ((٦ + -٤)/٢ ، ٣)

= (١، ٣)

أ = ٦ - ١ = ٥ .

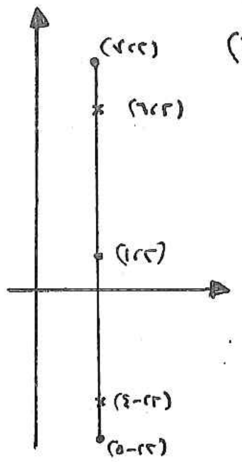
٢ب = ٨ ← ب = ٤

∴ معادلته : (س - ١)² / ٢٥ + (ص - ٣)² / ١٦ = ١

② رأساه (٢، ٧) ، (٢، -٥)

وبؤرتاه (٢، ٦) ، (٢، -٤)

الحل :



القطع صادي .

م = (٢ ، (-٥ + ٧)/٢)

= (٢، ١)

أ = ٧ - ١ = ٦

جـ = ٦ - ١ = ٥

لكن جـ² = أ² - ب²

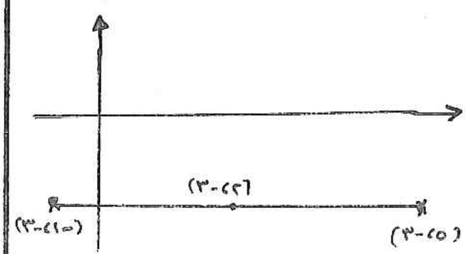
٢٥ = ٣٦ - ب² ← ب² = ١١

∴ معادلته : (ص - ١)² / ٣٦ + (س - ٢)² / ١١ = ١

③ بؤرتاه (٥، -٣) ، (-١، -٣) واختلاف مركزي

يساوي ٦ر. .

الحل :



القطع سيني

م = (٢، -٣)

جـ = ٥ - ٢ = ٣

لكن هـ = جـ/أ = ٦ر. ← ٣/أ = ٦/١٠

∴ أ = ٥ .

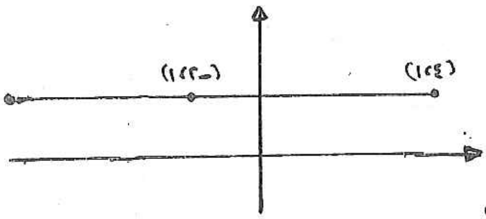
جـ² = أ² - ب² ← ٩ = ٢٥ - ب² ← ب² = ١٦

ب = ٤

∴ معادلة القطع هي : (س - ٢)² / ٢٥ + (ص + ٣)² / ١٦ = ١

④ مركزه (-٢، ١) وأحد رأسيه (٤، ١)

وبعده البؤري ٤ وحدات .



الحل :

القطع سيني

م = (-٢، ١)

أ = ٤ + ٢ = ٦

٢جـ = ٤ ← جـ = ٢

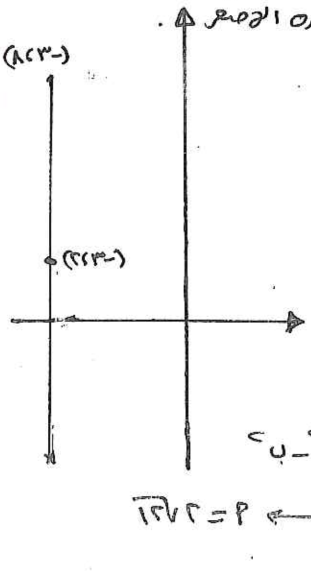
لكن جـ² = أ² - ب² ← ٤ = ٣٦ - ب² ← ب² = ٣٢

∴ معادلة القطع هي :

(س + ٢)² / ٣٦ + (ص - ١)² / ٣٢ = ١

⑤ مركزه (-٣، ٢) وإحدى بؤرتيه (-٣، ٨)

وطول محوره الأكبر مثلي طول محوره الأصغر .



الحل :

القطع صادي

م = (-٣، ٢)

جـ = ٨ - ٢ = ٦

لكن ٢أ = ٢ × ٢ب

$\boxed{\text{أ = ٢ب}}$

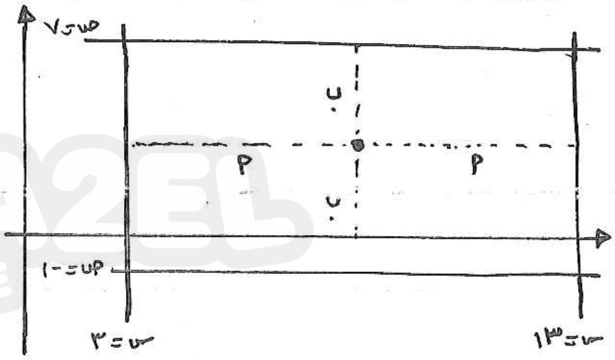
جـ² = أ² - ب² ← ٣٦ = ٤ب² - ب²

٣٦ = ٣ب² ← ب = √١٢ ← أ = ٢√١٢

∴ معادلة القطع :

(ص - ٢)² / ٤٨ + (س + ٣)² / ١٢ = ١

(10) بين المستقيمات التالية: س = ٣ ، س = ١٣ ، ص = -١ ، ص = ٧



القطع سيني

مركزه = $\left(\frac{١٣+٣}{٢} ، \frac{٧+-١}{٢}\right) = (٨ ، ٣)$

$٢أ = ١٣ - ٣ = ١٠ \leftarrow أ = ٥$

$٢ب = ٧ + ١ = ٨ \leftarrow ب = ٤$

∴ معادلته:

$$\frac{(س-٨)^2}{٢٥} + \frac{(ص-٣)^2}{١٦} = ١$$

(11) اختلافه المركزي = $\frac{٢}{٣}$ ومركزه (-١ ، ٠) ومحوره الأكبر ينطبق على محور السينات ويمر بالنقطة $(١ ، \frac{٥}{٣})$

الحل:

القطع سيني

م = (-١ ، ٠)

$هـ = \frac{٢}{٣}$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣} \leftarrow جـ = \frac{٢}{٣}أ$

لكن

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow \frac{٤}{٩}أ^2 = أ^2 - ب^2$

$ب^2 = \frac{٥}{٩}أ^2$

لكن:

$(١ ، \frac{٥}{٣})$ تحقق معادلته: $\frac{(س+١)^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

$\leftarrow \frac{٤}{أ^2} + \frac{٢٥}{٩ب^2} = ١$

$\frac{٤}{أ^2} + \frac{٢٥}{٩ \times \frac{٥}{٩}أ^2} = ١ \leftarrow \frac{٩}{أ^2} = ١ \leftarrow أ^2 = ٩$

$∴ ب^2 = ٥$

معادلة القطع: $\frac{(س+١)^2}{٩} + \frac{ص^2}{٥} = ١$

تدريب:

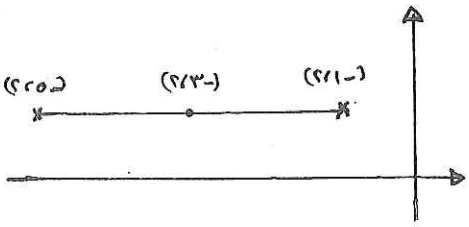
جد معادلة القطع الناقص الذي:

(1) يقع مركزه على المستقيم ص = -٢ وتقع بؤرتاه على المستقيم س = ٣ واختلافه المركزي ٠.٦ . وطول محوره الأكبر يزيد عن بعده البؤري ٨ وحدات

(2) يمر بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (-٣ ، ١) ومركزه (-١ ، ٣) ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات.

(12) بؤرتاه (-١ ، ٢) ، (-٥ ، ٢) ومساحته $٣\sqrt{٥}\pi$

الحل:



القطع سيني

م = (-٣ ، ٢)

جـ = ٢

مساحة القطع = $\pi أ ب = ٣\sqrt{٥}\pi$

$∴ أ ب = ٣\sqrt{٥} \leftarrow ب = \frac{٣\sqrt{٥}}{أ}$

لكن:

$أ^2 - ب^2 = ٤ \leftarrow أ^2 - \frac{٤٥}{أ^2} = ٤$

$أ^4 - ٤أ^2 - ٤٥ = ٠$

$(أ^2 - ٩)(أ^2 + ٥) = ٠$

$أ^2 = ٩$ ، $\cancel{أ^2 = -٥}$

أ = ٣

$∴ ب = \frac{٣\sqrt{٥}}{٣} \leftarrow ب = \sqrt{٥}$

∴ معادلة القطع:

$$\frac{(س+٣)^2}{٩} + \frac{(ص-٢)^2}{٥} = ١$$

تدريب: جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها:

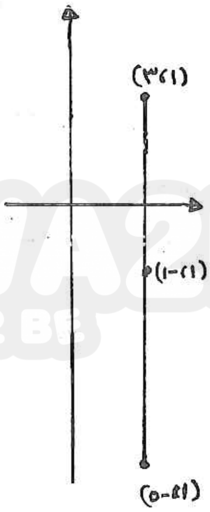
$(٢س-٦)^2 + (٢ص-٤)^2 = ٣٦$

وطول محوره الأصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة

ومعادلة محوره الأصغر هي س = -١

⑥ رأساه (١،٣) ، (١،-٥) ويمر بالنقطة (٤،١)

الحل:



القطع صادي

مركزه = (١،-١)

$\text{أ} = 3 + 1 = 4$

معادلته:

$$\frac{(\text{ص}+1)^2}{16} + \frac{(\text{س}-1)^2}{\text{ب}^2} = 1$$

(٤،١) تحقق معادلته

$$\frac{(1+1)^2}{16} + \frac{(4-1)^2}{\text{ب}^2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{9}{\text{ب}^2} = 1 \longrightarrow \frac{9}{\text{ب}^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ب}^2 = 12$$

∴ معادلة القطع هي:

$$\frac{(\text{ص}+1)^2}{16} + \frac{(\text{س}-1)^2}{12} = 1$$

⑦ مركزه (-٢،-٥) وطول محوره الأصغر ٦ وحدات واختلافه المركزي $\frac{4}{5}$ (جد جميع الحلول الممكنة)

الحل:

القطع سيني أو صادي.

$2\text{ب} = 6 \longrightarrow \text{ب} = 3$

$$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{4}{5} \longrightarrow \text{جـ} = \frac{4}{5}\text{أ} \longrightarrow ①$$

$$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \longrightarrow \text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - 9 \longrightarrow ②$$

$$\frac{16}{25}\text{أ}^2 = \text{أ}^2 - 9 \longrightarrow 9 = \frac{9}{25}\text{أ}^2 \quad \therefore \text{أ}^2 = 25$$

معادلة القطع:

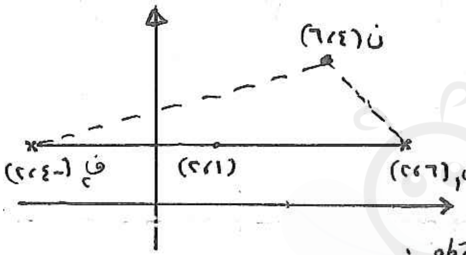
إما: $\frac{(\text{س}+2)^2}{25} + \frac{(\text{ص}+5)^2}{9} = 1$

أو: $\frac{(\text{ص}+5)^2}{25} + \frac{(\text{س}+2)^2}{9} = 1$

تدريب: جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (١،٣) واختلافه المركزي = ٠,٥.

⑧ بؤرتاه (-٤،٢) ، (٦،٢) ويمر بالنقطة (٤،٦)

الحل:



القطع سيني

م = (١،٢)

جـ = ٥.

حسب شرط القطع:

$$\text{ن ف}_1 + \text{ن ف}_2 = 2\text{أ}$$

$$2\text{أ} = \sqrt{(4-6)^2 + (6-2)^2} + \sqrt{(4+4)^2 + (2-6)^2}$$

$$2\text{أ} = \sqrt{20} + \sqrt{80} = \sqrt{20} + 2\sqrt{20} = 3\sqrt{20}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{5} \longrightarrow \text{أ} = 3\sqrt{5}$$

لكن

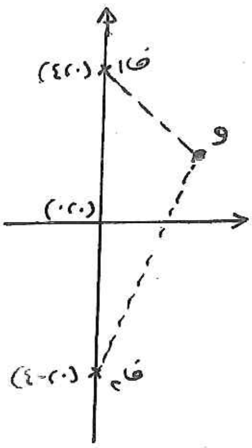
$$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 = 25 = 45 - \text{ب}^2 \longrightarrow \text{ب}^2 = 20$$

∴ معادلة القطع هي:

$$\frac{(\text{س}-1)^2}{45} + \frac{(\text{ص}-2)^2}{20} = 1$$

⑨ بؤرتاه ف١(٠،٤) ، ف٢(٠،-٤) والنقطة و على منحناه بحيث أن محيط Δ وف١ف٢ = ٢٠ سم

الحل:



القطع صادي.

م = (٠،٠)

جـ = ٤

$$\text{محيط } \Delta\, \text{وف}_1\text{ف}_2 = 2\text{أ} + 2\text{جـ}$$

$$20 = 2\text{أ} + 8$$

$$2\text{أ} = 12 \longrightarrow \text{أ} = 6$$

لكن:

$$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \longrightarrow 16 = 36 - \text{ب}^2 \longrightarrow \text{ب}^2 = 20$$

∴ معادلة القطع:

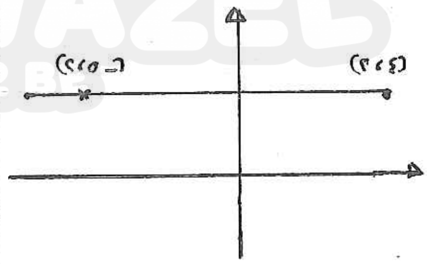
$$\frac{\text{ص}^2}{36} + \frac{\text{س}^2}{20} = 1$$

تدريب: حل سؤال ⑨ اذا علمت أن: مساحة Δ وف١ف٢ القائم الزاوية في ف١ تساوي ٢٤ سم².

⑬ طول محوره الأصغر يساوي ٦ وحدات وأحد رأسيه (٢،٤) والبؤرة البعيدة عن هذا الرأس (٢،−٥)

الحل:

القطع سيني



$\text{٢ب} = ٦ \rightarrow \text{ب} = ٣$

$\text{أ} + \text{جـ} = ٤ + ٥$

$\text{أ} + \text{جـ} = ٩$

$\text{جـ} = ٩ - \text{أ}$

لكن

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - ٩$

$(٩ - \text{أ})^2 = \text{أ}^2 - ٩ \rightarrow ٨١ - ١٨\text{أ} + \cancel{\text{أ}^2} = \cancel{\text{أ}^2} - ٩$

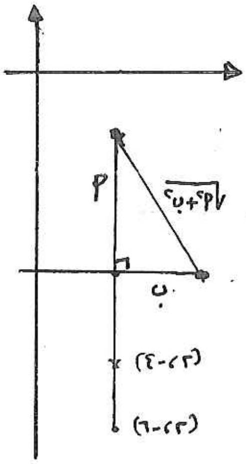
$١٨\text{أ} = ٩٠ \rightarrow \text{أ} = ٥$

∴ مركزه $= (٤ - ٥، ٢) = (-١، ٢)$

∴ معادلته: $\frac{(\text{س}+١)^2}{٢٥} + \frac{(\text{ص}-٢)^2}{٩} = ١$

⑭ أحد رأسيه (٢،−٦) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (٢،−٤) والبعد بين طرفي محوريه = $\sqrt{١٧}$

الحل:



القطع صادي

$\text{أ} - \text{جـ} = -٤ + ٦ = ٢$

∴ $\text{جـ} = \text{أ} - ٢ \leftarrow ①$

لكن

$\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = ١٧$

∴ $\text{ب}^2 = ١٧ - \text{أ}^2 \leftarrow ②$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

∴ $(\text{أ} - ٢)^2 = \text{أ}^2 - (١٧ - \text{أ}^2)$

$\text{أ}^2 - ٤\text{أ} + ٤ = ٢\text{أ}^2 - ١٧ \rightarrow \text{أ}^2 + ٤\text{أ} - ٢١ = ٠$

$(\text{أ} + ٧)(\text{أ} - ٣) = ٠ \rightarrow \text{أ} = -٧$ ✗ ، $\boxed{\text{أ} = ٣}$

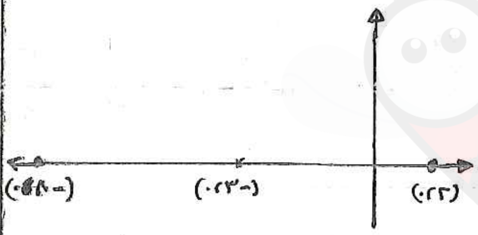
$\text{ب}^2 = ١٧ - ٩ \rightarrow \text{ب}^2 = ٨$

مركزه $= (٢، -٦ + ٣) = (٢، -٣)$

∴ معادلة القطع: $\frac{(\text{ص}+٣)^2}{٩} + \frac{(\text{س}-٢)^2}{٨} = ١$

⑮ رأساه (٢،٠)، (−٨،٠) وطول محوره الأصغر يساوي أربعة أمثال المسافة بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من هذا الرأس.

الحل:



القطع سيني

مركزه (−٣،٠)

$\text{أ} = ٥$

$\text{٢ب} = ٤(\text{أ} - \text{جـ}) \rightarrow \text{ب} = ٢\text{أ} - ٢\text{جـ} = ١٠ - ٢\text{جـ}$

لكن $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

$\text{جـ}^2 = ٢٥ - (١٠ - ٢\text{جـ})^2$

$\text{جـ}^2 = ٢٥ - (١٠٠ - ٤٠\text{جـ} + ٤\text{جـ}^2)$

$\text{جـ}^2 = ٢٥ - ١٠٠ + ٤٠\text{جـ} - ٤\text{جـ}^2$

$٥\text{جـ}^2 - ٤٠\text{جـ} + ٧٥ = ٠ \quad ÷٥$

$\text{جـ}^2 - ٨\text{جـ} + ١٥ = ٠$

$(\text{جـ} - ٥)(\text{جـ} - ٣) = ٠$

$\text{جـ} = ٥$ ✗ ، $\boxed{\text{جـ} = ٣}$

لأن جـ < أ

∴ $\text{ب} = ١٠ - ٦ \rightarrow \text{ب} = ٤$

∴ معادلة القطع هي: $\frac{(\text{س}+٣)^2}{٢٥} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$

تدريب: حل:

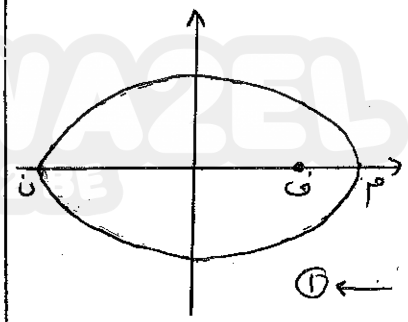
① معادلة قطع ناقص بؤرتاه (١،٤)، (١،−٣) ومحوره الأكبر أطول بوحدتين من محوره الأصغر.

