



الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبو غليون (رئيساً)

يوسف سليمان جرادات نور محمد حسان إبراهيم عقله القادري

نقنن أحمد جوهر (منسقاً)

إضافة إلى جهود فريق التأليف، فقد جاء هذا الكتاب ثمرة جهود وطنية مشتركة من لجان مراجعة وتقييم علمية وتربوية ولغوية، ومجموعات مُركّزة من المعلمين والمُشرّفين التربويين، وملاحظات مجتمعية من وسائل التواصل الاجتماعي، وإسهامات أساسية دقيقة من اللجنة الاستشارية والمجلس التنفيذي والمجلس الأعلى في المركز، ومجلس التربية والتعليم ولجانه المتخصصة.

الناشر

المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج، ووزارة التربية والتعليم – إدارة المناهج والكتب المدرسية، استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب

عن طريق العناوين الآتية: هاتف: 4617304/5-8، فاكس: 4637569، ص. ب: 1930، الرمز البريدي: 11118،

أو بوساطة البريد الإلكتروني: scientific.division@moe.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2020/7)، تاريخ 2020/12/1 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2020/175) تاريخ 2020/12/17 م بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.

© Harper Collins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 042 - 4

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2020/8/2971)

373,19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: كتاب الطالب (الصف العاشر) / المركز الوطني لتطوير المناهج. - عمان: المركز، 2020

ج2 (152) ص.

ر.إ.: 2020/8/2971

الواصفات: / الرياضيات / / التعليم الاعدادي / / المناهج /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجارات أقرانهم في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهمّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمُعَلِّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائعة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتُسهّل في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة للمفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أعدّ كتاب التمارين على نحو يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص المُعلِّم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداة مساعدة تُوفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداة تعليمية مُهمّة؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت أبنائنا الطلبة أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسّر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدّم الطبعة الأولى (التجريبية) من هذا الكتاب، نأمل أن تنال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلّميهم، وتجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

قائمة المحتويات

6	الوحدة 5 الاقتارات
7	مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود
8	الدرس 1 اقترانات كثيرات الحدود
17	الدرس 2 قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسيئة
25	الدرس 3 تركيب الاقترانات
32	الدرس 4 الاقتران العكسي
42	الدرس 5 المتتاليات
52	اختبار نهاية الوحدة
54	الوحدة 6 المشتقات
55	مشروع الوحدة: عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن
56	معمل برمجية جيوجبرا: استكشاف ميل مماس المنحنى
58	الدرس 1 تقدير ميل المنحنى
65	الدرس 2 الاشتقاق
72	الدرس 3 القيم العظمى والصغرى
78	اختبار نهاية الوحدة

قائمة المحتويات

الوحدة 7 المتجهات	80
مشروع الوحدة: المتجهات في الجغرافيا	81
الدرس 1 المتجهات في المستوى الإحداثي	82
الدرس 2 جمع المتجهات وطرحها	90
الدرس 3 الضرب القياسي	98
اختبار نهاية الوحدة	104
الوحدة 8 الإحصاء والاحتمالات	106
مشروع الوحدة: مستوى الأقارب التعليمي	107
الدرس 1 أشكال الانتشار	108
معمل برمجة جيو جبرا: رسم المستقيم الأفضل مطابقة	117
الدرس 2 المنحنى التكراري التراكمي	119
الدرس 3 مقاييس التشتت للجداول التكرارية ذات الفئات	125
الدرس 4 احتمالات الحوادث المتنافية	132
الدرس 5 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة	140
اختبار نهاية الوحدة	149

ما أهمية هذه
الوحدة؟

تُستعملُ الاقتِراناتُ لنمذجةِ التطبيقاتِ
الحياتيةِ بصورةٍ رياضيةٍ تُسهِّلُ فهمَها. فمثلاً،
تُستعملُ بعضُ أنواعِ الاقتِراناتِ لوصفِ العلاقةِ
بينَ أسعارِ السلعِ والكمياتِ المباعةِ منها. سأتعرَّفُ
في هذه الوحدةِ أنواعاً عديدةً منَ الاقتِراناتِ
والمتتالياتِ ذاتِ الاستعمالاتِ الحياتيةِ الكثيرةِ
التي تُعدُّ أساساً لكثيرٍ منَ موضوعاتِ
الرياضياتِ التي سوفَ أدرسُها في
صفوفٍ لاحقةٍ.

سأتعلَّمُ في هذه الوحدة:

- ◀ الاقتِراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وخصائصَها، وتمثيلَها
بيانياً.
- ◀ جمعَ كثيراتِ الحدودِ، وطرحَها، وضربَها، وقسمَها.
- ◀ الاقتِراناتِ النسبيةِ، ومجالَها، ومداها.
- ◀ تركيبَ الاقتِراناتِ، والاقتِرانَ العكسيَّ، والاقتِرانَ
الجزريَّ.
- ◀ استنتاجَ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتِ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ،
وأُسِّيةٍ.

تعلَّمْتُ سابقاً:

- ✓ الاقتِراناتِ الخطيَّةِ، والتربيعيةِ، وتمثيلَها بيانياً.
- ✓ إيجادَ القيمةِ العظمى أو الصغرى للاقتِرانِ
التربيعيِّ.
- ✓ تكوينَ معادلاتِ تربيعيةٍ، وحلَّها.
- ✓ جمعَ مقاديرَ جبريةٍ، وطرحَها، وضربَها.
- ✓ المتتالياتِ الخطيَّةِ، والتربيعيةِ، وكتابةَ
حدودِها.

جمع بيانات عن العلاقة بين متغيرين في أحد المجالات الحياتية، ونمذجتها باستعمال اقتران كثير الحدود.

فكرة المشروع



جهاز حاسوب، شبكة إنترنت، برمجية إكسل (Microsoft Excel).

المواد والأدوات



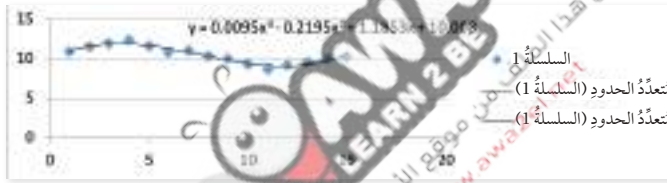
خطوات تنفيذ المشروع:

1 أختار أنا وأفراد مجموعتي متغيرين لجمع بيانات حولهما، مثل: تكلفة إنتاج سلعة معينة، وعدد الوحدات المنتجة، أو عدد ساعات النهار في إحدى المدن في أيام مختلفة من العام، أو أي متغيرين آخرين.

2 أجمع البيانات، ثم أدونها في جدول من عمودين، بحيث يحوي العمود الأول قيم المتغير x ، ويحوي العمود الثاني القيم المناظرة للمتغير y (يجب جمع ما لا يقل عن 15 زوجاً).

	A	B
1	1	10.9
2	2	11.5
3	3	11.9
4	4	12.3
5	5	11.6
6	6	10.8
7	7	11
8	8	10.1
9	9	10
10	10	9.3
11	11	8.7
12	12	9.2
13	13	9.6
14	14	10
15	15	10.2

3 أستخدم برمجية إكسل لتمثيل الأزواج المرتبة بيانياً، وإيجاد اقتران كثير الحدود الأفضل تمثيلاً لها باتباع الخطوات الآتية:



- أدخل البيانات في عمودين متجاورين ضمن صفحة إكسل، وأظلل العمودين،

ثم أختار (مخططات) من تبويبة (إدراج)، وأنقر (مبعثر)، ثم أختار المخطط الذي يبين مجموعة نقاط منفصلة، فيظهر مخطط بياني.

- أنقر بزر الفأرة الأيمن إحدى النقاط، ثم أختار أيقونة (إضافة خط اتجاه) من القائمة المنسدلة، فيظهر مستقيم يتوسط النقاط، وتظهر خيارات التنسيق جانباً، فأنقر المربع أمام أيقونة (عرض المعادلة في المخطط)، لتظهر معادلة المستقيم التي هي قاعدة الاقتران كثير الحدود المطلوب.

- إذا لاحظت أن المستقيم أو المنحنى الظاهر لا يناسب النقاط، فإنني أستطيع تغيير نوعه؛ إذ يمكنني مثلاً اختيار متعدد الحدود (أي كثير الحدود)، واختيار الترتيب (أي درجة كثير الحدود) المناسب.

- عندما أحصل على المستقيم أو المنحنى الأنسب للنقاط أكتب قاعدة الاقتران.

4 أجد مجال الاقتران، ومداه، وأصفاره، ونقاط القيم القصوى المحلية له.

5 أجد الاقتران العكسي (إن وجد)، وأجد مجاله، ومداه، وأحدد فائدته، ودلالته في سياق موضوع البحث.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً (بوربوينت) يبين فيه خطوات العمل في المشروع والنتائج التي توصلنا إليها موضحاً بالصور والرسوم، ثم نعرضه أمام زملائ في مختبر الحاسوب.

الدرس 1

اقتترانات كثيرات الحدود Polynomial Functions

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تعرّفُ الاقتترانات كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًا، وإجراء عمليات الجمع والطرح والضرب عليها، وحلّ مسائل عنها.

وحيد الحدّ، كثير الحدود، المعامل الرئيس، الدرجة، الصورة القياسية لكثير الحدود، كثير الحدود الصفري، المجال، المدى.

يُنتج مصنع آلات تصوير رقمية عددها x آلة أسبوعيًا، حيث $0 \leq x \leq 350$ ، ويبيع الوحدة منها بسعر $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانت تكلفة إنتاج x آلة تصوير هي $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأجد ربح المصنع من إنتاج x آلة أسبوعيًا وبيعها.

الاقتتران **وحيد الحدّ** (monomial) بمُتغيّر واحد هو اقتتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقي، يُسمّى المعامل، في مُتغيّر أسّه عدد صحيح غير سالب. والجدول الآتي يعرض بعض الأمثلة على وحيد الحدّ، وأسّه، ومعامله:

9	x	$\sqrt{7}x^3$	$-\frac{1}{2}x^5$	$3x^2$	وحيد الحدّ
0	1	3	5	2	الأس
9	1	$\sqrt{7}$	$-\frac{1}{2}$	3	المعامل

الاقتتران **كثير الحدود** (polynomial) بمُتغيّر واحد هو اقتتران يتكوّن من وحيد حدّ واحد، أو مجموع عدّة اقتترانات وحيدة الحدّ بمُتغيّر واحد. ومن أمثله الاقتترانات الآتية:

$$f(x) = 2 \quad f(x) = 3x - 4 \quad f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$$

مفهوم أساسي

الصورة العامة لكثير الحدود هي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

حيث: n : عدد صحيح غير سالب. x : مُتغيّر.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$: أعداد حقيقية تُسمّى معاملات حدود كثير الحدود.

إذا كان $a_n \neq 0$ ، فإنه يُسمى **المعامل الرئيس** (leading coefficient)، و **درجة** (degree) كثير الحدود هي أكبر أس للمتغير في جميع حدوده. يُسمى a_0 الحد الثابت. يكون كثير الحدود مكتوباً **بالصورة القياسية** (standard form) إذا كانت حدوده مكتوبة بترتيب تنازلي من أكبرها درجة إلى أصغرها درجة. كثير الحدود الذي جميع معاملاته أصفار يُسمى **كثير الحدود الصفري** (zero polynomial)، وهو $f(x) = 0$ ، وليس له درجة، ويمثله المحور x في المستوى الإحداثي.

مثال 1

أحدّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية، ثمّ أحدّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

1 $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثير حدود، درجته 3، وصورته القياسية هي:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معامله الرئيس -2، وحدّه الثابت -4

2 $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليس كثير حدود؛ لأنّ أسّ المتغير في الحد الثاني هو -1

3 $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليس كثير حدود؛ لأنّ أسّ المتغير في الحد الأول هو $\frac{1}{2}$

4 $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثير حدود، درجته 2، وصورته القياسية هي: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معامله الرئيس $\frac{3}{4}$ ، وحدّه الثابت $-\frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وفي حال كان كثير حدود أكتبه بالصورة القياسية، ثمّ أحدّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}x^5$

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

مجال (domain) أي اقتران هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x ، و**مداه** (range) هو مجموعة القيم التي يأخذها المتغير y .

لتمثيل الاقتران كثير الحدود $f(x)$ بيانياً، أكوّن جدول قيم أُحدّد فيه قيم المتغير x ، وأحسب قيم $f(x)$ ، وأعيّن النقاط $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل.

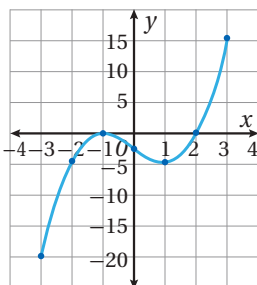
مثال 2

أمثل بيانياً كل اقتران مما يأتي، مُحدّداً مجاله ومداه:

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2, -3 \leq x \leq 3$

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1, 0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$



الخطوة 2: أعيّن النقاط التي تمثّل الأزواج (x, y) في

المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل

كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة قيم x الحقيقية، حيث:

$-3 \leq x \leq 3$ ، أو الفترة $[-3, 3]$ ، ومداه: $-20 \leq y \leq 16$ ،

أو الفترة $[-20, 16]$.

يظهر الشكل أنّ أصفار هذا الاقتران هي: 1, 2

2 $f(x) = x^2 - 4x$

هذا الاقتران تربيعي، ومنحناه قطع مكافئ مفتوح إلى الأعلى؛ لأنّ معامل x^2 عدد موجب.

لرسم منحناه، أجد إحداثي نقطة رأسه.

أتعلّم

مجال كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها تُحدّد في نصّ السؤال، ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية، أو مجموعة جزئية منها تُحدّد من جدول قيم الاقتران، أو بتحليل التمثيل البياني للاقتران.

أتعلّم

أجد أصفار الاقتران من التمثيل البياني بإيجاد نقاط تقاطعه مع محور x

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$= \frac{-(-4)}{2(1)}$$

$$x = 2$$

$$y = 2^2 - 4(2) = -4$$

الإحداثي x لرأس القطع المكافئ

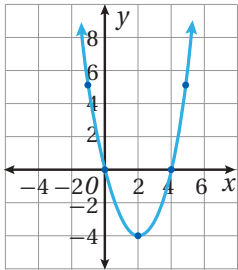
بتعويض $b = -4, a = 1$

بالتبسيط

بتعويض $x = 2$ في معادلة $f(x)$ والتبسيط

الخطوة 1: أنشئ جدول قيم (الرأس ونقطتان إلى يساره، ونقطتان إلى يمينه):

x	-1	0	2	4	5
$y = f(x)$	5	0	-4	0	5
(x, y)	$(-1, 5)$	$(0, 0)$	$(2, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 5)$



الخطوة 2: أعيّن النقاط التي تُمثّل الأزواج (x, y) في المستوى الإحداثي، وأصل بينها بمنحنى متصل، وأضع سهمًا على طرفي المنحنى للدلالة على أنه يمتد إلى ما لا نهاية كما في الشكل المجاور.

مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية (لم يُحدّد في نصّ السؤال خلاف ذلك)، ومداه هو الأعداد الحقيقية التي لا تقلّ عن -4؛ أي الفترة $[-4, \infty)$.

لهذا الاقتران صفران، هما: 0, 4

أتحقق من فهمي

أمثّل بيانيًا كلّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدّدًا مجاله ومداه:

a) $f(x) = 2x^3 - 16, -3 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

جمع كثيرات الحدود وطرحها

لجمع كثيرات الحدود، أجمع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها، وأجمع معاملاتها.

مثال 3

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x^3 + 4x - 9$, $g(x) = 7x^3 + 6x + 4$ ، فأجد $f(x) + g(x)$.

بتعويض $f(x)$ و $g(x)$ $f(x) + g(x) = (2x^2 - 5x^3 + 4x - 9) + (7x^3 + 6x + 4)$

بتجميع الحدود المتشابهة $= 2x^2 + (-5x^3 + 7x^3) + (4x + 6x) + (-9 + 4)$

بجمع المعاملات $= 2x^2 + 2x^3 + 10x - 5$

بكتابة الناتج بالصورة القياسية $= 2x^3 + 2x^2 + 10x - 5$

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 3x^2 + 8x^3 + 2x + 13$, $g(x) = -4x^3 + 6x^2 - 5$ ، فأجد $f(x) + g(x)$.

يُمكنني أن أجد ناتج جمع اقترانين باستعمال الطريقة العمودية، وذلك بترتيب الحدود المتشابهة بعضها تحت بعض، ثم جمع المعاملات.

لإيجاد ناتج طرح اقترانين، أُحوّل عملية الطرح إلى جمع النظير الجمعي للمطروح، ثم أجمع كما في المثال السابق.

أتعلم

النظير الجمعي للاقتران $f(x)$ هو $-f(x)$ ، وينتج من عكس إشارات معاملات حدود $f(x)$.

مثال 4

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$, $g(x) = 6x - 7x^2 - 8$ ، فأجد $f(x) - g(x)$.

بتعويض $f(x)$ و $g(x)$ $f(x) - g(x) = 2x^2 - 5x - 3 - (+6x - 7x^2 - 8)$

بتحويل الطرح إلى جمع، وتغيير $= 2x^2 - 5x - 3 + (-6x + 7x^2 + 8)$

إشارات المطروح

$$2x^2 - 5x - 3$$

$$+ 7x^2 - 6x + 8$$

$$9x^2 - 11x + 5$$

بترتيب الحدود المتشابهة بعضها

تحت بعض

بجمع المعاملات

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 5x^3 - 12x^2 + 3x + 20$, $g(x) = x^3 + 6x^2 - 14$ ، فأجد $g(x) - f(x)$.

ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيرات الحدود، أستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع. يُمكنني أيضًا استعمال الطريقة العمودية كما في الأمثلة الآتية:

مثال 5

أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كل مما يأتي:

1 $f(x) = 3x^3, g(x) = 2x^2 - 5x - 42x - 4$

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= 3x^3 (2x^2 - 5x - 4) && \text{بتعويض } f(x) \text{ و } g(x) \\ &= 3x^3 (2x^2) + 3x^3 (-5x) + 3x^3 (-4) && \text{بتوزيع الضرب على الجمع} \\ &= (3 \times 2)(x^3 \cdot x^2) + (3 \times -5)(x^3 \cdot x) + (3 \times -4)x^3 && \text{خاصية التجميع} \\ &= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتذكر

أطبق قاعدة ضرب القوى من قوانين الأسس عند ضرب الحدود الجبرية:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 5x^2 + x - 5 \\ \times 4x^2 - 7 \\ \hline 12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2 \\ + \quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35 \\ \hline 12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35 \end{array}$$

بترتيب الاقترانين عمودياً

بضرب $4x^2$ في حدود f

بضرب -7 في حدود f

بجمع الحدود المشابهة

أتحقق من فهمي

أجد ناتج ضرب $f(x) \cdot g(x)$ في كل مما يأتي:

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

تُستعمل كثيرات الحدود لتمثيل وحل مسائل حياتية كثيرة في الصناعة، والتجارة، والاقتصاد، والزراعة، والتعليم، ومعظم مناحي الحياة المختلفة.

مثال 4: من الحياة



لياقة: بلغ عدد المُشترِكِينَ في مركز لياقة بدنية 840 شخصًا، يدفع كلُّ منهم اشتراكًا شهريًا مقداره 30 دينارًا. في دراسةٍ للسوق، وجد الباحثون أنَّ المركز سيفقد 25 مُشترِكًا مُقابل كلِّ دينارٍ يزيدُه على قيمة الاشتراك. ما قيمة الاشتراك التي تُحقِّق للمركز أعلى دخل؟ ما مقدار هذا الدخل؟

أفرض أنَّ المركز جعل قيمة الاشتراك x دينارًا، حيث: $x > 30$.

$$x - 30$$

قيمة زيادة الاشتراك

$$25(x-30)$$

عدد المُشترِكِينَ الذين سيفقدُهُم المركز

$$840 - 25(x-30)$$

عدد المُشترِكِينَ الباقين

$$R(x) = x(840 - 25(x-30))$$

الدخل $R(x)$ يساوي عدد المُشترِكِينَ الباقين

مضروبًا في قيمة الاشتراك

$$= 840x - 25x^2 + 750x$$

بتوزيع الضرب

$$= -25x^2 + 1590x$$

بجمع الجُودِ المتشابهة

هذا اقتراحٌ تربيعيٌّ، معاملُهُ الرئيس سالبٌ؛ فمنحناهُ قطعٌ مكافئٌ مفتوحٌ إلى الأسفل، وله قيمة عظمى عند رأسه.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1590}{2(-25)} = \frac{1590}{50} = 31.8$$

الإحداثي x للرأس هو:

إذن، قيمة الاشتراك التي تُحقِّق للمركز أعلى دخل هي 31.8 دينارًا من كلِّ مُشترِكٍ، ومقدار هذا الدخل هو $R(31.8)$.

$$R(31.8) = -25(31.8)^2 + 1590(31.8)$$

بتعويض 31.8 بدلًا من x في اقتران الدخل

$$= 25281$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، أعلى دخل يُحقِّقه المركز هو 25281 دينارًا كلَّ شهرٍ.

يُمكنني التحقق من صحَّة الحلِّ بتمثيل الاقتران باستعمال برمجة جبراً.

أتحقق من فهمي

رياضة: يتَّسع ملعب (ستاد) رياضيٍّ لنحو 62000 مُشجِّعٍ. إذا كان ثمن بطاقة الدخول 11 دينارًا، فإنَّ مُعدَّل عدد الحضور هو 28000 مُشجِّعٍ. وجدت دراسة أنَّ عدد بطاقات الدخول المبَّيعة يزيدُ بمقدار 4000 بطاقةٍ مُقابل كلِّ دينارٍ يُخصَّم من ثمن البطاقة. ما ثمن بطاقة الدخول الذي يُحقِّق أعلى دخل؟ ما مقدار هذا الدخل؟



الرياضة مفيدة للصحة النفسية والبدنية، وتعدّ الرياضة الصباحية أفضل وسيلة لحرق الدهون وفقدان الوزن، حيث يُجبر الجسم على الحصول على الطاقة التي يحتاجها من الأحماض الدهنية الحرّة الزائدة المفيدة لحرق الدهون.



ستاد عمان الدولي أكبر ملاعب كرة القدم في الأردن، افتُتح عام 1968م ويكتسي بالعشب الطبيعي ويتسع لخمسة وعشرين ألف متفرجٍ.



أُحَدِّدُ إِذَا كَانَ كُلُّ مِمَّا يَأْتِي كَثِيرَ حَدُودٍ أَمْ لَا. وَفِي حَالِ كَانَ كَثِيرَ حَدُودٍ أَكْتُبُهُ بِالصُّورَةِ الْقِيَاسِيَّةِ، ثُمَّ أُحَدِّدُ الْمَعَامِلَ الرَّئِيسَ، وَالدَّرَجَةَ، وَالْحَدَّ الثَّابِتَ:

1 $f(x) = 4 - x$

2 $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$

3 $h(x) = 3x(4x - 7) + 2x - 12$

4 $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5 $j(t) = \sqrt{7}t - 16t^2$

6 $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7 $f(x) = 13(2)^x + 6$

8 $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمَثِّلُ كُلَّ اقْتِرَانٍ مِمَّا يَأْتِي بَيَانِيًّا، مُحَدِّدًا مَجَالَهُ وَمَدَاهُ:

9 $f(x) = x^2 - 3x - 4$

10 $f(x) = -4x^2 + 8x + 3$

11 $y = 2x^3 - 6x + 4, -2 \leq x \leq 3$

12 $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4, -3 \leq x \leq 4$

إِذَا كَانَ $f(x) = 2x + 1, g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4, h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$ ، فَأَجِدُ كَلًّا مِمَّا يَأْتِي بِالصُّورَةِ الْقِيَاسِيَّةِ:

13 $h(x) + g(x)$

14 $g(x) - h(x)$

15 $f(x) \cdot h(x)$

16 $x(f(x)) + h(x)$

17 $(f(x))^2 - g(x)$

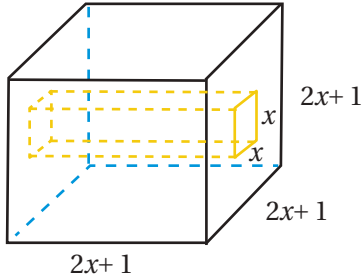
18 $h(x) - x(g(x))$

19 **صاروخ:** أُطْلِقَ صَارُوخٌ إِلَى أَعْلَى، وَكَانَ ارْتِفَاعُهُ بِالْأَمْتَارِ فَوْقَ سَطْحِ الْبَحْرِ بَعْدَ t ثَانِيَةً مِنْ إِطْلَاقِهِ $h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$. أَجِدُ أَقْصَى ارْتِفَاعَ يَبْلُغُهُ الصَّارُوخُ.



20 **زراعة:** وَجَدَ مُزَارِعٌ أَنَّهُ إِذَا زَرَعَ 75 شَجَرَةً فَاكِهَةً فِي بُسْتَانِهِ، فَإِنَّ مُعَدَّلَ مَا يَجْنِيهِ مِنْ كُلِّ شَجَرَةٍ هُوَ 21 صَنْدُوقًا فِي الْمَوْسَمِ. وَكَلَّمَا نَقَصَ عَدَدُ الْأَشْجَارِ شَجَرَةً وَاحِدَةً زَادَ مُعَدَّلُ مَا يَجْنِيهِ مِنْ كُلِّ شَجَرَةٍ بِمَقْدَارِ 3 صَنْدُوقٍ؛ فَتَبَاعِدِ الْأَشْجَارِ عَنْ بَعْضِهَا يَعْزِزُ مِنْ فَرْصِهَا فِي الْحَصُولِ عَلَى حَاجَاتِهَا مِنَ التُّرْبَةِ. مَا عَدَدُ الْأَشْجَارِ الَّتِي يَتَعَيَّنُّ عَلَيْهِ زِرَاعَتُهَا لِإِنْتِاجِ أَكْبَرِ قَدْرِ مِنَ الثَّمَرِ؟ مَا مَقْدَارُ هَذَا الثَّمَرِ؟

- 21 **سياج**: لدى سعيد 120 m من السياج، أراد أن يستعملها لتسييج 3 حظائر مستطيلة متساوية كما في المخطط الآتي. ما أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظائر؟



- 22 **هندسة**: مكعب من الخشب، طول ضلعه $(2x + 1)$ cm، حُفِر فيه تجويف مقطّعه مُربّع، طول ضلعه x cm، يمتد من أحد الأوجه إلى الوجه المقابل. أكتب بالصورة القياسية الاقتران الذي يُمثّل حجم الجزء المُتبقّي من المكعب.

- 23 **أحلّ المسألة** الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

- 24 **أكتشف الخطأ**: وجد كلٌّ من طه وقاسم ناتج $3x(x^2 - 2x - 3) - (5x^3 + 7x^2 - 3)$

قاسم

$$3x^3 - 6x^2 - 9x + (-5x^3 - 7x^2 + 3)$$

$$= -2x^3 + 6x^2 - 6x$$

طه

$$3x^3 - 6x^2 - 9x + 5x^3 + 7x^2 - 3$$

$$= 8x^3 + x^2 - 9x - 3$$

أحدّد إذا كانت إجابة أيٍّ منهما صحيحة، مُبرِّراً إجابتي.

- 25 **مسألة مفتوحة**: أكتب كثيري حدود، أحدّهما ذو حدّين، والآخر ثلاثي الحدود، بحيث يكون ناتج ضربيهما اقتراناً ذا حدّين.

- 26 **تحدّد**: أجد أصفار الاقتران: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

- 27 **تبرير**: إذا كان f, g كثيري حدود. فأكتب العلاقة بين درجة كلّ منهما ودرجة كثير الحدود h الناتج عن جمعهما، طرحهما، ضربيهما. مُبرِّراً إجابتي.

قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية Dividing Polynomials and Rational Functions

إيجاد ناتج قسمة اقتران كثير الحدود على آخر كثير الحدود، وتعرفُ الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها، ومداها، وتمثيلها بيانياً.

فكرة الدرس



الاقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خطُّ التقارب الأفقي، خطُّ التقارب الرأسي.

المصطلحات



بركة سباحة على شكل متوازي مستطيلات، حجمها $3x^4 - 3x^2 - 33x^2 + 54x$ وحدة مكعبة، ومساحة قاعدتها $3x^2 - 6x$ وحدة مربعة، كيف يُمكن إيجاد ارتفاع البركة؟ ما مقدار هذا الارتفاع؟

مسألة اليوم



إن قسمة كثير حدود على آخر تُشبه كثيراً عملية قسمة عدد كلي على آخر؛ إذ تُتبع الخطوات نفسها في كلتا الحالتين. يمكن قسمة كثير الحدود $f(x)$ على كثير الحدود $h(x) \neq 0$ إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $h(x)$. لقسمة كثير حدود على آخر، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية. وإذا كانت إحدى قوى المتغير في المقسوم مفقودة، فإني أضيفها في موقعها، وأكتب معاملها 0، ثم أنفذ خطوات القسمة كما في المثال الآتي.

مثال 1

أجد ناتج قسمة $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$ وباقيها.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \text{بقسمة } 2x^3 \text{ على } x, \text{ وكتابة النتيجة } 2x^2 \text{ فوق الحد المشابه} \\
 \text{بضرب المقسوم عليه } (x+5) \text{ في } 2x^2 \\
 \text{بالطرح، وتنزيل } 24x \\
 \text{بقسمة } -10x^2 \text{ على } x, \text{ وكتابة النتيجة } -10x \text{ فوق الحد المشابه، ثم} \\
 \text{ضرب المقسوم عليه } (x+5) \text{ في } -10x \\
 \text{بالطرح، وتنزيل } -15 \\
 \text{بقسمة } 74x \text{ على } x, \text{ وكتابة النتيجة } 74 \text{ فوق الحد الثابت، وضرب} \\
 \text{المقسوم عليه } (x+5) \text{ في } 74 \\
 \text{بالطرح}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 10x + 74 \\
 x + 5 \overline{) 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} \\
 \underline{(-) 2x^3 + 10x^2} \\
 -10x^2 + 24x \\
 \underline{(-) -10x^2 - 50x} \\
 74x - 15 \\
 \underline{(-) 74x + 370} \\
 -385
 \end{array}$$

إذن، ناتج القسمة هو: $2x^2 - 10x + 74$ ، والباقي -385، ويُمكن كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x + 5}, x \neq -5$$

أتحقق من صحة الحل:

$$\begin{aligned}(x+5)(2x^2-10x+74)-385 &= 2x^3-10x^2+74x+10x^2-50x+370-385 \\ &= 2x^3+(-10+10)x^2+(74-50)x-15 \\ &= 2x^3+24x-15 \quad \checkmark\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج قسمة $f(x) = 4x^4 - 7x^3 + 12x - 25$ على $h(x) = x - 4$.

إذا كان $f(x)$ و $h(x)$ كثيري حدود، وكانت درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $h(x)$ ، و $h(x) \neq 0$ ، فإنه يوجد كثيرا حدود وحيدين هما $q(x)$ (ناتج القسمة) و $r(x)$ (باقي القسمة)، حيث:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)} \quad \text{أو} \quad f(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$$

وتكون درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$.

إذا كان $r(x) = 0$ ، فإن $f(x)$ يقبل القسمة على $h(x)$ ، ويكون $h(x)$ أحد عوامل $f(x)$.

أتذكر

يمكن التحقق من صحة القسمة بضرب الناتج في المقسوم عليه، وإضافة الباقي. فإذا كانت النتيجة مساوية للمقسوم كان الحل صحيحاً.

معلومة

يمكن استعمال خوارزمية القسمة لتأكد أن كثير الحدود $h(x)$ هو أحد عوامل كثير حدود آخر $f(x)$ أم لا.

مثال 2

أثبت أن $(2x^2 + x + 7)$ هو أحد عوامل الاقتران $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21$.
يكون $(2x^2 + x + 7)$ أحد عوامل الاقتران $f(x)$ إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $(2x^2 + x + 7)$ يساوي 0، أقسم $f(x)$ على $(2x^2 + x + 7)$.

$$\begin{array}{r} \begin{array}{l} \text{بقسمة } 6x^4 \text{ على } 2x^2, \text{ وكتابة النتيجة } 3x^2 \text{ فوق} \\ \text{الحّد المشابه} \end{array} \\ 2x^2+x+7 \overline{) 6x^4-7x^3+10x^2-38x-21} \\ \begin{array}{r} \text{بضرب المقسوم عليه } (2x^2+x+7) \text{ في } 3x^2 \\ \text{بالطرح، وتنزيل } -38x \end{array} \\ \begin{array}{r} (-) \quad 6x^4+3x^3+21x^2 \\ \hline -10x^3-11x^2-38x \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{بقسمة } -10x^3 \text{ على } 2x^2, \text{ وكتابة النتيجة } -5x \\ \text{فوق الحّد المشابه، وضربها في المقسوم عليه} \\ \text{بالطرح، وتنزيل } -21 \end{array} \\ \begin{array}{r} (-) \quad -10x^3-5x^2-35x \\ \hline -6x^2-3x-21 \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{بقسمة } -6x^2 \text{ على } 2x^2, \text{ وكتابة النتيجة } -3 \\ \text{فوق الحّد الثابت وضرب } -3 \text{ في المقسوم عليه} \\ \text{بالطرح} \end{array} \\ \begin{array}{r} (-) \quad -6x^2-3x-21 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

بما أن باقي القسمة $r(x)$ يساوي 0، فإن المقسوم يساوي المقسوم عليه مضروباً في ناتج القسمة؛ أي إن:

$$6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 = (2x^2 + x + 7)(3x^2 - 5x - 3)$$

وهذا يعني أن $(2x^2 + x + 7)$ عامل للاقتران $f(x)$.
يُمكن التحقق من ذلك بضرب العاملين في النتيجة السابقة.

أتحقق من فهمي

أثبت أن $h(x)$ هو أحد عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي:

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55$, $h(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3$, $h(x) = x^2 + 3x - 1$

الاقتران النسبية (rational functions)

اقتران يُمكن كتابتها بصورة نسبية بين كثيري حدود، مثل $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؛ شرط أن: $g(x) \neq 0$. ومن الأمثلة عليها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}, \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2-9}, \quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مفهوم أساسي

الاقتران النسبي: اقتران تكون قاعدته (معادلته) بصورة $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث إن $g(x) \neq 0$ ، و $g(x)$ و $f(x)$ كثيري حدود.
مجال الاقتران النسبي: مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام $g(x) = 0$.

مثال 3

أجد مجال كل اقتران نسبي في ما يأتي:

1 $q(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

بإضافة 9 إلى الطرفين

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3، -3، ويكتب برمز المجموعة كما يأتي:

$$\{x \mid x \neq \pm 3\}$$

أتذكر

يُمكن استعمال قاعدة

تحليل الفرق بين مربعين

$$x^2 - 9 = 0$$

2 $y = \frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء قيم x التي تجعل $2x^3-5x^2-3x=0$:

$x(2x^2-5x-3)=0$ بإخراج x عاملٍ مشتركٍ

$x(2x+1)(x-3)=0$ بتحليل العبارة التربيعية $2x^2-5x-3$

$x=0$ أو $2x+1=0$ أو $x-3=0$ خاصية الضرب الصفري

$x=0, x=\frac{-1}{2}, x=3$ بحل المعادلات

إذن، مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $0, \frac{-1}{2}, 3$ ، أو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq \frac{-1}{2}\}$

أتحقق من فوقي

أجد مجال كل مما يأتي:

a) $h(x) = \frac{x^3+8}{x^2-5x+6}$

b) $y = \frac{x^2-4}{6x-3x^2}$

من أبسط الاقترانات النسبية الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ الذي يُسمى **الاقتران المقلوب** (reciprocal function)، ومنه تتولد اقترانات نسبية كثيرة.

يمكن تمثيل هذا الاقتران بيانياً في الفترة $[-4, 4]$ بإنشاء جدول قيم مع استثناء 0؛ لأنه ليس من مجاله.

x	-4	-2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1.25	-2	-5	5	2	1.25	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(أخذت قيم صغيرة للمتغير x قريبة من الصفر لتمثيل الاقتران بدقة؛ فالقيم الصحيحة وحدها لا تمثل الصورة كاملة، وإنما تكون الصورة مُجتزأة ناقصة).

أعین النقاط $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط في الربع الأول بمنحنى، وأصل بين النقاط في الربع الثالث بمنحنى آخر، فينتج الشكل المجاور.

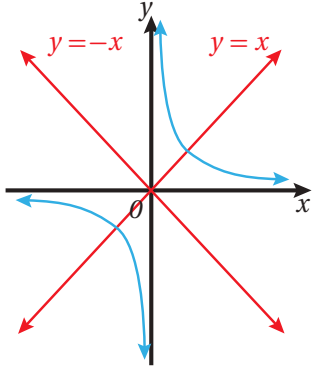
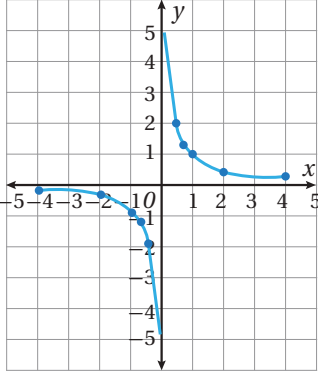
معلومة

مجال الاقتران

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$$

لا يساوي مجال

$$g(x) = x-3$$



ألاحظ من الرسم الخصائص الآتية للاقتران المقلوب:

- كلما اقتربت x من الصفر اقترب المنحنى من المحور y . ولذلك يكون المحور y الذي معادلته $x = 0$ خط تقارب رأسي (vertical asymptote) لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$.

- كلما زادت قيمة $|x|$ اقترب المنحنى أكثر وأكثر من المحور x . ولذلك يكون المحور x الذي معادلته $y = 0$ خط تقارب أفقي (horizontal asymptote) لهذا المنحنى.

- منحنى المقلوب $f(x) = \frac{1}{x}$ لا يقطع المحورين أبداً، ولكنه يقترب كثيراً منهما.

- للمنحنى محور تماثل، هما المستقيمان:

$$y = x, y = -x$$

يلاحظ من الرسم أن مدى الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر. وباستعمال رمز المجموعات، يكتب مداه كما يأتي:

$$\{y \mid y \neq 0\}$$

مثال 4

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{5}{x-3} + 2$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله، ومداه.

الخطوة 1: أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتران.

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي عند صفر المقام؛ أي عندما $x - 3 = 0$ خط التقارب الرأسي هو المستقيم $x = 3$

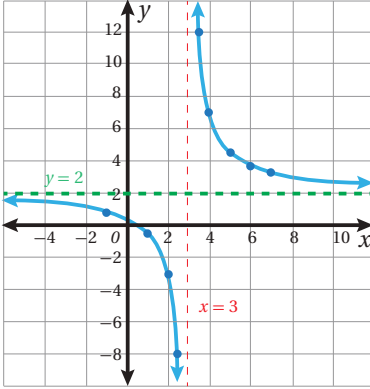
كلما زادت $|x|$ اقترب من الصفر، واقتربت قيمة $f(x)$ من 2؛ أي إن خط التقارب الأفقي هو $y = 2$

أتعلم

إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسط الاقتران النسبي ومقامه، فإنه توجد خطوط تقارب رأسيّة عند أصفار مقامه جميعها.

الخطوة 2: أنشئ جدول القيم الآتي باستثناء العدد 3 ؛ لأن الاقتران غير مُعرَّف عند 3:

x	-1	0	1	2	2.5	3.5	4	5	6	7
$y = \frac{5}{x-3} + 2$	0.75	0.33	-0.5	-3	-8	12	7	4.5	3.67	3.25



الخطوة 3: أرسم خطي التقارب وأعيِّن النقاط

(x, y) في المستوى الإحداثي،
وأصل بين النقاط إلى يمين المستقيم
 $x = 3$ بمنحنى وأمدّه بمحاذاة خطي
التقارب، وأصل بين النقاط إلى يسار
المستقيم $x = 3$ بمنحنى وأمدّه بمحاذاة
خطي التقارب، فينتج الشكل المجاور:
المجال هو جميع الأعداد الحقيقية ما
عدا 3، أو $\{x | x \neq 3\}$.

المدى هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 2، أو $\{y | y \neq 2\}$.

أتحقق من فهمي

أجد خطوط التقارب للاقتران $f(x) = \frac{3}{x+2} + 4$ وأمثله بيانياً، وأجد مجاله ومداه.

توجد مواقف حياتية كثيرة تُستعمل فيها الاقترانات النسبية، مثل حساب معدلات تتضمن متغيرات.

مثال 5: من الحياة

محاليل: يحتوي خزان كبير على 100 لتر من الماء، أذيب فيه 5 kg من السكر. فُتح صُنْبُورُ،
فبدأ الماء يصب في الخزان بمعدل 10 لترات في الدقيقة، وفي الوقت نفسه أُضيف إلى الخزان
1 kg من السكر كل دقيقة. أجد تركيز السكر في الخزان (أي نسبة السكر إلى الماء) بعد 12
دقيقة، محدداً إذا كان هذا التركيز أكبر منه في البداية أم لا.

أتعلم

يشير خط التقارب الأفقي إلى سلوك الاقتران النسبي عندما تصبح القيمة المطلقة للمتغير x كبيرة جداً. فإذا اقتربت قيمة الاقتران من عدد حقيقي ثابت هو c ، فإن المستقيم $y = c$ يكون خط تقارب أفقي لمنحنى الاقتران النسبي.

إذا كان t هو عدد الدقائق التي تلي فتح الصنبور، فإن:

$$W(t) = 100 + 10t \quad \text{كمية الماء هي الكمية الأصلية مضافاً إليها معدل الصب مضافاً في } t$$

$$S(t) = 5 + 1t \quad \text{كمية السكر هي الكمية الأصلية مضافاً إليها معدل الإضافة مضافاً في } t$$

$$C(t) = \frac{5 + t}{100 + 10t} \quad \text{تركيز السكر هو نسبة السكر إلى الماء في الخزان}$$

$$C(12) = \frac{5 + 12}{100 + 10(12)} \quad \text{تركيز السكر بعد 12 دقيقة هو نتيجة تعويض } t = 12 \text{ في الاقتران } C(t)$$

$$C(12) = \frac{17}{220} \approx 0.08 \quad \text{بالتبسيط، واستعمال الآلة الحاسبة}$$

إذن، تركيز السكر في الخزان بعد 12 دقيقة هو 0.08 kg/L وقد كان تركيزه في البداية 0.05 kg/L ، إذن، تركيز السكر بعد 12 دقيقة أكبر منه في البداية؛ لأن $0.08 > 0.05$

أتحقق من فهمي

محايل: يحتوي خزان كبير على 300 لتر من الماء، أذيب فيه 8 kg من السكر. فُتح صنبور، فبدأ الماء يصب في الخزان بمعدل 20 لترًا في الدقيقة، وفي الوقت نفسه أُضيف إلى الخزان 2 kg من السكر كل دقيقة. أجد تركيز السكر في الخزان بعد t دقيقة، ثم أجد قيمة t التي يكون عندها تركيز السكر في الخزان 0.04 kg/L

أتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1 $(x^2 + 5x - 1) \div (x - 1)$

2 $(3x^2 + 23x + 14) \div (x + 7)$

3 $(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \div (x - 2)$

4 $(9x^3 - 9x^2 + 17x + 6) \div (3x - 1)$

5 $(-6x^3 + x^2 + 4) \div (2x - 3)$

6 $(8x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2) \div (4x^2 + x - 1)$

أثبت أن $h(x)$ هو أحد عوامل $f(x)$ في كل مما يأتي:

7 $h(x) = x - 2, f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x - 6$

8 $h(x) = 2x^2 - 7x - 4, f(x) = 6x^4 - 17x^3 - 28x^2 - x + 4$

أجد مجال كل اقتران من الاقترانات الآتية:

9 $f(x) = \frac{3x-6}{2x}$

10 $h(x) = \frac{2x-8}{2x^2-3x+1}$

11 $g(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+9}$

أجد خطوط التقارب لكل اقتران مما يأتي وأمثلة بيانيًا، وأجد مجاله، ومداه.

12 $f(x) = \frac{2}{x-3}$

13 $h(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

14 $w(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x}$

15 $g(x) = \frac{5x^2}{x^2+4}$

16 أدرس إحدى مسائل القسم في هذا الدرس، ثم أكتب العلاقة بين درجة كل من المقسوم والمقسوم عليه والباقي.

17 مساحة ورقة مستطيلة تساوي $(3x^3+14x^2+ax+8)$ وحدات مربعة، وعرضها يساوي $(x+2)^2$ وحدة. أجد قيمة a .

18 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

19 **مهرجانات:** حضر 320 رجلًا، و480 فتاة مهرجانًا رياضيًا عند الساعة الواحدة ظهرًا. بعد هذه الساعة أخذ ينسحب من المهرجان كل 5 دقائق 4 رجال، وتدخل 3 فتيات. أجد نسبة الرجال إلى الفتيات في المهرجان بعد t ساعة من الساعة الواحدة ظهرًا.

مهارات التفكير العليا

20 **غير متم؟** أجدد الاقتران المختلف عن الثلاثة الأخرى، مبررًا إجابتي:

$f(x) = \frac{3}{x+5}$

$g(x) = \frac{5}{x+2}$

$h(x) = \frac{9}{x^2+1}$

$l(x) = \frac{7}{x^2-9}$

21 **مسألة مفتوحة:** أكتب قاعدة اقتران نسبي يكون لتمثيله البياني خط تقارب أفقي هو: $y = 3$ ، وخطًا تقارب رأسيان هما: $x = -2$, $x = 7$.

22 **تحذ:** أجد اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة، يكون أحد عوامله $(x-1)^2$ ، وباقي قسمته على $(x+2)$ هو 9، وباقي قسمته على $(x-3)$ هو 44.

تركيب الاقترانات Composition of Functions

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تعرف مفهوم الاقتران المركب، وشرط تركيب اقرانين، وإيجاد قيمته لعددٍ مُعطى، وإيجاد قاعدة اقرانٍ مركبٍ إذا عُلِمَت قاعدتا مُركبتيه.

تركيب الاقترانات، الاقتران المركب، المُركَّبَتان.

عندما تسقط قطرة ماء المطر على بحيرة تتكوّن موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بالنسبة إلى الزمن وفق الاقتران: $r(t) = 25\sqrt{t+2}$ ، حيث r نصف القطر بالسنتيمترات، و t الزمن بالدقائق. أجد مساحة الموجة عندما $t = 2$.



تعلمت سابقاً أنه يمكن استعمال أيّ اقرانين، مثل $g(x) = 2x - 1$ ، $f(x) = x^2$ ، لتكوين اقرانات جديدة، وذلك بإجراء عمليات جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة عليهما كما في الأمثلة الآتية:

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x - 1 \quad (f - g)(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2(2x - 1) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$$

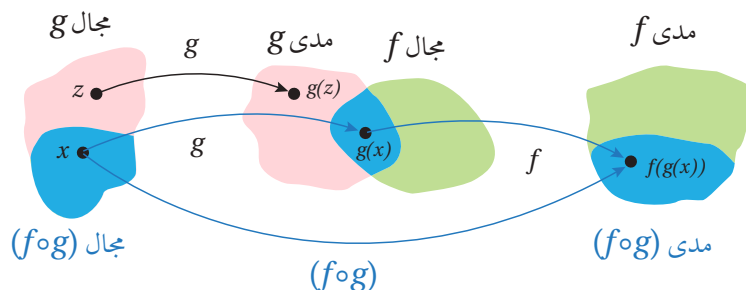
واليوم سأتعلم طريقة جديدة لتكوين اقران جديد من الاقرانين f ، و g عن طريق دمجهما، بحيث تكون مخرجة أحدهما مدخلة للآخر. وتسمى عملية الدمج هذه **تركيب الاقترانات** (function composition)، ويسمى الاقتران الناتج **الاقتران المركب** (composite function).

يمكن تركيب الاقرانين بطريقتين، هما: تطبيق f أولاً، ثم g على نتيجة f ، ويرمز إلى ذلك بالرمز $(g \circ f)$ (يقرأ: g بعد f). وتطبيق g أولاً، ثم f على نتيجة g ، ويرمز إلى ذلك بالرمز $(f \circ g)$.

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ ، و $g(x)$ اقرانين، فإن الاقتران الناتج من تركيب f ، g هو: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. ويُقرأ f بعد g ويكون مجال الاقتران المركب $(f \circ g)$ هو مجموعة قيم x من مجال g التي تكون مخرجاتها $g(x)$ في مجال f .

يُوضَّحُ المُنْخَطَّطُ الآتِي أَنَّ مَجَالَ $(f \circ g)$ هُوَ مَجْمُوعَةُ جَزْئِيَّةٍ مِنْ مَجَالِ g ، وَأَنَّ مَدَى $(f \circ g)$ هُوَ مَجْمُوعَةُ جَزْئِيَّةٍ مِنْ مَدَى f . وَإِذَا كَانَتْ إِحْدَى الْقِيَمِ مِثْلَ $g(z)$ (حَيْثُ z أَحَدُ عَنَاصِرِ مَجَالِ g) غَيْرَ مَوْجُودَةٍ فِي مَجَالِ f ، فَلَا يُمَكِّنُ إِيجَادُ $(f \circ g)(z)$ فِي هَذِهِ الْحَالَةِ:



مثال 1

إذا كَانَ $g(x) = x + 4$ ، $f(x) = x^2$ ، فَأَجِدْ:

1 $(g \circ f)(3)$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3))$$

$$= g(3^2)$$

$$= g(9)$$

$$= 9 + 4 = 13$$

$g \circ f(3)$ تعني g لـ $f(3)$ أي f ، ثُمَّ g

بتعويض $x = 3$ في معادلة f

بالتبسيط

بتعويض $x = 9$ في معادلة g ، والتبسيط

2 $(g \circ f)(-2)$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$$

$$= g((-2)^2)$$

$$= g(4)$$

$$= 4 + 4 = 8$$

$g \circ f(-2)$ تعني g لـ $f(-2)$ أي f ، ثُمَّ g

بتعويض $x = -2$ في معادلة f

بالتبسيط

بتعويض $x = 4$ في معادلة g ، والتبسيط

3 $(f \circ g)(5)$

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$$= f(5+4)$$

$$= f(9)$$

$$= 9^2 = 81$$

$(f \circ g)(5)$ تعني f لـ $g(5)$ أي g ، ثُمَّ f

بتعويض $x = 5$ في معادلة g

بالتبسيط

بتعويض $x = 9$ في معادلة f ، والتبسيط

أتحقق من فهمي

إذا كَانَ $j(x) = 2x + 1$ ، $h(x) = \sqrt{x}$ ، فَأَجِدْ كلاً مِمَّا يَأْتِي:

a) $(h \circ j)(4)$

b) $(j \circ h)(4)$

c) $(h \circ h)(16)$

d) $(j \circ j)(-8)$

يُمكنُ إيجاد قاعدة الاقتران المركب بدلالة المتغير x ، ثم حساب قيمة الاقتران المركب عند أي قيمة عددية معطاة.

مثال 2

إذا كان $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 6$ ، فأجد قاعدة كلٍّ من: $(f \circ g)(x)$ ، و $(g \circ f)(x)$ ، ثم أجد $(f \circ g)(-2)$ ، و $(g \circ f)(0)$.

رموز رياضية

يُقرأ الرمز $(f \circ g)(x)$ ،
 f بعد $g(x)$
ويُقرأ الرمز $(f(g(x)))$ ،
 $g(x)$ لـ f

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{تعريف الاقتران المركب}$$

$$= f(2x^2 - 6) \quad \text{بتعويض } g(x) = 2x^2 - 6$$

$$= 3(2x^2 - 6) + 5 \quad \text{بتعويض } (2x^2 - 6) \text{ مكان } x \text{ في معادلة } f$$

$$(f \circ g)(x) = 6x^2 - 13 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$(f \circ g)(-2) = 6(-2)^2 - 13 = 11 \quad \text{بتعويض } x = -2 \text{، والتبسيط}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{تعريف الاقتران المركب}$$

$$= g(3x + 5) \quad \text{بتعويض } f(x) = 3x + 5$$

$$= 2(3x + 5)^2 - 6 \quad \text{بتعويض } (3x + 5) \text{ مكان } x \text{ في معادلة } g$$

$$= 2(9x^2 + 30x + 25) - 6 \quad \text{بترتيب } (3x + 5)$$

$$(g \circ f)(x) = 18x^2 + 60x + 44 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$(g \circ f)(0) = 18(0)^2 + 60(0) + 44 = 44 \quad \text{بتعويض } x = 0 \text{، والتبسيط}$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x$, $g(x) = 2 - 3x$ ، فأجد قاعدة كلٍّ من: $(f \circ g)(x)$ ، و $(g \circ f)(x)$ ، ثم أجد $(f \circ g)(3)$ ، و $(g \circ f)(-1)$.

أفكر

هل تُحقق عملية تركيب
الاقترانات الخاصية
التبديلية؟

يُمكنُ النظرُ إلى كثيرٍ من الاقترانات بوصفها اقترانات مركبة، ويمكنُ إيجاد اقترانين بسيطين يكافئ تركيبهما الاقتران المركب. وعندئذ يكون الاقترانان البسيطان **مركبتَي الاقتران المركب** (components of the composite function).

فمثلاً، يُمكنُ اعتبارُ الاقتران $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ اقتراناً مركباً، ومركبتاه هما:
 $f(x) = (h \circ g)(x)$ ويكون $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4x^2 + 9$

مثال 3

أجدُ الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيثُ يُمكنُ التعبيرُ عن كلِّ من الاقترانات الآتية بالصورة $h(x) = f(g(x))$:

1 $h(x) = \frac{1}{x+3}$

أفترضُ أنَّ $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $g(x) = x+3$. وبذلك، فإنَّ:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+3) && \text{بتعويض } g(x) = x+3 \\ &= \frac{1}{x+3} = h(x) && \text{بتعويض } 3+x \text{ مكان } x \text{ في معادلة } f \end{aligned}$$

2 $h(x) = (2+x^2)^{10}$

أفترضُ أنَّ $f(x) = x^{10}$ ، $g(x) = 2+x^2$. وبذلك، فإنَّ:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(2+x^2) && \text{بتعويض } g(x) = 2+x^2 \\ &= (2+x^2)^{10} = h(x) && \text{بتعويض } 2+x^2 \text{ في معادلة } f \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أجدُ الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ ، بحيثُ يُمكنُ التعبيرُ عن كلِّ من الاقترانات الآتية بالصورة $h(x) = f(g(x))$:

a) $h(x) = 4x^2 - 1$

b) $h(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + 5$

يُمكنُ استعمالُ فكرةِ الاقترانات المُركَّبةِ في مواقفَ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثل: التجارة، والصناعة، وغيرهما.

مثال 4: من الحياة

صناعة: وجدَ مديرُ مصنعٍ للأثاث أنَّ تكلفةَ إنتاجِ q من خزاناتِ الكتبِ في فترةِ العملِ الصباحيةِ بالدينار هي: $C(q) = q^2 + 2q + 800$. إذا كانَ عددُ خزاناتِ الكتبِ التي يُمكنُ إنتاجُها في t ساعةٍ في الفترةِ الصباحيةِ هي: $q(t) = 20t$, $0 \leq t \leq 5$ ، فما تكلفةُ الإنتاجِ بدلالةِ t ؟ كم دينارًا تكلفةُ الإنتاجِ في نهايةِ ساعةِ العملِ الرابعةِ؟

إرشاد

قد لا تكون القيود على مجال الاقترانات واضحة بعد إجراء عملية تركيب الاقترانات وتبسيطها، لذا من المهم الانتباه إلى مجال الاقترانين قبل تركيبهما.

لإيجاد تكلفة الإنتاج بدلالة t ، أعوض قيمة $q(t)$ في معادلة التكلفة، فأكون اقتراناً مركباً هو $(C \circ q)(t)$:

$$(C \circ q)(t) = C(20t)$$

تعريفُ الاقترانِ المركَّبِ

$$= (20t)^2 + 2(20t) + 800 \quad \text{بتعويض } 20t \text{ مكان } q \text{ في معادلة التكلفة}$$

$$(C \circ q)(t) = 400t^2 + 40t + 800$$

بالتبسيط

تكلفةُ الإنتاج في نهاية ساعة العملِ الرابعة هي: $(C \circ q)(4)$

$$(C \circ q)(4) = 400(16) + 40(4) + 800 = 7360$$

إذن، تكلفةُ الإنتاج في نهاية ساعة العملِ الرابعة هي: 7360 ديناراً.

أتحقق من فهمي

قياس: يُحوّل الاقتران $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ درجات الحرارة من المقياس الفهرنهايتي F إلى مقياس سيلسيوس C . ويُحوّل الاقتران $K(C) = C + 273$ درجات الحرارة من مقياس سيلسيوس إلى مقياس كلفن K . أكتبُ الاقتران الذي يُحوّل درجة الحرارة من المقياس الفهرنهايتي إلى مقياس كلفن، ثمَّ أجدُ درجة الحرارة على مقياس كلفن التي تُقابل 86 درجة فهرنهايت.

معلومة

الكلفن وحدة لقياس درجة الحرارة، معتمدة في النظام الدولي ويرمز لها بالرمز (K) ، وسميت نسبةً إلى الفيزيائي اللورد كلفن.

أتدرب وأحل المسائل

إذا كان $g(x) = \frac{x}{2}$, $f(x) = x + 7$ ، فأجدُ كلّاً ممّا يأتي:

1 $(f \circ g)(4)$

2 $(g \circ f)(4)$

3 $(g \circ g)(-2)$

4 $(f \circ f)(3)$

إذا كان $d(x) = 2x - 3$, $c(x) = x^3$ ، فأجدُ كلّاً ممّا يأتي:

5 $(c \circ d)(3)$

6 $(d \circ c)(5)$

7 $(c \circ d)(x)$

8 $(d \circ c)(x)$

9 إذا كان $a(x) = x + 4$, $b(x) = x - 7$ ، فأثبت أن $(a \circ b)(x) = (b \circ a)(x)$.

10 إذا كان $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3x + 4$ ، فأجد $f \circ g(x)$ ، ثم أجد قيمة $(f \circ g)(-3)$.

11 إذا كان $f(x) = \frac{1}{x-4}$, $g(x) = 2x - 10$ ، فأجد $(g \circ f)(x)$ بصورة كسر واحد، ثم أعيّن مجاله.

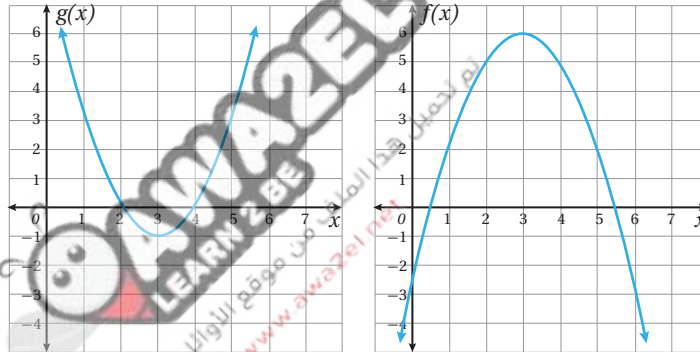
إذا كان $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - 7$ ، فأعبر عن كل ممّا يأتي بصورة اقتران مُركَّب، مُعتمداً الاقترانين f, g :

12 $x^2 - 6$

13 $x + 2$

14 $x^2 + 2x - 6$

أستعمل التمثيلين البيانيين للاقترانين $f(x), g(x)$ لإيجاد قيمة الاقتران المُركَّب في الأسئلة (15–18):



15 $(f \circ g)(2)$

16 $(g \circ f)(4)$

17 $(g \circ g)(5)$

18 $(f \circ f)(3)$

أجد الاقترانين $f(x)$ ، و $g(x)$ ، بحيث يُمكن التعبير عن كلٍّ من الاقترانات الآتية بالصورة $h(x) = f(g(x))$:

19 $h(x) = \frac{4}{3 - \sqrt{4 + x^2}}$

20 $h(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$

21 إذا كان $x > 3$, $g(x) = \frac{2}{3-x}$, $x \geq 2$, $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، فهل يُمكن تكوين $(f \circ g)(x)$ ؟ أبرّر إجابتي.

22 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

يُعطى عددُ خلايا البكتيريا في أحدِ الأطعمةِ المُبرَّدةِ في الثَّلاجةِ بالاقتران:

$N(T) = 23T^2 - 56T + 1$, $3 < T < 33$ ، حيثُ T درجةُ حرارةِ الطعامِ. عندَ إخراجِ الطعامِ مِنَ الثَّلاجةِ تُعطى درجةُ حرارتهِ بالاقتران $T(t) = 5t + 1.5$ ، حيثُ t الزمنُ بالساعاتِ.

23 أكتبُ الاقترانَ: $(N \circ T)(t)$.

24 أجدُ الزمنَ الذي يصلُ عندهُ عددُ خلايا البكتيريا إلى 6752 خليةً، مُقَرَّبًا إجابتي إلى منزلتينِ عشريتينِ.

25 إذا كانَ $f(x) = ax + b$, $a > 0$ ، وكانَ $(f \circ f)(x) = 16x - 15$ ، فأجدُ قيمةَ كلِّ من a ، و b .

26 أجدُ $(f \circ g \circ h)(x)$ في أبسطِ صورةٍ، علمًا بأنَّ: $h(x) = x + 3$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $f(x) = x^2 + 1$.

مهارات التفكير العليا

27 **أكتشفُ الخطأ:** وجدتُ كلَّ من هدى ووفاءِ ناتجَ $(f \circ g)(x)$ ، حيثُ: $g(x) = x^2 + 5$ ، $f(x) = x^2 - 6x - 5$. أجدُ إذا كانتِ إجابةُ أيٍّ منهما صحيحةً، مُبرَّرًا إجابتي.

وفاءِ

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (x^2 + 5)^2 - 6x^2 - 5$$

$$= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 5$$

$$= x^4 + 4x^2 + 20$$

هدى

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (x^2 + 5)^2 - 6(x^2 + 5) - 5$$

$$= x^4 + 10x^2 + 25 - 6x^2 - 30 - 5$$

$$= x^4 + 4x^2 - 10$$

28 **مسألة مفتوحة:** أكتبُ الاقترانين f ، و g بحيثُ يكونُ $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$.

29 **تحذُّ:** إذا كانَ $g(x) = \frac{1}{x+2}$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ، فما قاعدةُ $(f \circ g)(x)$ ؟ ما مجاله؟

30 **تحذُّ:** إذا كانَ $f(x) = \frac{2x-2}{x-4}$ ، وكانَ $g(x) = \frac{2x-1}{3}$ ، فأحلُّ المعادلةَ $(f \circ g)(x) = -4$.

الاقتران العكسي Inverse Function

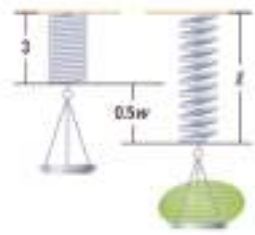
تعرّف الاقتران العكسي، وإيجاده، وتحديد مجاله ومداه.

العلاقة العكسية، الاقتران العكسي، اقتران واحد لواحد، اختبار الخط الأفقي، الاقتران المحيد، الاقتران الجذري.

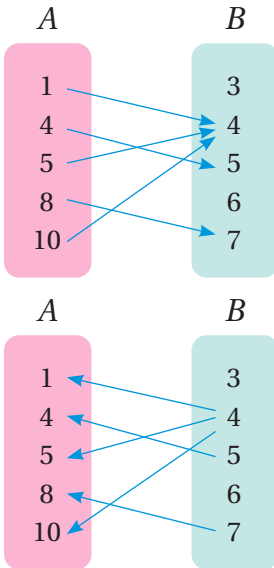
فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



يُستعمل الاقتران $l = 0.5w + 3$ لإيجاد طول الزنبرك l بالستيمترات في الميزان الزنبركي عند قياس كتلة جسم w بالكيلوغرام. هل يمكن إيجاد اقتران آخر يُستعمل لإيجاد كتلة الجسم إذا عُلِمَ طول الزنبرك؟

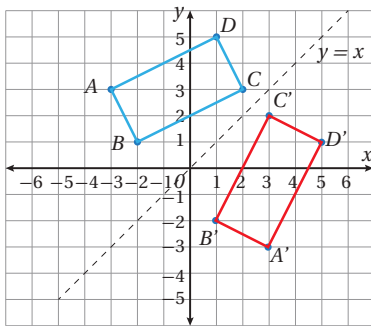


تعلّمت سابقاً أنّ العلاقة تربط بين مجموعتين من العناصر، وأنّ إحداها تُسمّى المجال، والأخرى تُسمّى المدى. وبالنظر إلى العلاقة المُمثّلة في المخطط السهمي الآتي ألاحظ أنّ المجال هو: $A = \{1, 4, 5, 8, 10\}$ ، والمدى هو: $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

عند عكس اتجاه الأسهم لترتبط عناصر B بعناصر A تنتج علاقة عكسية (inverse relation)، مجالها B ، ومداه A .

مثال 1

تمثّل الأزواج المُرتّبة للعلاقة: $\{(1, 5), (2, 3), (-2, 1), (-3, 3)\}$ إحداثيات رؤوس



المستطيل $ABCD$. أجد العلاقة العكسية، ثمّ أمثّل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه. لإيجاد العلاقة العكسية، أبدّل إحداثيات الأزواج المُرتّبة، فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(3, -3), (1, -2), (3, 2), (5, 1)\}$. عند تمثيل هذه الأزواج المُرتّبة بيانياً تنتج إحداثيات رؤوس المستطيل $A'B'C'D'$ الذي يُمثّل انعكاساً للمستطيل $ABCD$ حول المستقيم $y = x$.

أتحقق من فهمي

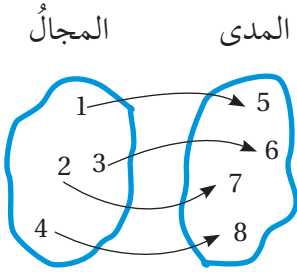
تمثل الأزواج المرتبة للعلاقة: $\{(-3, 1), (-4, 3), (4, 3)\}$ إحداثيات رؤوس المثلث ABC . أجد العلاقة العكسية، ثم أمثل بيانياً العلاقة والعلاقة العكسية على المستوى الإحداثي نفسه.

الاقترانات هي نوع خاص من العلاقات؛ لأن لها خاصية لا تُحققها جميع العلاقات؛ فهي تربط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى. وبما أن كل اقتران هو علاقة فإنه يمكن إيجاد علاقة عكسية للاقتران (معكوس الاقتران)، فإذا كان المعكوس اقتراناً أيضاً سُمي **اقتراناً عكسياً** (inverse function). ويرمز إلى الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

يمكن تحديد إذا كان معكوس الاقتران $f(x)$ يمثل اقتراناً أم لا بالنظر إلى $f(x)$ نفسه؛ فإذا ارتبط كل عنصر في المدى بعنصر واحد فقط في المجال كان المعكوس اقتراناً، عندئذ يُسمى $f(x)$ **اقتران واحد لواحد** (one to one function).

رموز رياضية

يُقرأ الرمز $f^{-1}(x)$ الاقتران العكسي للاقتران $f(x)$.

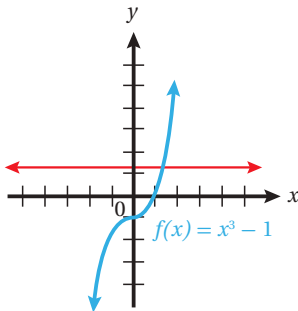


اقتران واحد لواحد

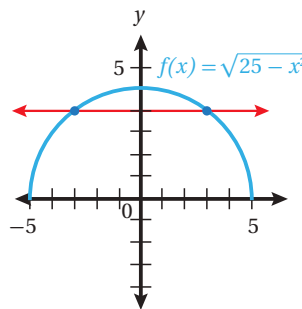


اقتران ليس واحد لواحد

يمكن أيضاً استعمال طريقة تُسمى **اختبار الخط الأفقي** (horizontal line test)؛ للتحقق من أن الاقتران هو واحد لواحد، وذلك برسم أي خط أفقي، والتأكد أنه لا يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة.



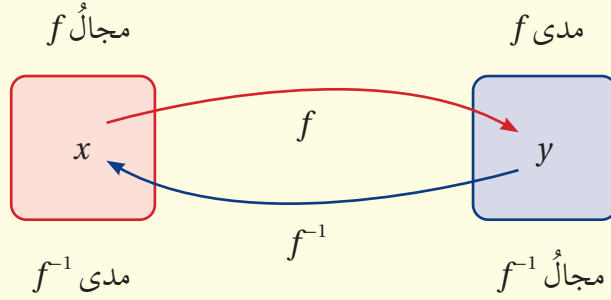
اقتران واحد لواحد



اقتران ليس واحد لواحد

مفهوم أساسي

لأيّ اقتران $f(x)$ ، يوجد اقتران عكسيّ $f^{-1}(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(x)$ اقتراناً واحداً لواحد. عندئذٍ يكون مجال $f(x)$ هو مدى $f^{-1}(x)$ ، ومدى $f(x)$ هو مجال $f^{-1}(x)$.



يُمكن إيجاد الاقتران العكسيّ للاقتران المكتوب بصورة معادلةٍ بالتبديل بين x و y في قاعدة الاقتران.

مثال 2

أجد الاقتران العكسيّ $f^{-1}(x)$ لكل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = 4(x-5)$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بصورة $y = f(x)$.
أكتب الاقتران بصورة $y = 4(x-5)$.

الخطوة 2: أعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

$$y = 4(x-5) \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$y = 4x - 20 \quad \text{بتوزيع الضرب في 4 على الحدين}$$

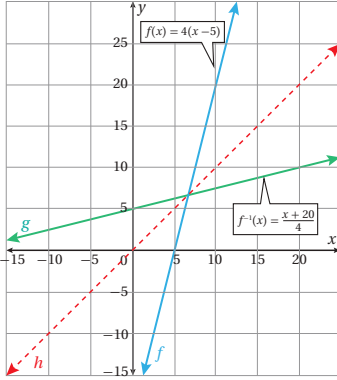
$$y + 20 = 4x \quad \text{بإضافة 20 إلى طرفي المعادلة}$$

$$\frac{y+20}{4} = x \quad \text{بقسمة طرفي المعادلة على 4}$$

الخطوة 3: أبدأ x بـ y ، وأبدأ y بـ x في الصيغة التي توصلت إليها في الخطوة 2، فينتج:

$$\frac{x+20}{4} = y$$

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ، فيكون الناتج قاعدة الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$.

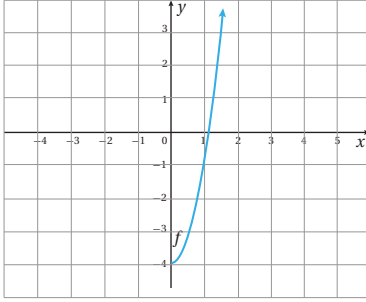


أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ، فينتج:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+20}{4}$$

عند تمثيل كل من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، ألاحظ أن التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.

2 $f(x) = 3x^2 - 4, x \geq 0$



باستعمال اختبار الخط الأفقي، أجد أن $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد عندما $x \geq 0$ ، لذا فإن له اقتراناً عكسياً.

الخطوة 1: أكتب الاقتران بصورة $y = 3x^2 - 4$.

الخطوة 2: أعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

المعادلة الأصلية

بإضافة 4 إلى طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 3

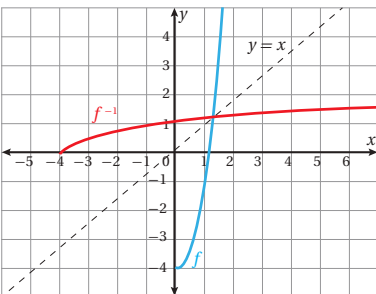
بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين لأن مجال f الذي يمثل مدى f^{-1} هو الأعداد غير السالبة.

الخطوة 3: أبدأ x بـ y ، وأبدأ y بـ x ، فينتج: $\sqrt{\frac{x+4}{3}} = y$.

الخطوة 4: أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ،

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$$

عند تمثيل كل من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، ألاحظ أن التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.



معلومة

بوجه عام، لا يوجد للاقتران التربيعي اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد. ولكن إذا اختزل مجاله بالفترة التي يكون فيها اقتران واحد لواحد، كان له عندئذ اقتران عكسي.

رموز رياضية

يدل الرمز $f^{-1}(x)$ على الاقتران العكسي للاقتران f ، أما الرمز $\frac{1}{f(x)}$ فيدل على مقلوب الاقتران f .

أتحقق من فهمي

أجدُ الاقترانَ العكسيَّ لكلِّ من الاقترانين الآتيين:

a) $h(x) = 7x + 5$

b) $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

من خصائص أيِّ اقترانين مُتعاكسين أنَّ كلاً منهما يعكسُ أثرَ الآخر؛ لذا ينتجُ من تركيبهما الاقتران الذي يُبقي كلَّ عنصرٍ في مجالِهما على حاله، وهو الاقترانُ المحايدُ (identity function) الذي يربطُ كلَّ عنصرٍ بنفسه، وقاعدته هي: $f(x) = x$.

نتيجة

يكونُ $f^{-1}(x)$ الاقترانَ العكسيَّ للاقتران $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في مجال } f^{-1}(x) \text{ و } (f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ لجميع قيم } x \text{ في مجال } f(x).$$

تُستعملُ النتيجة السابقة لإثبات أنَّ الاقترانين المعلومين مُتعاكسان، وللتحقُّق من صحَّة الحلِّ عند إيجاد الاقتران العكسيِّ.

مثال 3

أثبتُ أنَّ الاقترانين $f(x) = \frac{x+5}{3}$ و $g(x) = 3x-5$ كلُّ منهما اقترانٌ عكسيٌّ للآخر بإيجاد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(3x-5)$$

$$= \frac{(3x-5)+5}{3}$$

$$= \frac{3x+(-5+5)}{3}$$

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g\left(\frac{x+5}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{x+5}{3}\right) - 5$$

$$= x + 5 - 5$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

تعريفُ الاقترانِ المركَّب

بتعويض $g(x) = 3x-5$

بتعويض $3x-5$ مكان x في معادلة $f(x)$

بالتجميع

بالتبسيط

تعريفُ الاقترانِ المركَّب

بتعويض $f(x) = \frac{x+5}{3}$

بتعويض $\frac{x+5}{3}$ مكان x في معادلة $g(x)$

باختصارِ العاملِ 3 من البسطِ والمقام

بالتبسيط

إذن، الاقترانان $f(x)$ و $g(x)$ كلُّ منهما اقترانٌ عكسيٌّ للآخر.

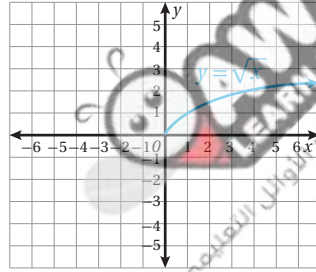
أتحقق من فهمي

أثبت أن الاقترانين $f(x) = 4x - 8$ و $g(x) = \frac{x}{4} + 2$ كل منهما اقتران عكسي للآخر.

نتج في المثال الثاني الاقتران العكسي $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+4}{3}}$ الذي يحوي جذراً تربيعياً لمقدار جبري، وهو نوع خاص من الاقترانات يُسمى **الاقتران الجذري** (radical function).

$$f(x) = \sqrt{5+x^2} \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+12}{8}} \quad f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x}} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-x^3}}{\sqrt[3]{1-x}}$$

إذا كان دليل الجذر فردياً مثل: $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[5]{}$ ، كان مجال الاقتران الجذري جميع الأعداد الحقيقية، ومداه جميع الأعداد الحقيقية. أما إذا كان دليله زوجياً مثل: $\sqrt[4]{}$, $\sqrt{}$ ، فإن مجاله يكون مجموعة الأعداد التي تجعل المقدار تحت رمز الجذر عدداً غير سالب؛ لأن الجذور الزوجية للأعداد السالبة ليست حقيقية، ويكون مداه مجموعة من الأعداد الحقيقية غير السالبة. فمثلاً، $f(x) = \sqrt{x}$ مجاله $x \geq 0$ ، ومداه $y \geq 0$ ، وتمثيله البياني كما في الشكل التالي:



مثال 4

أجد مجال الاقتران $f(x) = \sqrt{2x-6}$ ومداه، ثم أجد الاقتران العكسي له.
مجال هذا الاقتران هو قيم x التي تجعل $2x-6 \geq 0$:

$$2x - 6 \geq 0$$

$$2x - 6 + 6 \geq 0 + 6$$

$$2x \geq 6$$

$$x \geq 3$$

أكتب المتباينة

بإضافة 6 إلى الطرفين

بالتبسيط

بقسمة الطرفين على 2

إذن، مجال $f(x)$ هو $x \geq 3$ ، أو الفترة $[3, \infty)$ ، ومداه جميع الأعداد الحقيقية من قيمته عند 3 فصاعداً؛ لأن المقصود بالجذر هنا هو الجذر الموجب. فالمدى هو $y \geq 0$ ، أو الفترة $[0, \infty)$.

أتذكر

عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد موجب، لا تغير رمز التباين. أما الضرب في عدد سالب فيعكس رمز التباين.

لايجاد الاقتران العكسي، أكتب الاقتران بصورة $y = \sqrt{2x-6}$ ، ثم أحل المعادلة لايجاد x بدلالة y :

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2x-6} && \text{المعادلة الأصلية} \\ y^2 &= 2x - 6 && \text{بتربيع الطرفين} \\ y^2 + 6 &= 2x && \text{بإضافة 6 إلى الطرفين} \\ \frac{y^2 + 6}{2} &= x && \text{بقسمة الطرفين على 2} \end{aligned}$$

بإبدال y بـ x ، و x بـ y في المعادلة الناتجة، فإنه ينتج: $\frac{x^2 + 6}{2} = y$.

أكتب $f^{-1}(x)$ مكان y ، فينتج: $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6}{2}$.

يكون مجال $f^{-1}(x)$ هو مدى $f(x)$ ؛ أي مجاله الفترة $[0, \infty)$ ، ومداه هو مجال $f(x)$ ؛ أي الفترة $[3, \infty)$.

أتحقق من فهمي

أجد مجال $g(x) = \sqrt{3x+12} - 2$ ومداه، ثم أجد الاقتران العكسي له.

تطلب بعض المواقف الحياتية استعمال مفهوم الاقتران العكسي لحل المسألة. فإذا علم طول نصف قطر كرة أمكن إيجاد حجمها بالعويض المباشر في قانون حساب حجم الكرة: $V(r) = \frac{4}{3} r^3 \pi$. ولكن إذا علم الحجم، وطُلب إيجاد طول نصف القطر، فيجب تغيير الصيغة الخاصة بإيجاد الحجم V إلى صيغة أخرى لايجاد r ، وهنا يبرز مفهوم الاقتران العكسي.

مثال 5: من الحياة

فيزياء: سقط جسم ساكن من ارتفاع 200 m عن سطح الأرض، فكان ارتفاعه h عن الأرض بالأمتار بعد t ثانية من سقوطه $h(t) = 200 - 4.9t^2$. أعبّر عن t بصورة اقتران بدلالة الارتفاع h ، ثم أجد الزمن الذي يكون فيه ارتفاع الجسم 50 m فقط.

إن التعبير عن t بدلالة h يعني إيجاد الاقتران العكسي للاقتران $h(t)$. ولأن الزمن t لا يكون سالبًا؛ فإن مجال $h(t)$ هو $t \geq 0$ ، وفيه يكون $h(t)$ اقتران واحد لواحد، وله اقتران عكسي.

أتذكر

مجال الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ هو مدى الاقتران f

إرشاد

لا يستعمل رمز الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ في المسائل العملية، وإنما يُستعمل رمز مثل $r = r(V)$ الذي يُعبّر عن نصف القطر بدلالة الحجم.

الخطوة 1: أكتبُ الاقترانَ بصورة $h = 200 - 4.9t^2$.

الخطوة 2: أجعلُ t موضوعَ القانون.

$$h = 200 - 4.9t^2$$

المعادلة الأصلية

$$h - 200 = -4.9t^2$$

بطرح 200 من طرفي المعادلة

$$\frac{h - 200}{-4.9} = t^2$$

بقسمة طرفي المعادلة على -4.9

$$\frac{200 - h}{4.9} = t^2$$

بضرب البسط والمقام في -1

$$\sqrt{\frac{200 - h}{4.9}} = t$$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين

إذن، الاقتران الذي يُعبّر عن الزمن بدلالة الارتفاع هو: $t(h) = \sqrt{\frac{200 - h}{4.9}}$

$$t(50) = \sqrt{\frac{200 - 50}{4.9}}$$

بتعويض $h = 50$
باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 5.53$$

إذن، يكون الجسم على ارتفاع 50 m بعد مُضي 5.53 ثوانٍ تقريباً من لحظة سقوطه.

أتحقق من فهمي

يرتبط محيط الرأس C للطفل بطوله H (كلا القياسين بالسنتيمتر) عن طريق الاقتران:

$$H(C) = 2.15C - 26.75$$

(a) أكتبُ اقتراناً يُعبّر عن محيط الرأس C بدلالة طول الطفل H .

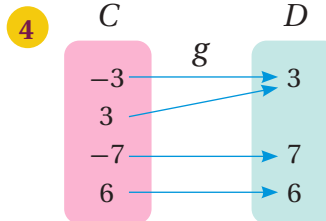
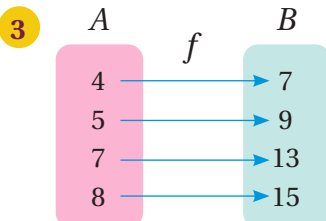
(b) أجدُ محيطَ رأسِ طفلٍ طوله 66 cm

أُتدرب وأحل المسائل

أُحدّدُ الاقترانَ الذي له اقترانٌ عكسيٌّ في كلِّ ممّا يأتي، مُبرّراً إجابتي، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ العكسيَّ (إن وُجدَ):

1 $f = \{(2, 6), (-3, 6), (4, 9), (1, 10)\}$

2 $h = \{(0, 0), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$



إذا كان $f(x) = 3\left(\frac{x}{2} + 4\right)$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي:

5 $f(-2)$

6 $f(4)$

7 $f^{-1}(9)$

8 $f^{-1}(18)$

أجد الاقتران العكسي لكل من الاقترانات الآتية:

9 $f(x) = x + 7$

10 $f(x) = 8x$

11 $f(x) = \frac{x}{2} + 6$

12 $f(x) = \frac{3x-6}{5}$

13 $f(x) = 4x^3$

14 $g(x) = 4 + \sqrt{6-3x}, x \leq 2$

15 $g(x) = \frac{8-3x}{5x}, x \neq 0$

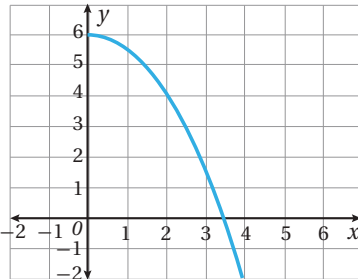
16 $j(x) = (x-2)^2 + 4, x \geq 2$

17 أثبت أن الاقترانين $f(x), g(x)$ كل منهما اقتران عكسي للآخر:

$$f(x) = (x+3)^2 + 2, x \geq -3, g(x) = -3 + \sqrt{x-2}, x \geq 2$$

18 أثبت أن $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ هو اقتران عكسي لنفسه.