② معادلة قطع ناقص أحد رأسيه (١،٤) والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (١،٣) والاختلاف المركزي $= \frac{١}{٢}$

(١٦) المرسوم في الشكل حيث مركزه نقطة الأصل واختلافه المركزي = ٠٫٨

م ف × ن ف = ثلاثة أمثال طول محوره الأصغر

م ، ن : رأساه ، ف : إحدى بؤرتيه.



الحل:

القطع سيني

مركزه = (٠، ٠)

$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{٤}{٥}$

∴ $\text{ج} = \frac{٤}{٥}\text{أ}$ ← (١)

لكن:

م ف × ن ف = ٣ × ٢ب

(أ − ج)(أ + ج) = ٦ب

أ² − ج² = ٦ب   لكن أ² − ج² = ب²

∴ ب² − ٦ب = ٠ ← ب(ب − ٦) = ٠

∴ ب = ٠ × أو $\boxed{\text{ب} = ٦}$

ج² = أ² − ب²

ج² = أ² − ٣٦ ← (٢)

∴ $\frac{١٦}{٢٥}\text{أ}^2 = \text{أ}^2 - ٣٦$ ← $\frac{٩}{٢٥}\text{أ}^2 = ٣٦$

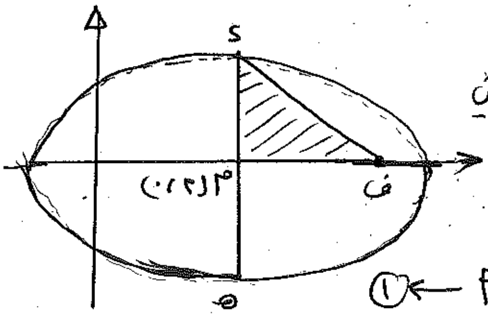
∴ $\frac{٣}{٥}\text{أ} = ٦$ ← $\boxed{\text{أ} = ١٠}$

∴ معادلته: $\frac{\text{س}^2}{١٠٠} + \frac{\text{ص}^2}{٣٦} = ١$

(١٧) المرسوم في الشكل حيث مركزه: م(٢، ٠)

د هـ: محوره الأصغر وإحدى بؤرتيه ف

واختلافه المركزي = $\frac{٣}{٥}$ ومحيط Δ د ف م = ١٢



الحل:

القطع سيني

م = (٢، ٠)

$\frac{\text{ج}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\text{ج} = \frac{٣}{٥}\text{أ}$ ← (١)

لكن

محيط Δ د ف م = د ف + ف م + م د = ١٢

أ + ج + ب = ١٢

∴ بالتعويض $\text{ج} = \frac{٣}{٥}\text{أ}$

∴ $\text{أ} + \frac{٣}{٥}\text{أ} + \text{ب} = ١٢$

∴ $\text{ب} = ١٢ - \frac{٨}{٥}\text{أ}$ ← (٢)

لكن

ج² = أ² − ب² ← $\frac{٩}{٢٥}\text{أ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

∴ $\text{ب}^2 = \frac{١٦}{٢٥}\text{أ}^2$

∴ $\text{ب} = \frac{٤}{٥}\text{أ}$

بالتعويض في (٢)

$\frac{٤}{٥}\text{أ} = ١٢ - \frac{٨}{٥}\text{أ}$ ← $\frac{١٢}{٥}\text{أ} = ١٢$

∴ $\boxed{\text{أ} = ٥}$ ← $\boxed{\text{ب} = ٤}$

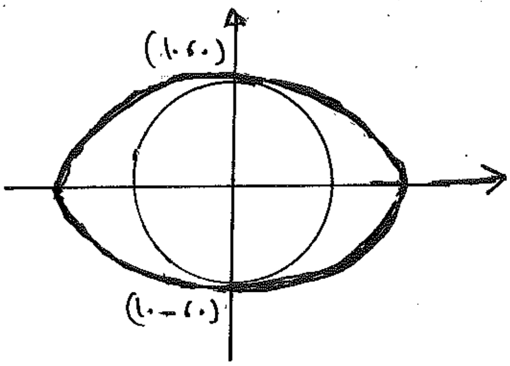
معادلته:

$\frac{(\text{س} - ٢)^2}{٢٥} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$

تدريب:

جد معادلة القطع الناقص المرسوم في الشكل

(١) مساحة القطع الناقص تساوي مثلي مساحة الدائرة ومشتركين في المركز (٠، ٠)

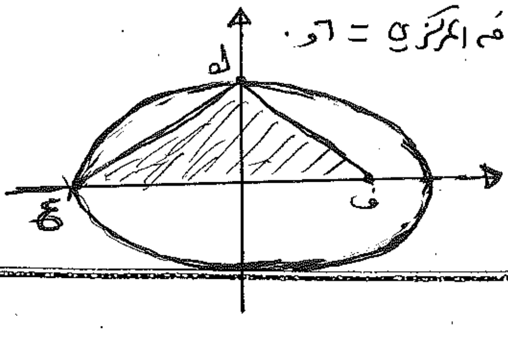


(٢) مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه ف

ك: أحد طرفي محوره الأصغر ، ع: أحد رأسيه

ومساحة Δ ك ف ع = ١٦ وحدة مربعة

واختلافه المركزي = ٠٫٦



القطع الزائد

هو المنحنى الذي ترسمه نقطة متحركة في المستوى بالشرط التالي:

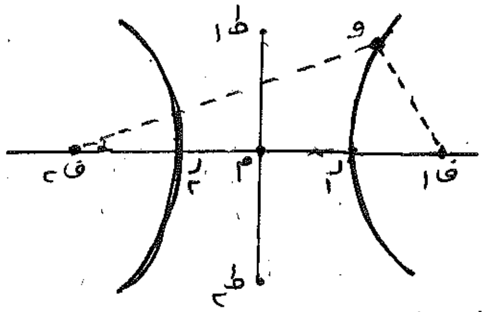
الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين = مقدار ثابت

↓ البؤرتين

↓ طول المحور القاطع.

عناصره: $\boxed{|\text{وف}_1 - \text{وف}_2| = ٢\text{أ}}$

الشكل المجاور يمثل قطع زائد وعناصره:



١) البؤرتين: ف١، ف٢

٢) الرأسين: ر١، ر٢

٣) محوري تماثل متعامدين هما:

أ) ر١ر٢: المحور القاطع

ب) ط١ط٢: المحور المرافق

٤) مركز القطع: م: نقطة منتصف البؤرتين أو الرأسين أو نقطة تقاطع المحورين

تذكر أن:

① أ: بعد الرأس عن المركز

جـ: بعد البؤرة عن المركز

ب: بعد أحد طرفي المحور المرافق عن المركز

جـ > أ ، جـ > ب

جـ: هي البعد الأكبر

② طول المحور القاطع = ٢أ

وطول المحور المرافق = ٢ب

والبعد البؤري (البعد بين البؤرتين) = ٢جـ

③ $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ دائماً

④ الاختلاف المركزي له $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} > ١$

⑤ بعد الرأس عن البؤرة القريبة منه = جـ − أ

⑥ بعد الرأس عن البؤرة البعيدة عنه = جـ + أ

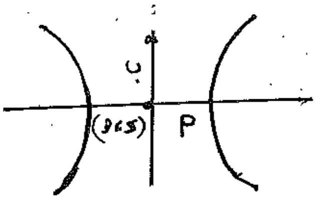
⑦ أقل مسافة بين نقطتين على القطع هي المسافة بين رأسيه = ٢أ

معادلته:

① المحور القاطع // محور السينات (ينطبق عليه) فإن القطع سيني

ومعادلته:

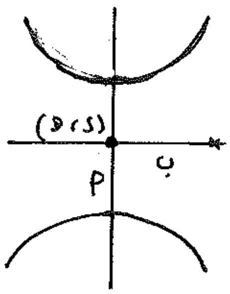
$$\frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$$



② المحور القاطع // محور الصادات (ينطبق عليه) فإنه القطع صادي.

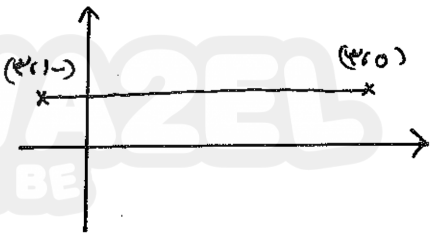
ومعادلته:

$$\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{ب}^2} = ١$$



[1] جد معادلة القطع الزائد :

1) رأساه (-١، ٣) ، (٥، ٣) وبعده البؤري أربعة أمثال طول محوره المرافق



الحل : القطع سيني

م = (٢، ٣)

أ = ٣

$2\text{جـ} = 4 \times 2\text{ب} \leftarrow \text{جـ} = 4\text{ب} \leftarrow ①$

لكن $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$

$\text{جـ}^2 = 9 + \text{ب}^2 \leftarrow ②$

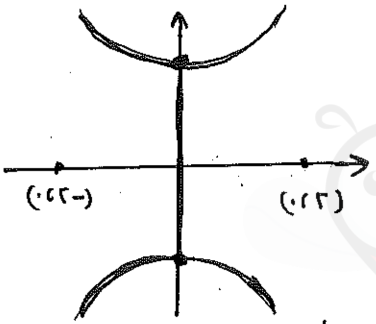
∴ $16\text{ب}^2 = 9 + \text{ب}^2 \leftarrow 15\text{ب}^2 = 9$

∴ $\text{ب}^2 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

∴ معادلته :

$$\frac{(\text{س}-2)^2}{9} - \frac{5(\text{ص}-3)^2}{3} = 1$$

2) نهايتا محوره المرافق هما النقطتان (±٢، ٠) ويمر بالنقطة (١، ٣)



الحل : القطع صادي .

م = (٠، ٠)

ب = ٢

معادلته :

$$\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{4} = 1$$

$$(1، 3) \leftarrow \frac{9}{\text{أ}^2} - \frac{1}{4} = 1$$

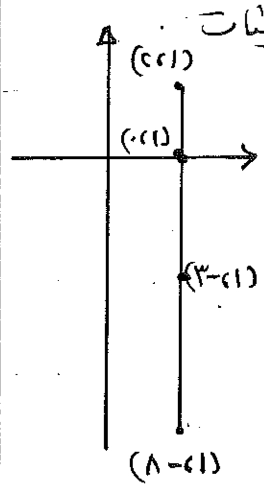
$$\frac{9}{\text{أ}^2} = \frac{5}{4} \leftarrow 5\text{أ}^2 = 36$$

∴ $\text{أ}^2 = \frac{36}{5}$

∴ معادلته :

$$\frac{5\text{ص}^2}{36} - \frac{\text{س}^2}{4} = 1$$

3) بؤرتاه (١، ٢) ، (١، -٨) ويقع أحد رأسيه على محور السينات .



الحل : القطع صادي .

م = (١، -٣)

جـ = ٥

أ = ٣

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$

$25 = 9 + \text{ب}^2$

$16 = \text{ب}^2$

ب = ٤

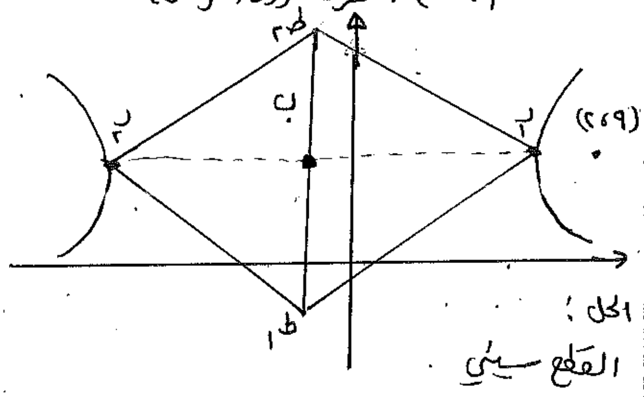
معادلته :

$$\frac{(\text{ص}+3)^2}{9} - \frac{(\text{س}-1)^2}{16} = 1$$

4) المرسوم في الشكل حيث احدى بؤرتيه (٩، ٢) واختلافه المركزي $= \frac{5}{3}$ ومحيط الشكل ر١ ط١ ر٢ ط٢ = ٤٠

حيث : ر١، ر٢ : رأسيه

ط١، ط٢ : طرفا محوره المرافق .



الحل : القطع سيني

محيط الشكل = ٤جـ = ٤٠ ← جـ = ١٠

∴ مركزه = (٩-١٠، ٢) = (-١، ٢)

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{5}{3} \leftarrow \frac{10}{\text{أ}} = \frac{5}{3} \leftarrow \text{أ} = 6$

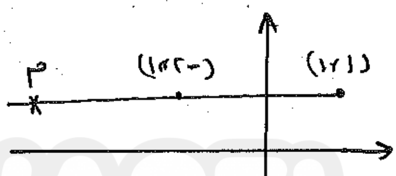
$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \leftarrow 100 = 36 + \text{ب}^2 \leftarrow \text{ب} = 8$

∴ معادلته :

$$\frac{(\text{س}+1)^2}{36} - \frac{(\text{ص}-2)^2}{64} = 1$$

٥) أحد رأسيه (−٢، ١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (١، ١) واختلافه المركزي ٥/٢

الحل: القطع سيني



جـ − أ = ٣

جـ/أ = ٥/٢

جـ = ٥/٢ أ

∴ ٥/٢ أ − أ = ٣ ← ٣/٢ أ = ٣ ← أ = ٢

∴ جـ = ٥/٢ × ٢

جـ = ٥

لكن جـ² = أ² + ب² ← ٢٥ = ٤ + ب²

∴ ب² = ٢١

مركزه = (−٢ − ٢، ١) = (−٤، ١)

معادلته:

(س + ٤)²/٤ − (ص − ١)²/٢١ = ١

٦) أحد رأسيه مركز الدائرة التي معادلتها: (٢س − ٨)² + (٢ص − ٦)² = ١٦ وطول محوره المرافق يساوي طول قطر هذه الدائرة ويقع مركزه على المستقيم س = −١

الحل:

٤(س − ٤)² + ٤(ص − ٣)² = ١٦

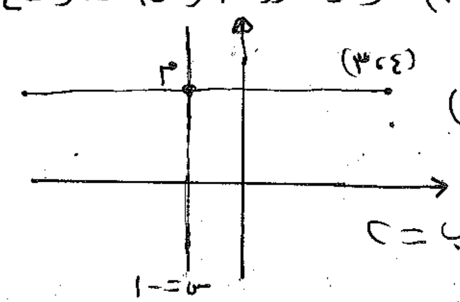
(س − ٤)² + (ص − ٣)² = ٤

مركزها = (٤، ٣) ، ر = ٢

القطع الزائد:

رأسه (٤، ٣) وطول محوره المرافق = ٢ر = ٤

القطع سيني



م = (−١، ٣)

أ = ٥

٢ب = ٤ ← ب = ٢

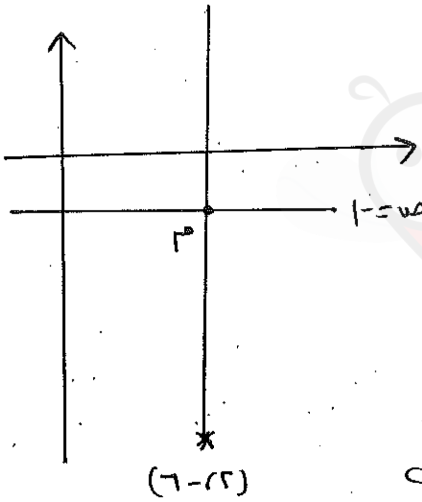
معادلته:

(س + ١)²/٢٥ − (ص − ٣)²/٤ = ١

٧) إحدى بؤرتيه (٢، −٦) وطول محوره القاطع ٨ وحدات ومعادلة محوره المرافق هي ص = −١

الحل:

القطع صادي



م = (٢، −١) ص = −١

جـ = ٥

٢أ = ٨

أ = ٤

جـ² = أ² + ب²

٢٥ = ١٦ + ب²

ب² = ٩ ← ب = ٣

معادلته:

(ص + ١)²/١٦ − (س − ٢)²/٩ = ١

٨) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور الصادات وطول محوره المرافق ٢√٢ واختلافه المركزي = ٣.

الحل:

القطع صادي

م = (٠، ٠)

٢ب = ٢√٢ ← ب = √٢

جـ/أ = ٣ ← جـ = ٣أ

لكن جـ² = أ² + ب²

٩أ² = أ² + ٢

٨أ² = ٢

أ² = ١/٤ ← أ = ١/٢

∴ معادلته:

ص²/(١/٤) − س²/٢ = ١

٤ص² − س²/٢ = ١

⑨ البعد بين بؤرتيه ٤ وحدات . ورأساه هما بؤرة ورأس القطع المخروطي $(س-٢)^٢ = ٨(ص-١)$

الحل :

في القطع المكافئ : $(س-٢)^٢ = ٨(ص-١)$

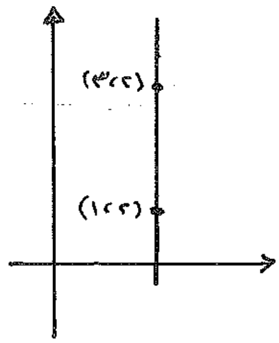
القطع صادي موجب

رأسه (٢، ١)

$٤جـ = ٨ \leftarrow جـ = ٢$

∴ بؤرته (٢، ٣)

∴ رأسا القطع الزائد هما النقطتان (٢، ١) ، (٢، ٣)



القطع صادي

م = (٢، ٢)

أ = ١

$٢جـ = ٤ \leftarrow جـ = ٢$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

$٤ = ١ + ب^٢ \leftarrow ب^٢ = ٣$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{(ص-٢)^٢}{١} - \frac{(س-٢)^٢}{٣} = ١$

[٣] جد الاختلاف المركزي :

① لقطع زائد طول محوره القاطع يساوي ثلاثة أمثال طول محوره المرافق .

الحل : $٢أ = ٣ \times ٢ب \leftarrow أ = ٣ب$

$\leftarrow ب = \frac{أ}{٣}$

لكن $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

$جـ^٢ = أ^٢ + \frac{أ^٢}{٩} \leftarrow جـ^٢ = \frac{١٠}{٩}أ^٢$

$\frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{١٠}{٩} \leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٠}}{٣}$

② لقطع ناقص بعده البؤري يساوي نصف طول محوره الأصغر .