19 صناعة: إذا كان $C(x)$ يمثل التكلفة C بالدنانير لإنتاج x وحدة من مصابيح الإنارة، فماذا يمثل المقدار $C^{-1}(23000)$ ؟



20 أرسم منحنى الاقتران العكسي للاقتران f المجاور

في المستوى الإحداثي نفسه، مُعَيَّنًا المجال والمدى لكل من f و f^{-1} .

21 أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقتران:

$f(x) = x^2 - 2x + 5$, $-3 \leq x \leq 1$, ثمَّ أمثلُ $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانيًا في المستوى الإحداثي نفسه.

(إرشاد: أكتبُ $f(x)$ بصورة $(x+b)^2 + c$ باستعمال إكمال المربع).



22 **كيمياء:** في دورق 100 mL من أحد المحاليل، منها 25 mL

من حامض الهيدروكلوريك. إذا أضيف إلى الدورق n mL من

محلول مُشابه، تركيز الحامض فيه 60%، فإن تركيز الحامض

في الدورق يُعطى بالاقتران: $C(n) = \frac{25+0.6n}{100+n}$. أُعبر عن n

بصورة اقتران بدلالة التركيز C ، ثمَّ أجدُ عدد المليلترات n

التي يجب إضافتها ليصبح تركيز الحامض في الدورق 50%.

23 أحلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

24 تُعطى مساحة السطح الكلية A للأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r ، وارتفاعها 40 cm بالاقتران:

$A(r) = 2\pi r^2 + 80\pi r$. أُعبر عن نصف القطر r بصورة اقتران بدلالة المساحة A ، ثمَّ أجدُ طول نصف قطر قاعدة

أسطوانة مساحة سطحها الكلية 2000 cm^2

25 أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقتران $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ، ثمَّ أمثلُ $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ بيانيًا في المستوى الإحداثي نفسه.

مهارات التفكير العليا

26 **تبرير:** إذا كان للاقتران $f(x)$ اقتران عكسي، وكان له صفر عندما $x = 4$ ، فما الذي يمكن استنتاجه عن منحنى

$f^{-1}(x)$ ؟

27 **مسألة مفتوحة:** أكتب قاعدة اقتران واحد لواحد والاقتران العكسي له، ثمَّ أثبت أن كلا منهما اقتران عكسي للآخر.

28 **تحذير:** إذا كان $f(x) = x^2 + 3$ و $g(x) = 5x - 1$ و $x > 0$ ، فأحل المعادلة: $(f \circ g)(x) = g^{-1}(34)$.

المتتاليات Sequences

فكرة الدرس

المصطلحات

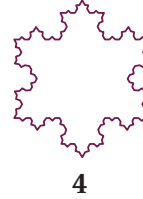
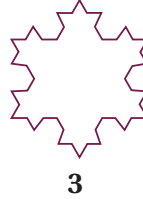
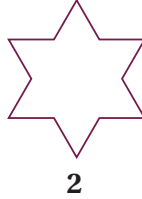
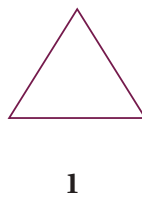
مسألة اليوم



استنتاج قاعدة الحد العام لمتتاليات تربيعية، وتكعيية، وأسية.

المتتالية، الحد، الحد العام.

يُمثل النمط الآتي مراحل تطور ورقة نبات السرخس:



أستعمل النمط لأكمل الجدول الآتي:

المرحلة	1	2	3	4	5	6
عدد الأضلاع	3	12	48	192		

تُعتبر المتتالية اقتراناً مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مراجعة مفهوم

المتتالية (sequence) هي مجموعة من الأعداد تتبّع ترتيباً مُعيّناً، ويُسمّى كل عدد فيها **الحدّ** (term).

مثال 1

أجد الحدود الثلاثة التالية للمتتاليات الآتية:

1 2 , 5 , 8 , 11 , ...

بطرح أيّ حدّين متتاليين، أجد أنّ كل حدّ يزيد على الحدّ السابق بمقدار 3، إذن تتزايد المتتالية بمقدار 3، والحدود الثلاثة التالية هي:

2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20 , ...
+3 +3 +3 +3 +3 +3

أتذكّر

المتتالية قد تتج من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها أو من ضرب حدودها في عدد ثابت أو من كلتا العملتين معاً.

2 3 , 6 , 12 , 24 , ...

بقسمة أيّ حدّين متتاليين، أجد أن الحصول على أيّ حدّ يكون بضرب الحدّ السابق له في 2، إذن تتضاعف المتتالية بمقدار 2، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \dots$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

3 80 , 73 , 66 , 59 , ...

بطرح أيّ حدّين متتاليين، أجد أن كلّ حدّ ينقص عن الحدّ السابق بمقدار 7، إذن، تتناقص المتتالية بمقدار 7، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$80, 73, 66, 59, 52, 45, 38, \dots$$

$-7 \quad -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7 \quad -7$

4 $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

بقسمة أيّ حدّين متتاليين، أجد أن كلّ حدّ يساوي $\frac{1}{3}$ مضروباً في الحدّ السابق له، إذن تتضاءل المتتالية بمقدار $\frac{1}{3}$ ، والحدود الثلاثة التالية هي:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2187}, \dots$$

$\times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3}$

أتحقق من فهمي

أجد الحدود الثلاثة التالية لكلّ متتالية ممّا يأتي:

a) $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \dots$

b) 5 , 10 , 20 , 40 , ...

c) 150 , 141 , 132 , 123 , ...

d) 400 , 200 , 100 , 50 , ...

أتذكّر

يمكن التعبير عن المتتالية

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$$

على الصورة:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

أفكر

متتالية ضربت حدودها

في مقلوب العدد -3،

فهل هي متزايدة أم

متناقصة؟

تعلمت في صفوف سابقة **الحد العام** (n^{th} term) لمتتالية، الذي يمثل العلاقة بين أي حد ورتبته، ويرمز إليه بالرمز $T(n)$. يُسهّل الحد العام إيجاد أي حد في المتتالية، مثل الحد الذي رتبته خمسون مثلاً. ويمكن تصنيف المتتالية اعتماداً على حدها العام إلى: خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأُسّية، وغير ذلك.

مثال 2

أبين إذا كان المقدار الجبري المُعطى بجانب كل متتالية مما يأتي يمثل حداً عاماً لها أم لا، ثم أصنّف المتتاليات إلى خطية، أو تربيعية، أو تكعيبية، أو أُسّية، ثم أجد الحد الخامس والسبعين في كل منها:

1 $4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1$

أعوّض رتب بعض الحدود في المقدار الجبري المُعطى للتأكد أن جميع الحدود تنتج من الحد العام:

رتبة الحد	الحد
$n = 1$	$3 \times 1 + 1 = 4$
$n = 2$	$3 \times 2 + 1 = 7$
$n = 3$	$3 \times 3 + 1 = 10$
$n = 4$	$3 \times 4 + 1 = 13$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يمثل الحد العام للمتتالية، وهي خطية؛ لأن الحد العام خطي. لإيجاد الحد الخامس والسبعين، أعوّض $n = 75$ في قاعدة الحد العام:

$$3(75) + 1 = 226$$

2 $4, 7, 12, 19, \dots, n^2 + 3$

أعوّض للتأكد أن جميع الحدود تنتج من الحد العام:

رتبة الحد	الحد
$n = 1$	$1^2 + 3 = 4$
$n = 2$	$2^2 + 3 = 7$
$n = 3$	$3^2 + 3 = 12$
$n = 4$	$4^2 + 3 = 19$

أتذكر

رتبة الحد أعداد صحيحة موجبة أعوضها في الحد العام للمتتالية لتنتج حدودها.

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثل الحدّ العامّ للمتتالية، وهي تربيعيّة؛ لأنّ الحدّ العامّ تربيعيّ. أعوّض $n = 75$ في الحدّ العامّ لإيجاد الحدّ الخامس والسبعين:

$$(75)^2 + 3 = 5628$$

3 $2, 9, 28, 65, \dots, n^3 + 1$

أعوّض للتأكّد أنّ جميع الحدود تنتج من الحدّ العامّ:

رتبة الحدّ	الحدّ
$n = 1$	$(1)^3 \rightarrow 1 \rightarrow +1 \rightarrow 2$
$n = 2$	$(2)^3 \rightarrow 8 \rightarrow +1 \rightarrow 9$
$n = 3$	$(3)^3 \rightarrow 27 \rightarrow +1 \rightarrow 28$
$n = 4$	$(4)^3 \rightarrow 64 \rightarrow +1 \rightarrow 65$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثل الحدّ العامّ للمتتالية، وهي تكعيبيّة؛ لأنّ الحدّ العامّ تكعيبيّ. أعوّض $n = 75$ في الحدّ العامّ لإيجاد الحدّ الخامس والسبعين:

$$(75)^3 + 1 = 421876$$

4 $2, 4, 8, 16, \dots, 2^n$

أعوّض للتأكّد أنّ جميع الحدود تنتج من الحدّ العامّ:

رتبة الحدّ	الحدّ
$n = 1$	$(2)^1 \rightarrow 2$
$n = 2$	$(2)^2 \rightarrow 4$
$n = 3$	$(2)^3 \rightarrow 8$
$n = 4$	$(2)^4 \rightarrow 16$

إذن، المقدار الجبري المُعطى يُمثل الحدّ العامّ للمتتالية، وهي أُسيّة؛ لأنّ الحدّ العامّ أُسيّ.

أعوّض $n = 75$ في الحدّ العامّ لإيجاد الحدّ الخامس والسبعين:

$$(2)^{75} = 3.777893186 \times 10^{22}$$

أتذكّر

الصورة العلميّة

(scientific notation)

لعددٍ ما هي كتابته في

صورة: $A \times 10^n$ ،

حيث: $1 \leq A < 10$ ،

n : عددٌ صحيحٌ.

أتحقق من فهمي

أبيّن إذا كان المقدار الجبري المُعطى بجانب كل متتالية ممّا يأتي يُمثّل حدّاً عامّاً لها أم لا، ثمّ أصنّف المتتاليات إلى خطيّة، أو تربيعيّة، أو تكعيبيّة، أو أُسيّة، ثمّ أجد الحدّ الخامس والسبعين في كلّ منها:

- a) $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ b) $0, 3, 8, 15, \dots, n^2 - 1$
c) $1.5, 8.5, 27.5, 64.5, \dots, n^3 + 0.5$ d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, 2^{-n}$

معلومة

أصنّف المتتالية إلى أُسيّة، أو تربيعيّة أو تكعيبيّة اعتماداً على الصيغة الجبريّة لحدّها العامّ.

مثال 3

أجد الحدّ العامّ لكل متتالية ممّا يأتي:

- 1 $5, 12, 19, 26, 33, \dots$

ألاحظ أنّ حدود المتتالية تتزايد بمقدار 7:

$$5, 12, 19, 26, 33, \dots$$

+7 +7 +7 +7

يمكن مبدئياً التعبير عن المتتالية بالحدّ $7n$ ، ولكن عند تعويض $n = 1$ ينتج العدد 7، وهو أكبر من الحدّ الأول بـ 2؛ لذا أطرح العدد 2 من $7n$ ، وبذلك يصبح الحدّ العامّ: $T(n) = 7n - 2$.

- 2 $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ألاحظ أنّ الفرق بين كلّ حدّين متتاليين غير ثابت.

إذن، المتتالية غير ناتجة من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها.

ألاحظ أيضاً أنّ المتتالية غير ناتجة من ضرب حدودها في عدد ثابت.

أفسّر المتتالية عن طريق تربيع رتبة كلّ حدّ:

1	4	9	16	25 ...	n^2
5	8	13	20	29 ...	?

بالنظر إلى ناتج تربيع رتبة كلّ حدّ، ألاحظ أنّه إذا أُضيف 4 إلى مُربّع رتبة الحدّ تنتج المتتالية

المطلوبة. وبذلك، فإنّ الحدّ العامّ هو: $T(n) = n^2 + 4$

إرشاد

يمكن فهم المتتالية بشكل أفضل بتحليل حدودها إلى العوامل الأولية.

3 0 , 7 , 26 , 63 , 124 , ...

ألاحظ أن الفرق بين كل حدين متتاليين غير ثابت.

إذن، المتتالية غير ناتجة من جمع (أو طرح) عدد ثابت لحدودها.

ألاحظ أيضًا أن المتتالية غير ناتجة من ضرب حدودها في عدد ثابت، وأنها غير ناتجة من تربيع كل حد.

أفسر المتتالية عن طريق تكعيب رتبة كل حد n^3 :

1	8	27	64	125 ...	n^3
0	7	26	63	124 ...	?

ألاحظ أنه إذا طرح 1 من مكعب رتبة كل حد تنتج المتتالية المطلوبة.

وبذلك، فإن الحد العام هو: $T(n) = n^3 - 1$.

4 11 , 12.1 , 13.31 , 14.641 , ...

ألاحظ أن حدود المتتالية تتضاعف بنسبة ثابتة؛ لأن:

$$\frac{12.1}{11} = 1.1 \quad \frac{13.31}{12.1} = 1.1 \quad \frac{14.641}{13.31} = 1.1$$

من هذا التناسب بين الحدود المتتالية، نستنتج أنه عند ضرب كل حد في 1.1 ينتج الحد التالي. وبذلك، فإن الحد العام هو: $a \times (1.1)^n$ ، حيث a عدد ثابت (لماذا؟).

لحساب a ، أعوض بالحد العام $n = 1$ ، وبمساواته مع الحد الأول في المتتالية ينتج:

$$a(1.1)^1 = 11$$

$$a = \frac{11}{1.1} = 10$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = 10 \times (1.1)^n$.

أتحقق من فهمي

أجد الحد العام لكل متتالية مما يأتي:

a) 8 , 15 , 22 , 29 , 36 , ...

b) 4 , 7 , 12 , 19 , 28 , ...

c) -1 , 6 , 25 , 62 , 123 , ...

d) 0.2 , 0.02 , 0.002 , 0.0002 , ...

أتذكر

الصيغة العامة للاقتراح

الأسّي: $y = a(b)^x$ ،

حيث:

a, b : عددين حقيقيين.

$a \neq 0, b \neq 1, b > 0$

تستخدم المتتاليات في العديد من التطبيقات الحياتية، مثل: التطبيقات العلمية، والهندسية، والتجارية.

مثال 4: من الحياة



طاقة مُتجدِّدة: يزداد عدد المنازل التي تعتمد على الطاقة الشمسية في توليد الكهرباء بإحدى المدن عامًا تلو الآخر كما يظهر في الجدول الآتي:

العام	1	2	3	4	5
عدد المنازل	7000	9800	13720		

1 أجد الحد العام للمتتالية التي تُمثل عدد المنازل.

ألاحظ أن حدود المتتالية تتضاعف بنسبة ثابتة؛ لأن:

$$\frac{9800}{7000} = 1.4 \quad \frac{13720}{9800} = 1.4$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = a \times (1.4)^n$ ، حيث a عدد ثابت.

لحساب a ، أعوّض بالحد العام $n = 1$ ، وبمساواته مع الحد الأول في المتتالية ينتج:

$$a(1.4)^1 = 7000$$

$$a = \frac{7000}{1.4} = 5000$$

إذن، الحد العام هو: $T(n) = 5000 \times (1.4)^n$.

2 أجد عدد المنازل التي تعتمد على الطاقة الشمسية في توليد الكهرباء في العامين: الرابع، والخامس.

أعوّض القيمتين: $n = 4$ ، و $n = 5$ في الحد العام:

$$T(4) = 5000 \times (1.4)^4 = 19208$$

بتعويض $n = 4$ في الحد العام

$$T(5) = 5000 \times (1.4)^5 = 26891.2$$

بتعويض $n = 5$ في الحد العام

$$\approx 26891$$

بالتقريب لأقرب عدد صحيح

أتحقق من فهمي

يتزايد سعر مُنتج سنويًا كما يظهر في الجدول الآتي:

عدد السنوات	1	2	3	4	5
السعر	15	22.5	33.75		

(a) أجد الحد العام للمتتالية التي تُمثل السعر السنوي للمنتج.

(b) أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول.

تظهر المتتاليات في كثير من التطبيقات الحياتية والأنماط الهندسية.



الطاقة المُتجدِّدة

حقّق الأردن إنجازات كبيرة في مجال الطاقة المُتجدِّدة؛ إذ بلغت نسبة مساهمة الطاقة المُتجدِّدة 13% من الطاقة الكهربائية المُولدة في المملكة نهاية عام 2019م، مقارنةً بـ 1% عام 2014م.

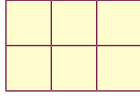
مثال 5

في ما يأتي نمط هندسي يُمثّل عدد المربعات في نماذج متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



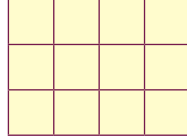
النموذج 1

عدد المربعات 2



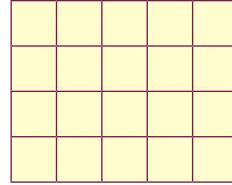
النموذج 2

عدد المربعات 6



النموذج 3

عدد المربعات 12



النموذج 4

عدد المربعات 20

بالنظر إلى الحدود الأولى من المتتالية، ألاحظ أن كل حد فيها يساوي حاصل ضرب رتبته في رتبة الحد الذي يليه:

$$2, 6, 12, 20, \dots$$

$$1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5$$

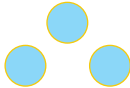
إذن، الحد العام هو: $T(n) = n(n+1) = n^2 + n$

أتحقق من فهمي

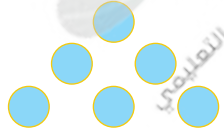
في ما يأتي نمط هندسي يُمثّل عدد الدوائر في نماذج متتالية. أجد الحد العام لهذه المتتالية.



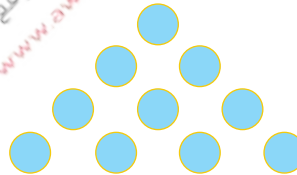
1



3



6



10

أبحث

تُسمى الأعداد 1, 3, 6, 10

أعداداً مثلثية. لماذا؟

أدرب وأحل المسائل

أجد الحدود الثلاثة التالية للمتتاليات الآتية:

1 6, 11, 16, 21, ...

2 -1, 6, 13, 20, ...

3 $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$

4 -8, -7, -6, -5, ...

5 -2, 1, 6, 13, ...

6 4, 16, 36, 64, ...

7 7, 14, 33, 70, ...

8 -11, -4, 15, 52, ...

9 5, 40, 135, 320, ...

10 3, 9, 27, 81, ...

11 $\frac{1}{6}, \frac{1}{36}, \frac{1}{216}, \frac{1}{1296}, \dots$

12 2.6, 3.38, 4.394, 5.7122, ...

أجد أول خمسة حدود لكل متتالية مُعطى حُدّها العام في ما يأتي، ثمّ أصنّفها إلى متتالية خطيّة، أو تربيعيّة، أو تكعيبيّة، أو أُسيّة:

13 $n + 3$

14 $3n - 1$

15 $4n + 5$

16 $n^2 - 1$

17 $n^2 + 2$

18 $200 - n^2$

19 $n^3 + 1$

20 $\frac{n^3}{2}$

21 $3n^3 - 1$

22 6^n

23 8×2^n

24 5×3^n

أجد الحدّ العامّ لكلّ متتالية ممّا يأتي:

25 21, 24, 27, 30, 33, ...

26 1, 9, 17, 25, 33, ...

27 10, 13, 18, 25, 34, ...

28 $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}, 5, \frac{19}{2}, \dots$

29 6, 13, 32, 69, 130, ...

30 1, 15, 49, 127, 249, ...

31 3, 6, 12, 24, 48, ...

32 120, 60, 30, 15, ...

33 80, 100, 125, ...

يُمثّل الجدول الآتي نظام المعادلات الذي تستعمله إحدى الشركات لإيجاد تكلفة نقل n وحدة بالدينار الأردني:

قيمة n	التكلفة بالدينار الأردني
$n \leq 5$	$c = 40n + 50$
$6 \leq n \leq 10$	$c = 40n + 25$
$n \geq 11$	$c = 40n$

34 أجد تكلفة نقل 7 وحدات.

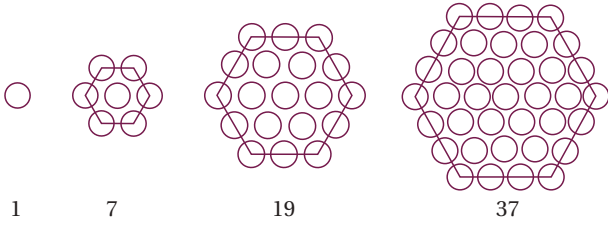
35 أجد تكلفة نقل 15 وحدة.

36 أجد عدد الوحدات التي نقلتها الشركة لقاء مبلغ 170 دينارًا.

37 تستعمل شركة منافسة المعادلة: $c = 50n$ لإيجاد تكلفة نقل الوحدات بالدينار الأردني، بغض النظر عن عددها. أجد عدد الوحدات التي تتساوى فيها التكلفة في الشركتين.

أجد الحد العام لكل من الأنماط الهندسية الآتية:

38



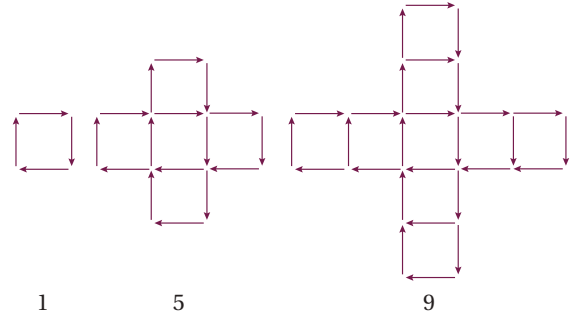
1

7

19

37

39

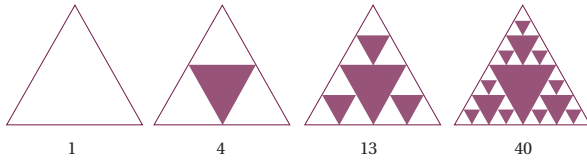


1

5

9

40



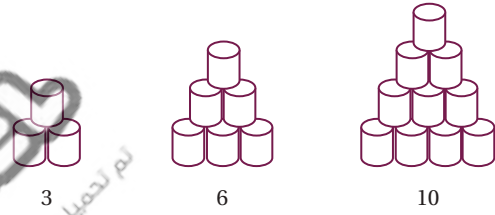
1

4

13

40

41



3

6

10

مهارات التفكير العليا



42 **تحديد:** إذا كان الحد العام للمتتالية: $6, 16, 30, 48, 70, \dots$ هو: $T(n) = an + bn^2$ ، حيث a, b عدداً حقيقيين، فأجد قيم a, b .

43 **تحديد:** أجد أول ثلاثة حدود لمتتالية خطية، مجموعها 12، وحاصل ضربها 28.

44 **مسألة مفتوحة:** أجد أربع متتاليات تبدأ بـ 1، بحيث تكون الأولى خطية، والثانية تربيعية، والثالثة تكعيبية، والرابعة أسية.

45 **غير متتم:** أحدد المتتالية المختلفة عن غيرها في ما يأتي:

1 , 4 , 9 , ...

2 , 8 , 18 , ...

2 , 16 , 54 , ...

4 , 7 , 12 , ...

اختبار نهاية الوحدة

7 خطُّ التقارب الأفقيّ للاقتزان $r(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 4} + 7$ هو:

- a) $y = 0$ b) $y = 7$
c) $y = 4$ d) $y = -1$

8 الحدُّ العاشرُ في المتتالية $0, 2, 6, 12, 20, \dots$ هو:

- a) 90 b) 95
c) 97 d) 99

9 مجالُ الاقتران $f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x-10}$ هو:

- a) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 3, x \neq 5\}$
b) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 2\}$
c) $\{x \mid x \neq 5\}$
d) $\{x \mid x \neq -2, x \neq 5\}$

10 إذا كان $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $g(x) = 6x^3 - 7x + 3$ فأجد $x^2 f(x) + g(x)$

11 إذا كان $h(x) = 3x^2 - 4x$, $j(x) = 4x^3 + 2x + 5$ فأجد $h(x) \cdot j(x)$

12 أقسِّم $(8x^3 + 12x - 5)$ على $(2x + 3)$.

13 أجد خطوط التقارب لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{4}{2-x}$ ، وأمثلةً بيانيًا مُحدَّدًا مجاله، ومداه.

أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 الحدُّ العامُّ (T_n) للمتتالية: $2, 6, 18, 54, \dots$ هو:

- a) $T_n = 2 \times 3^n$ b) $T_n = 2 \times 3^{n-1}$
c) $T_n = 6 \times 3^n$ d) $T_n = 6 \times 3^{n-1}$

2 إذا كان $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ ، فإنَّ قيمة $f(-2)$ هي:

- a) -22 b) -15
c) 9 d) 29

3 إذا كان $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6$, $g(x) = 5x^2 - 7x + 4$ فإنَّ ناتج $f(x) - g(x)$ هو:

- a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 2$
b) $2x^3 + x^2 + 7x + 10$
c) $-3x^3 + 3x^2 + 13x - 4$
d) $-3x^3 - 4x^2 + 7x - 2$

4 إذا كان $g(x)$ كثير حدودٍ من الدرجة السادسة، و $h(x)$ كثير حدودٍ من الدرجة الثانية، فإنَّ درجة ناتج قسمة $g(x)$ على $h(x)$ هي:

- a) الأولى. b) الثالثة.
c) الرابعة. d) الثامنة.

5 إذا كان $f(x) = 3x - 5$, $h(x) = x^2 - 2$ فإنَّ قيمة $g \circ f(3)$ هي:

- a) 4 b) 7
c) 14 d) 16

6 إذا كان $f(x) = 8 - 2x$ ، فإنَّ قيمة $f^{-1}(4)$ هي:

- a) 0 b) -6 c) -2 d) 2

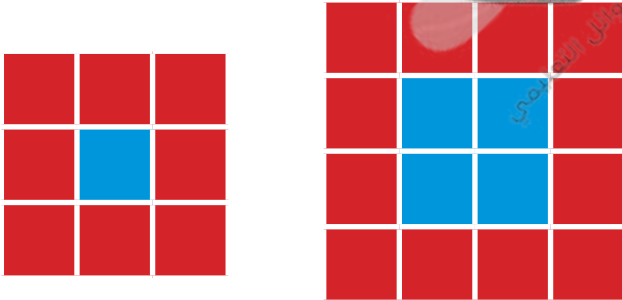
اختبارُ نهايةِ الوحدة

22 يبيعُ محلُّ عصائرٍ ما مُعدَّلهُ 3500 علبةٍ عصيرٍ أسبوعيًّا، سعرُ الواحدةِ منها 0.75 دينارًا. وجدَ صاحبُ المحلِّ أنَّ مبيعاتِهِ ستقلُّ 100 علبةٍ مُقابلَ كلِّ زيادةٍ مقدارُها 0.05 دينارًا على سعرِ العلبة. أكتبْ اقتراحًا يُمثِّلُ الدخلَّ الأسبوعيَّ للمحلِّ إذا طُبِّقتِ الزيادةُ على السعرِ x مرَّةً، ثمَّ أجدُ السعرَ الذي يُحقِّقُ للمحلِّ أعلى دخلٍ أسبوعيٍّ.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليةِ

23 في بيتٍ خضِرٍ بركتهُ سباحةٌ مستطيلةٌ، بُعْدُها 13 m، 8 m، وقد أرادَ أنْ يُحيطَ بها ممرًّا منتظمًا بحيثُ تصبحُ المساحةُ الإجماليةُ لسطحِ البركةِ والممرِّ معًا 176 m^2 ، ما عرضُ الممرِّ؟

رَتَّبَتْ فدوى بطاقاتٍ حمراءَ وزرقاءَ كما في الشكلين الآتيين:



الشكل (1)

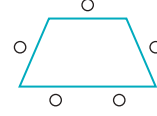
الشكل (2)

24 إذا استمرَّ هذا النمطُ، فما عددُ البطاقاتِ الحمراء في الشكلِ n ؟

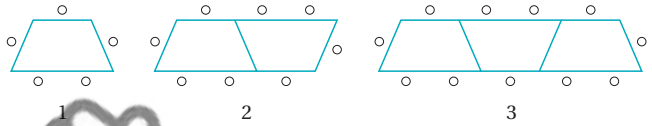
25 ما عددُ البطاقاتِ الزرقاءِ فيه؟

26 استعملت فدوى 64 بطاقة لتكوين أحد أشكال هذا النمط، فكم بطاقة حمراء، وكم بطاقة زرقاء استعملت؟

يوجد في قاعة طعام مدرسة طاولات على شكل شبه منحرف ويمكن لكل طاولة أن تتسع لخمسَةِ أشخاص، كما هو موضح في الشكل:



لاحظ مسؤول القاعة أن عدد الأشخاص يتغير حسب عدد الطاولات الملائقة لبعضها البعض كما يوضحه الشكل الآتي:



14 أكمل الجدول الآتي:

عدد الطاولات المتلاصقة	1	2	3	4	5
عدد الأشخاص	5	8	11		

15 أجد الحد العام.

16 أجد عدد الأشخاص الممكن جلوسهم حول 13 طاولة متلاصقة.

17 لدى المدرسه حفل لـ 200 طالب، كم عدد الطاولات المتلاصقة اللازمة للحفل؟

إذا كان $g(x) = \frac{1}{x+1} + 2$ ، فأجد:

18 $g^{-1}(x)$

19 $(f \circ f)(x)$

20 $(g \circ f)(x)$

21 أجدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x) = \sqrt{4-x}$ ، مُحدِّدًا المجالَ والمدى لكلٍّ من: $f(x)$ و $f^{-1}(x)$.

ما أهمية هذه
الوحدة؟

يُستعمل الاشتقاق لإيجاد الميل عند أي نقطة على المنحنى؛ ما يُسهّل الحسابات في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية التي يُمكن نمذجتها باستعمال الاقترانات. ومن ذلك، حساب سرعة سيارة عند لحظة ما، وحساب أعلى ارتفاع تبلغه كرة عند ركلها إلى الأعلى.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ تقدير ميل المنحنى عن طريق رسم المماس.
- ◀ إيجاد المشتقة الأولى لكثيرات الحدود.
- ◀ إيجاد القيم العظمى والصغرى لكثيرات الحدود.
- ◀ حلّ مسائل حياتية عن القيم العظمى والصغرى.

تعلمت سابقًا:

- ✓ تعريف المماس، والقاطع، ونقطة التماس.
- ✓ حساب ميل المستقيم.
- ✓ معادلة الخطّ المستقيم.
- ✓ منحني المسافة - الزمن، ومنحني السرعة - الزمن.

عمل صندوق حجمه أكبر ما يمكن

فكرة المشروع



المواد والأدوات



حساب أكبر حجم ممكن لصندوق باستعمال المشتقة.
ورقتان من الكرتون المقوى مستطيلتا الشكل من المقاس نفسه، مسطرة، مقص،
برمجية جيو جبرا.

خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أقص أربعة مربعات متساوية.
- 2 أطبق الأطراف بعضها على بعض، فيتج صندوق على شكل متوازي مستطيلات، مفتوح من الأعلى.
- 3 أحسب حجم الصندوق، بقياس كل من الطول، والعرض، والارتفاع باستعمال المسطرة. هل يمكن عمل صندوق أكبر حجمًا باستعمال ورقة من المقاس نفسه؟
- 4 أعيّد الخطوات السابقة، ولكن بطريقة جبرية، وافترض أن طول ضلع المربع المقصوص من كل زاوية يساوي x ، وتكوين ثلاثة مقادير جبرية تمثل الطول والعرض والارتفاع، ثم استعملها لإيجاد حجم الصندوق بدلالة x .
- 5 استعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي يكون عندها الحجم أكبر ما يمكن.
- 6 اتحقق من النقطة التي يكون عندها الحجم أكبر ما يمكن باستعمال برمجية جيو جبرا، وذلك بالضغط على أيقونة  من شريط الأدوات، ثم نقر المنحنى، فتظهر إحداثيات نقاط القيم القصوى على يسار الشاشة.
- 7 أجد أكبر حجم ممكن للصندوق.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضًا تقديميًا أبين فيه:

- 1 النتائج التي توصل إليها كل فرد في المجموعة.
- 2 بعض الصعوبات التي واجهتها المجموعة في أثناء العمل بالمشروع، وكيف تجاوزتها.
- 3 مقترحًا لتطبيق حياتي أو علمي تستعمل فيه فكرة المشروع.

استكشاف ميل مماس المنحنى Exploring The Slope of The Tangent

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا لوصف التغير في قيمة ميل المماس من نقطة إلى أخرى على منحنى كثير حدود.

نشاط

أمثل الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أرسم مماساً عند نقطة متحركة على منحناه، واصفياً التغير في قيمة ميل المماس.

الخطوة 1: أمثل منحنى الاقتران بيانياً باتباع الآتي:

• أكتب $f(x)$ في شريط الإدخال، ثم أكتب قاعلة الاقتران بنقر المفاتيح الآتية:

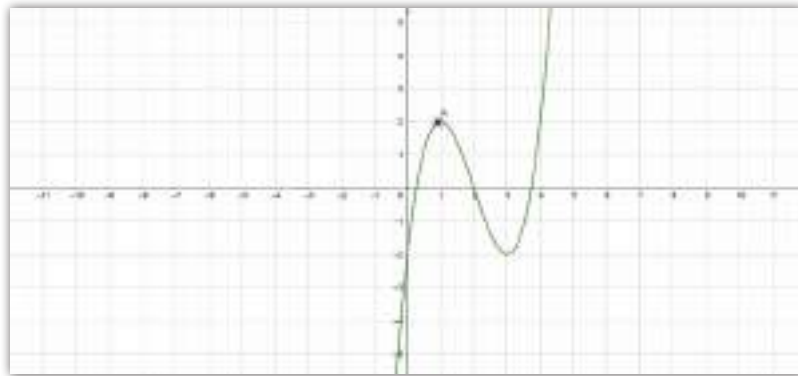


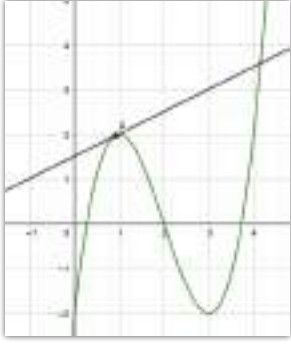
الخطوة 2: أحدد نقطة متحركة A على منحنى الاقتران باتباع الآتي:

• أكتب $a = 1$ في شريط الإدخال، ثم أنقر زر

• أكتب $A = (a, f(a))$ في شريط الإدخال، ثم أنقر زر

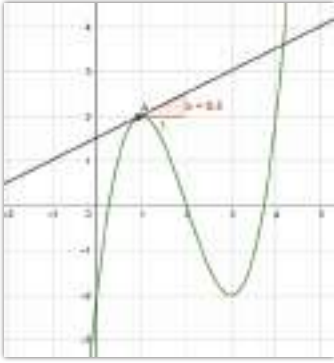
يُمكنني تغيير موقع النقطة A على منحنى الاقتران بنقرها باستمرار، ثم تحريكها.





الخطوة 3: أرسم مماسًا للمنحنى عند النقطة A .

- أكتب $Tangent(A, f)$ في شريط الإدخال، ثم انقر زر
- ألاحظ أن برمجة جيو جبراً تُسمي المماس g بصورة تلقائية.



الخطوة 4: أجد ميل المماس عند النقطة A .

- أكتب $Slope(g)$ في شريط الإدخال، ثم انقر زر

الخطوة 5: أحرّك النقطة A ، ملاحظًا التغير في قيمة الميل،

ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

- متى يكون ميل المماس موجبًا؟
- متى يكون ميل المماس سالبًا؟
- متى يكون ميل المماس صفرًا؟

أدرب



أمثل كلاً من الاقتراحات الآتية بيانًا باستعمال برمجة جيو جبراً، ثم أرسم مماسًا لكل منها عند نقطة متحركة، واصفًا التغير في قيمة ميل المماس.

1 $f(x) = (x-1)^2 + 3$

2 $h(x) = 3 - 2x - x^2$

3 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 3$

4 $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2$

الدرس 1

تقدير ميل المنحنى Estimating Slope

فكرة الدرس

المصطلحات

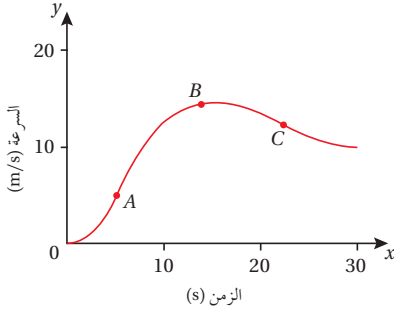
مسألة اليوم



تقدير ميل المنحنى.

السرعة اللحظية، التسارع اللحظي.

يُمثل الشكل المجاور سرعة سيارة في 30 ثانية.

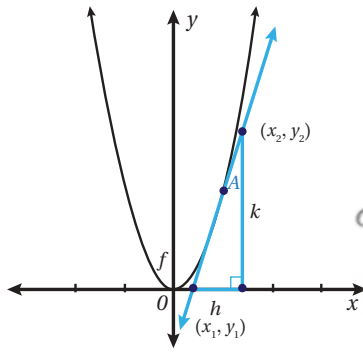


- هل يُمكن إيجاد تسارع السيارة عند النقاط A, B, C ؟
- عند أي النقاط يكون التسارع موجباً؟
- عند أي النقاط يكون التسارع سالباً؟
- عند أي النقاط يكون التسارع صفراً؟

تعلمت سابقاً كيفية حساب ميل المستقيم، فهل يُمكن

إيجاد ميل منحنى ليس مستقيماً؟

إنَّ ميل المنحنى عند نقطة واقعة عليه يساوي ميل المماس عند تلك النقطة؛ لذا، فإنَّ ميل المنحنى يختلف من نقطة إلى أخرى عليه كما في النشاط المذكور آنفاً قبل الدرس.



أفكر

لماذا يكون ميل المستقيم ثابتاً عند أي نقطة عليه؟

لإيجاد ميل منحنى عند نقطة ما، أرسم مماساً

عند تلك النقطة، ثم أجِد ميل المماس باستعمال إحداثيات نقطتين تقعان عليه:

(x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، وذلك بالتعويض في صيغة ميل المستقيم.

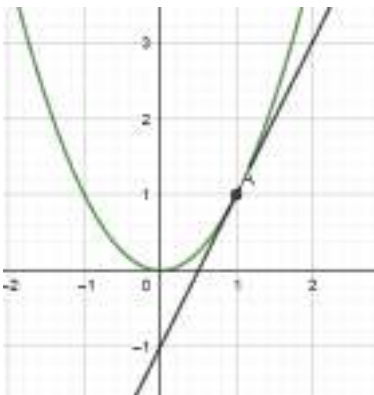
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{h} \text{، حيث: } x_2 - x_1 \neq 0$$

مثال 1

يُمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً

لـمنحنى الاقتران $y = x^2$ عند النقطة $A(1, 1)$.

أجِد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .



أحدّد نقطتين على المماس من الرسم: $B(0, -1)$ و $C(2, 3)$ ، ثمّ أحسب الميل:

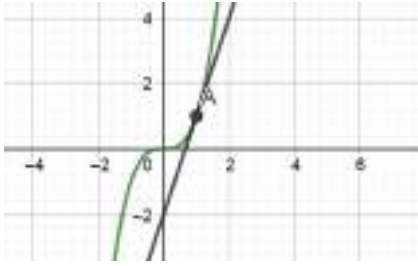
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{3 - (-1)}{2 - 0} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 2 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو 2

أتحقق من فهمي



يمثل المستقيم في الشكل المجاور مماساً

لمنحنى الاقتران $y = x^3$ عند النقطة $(1, 1)$.

أجد ميل منحنى الاقتران عند النقطة A .

إذا لم يكن المماس مرسوماً عند النقطة التي يراد إيجاد ميل المنحنى عندها، فإنه يرسم باستعمال المسطرة. وبما أن الرسم اليدوي ليس دقيقاً، فإن ميل المماس المرسوم قد يختلف قليلاً عن القيمة الدقيقة لميل المنحنى، عندئذ يكون الناتج قيمة تقريبية لميل المنحنى.

إرشاد

أستعمل شبكة المربعات
لتمثيل المنحنيات بيانياً
بدقة.

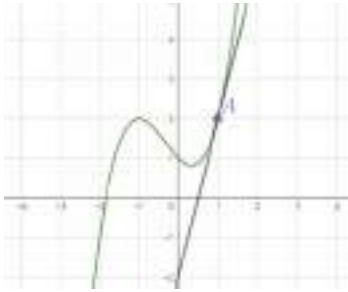
مثال 2

أقدّر ميل منحنى الاقتران $y = x^3 + x^2 - x + 1$ عند كل نقطة مما يأتي:

1 النقطة $A(1, 2)$.