الحل : $٢جـ = \frac{١}{٢} \times ٢ب \leftarrow ب = ٢جـ$

لكن $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = أ^٢ - ٤جـ^٢$

$٥جـ^٢ = أ^٢ \leftarrow \frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{١}{٥} \leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

③ لقطع زائد بعد أحد رأسيه عن البؤرة البعيدة عنه يساوي أربعة أمثال بعده عن البؤرة القريبة منه

الحل :

$جـ + أ = ٤(جـ - أ)$

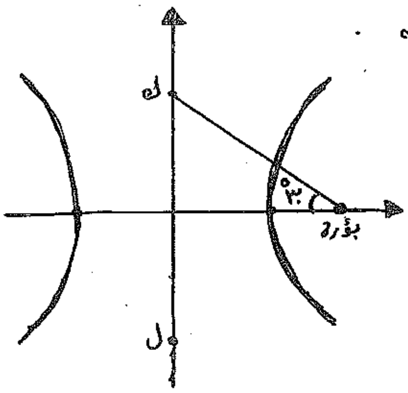
$جـ + أ = ٤جـ - ٤أ \leftarrow ٣جـ = ٥أ$

$\therefore \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

④ للقطع الزائد المرسوم في الشكل حيث :

مركزه نقطة الأصل .

ك ل : محوره المرافق .



الحل :

$ظا٣٠° = \frac{ب}{جـ}$

$\frac{ب}{جـ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$ب = \frac{١}{\sqrt{٣}} جـ$

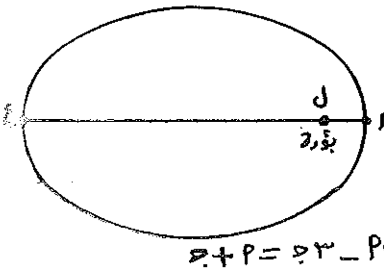
لكن :

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + \frac{١}{٣}جـ^٢$

$\frac{٢}{٣}جـ^٢ = أ^٢ \leftarrow \frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{٣}{٢} \leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$

⑤ للقطع الناقص المرسوم في الشكل حيث :

م ل : ع ل = ١ : ٣



الحل :

م ل = أ − جـ

ع ل = أ + جـ

$\therefore \frac{أ-جـ}{أ+جـ} = \frac{١}{٣} \leftarrow ٣أ - ٣جـ = أ + جـ$

$٢أ = ٤جـ \leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

تدريب :

قطع ناقص النسبة بين طولي محوريه هي ٥ : ٣

جد اختلافه المركزي .

⑥ لقطع ناقص البعد بين بؤرتيه يساوي نصف البعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر .

الحل :

$2\text{جـ} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2} \longleftarrow 4\text{جـ} = \sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$

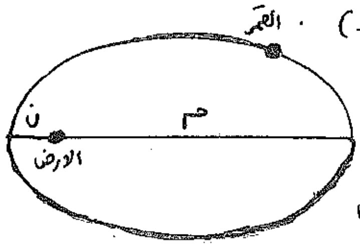
$16\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \cancel{\text{ب}^2} \longleftarrow ①$

لكن : $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \cancel{\text{ب}^2} \longleftarrow ②$

$17\text{جـ}^2 = 2\text{أ}^2$

$\frac{\text{جـ}^2}{\text{أ}^2} = \frac{2}{17} \longleftarrow \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

$\boxed{3}$ يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الأرض في احدى بؤرتي هذا المدار (انظر الشكل المجاور) .



اذا علمت أن :

أطول مسافة بين الارض والقمر = م

وأقصر مسافة بين الارض والقمر = ن . فأثبت أن :

الاختلاف المركزي لهذا القطع = $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$.

البرهان :

$\text{م} = \text{أ} + \text{جـ}$

$\text{ن} = \text{أ} - \text{جـ}$

$\xrightarrow{\text{بالجمع}} \text{م} + \text{ن} = 2\text{أ}$

$\therefore \text{أ} = \frac{\text{م}+\text{ن}}{2}$

$\xrightarrow{\text{بالطرح}} \text{م} - \text{ن} = 2\text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = \frac{\text{م}-\text{ن}}{2}$

$\therefore \text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\frac{\text{م}-\text{ن}}{2}}{\frac{\text{م}+\text{ن}}{2}} = \frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$

تدريب :

اذا كانت م ، ن نقطتان ماديتان ، والنقطة م تدور في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع النقطة ن في احدى بؤرتيه . فاذا كان طول محوره الأكبر = ١٠ واختلافه المركزي = ٠٫٣ . جد : أطول وأقصر مسافة بين م ، ن

تمييز القطوع المخروطية من المعادلة العامة .

المعادلة العامة للقطوع المخروطية هي :

$\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{ص}^2 + \text{جـ}\text{س} + \text{د}\text{ص} + \text{هـ} = 0$.

حيث أ ، ب ≠ صفر معاً .

وتمثل هذه المعادلة :

١) دائرة : عندما أ = ب

٢) قطع مكافئ : عندما أ = صفر أو ب = صفر

أي : أ × ب = صفر

٣) قطع ناقص : عندما أ ، ب لهما نفس الاشارة وغير متساويان

أي : أ × ب > ٠ ، أ ≠ ب

٤) قطع زائد : عندما أ ، ب مختلفان في الاشارة

أي : أ × ب < ٠ .

مثال :

حدد المنحني الذي تمثله المعادلات التالية :

١) $\text{س}^2 - 3\text{س} + 2\text{ص} + 1 = 0$ ⟵ مكافئ

٢) $4\text{ص}^2 - 6\text{س} - \text{س}^2 = 3\text{ص} + 8$ ⟵ زائد

٣) $2\text{س}^2 - 5 = 4\text{ص} - 2\text{ص}^2$ ⟵ دائرة .

٤) $(2\text{ص}+1)^2 = 3\text{س} - 7\text{س}^2$ ⟵ ناقص

٥) $\text{ص}^2 - 4\text{ص} + 9 = 2\text{س} + 3\text{س}^2$ ⟵ زائد .

اذا كانت معادلة قطع مخروطي هي :

$(\text{أ}+1)\text{س}^2 + (6-2\text{أ})\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2\text{س} = 0$

نجد قيم الثابت أ التي تجعل القطع :

١) مكافئ

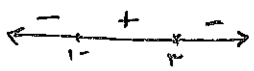
$\text{أ}+1 = 0 \longleftarrow \text{أ} = -1$

أو $6-2\text{أ} = 0 \longleftarrow \text{أ} = 3$

$\therefore \text{أ} = \{-1 ، 3\}$

٢) زائد .

$(\text{أ}+1)(6-2\text{أ}) < 0$.



$\text{أ} = (-\infty ، -1) \cup (3 ، \infty)$

اذا كانت : $\frac{\text{س}^2}{4-\text{ل}} + \frac{\text{ص}^2}{2\text{ل}+1} = 1$

معادلة قطع مخروطي . نجد قيم ل التي تجعل القطع

(1) دائرة :

$4-\text{ل} = 2\text{ل}+1$

$3 = 3\text{ل} \leftarrow \text{ل} = 1$

(2) قطع ناقص :

$4-\text{ل} > 0$ و $2\text{ل}+1 > 0$

$\text{ل} < 4$ و $\text{ل} > \frac{-1}{2}$

$\therefore \frac{-1}{2} < \text{ل} < 4$

$\therefore \text{ل} = (\frac{-1}{2}, 4) - \{1\}$

إيجاد عناصر القطع الناقص أو الزائد من معادلته .

1) نكتب المعادلة المعطاة بالصورة القياسية .

2) نحدد احداثيات مركزه ونوعه ← سيني / صادي .

3) نجد قيم أ ، ب ، جـ

تذكر أن :

1) نحدد نوع القطع الناقص حسب العدد الأكبر .

2) نحدد نوع القطع الزائد حسب الأول .

3) أ تكون حسب نوع القطع

(1) اذا كانت معادلة قطع ناقص هي :

$$\frac{(\text{س}-2)^2}{9} + \frac{(\text{ص}+1)^2}{25} = 1$$

جد : أ) احداثيات رأسيه

ب) احداثيات بؤرتيه

جـ) احداثيات طرفي محوره الأصغر

د) معادلة محوره الأكبر

الحل :

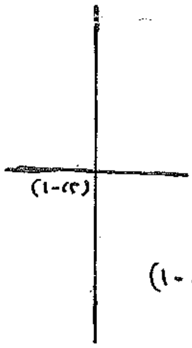
القطع صادي .

$\text{م} = (2, -1)$

$\text{أ}^2 = 25 \leftarrow \text{أ} = 5$

$\text{ب}^2 = 9 \leftarrow \text{ب} = 3$

$\text{جـ}^2 = 25 - 9 = 16 \leftarrow \text{جـ} = 4$



أ) رأسيه : $(2, 4)$ ، $(2, -6)$

ب) بؤرتيه : $(2, 3)$ ، $(2, -5)$

جـ) طرفا محوره الأصغر : $(5, -1)$ ، $(-1, -1)$

د) معادلة محوره الأكبر : $\text{س} = 2$

(2) اذا كانت معادلة قطع زائد هي :

$$3(\text{س}+3)^2 = 72 + 8\text{ص}^2$$

جد : أ) احداثيات بؤرتيه

ب) طول محوره القاطع

جـ) معادلة محوره المرافق

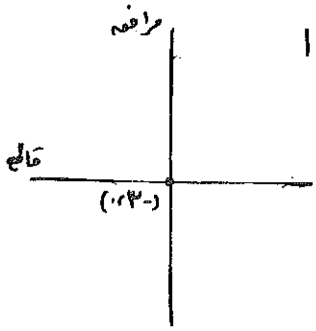
د) الاختلاف المركزي .

الحل :

$3(\text{س}+3)^2 - 8\text{ص}^2 = 72 \quad /72$

$\frac{(\text{س}+3)^2}{36} - \frac{\text{ص}^2}{9} = 1$

القطع سيني .



$\text{م} = (-3, 0)$

$\text{أ}^2 = 36 \leftarrow \text{أ} = 6$

$\text{ب}^2 = 9 \leftarrow \text{ب} = 3$

$\text{جـ}^2 = 36 + 9 = 45 \leftarrow \text{جـ} = 3\sqrt{5}$.

أ) بؤرتيه : $(-3 \mp 3\sqrt{5}, 0)$

ب) طول محوره القاطع $= 2\text{أ} = 12$

جـ) معادلة محوره المرافق : $\text{س} = -3$

د) $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

③ اذا كانت معادلة قطع ناقص هي:

٤ص² + ١٦ص + (٣س-٩)² = ١٢٨

جد:

أ) احداثيات رأسيه

ب) طول محوره الأصغر

ج) بعده البؤري

د) اختلافه المركزي

الحل:

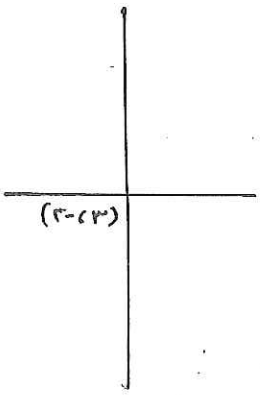
نكمل مربع لـ ص.

٤(ص² + ٤ص) + (٣(س-٣))² = ١٢٨
+٤ +١٦

٤(ص+٢)² + ٩(س-٣)² = ١٤٤ /١٤٤

(ص+٢)²/٣٦ + (س-٣)²/١٦ = ١

∴ القطع صادي



م = (٣، -٢)

أ² = ٣٦ ← أ = ٦

ب² = ١٦ ← ب = ٤

ج² = ٣٦ - ١٦ = ٢٠

ج = ٢√٥

أ) رأسيه: (٣، ٤) ، (٣، -٨)

ب) ٢ب = ٢×٤ = ٨   د) هـ = ج/أ = √٥/٣

ج) ٢ج = ٢×٢√٥ = ٤√٥

④ اذا كانت معادلة قطع مخروطي هي:

٩س² - ٤ص² + ١٨س + ١٦ص - ٤٣ = ٠

جد:

أ) احداثيات مركزه

ب) احداثيات طرفا محوره المرافق

ج) معادلتا محوري تماثله

د) اختلافه المركزي

الحل: القطع زائد

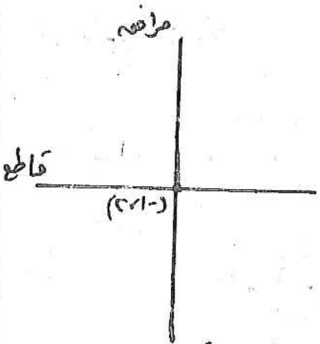
(٩س² + ١٨س) - (٤ص² - ١٦ص) = ٤٣

٩(س² + ٢س) - ٤(ص² - ٤ص) = ٤٣
+١ +٤ +٩ - ١٦

٩(س+١)² - ٤(ص-٢)² = ٣٦ /٣٦

(س+١)²/٤ - (ص-٢)²/٩ = ١

القطع سيني



أ) مركزه = (-١، ٢)

أ² = ٤ ← أ = ٢

ب² = ٩ ← ب = ٣

ج² = ٤+٩ = ١٣

ج = √١٣

ب) طرفا محوره المرافق: (٢، ٢) ، (-٤، ٢)

ج) معادلة محور القاطع: ص = ٢   د) هـ = √١٣/٢

معادلة محوره المرافق: س = -١

⑤ اذا كانت معادلة قطع مخروطي هي:

٥س² + ٩ص² - ٢٠س + ٧٢ص + ١١٩ = ٠

جد: أ) احداثيات بؤرتيه

ب) البعد بين طرفي محوري تماثله

ج) بعده البؤري.

الحل: القطع ناقص.

(٥س² - ٢٠س) + (٩ص² + ٧٢ص) = -١١٩

٥(س² - ٤س) + ٩(ص² + ٨ص) = -١١٩
+٤ +١٦ +٢٠ +١٤٤

٥(س-٢)² + ٩(ص+٤)² = ٤٥ /٤٥

(س-٢)²/٩ + (ص+٤)²/٥ = ١

القطع سيني   أ² = ٩ ← أ = ٣

م = (٢، -٤)   ب² = ٥ ← ب = √٥

ج² = ٤ ← ج = ٢

أ) بؤرتيه (٤، -٤) ، (٠، -٤)

ب) √(أ² + ب²) = √(٩+٥) = √١٤

ج) ٢ج = ٢×٢ = ٤

⑥ اذا كانت: $ك س^2 + 5 ص^2 = 17$

معادلة قطع ناقص محوره الأكبر يوازي محور السينات

فأثبت أن:

$$ك = \frac{17}{ب^2 + جـ^2}$$

البرهان:

نحول الى الصورة القياسية.

$$\frac{ك س^2}{17} + \frac{5 ص^2}{17} = 1$$

$$\frac{س^2}{\frac{17}{ك}} + \frac{ص^2}{\frac{17}{5}} = 1$$

$\therefore أ^2 = \frac{17}{ك} \longrightarrow ك = \frac{17}{أ^2}$ لكن $أ^2 = ب^2 + جـ^2$

$$\therefore ك = \frac{17}{ب^2 + جـ^2}$$

⑦ اذا كانت:

$2 س^2 - 3 ص^2 + 18 ص = ك$

معادلة قطع زائد محوره القاطع يوازي محور الصادات

نجد قيم الثابت ك.

الحل:

نحول الى الصورة القياسية.

$$2 س^2 - 3(\underset{+9}{ص^2 - 6 ص}) = \underset{-27}{ك}$$

$2 س^2 - 3(ص - 3)^2 = ك - 27$ $\quad / \, ك - 27$

$$\frac{س^2}{\frac{ك - 27}{2}} + \frac{(ص - 3)^2}{\frac{27 - ك}{3}} = 1$$

$\because \frac{ك - 27}{2} < 0$ لأن القطع صادي .

$\frac{27 - ك}{3} > 0$ ،

$\therefore ك - 27 < 0 \longrightarrow ك < 27$.

تدريب:

في القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{(س - ل)^2}{أ^2} + \frac{(ص - ك)^2}{ب^2} = 1$$

أثبت أن: $ب^2 = أ^2(1 - هـ^2)$ حيث هـ: الاختلاف المركزي للقطع

⑧ اذا كان $هـ_1$ ، $هـ_2$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطين التاليين على الترتيب.

$$\frac{س^2}{ل^2} - \frac{ص^2}{ك^2} = 1 \quad ، \quad \frac{س^2}{ك^2} - \frac{ص^2}{ل^2} = 1$$

فأثبت أن: $\frac{1}{هـ_1^2} + \frac{1}{هـ_2^2} = 1$

البرهان:

$$هـ_1^2 = \frac{جـ^2}{ل^2} \quad ، \quad هـ_2^2 = \frac{جـ^2}{ك^2}$$

$$\therefore \frac{1}{هـ_1^2} + \frac{1}{هـ_2^2} = \frac{ل^2}{جـ^2} + \frac{ك^2}{جـ^2} = \frac{ل^2 + ك^2}{جـ^2} = \frac{جـ^2}{جـ^2} = 1$$

⑨ جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه وبؤرتاه هما بؤرتا ورأسا القطع $4 س^2 + 9 ص^2 = 36$ على الترتيب

الحل:

في القطع الناقص: $4 س^2 + 9 ص^2 = 36$ $\quad / \, 36$

$$\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{4} = 1$$

القطع سيني ومركزه $(0 ، 0)$

$أ = 3$ ، $ب = 2$ ، $جـ = \sqrt{5}$

رأساه $(\pm 3 ، 0)$ وبؤرتاه: $(\pm \sqrt{5} ، 0)$

$\therefore$ القطع الزائد:

رأساه $(\pm \sqrt{5} ، 0)$ وبؤرتاه $(\pm 3 ، 0)$

القطع سيني ومركزه $(0 ، 0)$

$أ = \sqrt{5}$ ، $جـ = 3$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 \Leftarrow 9 = 5 + ب^2 \longrightarrow ب^2 = 4$

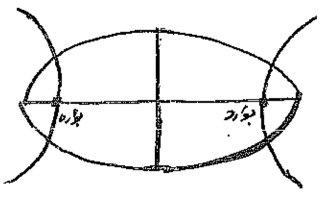
$\therefore$ معادلته: $\frac{س^2}{5} - \frac{ص^2}{4} = 1$

تدريب:

في الشكل المرسوم: قطع زائد اختلافه المركزي $هـ_1$ يقع رأساه عند بؤرتي قطع ناقص اختلافه المركزي $هـ_2$ اذا علمت أن المحورين الأصغر والمرافق متساويين في الطول.

فأثبت أن:

$$هـ_1 \times هـ_2 = 1$$



تمارين [٣]

[١] جد معادلة القطع الناقص في الحالات التالية

① مركزه (١، ٢) وإحدى بؤرتيه (-٣، ٢) واختلافه المركزي = ٠٫٨

② نهايتا المحور الأصغر (٣، ١)، (٣، -٥) ويمر بالنقطة (٦، $-\frac{1}{2}$)

③ اختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ وطول محوره الأكبر ١٢ وحدة ويقع مركزه يمين البؤرة (٢، ١)

④ بؤرتاه (٢، ٥)، (٢، -٧) وطول محوره الأكبر مثلي طول محوره الأصغر.

⑤ نهايتا المحور الأصغر (±٣، ٠) واختلافه المركزي = $\frac{1}{\sqrt{٣}}$

⑥ يقع أحد رأسيه في النقطة (٣، ١) وإحداثيات البؤرة القريبة من هذا الرأس (١، ١) واختلافه المركزي = $\frac{٢}{٣}$

⑦ بؤرتاه (±٣، ٠) ويمر بالنقطة (٤، ١)

⑧ أحد رأسيه (٥، ٣) والبؤرة البعيدة عن هذا الرأس (-١، ٣) وبعده البؤري نصف طول محوره الأكبر

⑨ بؤرتاه (٤$\sqrt{٦}$، ١)، (-٤$\sqrt{٦}$، ١) وطول محوره الأكبر ٢٨ وحدة

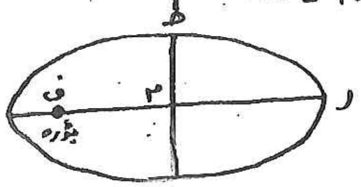
⑩ إحدى نهايتي محوره الأصغر (٣، -١) وتقع بؤرتاه على المستقيم ص = -٦ واختلافه المركزي $\frac{1}{\sqrt{٢}}$.

⑪ مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والنقطة (٨، ١٢) تقع عليه وتبعد عن البؤرة اليسرى مسافة ٢٠ وحدة.

[٢] جد الاختلاف المركزي للقطع الناقص فيما يلي:

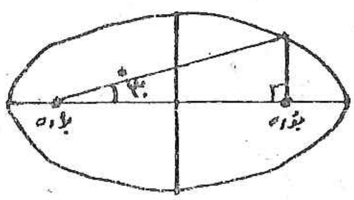
① طول محوره البؤري يساوي ضعف طول محوره الأصغر.

② في القطع الناقص المرسوم إذا علمت أن رف : طم = ٣ : ٢



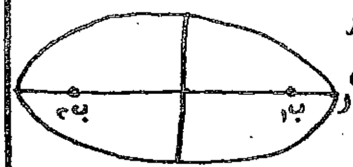
③ الفرق بين طولي محوريه الأكبر والأصغر يساوي نصف البعد البؤري.

④ القطع الناقص المرسوم في الشكل.

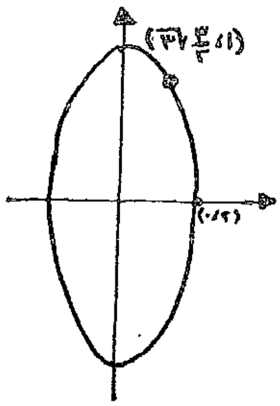


[٣] تدور الأرض حول الشمس في مدار على شكل قطع ناقص تقع الشمس في إحدى بؤرتيه.
إذا علمت أن طول المحور الأكبر $= 1.86 \times 10^{8}$ ميل
الاختلاف المركزي $= 0.0167$ جد:
١) أصغر مسافة بين الأرض والشمس
٢) أكبر مسافة بين الأرض والشمس (وزارة ٢٠٠٣)

[٤] يمثل الشكل المجاور قطع ناقص أحد رأسيه ر وبؤرتيه ب١، ب٢ فإذا كان ر ب١ = ١، ر ب٢ = ٩
جد: ١) طول محوره الأصغر
٢) الاختلاف المركزي

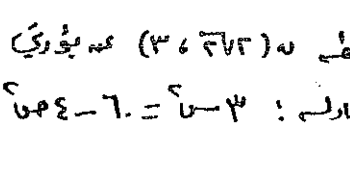


[٥] جد طول المحور الأكبر للقطع الناقص المرسوم في الشكل المجاور



[٦] جد مجموع بعدي النقطة ن($2\sqrt{3}$، ٣) عن بؤرتي القطع المخروطي الممثل بالمعادلة: $3س^2 = 60 - 4ص^2$

[٧] إذا كانت ك، ل بؤرتا القطع الناقص الممثل في الشكل والذي معادلته $\frac{س^2}{100} + \frac{ص^2}{64} = 1$
فما محيط المثلث ن م ك



[٨] قطع ناقص معادلته:
$16س^2 + 9ص^2 - 64س + 54ص + 1 = صفر$
جد: ١) احداثيات مركزه
٢) الاختلاف المركزي
٣) معادلة محوره الأصغر

[٩] إذا كانت:
$4س^2 + 25ص^2 + 16س - 50ص = 59$
معادلة قطع ناقص جد:
١) احداثيات رأسيه
٢) احداثيات نهايتي محوره الأصغر
٣) معادلة محوره الأكبر.

[١٠] قطع ناقص معادلته:
$4س^2 + 3ص^2 + 16س = 176$ جد:
١) احداثيات مركزه
٢) احداثيات بؤرتيه
٣) احداثيات رأسيه
٤) الاختلاف المركزي.

[١١] قطع ناقص معادلته:
$(6-3ص)^2 = 36 - (2س+8)^2$ جد:
١) احداثيات بؤرتيه
٢) احداثيات نهايتي المحور الأصغر
٣) البعد بين طرفي محوريه.

[١٢] إذا كانت ن نقطة على القطع $4(6-2س)^2 + 7ص^2 = 112$
وكانت بؤرتاه هما ب١، ب٢ جد محيط Δ ن ب١ ب٢

تمرين [٤]

[١] جد معادلة القطع الزائد في الحالات التالية :

① مركزه (٢، -٣) وإحدى نهايتي محوره المرافق (٢، ١) والاختلاف المركزي $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

② رأساه (٠، ٢)، (٠، -٢) ويمر بالنقطة ($\frac{٨}{٣}$، ٦)

③ بؤرتاه (-١، ٧)، (-١، -٣) ومحوره القاطع أطول بوحدتين من محوره المرافق .

④ مركزه (١، ٢) ويمر بالنقطتين (٣، -١)، (-٦، ٢٦) ومعادلة محوره المرافق س = ١

⑤ يقع مركزه على المستقيم س = ٢ وتقع بؤرتاه على المستقيم ص = ٣ ويمر بالنقطة (-٤، ٣) والاختلاف المركزي $\frac{٢\sqrt{٧}}{٣}$.

⑥ أحد رأسيه (-٢، ١) وطول محوره المرافق $٢\sqrt{٥}$ والبعد بين طرفي محوري القاطع والمرافق ٣ وحدات ومعادلة محوره القاطع ص = -٢

⑦ البعد بين بؤرتيه ١٠ وحدات ورأساه هما بؤرة ورأس القطع المخروطي الذي معادلته س^٢ - ٨ص = ٤س + ٢٠

⑧ يقع رأساه على رأسي القطع (٢س-٦)^٢ = ٣٦ - ٩ص^٢ والاختلاف المركزي = $\frac{٣}{٢}$

[٢] جد معادلة القطع المكافئ المتجهاً للأعلى والذي بؤرته ورأسه هما بؤرتي القطع المخروطي الذي معادلته ٣(س-١)^٢ - ص^٢ = -٣

[٣] إذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ هو هـ$_١$

والاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ هو هـ$_٢$

فتحقق أن : هـ$_١^٢$ + هـ$_٢^٢$ = ٢

[٤] جد الاختلاف المركزي للقطع الزائد :

١) بعده البؤري يساوي ثلاثة أمثال طول محوره المرافق

٢) البعد بين رأسيه يساوي البعد بين إحدى بؤرتيه وإحدى نهايتي محوره المرافق .

[٥]

١) إذا كان المحور المرافق للقطع الزائد س^٢ - $\frac{ص^٢}{ل}$ = ١ أطول بوحدتين من المحور الأصغر للقطع الناقص $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٤٩} = ١$ فما قيمة ل

٢) ما إحداثيات نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد (ص+٦)^٢ - (س-٢)^٢ = ١

٣) قطع زائد معادلته ٤ص^٢ - س^٢ = ب^٢ ب ثابت وبعده البؤري = $٢\sqrt{٥}$ جد طول محوره القاطع

٤) إذا كان البعد بين نهايتي المحور القاطع والمرافق لـ قطع زائد يساوي ٥ والاختلاف المركزي = $1\frac{2}{3}$
جد طول محوره المرافق .

٦ قطع زائد معادلته :

$$9ص^2 - 28س = 7س^2 + 54ص + 10$$

جد : ١) احداثيات بؤرتيه
٢) معادلة محوره البؤري
٣) احداثيات نهايتي محوره المرافق

٧ إذا كانت معادلة قطع مخروطي هي :

$$(س-2)^2 - 8ص = 5 + 4ص^2$$

جد : ١) احداثيات مركزه
٢) احداثيات رأسيه
٣) الاختلاف المركزي .
٤) معادلة محوره المرافق

٨ إذا كانت :

$$25س^2 - 7ص^2 + 14ص = 357$$

معادلة قطع مخروطي جد :
١) احداثيات مركزه
٢) احداثيات رأسيه
٣) احداثيات بؤرتيه
٤) الاختلاف المركزي

٩ إذا كانت $\frac{س^2}{9-م} + \frac{ص^2}{5-م} = 1$

تمثل معادلة قطع مخروطي ، جد قيم م
التي تجعل القطع ١) ناقصا ٢) زائدا

١٠ إذا كان الاختلاف المركزي للقطع الزائد

$$\frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{أ^2} = 1 \quad \text{هو } هـ_1$$

والاختلاف المركزي للقطع الزائد

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1 \quad \text{هو } هـ_2$$

بيّن أن : $هـ_1^2 هـ_2^2 = هـ_1^2 + هـ_2^2$.

١١ جد قيم أ التي تجعل القطع المخروطي
الذي معادلته :

$$أس^2 + \frac{ص^2}{2-أ} = 2أس$$

١) ناقص ٢) دائرة .

١٢ إذا كانت معادلة قطع زائد هي :

$$س^2 - \frac{ص^2}{3} = أ^2$$

١) جد الاختلاف المركزي .

٢) بيّن أن :
النسبة بين أحد رأسيه والبؤرة البعيدة عنه
إلى طول محوره المرافق هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

١٣ إذا كانت معادلة قطع زائد هي :

$$\frac{(س+ك)^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{4} = 1$$

وبؤرتاه (٤،٠) ، (−١٠،٠)
جد : ١) قيمة كل من أ ، ك
٢) الاختلاف المركزي .

الحل الهندسي

هو المنحنى الذي ترسمه نقطة متحركة في المستوى بشرط معين:

فإذا كان

أ) شرط معلوم .
فإننا نحدد نوعه ثم نجد معادلته .

ب) شرط جديد
فإننا نجد معادلته ثم نحدد نوعه .

[1] جد نوع ومعادلة الحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث أن:

① بعدها عن النقطة $(-5, 2)$ يساوي دائماً 3 وحدات

الحل:

الحل الهندسي هو دائرة مركزها $(-5, 2)$

ونصف قطرها $= 3$

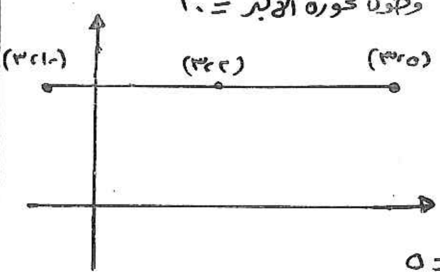
∴ معادلته: $(س+5)^2 + (ص-2)^2 = 9$

② مجموع بعديها عن النقطتين $(-1, 3)$ ، $(5, 3)$ يساوي دائماً 10 وحدات .

الحل:

الحل الهندسي هو قطع ناقص بؤرتيه $(-1, 3)$ ، $(5, 3)$

وطول محوره الأكبر $= 10$



القطع سيني

مركزه $= (2, 3)$

$جـ = 3$

$2أ = 10 \leftarrow أ = 5$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow 9 = 25 - ب^2 \leftarrow ب^2 = 16$

∴ معادلته: $\frac{(س-2)^2}{25} + \frac{(ص-3)^2}{16} = 1$

③ بعدها عن المستقيم $4ص = 3س + 5$ يساوي دائماً وحدة واحدة وتمر أثناء حركتها بنقطة الأصل .

الحل: $4ص - 3س - 5 = 0$.

شرط جديد

بعد (س، ص) عن المستقيم $= 1$

$$\frac{|4ص - 3س - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = 1$$

$$|4ص - 3س - 5| = 5$$

$4ص - 3س - 5 = 5$ ، $4ص - 3س - 5 = -5$

$4ص - 3س - 10 = 0$. مرفوض لأنه لا يمر بـ $(0, 0)$

$4ص - 3س = 0$. يمر بـ $(0, 0)$

∴ الحل الهندسي هو خط مستقيم ومعادلته $4ص - 3س = 0$

④ بعدها عن المستقيم $س = 9$ يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن النقطة $(1, 0)$

الحل: $س - 9 = 0$.

شرط جديد

بعد (س، ص) عن المستقيم $= 3 \times$ بعد (س، ص) عن النقطة

$$\frac{|س - 9|}{\sqrt{1 + 0}} = 3\sqrt{(س-1)^2 + ص^2}$$

$$|س - 9| = 3\sqrt{س^2 - 2س + 1 + ص^2}$$

∴ $س^2 - \cancel{18س} + 81 = 9س^2 - \cancel{18س} + 9 + 9ص^2$

$8س^2 + 9ص^2 - 72 = صفر$

∴ الحل الهندسي هو قطع ناقص ومعادلته

$8س^2 + 9ص^2 - 72 = 0$.

تدريب:

جد الحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تكون على بعدين متساويين من النقطتين $(2, 3)$ ، $(-2, 0)$

⑤ تكون على بعدين متساويين من المستقيمين س = ٢ ، ص = ٥ وتمر أثناء حركتها بالنقطة (٣، ٤)

الحل:

بعد (س، ص) عن المستقيم (س = ٢)

يساوي بعد (س، ص) عن المستقيم (ص = ٥)

|س − ٢| = |ص − ٥|

إما:

س − ٢ = ص − ٥ ← ص = س + ٣ مرفوض لأن (٣، ٤) لا تقع عليه

أو

س − ٢ = −ص + ٥ ← ص = ٧ − س

تحققه النقطة (٣، ٤)

∴ المحل الهندسي هو خط مستقيم معادلته ص = ٧ − س

⑥ مجموع مربعي بعديها عن النقطتين (٢، ١)، (٠، ٠) يساوي دائماً ٩ وحدات.

الحل:

(بعد (س، ص) عن (٢، ١))^2 + (بعد (س، ص) عن (٠، ٠))^2 = ٩

(س − ٢)^2 + (ص − ١)^2 + س^2 + ص^2 = ٩

س^2 − ٤س + ٤ + ص^2 − ٢ص + ١ + س^2 + ص^2 = ٩

٢س^2 + ٢ص^2 − ٤س − ٢ص − ٤ = ٠

∴ المحل الهندسي هو دائرة ومعادلتها:

س^2 + ص^2 − ٢س − ص − ٢ = ٠

تدريب:

① جد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تكون نسبة بعدها عن النقطة (٠، ٤) الى بعدها عن المستقيم ٤ص = ٩ هي ٤ : ٣

② ما المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره ٣ وحدات عن المستقيم ٣س + ٤ص = ٥ وتمر أثناء حركتها بمركز الدائرة (س − ٤)^2 + (ص − ٢)^2 = ٩

④ تتحرك النقطة (س، ص) في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (جـ، ٠) يساوي بعدها عن المستقيم س = −جـ الواقع في المستوى نفسه.

أثبت أن النقطة تتحرك على منحنى قطع مكافئ معادلته ص^2 = ٤جـس.

البرهان:

بعد (س، ص) عن (جـ، ٠) = بعد (س، ص) عن المستقيم س + جـ = ٠

√((س − جـ)^2 + ص^2) = |س + جـ| / √(١ + ٠)

√(س^2 − ٢جـس + جـ^2 + ص^2) = |س + جـ|

بتربيع الطرفين:

~~س^2~~ − ٢جـس + ~~جـ^2~~ + ص^2 = ~~س^2~~ + ٢جـس + ~~جـ^2~~

∴ ص^2 = ٤جـس

وهي معادلة قطع مكافئ.

③ أثبت أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (١، ٠)، (−١، ٠) يساوي دائماً ٦ وحدات هو قطع ناقص وجد معادلته.

الحل:

بعد (س، ص) عن (١، ٠) + بعد (س، ص) عن (−١، ٠) = ٦

√((س − ١)^2 + ص^2) + √((س + ١)^2 + ص^2) = ٦

√(س^2 − ٢س + ١ + ص^2) = ٦ − √(س^2 + ٢س + ١ + ص^2)

بتربيع الطرفين:

~~س^2~~ − ٢س + ~~١~~ + ~~ص^2~~

= ٣٦ − ١٢√(س^2 + ٢س + ١ + ص^2) + ~~س^2~~ + ٢س + ~~١~~ + ~~ص^2~~

∴ ١٢√(س^2 + ٢س + ١ + ص^2) = ٤س + ٣٦ ÷٤

٣√(س^2 + ٢س + ١ + ص^2) = س + ٩

بالتربيع مرة أخرى

٩س^2 + ~~١٨س~~ + ٩ + ٩ص^2 = س^2 + ~~١٨س~~ + ٨١

٨س^2 + ٩ص^2 − ٧٢ = ٠

وهي معادلة قطع ناقص.

[٤] جد معادلة المحل الهندسي وحدد نوعه اذا تحركت النقطة (س، ص) في المستوى بحيث أن:

① س = ١٢ جتا²هـ ، ص = ٣ جاهـ .

الحل:

س = ١٢(١ - جا²هـ) ، جاهـ = ص/٣

∴ س = ١٢(١ - ص²/٩)

∴ المحل الهندسي هو قطع مكافئ .

② س = قاهـ ، ص = ظاهـ حيث ٠ < هـ < π/٢

الحل:

س² = قا²هـ

س² = ١ + ظا²هـ لكن ظاهـ = ص

∴ س² = ١ + ص² ← س² - ص² = ١

المحل الهندسي هو قطع زائد .