الخطوة 1: أرسّم مماساً للمنحنى عند النقطة

$A(1, 2)$ باستعمال المسطرة.



الخطوة 2: أحدّد نقطتين على المماس

$A(1, 2)$ ، $C(1.5, 4)$ ، ثمّ أجد الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{4 - 2}{1.5 - 1} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 4 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة A هو 4

أتعلّم

يكون ميل المنحنى عند
نقطة عليه موجباً إذا
صنع مماس المنحنى
عند تلك النقطة زاويةً
حادّة مع محور x
الموجب.

أتعلّم

يكون ميل المنحنى عند نقطة عليه سالبًا إذا صنع مماس المنحنى عند تلك النقطة زاوية منفرجة مع محور x الموجب.

أفكر

متى يكون ميل المنحنى صفرًا؟

2 النقطة $B(0, 1)$

أرسم مماسًا للمنحنى عند النقطة B ، ثم أجد نقطتين عليه $B(0, 1)$ و $E(1, 0)$ ، ثم أجد الميل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{1 - 0}{0 - 1} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= -1 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة B هو -1

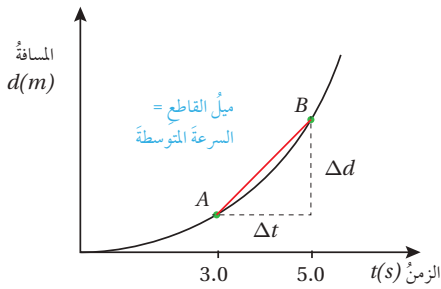


أتحقق من فهمي

أقدر ميل منحنى الاقتران الممثل بيانيًا في الشكل المجاور عند كل من النقطتين: $A(-4, 0)$ ، $B(0, -2)$.

تعرفتُ سابقًا أن منحنى المسافة - الزمن يكون مستقيمًا عند الحركة بسرعة ثابتة، وأنه لا يكون مستقيمًا عند الحركة بسرعة متغيرة. تعرفتُ أيضًا كيفية حساب السرعة المتجهة المتوسطة $\bar{v}$ لجسم متحرك في فترة زمنية، وذلك بقسمة التغير في المسافة Δd على التغير في الزمن Δt :

$$v_{avg} = \bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$



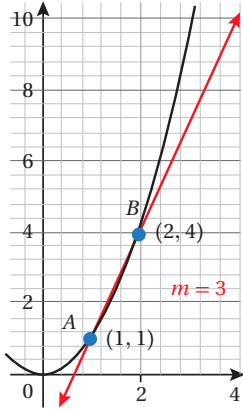
بالنظر إلى منحنى المسافة - الزمن المجاور، يتبين أن السرعة المتوسطة المتجهة للسيارة من الدقيقة الثالثة إلى الدقيقة الخامسة تساوي ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين A و B على المنحنى.

لكن السرعة المتوسطة لا تُقدّم معلومات كافية

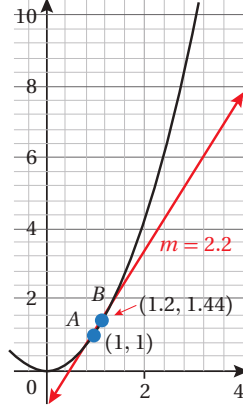
في كثير من المواقف، مثل تحديد سرعة سيارة لحظة مرورها أمام الرادار؛ فنلزم عندئذ **السرعة اللحظية** (velocity) التي يمكن إيجادها بتقليص الفترة الزمنية للسرعة المتوسطة حتى تصبح نقطة (لحظة) كما في الأشكال التالية، فيصبح القاطع الذي يمر بنقطتين على المنحنى مماسًا له عند نقطة واحدة.

رموز رياضية

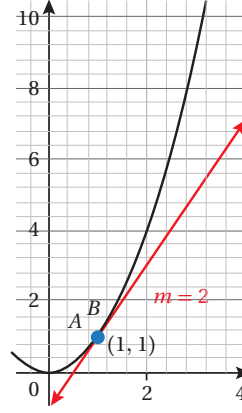
يُرمز للتغير في قيمة x بالرمز Δx



الشكل (1)



الشكل (2)



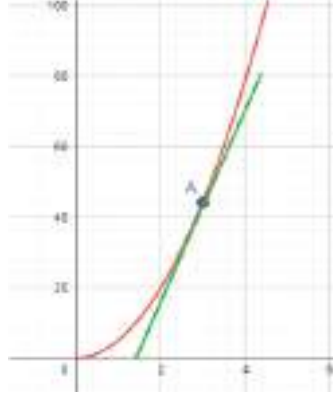
الشكل (3)

بما أن ميل المماس يساوي ميل المنحنى عند نقطة التماس، فإن السرعة اللحظية عند لحظة ما تساوي ميل منحنى المسافة - الزمن عند تلك اللحظة.

مثال 3

يُمثل الاقتران $d(t) = 4.9t^2$ العلاقة بين المسافة المقطوعة d بالمتري والزمن t بالثانية (منحنى المسافة - الزمن) لكرة تسقط سقوطاً حراً من وضع السكون. أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من سقوطها.

الخطوة 1: أعوض $t = 3$ بالاقتران لتحديد المسافة المقطوعة بعد 3 ثوانٍ، فنتج النقطة $A(3, 44.1)$ التي تُمثل نقطة التماس.



الخطوة 2: أمثل منحنى الاقتران $d(t) = 4.9t^2$ بيانياً، ثم أرسم المماس عند النقطة $A(3, 44.1)$.

t	0	1	2	3	4
$d(t)$	0	4.9	19.6	44.1	78.4

الخطوة 3: أحدد نقطتين على المماس $A(3, 44.1)$ و $B(1.5, 0)$ ، ثم أستعملهما لحساب الميل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{44.1 - 0}{3 - 1.5} = 29.4$$

صيغة الميل

بالتعويض

بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران عند النقطة $A(3, 44.1)$ هو 29.4 تقريباً. ومنه، فإن سرعة الكرة اللحظية بعد 3 ثوانٍ هي 29.4 m/s

أتعلم

التسارع اللحظي عند لحظة ما يساوي ميل منحنى السرعة - الزمن عند تلك اللحظة.

فائدة

تُسمى المعادلة $d(t) = 4.9t^2$ قانوناً غاليليو نسبةً إلى مكتشفها غاليليو غاليلي (1564-1642م). وهي تصف المسافة التي يقطعها جسم في أثناء سقوطه بصورة حرة من وضع السكون نحو سطح الأرض.

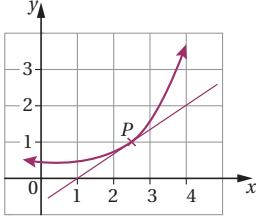
أفكر

إن حساب السرعة اللحظية برسم المماس وتحديد نقطتين عليه أمرٌ صعبٌ، فهل توجد طريقةٌ أسهل وأدق لحساب الميل؟

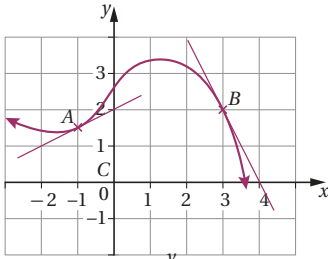
أتحقق من فهمي

يُمثلُ الاقترانُ $d(t) = t^2 + t$ المسافة التي يقطعها جسمٌ ما، حيثُ d المسافة المقطوعة بالمتري، و t الزمنُ بالثانية. أقدِّر السرعة اللحظية بعد 5 ثوانٍ، و 11 ثانية.

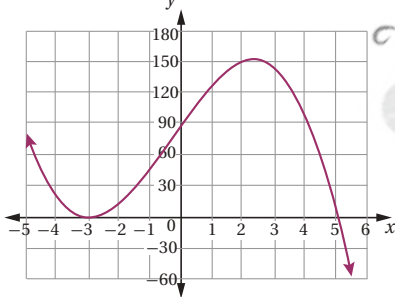
أدرب وأحل المسائل



- 1 يُمثلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورٍ مماسًا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$. أجدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ P .



- 2 في الشكلِ المجاورِ، رُسمَ مماسانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتينِ $A(-1, 1.5)$ و $B(3, 2)$. أجدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلِّ من A و B .



- 3 أقدِّر ميلَ منحنى الاقترانِ المُبينِ جانبًا عندَ النقطةِ $(2, 150)$ ، والنقطةِ $(4.5, 60)$.

أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابة عن الأسئلة (4-7):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

- 4 أُمثلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًا في الفترة $0 \leq x \leq 4$.

- 5 أرسمُ مماسًا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$.

- 6 أقدِّر ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ $(3, 3.5)$.

- 7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندها صفرًا؟

8 أنسخ جدول قيم الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ الآتي، ثم أكمله:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$		0.01	0.1		0.8		

9 أرسم منحنى الاقتران $f(x) = 0.1x^3$ في الفترة $0 \leq x \leq 3$.

10 أرسم مماسًا لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2, 0.8)$.

11 أقدّر ميل منحنى الاقتران عند النقطة $(2, 0.8)$.

أقدّر ميل منحنى كل اقتران مما يأتي:

13 $y = 3 + 2x^2$ عند النقطة $(-1, 5)$.

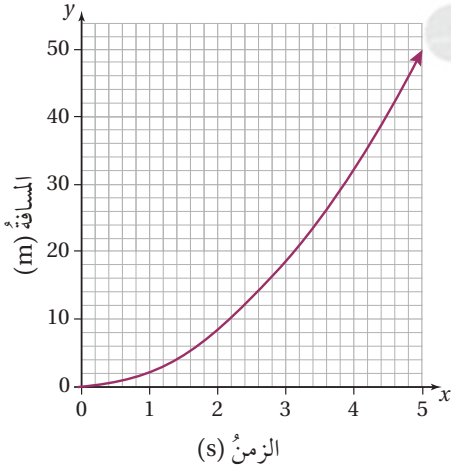
12 $y = 4x^2 + 1$ عند النقطة $(1, 5)$.

15 $y = 5x^4 + 1$ عند النقطة $(0, 1)$.

14 $y = 1 - x^2$ عند النقطة $(-1, 0)$.

17 $y = 8 - 2x$ عند النقطة $(1, 6)$.

16 $y = 9 - x^2$ عند النقطة $(2, 5)$.



دراجات نارية: بدأت دراجة نارية الحركة من وضع السكون

في مسارٍ مستقيم. ويبيّن المنحنى المجاور المسافة التي

قطعتها الدراجة في 5 ثوانٍ:

18 أرسم نسخة من المنحنى، مستعينًا بالجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	8	18	32	50

19 أرسم مماسًا للمنحنى عندما $x=2$.

20 أقدّر سرعة الدراجة بعد ثانيتين.

21 أقدّر سرعة الدراجة بعد 4 ثوانٍ.

سيارات: أراد مهندس أن يدرس تسارع سيارة، فسجل المسافة المقطوعة كل 3 ثوانٍ كما في الجدول الآتي، ثم استعمل المعادلة $x = at^2 + bt^4$ لتمثيل العلاقة بين قيم المسافة والزمن، حيث a و b عددين ثابتان:

الزمن t (ثانية)	0	3	6	9	12
المسافة x (متر)	0	26.19	95.04	177.39	224.64

22 أرسم منحنى المسافة - الزمن.

23 أقدّر السرعة عندما $t = 9$.

24 أجد قيمة كل من a و b .

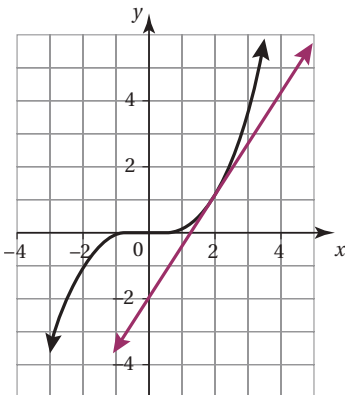
25 **فيزياء:** تمثل المعادلة $s(t) = 3t - t^2$ المسافة التي قطعها جسم بالمتر، حيث t الزمن بالثانية. أقدّر سرعة الجسم عندما $t = 2$.

مهارات التفكير العليا

26 **تبرير:** أقدّر ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عند كل من النقاط الآتية، مُبرراً إجابتي:

- نقطتا تقاطع المنحنى مع محور x .
- نقطة تقاطع المنحنى مع محور y .

27 **مسألة مفتوحة:** أكتب قاعدة اقتران من الدرجة الثانية، ثم أمثله بيانياً، مُقدّراً ميله عند نقطتين متعاكستين عليه (a, b) , $(-a, b)$.



28 **تحذّر:** يُمثّل الشكل المجاور مماساً لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{1}{8} x^3$ عند النقطة $(2, 1)$. ما معادلة هذا المماس؟

أتذكر: معادلة المماس عند نقطة التماس (a, b) هي $y - b = m(x - a)$

الاشتقاق Differentiation



إيجاد مشتقة كثيرات الحدود.

فكرة الدرس

المشتقة.

المصطلحات

يُمثِّل الاقتران $f(t) = 80t - 5t^2$ ارتفاع منطادٍ بالمتر عن سطح الأرض بعد t ثانية من إطلاقه. ما سرعة المنطاد بعد 10 ثوانٍ من إطلاقه؟

مسألة اليوم

تعرَّف في الدرس السابق كيفية إيجاد الميل أو تقديره، وهي طريقة ليست سهلة، وتحتاج إلى دقة عند رسم المماس. سأتعرَّف في هذا الدرس طريقة جبرية أسهل لإيجاد ميل منحنى الاقتران عند نقطة عليه من دون حاجة إلى رسم المماس.

عند إيجاد ميل منحنى الاقتران $y = x^2$ عند نقاطٍ مختلفة عليه باستعمال طريقة ميل المماس التي تعرَّفها سابقاً، وتنظيم القيم في الجدول الآتي، سألاحظ أن ميل المنحنى عند أي نقطة (x, y) يساوي قيمة x مضروبة في العدد 2؛ أي إن الميل m يساوي $2x$

(x, y)	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(5, 25)$
m	$-4 = -2 \times 2$	$-2 = -1 \times 2$	$0 = 0 \times 2$	$2 = 1 \times 2$	$6 = 3 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$10 = 5 \times 2$

وبالمثل، سأجد أن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^3$ عند أي نقطة (x, y) على منحناه هو $m = 3x^2$.

بوجه عام، فإن ميل منحنى الاقتران $f(x) = x^n$ عند أي نقطة (x, y) عليه هو $m = nx^{n-1}$.

مشتقة (derivative) الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند تلك النقطة، ويرمزُ إليها بالرمز $f'(x)$.

مفهوم أساسي

مشتقة اقتران القوة

- **بالكلمات:** عند اشتقاق الاقتران $f(x) = x^n$ ، فإن قوة x في المشتقة تكون أقل بواحد من قوة x في الاقتران الأصلي، وإن معامل x في المشتقة يساوي قوة x في الاقتران الأصلي.

- **بالرموز:** إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد صحيح غير سالب، فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = x^8$

$$f'(x) = 8x^{8-1}$$

$$f'(x) = 8x^7$$

قانون مشتقة القوة

بالتبسيط

2 $f(x) = x^5$

$$f'(x) = 5x^{5-1}$$

$$f'(x) = 5x^4$$

قانون مشتقة القوة

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = x^{11}$



من المعلوم أن قيم y للاقتران $f(x) = 3x^2$ تساوي 3 أمثال قيم y التي تُناظرها للاقتران $g(x) = x^2$. وعليه، فإن ميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2$ عند النقطة $(2, 12)$ يساوي 3 أمثال ميل منحنى الاقتران $g(x) = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$. وهذا يعني أن مشتقة $(3x^2)$ تساوي 3 أمثال مشتقة (x^2) ؛ أي $(3 \times 2x)$.

بوجه عام، فإن مشتقة الاقتران $f(x) = ax^n$ ، حيث a عدد حقيقي، هي $f'(x) = a \times nx^{n-1}$.

وإذا كان $f(x) = c$ اقتراناً ثابتاً، فإنه يُكتب في صورة $f(x) = cx^0$. وعليه، فإن: $f'(x) = c(0x^{0-1}) = 0$.

رموز رياضية

تُستعمل الرموز

$$\frac{dy}{dx}, f'(x), y'$$

للتعبير عن المشتقة.

مفهوم أساسي

قواعد أخرى للمشتقة

- مشتقة مضاعفات القوة: إذا كان $f(x) = ax^n$ ، حيث n عدد صحيح غير سالب، فإن $f'(x) = anx^{n-1}$.
- مشتقة الثابت: إذا كان $f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي، فإن $f'(x) = 0$ ؛ أي إن مشتقة الاقتران الثابت تساوي صفراً.

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = 2x^4$

$$f'(x) = 2(4x^{4-1})$$

$$f'(x) = 8x^3$$

قانون مشتقة مضاعف القوة

بالتبسيط

2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(3x^{3-1})$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$$

قانون مشتقة مضاعف القوة

بالتبسيط

3 $f(x) = -2x$

$$f'(x) = -2(x^{1-1})$$

$$f'(x) = -2$$

قانون مشتقة مضاعف القوة

بالتبسيط

4 $f(x) = 4$

$$f'(x) = 0$$

قانون مشتقة الثابت

أتحقق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران في ما يأتي:

a) $f(x) = 5x^{12}$

b) $f(x) = -7x^8$

c) $f(x) = 0.5x^6$

d) $f(x) = -11$

أتذكر

ميل الاقتران الثابت يساوي صفراً.

مفهوم أساسي

مشتقة المجموع ومشتقة الفرق

- **بالكلمات:** مشتقة مجموع كثير الحدود تساوي مجموع مشتقتيهما، ومشتقة الفرق بين كثير الحدود تساوي الفرق بين مشتقتيهما.
- **بالرموز:** إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، حيث $g(x)$ و $h(x)$ كثير الحدود، فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1 $f(x) = x^2 - 6x$

$$f'(x) = 2x^{2-1} - 6x^{1-1}$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

قانون مشتقة مضاعفات القوى

بالتبسيط

إرشاد

أستخدم قواعد الاشتقاق المناسبة لإيجاد المشتقة.

2 $f(x) = 5x^7 + 3x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 8$

$$f'(x) = 5(7x^{7-1}) + 3(4x^{4-1}) - \frac{3}{2}(2x^{2-1}) + 0$$

$$f'(x) = 35x^6 + 12x^3 - 3x$$

قانون مشتقة مضاعفات القوى

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد مشتقة كل من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$

b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}x^2$

ألاحظ من الأمثلة السابقة أن مشتقة الاقتران هي اقتران جديد يمثل قيمة ميل منحنى الاقتران الأصلي عند قيم مختلفة؛ لذا يمكن إيجاد ميل منحنى الاقتران عند أي نقطة عليه، بتعويض الإحداثي x لتلك النقطة باقتران المشتقة.

مثال 4

إذا كان $f(x) = 3x^2 - 18x + 5$ ، فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

1 ميل منحنى $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$.

$$f(x) = 3x^2 - 18x + 5$$

الاقتران الأصلي

$$f'(x) = 6x - 18$$

باشتقاق الاقتران

$$f'(1) = 6(1) - 18$$

بتعويض قيمة $x = 1$

$$= -12$$

بالتبسيط

إذن، ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, -10)$ هو -12

أنعلم

يستخدم الرمز $f'(a)$ للتعبير عن مشتقة $f(x)$ عندما $x = a$.

2 قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

$$f'(x) = 0$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$6x - 18 = 0$$

بتعويض قيمة المشتقة

$$6x = 18$$

بجمع 18 للطرفين

$$x = 3$$

بقسمة الطرفين على 6

إذن، قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا هي $x = 3$.

أتحقق من فهمي

إذا كان $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

(a) ميل منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

(b) قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

معلومة

السرعة اللحظية تساوي مشتقة اقتران المسافة عند لحظة ما. التسارع اللحظي يساوي مشتقة اقتران السرعة عند لحظة ما.

تعرفت سابقًا أن ميل منحنى المسافة - الزمن في لحظة ما (عند نقطة مُحددة) يساوي السرعة اللحظية عند تلك النقطة، وأن ميل منحنى السرعة - الزمن في لحظة ما يساوي التسارع اللحظي. أستطيع الآن إيجاد كل من السرعة اللحظية، والتسارع اللحظي باستعمال المشتقة بسهولة من دون حاجة إلى تقدير ميل المنحنى باستعمال المماس كما في الدرس السابق.

مثال 5

يمثل الاقتران $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسم متحرك، حيث t الزمن بالثانية.

1 أجد سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته.

السرعة هي مشتقة اقتران المسافة.

أفترض أن اقتران السرعة هو $v(t)$.

إذن، $v(t) = d'(t)$.

المطلوب هو $v(3) = d'(3)$ ، التي تمثل السرعة اللحظية عندما $t = 3$.

$$d'(t) = 1.8t^2 - 1.5$$

مشتقة اقتران المسافة

$$v(t) = d'(t) = 1.8t^2 - 1.5$$

تعريف اقتران السرعة

$$v(3) = d'(3) = 1.8(3)^2 - 1.5$$

بتعويض $t = 3$

$$= 14.7 \text{ m/s}$$

بالتبسيط

إذن، سرعة الجسم بعد 3 ثوانٍ من بدء حركته هي 14.7 m/s.

2 أجد تسارع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء حركته.

التسارع هو مشتقة اقتران السرعة.

أفترض أن اقتران التسارع هو $a(t)$.

إذن، $a(t) = v'(t)$.

المطلوب هو $a(5) = v'(5)$ ، التي تمثل التسارع عندما $t = 5$.

$$a(t) = v'(t) = 3.6t$$

مشتقة اقتران السرعة

$$a(5) = 3.6(5)$$

بتعويض $t = 5$

$$a(5) = 18$$

بالتبسيط

إذن، تسارع الجسم بعد 5 ثوانٍ من بدء حركته هي 18 m/s^2

أتحقق من فهمي

يُمثل الاقتران $d(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسمٌ متحركٌ، حيث t الزمن بالثانية. أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 3$.

أتعلم

تكون قيمة التسارع صفراً إذا كانت السرعة ثابتة.

أدرب وأحل المسائل

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

1 $f(x) = -7$

2 $g(x) = 3x^9$

3 $r(x) = -5x^2$

4 $i(x) = x^4 - 3x$

5 $v(x) = x^2 + x + 1$

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$

أجد قيمة $f'(-2)$ في كل مما يأتي:

7 $f(x) = \frac{3}{5}x^3 + x^4 - 2x + 7$

8 $f(x) = x^{99} + \sqrt{2}x$

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$

10 أجد النقطة التي يكون عندها ميل منحنى $f(x) = 2x^2 - 10$ هو 12

يُمثل الاقتران $d(t) = t^3 - 6t + 3$ المسافة (بالمتر) التي يقطعها جسمٌ متحركٌ، حيث t الزمن بالثانية.

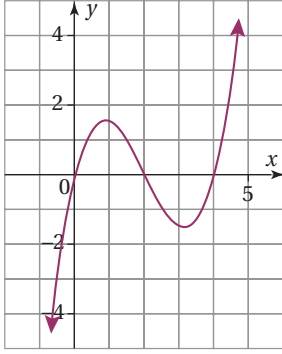
11 أجد الاقتران $v(t)$ الذي يُمثل سرعة الجسم في أي لحظة (t ثانية).

12 أجد سرعة الجسم عندما $t = 2$.

13 أجد الزمن t عندما تكون السرعة 6 m/s

14 أجد الاقتران $a(t)$ الذي يُمثل تسارع الجسم، حيث t الزمن بالثانية.

15 أجد تسارع الجسم عندما $t = 5$.



يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$.

16 أجد $f'(x)$.

17 أجد ميل منحنى الاقتران عند نقاط تقاطعه مع محور x .

18 أحدد على المنحنى النقطة التي يكون عندها الميل يساوي 1

19 أحدد على المنحنى النقطة التي يكون عندها الميل يساوي 2

20 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x) = 3x^3 + 2$ عند النقطة التي يكون إحداثي x لها 1

تقع النقطة $P(-2, b)$ على منحنى $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$.

21 أجد قيمة b .

22 أجد قيمة x التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا.

إذا كانت قيمة الميل عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلة $y = x^3 - 2ax$ ، حيث a عدد ثابت، هي -12

23 أجد قيمة الثابت a .

24 أجد قيمة ميل المنحنى عندما $x = 4$.

أجد $f'(x)$ في كل مما يأتي:

25 $f(x) = 2x(x+1)$

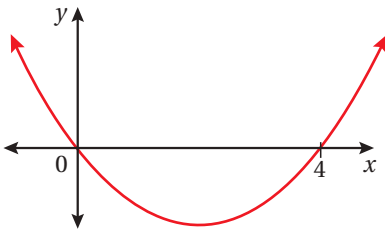
26 $f(x) = (x+2)(x+5)$

27 $f(x) = (x+3)(x-3)$

28 يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للاقتران $f(x) = kx(x-4)$ ،

حيث k عدد حقيقي. أجد قيمة k إذا كان ميل المنحنى عند النقطة

$(4, 0)$ هو 2



مهارات التفكير العليا

29 تبرير: أثبت وجود نقطتين على منحنى الاقتران $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$ ، تكون عندهما مشتقة الاقتران تساوي 4،

ثم أجد إحداثيي هاتين النقطتين، مُبرراً إجابتي.

30 نحدد: أجد قيم a, b إذا كان ميل منحنى الاقتران $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عند النقطة $(2, -3)$ هو صفرًا.

31 نحدد: أُطلقت قذيفة رأسياً إلى الأعلى، فكان ارتفاعها عن سطح الأرض h بالمتري بعد t ثانية من إطلاقها

$h(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما ارتفاع القذيفة عن الأرض عندما تكون سرعتها 98 m/s ؟

الدرس 3

القيم العظمى والصغرى

Maximum and Minimum Values



إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية لكثيرات الحدود.

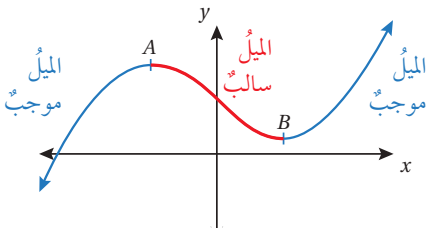
نقطة حرجة، قيمة عظمى، قيمة صغرى.

نُمثل المعادلة $d = -16t^2 + 75t + 2.5$ المسافة (بالقدم) التي قطعتها كرة بعد ركلها، حيث t الزمن بالثانية. ما أقصى ارتفاع تصله الكرة؟

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



تُسمى النقطة التي يكون عندها ميل المنحنى كثير الحدود صفرًا **النقطة الحرجة** (critical point). في الشكل المجاور، A و B نقطتان حرجتان؛ لأن ميل المنحنى عند كل منهما صفر.

تُسمى القيمة d في النقطة $A(c, d)$ التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها موجبة، وعن يمينها سالبة، **القيمة العظمى المحلية** (local maximum)؛ لأنها أكبر من القيم المجاورة لها. وتُسمى القيمة h في النقطة $B(e, h)$ التي إشارة ميل المنحنى عن يسارها سالبة، وعن يمينها موجبة، **القيمة الصغرى المحلية** (local minimum)؛ لأنها أصغر من القيم المجاورة لها.

لغة الرياضيات

يشير مصطلح (نقطة حرجة) إلى النقطة (x, y) ، ويشير مصطلح القيمة الحرجة إلى الإحداثي x للنقطة الحرجة.

أتعلم

تُستعمل برمجة جبراً لإيجاد القيم العظمى والصغرى، وذلك باختيار **Extremum** من شريط الأدوات، ثم نقر المنحنى، فنظهر إحداثيات نقاط القيم القصوى على يسار الشاشة.

مثال 1

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والصغرى للاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 4$ (إن وُجدت).

الخطوة 1: أجد القيم الحرجة؛ أي قيم x التي ميل المنحنى عندها صفر، وهي قيم تُحقق

$$f'(x) = 0$$

المشتقة الاقتران

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

بمساواة المشتقة بالصفر

بجمع 12 للطرفين

بقسمة الطرفين على 3

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

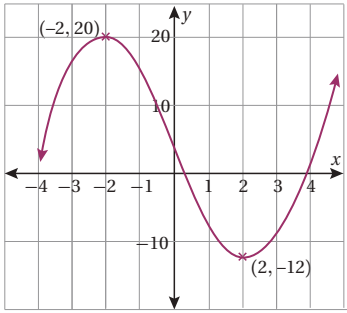
إذن، توجد نقطتان حرجتان لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ و $x = 2$ ؛ لأن مشتقة الاقتران تساوي صفرًا عند هاتين النقطتين.

الخطوة 2: لتحديد أي النقاط الحرجية يوجد عندها قيمة عظمى أو صغرى للاقتران، اختبر إشارة ميل المنحني حول كل منهما، وذلك بتعويض بعض القيم القريبة منها.

x	-2.1	-2	-1.9
$f'(x)$	1.23	0	-1.17
إشارة الميل	موجبة		سالبة

x	1.9	2	2.1
$f'(x)$	-1.17	0	1.23
إشارة الميل	سالبة		موجبة

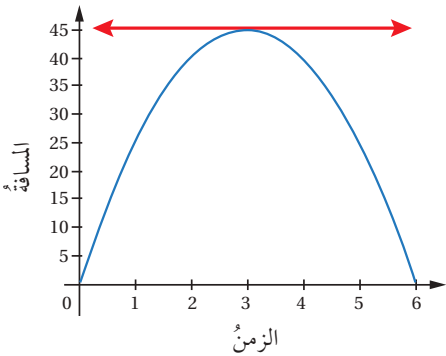
تتغير إشارة ميل المنحني حول $x = -2$ من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة عظمى عندما $x = -2$ ، هي $f(-2) = 20$ ، وتتغير إشارة ميل المنحني حول $x = 2$ من سالبة إلى موجبة؛ لذا توجد قيمة صغرى عندما $x = 2$ ، هي $f(2) = -12$.



طريقة بديلة: يمكن أيضًا تحديد إذا كانت النقطة الحرجة يوجد عندها قيمة عظمى أو صغرى للاقتران بتمثيل منحني الاقتران بيانيًا. فعند تمثيل منحني الاقتران $f(x)$ بيانيًا في الشكل المجاور، فإن النقطة $(-2, 20)$ تبدو أعلى من النقاط المجاورة لها على المنحني، وبذا تكون القيمة العظمى تساوي 20 وتبدو النقطة $(2, -12)$ أخفض من النقاط المجاورة لها، وبذا تكون القيمة الصغرى تساوي -12.

أتحقق من فهمي

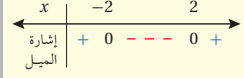
أجد القيم العظمى والصغرى للاقتران $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إن وجدت).



يمثل الإحداثي الصادي للنقطة التي يتغير عندها اتجاه حركة الجسم من الصعود إلى الهبوط قيمة عظمى لمنحني المسافة - الزمن؛ لأن مشتقة المنحني عند تلك النقطة تساوي صفرًا (المماس أفقي)؛ لذا يمكن استعمال المشتقة لتحديد النقطة التي عندها أقصى مسافة أو أقصى ارتفاع يبلغه الجسم.

أتعلم

يمكن استعمال خط الأعداد لاختبار إشارة ميل المنحني



أفكر

لماذا لا توجد قيم عظمى وصغرى للاقتران الثابت؟
لماذا لا توجد قيم عظمى وصغرى للاقتران الخطي المعروف على مجموعة الأعداد الحقيقية؟

مثال 2

يُمثِّل الاقتران $h(t) = 1 + 25t - 5t^2$ ارتفاع كرة عن سطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من ركلها. **1** أجد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ من ركلها.

يُمثِّل الاقتران المُعطى $h(t)$ ارتفاع الكرة (المسافة الرأسية). ومن المعروف أنَّ مشتقة اقتران المسافة تساوي اقتران السرعة.

لإيجاد سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ، أَعوِّض $t = 3$ في $h'(t)$.

$$h(t) = 1 + 25t - 5t^2$$

$$h'(t) = 25 - 10t$$

$$h'(3) = 25 - 10(3)$$

$$= -5$$

اقتران الارتفاع

مشتقة اقتران الارتفاع

بتعويض $t = 3$ في $h'(t)$

بالتبسيط

إذن، سرعة الكرة بعد 3 ثوانٍ هي -5 m/s

2 أجد أقصى ارتفاع تصله الكرة.

يُمثِّل أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة قيمة عظمى لاقتران الارتفاع $h(t)$.

لإيجاد القيمة العظمى، أحدد القيم التي تُحقِّق المعادلة $h'(t) = 0$.

$$h'(t) = 25 - 10t$$

$$25 - 10t = 0$$

$$25 = 10t$$

$$t = 2.5$$

مشتقة اقتران الارتفاع

بمساواة المشتقة بالصفر

بجمع $10t$ للطرفين

بقسمة الطرفين على 10



تتغير إشارة ميل المنحنى من موجبة إلى سالبة؛

لذا توجد قيمة عظمى عند $t = 2.5$

إذن، تصل الكرة أقصى ارتفاع عندما $t = 2.5 \text{ s}$ ، وقيمة هذا الارتفاع هي $h(2.5)$.

$$h(2.5) = 1 + 25(2.5) - 5(2.5)^2$$

$$= 32.25$$

بتعويض $t = 2.5$ في $h(t)$

بالتبسيط

إذن، أقصى ارتفاع تصله الكرة هو 32.25 m

أتحقق من فهمي

يُمثِّل الاقتران $h(t) = 20t - 5t^2$ ارتفاع حجرٍ عن سطح الأرض بالمتري بعد t ثانية من قذفه إلى الأعلى.

(a) أجد سرعة الحجر بعد ثائيتين من قذفه. **(b)** أجد أقصى ارتفاع يصله الحجر.

أَنَلَم

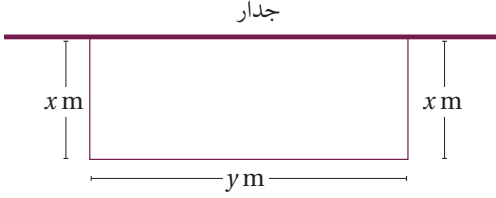
سرعة الكرة هي 5 m/s ، والإشارة السالبة تدلُّ على أنَّ الكرة تغير اتجاه حركتها فأصبحت تهبط نحو الأرض، وأنَّ ارتفاعها عن الأرض في تناقص.

أَنَلَم

بما أنَّ مشتقة اقتران المسافة هي اقتران السرعة، فإنَّ القيم التي تكون عندها مشتقة اقتران المسافة صفرًا هي القيم التي تنعدم عندها السرعة.

إذا مثل الاقتران $f(x)$ مساحة منطقة ما، فإن القيمة الكبرى للمساحة تساوي القيمة العظمى للاقتران، والقيمة الصغرى للمساحة تساوي القيمة الصغرى للاقتران.

مثال 3: من الحياة



جدار: لدى مزارع 32 m من السياج، أراد أن يُسَيِّجَ به حظيرةً مستطيلةً، طولها y مترًا، وعرضها x مترًا، بجانب جدار يكون أحد أضلاع هذه الحظيرة.

1 أبين أن الاقتران $A(x) = x(32-2x)$ يُمثل مساحة الحظيرة.

طول السياج 32 m؛ لذا، فإن $x + y + x = 32$

إذن، طول الحظيرة $y = 32 - 2x$ ، ومساحتها $x(32 - 2x)$ متر مربع.

2 أجد $A'(x)$.

$$A(x) = x(32-2x)$$

$$A(x) = 32x - 2x^2$$

$$A'(x) = 32 - 4x$$

اقتران المساحة

بتوزيع الضرب على الطرح

مشتقة اقتران المساحة

3 أستخدم المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الحظيرة أكبر ما يمكن.

لإيجاد قيمة x ، أحل المعادلة $A'(x) = 0$:

$$32 - 4x = 0$$

$$32 = 4x$$

$$x = 8$$

بمساواة المشتقة بالصفر

بجمع $4x$ للطرفين

بقسمة الطرفين على 4

أجد أكبر مساحة ممكنة للحظيرة.

أعوّض قيمة $x = 8$ بالاقتران الذي يُمثل مساحة الحظيرة.

$$A(8) = 8(32-2(8))$$

$$= 128$$

بتعويض $x = 8$ في $A(x)$

بالتبسيط

إذن، أكبر مساحة للحظيرة 128 m^2 ، وهي تنتج عندما يكون عرض الحظيرة 8 m، وطولها 16 m

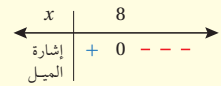
أتذكر

تُسمى قيم x التي تحقق المعادلة $f'(x) = 0$ قيم حرجة لمنحنى الاقتران $f(x)$.

أنعلم

تتغير إشارة ميل المنحنى من موجبة إلى سالبة؛ لذا توجد قيمة عظمى عند

$$x = 8$$





أتحقق من فهمي

يُبين الشكل المجاور صورةً مستطيلة الشكل، محيطها 72 cm ، ومساحتها $A \text{ cm}^2$.

(a) أبين أن الاقتران $A(x) = 36x - x^2$ يُمثل مساحة الصورة.

(b) أجد $A'(x)$.

(c) أستمّل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة الصورة أكبر ما يُمكن.

(d) أجد أكبر مساحة ممكنة للصورة.

أتدرب وأحل المسائل

أستمّل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والصغرى لكلٍّ من الاقترانات الآتية (إن وُجدت):

1 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

2 $f(x) = x^2 + 6x - 3$

3 $f(x) = 1 + 5x - x^2$

4 $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

5 $f(x) = 18x^2 - x^4$

6 $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

7 $f(x) = x^3 - 12x - 4$

8 $f(x) = 3x^2$

9 $f(x) = x^3 - 2x + 4$

10 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

يُمثل الاقتران $h(t) = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ ارتفاع سهم عن سطح الأرض بالمتّر بعد t ثانية من إطلاقه.

11 أجد سرعة السهم بعد 3 ثوانٍ.

12 أستمّل المشتقة لإيجاد أقصى ارتفاع يصله السهم.

13 يُمثل الاقتران $A(x) = x(50 - x)$ مساحة مستطيل، حيث x الطول بالمتّر. ما أكبر مساحة ممكنة للمستطيل؟

14 للاقتران $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاث نقاط حرجية. أجد إحداثيات هذه النقاط، مُصنِّفاً إيَّها إلى عظمى، وصغرى.

15 أجد قيمة الثابت k إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمة حرجية عندما $x = 3$.



لدى مزارع 180 m من الشَّباك، أراد أن يصنع منها حظائر لأغنامه، طول كل منها x متراً، وعرضها y متراً كما في الشكل المجاور.

16 أبين أن العلاقة بين x و y هي $y = 18 - 1.2x$

17 أبين أن الاقتران $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثل المساحة الكلية للحظائر.

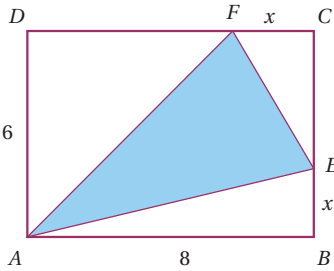
18 أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل المساحة الكلية للحظائر أكبر ما يمكن.

19 أجد أكبر مساحة كلية ممكنة للحظائر.

20 برهان: أثبت أن الاقتران $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليس له قيم حرجية.

مهارات التفكير العليا

21 تبرير: أجد قيمتي الثابتين a, b إذا كان للاقتران $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمة حرجية عند النقطة $(1, 3)$ ، ثم أحدد نوع القيمة الحرجية، مُبرِّراً إجابتي.

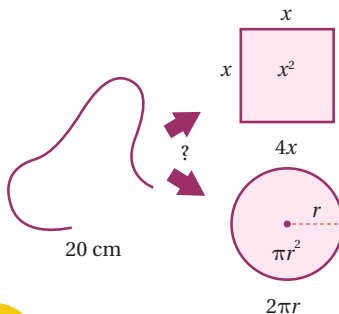


يُبين الشكل المجاور المثلث AFE الذي تقع رؤوسه على أضلاع المستطيل $ABCD$.

22 اعتماداً على القياسات المعطاة في الشكل، أبين أن الاقتران

$$H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$$

23 أستعمل المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل مساحة المثلث AFE أصغر ما يمكن.

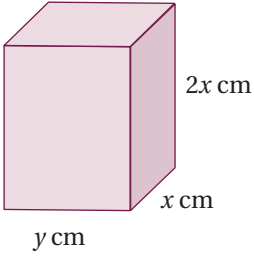


24 تحد: سلك طولُه 20 cm، يراود قصُّه لعمل مُربَّع ودائرة. أحدد موقع القص بحيث يكون مجموع مساحتي المُربَّع والدائرة أصغر ما يمكن.

اختبار نهاية الوحدة

8 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x) = 4x^3 + 2$

عند النقطة التي إحداثي x لها -1



يُبين الشكل المجاور قالباً يُستعمل

لصنع لبن البناء، وتبلغ مساحة

سطحه الكلية 600 cm^2

9 أبين أن الاقتران

$V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$ يمثل حجم القالب.

10 أستمع المشتقة لإيجاد قيمة x التي تجعل الحجم

أكبر ما يمكن.

11 أجد أكبر حجم ممكن للقالب.

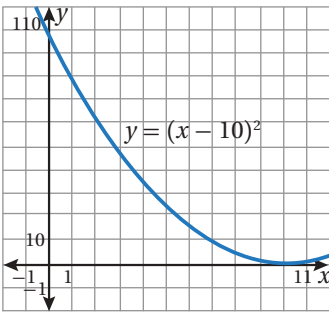
12 يمثل الاقتران $d(t) = t^2 + 1$ المسافة بالمتري التي

يقطعها جسم متحرك، حيث t الزمن بالثانية. أجد السرعة

بعد ثانيتين، ثم أجد الزمن t عندما تبلغ السرعة 6 m/s

أطلقت سيارة سميّة جرس إنذار لتعبئة الوقود، فتوجّهت إلى

محطة الوقود.