③ س = ٥ + ٣جاهـ ، ص = ٢ + ٣جتاهـ

الحل:

س - ٥ = ٣جاهـ

(س - ٥)² = ٩جا²هـ

(س - ٥)²/٩ = ١ - جتا²هـ لكن جتاهـ = (ص - ٢)/٣

∴ (س - ٥)²/٩ + (ص - ٢)²/٩ = ١ ×٩

(س - ٥)² + (ص - ٢)² = ٩

المحل الهندسي هو دائرة .

④ س = جتان ، ص = ١ - جتا٢ن

الحل:

ص = ١ - (٢جتا²ن - ١)

ص = ٢ - ٢جتا²ن لكن جتان = س

∴ ص = ٢ - ٢س²

المحل الهندسي قطع مكافئ .

⑤ س = جاهـ + جتاهـ ، ص = ٢√جاهـ جتاهـ

الحل:

ص² = ٤ جاهـ جتاهـ .

س² = جا²هـ + ٢جاهـ جتاهـ + جتا²هـ

س² = ١ + ٢جاهـ جتاهـ لكن جاهـ جتاهـ = ص²/٤

∴ س² = ١ + ٢ × ص²/٤

س² - ص²/٢ = ١

المحل الهندسي هو قطع زائد .

⑥ س = ٦ جتا²هـ ، ص = ٣جا٢هـ

الحل:

ص = ٣ × ٢جاهـ جتاهـ

ص² = ٣٦ جا²هـ جتا²هـ .

ص² = ٣٦(١ - جتا²هـ) جتا²هـ

لكن جتا²هـ = س/٦

∴ ص² = ~~٣٦~~ ٦ (١ - س/٦) × س/~~٦~~

ص² = ٦س - س²

ص² + س² - ٦س = ٠ .

المحل الهندسي هو دائرة .

تدريب:

① س = √(١ + جا²هـ) ، ص = ٢جتاهـ

② س = ن² + ن + ٣ ، ص = ٢ - ن حيث ن ∈ ح

③ ما المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلة: س²/ل + ص²/(ل - ١٦) = ١ حيث ٠ < ل < ١٦ ، ل: ثابت

تمرين $\boxed{5}$

$\boxed{1}$ جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث أن :

① بعدها عن النقطة (-1،1) يساوي دائماً بعدها عن المستقيم س = 3

② تبعد بعداً ثابتاً مقداره وحدتين عن المستقيم ص = -1 وتمر أثناء حركتها بالنقطة (0،-3)

③ بعدها عن المستقيم : س = $-\frac{16}{5}$ يساوي $\frac{4}{5}$ بعدها عن النقطة (0،-5)

④ بعدها عن النقطة (4،0) يقل بمقدار وحدة واحدة عن بعدها عن المستقيم س + 6 = ، علماً بأن س > -6

⑤ س = 2 ظتاهـ ، ص = 4 قتاهـ

⑥ س = جتاهـ - جاهـ ، ص = جا2هـ

⑦ س = 5 + 2جاهـ ، ص = 7 + 3جتاهـ

⑧ ص = $\sqrt{1-هـ^{ن}}$ ، ن = 2لوهـ س حيث ن ∈ ح .

$\boxed{2}$ أ ب جـ مثلث فيه أ(4،0) ، ب(-4،0) والرأس جـ يتحرك في المستوى بحيث يبقى ميل أ جـ يزيد بمقدار وحدة واحدة عن ميل ب جـ ما معادلة المحل الهندسي للرأس جـ وما نوعه .

حل التمارين

حل تمرين [1]

1) توجد دائرتان

في الربع الأول

$م = (٣ ، ر - ١)$

$= (٣ ، ٤)$

معادلتها :

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٢٥$

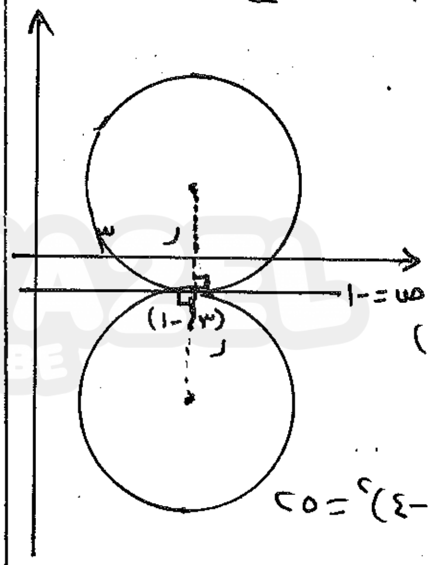
وفي الربع الرابع

$م = (٣ ، -(ر + ١))$

$= (٣ ، -٦)$

معادلتها :

$(س - ٣)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} = ٢٥$

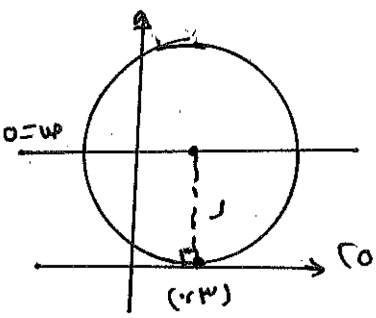


2) $ر = ٥$

$م = (٣ ، ٥)$

معادلتها :

$(س - ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٢٥$



3) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٨$

لـ $م = (٣ ، -١)$

معادلة الدائرة :

$(س + ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ر^{٢}$

لكن

$(٣ ، -١)$ تحقق معادلة الدائرة

$(٣ + ٢)^{٢} + (-١ - ٥)^{٢} = ر^{٢}$

$٢٥ + ٣٦ = ر^{٢}$

$ر^{٢} = ٦١$

معادلتها : $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٦١$

4) نستخدم الصورة العامة .

$م = (-ل ، -ك)$

لـ $-٣ل - ٤ك = ٥ \leftarrow (١)$

معادلتها :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$

$(١ ، -٢) \leftarrow ١ + ٤ + ٢ل - ٤ك + ج = ٠$

$٢ل - ٤ك + ج = -٥ \leftarrow (٢)$

$(٤ ، -٣) \leftarrow ١٦ + ٩ + ٨ل - ٦ك + ج = ٠$

$٨ل - ٦ك + \cancel{ج} = -٢٥ \leftarrow (٣)$

$-٢ل + ٤ك - \cancel{ج} = ٥ \leftarrow (٢)$

$٦ل - ٢ك = -٢٠ \quad / ٢$

$\cancel{٣ل} - ك = -١٠ \leftarrow (٤)$

$-\cancel{٣ل} - ٤ك = ٥ \leftarrow (١)$

$-٥ك = -٥ \leftarrow \boxed{ك = ١}$

$\therefore -٣ل - ٤ = ٥ \leftarrow \boxed{ل = -٣}$

$-٦ - ٤ + ج = -٥ \leftarrow \boxed{ج = ٥}$

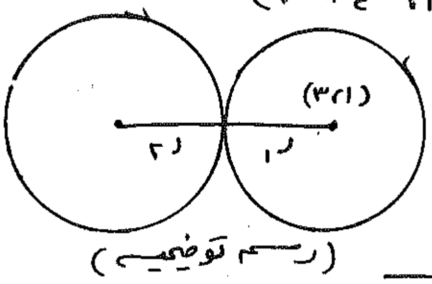
$\therefore$ معادلة الدائرة :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٢ص + ٥ = ٠$

5) $س^{٢} + ص^{٢} + ٨س - ٦ص + ٩ = ٠$

$م_{٢} = (-\frac{١}{٢} \times ٨ ، -\frac{١}{٢} \times -٦)$

$م_{٢} = (-٤ ، ٣)$



(رسم توضيحي)

$ر_{٢} = \sqrt{١٦ + ٩ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

لكن $ر_{١} + ر_{٢} = ١ + ٤ = ٥$

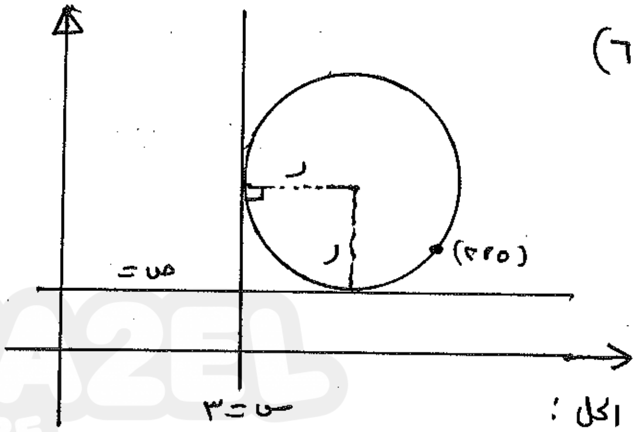
$ر_{١} + ٤ = ٥$

$ر_{١} = ١$

معادلة الدائرة :

$(س - ١)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} = ١$

٦)



الحل:

$م = (ر+٣ ، ر+١)$

معادلتها: $(س-ر-٣)^{٢} + (ص-ر-١)^{٢} = ر^{٢}$

(٥،٢) تحقق معادلتها:

$(٥-ر-٣)^{٢} + (٢-ر-١)^{٢} = ر^{٢}$

$(٢-ر)^{٢} + (١-ر)^{٢} = ر^{٢}$

$٤-٤ر+ر^{٢}+١-٢ر+\cancel{ر^{٢}} = \cancel{ر^{٢}}$

$ر^{٢}-٦ر+٥ = ٠ \leftarrow (ر-٥)(ر-١) = ٠$

$ر = ٥$ أو $ر = ١$

$(س-٨)^{٢} + (ص-٦)^{٢} = ٢٥$

أو $(س-٤)^{٢} + (ص-٢)^{٢} = ١$

٧) نستخدم الصورة العامة:

$م = (-ل ، -ك) \leftarrow -ل = -٤$

$\boxed{ل = ٤}$

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$

$س^{٢} + ص^{٢} + ٨س + ٢ك ص + ج = ٠$

$(٠،٣) \leftarrow ٩ + ٦ك + ج = ٠$

$٦ك + ج = -٩ \longleftarrow$ ①

$(٠،٩) \leftarrow ٨١ + ١٨ك + ج = ٠$

$١٨ك + \cancel{ج} = -٨١ \longleftarrow$ ②

$-٦ك - \cancel{ج} = ٩$

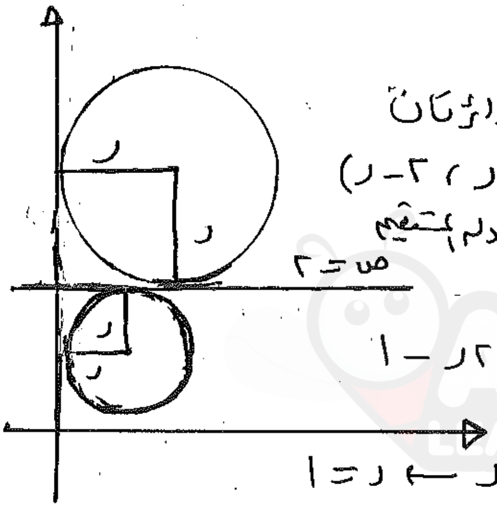
$١٢ك = -٧٢ \longleftarrow \boxed{ك = -٦}$

$\therefore ج = ٢٧$

$\therefore$ معادلتها:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٨س - ١٢ص + ٢٧ = ٠$

٨) الحل:



توجد دائرتان

$م_{١} = (ر ، ٢-ر)$

تحقق معادلة المستقيم

$٢-ر = ٢ر - ١$

$٣ = ٣ر \longleftarrow ر = ١$

$\therefore م_{١} = (١،١)$

معادلتها: $(س-١)^{٢} + (ص-١)^{٢} = ١$

$م_{٢} = (ر ، ٢+ر)$

تحقق معادلة المستقيم

$٢+ر = ٢ر - ١ \longleftarrow ٣ = ر$

$\therefore م_{٢} = (٣،٥)$

معادلتها: $(س-٣)^{٢} + (ص-٥)^{٢} = ٩$

٩) نستخدم الصورة العامة:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + ج = ٠$

$(١،٠) \leftarrow ١ + ٢ل + ج = ٠$

$٢ل + ج = -١ \longleftarrow$ ①

$(٧،٠) \leftarrow ٤٩ + ١٤ل + ج = ٠$

$١٤ل + ج = -٤٩ \longleftarrow$ ②

$(٥،-٣) \leftarrow ٢٥ + ٩ + ١٠ل - ٦ك + ج = ٠$

$١٠ل - ٦ك + ج = -٣٤ \leftarrow$ ③

$-٢ل - \cancel{ج} = ١$

$١٤ل + \cancel{ج} = -٤٩$

$١٢ل = -٤٨ \longleftarrow ل = -٤$

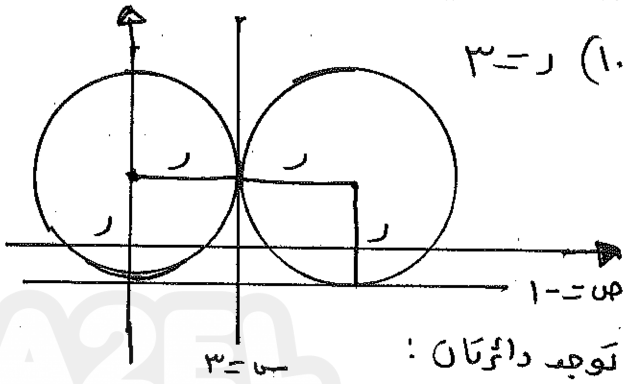
$\therefore -٨ + ج = -١ \longleftarrow ج = ٧$

$-٤٠ - ٦ك + ٧ = -٣٤ \leftarrow ك = \frac{١}{٦}$

$\therefore$ معادلتها:

$س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + \frac{١}{٣}ص + ٧ = ٠$

١٠) ر = ٣



توجد دائرتان :

م١ = (٠ ، ٢)

معادلتها : س^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩

م٢ = (٦ ، ٢)

معادلتها : (س - ٦)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩

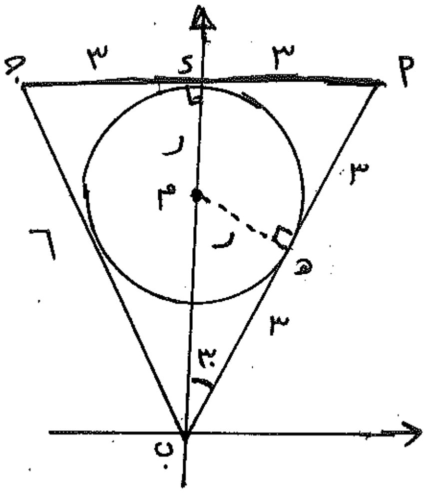
١١) في Δ م هـ ب

ظا ٣٠ = ر / ٣

١ / √٣ = ر / ٣

∴ ر = ٣ / √٣

∴ ر = √٣



كذلك

جتا ٣٠ = ٣ / ب م

√٣ / ٢ = ٣ / ب م ← ب م = ٣×٢ / √٣

ب م = ٢√٣

∴ مركزها م = (٠ ، ٢√٣)

معادلتها : س^٢ + (ص - ٢√٣)^٢ = ٣

طريقة أخرى :

صل الخط م أ فينصف الزاوية أ

ثم جد قيمة ر من ظا ٣٠

واستخدم نظرية فيثاغورس على Δ أ د م

لإيجاد طول ب د

فيكون ب م = ب د - ر

② ١) ٩س^٢ + (٣(ص - ٣))^٢ = ١٨

٩س^٢ + ٩(ص - ٣)^٢ = ١٨

س^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢

م = (٠ ، ٣)

ر = √٢

٢) س^٢ + ص^٢ + ٦س - ٢ص + ٦ = ٠

م = (-½ × ٦ ، -½ × -٢)

م = (-٣ ، ١)

ر = √(٩ + ١ - ٦) = ٤

٣) ٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س - ٨ = ٠ ÷ ٢

س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٤ = ٠

م = (-½ × -٢ ، -½ × ٠)

= (١ ، ٠)

ر = √(١ + ٠ + ٤) = √٥

٤) ٨ص - ص^٢ = (س - ٥)(س + ٣)

٨ص - ص^٢ = س^٢ - ٢س - ١٥

س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٨ص - ١٥ = ٠

م = (-½ × -٢ ، -½ × -٨)

م = (١ ، ٤)

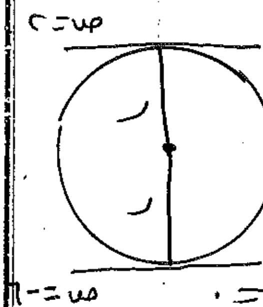
ر = √(١ + ١٦ + ١٥) = √٣٢

③ ٢ر = ٨

ر = ٤

والمركز يقع في الربع الرابع

∴ معادلتها



س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ٣ = ٠

لأن م = (-½ × -٦ ، -½ × ٤)

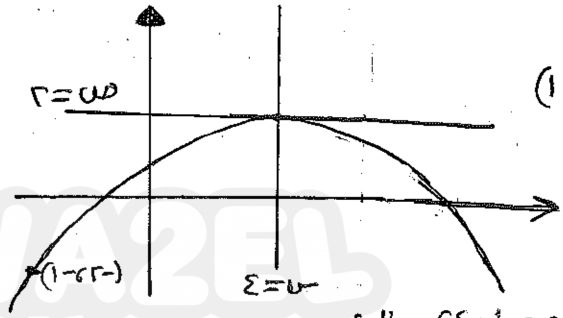
= (٣ ، -٢)

ر = √(٩ + ٤ + ٣) = ٤

(٥)

حل تمرين (٢)

[١] ١)



القطع مكافئ سالب

رأسه (٤،٢)

معادلته (س − ٤)^٢ = −٤جـ (ص − ٢)

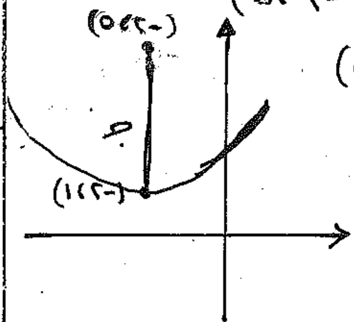
(−٢،−١) ← ٣٦ = ١٢جـ ← جـ = ٣

∴ معادلته : (س − ٤)^٢ = −١٢ (ص − ٢)

٢) مركز الدائرة = (−½ × ٤ ، −½ × −١٠)

= (−٢،٥)

∴ بؤرته = (−٢،٥)



القطع مكافئ موجب

رأسه (−٢،١)