يمثل المنحنى في

الشكل الآتي العلاقة بين

الزمن والمسافة المتبقية

حتى وصلت سميّة إلى

المحطة.

13 أجد سرعة السيارة بعد ثانيتين من انطلاق جرس تعبئة

الوقود.

14 أجد سرعة السيارة بعد 10 ثوان.

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 ميل منحنى الاقتران $f(x) = 3x - 1$ عند النقطة $x = 5$ هو:

- a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -1 d) 0

2 إذا كان $f(x) = x(2x + 1)$ ، فإن $f'(x)$ يساوي:

- a) x b) $2x + 1$

- c) $2x^2 + x$ d) $4x + 1$

3 قيمة x التي عندها قيمة عظمى للاقتران

$f(x) = (x-2)(x-3)^2$ هي:

- a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$

- c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

4 إذا مثل الاقتران $d(t) = t^2$ المسافة التي قطعها جسم

متحرك، حيث t الزمن بالثانية، فإن سرعة الجسم عندما

$t = 1$ هي:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

5 أكبر قيمة لسرعة جسم متحرك يسير بسرعة تعطى

بالاقتران $v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ ، حيث t الزمن

بالثانية، هي:

- a) 3 b) 4

- c) 8 d) 9

6 إذا كان $h(x) = 2x^2 + x$ ، فأجد $h'(x)$ ، ثم أبين أن

$x(1 + h'(x)) = 2h(x)$.

7 إذا وقعت النقطة $P(-1, c)$ على منحنى الاقتران

$f(x) = 5x^2 + 2$ ، فأجد قيمة c ، ثم أجد إذا كان الميل

موجباً أو سالباً عند النقطة P .

اختبار نهاية الوحدة

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

15 $f(x) = 2\pi^3$

16 $f(x) = x^8$

17 $f(x) = -3x^4$

18 $f(x) = x$

19 $f(x) = 1 - 2x$

20 $f(x) = 4 - 5x^2 + x^3$

أستعمل المشتقة لإيجاد القيم العظمى والصغرى لكل من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

21 $f(x) = 17$

22 $f(x) = 5x + 4$

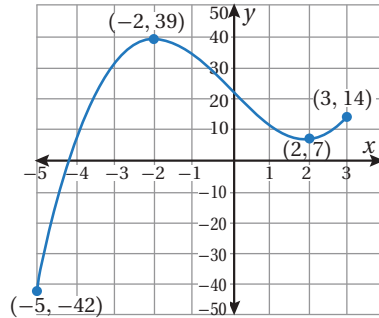
23 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

24 $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$

25 تمثل العلاقة $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافة بالمتري التي يقطعها جسم متحرك، حيث t الزمن بالثانية. ما الزمن الذي تساوي عنده السرعة 14.7 m/s ؟

26 أجد قيمة الثابت k إذا كان للاقتران $f(x) = kx - x^3$ نقطة حرجة عندما $x = -1$.

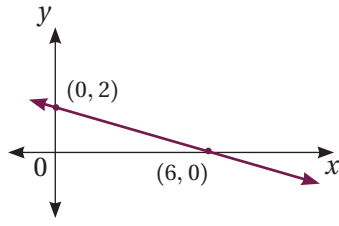
اعتمادًا على التمثيل البياني الآتي:



27 أحدد الفترة (الفترات) التي يكون عندها ميل المنحنى موجبًا.

28 أحدد الفترة (الفترات) التي يكون عندها ميل المنحنى سالبًا.

29 أحدد النقطة (النقاط) التي يكون عندها ميل المنحنى صفرًا.



30 إذا كان المستقيم في الشكل المجاور هو منحنى الاقتران $f(x)$ ، فأجد $f'(x)$.

تدريب على الاختبارات الدولية

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

31 جميع قيم x التي عندها قيم عظمى أو صغرى للاقتران $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هي:

a) $-1, 0, 1$

b) $-1, 0$

c) $0, 1$

d) $-1, 1$

32 عدد النقاط الحرجة للاقتران $f(x) = (x-3)^9$ هو:

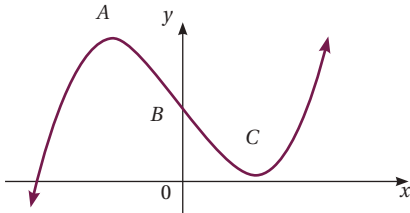
a) 1

b) 2

c) 8

d) 9

يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 12x + 17$ الذي له قيمة عظمى عند النقطة A ، وقيمة صغرى عند النقطة C ، ويقطع محور y عند النقطة B .



33 أجد $f'(x)$.

34 أجد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة B .

35 أجد إحداثيي كل من النقطتين A و C .

ما أهمية هذه
الوحدة؟

لفهم تأثير قوة ما في جسم، يجب تحديد كل من مقدار هذه القوة، واتجاهها، في ما يُعرف بالمتجه.

في هذه الوحدة، سأتعلم كثيرًا عن المتجهات وتطبيقاتها الحياتية، من مثل تحديد تأثير الرياح في حركة السفن الشراعية.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- المتجهات، وكيفية تمثيلها على المستوى الإحداثي.
- جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- التفسير الهندسي للمتجهات، وبعض التطبيقات الحياتية عليها.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

تعلمت سابقًا:

- ✓ حل المعادلات الخطية بمتغيرين.
- ✓ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- ✓ إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- ✓ النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة.

فكرة المشروع

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذ مشروعنا الخاصِّ باكتشافِ استعمالاتِ للمتجهاتِ في الخرائطِ الجغرافيةِ بناءً على ما ستعلَّمُهُ في هذه الوحدة.

الموادُّ والأدوات

شبكة إنترنت، برمجة جيو جيرا.



خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أبحثُ في شبكة الإنترنت عن صورةٍ لخريطة الوطن العربيِّ أو الشرق الأوسطِ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍ بجهازِ الحاسوبِ.
- 2 أستمعلُ برمجة جيو جيرا لإيجادِ إحداثياتِ بعضِ العواصمِ العربيةِ باتباعِ الخطواتِ الآتية:
 - أنقرُ أيقونةَ Image من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظْتُها.
 - أظهرُ الشبكةَ فوقَ الصورةِ بنقرِ الزرِّ الأيمنِ لفأرةِ الحاسوبِ. ثمَّ أختارُ (الإعداداتِ) Settings، ومنها أختارُ Background Image.
 - أجدُ إحداثياتِ أيِّ عاصمةٍ عربيةٍ على الخريطةِ باختيارِ أيقونةِ A. من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ موقعَ العاصمةِ على الصورةِ، فتظهرُ الإحداثياتُ على الشريطِ الجانبيِّ. بعدَ ذلكَ أجدُ مواقعَ العواصمِ بدقةٍ على الخريطةِ، مستعيناً بخرائطٍ أخرى تفصيليةٍ أجدُّها على شبكة الإنترنت.
- 3 أرسُمُ متجهاً بينِ أيِّ عاصمتينِ بنقرِ أيقونةِ المتجهِ من شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ عندَ موقعِ العاصمةِ التي تُمثِّلُ نقطةَ بدايةِ المتجهِ، ثمَّ عندَ موقعِ العاصمةِ الأخرى، فتظهرُ الصورةُ الإحداثيةُ للمتجهِ على الشريطِ الجانبيِّ.
- 4 أجدُ المسافةَ على الخريطةِ بينَ مدينةِ عمَّانَ وأربعِ عواصمٍ عربيةٍ باستعمالِ مقدارِ المتجهِ، ثمَّ أقدِّرُها بالمسافاتِ الحقيقيةِ، وأكتبُ مقياسَ الرسمِ، مُنظِّماً النتائجَ في جدولٍ.
- 5 أجدُ إحداثياتِ مدينةِ عمَّانَ وأربعِ عواصمٍ عربيةٍ، ثمَّ أجدُ اتجاهَ كلِّ منها بالنسبةِ إلى مدينةِ عمَّانَ باستعمالِ الضربِ القياسيِّ للمتجهاتِ.
- 6 أستمعلُ خاصيةَ طباعةِ الشاشة (Print Screen) للاحتفاظِ بصورةِ الخريطةِ التي تظهرُ عليها المتجهاتُ، ثمَّ أستمعلُها عندَ عرضِ النتائجِ.

عرض النتائج:

أعدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضاً تقديمياً (بوربوينت) نُبيِّنُ فيه ما يأتي:

- خطواتُ تنفيذِ المشروعِ مُوضَّحةً بالصورِ، والحساباتُ التي أجرَيْتها في خطواتِ المشروعِ.
- المعلوماتُ الجديدةُ التي تعرَّفْتُها في أثناءِ العملِ بالمشروعِ، والمُقترَحُ لتوسعةِ المشروعِ.

الدرس 1

المتجهات في المستوى الإحداثي Vectors in the Coordinate Plane

فكرة الدرس



المصطلحات



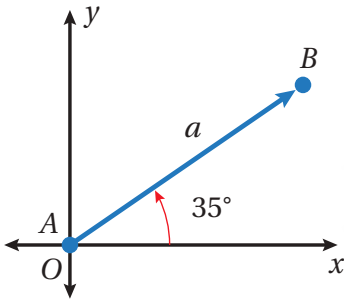
مسألة اليوم



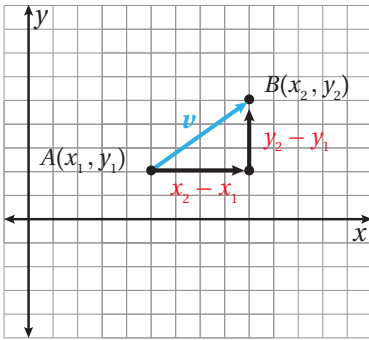
تعرّف المتجه وتمثيله في المستوى الإحداثي. إيجاد مقدار المتجه.

المركبة الأفقية، المركبة الرأسية، الصورة الإحداثية، الوضع القياسي، مقدار المتجه، السرعة المتجهة.

قطع يخت سياحيّ مسارًا مستقيمًا في البحر الأحمر، مُنطلقًا من مدينة العقبة باتجاه الجنوب الغربيّ من مدينة طابا المصرية. هل يُمكن وصف اتجاه هذا اليخت، وتحديد المسافة التي قطعها باستخدام إحداثيّ هاتين المدينتين فقط؟



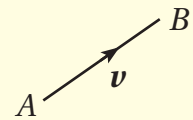
درست في الفيزياء تمثيل المتجهات في صورة سهم ينطلق من نقطة إسناد، مثل نقطة الأصل، وبطول يُحدده مقياس رسم مناسب، واتجاه تُحدده الزاوية θ التي يصنعها السهم مع محور مرجعيّ، مثل محور x الموجب عكس عقارب الساعة. ولأن استعمال مقياس الرسم قد لا يكون دقيقًا في بعض الأحيان؛ فإنه يتعيّن استعمال طريقة أكثر دقة لتمثيل المتجهات.



يُمكن تمثيل المتجه $(\vec{AB})$ في المستوى الإحداثي في صورة قطعة مستقيمة تمتد من نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ إلى نقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ ، وفي اتجاه يُحدده رمز السهم كما في الشكل المجاور.

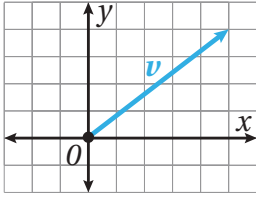
رموز رياضية

يُرمز إلى المتجه الذي نقطة بدايته A ، ونقطة نهايته B بالرمز $\vec{AB}$ أو بالرمز $\vec{v}$ مكتوبًا بالخط الغامق، ويُرمز إليه أيضًا بالرمز $\vec{v}$ ، وبخاصة عند كتابته بالقلم؛ نظرًا إلى صعوبة كتابته بخط غامق.



تُسمى المسافة الأفقية بين نقطة بداية المتجه ونقطة نهايته **المركبة الأفقية** (horizontal component)، وتساوي $(x_2 - x_1)$ ، وتُسمى المسافة الرأسية بينهما **المركبة الرأسية** (vertical component)، وتساوي $(y_2 - y_1)$.

يُمْكِنُ كتابةُ المتجهِ بالصورة الإحداثية (coordinate form) بدلالةِ مُركَّبَيْهِ الأفقيةِ والرأسيّةِ كما يأتي:



$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle = \langle a, b \rangle$$

إذا كانت نقطةُ بدايةِ المتجهِ هي نقطةُ الأصلِ 0، كما في الشكلِ المجاور، فإنَّه يكونُ في **الوضع القياسي** (standard position).

رموز رياضية

يُستعملُ الرمز $\langle a, b \rangle$ أو $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ لكتابةِ المتجهِ بصورتهِ الإحداثية.

مثال 1

اعتمادًا على الشكلِ المجاور، أكتبُ المتجهاتِ الآتيةَ بالصورة الإحداثية:

1 $\overrightarrow{AB}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هي $A(1, 2) = (x_1, y_1)$

ونقطةُ نهايتهِ هي $B(3, 5) = (x_2, y_2)$

$$x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 5 - 2 = 3$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3 \rangle \text{، إذن،}$$

2 $\overrightarrow{BC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هي $B(3, 5)$ ، ونقطةُ نهايتهِ هي $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

$$y_2 - y_1 = 3 - 5 = -2$$

$$\overrightarrow{BC} = \langle 2, -2 \rangle \text{، إذن،}$$

3 $\overrightarrow{DC}$

نقطةُ بدايةِ المتجهِ هي $D(5, 1)$ ، ونقطةُ نهايتهِ هي $C(5, 3)$

$$x_2 - x_1 = 5 - 5 = 0$$

$$y_2 - y_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\overrightarrow{DC} = \langle 0, 2 \rangle \text{، إذن،}$$

طريقةٌ بديلةٌ

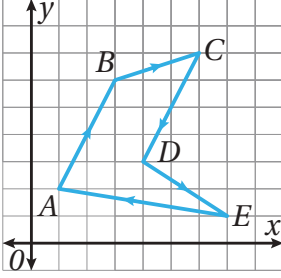
لانتقالٍ من النقطةِ A إلى النقطةِ B، أتحركُ وحدتين إلى اليمين، وثلاثَ وحداتٍ إلى الأعلى.

أتعلّم

يُعبرُ عن الانتقالِ إلى اتجاهِ اليسارِ أو اتجاهِ الأسفلِ باستعمالِ الأعدادِ السالبةِ.

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب المتجهات الآتية بالصورة الإحداثية:



a) $\vec{EA}$

b) $\vec{CD}$

c) $\vec{AB}$

d) $\vec{DE}$

e) $\vec{BC}$

f) $\vec{CB}$

مقدار المتجه (magnitude) هو كمية قياسية تُمثل طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي بداية المتجه ونهايته.

فإذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ هي نقطة بداية v ، و $P_2(x_2, y_2)$ هي نقطة نهايته، فإنه يُمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد الصيغة الآتية لمقدار المتجه $|v|$:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أتعلم

يُرمز إلى مقدار المتجه v بالرمز $|v|$

مفهوم أساسي

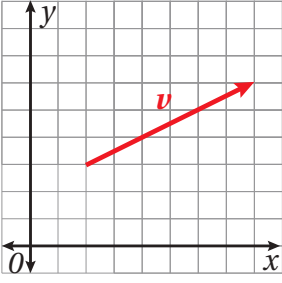
إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ هي نقطة بداية المتجه v ، و $P_2(x_2, y_2)$ هي نقطة نهايته، فإنه يُمكن إيجاد مقدار المتجه $|v|$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كان المتجه v مكتوبًا بالصورة الإحداثية $v = \langle a, b \rangle$ ، فإنه يُمكن إيجاد مقداره باستعمال الصيغة الآتية:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 2



1 أجد مقدار المتجه v في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أحدد إحداثيات كل من نقطة بداية المتجه، ونقطة نهايته.

إحداثيا نقطة بداية المتجه $(2, 3)$ ، وإحداثيا نقطة نهايته $(8, 6)$.

الخطوة 2: أعوض الإحداثيات بصيغة مقدار المتجه.

$$|v| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغة مقدار المتجه}$$

$$= \sqrt{(8 - 2)^2 + (6 - 3)^2} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \sqrt{36 + 9} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= 3\sqrt{5} \quad \text{بالتبسيط}$$

2 أجد مقدار المتجه $\vec{AB} = \langle 4, -3 \rangle$

المتجه مكتوب بالصورة الإحداثية، إذن:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{صيغة مقدار المتجه}$$

$$= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 5 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتحقق من فهمي

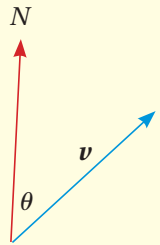
أجد مقدار كل متجه مما يأتي:

a) $\vec{AB} = \langle -1, 4 \rangle$

b) $\vec{CD} = \langle 5, -7 \rangle$

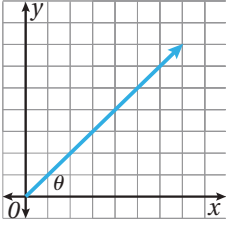
أتعلم

يُمكن أيضًا التعبير عن اتجاه المتجه بدلالة اتجاهه من الشمال.



يُمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد اتجاه المتجه، وذلك باستعمال المثلث قائم الزاوية الذي يمثل المتجه وترًا فيه.

مثال 3



أَجِدْ اتجاه $\vec{AB}$ في الشكل المجاور.

الخطوة 1: أجد مقدار المتجه.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

صيغة مقدار المتجه

$$= \sqrt{(7)^2 + (7)^2}$$

بالتعويض

$$= 7\sqrt{2}$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد اتجاه $\vec{AB}$

أستعمل نسبة الظل في المثلث قائم الزاوية الذي يُمثل $\vec{AB}$ وترًا فيه:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

استعمال نسبة الظل لإيجاد الزاوية

$$= \frac{7}{7} = 1$$

بالتعويض

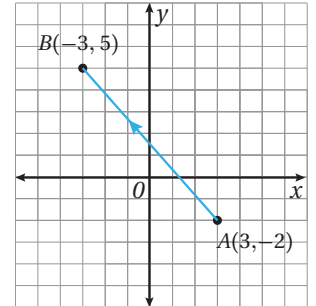
$$\theta = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

باستعمال معكوس الظل

إذن، اتجاه $\vec{AB}$ هو 45° مع الأفقي.

أتحقق من فهمي

أجد اتجاه $\vec{AB}$ في الشكل المجاور.

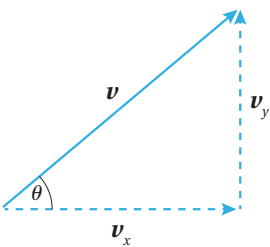


السرعة المتجهة (velocity) هي سرعة في اتجاه مُحدَّد يُمكنُ تمثيلها بمتجه. في الشكل

المجاور، يُمثل المتجه $\vec{v}$ السرعة المتجهة لجسم تحرك في مسارٍ مستقيم، فصنع زاوية قياسها

θ مع محور x الموجب، وقد مثل مقدار المتجه $|\vec{v}|$ سرعة هذا

الجسم.



تُمثل $\vec{v}_x$ المركبة الأفقية للسرعة المتجهة، وتُمثل $\vec{v}_y$ المركبة

الرأسية لهذه السرعة، حيث: $\vec{v} = \langle \vec{v}_x, \vec{v}_y \rangle$

يُمكنُ استعمالُ النسبِ المثلثية لكتابة المُركبتين الأفقية والرأسية للسرعة المتجهة بدلالة الزاوية θ التي تصنعها السرعة المتجهة مع محور x الموجب كما يأتي:

$$v_x = |v| \cos \theta$$

$$v_y = |v| \sin \theta$$

عندئذٍ، يُمكنُ كتابة السرعة المتجهة بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

أتعلم

قد يُمثَّل المتجه أيضًا مسافة متجهة، أو قوة متجهة.

مثال 4: من الحياة



كرة قدم: ركل ريان كرة بسرعة 25 m/s ، كما في الشكل المجاور، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي. أكتب المتجه الذي يُمثل السرعة المتجهة للكرة بالصورة الإحداثية. أرسم شكلًا مبسطًا يعبر عن المسألة، بحيث يكون فيه $|v| = 25$ و $\theta = 40^\circ$

$$v = \langle |v| \cos \theta, |v| \sin \theta \rangle$$

$$v_x = |v| \cos \theta \text{ و } v_y = |v| \sin \theta$$

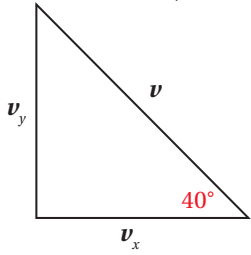
$$= \langle 25 \cos 40^\circ, 25 \sin 40^\circ \rangle$$

بالتعويض

$$= \langle 25 \times 0.7660, 25 \times 0.6428 \rangle \quad 40^\circ \text{ النسب المثلثية للزاوية}$$

بالتبسيط

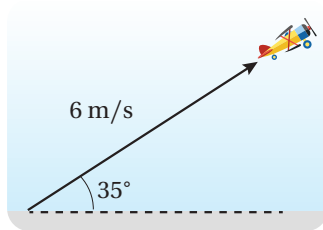
$$= \langle 19.15, 16.07 \rangle$$



$$v = \langle 19.15, 16.07 \rangle \text{ إذن،}$$

هو المتجه الذي يُمثل سرعة الكرة.

أتحقق من فهمي



اللاعب: أقلعت طائرة تتحكم فيها ميساء عن بُعد، بزاوية قياسها 35° عن سطح الأرض، وبسرعة 6 m/s كما في الشكل المجاور. أكتب المتجه الذي يُمثل السرعة المتجهة للطائرة.



أَكْتُبْ كُلَّ مَتَجِهٍ عُلِّمَتْ نَقَطَتَا بَدَايَتِهِ وَنَهَايَتِهِ فِي مَا يَأْتِي بِالصُّورَةِ الْإِحْدَائِيَّةِ، ثُمَّ أَجِدْ مَقْدَارَهُ:

1 $(2, 5), (4, -1)$

2 $(-4, 7), (-3, 0)$

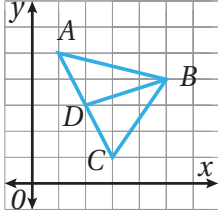
3 $(6, -2), (8, 1)$

4 $(4, -9), (3, -5)$

5 $(-1.5, 3), (0.5, -4)$

6 $(-6, -\frac{2}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$

الشَّكْلُ الْمَجَاوِرُ، أَكْتُبْ كُلًّا مِنْ الْمَتَجِهَاتِ الْآتِيَةِ بِالصُّورَةِ الْإِحْدَائِيَّةِ:



7 $\vec{AB}$

8 $\vec{DB}$

9 $\vec{CB}$

10 $\vec{CA}$

11 $\vec{AC}$

12 $\vec{DA}$

13 فِي السُّؤَالِ السَّابِقِ، أُبَيِّنُ أَنَّ $|\vec{AD}| = |\vec{DC}|$. مَاذَا أَسْتَتِجُّ مِنْ مَوْجِعِ النِّقْطَةِ D عَلَى الْقِطْعَةِ الْمُسْتَقِيمَةِ $\vec{AC}$ ؟

أَجِدْ مَقْدَارَ كُلِّ مَتَجِهٍ مِمَّا يَأْتِي:

14 $\langle 2, -6 \rangle$

15 $\langle 7, -8 \rangle$

16 $\langle -1, -1 \rangle$

17 $\langle 3, 5 \rangle$

18 $\langle 0, 0 \rangle$

19 $\langle 2, 9 \rangle$

إِذَا كَانَتْ M هِيَ نَقْطَةُ مَتَصِفِ $\vec{FG}$ ، حَيْثُ $F(4, 2)$ وَ $G(2, 6)$ ، وَكَانَتْ O هِيَ نَقْطَةُ الْأَصْلِ، فَأَكْتُبْ كُلَّ مَتَجِهٍ مِمَّا يَأْتِي بِالصُّورَةِ الْإِحْدَائِيَّةِ:

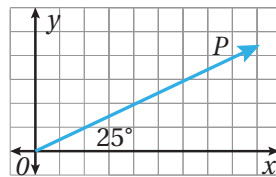
20 $\vec{FG}$

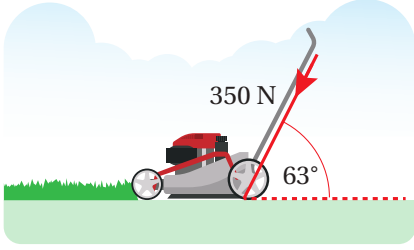
21 $\vec{GF}$

22 $\vec{OM}$

23 $\vec{MG}$

24 عُبِّرْ عَنْ اتِّجَاهِ الْمَتَجِهِ P فِي الشَّكْلِ الْمَجَاوِرِ بِطَرِيقَتَيْنِ.





25 **فيزياء:** تدفع نور عربة بقوة مقدارها 350N، وبزاوية قياسها 63°

قياسها 63° مع المحور الأفقي.

أكتب متجه القوة بالصورة الإحداثية.

26 **حيوانات:** أكتب السرعة المتجهة لثعلب يطارد أرنبًا على منحدر بالصورة الإحداثية إذا كانت سرعته الأفقية

$$v_x = 27 \text{ km/h} \text{ وسرعته الرأسية } v_y = 25 \text{ km/h}$$

27 أكتب المتجه v بالصورة الإحداثية إذا كان $|v| = 27$ ، وصنع زاوية مقدارها 90° مع محور x .

28 أكتب المتجه v بالصورة الإحداثية إذا كان $|v| = 10$ ، وصنع زاوية مقدارها 320° مع محور x .

29 خرج عبد الرحمن من منزله، وسار بخط مستقيم شرقًا إلى المسجد مسافة 248 m، ثم خرج منه مرة أخرى، وسار

بخط مستقيم جنوبًا نحو منزل صديقه يحيى مسافة 562 m. أعبّر عن المسار بين منزل عبد الرحمن ومنزل صديقه

على شكل متجه بالصورة الإحداثية. (إرشاد: البعد بين نقطتين هو أقصر مسافة بينهما).

مهارات التفكير العليا

22 **تحديد:** إذا كان $|AB| = \sqrt{13}$ حيث $A(1, 2)$ نقطة بدايته، والنقطة $B(3, y)$ نقطة نهايته، فأجد إحداثيي النقطة B ، مُبرّرًا

إجابتي

23 **تبرير:** ما مجموعة قيم b التي يكون عندها مقدار المتجه $\langle b, 4 \rangle$ يساوي 5؟ أبرّر إجابتي.

24 **أكتشف الخطأ:** حسب كل من ناصر وليلى مقدار المتجه $\langle -1, 6 \rangle = v$ فكانت إجابتهما كما يلي:

ليلى

$$|v| = \sqrt{35}$$

ناصر

$$|v| = 37$$

أيهما إجابته صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

25 **مسألة مفتوحة:** أرسم متجهًا على المستوى الإحداثي، ثم أكتبه بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

جمع المتجهات وطرحها Adding and Subtracting Vectors

إجراء العمليات على المتجهات.

فكرة الدرس



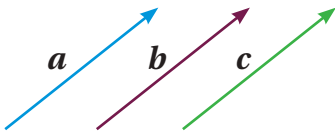
المصطلحات



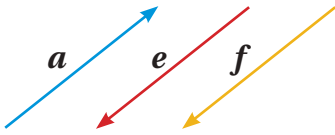
مسألة اليوم



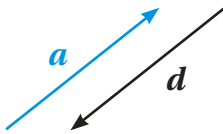
المتجهات المتساوية، المتجهات المتوازية، معكوس المتجه، المحصلة.
بدأت طائرة رحلتها نحو الشمال بسرعة مقدارها 450 km/h، لكنها واجهت رياحاً شرقية سرعتها 60 km/h، فأخذت الطائرة تنحرف نحو اليسار. كيف يمكن لِرَبَّانِ الطائرة أن يُعَدِّلَ اتجاهها وسرعتها ليصل إلى وجهته من دون تأخير؟



المتجهان المتساويان (equal vectors) هما متجهان لهما نفس الاتجاه والمقدار. ففي الشكل المجاور، المتجهان a, b, c متساوية، وبالرموز: $a = b = c$.

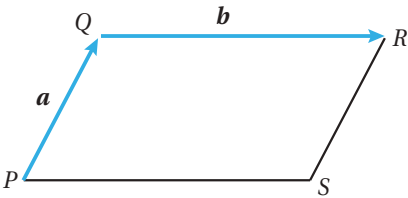


المتجهان المتوازيان (parallel vectors) هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه. ففي الشكل المجاور، المتجهان a, e, f متوازيان، وبالرموز: $a \parallel e \parallel f$.



معكوس المتجه (opposite vectors) هو متجه له نفس مقدار متجه آخر، لكنه في اتجاه مُعَاكِسٍ لَهُ. ففي الشكل المجاور، المتجه d معكوس المتجه a ، وبالرمز: $-a$ ؛ أي إن $d = -a$.

مثال 1



في الشكل المجاور، $QRSP$ متوازي أضلاع، فيه $\vec{PQ} = a$ ، و $\vec{QR} = b$. أُعْبِرْ عَنْ كُلِّ مَمَّا يَأْتِي باستعمال المتجهين a و b :

1 $\vec{SR}$

$$\vec{SR} = a$$

متجه مواز ومساو للمتجه $\vec{PQ}$

2 $\vec{SP}$

$$\vec{SP} = -b$$

متجه مواز ومعكوس للمتجه $\vec{QR}$

3 $\vec{QP}$

$$\vec{QP} = -a$$

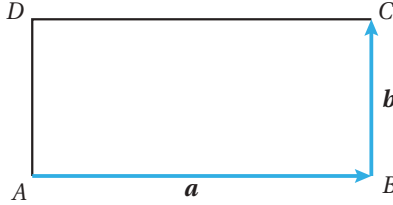
متجه مواز ومعاكس للمتجه $\vec{PQ}$

4 $\vec{RQ}$

$$\vec{RQ} = -b$$

متجه معاكس للمتجه $\vec{QR}$

أتحقق من فهمي



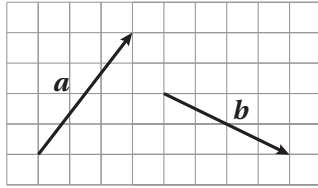
في الشكل المجاور، مستطيل $ABCD$ ، فيه $\vec{AB} = a$ ، و $\vec{BC} = b$. أعبّر عن كل ممّا يأتي باستعمال المتجهين a و b :

a) $\vec{AD}$

b) $\vec{DC}$

c) $\vec{CB}$

جمع المتجهات هندسيًا



يمكن إجراء عمليات على المتجهات، مثل: الجمع، والطرح.

لإيجاد $a + b$ هندسيًا، اتبع الخطوات الآتية:

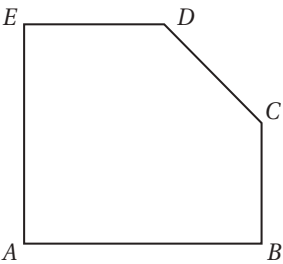
الخطوة 1: أرسم المتجه a .

الخطوة 2: أرسم المتجه b بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه a .

الخطوة 3: أصِل بين نقطة بداية المتجه a ونقطة نهاية المتجه b .

فيكون المتجه الناتج هو المتجه $a + b$.

يسمى المتجه الناتج من جمع متجهين أو أكثر **المحصلة** (resultant).



مثال 2

اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب المتجه الذي يمثل ناتج الجمع في كل ممّا يأتي:

1 $\vec{BC} + \vec{CA}$

$$\vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$$

أصل نقطة بداية $\vec{BC}$ بنقطة نهاية $\vec{CA}$ ، فينتج $\vec{BA}$

أتعلم

يطلق على هذه الطريقة في جمع المتجهات هندسيًا اسم قاعدة المثلث.

2 $\vec{BA} + \vec{AE} + \vec{EC}$

$$\vec{BA} + \vec{AE} + \vec{EC} = \vec{BC}$$

أصل نقطة بداية $\vec{BA}$ بنقطة نهاية $\vec{EC}$

3 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AA}$$

أصل نقطة بداية $\vec{AB}$ بنقطة نهاية $\vec{CA}$

4 $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$

أصل نقطة بداية $\vec{AB}$ بنقطة نهاية $\vec{DE}$

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكل في المثال 2 أكتب المتجه الذي يمثل ناتج الجمع في كل مما يأتي:

a) $\vec{AE} + \vec{EC} + \vec{CB}$

b) $\vec{BE} + \vec{ED} + \vec{DC}$

يُمكن إيجاد ناتج طرح متجهين أو أكثر، أو ناتج ضرب متجه في عدد ثابت هندسيًا.

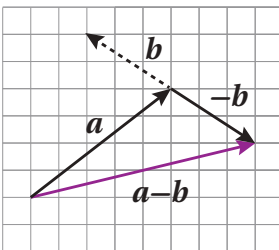
طرح المتجهات هندسيًا

لإيجاد $a - b$ ، أجمع المتجه a مع معكوس المتجه b ؛ أي:

$$a - b = a + (-b)$$

ولذلك يُمكن إيجاد ناتج طرح $a - b$ هندسيًا بطريقة مشابهة لعملية الجمع كما في الشكل المجاور.

أجد محصلة a و $-b$

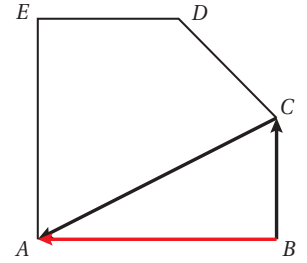
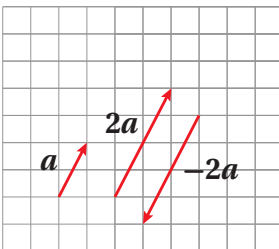


ضرب المتجه في عدد ثابت هندسيًا

ينتج من ضرب المتجه a في العدد الحقيقي k متجه مواز للمتجه a ، ويكون للمتجهين ka و a الاتجاه نفسه إذا كان k عددًا موجبًا، واتجاهان متعاكسان إذا كان k عددًا سالبًا.

$$2a = a + a$$

$$-2a = (-a) + (-a)$$



أتعلم

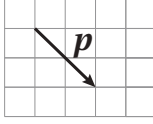
• يُسمى المتجه $\vec{AA}$ المتجه الصفري؛ وهو متجه ليس له مقدار واتجاه.

• لأي متجه a ، فإن:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

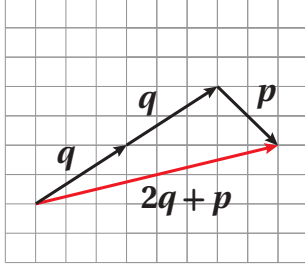
$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

مثال 3



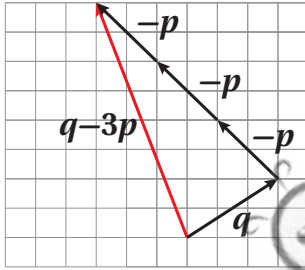
اعتمادًا على الشكل المجاور، أجد هندسيًا كلاً مما يأتي:

1 $2q + p$



أرسم أولاً المتجه $2q$ ، ثم أجد محصلة المتجهين $2q$ و p :

2 $q - 3p$



أرسم أولاً المتجه $-3p$ من رأس المتجه q ثم أجد محصلة المتجهين q و $-3p$:

أتحقق من فهمي

اعتمادًا على الشكل في المثال 3، أجد هندسيًا كلاً من:

a) $p + 3q$

b) $3q - 2p$

c) $2q - \frac{1}{2}p$

جمع المتجهات وطرحها جبريًا

يُمكن إيجاد ناتج الجمع والطرح للمتجهات المكتوبة بالصورة الإحداثية عن طريق جمع مركباتها الأفقية والرأسية، أو طرحها.

مفهوم أساسي

إذا كان $a = \langle x_1, y_1 \rangle$ ، و $b = \langle x_2, y_2 \rangle$ ، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن:

$$a+b = \langle x_1+x_2, y_1+y_2 \rangle \quad a-b = \langle x_1-x_2, y_1-y_2 \rangle \quad ka = \langle kx_1, ky_1 \rangle$$

مثال 4

إذا كان $a = \langle 3, 1 \rangle$ و $b = \langle -4, 6 \rangle$ و $c = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

1 $a + b$

$$a + b = \langle 3 + (-4), 1 + 6 \rangle \\ = \langle -1, 7 \rangle$$

2 $2a$

$$2a = \langle 2 \times 3, 2 \times 1 \rangle = \langle 6, 2 \rangle$$

3 $c - b$

$$c - b = \langle -3 - (-4), -1 - 6 \rangle \\ = \langle 1, -7 \rangle$$

4 $b - 2a$

$$b - 2a = \langle -4 - 6, 6 - 2 \rangle \\ = \langle -10, 4 \rangle$$

5 $a + c$

$$a + c = \langle 3 + (-3), 1 + (-1) \rangle \\ = \langle 0, 0 \rangle$$

إذا كان $a = \langle 3, 1 \rangle$ و $b = \langle -2, 7 \rangle$ و $c = \langle 0, -5 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $-b$

b) $4c$

c) $b - c$

d) $4a + 3c$

أفكر

ما العلاقة بين المتجهين $v - u$ ، $u - v$ ؟

أتعلم

في المثال 4، المتجه a هو معكوس المتجه c ؛ لأن مجموعهما يساوي المتجه الصفري؛ أي إن: $a + c = 0$

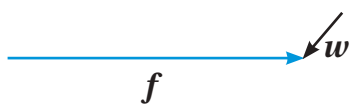
أتحقق من فهمي

لجمع المتجهات وطرحها تطبيقات في مجالات عدة، مثل: الهندسة، والطيران.

مثال 4: من الحياة

ملاحظة جوية: بدأت طائرة رحلتها نحو الشرق بسرعة مقدارها 400 km/h ، لكنها واجهت رياحاً تهب من الشمال الشرقي بلغت سرعتها الثابتة 50 km/h . كيف يمكن لربان الطائرة أن يعدل اتجاهها وسرعتها ليصل إلى وجهته من دون تأخير؟

الخطوة 1: أرسم المتجهين اللذين يمثلان السرعة والاتجاه لكل من الطائرة، والرياح.



يمثل المتجه f اتجاه الطائرة وسرعتها.

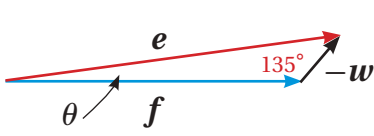
يمثل المتجه w اتجاه الرياح وسرعتها.

ألاحظ من الشكل المجاور أنه يجب على الطائرة أن تنحرف عن مسارها قليلاً بحيث تعيدها الرياح إلى مسارها الأصلي.

أذكر

يمثل مقدار (طول) كل من المتجه f والمتجه w سرعة، لا مسافة.

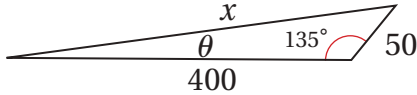
الخطوة 2: أرسم المتجه الذي يُمثل اتجاه الطائرة وسرعتها بعد انحرافها عن مسارها.



بما أن الرياح تهب من الشمال الشرقي، فإن اتجاه w هو 45° وعليه، فإن الزاوية بين f و w تساوي 135° (زاويتان متجاورتان على مستقيم)، ويكون المتجه e هو محصلة المتجهين f و $-w$.

الخطوة 3: أجد سرعة الطائرة بعد انحرافها.

سرعة الطائرة بعد انحرافها عن مسارها تساوي مقدار المتجه e ، وليكن x .



أجد طول x باستعمال قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$x^2 = 400^2 + 50^2 - 2 \times 400 \times 50 \cos 135^\circ$$

$$= 190784.3$$

$$x \approx 436.8$$

قانون جيب التمام

بالتعويض

بالتبسيط، واستعمال الآلة

الحاسبة

الخطوة 4: أجد قياس زاوية انحراف الطائرة θ باستعمال قانون الجيوب:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin \theta}{50} = \frac{\sin 135^\circ}{436.8}$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.0809)$$

$$\approx 4.64^\circ$$

قانون الجيوب

بالتعويض

بالتبسيط

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، يجب على الرُبان أن يحرف مسار الطائرة بزاوية 4.64° شمال الشرق، ويزيد سرعتها إلى 436.8 km/h ، عندئذ ستعمل الرياح على تقليل سرعتها إلى 400 km/h .

أتحقق من فهمي

ملاحه بحرية: انطلق قارب شراعي من ميناء بسرعة 30 km/h ، متجهًا إلى جزيرة تقع غربه. وفي هذه الأثناء، هبَّت رياح بلغت سرعتها الثابتة 10 km/h بزاوية 25° جنوب الغرب. كيف يمكن للبحار تعديل اتجاه القارب وسرعته للوصول إلى وجهته من دون تأخير؟

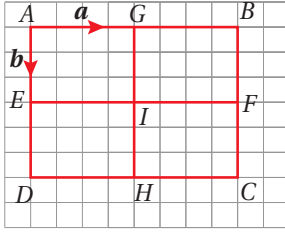
أتعلم

لماذا وُضِعَ المتجه $-w$

بدلاً من المتجه w ؟



قام الأخوان رايت في العقد الأول من القرن العشرين بصناعة أول طائرة أثقل من الهواء تعمل بمحرك ويمكن التحكم بها.



اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب كل متجه مما يأتي بدلالة a و b :

1 $\vec{EI}$

2 $\vec{FC}$

3 $\vec{DE}$

4 $\vec{GE}$

5 $4\vec{GD}$

6 $\vec{CA}$

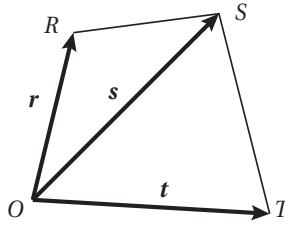
إذا كان $a = \langle 34, -86 \rangle$ ، و $b = \langle -65, 17 \rangle$ ، و $c = \langle 9, -1 \rangle$ ، فأجد كلًا مما يأتي:

7 $a + c$

8 $b - a$

9 $3c + b$

10 $a + b - 2c$



اعتمادًا على الشكل المجاور، أكتب كلًا من المتجهات الآتية بدلالة r و s و t :

11 $\vec{SR}$

12 $\vec{ST}$

13 $\vec{RS}$

14 إذا كان $\langle 7, -5 \rangle = \langle 3x - y, y - x^2 \rangle$ ، فما قيمة كل من x و y ؟

إذا كان $e = \langle -3, -2 \rangle$ ، و $f = \langle 2, 4 \rangle$ ، فأمثل كلًا من المتجهات الآتية على المستوى الإحداثي:

15 $e + f$

16 $3f$

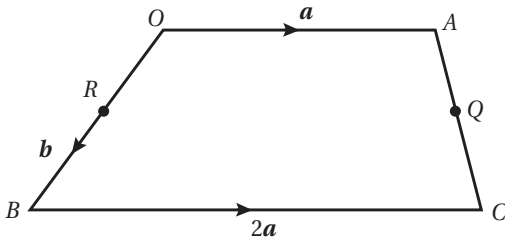
17 $e - f$

18 $f - e$

19 $4e$

20 $2f + e$

21 إذا كان $d = \langle 5, 9 \rangle$ ، و $e = \langle 11, -8 \rangle$ ، فأجد $|4d - 3e|$ ، $|\frac{1}{3}e|$.



في الشكل المجاور، $OACB$ شبه منحرف، فيه R منتصف $\overline{OB}$ ، و Q منتصف $\overline{AC}$. إذا كان $\vec{BC} = 2a$ و $\vec{OB} = b$ ، فأكتب كلًا من المتجهات الآتية بدلالة a و b :

22 $\vec{QR}$

23 $\vec{AQ}$

24 $\vec{RQ}$

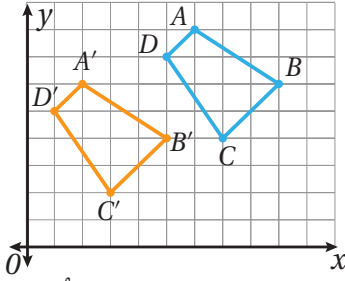
25 كيف يُمكن تحديد إذا كان $\overline{OA}$ و $\overline{BC}$ متوازيين في الشكل $OACB$ ؟

26 **رياضة:** في سباق للمشي، انطلقت رند من نقطة البداية، فقطعت مسافة 15 km في اتجاه الشرق، ثم اتجهت شمالاً مسافة 17 km. كم كيلومتراً تبعد رند عن نقطة البداية؟

27 **نزهة بحرية:** أبحر قارب سياحي مسافة 40 km جنوباً، ثم تحرك مسافة 70 km في اتجاه الشرق. أجد اتجاه القارب وبعده عن نقطة انطلاقه.

28 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

29 سباق زعانف: شارك سامي في سباق الزعانف الذي نظمته اتحاد الرياضات البحرية على شاطئ خليج العقبة. سبح سامي بسرعة 3 km في اتجاه الجنوب، لكنه واجه أمواجاً سرعتها 1.8 km، وقد دفعته إلى اتجاه الشرق، فغير اتجاهه وسرعته ليقاوم الأمواج، ويفوز بالسباق. أجد السرعة المتجهة التي يجب أن يسبح بها سامي.



تحويلات هندسية: أُجري انسحاب للشكل $ABCD$ المجاور باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$ ، حيث a مقدار الانسحاب على محور x ، و b مقدار الانسحاب على محور y :

30 أجد $\langle a, b \rangle$.

31 إذا أُجري انسحاب للشكل $A'B'C'D'$ باستعمال المتجه $\langle 3, -4 \rangle$ ، فأرسم الشكل الناتج من الانسحاب، وأسميه $A''B''C''D''$.

32 أحدد المتجه $\langle f, e \rangle$ الذي يصف تأثير انسحاب الشكل $ABCD$ إلى الشكل $A''B''C''D''$.

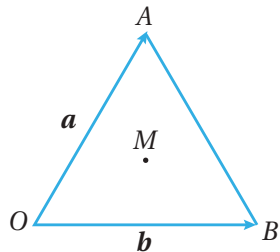
33 انطلقت سيارة من المدينة A إلى المدينة B ، فقطعت مسافة 200 km في اتجاه 040° ، ثم غيرت اتجاه حركتها إلى 050° ، وقطعت مسافة 150 km. أجد اتجاه النقطة B ونقطة A .

34 إذا كانت $\langle 0, 7 \rangle - \langle 3, 5 \rangle + y^2 < 3, x \rangle$ ، فأجد قيمة كل من العددين x و y ؟

مهارات التفكير العليا

35 تبرير: انطلق يخت في رحلة بحرية من الميناء، فقطع مسافة 60 km شمالاً، ثم تحرك مسافة 40 km شرقاً، ثم مسافة 16 km جنوباً، فوصل إلى جزيرة. أجد بُعد الجزيرة عن الميناء، ثم أجد المسافة التي قطعها اليخت في رحلته البحرية حتى وصل الجزيرة، وأقارن بينهما.

تحد: يُمثل الشكل التالي OAB مثلثاً متطابق الأضلاع، ويُمثل M نقطة في مركز المثلث، ما يعني أن المستقيم الواصل بين رأس المثلث والنقطة M عمودي على الضلع المقابل:



36 أكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية.

37 أثبت أن $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} (a + b)$.

الدرس 3

الضرب القياسي Scalar Product

ضرب المتجهات، وإيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
الضرب القياسي.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



دفعَت هندُ عربةَ طفلِها بقوةٍ مقدارها 70 N، وبزاويةٍ مقدارها 54° مسافةً 18 m. ما مقدار الشغل الذي بذلته لدفع العربة بوحدة جول (J)، وبإهمال قوة الاحتكاك؟

تعرفتُ سابقًا العمليات على المتجهات، مثل ضرب متجه في عدد ثابت، وسأتعرف في هذا الدرس كيفية إيجاد ناتج ضرب متجهين.

الضرب القياسي (scalar product) هو عملية جبرية بين متجهين، تنتج منها كمية قياسية، ويُرمزُ إليها بالرمز $v \cdot w$ ، ويُقرأ: $v \text{ dot } w$.

إذا كان $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ و $w = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإن: $v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$.

أتعلم

يُسمى الضرب القياسي
أيضًا الضرب النقطي

Dot product

مثال 1

إذا كان $v = \langle 2, 8 \rangle$ و $w = \langle -5, 4 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

1 $v \cdot w$

$$\begin{aligned} v \cdot w &= v_1 w_1 + v_2 w_2 \\ &= 2 \times -5 + 8 \times 4 \\ &= -10 + 32 \\ &= 22 \end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعويض

بالتبسيط

2 $v \cdot v$

$$\begin{aligned} v \cdot v &= v_1 v_1 + v_2 v_2 \\ &= 2 \times 2 + 8 \times 8 \\ &= 4 + 64 \\ &= 68 \end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعويض

بالتبسيط

أتعلم

لأي متجه u ، فإن:

$$u \cdot u = |u|^2$$

أتحقق من فهمي

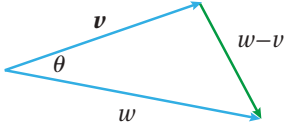
إذا كان $v = \langle -3, 2 \rangle$ و $u = \langle 6, 9 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $u \cdot v$

b) $v \cdot u$

c) $u \cdot u$

تعرّفت سابقاً أنّه إذا كان $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ و $w = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإنّ طول المتجه المرسوم باللون الأخضر في الشكل المجاور هو $|w-v|$ ، حيث:



$$w-v = \langle w_1-v_1, w_2-v_2 \rangle$$

وباستعمال قانون جيب التمام، فإنّ:

$$|w-v|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

$$(w_1-v_1)^2 + (w_2-v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

بالتعويض في القانون

$$w_1^2 - 2w_1v_1 + v_1^2 + w_2^2 - 2w_2v_2 + v_2^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\theta$$

بفك الأقواس

$$w_1v_1 + w_2v_2 = |v||w|\cos\theta$$

بالتبسيط

$$v_1w_1 + v_2w_2 = |v||w|\cos\theta$$

الخاصية التبديلية

$$v \cdot w = |v||w|\cos\theta$$

وكذلك، فإنّ:

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|}$$

مفهوم أساسي

يمكن إيجاد ضرب القياسي للمتجهين a و b بالصيغة الآتية:

$a \cdot b = |a||b|\cos\theta$ ، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ الزاوية المحصورة بين المتجهين.

مثال 2

أجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $a = \langle 6, 8 \rangle$ و $b = \langle 3, 4 \rangle$.

أستعمل الصيغة الآتية: $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$

الخطوة 1: أجد مقدار المتجه a .

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

صيغة مقدار المتجه

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$

بالتعويض

$$= \sqrt{100} = 10$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد مقدار المتجه $\vec{b}$.

$$|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

صيغة مقدار المتجه

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

بالتعويض

$$= \sqrt{25} = 5$$

بالتبسيط

الخطوة 3: أجد الضرب القياسي بين a و b .

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

صيغة الضرب القياسي

$$= 6 \times 3 + 8 \times 4$$

بالتعويض

$$= 18 + 32$$

بالتبسيط

$$= 50$$

الخطوة 4: أعوض بالصيغة الأخرى لقانون الضرب القياسي.

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

صيغة الضرب القياسي

$$= \frac{50}{10 \times 5} = 1$$

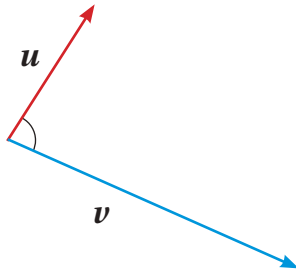
بالتعويض

$$\theta = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

بما أن قياس الزاوية بين المتجهين a و b صفر، فهما متوازيان.

أتحقق من فهمي

أجد قياس الزاوية θ المحصورة بين المتجهين $v = \langle 2, 7 \rangle$ و $u = \langle -1, 1 \rangle$.



إذا كان a و b متجهين غير صفريين، وكانت الزاوية المحصورة بينهما قائمة، فإن المتجهين يكونان متعامدين، ويكون ناتج الضرب القياسي بينهما صفرًا؛ لأن $\cos 90^\circ = 0$.

معلومة

تستخدم المتجهات في برمجة الألعاب، وصناعة السيارات المخصصة للسباقات، وتسيير السفن والطائرات والعديد غيرها.

إرشاد

أرسم المتجهين في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي، ملاحظًا وضع التوازي بينهما.

مثال 3

أحدّد إذا كان المتجهان $v = \langle -6, 4 \rangle$ و $u = \langle 2, 3 \rangle$ متعامدين أم لا.

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \\ &= 2 \times -6 + 3 \times 4 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعويض

بالتبسيط

بما أن $u \cdot v = 0$ ، فإن المتجهين متعامدان.

أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان المتجهان $v = \langle 3, -5 \rangle$ و $u = \langle 1, 0 \rangle$ متعامدين أم لا.

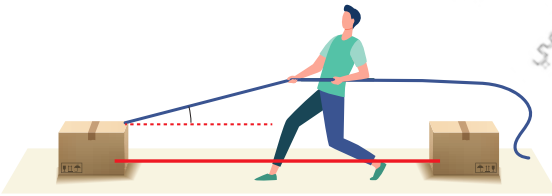
توجد تطبيقات عملية على الضرب القياسي للمتجهات، أهمها حساب الشغل w الناتج من تأثير قوة ثابتة F بزاوية مُحددة θ على جسم ما؛ لتحريكه من نقطة إلى أخرى مسافة مقدارها d وحدة. فالشغل هو كمية قياسية تساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة، ووحدة قياسه هي جول (J). يمكن إيجاد مقدار الشغل بالصيغة الآتية:

$$w = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta$$

أتعلم

وحدة قياس الشغل هي نيوتن - متر وتُسمى الجول، ويُرمز لها بالرمز J

مثال 4: من الحياة



فيزياء: سحب خليل صندوقًا بقوة مقدارها $F = 13 \text{ N}$ ، وبذل شغلًا مقدارُه

$w = 20 \text{ J}$ لسحب الصندوق مسافة أفقية مقدارها $d = 18 \text{ m}$. ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب واتجاه المسافة المقطوعة (بإهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟

$$w = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta$$

قانون الشغل

$$20 = 13 \times 18 \times \cos \theta$$

بالتعويض

$$20 = 234 \times \cos \theta$$

بالتبسيط

$$\frac{20}{234} = \cos \theta$$

بالتبسيط

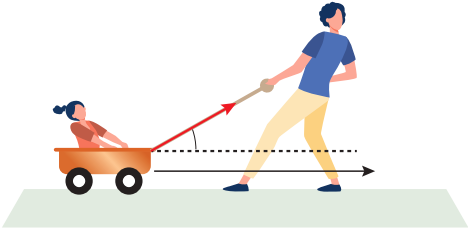
$$\cos^{-1} (0.0855)$$

معكوس جيب التمام

$$\theta = 85.1^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي



سحب فارس عربة ابنته، فبذل شغلاً مقداره 13 J ، بقوة مقدارها 50 N ، مسافة $\vec{d} = 30 \text{ m}$.

ما قياس الزاوية المحصورة بين قوة السحب

واتجاه المسافة المقطوعة (بإهمال قوة الاحتكاك) لأقرب جزء من عشرة؟

أدرب وأحل المسائل

أجد ناتج ضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

1 $a = \langle 6, 8 \rangle$, $b = \langle 4, -3 \rangle$

2 $u = \langle -3, 11 \rangle$, $v = \langle -9, 4 \rangle$

3 $c = \langle -12, 43 \rangle$, $v = \langle 22, 14 \rangle$

4 $d = \langle 21, 32 \rangle$, $e = \langle -21, 25 \rangle$

5 إذا كان $|b| = 6$ ، و $|a| = 9$ ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين a و b هو 42° ، فأجد ناتج $a \cdot b$.

6 إذا كان $|b| = 76$ ، و $|a| = 34$ ، وكان قياس الزاوية المحصورة بين a و b هو 120° ، فأجد ناتج $a \cdot b$.

7 أجد قياس الزاوية بين المتجهين $a = \langle 7, 10 \rangle$ ، و $b = \langle 4, -10 \rangle$ لأقرب جزء من عشرة.

أجد ناتج ضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي، ثم أجد قياس الزاوية المحصورة بينهما:

8 $c = \langle 2, 4 \rangle$, $d = \langle -24, 12 \rangle$

9 $a = \langle 4, 16 \rangle$, $k = \langle 8, -2 \rangle$

10 أحدد إذا كان المتجهان $e = \langle 3, 4 \rangle$ ، و $a = \langle 11, -8 \rangle$ متعامدين أم لا، مُبرراً إجابتي.

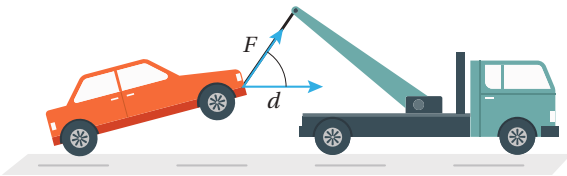
11 إذا كان $r = \langle 3, -4 \rangle$ ، و $s = \langle b, b+2 \rangle$ متجهين متعامدين، فأجد قيمة b .

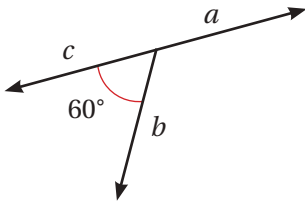
12 تسحب شاحنة سيارة كما في الشكل المجاور. إذا كان

مقدار قوة السحب $\vec{F} = 34 \text{ N}$ ، والمسافة المقطوعة

$\vec{d} = 12 \text{ km}$ ، وشغل الشاحنة المبدول $w = 46 \text{ J}$ ، فأجد

قياس زاوية السحب.





في الشكل المجاور، إذا كان $|a| = 2$ ، و $|b| = 4$ ، و $|c| = 5$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

13 $a \cdot b$

14 $b \cdot c$

15 $a \cdot c$

16 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



17 برهان: إذا كانت a, b, c متجهات، وكان 0 المتجه الصفري، فأثبت صحة كل مما يأتي:

18 $a \cdot b = b \cdot a$

19 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

20 $0 \cdot a = 0$

21 مسألة مفتوحة: إذا كان $p \cdot q = 30$ ، و $q = \langle 6, 2 \rangle$ ، فأجد قيمة محتملة للمتجه p .

22 مسألة مفتوحة: أجد متجهًا يُعَامِدُ المتجه $a = \langle -8, -2 \rangle$.

23 تبرير: أبين باستعمال المتجهات أن المثلث الذي رؤوسه النقاط: $(4, -2)$ ، $(1, 5)$ ، $(6, -2)$ متطابق الضلعين، ثم أجد قياسات جميع زواياه، مُبرِّراً إجابتي.

24 تبرير: إذا كان المتجهان $a = \langle -1, r \rangle$ ، و $b = \langle 2, -3 \rangle$ متوازيين، فما قيمة r ؟

اختبار نهاية الوحدة

8 إذا كان $a = \langle 2, -3 \rangle$, $b = \langle 3, 4 \rangle$ ، فإن $2b \cdot a$ تساوي:

- a) -6 b) 6 c) -12 d) 12

إذا كانت النقاط A, B, C, D نقاطاً في المستوى الإحداثي، حيث $A(4, -1)$, $B(2, -3)$, $D(7, 1)$. فأجد إحداثي النقطة C إذا كان:

9 $\vec{AC} = -2 \vec{AB}$

10 $\vec{DC} = \frac{1}{3} \vec{DB}$

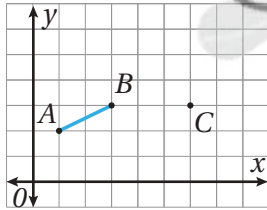
أحدّد في ما يأتي العبارات الصحيحة، مُصحّحاً الخطأ في غير الصحيح منها:

11 المتجهان المتساويان لهما نفس المقدار.

12 المتجهان المتوازيان لهما نفس المقدار والاتجاه.

13 لأي متجهين u و v ، فإن $u \cdot v = v \cdot u$

أنسخ الرسم البياني الآتي، ثم أستخدمه لأجيب عن الأسئلة التي تلي:



14 إذا كان $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ ، فأحدّد النقطة E على المستوى الإحداثي.

15 إذا كان $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ ، فأحدّد النقطة D على المستوى الإحداثي.

16 إذا كان $\vec{AB} = 2\vec{AM}$ ، فأحدّد النقطة M على المستوى الإحداثي.

17 إذا كانت $\vec{DC} = k\vec{AM}$ ، فأجد قيمة الثابت k .

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 إذا كان $v = \langle 1, -1 \rangle$ ، فإن $|v|$ تساوي:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$

2 إذا كان $A(2, 5)$, $B(-1, 7)$ ، فإن $\vec{BA}$ هو:

- a) $\langle 3, -2 \rangle$ b) $\langle -2, 3 \rangle$

- c) $\langle -3, 2 \rangle$ d) $\langle 3, 2 \rangle$

3 العبارة الصحيحة في ما يأتي هي:

a) مقدار المتجه $\langle 2, 4 \rangle$ يساوي 20

b) مقدار المتجه $\langle -4, 10 \rangle$ يساوي $\sqrt{84}$

c) مقدار المتجه $\langle 4, -3 \rangle$ يساوي $\sqrt{7}$

d) مقدار المتجه $\langle -6, 8 \rangle$ يساوي 10

4 إذا كانت $A(0, 2)$, $B(3, y)$ وكان $|\vec{AB}| = 3\sqrt{2}$ ، فإن y تساوي:

- a) 5 b) -1

- c) 5, -1 d) 7, -3

إذا كان $v = \langle 1, 5 \rangle$ و $u = \langle -3, -1 \rangle$ ، فأجيب عن الأسئلة: 5, 6, 7:

5 $v - u$ تساوي:

- a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 4, 6 \rangle$

- c) $\langle -4, -6 \rangle$ d) $\langle -2, -4 \rangle$

6 إذا كان $p = u + 2v$ فإن $|p|$ تساوي:

- a) 8 b) $\sqrt{80}$ c) 82 d) $\sqrt{82}$

7 معكوس المتجه $u + v$ هو:

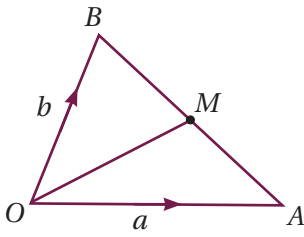
- a) $\langle -2, 4 \rangle$ b) $\langle 2, -4 \rangle$

- c) $\langle 4, 6 \rangle$ d) $\langle -4, -6 \rangle$

- 25 أقلعت طائرتان معاً من المطار في الوقت نفسه. رصد برج المراقبة حركة الطائرتين، فوجد بعد ثوانٍ عدّة أن $a = \langle 6, 8 \rangle$ يمثل مسار الطائرة الأولى، وأن $b = \langle 4, -3 \rangle$ يمثل مسار الطائرة الثانية. هل يتعامد مسارا الطائرتين؟ أبرّر إجابتي.

تدريب على الاختبارات الدولية

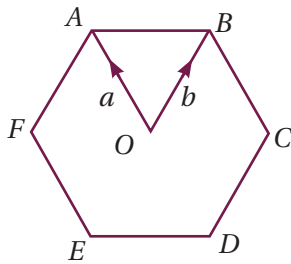
- 26 أجد الزاوية θ بين المتجهين p و q إذا كان $p = \langle 5, -1 \rangle$, $q = \langle -2, 3 \rangle$.



يُمثل الشكل الآتي المتجهين $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ المرسومين في الوضع القياسي، حيث O نقطة الأصل، و M نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

- 27 أكتب المتجه $\vec{AB}$ بدلالة a و b .

- 28 أبرهن أن $\vec{OM} = \frac{1}{2}(a + b)$.



الشكل التالي هو سداسي

منتظم مركزه O وفيه

$$\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$$

- 29 أكتب المتجه $\vec{AB}$

بدلالة a و b .

- 30 إذا مُد $\vec{AB}$ على استقامته حتى النقطة K بحيث كانت

$$AB : BK = 1 : 2$$

فأكتب المتجه $\vec{CK}$ بدلالة a و b .

- إذا كان $u = \langle -1, 5 \rangle$ و $v = \langle 2, -1 \rangle$ و $w = \langle 4, -2 \rangle$ فأجد:

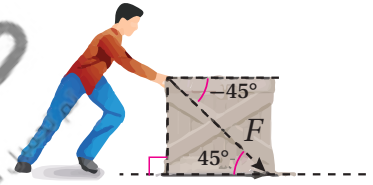
18 $-3(v - w)$

19 $v \cdot 2u$

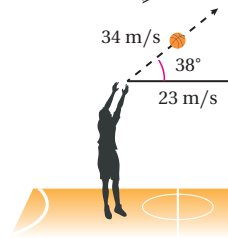
20 $w \cdot (u + \frac{1}{2}w)$

- 21 الزاوية بين المتجهين v و w .

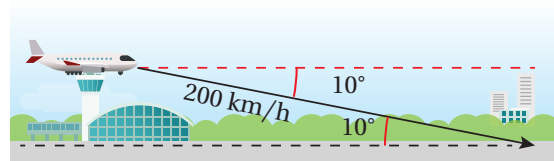
- 22 دفع عامل صندوقاً بقوة 78 N، وبزاوية 45° - كما في الشكل التالي. أجد مقدار القوة التي بذلها العامل لتحريك الصندوق مسافة 12 m.



- 23 ركض حسام في اتجاه السلّة في أثناء مباراة دوري كرة السلّة، ثم قفز بسرعة أفقية مقدارها 23 متراً لكل ثانية، وبسرعة رأسية مقدارها 34 متراً في الثانية، وبزاوية قياسها 38° . ما سرعة حسام الأفقية؟



- 24 هبطت طائرة بسرعة رأسية مقدارها 200 km/h، وبزاوية انخفاض قياسها 10° . أكتب السرعة المتجهة للطائرة بالصورة الإحداثية.



الإحصاء والاحتمال

Statistics and Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

يساعدنا علم الإحصاء والاحتمالات على تفسير الظواهر، وتحليل البيانات الكثيرة في حياتنا اليومية. فمثلاً، إذا أردتُ استنتاج العلاقة بين زمن الاستيقاظ صباحاً وتحصيل الطلبة الدراسي، فإنني أحتاجُ إلى أداة إحصائية تُسمى شكل الانتشار، ومفهوم الارتباط، وهو مما سأتعلمه في هذه الوحدة.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ وصف العلاقة بين مُتغيّرين باستعمال شكل الانتشار، والمستقيم الأفضل لمطابقة لتقدير قيمة أحدهما.
- ◀ إيجاد قيم الربيعيات والمئينات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.
- ◀ إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المُنظّمة في جداول تكرارية ذات فئات.
- ◀ حساب احتمال حوادث مُركّبة، والاحتمال المشروط.

تعلمت سابقاً:

- ✓ تنظيم البيانات في جداول تكرارية ذات فئات.
- ✓ إيجاد مقاييس النزعة المركزية للبيانات (مفردات، جداول تكرارية، جداول تكرارية ذات فئات)، وتحديد أثر إجراء تحويل خطي للقيم على مقاييس نزعتها المركزية.
- ✓ إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المفردة أو المُنظّمة في جداول تكرارية.
- ✓ حساب الاحتمال لحوادث بسيطة.

جمع بيانات عن مستوى الأقارب التعليمي، وتنظيمها، وتحليلها، وكتابة استنتاجات عنها.

فكرة المشروع



برمجة جوجرا، برمجة العرض التقديمي (بوربوينت).

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

رقم العائلة	المستوى التعليمي	
	الزوج	الزوجة
1		
2		
3		
4		

1 أجمع بيانات من 12 عائلة من أقاربي أو جيراني عن المستوى التعليمي للزوج والزوجة.

2 أنظم في الجدول المجاور البيانات التي جمعتها على النحو الآتي:

• أدون في عمودَي الزوج والزوجة قيمًا عدديةً وفَقَّ التصنيف الآتي: من دون تعليم (1)، الأساسي (2)، الثانوي (3)، الدبلوم (4)، البكالوريوس (5)، الماجستير (6)، الدكتوراه (7).

3 أستمحل برمجة جوجرا لتمثيل القيم العددية لمستوى تعليم الزوج والزوجة في صورة أزواج مرتبة على هيئة شكل انتشار، ثم أجد معادلة المستقيم الأفضل مطابقة للنقاط العشرين.

4 أنظم البيانات التي جمعتها في الجدول السابق في جدول تكراري ذي فئات كما في الجدول المجاور.

5 أحسب الانحراف المعياري، للمستوى التعليمي لكل من الأزواج والزوجات، ثم أقارن بينهما، وأفسرهما.

6 أكتب حادثين متنافيين، وآخرين غير متنافيين عن اختيار شخص (أو أكثر)

عشوائيًا من الجدول الأول، ثم أجد احتمال وقوع أحدهما على الأقل.

7 أكتب حادثين مستقلين، وآخرين مشروطين عن اختيار شخص (أو أكثر) عشوائيًا من الجدول الأول، ثم أجد احتمال وقوعهما معًا.

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضًا تقديميًا (بوربوينت) يلخص العمل، وما توصل إليه كل فرد في المجموعة، وما تعلمته من هذا المشروع؛ على أن يتضمن العرض التقديمي صورًا للجدول، وشكل الانتشار، وجميع الاستنتاجات التي توصل إليها في أثناء تنفيذ المشروع.

أشكال الانتشار Scatter Graphs

فهم أشكال الانتشار، ووصفها، واستعمال المستقيم الأفضل مطابقة لتقدير قيمة أحد متغيرين بمعرفة قيمة الآخر.

فكرة الدرس



شكل الانتشار، الارتباط الموجب، الارتباط السالب، المستقيم الأفضل مطابقة.

المصطلحات



مسألة اليوم



ادّعت فاطمة أنّه كلّما زاد طول الشخص زادت المسافة بين طرفي ذراعيه عند مدّهما على استقامة كما في الشكل المجاور.
كيف أتحقّق من صحّة ادّعاء فاطمة؟

يتعيّن علينا في كثير من المواقف الحياتية استكشاف العلاقة بين مجموعتين من البيانات، ووصف هذه العلاقة. ومن الأمثلة على ذلك:

- كلّما ارتفعت درجات الحرارة بيعت كميات أكبر من المثلجات (الآيس كريم).
- كلّما زاد طول الإنسان زاد مُعدّل نبضات قلبه.
- الطلبة ذوو التحصيل المرتفع في الرياضيات يزداد تحصيلهم أيضًا في العلوم.
- مشاهدة الطلبة التلفاز مدة أطول تُحسن أدائهم في الاختبارات.

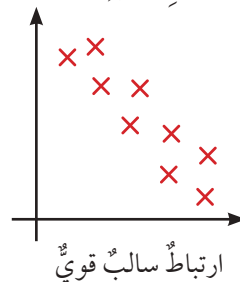
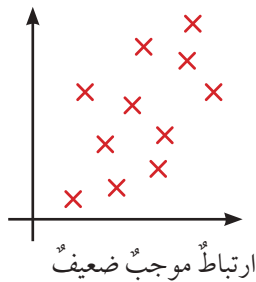
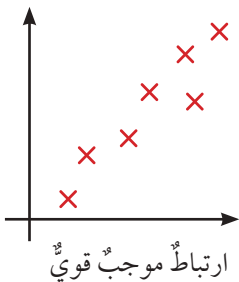
شكل الانتشار (scatter graph) هو تمثيل بياني يوضح العلاقة (إن وجدت) بين مجموعتين من البيانات، وتظهر فيه نقاط تمثّل بيانات المجموعتين بوصفها أزواجاً مرتبة (x, y) في المستوى الإحداثي؛ إذ تمثّل بيانات المتغير x على المحور الأفقي الموجب، وتمثّل بيانات المتغير y على المحور الرأسي الموجب.

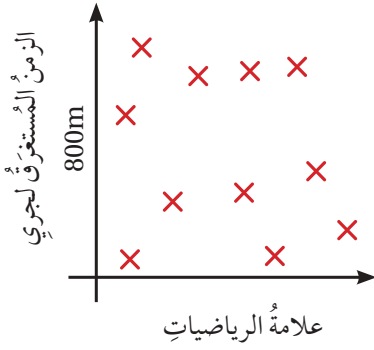
الارتباط (correlation) هو وصف العلاقة بين مجموعتي البيانات. وقد يكون الارتباط موجباً (positive correlation)، أو سالباً (negative)، أو قوياً، أو ضعيفاً، كما في أشكال

أتعلم

ألاحظ عدم وجود حاجة إلى الأجزاء السالبة من المحاور في المستوى الإحداثي؛ لأنّ النقاط التي تمثّل شكل الانتشار موجبة.

الانتشار الآتية:





من الملاحظ أنه كلما كان الارتباط موجباً قوياً تجمعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله موجب، وأنه كلما كان الارتباط سالباً قوياً تجمعت النقاط في شكل الانتشار حول مستقيم ميله سالب.

أما إذا كان الارتباط ضعيفاً (أو: لا يوجد ارتباط)، فإن النقاط في شكل الانتشار تكون متناثرة ومتباعدة كما في شكل الانتشار المجاور، الذي يظهر العلاقة بين تحصيل مجموعة من الطلبة في مادة الرياضيات والزمن الذي استغرقه كل منهم في الجري مسافة 800 m

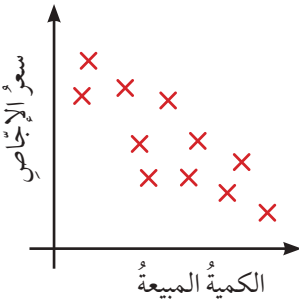
مثال 1

هل يوجد ارتباط بين بيانات المتغيرين الممثلين في كل من شكلي الانتشار الآتين؟ في حالة وجود ارتباط بينهما، هل هو موجب أم سالب؟ هل هو قوي أم ضعيف؟



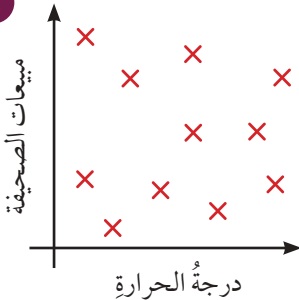
يُزرع في دول العالم المختلفة نحو 300 نوع من الإجاص.

1



يظهر شكل الانتشار المجاور العلاقة بين سعر الإجاص وكميته المباعة. وبناءً على توزيع النقاط في هذا الشكل، فإن كمية الإجاص المباعة كانت قليلة عندما كان سعره مرتفعاً، والعكس صحيح. وهذا يشير إلى وجود ارتباط سالب؛ ولأن نقاط شكل الانتشار متقاربة، فهو قوي.

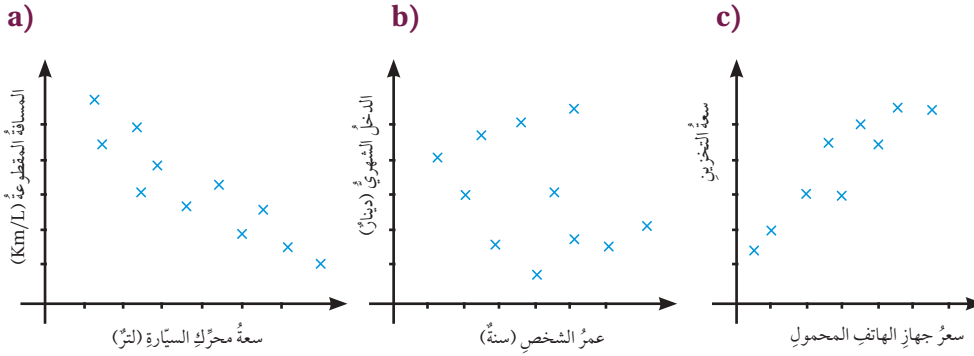
2



يظهر شكل الانتشار المجاور العلاقة بين درجة الحرارة ومبيعات إحدى الصحف. ومن الملاحظ أنه لا يوجد ارتباط أو علاقة واضحة بين درجات الحرارة ومبيعات الصحيفة؛ لأن نقاط شكل الانتشار متباعدة.

أتحقق من فهمي

هل يوجد ارتباط بين بيانات المتغيرين الممثلين في كل شكل من أشكال الانتشار الآتية؟ في حالة وجود ارتباط بينها، هل هو موجب أم سالب؟ هل هو قوي أم ضعيف؟



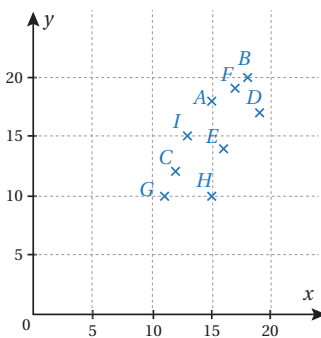
يعدّ معدل استهلاك السيارة للوقود أحد أهم العوامل المحفزة لشراؤها؛ لذا تحرص مصانع السيارات دائماً على ابتكار أساليب تكنولوجية للحد من استهلاك الوقود.

عند تمثيل مجموعتين من البيانات بمتغيرين مثل (x) و (y) ، يُمكنني تمثيل شكل الانتشار يدوياً، أو باستعمال برمجية جبراً، وذلك بتعيين نقاط شكل الانتشار بوصفها أزواجاً مرتبة (x, y) ؛ لأتمكن من وصف الارتباط (إن وجد).

مثال 2

أمثل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار، ثم أصف الارتباط بين المتغيرين (x) و (y) :

مدة الاستحمام (x) بالدقائق للشخص، وكمية المياه المستهلكة (y) بالتر.									
الشخص	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x	15	18	12	19	16	17	11	15	13
y	18	20	12	17	14	19	10	10	15



أعين الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي كما في الشكل المجاور.

بالنظر إلى شكل الانتشار، يلاحظ وجود ارتباط موجب قوي بين المتغيرين (x) و (y) ؛ لأنه كلما زادت قيمة (x) في أغلب الحالات زادت قيمة (y) ؛ أي كلما زادت مدة الاستحمام لشخص ما زادت كمية المياه التي يستهلكها.



يعاني الأردن شحاً في الموارد المائية؛ فحصة الفرد من المياه أقل من 100 m^3 سنوياً. ولهذا، فإن عدم الإسراف في استهلاك المياه هو واجب ديني ووطني.

أتحقق من فهمي

أُمثل البيانات في الجدول الآتي على شكل انتشار، ثم أصف الارتباط بين المتغيرين (x) و (y) :

سعر السيارة (x) بألوف الدنانير، وعمر السيارة (y) بالسنوات.										
السيارة	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	10.5	10	10.2	9.5	9.4	10.1	9.5	7	6	5.5
y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

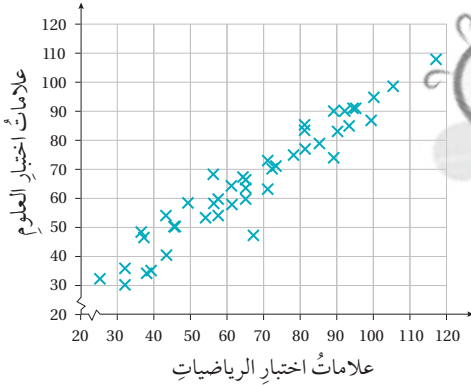
إرشاد

يُرسَم المستقيم الأفضل مطابقةً بالنظر عامةً. ولرسمه، يُفضَّل استعمال مسطرة شفافة.

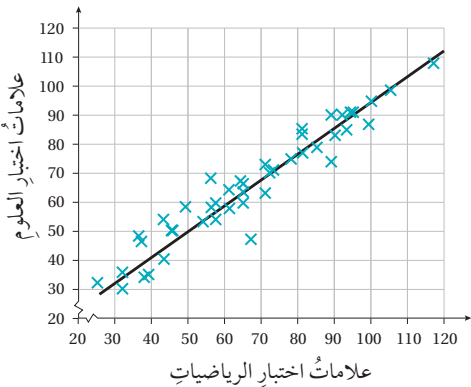
المستقيم الأفضل مطابقةً (line of best fit) هو مستقيم يمرُّ بأكبر عددٍ من نقاط شكل الانتشار، بحيث يكون عدد النقاط التي لا يمرُّ بها متساوياً (تقريباً) على جهتيه، وتكون أقصر المسافات بينه وبين النقاط التي لا يمرُّ بها متساوية (تقريباً).

يُستعمل هذا المستقيم لتقدير قيمة أحد المتغيرين في شكل الانتشار ذي الارتباط القوي بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

مثال 3



اعتماداً على شكل الانتشار المجاور الذي يُمثل علامات اختبار الرياضيات وعلامات اختبار العلوم لمجموعة من الطلبة، أُجيب عن الأسئلة الآتية:

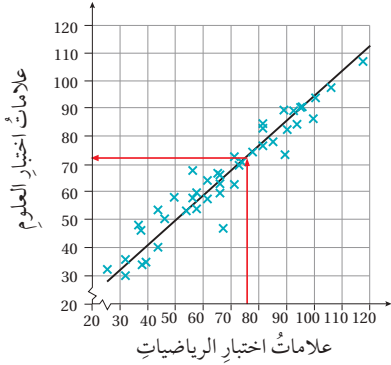


1 أرسَم المستقيم الأفضل مطابقةً للبيانات المُمثلة في شكل الانتشار.

أرسَم المستقيم الأفضل مطابقةً باستعمال المسطرة كما في الشكل المجاور.

ألاحظُ أنَّ الارتباط بين المتغيرين موجب وقوي.

- 2 علامة طالب في اختبار الرياضيات 75، لكنّه غاب عن اختبار العلوم بسبب مرضه. أستخدم المستقيم الأفضل مطابقة الذي رسمته لتقدير علامته المحتملة في مادة العلوم.



أقدر علامة هذا الطالب في مادة العلوم برسم مستقيم رأسي، بدءاً بالعلامة 75 على المحور الأفقي حتى يلتقي بالمستقيم الأفضل مطابقة. ومن نقطة التقاطع أرسم مستقيماً أفقياً، وصولاً إلى المحور الرأسي، فأقدر علامته بنحو 72 كما في الشكل المجاور.

- 3 أجد معادلة المستقيم الأفضل مطابقة.

يُمكن إيجاد معادلة المستقيم إذا عُلِمَت إحداثيات أيّ نقطتين يمرُّ بهما، ولتكن (53, 53) و (95, 90):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 53 = \frac{90 - 53}{95 - 53} (x - 53)$$

$$y = 0.88x + 6.36$$

الصيغة العامة لمعادلة مستقيم يمرُّ بنقطتين معلومتين

بتعويض إحداثيات النقطتين

بالتبسيط

إرشاد

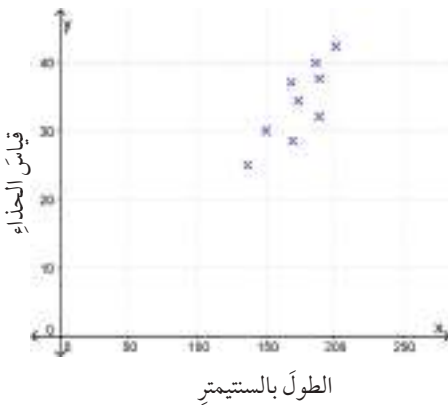
بما أنّه يُمكن رسم أكثر من مستقيم، واختيار أيّ نقطتين يمرُّ بهما المستقيم (يختلف هذا الاختيار من شخص إلى آخر)، فإنّ معادلة المستقيم قد تختلف تبعاً للنقطتين المختارتين.