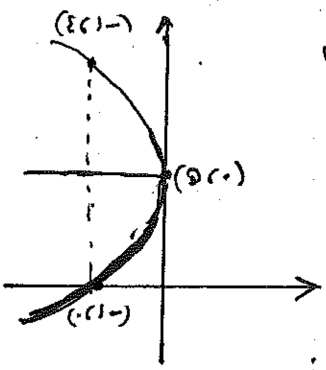
جـ = ٥ − ١ = ٤

معادلته :

(س + ٢)^٢ = ١٦ (ص − ١)

٣) هـ = (٤ + ٠)/٢ = ٢

رأسه (٠،٢)



القطع سيني سالب

معادلته :

(ص − ٢)^٢ = −٤جـ س

(−١،٠) تحقق معادلته :

(−٢)^٢ = −٤جـ × −١

٤جـ = ٤ ← جـ = ١

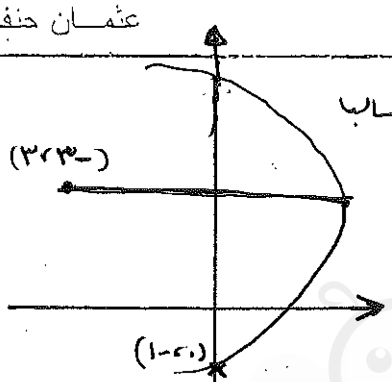
معادلته :

(ص − ٢)^٢ = −٤س

٤) القطع سيني سالب

رأسه (د،٣)

جـ = د + ٣



معادلته :

(ص − ٣)^٢ = −٤جـ (س − د)

(ص − ٣)^٢ = −٤ (د + ٣) (س − د)

(٠،−١) تحقق معادلته

(−٤)^٢ = −٤ (د + ٣) × −د

١٦ = ٤د (د + ٣)   ÷ ٤

٤ = د^٢ + ٣د

د^٢ + ٣د − ٤ = ٠ ← (د + ٤) (د − ١) = ٠

د = −٤ ✗   أو   د = ١

تجعل جـ = −١

∴ معادلته : (ص − ٣)^٢ = −١٦ (س − ١)

٥) محور السينات : ص = ٠

−ب/٢أ = ٠ ← ب = ٠   والقطع سيني

معادلته :

س = أص^٢ + ب ص + جـ

لكن ب = ٠

س = أص^٢ + جـ

(١،٢) ← ١ = ٤أ + جـ ... ①

(−٢،١) ← −٢ = أ + جـ ... ②

−١ = −٤أ − ~~جـ~~

−٣ = −٣أ

$\boxed{أ = ١}$

١ = ٤ + جـ ← $\boxed{جـ = −٣}$

معادلته :

س = ص^٢ − ٣

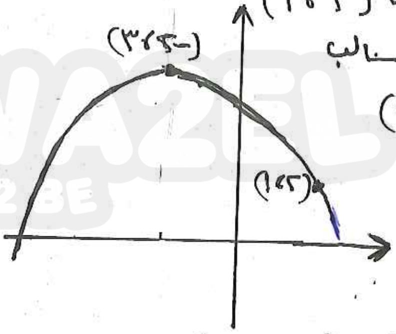
٦) (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} − ٢ص = ١
+١   +١

(س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٢

مركزها (٢، ١)

القطع صادي سالب

رأس (−٢، ٣)



معادلته :

(س + ٢)^{٢} = −٤جـ (ص − ٣)

(٢، ١) ← (٤)^{٢} = ٨جـ ← جـ = ٢

∴ معادلته : (س + ٢)^{٢} = −٨ (ص − ٣)

٧) محور تماثله // محور الصادات .

القطع صادي .

ص = أس^{٢} + ب س + جـ .

(١، ٠) ← ٠ = أ + ب + جـ ← ①

(−١، ٤) ← ٤ = أ − ب + جـ ← ②

(٢، ٧) ← ٧ = ٤أ + ٢ب + جـ ← ③

①، ② نحذف جـ

٠ = $\cancel{-أ}$ − ب − $\cancel{جـ}$

٤ = $\cancel{أ}$ − ب + $\cancel{جـ}$

٤ = −٢ب ← $\boxed{ب = −٢}$

∴ ٤ = أ + ٢ + جـ

أ + جـ = ٢ ← ④

٧ = ٤أ − ٤ + جـ

٤أ + $\cancel{جـ}$ = ١١ ← ⑤

−أ − $\cancel{جـ}$ = −٢

٣أ = ٩ ← $\boxed{أ = ٣}$

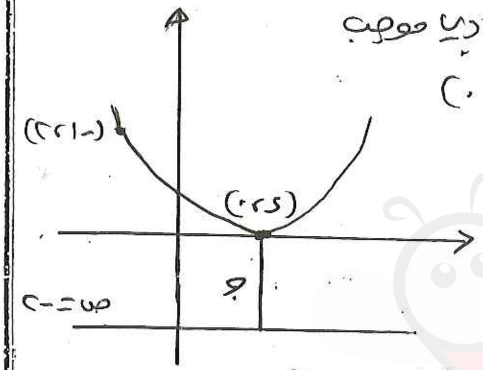
∴ ٠ = ٣ − ٢ + جـ ← $\boxed{جـ = −١}$

∴ معادلته : ص = ٣س^{٢} − ٢س − ١

٨) القطع صاديًا موجب

رأس (د، ٠)

جـ = ٢



معادلته :

(س − د)^{٢} = ٨ (ص − ٠)

(−١، ٢) ← (−١ − د)^{٢} = ١٦

−١ − د = ٤   أو   −١ − د = −٤

د = −٥   أو   د = ٣

(س + ٥)^{٢} = ٨ص   (س − ٣)^{٢} = ٨ص

٩) س^{٢} − ٨س = −٦ص − ٤
+١٦   +١٦

(س − ٤)^{٢} = −٦ص + ١٢

(س − ٤)^{٢} = −٦ (ص − ٢)

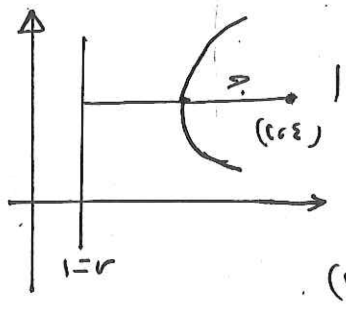
صادي سالب .

رأس (٤، ٢)

القطع المكافئ المطلوب معادلته :

بؤرته (٤، ٢)

ومعادلة دليله س = ١



القطع سيني موجب

رأس ($\frac{٤+١}{٢}$ ، ٢)

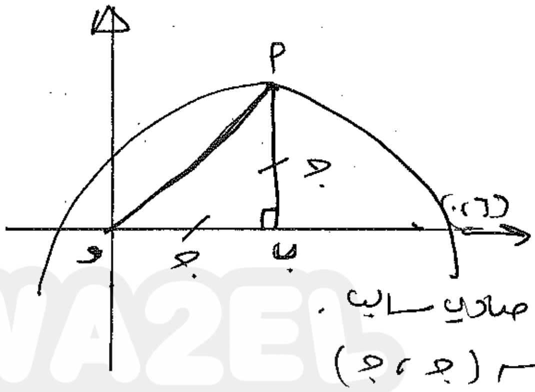
= ($\frac{٥}{٢}$ ، ٢)

جـ = ٤ − $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

معادلته :

(ص − ٢)^{٢} = ٦ (س − $\frac{٥}{٢}$)

١٠)



القطع صادي سالب.

رأسه (جـ ، جـ)

(س − جـ)² = −٤جـ (ص − جـ)

(٦،٠) ← (٦ − جـ)² = −٤جـ × −جـ

٣٦ − ١٢جـ + جـ² = ٤جـ²

٣جـ² + ١٢جـ − ٣٦ = ٠ ÷ ٣

جـ² + ٤جـ − ١٢ = ٠

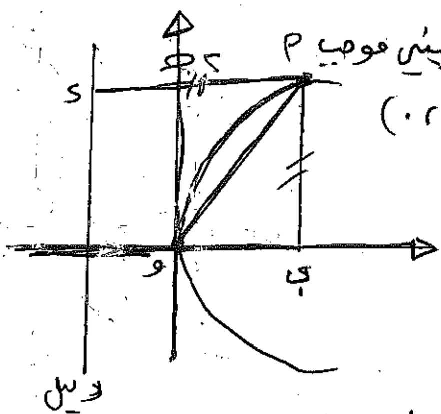
(جـ + ٦)(جـ − ٢) = ٠

جـ = −٦ ✗ ، $\boxed{\text{جـ = ٢}}$

معادلته: (س − ٢)² = −٨ (ص − ٢)

١١) القطع سيني موجب

رأسه (٠،٠)



مساحة = ½ × جـ × أب

٩ = ½ جـ × أب

∴ أب = ١٨/جـ

نرسم دليل للقطع.

∴ أب = أد حسب شرط القطع.

١٨/جـ = ٢جـ

٢جـ² = ١٨ ← جـ² = ٩

$\boxed{\text{جـ = ٣}}$

∴ معادلته:

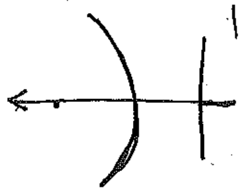
ص² = ١٢س.

٢) ١) ٤(ص − ٢)² = −١٦(س − ½)

(ص − ٢)² = −٤(س − ½)

القطع سيني سالب.

رأسه (½ ، ٢)



−٤جـ = −٤ ← جـ = ١

معادلة محوره: ص = ٢

بؤرته (½ − ١ ، ٢)
= (−½ ، ٢)

معادلة دليله: س = ½ + ١ ← س = ٣/٢

٢) ٤(س² + ٢س) = ٦ص + ٥ + ٤
(+١)

٤(س + ١)² = ٦ص + ٩

(س + ١)² = ٣/٢ (ص + ٣/٢)

القطع صادي موجب

رأسه (−١ ، −٣/٢)

٤جـ = ٣/٢ ← جـ = ٣/٨

معادلة محوره: س = −١

بؤرته (−١ ، −٣/٢ + ٣/٨) = (−١ ، −٩/٨)

معادلة دليله: ص = −٣/٢ − ٣/٨ ← ص = −١٥/٨

٣) ٩(ص² − ٢ص) = ٨س − ٣٣ + ٩
(+١)

٩(ص − ١)² = ٨(س − ٣)

(ص − ١)² = ٨/٩ (س − ٣)

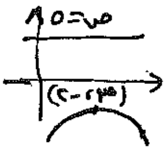
القطع سيني موجب ورأسه (٣ ، ١)

٤جـ = ٨/٩ ← جـ = ٢/٩

معادلة محوره: ص = ١

بؤرته (٢٩/٩ ، ١) ومعادلة دليله: س = ٢٥/٩

٣) س² − ٦س + ٩ = ٤ل (ص + ٢)



(س − ٣)² = ٤ل (ص + ٢)

رأسه (٣ ، −٢)

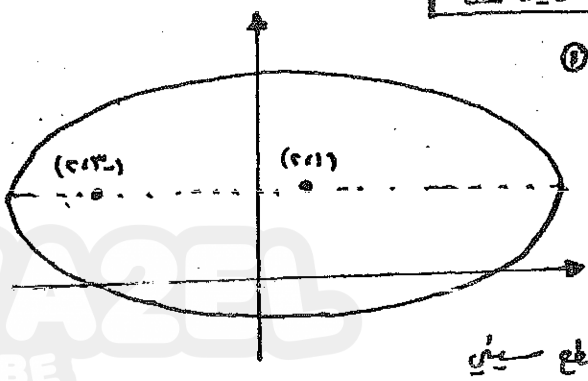
وبما أن معادلة دليله ص = ٥ ∴ صادي سالب

−٤جـ = ٤ل ← جـ = −ل.

∴ −٢ − ل = ٥ ← −ل = ٧

حل تمرين (٣)

[١] (١)



القطع سيني

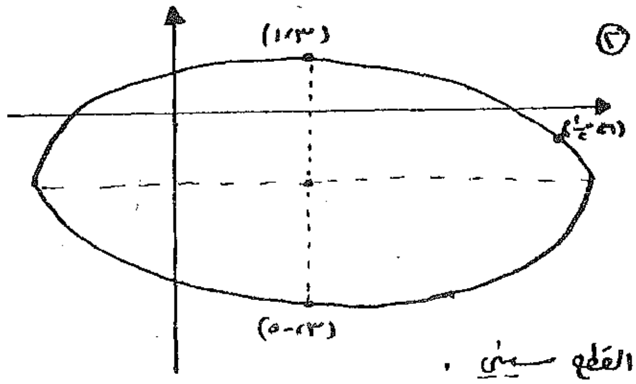
جـ = ٤ ، $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥}$ ← $\frac{٤}{أ} = \frac{٤}{٥}$ ← أ = ٥

∴ جـ² = أ² − ب² ← ١٦ = أ² − ب²

∴ ب² = ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ معادلة القطع : $\frac{(س-١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$

(٢)



القطع سيني .

المركز = (٣ ، -٢)

ب = ٣

معادلته $\frac{(س-٣)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص+٢)^٢}{٩} = ١$

(٦ ، -½) تحقق معادلته .

$\frac{٩}{أ^٢} + \frac{\frac{٩}{٤}}{٩} = ١$

$\frac{٩}{أ^٢} = \frac{٣}{٤}$ ← أ² = ١٢

∴ معادلة القطع :

$\frac{(س-٣)^٢}{١٢} + \frac{(ص+٢)^٢}{٩} = ١$

(٣) القطع سيني لأن المركز يمين البؤرة .

٢أ = ١٢ ← أ = ٦ .

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ← $\frac{جـ}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ← جـ = ٤

جـ² = أ² − ب² ← ١٦ = ٣٦ − ب²

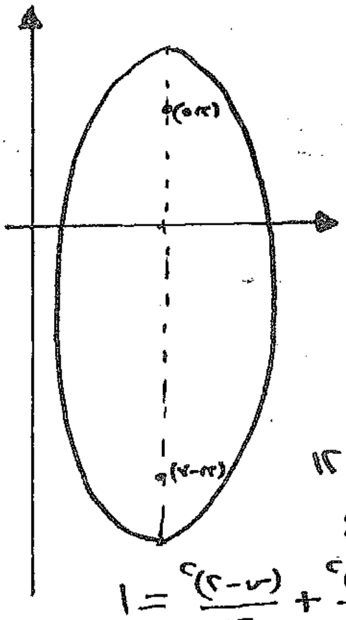
ب² = ٢٠

المركز = (٢+٤ ، ١) = (٦ ، ١)

∴ معادلة القطع :

$\frac{(س-٦)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٠} = ١$

(٤) القطع صادي .



المركز = (٢ ، -١)

جـ = ٦

$\cancel{٢}$أ = $\cancel{٢}$ × ٢ب

أ = ٢ب

جـ² = أ² − ب²

٣٦ = ٤ب² − ب²

٣ب² = ٣٦ ← ب² = ١٢

∴ أ² = ٤ × ١٢ = ٤٨

∴ معادلة القطع : $\frac{(ص+١)^٢}{٤٨} + \frac{(س-٢)^٢}{١٢} = ١$

(٥) القطع صادي .

المركز = (٠ ، ٠)

ب = ٢

$\frac{جـ}{أ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ← جـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ أ

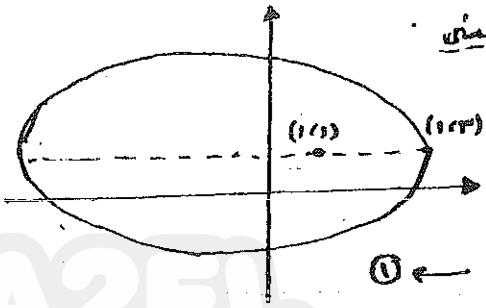
جـ² = أ² − ب² ← $\frac{١}{٣}$أ² = أ² − ٤

٤ = $\frac{٢}{٣}$أ² ← أ² = ٦

∴ معادلة القطع :

$\frac{ص^٢}{٦} + \frac{س^٢}{٤} = ١$

⑥ القطع سيني .



أ - جـ = ٢ ← ①

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ← جـ = $\frac{٢}{٣}$ أ

∴ أ - $\frac{٢}{٣}$ أ = ٢ ← $\frac{أ}{٣}$ = ٢ ← أ = ٦

∴ جـ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤

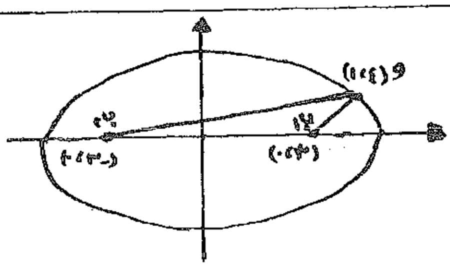
لكن جـ² = أ² - ب² ← ١٦ = ٣٦ - ب²

ب² = ٢٠

المركز = (٣-٦ ، ١) = (-٣ ، ١)

∴ معادلة القطع : $\frac{(س+٣)^٢}{٣٦} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٠} = ١$

⑦ القطع سيني



المركز = (٠،٠)

جـ = ٣

من تعريف القطع : ٢أ = و ب١ + و ب٢

٢أ = $\sqrt{(١)^٢+(١)^٢} + \sqrt{(٧)^٢+(١)^٢}$

٢أ = $\sqrt{٢} + \sqrt{٥٠}$ ← ٢أ = $\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} = ٦\sqrt{٢}$

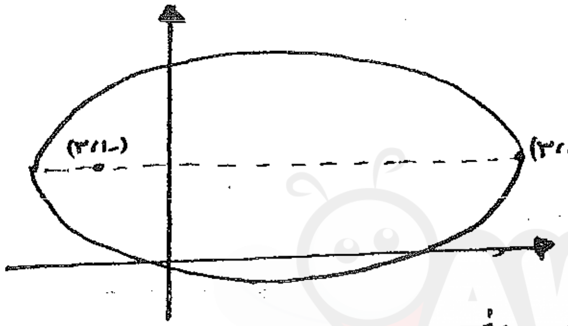
∴ أ = $٣\sqrt{٢}$.

جـ² = أ² - ب² ← ٩ = ١٨ - ب² ← ب² = ٩

∴ معادلة القطع :

$\frac{س^٢}{١٨} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

⑧



القطع سيني .

أ + جـ = ٦ ← ①

٢جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢أ ← أ = ٢جـ .