أتحقق من فهمي

اعتماداً على شكل الانتشار المجاور، الذي يُمثّل الطول (x) بالسنتيمتر، وقياس الحذاء (y) لمجموعة من الأشخاص، أُجبب عما يأتي:

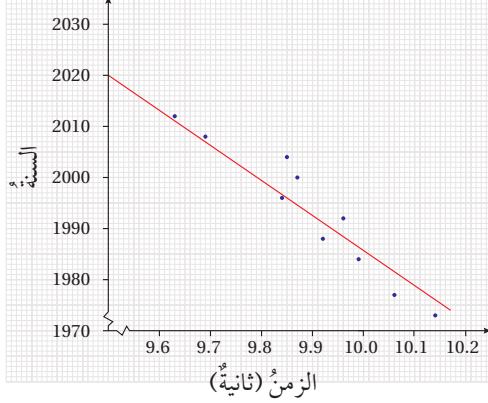
(a) أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثمّ أجد معادلته.

(b) أقدر قياس الحذاء لشخص طوله 190 cm



من المحاذير التي يجب التنبُّه لها، استعمال شكل الانتشار لعمل استنتاجات؛ فشكل الانتشار يكون مفيداً فقط ضمن مدى القيم المعطاة. أمّا في حال الخروج عن هذا المدى فقد تكون الاستنتاجات مُضلّلة، أو غير منطقية.

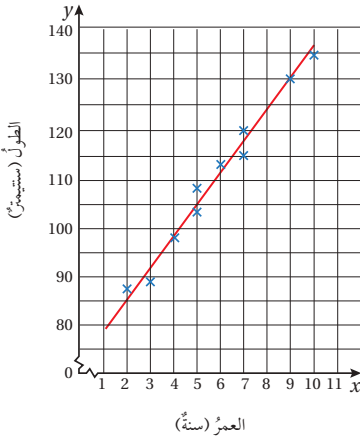
مثال 4



يُمثّل شكل الانتشار المجاور الأزمنة المُدوّنة لصاحب المركز الأول في سباق 100 m للرجال في عدد من دورات الألعاب الأولمبية. أستخدم المستقيم الأفضل مطابقة المُعطى في الشكل لتقدير الزمن الذي سيُحقّقه صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2020م.

هل يُمكن تقدير الزمن الذي سيُحقّقه صاحب المركز الأول في السباق للدورة التي ستقام عام 2038م؟

إذا استعملت المستقيم الأفضل مطابقة، فأقدر الزمن المُستغرق لقطع مسافة السباق بنحو 9.5 ثوانٍ في دورة عام 2020م، ولكن هذا التقدير لا ينطبق على الدورات الأولمبية التالية الخارجة عن مدى القيم المعطاة؛ فوفقاً لهذا التقدير، يُتوقع استمرار انخفاض الزمن المُستغرق لقطع مسافة السباق إلى 9 ثوانٍ، و8.5 ثوانٍ، و8 ثوانٍ، ...، وهكذا حتى الوصول إلى دورة لن يحتاج فيها المتسابقون إلى أي زمن لقطع مسافة السباق التي طولها 100 m، وهذا غير منطقي.



أتحقق من فهمي

أستخدم المستقيم الأفضل مطابقة في الشكل المجاور لتقدير طول شخص عمره 8 سنوات. هل يُمكن استعمال هذا الشكل لتقدير طول شخص عمره 30 سنة؟ أبرر إجابتي.

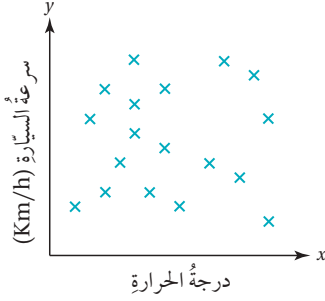


الألعاب الأولمبية:
حدث رياضي دولي يُنظّم كلّ سنتين في السنوات الزوجية، بتناوب الألعاب الصيفية والألعاب الشتوية.

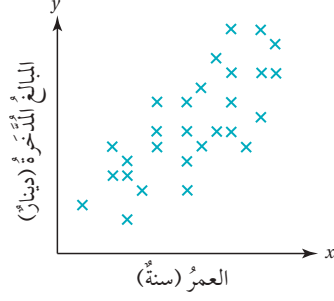


أَصِفُ الْإِرْبَاطَ فِي شَكْلِي الْإِنْتِشَارِ الْآتِيَيْنِ:

1



2



3 ماذا أَسْتَنْجُ مِنْ شَكْلِي الْإِنْتِشَارِ السَّابِقَيْنِ؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

يُمَثِّلُ الْجَدْوُلُ الْآتِي الْعُمُرَ وَالطَّوْلَ وَالْكَتْلَةَ لِسَبْعِ لَاعِبَاتٍ مِنْ فَرِيقِ كُرَةِ الطَّائِرَةِ فِي إِحْدَى الْمَدَارِسِ:

اسْمُ اللَّاعِبَةِ	وَفَاءُ	هِنْدُ	عَافِشَةُ	هَدَى	تَغْرِيدُ	إِبْتِسَامُ	سَمِيرَةُ
العُمُرُ (سَنَةً)	14	15	11	11	12	15	13
الطَّوْلُ (سَنْتِيْمَتْرُ)	169	168	154	158	162	165	161
الْكَتْلَةُ (كِيلُوْغْرَامُ)	40	42	35	32	37	42	41

أَرْسُمُ أَشْكَالَ الْإِنْتِشَارِ، ثُمَّ أَصِفُ الْإِرْبَاطَ لِكُلِّ مِنْهَا:

4 الْعُمُرُ مَقَابِلَ الطَّوْلِ. 5 الطَّوْلُ مَقَابِلَ الْكَتْلَةِ. 6 الْعُمُرُ مَقَابِلَ الْكَتْلَةِ.

تَجْرِبَةٌ عِلْمِيَّةٌ: يُبَيِّنُ الْجَدْوُلُ الْآتِي الْمَسَافَةَ بِالسَّنْتِيْمَتْرِ، وَالسَّرْعَةَ بِالسَّنْتِيْمَتْرِ لِكُلِّ ثَانِيَةٍ، عِنْدَ دَحْرَجَةِ كُرَةٍ عَلَى سَطْحٍ طَاولَةٍ، بَدْءًا بِنَقْطَةٍ مُحَدَّدَةٍ:

المسافة (cm)	10	20	30	40	50	60	70	80
السَّرعَةُ (cm/s)	18	16	13	10	7	5	3	0

7 أَرْسُمُ شَكْلَ الْإِنْتِشَارِ لِبَيَانَاتِ الْجَدْوْلِ.

8 أَرْسُمُ الْمُسْتَقِيمَ الْأَفْضَلَ مُطَابِقَةً لِلْبَيَانَاتِ.

9 أَقْدِّرُ سُرْعَةَ الْكُرَةِ لِحِظَةٍ قَطْعِهَا مَسَافَةَ 5 cm مِنْ نَقْطَةِ انْطِلَاقِهَا.

10 أَقْدِّرُ الْمَسَافَةَ الَّتِي قَطَعَتْهَا الْكُرَةُ مِنْ نَقْطَةِ انْطِلَاقِهَا عِنْدَمَا كَانَتْ سُرْعَتُهَا 12 cm/s

لحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس، أجمع بيانات من 10 طلبة عشوائياً، ثمّ أدونها في الجدول الآتي، ثمّ أجب عن الأسئلة التي تلي:

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
طول الطالب										
المسافة بين طرفي ذراعيه (cm)										

11 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

12 أصف الارتباط بين المتغيرين.

13 هل ادعاء فاطمة صحيح؟ أبرر إجابتي.

أطوال: يُبين الجدول الآتي أطوال 20 أباً وأبنائهم الذين تبلغ أعمارهم 20 سنةً بالسنتيمتر:

طول الأب	178	186	164	152	169	174	183	147	162	153
طول الابن	168	163	152	145	151	167	167	142	155	145
طول الأب	156	180	162	166	173	181	168	158	173	175
طول الابن	152	160	150	156	164	170	154	160	167	172

14 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

إرشاد

يمكن تمثيل طول الأب على المحور الأفقي بتدرج يتراوح بين 140 cm و 200 cm، وتمثيل طول الابن على المحور الرأسي بتدرج يتراوح بين 140 cm و 200 cm أيضاً.

15 هل صحيح أن الأب الطويل ابنه طويل؟ أبرر إجابتي.

16 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثمّ أجد معادلتها.

في دراسة مسحية لمُعَلِّم حول عدد ساعات ممارسة الرياضة أسبوعياً شملت 20 طالباً في أحد الصفوف التي يُدرّسها، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	3	5	15	11	0	9	7	6	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	18	26	24	16	19	27	12	13	17	14

رقم الطالب	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
عدد ساعات ممارسة الرياضة	12	10	7	6	7	3	1	2	0	12
عدد ساعات مشاهدة التلفاز	22	16	18	22	12	28	18	20	25	13

17 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول.

18 إذا كان أحد الطلبة من الصف نفسه يشاهد التلفاز مدة 8 ساعات أسبوعياً، فهل يمكن تقدير عدد الساعات التي يمارس فيها الرياضة أسبوعياً؟ أبرر إجابتي.

سيارة أجرة: يُبين الجدول الآتي المسافات المقطوعة بالكيلومتر والمُدَد الزمنية المُستغرَقة بالدقائق لـ 10 رحلات قام بها سائق سيارة أجرة في أحد الأيام:

المسافة (km)	1.6	3.8	5.2	6.6	4.8	2.9	3.9	5.8	8.8	5.4
الزمن (min)	3	17	11	13	9	15	8	11	16	10

19 أرسم شكل الانتشار لبيانات الجدول، بوضع الزمن على المحور الأفقي.

20 أرسم المستقيم الأفضل مطابقة، ثم أجد معادلته.

21 إذا استغرقت إحدى الرحلات 5 دقائق، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقديرها لهذه الرحلة؟

22 ما الزمن الذي يمكن تقديره لرحلة قطع فيها السائق مسافة 4 km؟

23 إذا استغرقت إحدى الرحلات ساعة كاملة، فما المسافة المقطوعة التي يمكن تقديرها لهذه الرحلة؟ أبرر إجابتي.

مهارات التفكير العليا

24 **تبرير:** يُبين الجدول الآتي علامات 10 طالبات في اختباري الرياضيات والجغرافيا. إذا كانت إحدى الطالبات مريضة عند تقديمها اختبار الجغرافيا، فمن هي؟ أبرر إجابتي.

الاسم	إيمان	باسمة	تهاني	دعاء	رقية	سارة	سعاد	علياء	فداء	منى
علامات اختبار الرياضيات	145	155	142	167	167	151	145	152	163	168
علامات اختبار الجغرافيا	175	173	158	168	168	181	173	166	180	156

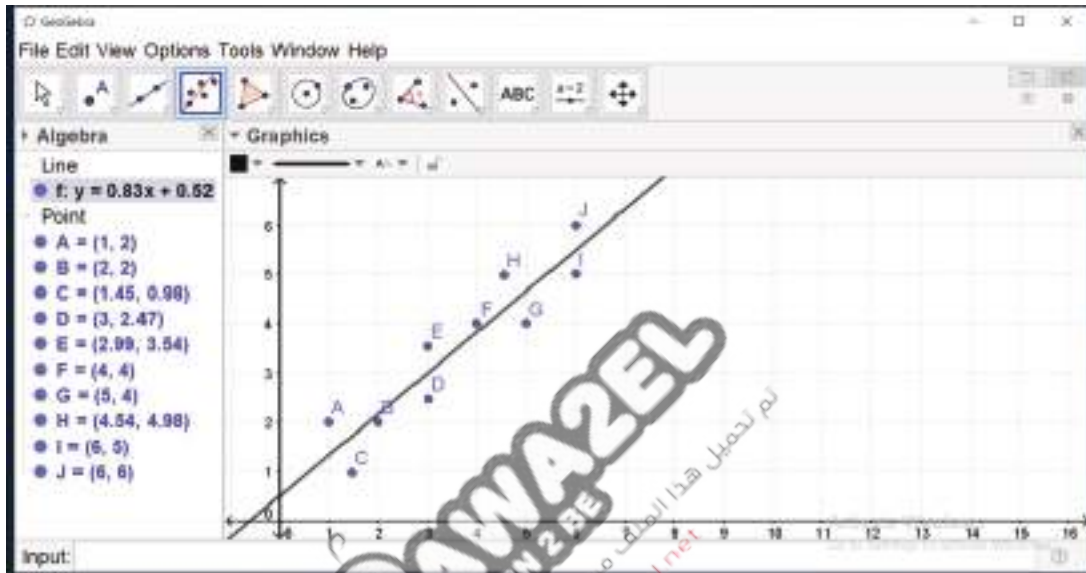
25 **أكتشف الخطأ:** بالعودة إلى الجدول في السؤال السابق، لم تتقدم سميرة لاختبار الجغرافيا، وقد أحرزت علامة 75 في اختبار الرياضيات. قدرت سميرة أنها ستحصل على علامة 80 في اختبار الجغرافيا لو أنها قدَّمته. هل تقدير سميرة منطقي؟ أبرر إجابتي.

26 **مسألة مفتوحة:** اختار متغيرين، ثم أنشئ جدولاً أنظم فيه بعض قيمهما، ثم أستعمله للتنبؤ بالقيمة الحقيقية لأحد المتغيرين باستعمال المستقيم الأفضل مطابقة إذا عُلِمَت قيمة المتغير الآخر.

27 **أكتب:** لماذا يوصف الارتباط بأنه موجب في شكل الانتشار الذي يمثل مبيعات أحد المحال من المشروبات على مدار أشهر السنة؟ هل يعني ذلك أن أحد المتغيرين (مبيعات المشروبات، أو أشهر السنة) سبب للآخر؟ أبرر إجابتي.

رسم المستقيم الأفضل مطابقةً

أستعمل برمجية جيوجبرا لرسم المستقيم الأفضل مطابقةً لنقاط شكل الانتشار.



أرسم المستقيم الأفضل مطابقةً للبيانات الواردة في الجدول الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا.

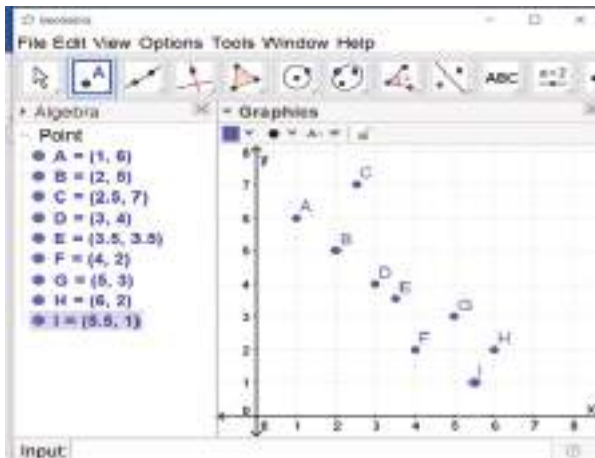
نشاط 1

5.5	6	5	4	3.5	3	2.5	2	1	x
1	2	3	2	3.5	4	7	5	6	y

لرسم المستقيم الأفضل مطابقةً، أتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أعيّن النقاط في المستوى الإحداثي.

أختار أيقونة من شريط الأدوات، ثم أنقر عند موقع كل زوج مُرتّب في المستوى البياني، لتظهر النقاط كما في الشكل المجاور. يُمكن أيضًا تعيين النقاط بإدخال كل منها في شريط الإدخال باستعمال لوحة المفاتيح في صورة: $A = (x, y)$.

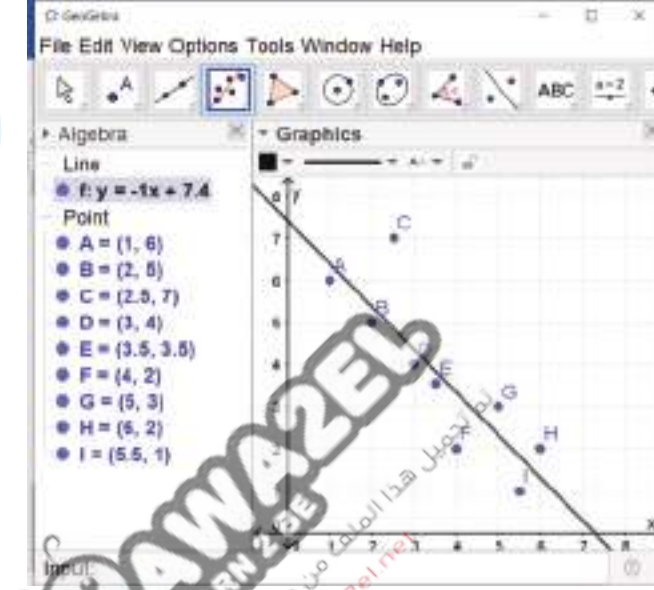


الخطوة 2: أرسم المستقيم الأفضل مطابقةً.

أختار أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أحدد جميع النقاط التي عيَّتها في المستوى الإحداثي، بوضع المؤشر في أي مكان بعيداً عن النقاط، ثم الضغط باستمرار على الزر الأيسر لفأرة الحاسوب، مع السحب لشمول جميع النقاط، عندئذٍ سيظهر المستقيم الأفضل مطابقةً، وتظهر معادلته إلى يسار الشاشة كما في الشكل الآتي:

إرشاد

لإظهار هامش (Algebra)،
أختار (Algebra) من قائمة
العرض (View).



أدرب



1 أحل الأسئلة (8, 9, 10, 16) في الدرس السابق باستعمال برمجة جبراً، ثم أقدّر الحل بحلي اليدوي.

2 تحوي الهواتف المحمولة تطبيقاً يتضمن بيان معدل نبضات القلب. أستعمل هذا التطبيق لرصد معدل نبضات القلب لـ 10 أشخاص على الأقل، ثم أقيس طول كل منهم، ثم أرسم شكل الانتشار والمستقيم الأفضل مطابقةً باستعمال برمجة جبراً.

الدرس 2

المنحنى التكراري التراكمي Cumulative Frequency Graph

تعرّف الربيعيات والمئينات، وإيجادها للبيانات المُبوّبة في جداول تكرارية باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

فكرة الدرس



المنحنى التكراري التراكمي.

المصطلحات



مسألة اليوم



عدّد الموظفين	فئات الرواتب
8	$349 < x \leq 399$
12	$399 < x \leq 449$
15	$449 < x \leq 499$
9	$499 < x \leq 549$
6	$549 < x \leq 599$

يُبيّن الجدول المجاور رواتب الموظفين في إحدى الشركات. ما عدّد الموظفين الذين تزيد رواتبهم على 520 ديناراً؟

يُمثّل المنحنى التكراري التراكمي (cumulative frequency graph) للبيانات المُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات العلاقة بين التكرار التراكمي للفئات في التوزيع التكراري والحدود الفعلية العليا للفئات.

إرشاد

للتسهيل، يُمكن الاكتفاء بوضع الحدود العليا للفئات على المحور الأفقي، والتكرار التراكمي على المحور الرأسي؛ ذلك أنّ المطلوب تقدير القيم لمُتغيّرات منفصلة أحياناً، من مثل: عدد الأهداف المُسجّلة، وعدد الرسائل.

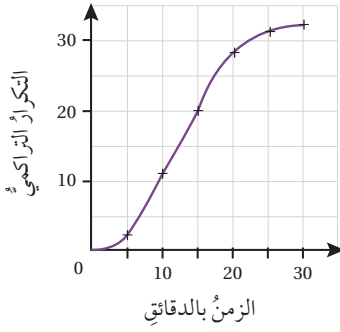
مثال 1

يُبيّن الجدول التكراري المجاور الزمن الذي يستغرقه طلبة الصفّ العاشر في الوصول إلى المدرسة. أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

التكرار (عدّد الطلبة)	الزمن بالدقائق
2	$0 < x \leq 5$
9	$5 < x \leq 10$
9	$10 < x \leq 15$
8	$15 < x \leq 20$
3	$20 < x \leq 25$
1	$25 < x \leq 30$

التكرار التراكمي	الحدود العليا للفئات
0	$x = 0$
$0 + 2 = 2$	$x \leq 5$
$2 + 9 = 11$	$x \leq 10$
$2 + 9 + 9 = 20$	$x \leq 15$
$2 + 9 + 9 + 8 = 28$	$x \leq 20$
$2 + 9 + 9 + 8 + 3 = 31$	$x \leq 25$
$2 + 9 + 9 + 8 + 3 + 1 = 32$	$x \leq 30$

الخطوة 1: أنشئ جدول التكرار التراكمي بإضافة عمود التكرار التراكمي كما في الجدول المجاور، وإضافة الحدّ العلوي لفئة سابقة للفئة الأولى وتكرارها صفراً.



الخطوة 2: أرسم المنحنى التكراري التراكمي.

أرسم منحنى يُمثل العلاقة بين الحدود العليا لفئات الزمن بالدقائق (المتغير x) والتكرار التراكمي (المتغير y)، التي تمثلها الأزواج المرتبة الآتية:

$(0, 0)$, $(5, 2)$, $(10, 11)$, $(15, 20)$,
 $(20, 28)$, $(25, 31)$, $(30, 32)$

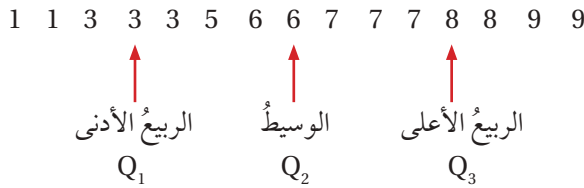
التكرار (عدد الأيام)	الفئات (درجة الحرارة)
1	$5 < x \leq 8$
7	$8 < x \leq 11$
9	$11 < x \leq 14$
6	$14 < x \leq 17$
5	$17 < x \leq 20$
1	$20 < x \leq 23$
1	$23 < x \leq 26$

أتحقق من فهمي

طقس: يُبين الجدول التكراري المجاور درجات الحرارة في مدينة المفرق في أحد أشهر فصل الربيع. أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

محافظة المفرق هي ثاني أكبر محافظات المملكة الأردنية الهاشمية من حيث المساحة، وثاني أقل المحافظات من حيث الكثافة السكانية، وتقع في الشمال الشرقي للمملكة.

تعرفت سابقاً الربيعيات؛ وهي ثلاث قيم تُقسّم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية. وهذه القيم هي: الربع الأدنى (Q_1)؛ وهو وسيط النصف الأدنى من البيانات، والربع الأوسط (Q_2)؛ وهو وسيط البيانات كلها، والربع الأعلى (Q_3)؛ وهو وسيط النصف الأعلى من البيانات. تعرفت أيضاً المدى الربيعي؛ وهو مدى البيانات التي تقع بين الربع الأدنى والربع الأعلى.

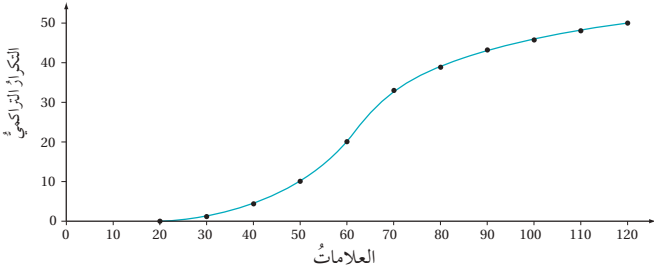


← المدى الربيعي →

$$\begin{aligned} IQR &= Q_3 - Q_1 \\ &= 8 - 3 = 5 \end{aligned}$$

يُمكن أيضاً إيجاد المدى الربيعي للبيانات المُنظمة في جداول تكرارية ذات فئات باستعمال المنحنى التكراري التراكمي.

مثال 2

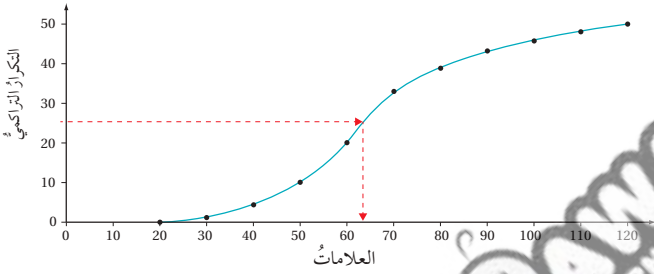


يُبيِّن المنحنى التكراريُّ
التراكميُّ المجاورُ علاماتِ 50
طالبًا في اختبارِ اللغة العربية:
1 أقدِّر وسيطَ البيانات.

الخطوة 1: أحدد رتبة الوسيط.

بما أن عدد الطلبة 50 طالبًا، فإن رتبة الوسيط هي: $0.5 \times n = 0.5 \times 50 = 25$

الخطوة 2: أرسم مستقيمًا أفقيًا بدءًا بالتكرار التراكمي 25 حتى يتقاطع مع المنحنى التكراري التراكمي. ومن نقطة التقاطع أرسم مستقيمًا رأسيًا حتى يتقاطع مع المحور الأفقي



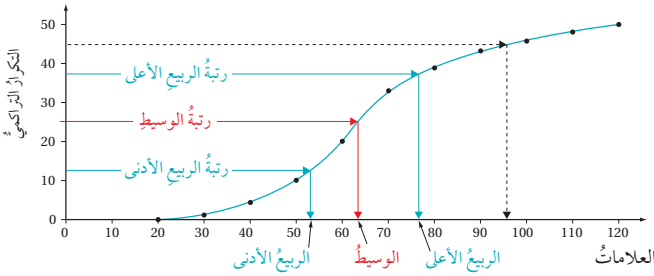
(العلامات) كما في
الشكل المجاور.
إذن، قيمة الوسيط هي العلامة
64 تقريبًا.

2 أجد المدى الربيعي.

الخطوة 1: أحدد رتبة الربع الأدنى، ورتبة الربع الأعلى.

رتبة الربع الأدنى هي: $0.25 \times n = 0.25 \times 50 = 12.5$ ، ورتبة الربع الأعلى

هي: $0.75 \times n = 0.75 \times 50 = 37.5$



الخطوة 2: أقدِّر قيمتي
الربعين: الأدنى
والأعلى، برسم
المستقيمت
الأفقية والرأسية

على المنحنى التكراري التراكمي كما في الفرع السابق.

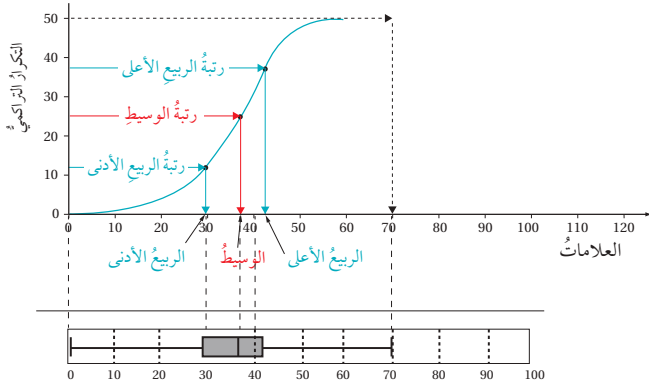
ألاحظ من التمثيل البياني أن قيمة الربع الأدنى هي العلامة 53 تقريبًا، وأن قيمة الربع الأعلى
العلامة 77 تقريبًا.

وعليه، فإن قيمة المدى الربيعي:

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 77 - 53 = 24$$

أتذكر

المئين 50 هو الوسيط
 Q_2 نفسه، والمئين 25
هو الربع الأدنى Q_1
نفسه، والمئين 75 هو
الربع الأعلى Q_3 نفسه.



ألاحظ أيضًا أنه يمكن استعمال المنحنى التكراري التراكمي لتمثيل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين كما في الشكل المجاور.

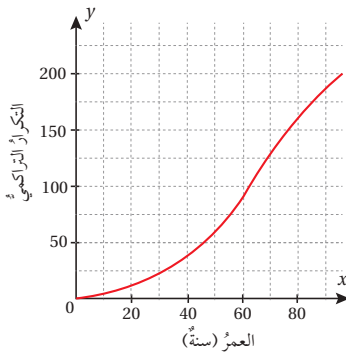
3 أجد المئين 90، ثم أفسر معناه.

الخطوة 1: أحدد رتبة المئين 90

$$\text{رتبة المئين 90 هي: } 90\% \times n = 0.9 \times 50 = 45$$

الخطوة 2: أقدّر قيمة المئين 90 برسم المستقيمات الأفقية والرأسية على المنحنى التكراري التراكمي كما في الفرع السابق.

ألاحظ من التمثيل البياني أن قيمة المئين 90 هي العلامة 96 تقريبًا، كما يظهر على الشكل في الفرع 2 وأن هذه القيمة تعني أن 90% من الطلبة أحرزوا علامات أقل من العلامة 96، أو يمكن القول إن 10% من الطلبة أحرزوا علامات أكثر من العلامة 96 في هذا الاختبار.



أتحقق من فهمي

يُبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور أعمار 200

عضو في جمعية ثقافية:

(a) أقدّر وسيط البيانات. (b) أجد المدى الربيعي.

(c) أجد المئين 85، ثم أفسر معناه.

أدرب وأحل المسائل

عدد الأهداف	عدد الطلبة
$0 \leq x \leq 5$	3
$5 < x \leq 10$	17
$10 < x \leq 15$	12
$15 < x \leq 20$	9
$20 < x \leq 25$	5
$25 < x \leq 30$	4

كرة قدم: يُبين الجدول المجاور عدد الأهداف التي سجّلها طلبة المرحلة

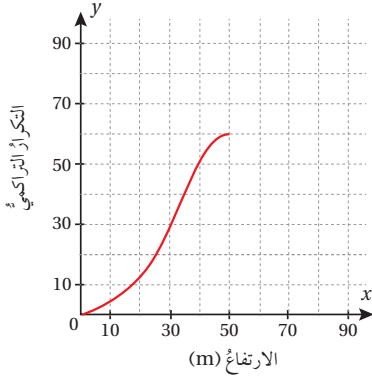
الثانوية في دوري كرة القدم المدرسي:

1 أرسم المنحنى التكراري التراكمي.

2 أقدّر المئين 85، ثم أفسر معناه.

3 أقدّر عدد الطلبة الذين سجّلوا 18 هدفًا على الأقل.

يُبين المنحنى التكراري التراكمي المجاور ارتفاع عدد من المباني في مدينة عمان:



4 أقدّر وسيط البيانات.

5 أجد المدى الربيعي.

6 أمثل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.

7 أجد المئين 80، ثم أفسر معناه.

اللاعب: يُبين الجدول المجاور نتائج 80 متسابقاً في لعبة رمي السهام:

عدد المتسابقين	مجموع النقاط (x)
9	$1 \leq x \leq 20$
13	$21 \leq x \leq 40$
23	$41 \leq x \leq 60$
15	$61 \leq x \leq 80$
11	$81 \leq x \leq 100$
7	$101 \leq x \leq 120$
2	$121 \leq x \leq 140$



8 أرسّم المنحنى التكراري التراكمي.

9 أجد قيمة كل من الوسيط، والمدى الربيعي.

10 أمثل البيانات باستعمال الصندوق ذي العارضتين.

11 إذا حصل المتسابق الذي مجموع نقاطه أكثر من 90 على جائزة، فما نسبة المتسابقين الذين سيحصلون على جائزة؟

عدد المعلمين	فئات الزمن (x) ثانية
1	$10 < x \leq 20$
2	$20 < x \leq 30$
2	$30 < x \leq 40$
9	$40 < x \leq 50$
17	$50 < x \leq 60$
13	$60 < x \leq 70$
3	$70 < x \leq 80$
2	$80 < x \leq 90$
1	$90 < x \leq 100$

عدد الطلبة	فئات الزمن (x) ثانية
1	$20 < x \leq 30$
3	$30 < x \leq 40$
6	$40 < x \leq 50$
12	$50 < x \leq 60$
3	$60 < x \leq 70$
3	$70 < x \leq 80$
2	$80 < x \leq 90$

طُلب إلى 30 طالباً، و 50 معلّماً رفع أيديهم لحظة تقدير انقضاء دقيقة واحدة بعد إعطاء إشارة البدء، وقد نُظمت النتائج في الجدولين المجاورين:

12 أرسّم المنحنى التكراري التراكمي لكل جدول.

13 أجد الوسيط والمدى الربيعي لكل جدول.

14 أي الفريقين كان أفضل في تقدير مدة الدقيقة: الطلبة أم المعلمون؟ أبرّر إجابتي.

جامعات: يُبين الجدول المجاور مُعدّلات عيّنة من طلبة كلية الهندسة في الجامعة الأردنية:

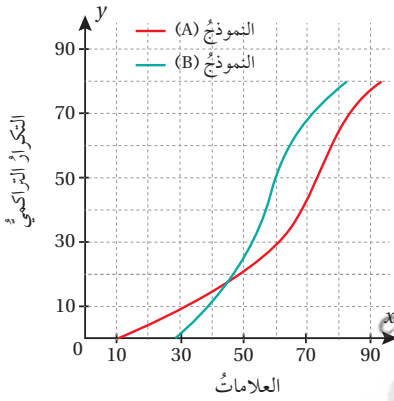
عدد الطلبة	المُعدّل التراكمي (x)
3	$1 < x \leq 1.5$
7	$1.5 < x \leq 2$
25	$2 < x \leq 2.5$
38	$2.5 < x \leq 3$
24	$3 < x \leq 3.5$
11	$3.5 < x \leq 4$

15 أرسم المنحنى التكراري التراكمي للبيانات.

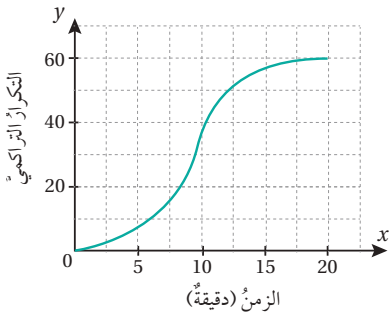
16 أجد الوسيط والمدى الربيعي للبيانات.

17 إذا كان الطلبة الذين تزيد مُعدّلاتهم التراكمية 4.3 أو أكثر قد حصلوا على منحة، فكم طالباً في هذه العيّنة لم يحصل على منحة؟

مهارات التفكير العليا



18 **تبرير:** طلب مُعلّم الرياضيات إلى طلبة الصف العاشر الإجابة عن أسئلة اختبار من نموذجين A، و B، ثم رسم المنحنى التكراري التراكمي لنتائج الطلبة كما في الشكل المجاور. أي النموذجين كان أصعب: A أم B؟ أبرّر إجابتني.



19 **تحذّر:** يُبين الشكل المجاور المنحنى التكراري التراكمي للمدة الزمنية التي استغرقتها 60 مكالمات هاتفية أُجريت في أحد الأيام مع مُقدّم برنامج حوار في إحدى المحطات الإذاعية. أستخدم هذا التمثيل لتقدير النسبة المئوية للمكالمات التي استغرقت 10 دقائق على الأقل.

20 **مسألة مفتوحة:** أجمع بياناتي الخاصة بـ 30 مشاهدة، ثم أنظّمها في جدول تكراري، ثم أجد كلاً من الوسيط، والمدى الربيعي لها.

الدرس 3

مقاييس التشتت للجدول التكرارية ذات الفئات Measures of Variation for Frequency Tables with Class Intervals

إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



فئات الأجور	عدد العمال
$70 \leq x < 75$	6
$75 \leq x < 80$	8
$80 \leq x < 85$	4
$85 \leq x < 90$	2

يعمل في مصنع للأثاث المنزلي 20 عاملاً، يتوزعون وفق الأجر الأسبوعي لأقرب دينار كما في الجدول المجاور. في أثناء زيارة مندوب وزارة العمل الذي يتابع أحوال العمال في المصانع، أفاد المدير المالي للمصنع بأن الانحراف المعياري لأجور العاملين هو 4.72 تقريباً. كيف يمكن التحقق من صحة ما أفاد به المدير المالي؟

تعرفت سابقاً بمقاييس التشتت التي تصف تباعد البيانات عن بعضها. ومن هذه المقاييس التباين؛ وهو الوسط الحسابي لمربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، وقد أوجدته باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

حيث:

$\bar{x}$: الوسط الحسابي للبيانات.

n : عدد البيانات.

تعرفت أيضاً الانحراف المعياري σ ؛ وهو الجذر التربيعي للتباين. لراجع كيفية حساب هذين المقياسين في المثال الآتي.

رموز رياضية

- يُرمز إلى الانحراف المعياري بالرمز σ ، وهو من الحروف اليونانية مكتوباً بحرف صغير، ويُقرأ: سيجم.
- الرمز $\sum$ حرف يوناني يدل على المجموع، ويُكتب حرفاً كبيراً، ويُقرأ أيضاً: سيجم.

مثال 1

أجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية: 4, 7, 1, 3, 0, 3

1 التباين σ^2 :

الخطوة 1: أجد الوسط الحسابي.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{4+7+1+3+0+3}{6} = 3$$

صيغة الوسط الحسابي

بالتعويض، والتبسيط

أتذكر

المدى من مقاييس التشتت، وهو يساوي أكبر القيم مطروحاً منها أصغر القيم بالنسبة إلى البيانات المفردة، ويُعد الأقل دقة في التعبير عن تشتت البيانات أو تباعدها.

x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
4	$4 - 3 = 1$	1
7	$7 - 3 = 4$	16
1	$1 - 3 = -2$	4
3	$3 - 3 = 0$	0
0	$0 - 3 = -3$	9
3	$3 - 3 = 0$	0
المجموع		30

الخطوة 2: أنشئ جدولاً أحسب فيه انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي، فضلاً عن حساب مربعات الفروق.

الخطوة 3: أعوض القيم التي توصلت إليها من الجدول بصيغة التباين.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

صيغة التباين

$$= \frac{30}{6} = 5$$

بالتعويض، والتبسيط

إذن، التباين هو 5

2 الانحراف المعياري σ :

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma = \sqrt{5}$$

أتحقق من فهمي

أجد التباين والانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية:

3, 5, 12, 10, 15, 14, 11

بالرغم من أن الجداول التكرارية ذات الفئات لا تظهر فيها القيم الحقيقية للبيانات، فإنه يمكن استعمالها لتقدير التباين والانحراف المعياري للبيانات؛ إذ يمكن النظر إلى جميع قيم البيانات في فئة معينة على أساس أن كلاً منها تساوي قيمة منتصف الفئة (مركز الفئة) x .

مفهوم أساسي

- لتقدير الوسط الحسابي للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستخدم الصيغة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f}$$

حيث:

x : مركز الفئة. f : تكرار الفئة. $\sum$: شمول الجمع الفئات كلها.

- لتقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، أستخدم الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f}$$

- لتقدير الانحراف المعياري، أجد الجذر التربيعي للتباين.

أتذكر

مجموع انحرافات المشاهدات أو القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً.

معلومة

في ما يخص البيانات المنظمة في الجداول ذات الفئات، يكون المدى مساوياً لقيمة الحد الأعلى الفعلي للفئة العليا مطروحاً منها قيمة الحد الأدنى الفعلي للفئة الدنيا.

مثال 2

عدد الحُفَاط	فئات العمر
15	6 - 8
10	9 - 11
25	12 - 14

حفظ القرآن الكريم: يُبين الجدول المجاور توزيعاً لخمسين طالباً يحفظون 5 أجزاء من القرآن الكريم بحسب أعمارهم لأقرب سنة. أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

لتقدير التباين، أنشئ جدولاً جديداً يحوي الأعمدة المظلمة عناوينها على النحو الآتي:

فئات العمر	f	x	$x \times f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \times f$
6 - 8	15	7	105	-3.6	12.96	194.4
9 - 11	10	10	100	-0.6	0.36	3.6
12 - 14	25	13	325	2.4	5.76	144
المجموع	50		530			342

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{530}{50} = 10.6$$

بالتعويض في صيغة المتوسط الحسابي

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f} \\ &= \frac{342}{50} \\ &= 6.84\end{aligned}$$

صيغة التباين

بالتعويض

بالتبسيط

لتقدير الانحراف المعياري، أجد الجذر التربيعي للتباين:

$$\sigma \approx 2.62$$

أتحقق من فهمي

عدد الأشخاص	فئات العمر (سنة)
100	$18 \leq x < 28$
52	$28 \leq x < 38$
26	$38 \leq x < 48$
18	$48 \leq x < 58$
4	$58 \leq x < 68$

يُبين الجدول المجاور أعمار السائقين الذين تسببوا في حوادث مرورية خطيرة في إحدى المدن على مدار أسبوع. أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

توجد صيغة أخرى لتقدير التباين للبيانات المنظمة في جداول تكرارية ذات فئات، من دون حاجة إلى حساب انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي، وهذه الصيغة هي:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f}$$

أفكر

لماذا لا يُشترط في مجموع انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي أن يساوي صفراً، في حالة البيانات المنظمة في الجدول ذي الفئات؟

مثال 3: من الحياة



عددُ الأيام	عددُ الرسائل
6	10 – 14
5	15 – 19
12	20 – 24
9	25 – 29
8	30 – 34

بريدٌ إلكترونيٌّ: دَوَّنتُ سُمِّيَّةَ عددِ رسائلِ البريدِ الإلكترونيِّ اليوميةِ التي وصلَتْها في 40 يومًا، ونظَّمتُ بياناتها في الجدولِ التكراريِّ المجاورِ. أَقَدِّرُ التباينَ لهذه البياناتِ.