∴ ٢جـ + جـ = ٦ ← جـ = ٢

∴ أ = ٤

جـ² = أ² - ب² ← ٤ = ١٦ - ب² ← ب² = ١٢

المركز = (٥-٤ ، ٣) = (١ ، ٣)

∴ معادلة القطع :

$\frac{(س-١)^٢}{١٦} + \frac{(ص-٣)^٢}{١٢} = ١$

⑨ القطع سيني

المركز = (٠ ، ١)

جـ = $٤\sqrt{٦}$

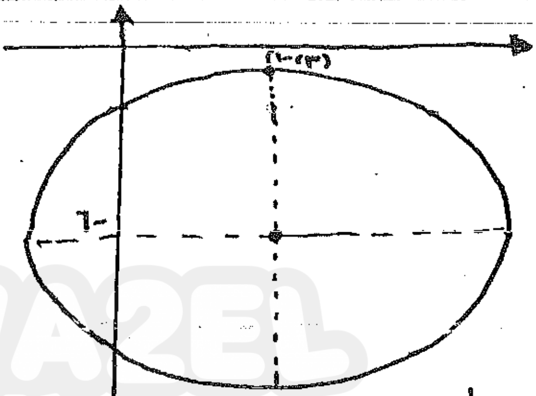
٢أ = ٢٨ ← أ = ١٤

جـ² = أ² - ب² ← ٩٦ = ١٩٦ - ب²

ب² = ١٠٠

∴ معادلة القطع : $\frac{س^٢}{١٩٦} + \frac{(ص-١)^٢}{١٠٠} = ١$

⑩



القطع سيني .

المركز = (٣، -٦)

$\text{ب} = 5$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow \text{جـ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{أ}$

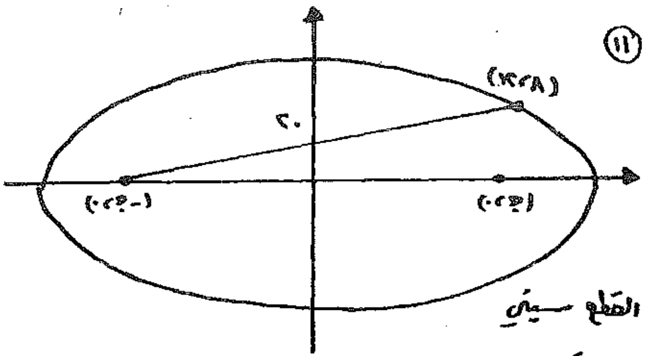
$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \leftarrow \frac{1}{2}\text{أ}^2 = \text{أ}^2 - 25$

$25 = \frac{1}{2}\text{أ}^2 \leftarrow \text{أ}^2 = 50$

∴ معادلة القطع :

$$\frac{(\text{س}-3)^2}{50} + \frac{(\text{ص}+6)^2}{25} = 1$$

⑪



القطع سيني

البؤرتين (جـ، ٠)، (-جـ، ٠)

$20 = \sqrt{(8+\text{جـ})^2 + 144} \leftarrow 400 = (8+\text{جـ})^2 + 144$

$256 = (8+\text{جـ})^2 \leftarrow 8+\text{جـ} = 16 \leftarrow \text{جـ} = 8$

$\therefore\ 2\text{أ} = 12 + 20 = 32 \leftarrow \text{أ} = 16$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

$64 = 256 - \text{ب}^2 \leftarrow \text{ب}^2 = 192$

∴ معادلة القطع :

$$\frac{\text{س}^2}{256} + \frac{\text{ص}^2}{192} = 1$$

[٢] ①

$\cancel{2}\text{أ} = \cancel{2} \times 2\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{\text{أ}}{2}$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \leftarrow \text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \frac{\text{أ}^2}{4}$

$\text{جـ}^2 = \frac{3}{4}\text{أ}^2$

$\text{جـ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{أ}$

$\therefore\ \text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

②

$\frac{\text{رف}}{\text{طم}} = \frac{3}{2} \leftarrow \frac{\text{أ}+\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{3}{2}$

$\therefore\ \text{ب} = \frac{2}{3}(\text{أ}+\text{جـ})$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2 \leftarrow \text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \frac{4}{9}(\text{أ}+\text{جـ})^2$

$\therefore\ 9\text{جـ}^2 = 9\text{أ}^2 - 4\text{أ}^2 - 8\text{أ}\text{جـ} - 4\text{جـ}^2$

$13\text{جـ}^2 + 8\text{أ}\text{جـ} - 5\text{أ}^2 = 0$

$(13\text{جـ} - 5\text{أ})(\text{جـ} + \text{أ}) = 0$

إما $13\text{جـ} = 5\text{أ} \leftarrow \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{5}{13}$.

أو $\text{جـ} = -\text{أ}$ مستحيل

مرفوضة

$\therefore\ \text{هـ} = \frac{5}{13}$

③

$2\text{أ} - 2\text{ب} = \frac{1}{2} \times 2\text{جـ}$

$2\text{أ} - 2\text{ب} = \text{جـ} \leftarrow \text{ب} = \text{أ} - \frac{\text{جـ}}{2}$.

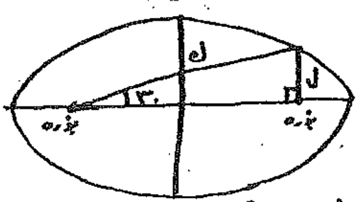
$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - (\text{أ} - \frac{\text{جـ}}{2})^2$

$\text{جـ}^2 = \cancel{\text{أ}^2} - \cancel{\text{أ}^2} + \text{أ}\text{جـ} - \frac{\text{جـ}^2}{4} \leftarrow \frac{5}{4}\text{جـ}^2 - \text{أ}\text{جـ} = 0$.

$\text{جـ}(\frac{5}{4}\text{جـ} - \text{أ}) = 0 \leftarrow \frac{5}{4}\text{جـ} = \text{أ} \leftarrow \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{4}{5}$

④



$\text{جا}30 = \frac{\text{ل}}{\text{ك}}$

$\frac{1}{2} = \frac{\text{ل}}{\text{ك}} \leftarrow \text{ك} = 2\text{ل}$

لكن

$\text{ك} + \text{ل} = 2\text{أ} \leftarrow 2\text{ل} + \text{ل} = 2\text{أ}$

$\therefore\ 3\text{ل} = 2\text{أ} \leftarrow \boxed{\text{ل} = \frac{2}{3}\text{أ}}$

$\text{ظا}30 = \frac{\text{ل}}{2\text{جـ}} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ل}}{2\text{جـ}} \leftarrow \boxed{\text{ل} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{جـ}}$

$\therefore\ \frac{2}{3}\text{أ} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{جـ} \leftarrow \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

٣

$٢أ = ١٫٨٦ \times ١٠^{٨} \leftarrow أ = ٩٫٣ \times ١٠^{٨}$

$\frac{جـ}{أ} = ٠٫٠١٦٧ \leftarrow جـ = ١٦٫٧ \times ١٠^{-٣} \times ٩٫٣ \times ١٠^{٨}$

$جـ = ١٥٥٫٣١ \times ١٠^{٥}$

$جـ = ٠٫٠١٥٥٣١ \times ١٠^{٨}$

١) أصغر مسافة $= أ - جـ = ٩٫٣ \times ١٠^{٨} - ٠٫٠١٥٥٣١ \times ١٠^{٨}$
$= ٩٫١٤٤٦٩ \times ١٠^{٨}$

٢) أكبر مسافة $= أ + جـ = ٩٫٣ \times ١٠^{٨} + ٠٫٠١٥٥٣١ \times ١٠^{٨}$
$= ٩٫٤٥٥٣١ \times ١٠^{٨}$

٤

بعد $= أ - جـ = ١$

بعد $= أ + جـ = ٩$ +

$٢أ = ١٠ \leftarrow أ = ٥$

$\therefore ٥ + جـ = ٩ \leftarrow جـ = ٤$

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ١٦ = ٢٥ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٩$

$ب = ٣$

١) طول المحور الأصغر $= ٢ب = ٦$

٢) $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥}$

٥ القطع صادي ومركزه $= (٠، ٠)$

$ب = ٢$

معادلته $\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{س^{٢}}{٤} = ١$

$(١، \frac{٣}{٢}\sqrt{٣})$ تحقق معادلته

$\frac{\frac{٩}{٤} \times ٣}{أ^{٢}} + \frac{١}{٤} = ١ \leftarrow \frac{\cancel{٢٧}^{٩}}{\cancel{٤}أ^{٢}} = \frac{٣}{\cancel{٤}}$

$أ^{٢} = ٩ \leftarrow أ = ٣$

$\therefore$ طول المحور الأكبر $= ٢أ = ٦$

٦

$٣س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٦٠ \qquad \div ٦٠$

$\frac{س^{٢}}{٢٠} + \frac{ص^{٢}}{١٥} = ١$

$أ^{٢} = ٢٠ \leftarrow أ = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$

$\therefore$ مجموع بعدي النقطة $= ٢أ = ٤\sqrt{٥}$ (من التعريف)

٧ محيط △ ن م٢ ل = محيط △ ن م ل + محيط △ م م ل

$= ٢أ + ٢أ = ٤أ$

لكن $أ^{٢} = ١٠٠ \leftarrow أ = ١٠$

$\therefore$ محيط △ ن م٢ ل $= ٤ \times ١٠ = ٤٠$

٨

$(١٦س^{٢} - ٦٤س) + (٩ص^{٢} + ٥٤ص) = -١$

$١٦(س^{٢} - ٤س) + ٩(ص^{٢} + ٦ص) = -١ \quad +٦٤ + ٨١$ (و $+٤$ ، $+٩$)

$١٦(س - ٢)^{٢} + ٩(ص + ٣)^{٢} = ١٤٤ \qquad \div ١٤٤$

$\frac{(س-٢)^{٢}}{٩} + \frac{(ص+٣)^{٢}}{١٦} = ١$

القطع صادي

١) المركز $= (٢، -٣)$

$أ^{٢} = ١٦ \leftarrow أ = ٤$ ، $ب^{٢} = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^{٢} = ١٦ - ٩ = ٧ \leftarrow جـ = \sqrt{٧}$

٢) $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٧}}{٤}$

٣) معادلة المحور الأصغر: $ص = -٣$

٩

$٤(س^{٢} + ٤س) + ٢٥(ص^{٢} - ٢ص) = ٥٩ \quad +١٦ + ٢٥$ (و $+٤$ ، $+١$)

$٤(س + ٢)^{٢} + ٢٥(ص - ١)^{٢} = ١٠٠ \qquad \div ١٠٠$

$\frac{(س+٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(ص-١)^{٢}}{٤} = ١$

القطع سيني ومركزه $= (-٢، ١)$

$أ^{٢} = ٢٥ \leftarrow أ = ٥$ ، $ب^{٢} = ٤ \leftarrow ب = ٢$

١) الرأسين: $(٣، ١)$ ، $(-٧، ١)$

٢) نهايتي الأصغر: $(-٢، ٣)$ ، $(-٢، -١)$

٣) معادلة المحور الأكبر $ص = ١$

[10] $٤(\text{س}^٢+٤\text{س}+٤)+٣\text{ص}^٢=١٧٦+١٦$

$٤(\text{س}+٢)^٢+٣\text{ص}^٢=١٩٢$ $\quad /١٩٢$

$$\frac{(\text{س}+٢)^٢}{٤٨}+\frac{\text{ص}^٢}{٦٤}=١$$

القطع صادي .

$\text{أ}^٢=٦٤ \leftarrow \text{أ}=٨$ ، $\text{ب}^٢=٤٨ \leftarrow \text{ب}=\sqrt{٤٨}$

$\text{ج}^٢=٦٤-٤٨=١٦ \leftarrow \text{ج}=٤$

١) المركز $=(-٢،٠)$

٢) البؤرتين : $(-٢، \pm ٤)$

٣) الرأسين : $(-٢، \pm ٨)$

٤) $\text{هـ}=\frac{\text{ج}}{\text{أ}}=\frac{٤}{٨}=\frac{١}{٢}$

[11] $(-٣(\text{ص}-٢))^٢+(٢(\text{س}+٤))^٢=٣٦$

$٩(\text{ص}-٢)^٢+٤(\text{س}+٤)^٢=٣٦$ $\quad /٣٦$

$$\frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٤}+\frac{(\text{س}+٤)^٢}{٩}=١$$

القطع سيني

المركز $=(-٤،٢)$

$\text{أ}^٢=٩ \leftarrow \text{أ}=٣$ ، $\text{ب}^٢=٤ \leftarrow \text{ب}=٢$

$\text{ج}^٢=٩-٤=٥ \leftarrow \text{ج}=\sqrt{٥}$.

١) البؤرتين : $(-٤\pm\sqrt{٥}، ٢)$

٢) نهايتي الأصغر : $(-٤،٤)$ ، $(-٤،٠)$

٣) البعد بين طرفي محورين $=\sqrt{\text{أ}^٢+\text{ب}^٢}$

$=\sqrt{٩+٤}=\sqrt{١٣}$

[12] $٤(-٢(\text{س}-٣))^٢+٧\text{ص}^٢=١١٢$

$١٦(\text{س}-٣)^٢+٧\text{ص}^٢=١١٢$ $\quad /١١٢$

$$\frac{(\text{س}-٣)^٢}{٧}+\frac{\text{ص}^٢}{١٦}=١$$

القطع صادي .

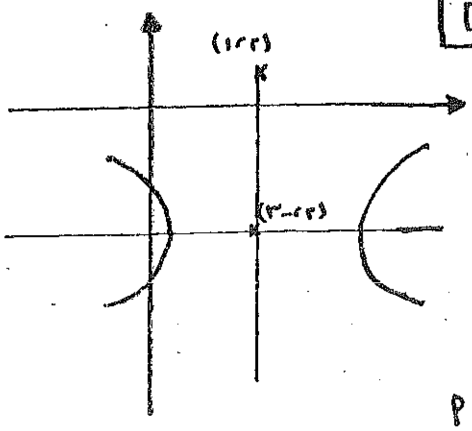
$\text{أ}^٢=١٦$ ، $\text{ب}^٢=٧$ ، $\text{ج}^٢=١٦-٧=٩$

$\text{أ}=٤$ ، $\text{ج}=٣$

محيط Δ ه ب١ ب٢ $=٢\text{أ}+٢\text{ج}=٨+٦=١٤$

حل تمرين [٤]

[1] ①



القطع سيني

$\text{ب}=٤$

$\frac{\text{ج}}{\text{أ}}=\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

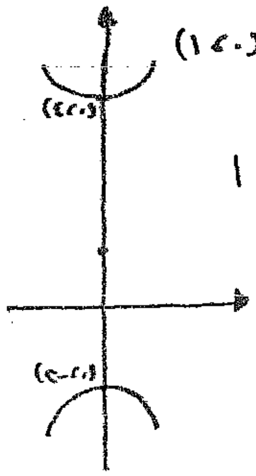
$\text{ج}=\frac{٣}{\sqrt{٥}}\text{أ}$

$\text{ج}^٢=\text{أ}^٢+\text{ب}^٢ \leftarrow \frac{٩}{٥}\text{أ}^٢=\text{أ}^٢+١٦$

$\frac{٤}{٥}\text{أ}^٢=١٦ \leftarrow \text{أ}^٢=٢٠$

$\therefore$ معادلة القطع : $\frac{(\text{س}-٣)^٢}{٢٠}-\frac{(\text{ص}+٣)^٢}{١٦}=١$

② القطع صادي ومركزه $(٠،١)$



$\text{أ}=٣$

معادلته : $\frac{(\text{ص}-١)^٢}{٩}-\frac{\text{س}^٢}{\text{ب}^٢}=١$

$(\frac{٨}{٣}،٦)$ تحقق معادلته

$\frac{٢٥}{٩}-\frac{\frac{٦٤}{٩}}{\text{ب}^٢}=١$

$\frac{١٦}{٩}=\frac{٦٤}{٩\text{ب}^٢} \leftarrow \text{ب}^٢=٤$

$\therefore$ معادلة القطع : $\frac{(\text{ص}-١)^٢}{٩}-\frac{\text{س}^٢}{٤}=١$

③ القطع صادي ومركزه = (−١ ، ٢)

$\text{جـ} = ٥$

$٢\text{أ} = ٢\text{ب} + ٢ \leftarrow \text{أ} = \text{ب} + ١$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \leftarrow ٢٥ = (\text{ب}+١)^{٢} + \text{ب}^{٢}$

$\text{ب}^{٢} + ٢\text{ب} + ١ + \text{ب}^{٢} = ٢٥$

$٢\text{ب}^{٢} + ٢\text{ب} - ٢٤ = ٠ \quad \div ٢$

$\text{ب}^{٢} + \text{ب} - ١٢ = ٠ \leftarrow (\text{ب}+٤)(\text{ب}-٣) = ٠$

$\text{ب} = -٤$ مرفوضة ، $\text{ب} = ٣$

$\therefore \text{أ} = ٤$

معادلة القطع: $\frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{١٦} - \frac{(\text{س}+١)^{٢}}{٩} = ١$

④ القطع سيني لأن محوره القاطع // محور س

ومعادلته: $\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

$(٣ ، -١) \leftarrow \frac{٤}{\text{أ}^{٢}} - \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١ \longrightarrow ①$

$(-٦ ، ١٤) \leftarrow \frac{٤٩}{\text{أ}^{٢}} - \frac{١٤٤}{\text{ب}^{٢}} = ١ \longrightarrow ②$

بضرب معادلة ① في −١٦ وجمعها مع ②

$\frac{-٦٤}{\text{أ}^{٢}} + \cancel{\frac{١٤٤}{\text{ب}^{٢}}} = -١٦$

$\frac{٤٩}{\text{أ}^{٢}} - \cancel{\frac{١٤٤}{\text{ب}^{٢}}} = ١$

$\frac{-١٥}{\text{أ}^{٢}} = -١٥ \longrightarrow \text{أ}^{٢} = ١$

$\therefore ٤ - \frac{٩}{\text{ب}^{٢}} = ١ \leftarrow ٣ = \frac{٩}{\text{ب}^{٢}}$

$٣\text{ب}^{٢} = ٩ \leftarrow \text{ب}^{٢} = ٣$

$\therefore$ معادلة القطع: $(\text{س}-١)^{٢} - \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٣} = ١$

⑤ القطع سيني ومركزه = (٢ ، ٣)

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٣} \longrightarrow \text{جـ} = \frac{\sqrt{٢١}}{٣}\text{أ}$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \longrightarrow \frac{٢١}{٩}\text{أ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

$\frac{١٢}{٩}\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} \longrightarrow \frac{٤}{٣}\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢}$

معادلة القطع: $\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{\frac{٤}{٣}\text{أ}^{٢}} = ١$

$(-٤ ، -٣) \longrightarrow \frac{٣٦}{\text{أ}^{٢}} - \frac{٣}{\cancel{٤}} \times \frac{\cancel{٣٦}^{\,٩}}{\text{أ}^{٢}} = ١$

$\frac{٩}{\text{أ}^{٢}} = ١ \longrightarrow \text{أ}^{٢} = ٩ \text{ ، } \text{ب}^{٢} = ١٢$

$\therefore$ معادلة القطع: $\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{٩} - \frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{١٢} = ١$

⑥ القطع صادي

$٢\text{ب} = ٢\sqrt{٥} \longrightarrow \text{ب} = \sqrt{٥}$

$\sqrt{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}} = ٣ \longrightarrow \text{أ}^{٢} + ٥ = ٩ \rightarrow \text{أ}^{٢} = ٤$

$\therefore \text{أ} = ٢$

$\therefore$ مركزه $= (-٢ ، ١+٢) = (-٢ ، ٣)$

أو $= (-٢ ، ١-٢) = (-٢ ، -١)$

$\therefore$ توجد معادلتان

$\frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{٤} - \frac{(\text{س}+٢)^{٢}}{٥} = ١$

أو $\frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{٤} - \frac{(\text{س}+٢)^{٢}}{٥} = ١$

⑦ في القطع المكافئ:

$\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٨\text{ص} + ٢٠$
$\quad +٤ \qquad\qquad\qquad +٤$

$(\text{س}-٢)^{٢} = ٨(\text{ص}+٣)$

صادي موجب ، $٤\text{جـ} = ٨ \rightarrow \text{جـ} = ٢$

الرأس $(٢ ، -٣)$

البؤرة $(٢ ، -١)$

∴ رأسا القطع الزائد : $(٢ ، -٣)$ ، $(٢ ، -١)$

والقطع صادي مركزه = $(٢ ، -٢)$

$أ = ١$

$٢جـ = ١٠ \leftarrow جـ = ٥$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow ٢٥ = ١ + ب^٢ \leftarrow ب^٢ = ٢٤$

∴ معادلة القطع :

$$\frac{(ص+٢)^٢}{١} - \frac{(س-٢)^٢}{٢٤} = ١$$

⑧ $(٢(س-٣))^٢ + ٩ص^٢ = ٣٦$

$٤(س-٣)^٢ + ٩ص^٢ = ٣٦ \quad /٣٦$

$$\frac{(س-٣)^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$$

القطع سيني

مركزه = $(٣ ، ٠)$

$أ^٢ = ٩ \leftarrow أ = ٣$

∴ رأسيه $(٦ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠)$

في القطع الزائد :

المركز = $(٣ ، ٠)$ والقطع سيني .

$أ = ٣$

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٣}{٢} \leftarrow \frac{جـ}{٣} = \frac{٣}{٢} \leftarrow جـ = \frac{٩}{٢}$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow \frac{٨١}{٤} = ٩ + ب^٢$

$ب^٢ = \frac{٤٥}{٤}$.

∴ معادلة القطع : $\frac{(س-٣)^٢}{٩} - \frac{٤ص^٢}{٤٥} = ١$

$\boxed{٢}$ في القطع الزائد : $٣(س-١)^٢ - ص^٢ = -٣$

$\leftarrow \frac{ص^٢}{٣} - (س-١)^٢ = ١$

القطع صادي .

المركز = $(١ ، ٠)$

$أ^٢ = ٣$ ، $ب^٢ = ١ \leftarrow جـ^٢ = ٤ \leftarrow جـ = ٢$

∴ البؤرتين $(١ ، ٢)$ ، $(١ ، -٢)$

في القطع المكافئ :

الرأس = $(١ ، -٢)$ ، البؤرة $(١ ، ٢)$

لأنه مقعر للأعلى

∴ القطع صادي موجب .

$جـ = ٤$

معادلته : $(س-١)^٢ = ١٦(ص+٢)$

$\boxed{٣}$ $هـ_١ = \frac{جـ_١}{أ} \Leftarrow هـ_١^٢ = \frac{جـ_١^٢}{أ^٢} = \frac{أ^٢-ب^٢}{أ^٢}$

$هـ_٢ = \frac{جـ_٢}{أ} \leftarrow هـ_٢^٢ = \frac{جـ_٢^٢}{أ^٢} = \frac{أ^٢+ب^٢}{أ^٢}$

∴ $هـ_١^٢ + هـ_٢^٢ = \frac{أ^٢-ب^٢}{أ^٢} + \frac{أ^٢+ب^٢}{أ^٢} = \frac{٢\cancel{أ^٢}}{\cancel{أ^٢}} = ٢$

$\boxed{٤}$ ① $\cancel{٢}جـ = ٣ \times \cancel{٢}ب \leftarrow ب = \frac{جـ}{٣}$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + \frac{جـ^٢}{٩}$

$\frac{٨}{٩}جـ^٢ = أ^٢ \leftarrow أ = \frac{\sqrt{٨}}{٣}جـ$

∴ $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\cancel{جـ}}{\frac{\sqrt{٨}}{٣}\cancel{جـ}} = \frac{٣}{\sqrt{٨}}$

② $٢أ = \sqrt{جـ^٢ + ب^٢}$

$٤أ^٢ - \cancel{ب^٢} = جـ^٢$

$أ^٢ + \cancel{ب^٢} = جـ^٢ \quad +$

$٥أ^٢ = ٢جـ^٢ \leftarrow أ = \sqrt{\frac{٢}{٥}}جـ$

∴ $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\cancel{جـ}}{\sqrt{\frac{٢}{٥}}\cancel{جـ}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٢}}$.

$\boxed{٥}$ في القطع الزائد :

① طول المحور المرافق = $٢\sqrt{ل}$

في القطع الناقص :

طول المحور الأصغر = $٢ \times ٤ = ٨$

∴ $٢\sqrt{ل} = ٨ + ٢ \leftarrow ٢\sqrt{ل} = ١٠$

$\sqrt{ل} = ٥ \leftarrow ل = ٢٥$

② $(\text{ص}+6)^2 - (\text{س}-2)^2 = 1$

القطع صادي .

المركز = $(2 ، -6)$

$\text{ب}^2 = 1 \leftarrow \text{ب} = 1$

∴ نهايتا المحور المرافق : $(3 ، -6)$ ، $(1 ، -6)$

③ $4\text{ص}^2 - \text{س}^2 = \text{ب}^2 \qquad \div \text{ب}^2$

$\frac{\text{ص}^2}{\frac{\text{ب}^2}{4}} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1$ القطع صادي .

$\text{أ}^2 = \frac{\text{ب}^2}{4} \leftarrow \text{أ} = \frac{\text{ب}}{2}$

$2\text{جـ} = 2\sqrt{5} \leftarrow \text{جـ} = \sqrt{5}$.

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \leftarrow 5 = \frac{\text{ب}^2}{4} + \text{ب}^2$

$5 = \frac{5\text{ب}^2}{4} \leftarrow \text{ب}^2 = 4 \leftarrow \text{ب} = 2$

∴ طول المحور القاطع $= 2\text{أ} = 2 \times \frac{\text{ب}}{2} = \text{ب} = 2$

④ $\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2} = 5 \leftarrow \text{أ}^2 + \text{ب}^2 = 25$

∴ $\text{جـ}^2 = 25 \leftarrow \text{جـ} = 5$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{5}{3} \leftarrow \frac{5}{\text{أ}} = \frac{5}{3} \leftarrow \text{أ} = 3$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \leftarrow 25 = 9 + \text{ب}^2$

$\text{ب}^2 = 16 \leftarrow \text{ب} = 4$

∴ طول المحور المرافق $= 2\text{ب} = 8$

$\boxed{6}$ $9\text{ص}^2 - 54\text{ص} - 7\text{س}^2 - 28\text{س} = 10$

$9(\underset{+9}{\text{ص}^2 - 6\text{ص}}) - 7(\underset{+4}{\text{س}^2 + 4\text{س}}) = 10 + 81 - 28$

$9(\text{ص}-3)^2 - 7(\text{س}+2)^2 = 63 \qquad \div 63$

$\frac{(\text{ص}-3)^2}{7} - \frac{(\text{س}+2)^2}{9} = 1$

القطع صادي .

المركز = $(-2 ، 3)$

$\text{أ}^2 = 7 \leftarrow \text{أ} = \sqrt{7}$ ، $\text{ب}^2 = 9 \leftarrow \text{ب} = 3$

$\text{جـ}^2 = 7 + 9 = 16 \leftarrow \text{جـ} = 4$

١) البؤرتين : $(-2 ، 7)$ ، $(-2 ، -1)$

٢) معادلة محوره البؤري : $\text{س} = -2$

٣) نهايتي المحور المرافق : $(1 ، 3)$ ، $(-5 ، 3)$

$\boxed{7}$ $(\text{س}-2)^2 - 4\text{ص}^2 - 8\text{ص} = 5$

$(\text{س}-2)^2 - 4(\underset{+1}{\text{ص}^2 + 2\text{ص}}) = 5 - 4$

$(\text{س}-2)^2 - 4(\text{ص}+1)^2 = 1$

$(\text{س}-2)^2 - \frac{(\text{ص}+1)^2}{\frac{1}{4}} = 1$

١) القطع سيني ومركزه $(2 ، -1)$

$\text{أ}^2 = 1 \leftarrow \text{أ} = 1$ ، $\text{ب}^2 = \frac{1}{4} \leftarrow \text{ب} = \frac{1}{2}$

$\text{جـ}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \leftarrow \text{جـ} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

٢) رأسيه : $(3 ، -1)$ ، $(1 ، -1)$

٣) $e = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

٤) معادلة محوره المرافق : $\text{س} = 2$

$\boxed{8}$ $25\text{س}^2 - 7(\underset{+1}{\text{ص}^2 - 2\text{ص}}) = 357 - 7$

$25\text{س}^2 - 7(\text{ص}-1)^2 = 350 \qquad \div 350$

$\frac{\text{س}^2}{14} - \frac{(\text{ص}-1)^2}{50} = 1$

القطع سيني

١) المركز = $(0 ، 1)$

$\text{أ}^2 = 14 \leftarrow \text{أ} = \sqrt{14}$ ، $\text{ب}^2 = 50 \leftarrow \text{ب} = \sqrt{50}$

$\text{جـ}^2 = 14 + 50 = 64 \leftarrow \text{جـ} = 8$

٢) الرأسين $(\pm\sqrt{14} ، 1)$

٣) البؤرتين : $(\pm 8 ، 1)$

٤) $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$

9

1) يكون القطع ناقصا عندما:

$9-\text{أ} > 0$ و $5-\text{أ} > 0$

$\text{أ} < 9$ و $\text{أ} < 5$

$\therefore \text{أ} < 5$.

2) ويكون زائدا عندما:

$(9-\text{أ})(5-\text{أ}) < 0$

$\therefore \text{أ} = (5, 9)$

10

$\text{هـ}_1 = \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} \Rightarrow \text{هـ}_1^2 = \frac{\text{جـ}^2}{\text{ب}^2}$

$\text{هـ}_2 = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Rightarrow \text{هـ}_2^2 = \frac{\text{جـ}^2}{\text{أ}^2}$

$\therefore \text{هـ}_1^2 \times \text{هـ}_2^2 = \frac{\text{جـ}^4}{\text{أ}^2\text{ب}^2} = \frac{\text{جـ}^2(\text{أ}^2+\text{ب}^2)}{\text{أ}^2\text{ب}^2}$

$= \frac{\text{جـ}^2\cancel{\text{أ}^2}}{\cancel{\text{أ}^2}\text{ب}^2} + \frac{\text{جـ}^2\cancel{\text{ب}^2}}{\text{أ}^2\cancel{\text{ب}^2}} = \text{هـ}_1^2 + \text{هـ}_2^2$

11

$\text{أ}\text{س}^2 - 2\text{أ}\text{س} + \frac{\text{ص}^2}{2-\text{أ}} = 0$

$\text{أ}(\text{س}^2 - 2\text{س} \underset{+1}{}) + \frac{\text{ص}^2}{2-\text{أ}} = 0 + \text{أ}$

$\text{أ}(\text{س}-1)^2 + \frac{\text{ص}^2}{2-\text{أ}} = \text{أ} \qquad /\text{أ}$

$(\text{س}-1)^2 + \frac{\text{ص}^2}{\text{أ}(2-\text{أ})} = 1$

1) القطع ناقص: عندما $\text{أ}(2-\text{أ}) > 0$

$\text{أ} = (0, 2) - \{1\}$

2) القطع دائرة: عندما $\text{أ}(2-\text{أ}) = 1$

$2\text{أ} - \text{أ}^2 = 1 \Rightarrow \text{أ}^2 - 2\text{أ} + 1 = 0$

$(\text{أ}-1)(\text{أ}-1) = 0 \Rightarrow \text{أ} = 1$

12

$\text{س}^2 - \frac{\text{ص}^2}{3} = \text{أ}^2 \qquad /\text{أ}^2$

$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{3\text{أ}^2} = 1$

$\text{ب}^2 = 3\text{أ}^2$ ، القطع سيني .

$\text{جـ}^2 = 4\text{أ}^2$

1) $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{2\text{أ}}{\text{أ}} = 2$

2) $\frac{\text{أ}+\text{جـ}}{2\text{ب}} = \frac{\text{أ}+2\text{أ}}{2\times\sqrt{3}\,\text{أ}} = \frac{3\cancel{\text{أ}}}{2\sqrt{3}\,\cancel{\text{أ}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

13

$\frac{(\text{س}+\text{د})^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{24} = 1$

القطع سيني .

1) المركز $= (-3, 0) \Rightarrow -\text{د} = -3$

$\therefore \text{د} = 3$

$\text{جـ} = 7$ ، $\text{ب} = \sqrt{24}$

$\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \Rightarrow 49 = \text{أ}^2 + 24$

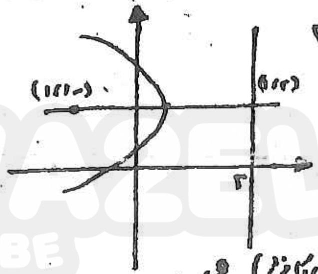
$\text{أ}^2 = 25 \Rightarrow \text{أ} = 5$

2) $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{7}{5}$.

حل تمرين (5)

[1] ① المحل الهندسي هو قطع مكافئ بؤرته $(-1 ، 1)$

ودليله $س = 2$



القطع سيني سالب

الرأس $= (\frac{1}{2} ، 1)$

$جـ = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

∴ معادلة المحل الهندسي (القطع المكافئ) هي :

$(ص - 1)^2 = -6(س - \frac{1}{2})$

② الشرط : بعد $(س ، ص)$ عن المستقيم $(ص + 1 = 0) = 2$

$\frac{|ص + 1|}{\sqrt{1 + 0}} = 2 \leftarrow |ص + 1| = 2$

$ص + 1 = 2$ أو $ص + 1 = 2-$

$ص = 1$ أو $ص = -3$

مرفوض
للتقعر $(0 ، -3)$

∴ معادلة المحل الهندسي هي $ص = -3$ (خط مستقيم)

③ الشرط :

بعد $(س ، ص)$ عن $(س + \frac{16}{5} = 0) = \frac{4}{5} \times$ بعد $(س ، ص)$ عن $(0 ، -5)$

$\frac{|س + \frac{16}{5}|}{\sqrt{1 + 0}} = \frac{4}{5} \times \sqrt{س^2 + (ص + 5)^2}$

بتربيع الطرفين .

∴ $س^2 + \frac{32}{5}س + \frac{256}{25} = \frac{16}{25}\left(س^2 + (ص + 5)^2\right)$

بالضرب في 25

$25س^2 + 160س + 256 = 16س^2 + 16(ص + 5)^2$

$25س^2 + 160س + 256 = 16س^2 + 16ص^2 + 160ص + 400$

∴ $9س^2 - 16ص^2 + 160س - 160ص - 144 = 0$

معادلة قطع زائد .

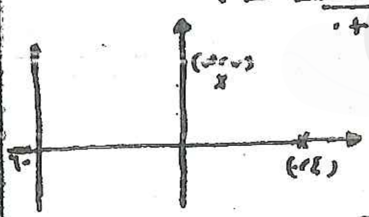
④ الشرط :

بعد $(س ، ص)$ عن $(4 ، 0)$ = بعد $(س ، ص)$ عن $(س = -6) - 1$

$\sqrt{(س - 4)^2 + ص^2} = \frac{|س + 6|}{\sqrt{1 + 0}} - 1$

لكن $س > -6$

∴ $س + 6 > 0$



∴ $\sqrt{س^2 - 8س + 16 + ص^2} = س + 6 - 1 = س + 5$

بتربيع الطرفين .

$\cancel{س^2} - 8س + 16 + ص^2 = \cancel{س^2} + 10س + 25$

∴ $ص^2 - 18س - 9 = 0$ ، معادلة قطع مكافئ .

⑤ $س = 2(قتا^2 هـ - 1)$ ، $قتا هـ = \frac{ص}{4}$

∴ $س = 2(\frac{ص^2}{16} - 1) \leftarrow س = \frac{ص^2}{8} - 2$

معادلة قطع مكافئ .

⑥ $س^2 = جتا^2 هـ - 2 جا هـ جتا هـ + جا^2 هـ$

$س^2 = 1 - جا 2هـ$ ، $ص = جا 2هـ$.

∴ $س^2 = 1 - ص$ معادلة قطع مكافئ .

⑦ $\frac{(س - 5)^2}{4} = جا^2 هـ$ ، $جتا هـ = \frac{ص - 7}{3}$

$\frac{(س - 5)^2}{4} = 1 - جتا^2 هـ$

∴ $\frac{(س - 5)^2}{4} = 1 - \frac{(ص - 7)^2}{9}$

∴ $\frac{(س - 5)^2}{4} + \frac{(ص - 7)^2}{9} = 1$ معادلة قطع ناقص .

⑧ $ص = \sqrt{1 - هـ^{ن}}$ ، $ن = 2 لو_{هـ} س$

∴ $ص = \sqrt{1 - هـ^{2 لو_{هـ} س}}$

$ص^2 = 1 - \cancel{هـ}^{\cancel{لو} س^2} \leftarrow ص^2 = 1 - س^2$

$ص^2 + س^2 = 1$ معادلة دائرة .

$\boxed{٢}$ نفرض احداثيات الرأس ج = (س ، ص)

∵ الشرط :

ميل أج = ميل ب ج + ١

$$\frac{ص - ٠}{س - ٤} = \frac{ص - ٠}{س + ٤} + ١$$

$$\frac{ص}{س - ٤} = \frac{ص + س + ٤}{س + ٤}$$

بالضرب التبادلي .

$$\cancel{سص} + ٤ص = \cancel{سص} + س^٢ + \cancel{٤س} - ٤ص - \cancel{٤س} - ١٦$$

$$\therefore س^٢ - ٨ص - ١٦ = ٠$$

معادلة قطع مكافئ .