معلومة

في شهر تشرين الثاني من عام 1971م، تمكَّنَ راي توملينسون (مُخترعُ البريدِ الإلكترونيِّ) من إرسالِ أولِ رسالةٍ إلكترونيَّةٍ وصلَتْ إلى العنوانِ المُرسَلِ إليه مباشرةً.

لتقدير التباين، أنشئُ جدولًا جديدًا يحوي الأعمدة المظللة عناوينها على النحو الآتي:

عددُ الرسائل	f	x	x^2	$f \times x$	$f \times x^2$
10 – 14	6	12	144	72	864
15 – 19	5	17	289	85	1445
20 – 24	12	22	484	264	5808
25 – 29	9	27	729	243	6561
30 – 34	8	32	1024	256	8192
المجموعُ	40			920	22870

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f} = \frac{920}{40} = 23$$

بالتعويض في صيغة الوسط الحسابي

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x^2 \times f) - (\sum f)(\bar{x})^2}{\sum f}$$

الصيغة الثانية لحساب التباين

$$= \frac{22870 - 21160}{40}$$

بالتعويض

$$= 42.75$$

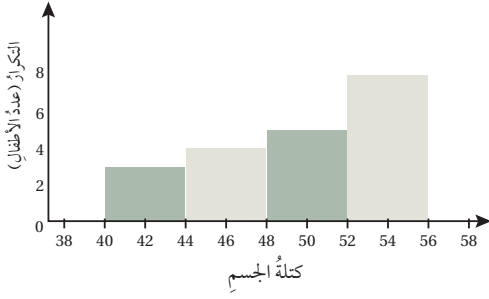
بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أحلُّ مسألة (حفظ القرآن الكريم) التي وردت في المثال 1 باستعمال الصيغة الثانية لتقدير الانحراف المعياري، ثمَّ أقارنُ قيمة الانحراف المعياري التي أتوصلُ إليها بالقيمة التي سبق حسابها.

يُمكنني أيضًا إيجاد مقاييس التشتت للبيانات المُمثَّلة بمُدَرَج تكراريٍّ، عن طريق إعادة تنظيمها في جدولٍ ذي فئاتٍ وتكرارٍ.

مثال 4



كتلة الجسم: يُبين التمثيل بالمُدْرَج التكراري المجاور توزيعاً لمجموعة أطفالٍ من سن 10 سنواتٍ وفق كتل أجسامهم مُقَرَّبَةً إلى أقرب كيلوغرام.

أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

1 التباين: أعيّد تنظيم البيانات في جدول ذي فئات وتكرار على النحو الآتي:

الفئة (الكتلة x)	f	x	$x \times f$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$(x - \bar{x})^2 \times f$
$40 \leq x < 44$	3	42	126	-7.6	57.76	173.28
$44 \leq x < 48$	4	46	184	-3.6	12.96	51.84
$48 \leq x < 52$	5	50	250	0.4	0.16	0.8
$52 \leq x \leq 56$	8	54	432	4.4	19.36	154.88
المجموع	20		992			380.8

$$\bar{x} = \frac{\sum x \times f}{\sum f}$$

$$= \frac{992}{20} = 49.6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f}$$

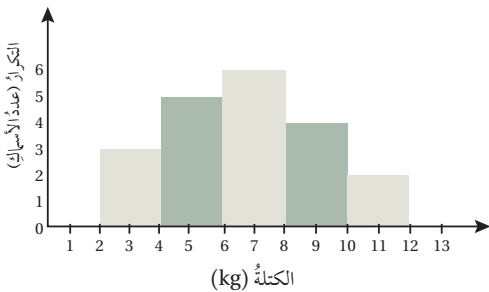
$$= \frac{380.8}{20} = 19.04$$

صيغة الوسط الحسابي
بالتعويض، والتبسيط
الصيغة الأولى لحساب التباين
بالتعويض، والتبسيط

2 الانحراف المعياري:

لتقدير الانحراف المعياري، أجد الجذر التربيعي للتباين: $\sigma \approx 4.36$

أتحقق من فهمي



صيد بحري: يُبين التمثيل بالمُدْرَج التكراري المجاور توزيعاً لكتل مجموعة من الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في مدينة العقبة. أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.



يحوي خليج العقبة ما يزيد على 500 نوع من الأسماك من أصل 1400 نوع تعيش في مياه البحر الأحمر.



عدد الطلبة	الفئات (عدد الكلمات في الدقيقة)
8	26 – 30
12	31 – 35
10	36 – 40
7	41 – 45
3	46 – 50

طباعة: يُبين الجدول المجاور توزيعًا لثلاثين طالبًا في الصف العاشر بحسب عدد الكلمات التي يستطيعون طباعتها في جهاز الحاسوب في دقيقة واحدة:

1 أقدّر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

2 أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

عدد الشقق	الفئات (المساحة m^2)
2	$80 \leq x < 100$
5	$100 \leq x < 120$
7	$120 \leq x < 140$
6	$140 \leq x < 160$
3	$160 \leq x < 180$

شقق سكنية: يُبين الجدول المجاور توزيعًا لـ 23 شقة سكنية – بحسب مساحتها – بنتها إحدى شركات الإسكان عام 2020م:

3 أقدّر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

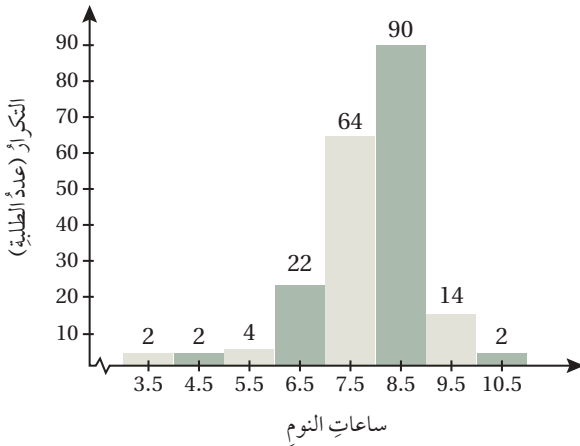
4 أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات بطريقتين مختلفتين.

الطول (x)	فريق الأسود	فريق النور
$170 \leq x < 178$	3	2
$179 \leq x < 187$	1	3
$188 \leq x < 196$	4	3
$197 \leq x < 205$	2	2

كرة سلة: يُبين الجدول المجاور توزيع أطوال اللاعبين في فريقين لكرة السلة بالسنتيمتر:

5 أقدّر التباين لأطوال اللاعبين في كل فريق.

6 أي الفريقين أكثر تجانسًا من حيث أطوال اللاعبين؟ أبرّر إجابتي.

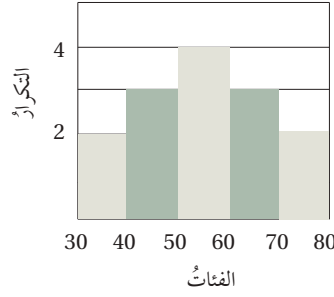
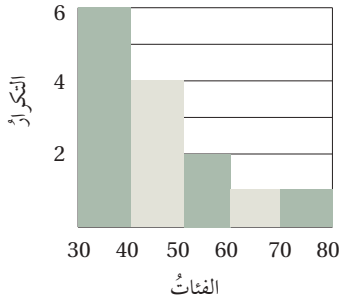


ساعات النوم: يُبين التمثيل بالمدّج التكراري المجاور توزيعًا لـ 200 طالب بحسب ساعات نومهم:

7 أقدّر الوسط الحسابي لهذه البيانات.

8 أقدّر التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

9 أصف توزيع هذه البيانات.



10 أقرن بين قيمتي التباين للبيانات المُمثلة في الشكلين المجاورين، مفسراً سبب الاختلاف بينهما.

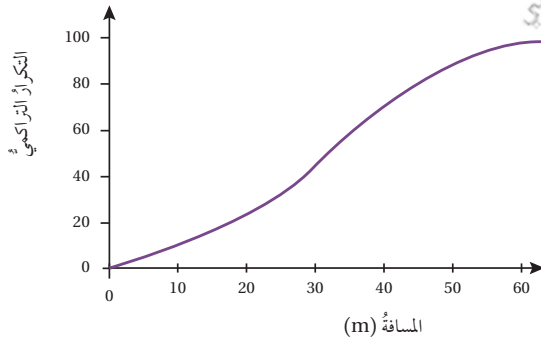
11 عمل: أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

12 مسألة مفتوحة: أنظم البيانات التالية في جدول تكراري (أختار طولاً مناسباً للفترة)، ثم أقدّر قيمتي الوسط الحسابي والتباين، مستعملاً آلة حاسبة لإيجاد القيمة الدقيقة لكل منهما، ثم أقرن قيمهما الدقيقة بالقيم التقديرية.

15	14	14	14	13	12	11	11	11	11
10	11	13	16	10	9	15	12	9	10
7	14	13	14	8	9	8	11	13	13
15	12	9	10	9	9	16	16	12	10
11	11	12	15	6	10	10	10	11	9

13 تبرير: في السؤال (12)، ما تأثير أطوال فترات الجدول التكراري الذي أنشأته في القيمة التقديرية للتباين؟ أبرر إجابتي.



14 تبرير: هل يمكن تقدير التباين للبيانات المُمثلة في المنحنى التكراري التراكمي المجاور؟ أبرر إجابتي.

15 تبرير: أكتب تبريراً لكل من الخطوات الجبرية الآتية:

$$\begin{aligned}\sum (x - \bar{x})^2 &= \sum x^2 - 2\bar{x} \sum x + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\ &= \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\end{aligned}$$

16 أكتب: أي صيغتي التباين أفضل استعمالها؟ لماذا؟

احتمالات الحوادث المتنافية Probability of Mutually exclusive Events

حساب احتمالات الحوادث المتنافية، وغير المتنافية، ومُتَمِّمة الحادث.

فكرة الدرس



الحادث البسيط، الحادث المركب، الحادثان المتنافيان، مُتَمِّمة الحادث.

المصطلحات



مسألة اليوم



استورد تاجرٌ شحنةً من السكر في باخرتين. إذا كان احتمال وصول الباخرة الأولى في موعدها 60%، واحتمال وصول الباخرة الثانية في موعدها 50%، واحتمال وصولهما معاً 30%، فما احتمال وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها؟

يُسمى الحادث الواحد (مثل وصول الباخرة الأولى في موعدها) **الحادث البسيط** (simple event) أما **الحادث المركب** (compound event) فيتكوّن من حادثين بسيطين أو أكثر، مثل وصول إحدى الباخرتين على الأقل في موعدها.

إذا كان (A) و (B) حادثين في تجربة عشوائية، فإنّهما يُسمّيان **حادثين متنافيين** (mutually exclusive)؛ شرط تعذر وقوعهما معاً في الوقت نفسه. ويُقصد بالمتنافيين عدم وجود عناصر مشتركة بينهما.

أتعلّم

يُطلق على الحادثين المتنافيين أيضاً اسم الحادثين المنفصلين.

مثال 1

أحدّد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا في ما يأتي، مُبرّراً إجابتي:

1 التجربة هي لعبة كرة القدم. الحادث الأول هو الفوز في المباراة، والحادث الثاني هو الخسارة.

الحادثان متنافيان؛ لأنّه لا يمكن الفوز والخسارة في الوقت نفسه.

2 التجربة هي لقاء حجر نرد منتظم. الحادثان هما الحصول على عدد زوجي، أو الحصول على عدد أقل من 3.

الحادثان غير متنافيين؛ نظراً إلى وجود عنصر مشترك بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجي، وأقل من 3 في الوقت نفسه.

أتذكّر

الحادثان (A) و (B) كلاهما مُركَّب؛ لأنّه يتكوّن من حادثين بسيطين.

أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان الحادثان متنافيين أم لا في ما يأتي، مُبرِّراً إجابتي:

- (a) التجربة هي سحب بطاقة واحدة عشوائياً من سلة فيها 5 بطاقات حمراء، و 3 بطاقات خضراء. الحادث الأول سحب بطاقة حمراء، والحادث الثاني سحب بطاقة خضراء.
- (b) التجربة هي إلقاء حجر نرد منتظم. الحادثان هما الحصول على عدد فردي أو عدد زوجي عند إلقاء حجر النرد.

تعرّفت سابقاً أنّ تقاطع حادثين في تجربة عشوائية يعني وقوعهما معاً، ويُستدلّ على ذلك من أداة الربط (و: and) والرمز $(\cap)$ ، وأنّ اتحاد حادثين يعني وقوع أحدهما على الأقل، ويُستدلّ على ذلك من أداة الربط (أو: or) والرمز $(\cup)$. فإذا كان (A) و (B) حادثين متنافيين، فإنّ احتمال وقوعهما معاً $(A \cap B)$ يساوي صفراً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل $(A \cup B)$ يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

مفهوم أساسي

بالكلمات:

إذا كان (A) و (B) حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، فإنّ احتمال وقوعهما معاً يساوي صفراً، واحتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

بالرموز:

إذا كان (A) و (B) حادثين متنافيين، فإنّ:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

أتعلّم

الحرف (P) هو اختصار لكلمة (Probability) التي تعني الاحتمال.

أتذكّر

لأيّ تجربة عشوائية احتمال وقوع الحادث البسيط E يساوي عدد عناصر هذا الحادث $n(E)$ ، مقسوماً على عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega)$ أي:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

مثال 2

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة، أجد ما يأتي:

1 احتمال ظهور العدد 1، وظهور عدد زوجي.

أفترض أنّ (A) هو حادث ظهور العدد 1، و (B) هو حادث ظهور عدد زوجي.

$$\text{إذن، } A = \{1\}, B = \{2, 4, 6\}$$

بما أنّ $\{1\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$ ، فإنّ (A) و (B) حادثان متنافيان. إذن، احتمال وقوعهما معاً هو

$$\text{صفر. وبالرموز: } P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = 0$$



أتذكّر

لأيّ حدث (A) في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما Ω ، فإنّ:
 $0 \leq P(A) \leq 1$

رموز الرياضيات

يُستعمل الحرف اليوناني Ω للدلالة على فضاء العينة للتجربة العشوائية. ويقرأ: أوميغا

2 احتمال ظهور العدد 1، أو ظهور عدد زوجي.

بما أنّ (A) و (B) حدثان متنافيان، فإنّ احتمال وقوع (A) أو (B) (وقوع أحدهما على الأقل) يساوي مجموع احتمالي وقوعهما. وبالرموز:

$$\begin{aligned} P(A \text{ or } B) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) && \text{صيغة احتمال حدثين متنافيين} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{3}{6} && \text{بإيجاد احتمالات كل من الحدثين، والتعويض} \\ &= \frac{2}{3} && \text{بالجمع، ثم التبسيط} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

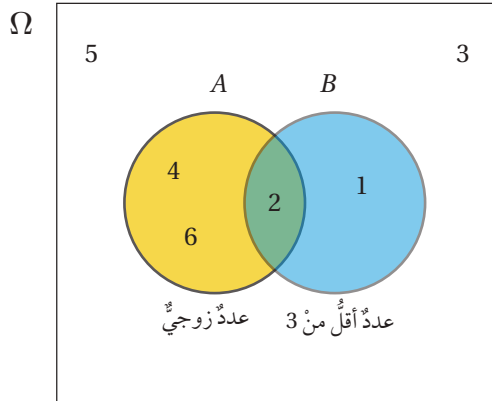
في تجربة اختيار عدد عشوائياً من بين الأعداد: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8، أجد:

(a) احتمال اختيار عدد أولي وبقبل القسمة على 4

(b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد يقبل القسمة على 4

لاحظت في المثال 1 أنّ حدثي الحصول على عدد زوجي أو عدد أقل من 3 عند إلقاء حجر نرد منتظم هما غير متنافيين؛ نظرًا إلى وجود عنصر مشترك بينهما، هو العدد 2، وهذا العدد زوجي، وأقل من 3، فكيف أجد احتمال وقوع أحدهما على الأقل؟

إذا كان (A) حدث الحصول على عدد زوجي، و (B) حدث الحصول على عدد أقل من 3، في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإنه يمكن تمثيل هذين الحدثين باستعمال أشكال فن كما يأتي:



عند حساب احتمال كل حدث على حدة، أجد أنّ:

$$P(A) = \frac{3}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{2}{6}$$

عند إيجاد احتمال وقوع أحد الحادئين على الأقل، وجمع هذين الاحتمالين، فإن احتمال العدد 2 سيتكرر؛ لأنه موجود في الحادئين (موجود في منطقة التقاطع بين الحادئين)، ولذلك يجب طرحه من مجموع الاحتمالين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادئين غير متنافيين في تجربة عشوائية فإن احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتماليهما، مطروحاً منه احتمال وقوع (A) و (B) معاً.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادئين غير متنافيين، فإن:

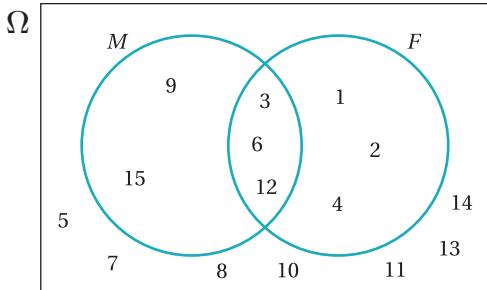
$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 3

يحتوي صندوق على 15 بطاقة مرقمة من 1 إلى 15، إذا سُحِبَت بطاقة عشوائياً، فأجد احتمال الحادئين الآتيين:

1 أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، ومن عوامل العدد 12

أفترض أن (M) هو حادث اختيار عدد من مضاعفات العدد 3، و (F) هو حادث اختيار عدد من عوامل العدد 12



أداة الوصل (و) في السؤال تشير إلى أن المطلوب هو تقاطع الحادئين (M) و (F).
يمكنني استعمال أشكال فن لتحديد عدد العناصر المشتركة بين الحادئين كما في الشكل المجاور:

$$P(M \text{ and } F) = P(M \cap F)$$

$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2 أن يكون العدد على البطاقة من مضاعفات العدد 3، أو من عوامل العدد 12

أداة الوصل (أو) في السؤال تشير إلى أن المطلوب هو اتحاد الحادتين غير المتنافيتين (M) و (F) اللذين سُميا في الفرع السابق. وهذا يعني احتمال وقوع أحدهما على الأقل (احتمال اتحادهما):

$$P(M \text{ or } F) = P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

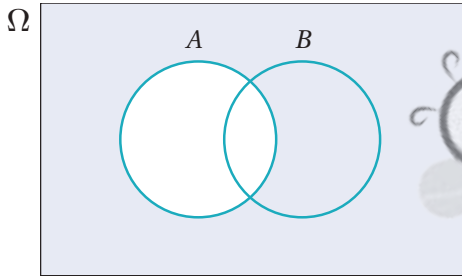
$$= \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$$

أتحقق من فهمي

في تجربة اختيار عدد عشوائياً من المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، أجد:

(a) احتمال اختيار عدد أولي ومن عوامل العدد 10

(b) احتمال اختيار عدد أولي، أو عدد من عوامل العدد 10



يحتوي الحادّ المُتمم (complement event)

للحادّ (A) لأيّ تجربة عشوائية على جميع عناصر فضاء العينة غير الموجودة في الحادّ (A)، ويُرمز إليه بالرمز $(\bar{A})$.

تمثل المنطقة الزرقاء في شكل فن المجاور $(\bar{A})$

بوصفها جزءاً من فضاء العينة. فمثلاً، عند إلقاء حجر نرد، إذا كان الحادّ (A) هو الحصول على العدد 5، فإن:

$$A = \{5\} \quad , \quad \bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

لذا، فإن:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مفهوم أساسي

احتمال وقوع مُتممة الحادّ (A) هو 1 ناقص احتمال وقوع الحادّ (A).

لأيّ حادّ (A) في تجربة عشوائية، فإن:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

بالكلمات:

بالرموز:

رموز رياضية

لأيّ تجربة عشوائية،
فإن $\bar{A}$ يعني عدم وقوع
الحادّ A .

مثال 4

جوائز: نالتْ خلودُ جائزةَ الطالبةِ المثاليةِ في الصفِّ العاشرِ، وطُلِبَ إليها أنْ تسحبَ جائزتها عشوائيًا من صندوقٍ يحتوي على 9 ساعاتٍ سوداءَ، و5 ساعاتٍ زرقاءَ، و8 ساعاتٍ حمراءَ. ما احتمالُ عدمِ اختيارِ خلودَ ساعةً حمراءَ؟

إذا كانَ (A) هوَ حادثُ الحصولِ على ساعةٍ حمراءَ، فإنَّ المطلوبَ هوَ $P(\bar{A})$:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

احتمالُ المُتممَةِ

$$= 1 - \frac{8}{22}$$

بالتعويضِ

$$= \frac{14}{22} = \frac{7}{11}$$

بالتبسيطِ

أتحقق من فهمي

سحبَ هيثمُ كرةً عشوائيًا من كيسٍ يحتوي على كراتٍ مُتماثلةٍ، واحدةٍ صفراءَ، و3 كراتٍ حمراءَ، و12 كرةً خضراءَ. ما احتمالُ عدمِ سحبِ هيثمَ كرةً خضراءَ؟

رموزٌ رياضيةٌ

تُستعملُ أحيانًا كلمة (فقط) في الاحتمالاتِ، مثل قولنا: احتمالُ وقوعِ الحادثِ A فقط، وتعني احتمالُ وقوعِ الحادثِ A ، وعدمِ وقوعِ أيِّ حوادثٍ أخرى معَ A في الوقتِ نفسه. وبالرموزِ:

$$p(A \text{ and not } B) = p(A \cap \bar{B})$$

أتدرب وأحل المسائل

أحدّد إذا كانَ الحادثانِ متنافيين أم لا لكل تجربةٍ عشوائيةٍ في ما يأتي، مُبرّرًا إجابتي:

- 1 ظهورُ العددِ 3، أو ظهورُ عددٍ زوجيٍّ عندَ إلقاءِ حجرٍ نردٍ منتظمٍ مرّةً واحدةً.
- 2 ظهورُ أحدِ عواملِ العددِ 12، أو ظهورُ عددٍ أوليٍّ عندَ إلقاءِ حجرٍ نردٍ منتظمٍ مرّةً واحدةً.
- 3 ظهورُ عددينِ مجموعتهما 8 أو 12 عندَ إلقاءِ حجرٍ نردٍ منتظمٍ مرّةً واحدةً.

في تجربةٍ اختيارِ بطاقةٍ واحدةٍ عشوائيًا من 20 بطاقةٍ مُتماثلةٍ، كُتِبَ على كلّ منها عددٌ من 1 إلى 20، أجدُ:

- 4 احتمالُ اختيارِ عددٍ من مضاعفاتِ العددِ 7، ومن مضاعفاتِ العددِ 5
- 5 احتمالُ اختيارِ عددٍ من مضاعفاتِ العددِ 7، أو من مضاعفاتِ العددِ 5
- 6 احتمالُ اختيارِ عددٍ فرديٍّ ويقبلُ القسمةَ على 4
- 7 احتمالُ اختيارِ عددٍ فرديٍّ، أو يقبلُ القسمةَ على 4

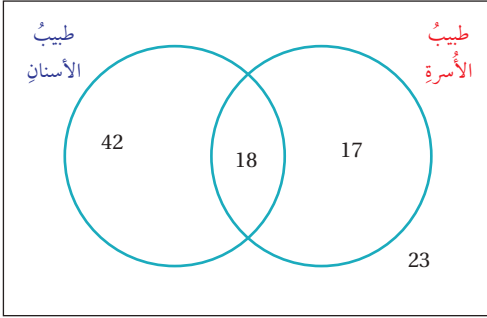
مجموعة من الكرات المُمَثِّلَة، مُرَقَّمة من 1 إلى 21، وموضوعة داخل صندوق. إذا اختيرت كرة من الصندوق عشوائياً، فأجدُ مُستعمِلاً أشكالَ فن:

8 احتمال أن تحمل الكرة عدداً زوجياً.

9 احتمال أن تحمل الكرة عدداً من مضاعفات العدد 3

10 احتمال أن تحمل الكرة عدداً زوجياً، ومن مضاعفات العدد 3

11 احتمال أن تحمل الكرة عدداً زوجياً، أو من مضاعفات العدد 3



طب: في دراسة طبية شملت 100 شخص، زار بعضهم طبيب الأسرة أو طبيب الأسنان في أحد الأسابيع كما هو مبين في شكل فن المجاور. إذا اختير أحدهم عشوائياً، فأجدُ احتمال كلِّ حادثٍ ممَّا يأتي:

12 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسنان.

13 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسرة.

14 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسنان، وطبيب الأسرة.

15 أن يكون الشخص قد زار طبيب الأسنان، أو طبيب الأسرة.

16 عدم زيارة الشخص طبيب الأسنان.

17 عدم زيارة الشخص طبيب الأسرة.

رياضة: سُئل 60 رياضياً إذا كانوا يمارسون لعبة كرة القدم أو كرة السلة، وقد توزعوا وفق إجاباتهم كما في الجدول الآتي:

كرة القدم، وكرة السلة	كرة القدم فقط	كرة السلة فقط	عدم ممارسة أيٍّ من اللعبتين
12	30	8	10

إذا اختير رياضيٌّ منهم عشوائياً، فأستعملُ أشكالَ فن لإيجاد:

18 احتمال أن يكون ممَّن يمارسون لعبتي كرة القدم وكرة السلة.

19 احتمال أن يكون ممَّن يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

20 احتمال أن يكون ممَّن يمارسون لعبة كرة السلة، ولا يمارسون لعبة كرة القدم.

21 احتمال أن يكون ممَّن لا يمارسون لعبة كرة القدم، ولا يمارسون لعبة كرة السلة.

22 **تجارة:** أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



23 **تحل:** يوجد في أحد المصانع 40 عاملاً، منهم 24 عاملاً يُفَضِّلون شرب الشاي وقت الاستراحة، و12 عاملاً يُفَضِّلون شرب القهوة ولا يُفَضِّلون شرب الشاي فيها، و14 عاملاً يُفَضِّلون شرب الشاي ولا يُفَضِّلون شرب القهوة فيها. إذا اختير أحد عمال المصنع عشوائياً، فما احتمال أن يكون ممن يُفَضِّلون شرب الشاي وشرب القهوة؟

24 **غير مُتَمِّم:** في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائياً، كُتِبَت الحوادث الآتية على بطاقات. أجد البطاقة المختلفة، مُبرِّراً إجابتي.

ظهور عدد يقبل القسمة على 3	ظهور عدد زوجي
ظهور عدد أقل من 5	ظهور عدد زوجي، وهو أكبر من 2

25 **تبرير:** قال هاني: إن احتمال فوز فريقه المُفَضَّل هو 0.3، فردَّ عليه يزيد قائلاً: إذن، احتمال خسارة الفريق هو 0.7، هل قول يزيد صحيح؟ أبرر إجابتي.

26 **مسألة مفتوحة:** أصف موقفين من حياتي اليومية، أحدهما يتضمن حدثين متنافيين، والآخر يتضمن حدثين غير متنافيين، مُبيناً كيف حدَّدت ذلك.

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة Probability of Independent and Dependent Events

تميّز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، وحساب احتمالاتها.

فكرة الدرس



الحوادث المستقلة، الحوادث غير المستقلة، الاحتمال المشروط، جداول الاتجاهين.

المصطلحات



مسألة اليوم



تحتوي السنة على 365 يومًا؛ لذا، فإن احتمال أن يكون الأول من شهر أيلول يوم ميلاد شخص هو 0.00273 تقريبًا. إذا اختير شخصان عشوائيًا، فما احتمال أن يكون يوم ميلادهما في الأول من الشهر نفسه؟

لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) **مستقلين** (independent) إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يؤثر في وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان (A) و (B) حادثين مستقلين في تجربة عشوائية، فإن احتمال وقوعهما معًا هو حاصل ضرب احتمال وقوع كل منهما.

بالرموز:

إذا كان (A) و (B) حادثين مستقلين، فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

أتعلم

تُستعمل عملية ضرب عند حساب احتمالات الحوادث التي تقع تباعًا. يمكن تعميم قانون حساب احتمال وقوع حادثين مستقلين معًا لأكثر من حادثين مستقلين.

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد وقطعة نقد منتظمين عشوائيًا معًا مرة واحدة، أجد احتمال ظهور العدد 6 على حجر النرد والصورة على قطعة النقد.

أفترض أن (A) هو حادث ظهور العدد 6 على حجر النرد، و (B) هو حادث ظهور الصورة على قطعة النقد.

ألاحظ أن وقوع الحادث (A) أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الحادث (B) أو عدم وقوعه. إذن، (A) و (B) حادثان مستقلان، وإن:

$$P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

أتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجرٍ نردٍ منتظمين عشوائيًا معًا مرةً واحدةً، أجد احتمال ظهور عددٍ فرديٍّ على حجر النرد الأول وعددٍ أكبر من 4 على حجر النرد الثاني.

لأي تجربة عشوائية، يكون الحادثان (A) و (B) **غير مستقلين** (dependent) إذا أثر وقوع أحدهما في احتمال وقوع الآخر.

مثال 2

أحدّد إذا كان الحادثان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:

- 1 سحب كرتين على التوالي عشوائيًا من كيسٍ فيه كراتٌ مُتماثلةٌ مختلفة الألوان، علمًا بأن سحب الكرة الثانية كان بعد إرجاع الكرة الأولى إلى الكيس. إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الكيس يعني أنه يُمكن إعادة سحبها، أو سحب غيرها، فتكون فرص سحبها وغيرها من الكرات متكافئة؛ أي إن نتيجة سحبها لا تؤثر في نتيجة سحب أي كرة أخرى؛ فالحادثان مستقلان.
- 2 سحب كرتين على التوالي عشوائيًا من كيسٍ فيه كراتٌ مُتماثلةٌ، وعدم إرجاع أيٍّ منهما إلى الكيس. عدم إرجاع الكرة المسحوبة أولاً إلى الكيس يعني نقص عدد الكرات المُتبقية فيه، وهذا يعني أن احتمال سحب الكرة الثانية سيتأثر بنتيجة الكرة المسحوبة أولاً؛ فالحادثان غير مستقلين.
- 3 سحب كرة عشوائيًا من كيسٍ فيه كراتٌ مُتماثلةٌ حمراء وصفراء، ثم سحب كرة عشوائيًا من كيسٍ آخر فيه كراتٌ مُتماثلةٌ حمراء وصفراء. نتيجة سحب الكرة من الكيس الأول لا تؤثر في نتيجة سحب كرة من الكيس الثاني؛ فالحادثان مستقلان.

أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان الحادثان مستقلين أم لا في الحالات الآتية:

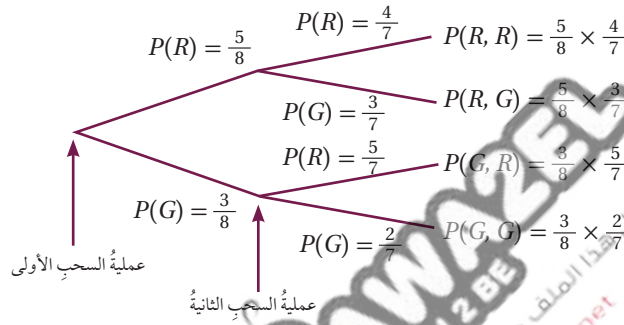
- (a) اختيار قطعة حلوى حمراء عشوائيًا وأكلها، ثم اختيار قطعة حلوى حمراء أخرى عشوائيًا من كيسٍ يحوي 10 قطع حلوى حمراء و 25 قطعة حلوى زرقاء جميعها متماثلة.
- (b) ظهور العدد 5 على حجرٍ نردٍ ألقيا معًا مرةً واحدةً عشوائيًا.
- (c) سحب كرة حمراء عشوائيًا من كيسٍ كراتٍ متماثلة، 4 منها حمراء و 3 صفراء، ثم إعادة سحبها إلى الكيس، ثم سحب كرة حمراء أخرى عشوائيًا.

يساعد استعمال الشجرة الاحتمالية على حساب احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.

مثال 3

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و 3 كرات خضراء (G)، جميعها متماثلة. سُحِبَتْ كرة من الكيس عشوائياً، ثم كُتِبَ لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُحِبَتْ كرة أخرى عشوائياً، ثم كُتِبَ لونها. أوجد احتمال كل من الحوادث التالية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

ألاحظ من التمثيل بالشجرة الاحتمالية الآتي كيف تتأثر عملية السحب الثانية بنتيجة عملية السحب الأولى عند عدم إرجاع الكرة المسحوبة:



1 سحب كرتين خضراوين.

$$P(G \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

بعد عملية السحب الأولى يقل عدد الكرات في

الكيس بمقدار كرة خضراء

2 سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكرّة حمراء في المرة الثانية.

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالة واحدة فقط

من الحالات الأربع التي تظهر في الشجرة الاحتمالية

3 سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.

$$P(G \cap R) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالتين، هما:

الكرة الأولى حمراء، والثانية خضراء

أو الكرة الأولى خضراء، والثانية حمراء

لغة الرياضيات

العبارات الآتية متكافئة:

- سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.
- سحب كرتين مختلفتي اللون.
- سحب كرتين، إحداهما حمراء، والأخرى خضراء.
- سحب كرة من كل لون.

أتحقق من فهمي

- يحتوي كيس على 6 قطع حلوى حمراء (R)، و 8 قطع حلوى خضراء (G)، جميعها مُتماثلة. اختارَ طفلٌ من الكيس قطعة حلوى عشوائياً وأكلها، ثم اختارَ قطعةً أخرى عشوائياً ليأكلها. أجدُ احتمالَ كلٍّ من الحادّين الآتيين باستعمالِ الشجرة الاحتمالية:
- (a) اختيارُ الطفلِ قطعتي حلوى مُتماثلتي اللون.
- (b) اختيارُ الطفلِ قطعتي حلوى مختلفتي اللون.

ألاحظُ في المثال السابق أن احتمال سحب كرة خضراء في المرّة الأولى وكرة حمراء في المرّة الثانية يساوي احتمال سحب كرة خضراء في المرّة الأولى مضروباً في احتمال سحب كرة حمراء في المرّة الثانية، علماً بأنّ كرة خضراء سُحبت في المرّة الأولى.

مفهوم أساسي

بالكلمات: احتمال وقوع حادثين غير مستقلّين معاً يساوي احتمال وقوع الحادث الأول مضروباً في احتمال وقوع الحادث الثاني بعد وقوع الحادث الأول.

بالرموز: إذا كان (A) و (B) حادثين غير مستقلّين في تجربة عشوائية ما فإن:

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B | A)$$

يقرأ الرمز $P(B | A)$: احتمال وقوع الحادث (A) شرط وقوع الحادث (B)؛ لذا يُسمّى **الاحتمال المشروط** (conditional probability)، ويُمكن إيجادُه باستعمال الصيغة الآتية:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

مثال 3

ألقي حجر نردٍ منتظم عشوائياً مرّةً واحدة. ما احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجياً؟

في هذه التجربة العشوائية، فضاء العينة هو: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

إذا كان (A) هو حادث ظهور العدد 6، و (B) هو حادث ظهور عدد زوجي، فإن:

$$A = \{6\}, B = \{2, 4, 6\} \rightarrow A \cap B = \{6\}$$

$P(A | B)$ تعني احتمال ظهور العدد 6 إذا كان العدد الظاهر زوجياً:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

الاحتمال المشروط

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

ألقي حجر نرد منتظم عشوائياً مرّة واحدة. ما احتمال ظهور عدد أكبر من 3 إذا كان العدد الظاهر زوجياً؟

في كثير من الأحيان، تعرض البيانات لفتن من الأشياء، في ما يُسمى **جداول الاتجاهين** (two-ways tables)، وهي جداول تتيح إيجاد الاحتمال المشروط على نحو سهل.

مثال 4: من الحياة

ورقية	غير ورقية	
7	49	السبت:
8	121	الأحد:

تدوير: يُبين الجدول المجاور كتل النفايات التي جُمعت بالأطنان في يومين من إحدى المدن. إذا سُحِبَت عيّنة عشوائية منها قبل البدء بإعادة تدويرها، فما احتمال أن تكون العيّنة ورقية، وأنها جُمعت يوم الأحد؟

ورقية	غير ورقية	المجموع
7	94	101
8	121	129
15	215	230

إذا كان (A) هو حادث سحب عيّنة من الورق، و (B) هو حادث سحب عيّنة جُمعت يوم الأحد، فما قيمة $P(A | B)$ ؟

الخطوة 1: أكمل جدول الاتجاهين بإيجاد المجاميع.

الخطوة 2: أجد احتمالات الحوادث اللازمة لحساب الاحتمال المشروط.

بالنظر إلى جدول الاتجاهين، أجد كلاً من: $P(A)$ ، و $P(B)$ ، و $P(A \cap B)$:

$$P(A) = \frac{15}{230}$$

كتلة الورق التي جُمعت في اليومين 15 طناً، وكتلة جميع النفايات التي جُمعت في اليومين 230 طناً

$$P(B) = \frac{129}{230}$$

كتلة النفايات التي جُمعت يوم الأحد 129 طناً، وكتلة النفايات التي جُمعت في اليومين 230 طناً



تُسهّل عملية تدوير النفايات في المحافظة على البيئة بصورة كبيرة. فمثلاً، إعادة تدوير طن واحد من الورق قد تحوّل دون قطع 17 شجرة.

$$P(A \cap B) = \frac{8}{230}$$

كتلة النفايات الورقية التي جُمِعَت يوم الأحد 8 أطنان،
وكتلة جميع النفايات التي جُمِعَت 230 طنًا

الخطوة 3: أَعُوْضْ قِيَمَ الاحتمالات بصيغة الاحتمال المشروط.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

صيغة الاحتمال المشروط

$$= \frac{\frac{8}{230}}{\frac{129}{230}} = \frac{8}{129}$$

بالتعويض، والتبسيط

إذن، احتمال أن تكون العينة ورقية، وأنها جُمِعَت يوم الأحد هو $\frac{8}{129}$

أتحقق من فهمي

إذا سُحِبَت عِيْنَةٌ عشوائية، فما احتمال أن تكون غير ورقية، وجمعت يوم السبت؟

ملحوظة

ألاحظ أنه يمكنني إيجاد هذا الناتج بسهولة من جدول الاتجاهين مباشرةً.

ملخص المفاهيم

القانون	الوصف	نوع الحوادث
$P(A \cap B) = 0$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة.	المتنافيان
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	يوجد بينهما عناصر مشتركة.	غير المتنافيين
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	لا يوجد بينهما عناصر مشتركة، واتحادهما معاً يمثل فضاء العينة.	المُتَمَامَانِ
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	المستقلان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B A)$	وقوع أحدهما يؤثر في احتمال وقوع الآخر.	غير المستقلين
$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$	وجود معلومة إضافية عن وقوع أحدهما.	المشروطة



كرات زجاجية: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، وكرتين صفراوين (Y)، جميعها متماثلة. سُحِبَتْ كرة من الكيس عشوائياً، ثم كُتِبَ لونها، ثم أُعيدَت إلى الكيس، ثم سُحِبَتْ كرة أخرى عشوائياً، ثم كُتِبَ لونها:

1 ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية صفراء؟

2 ما احتمال أن تكون الكرتان خضراوين؟

أُحْدَدُ إذا كان الحادثان مستقلين أو غير مستقلين في كل من التجارب العشوائية الآتية:

3 سحب كرة زرقاء عشوائياً من صندوق، والحصول على العدد 5 عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة.

4 اختيار طالب من مواليد شهر 10 عشوائياً ليخرج من غرفة الصف، ثم اختيار طالب آخر عشوائياً من مواليد شهر 5 ليلحق به.

5 الحصول على عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وعدد يقبل القسمة على 2 عند إلقاء حجر نرد آخر منتظم.

6 إصابة صيادين الهدف الذي أطلق كل منهما طلقة واحدة عشوائياً نحوه.

7 سحب بطاقة عشوائياً تحمل العدد 6 من مجموعة بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من 1 إلى 10، ثم إعادتها، ثم سحب بطاقة أخرى عشوائياً تحمل عدداً زوجياً.

أقلام حبر: في علبة قلم حبر أحمر، وثلاثة أقلام حبر أزرق، جميعها متماثلة. اختار سالم منها قلمين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

8 اختيار قلمي حبر أحمر.

9 اختيار قلمي حبر أزرق.

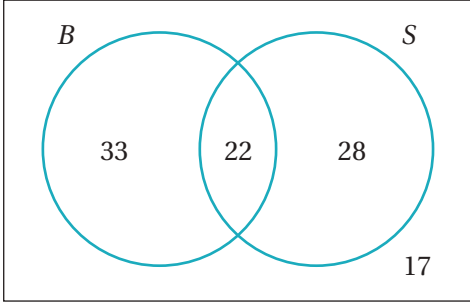
10 اختيار قلم حبر من كل لون.

سياقة سيارات: يخضع مُتَدَرِّب على سياقة السيارات لاختبار يتكوّن من جزأين: نظري، وعملي.

احتمال نجاح المُتَدَرِّب في الجزء النظري 90%، وإذا نجح فيه، فإن احتمال نجاحه في الجزء العملي 80%، أما إذا رسب في الجزء النظري، فإن احتمال رسوبه في الجزء العملي 40%:

11 أجد احتمال نجاح المُتَدَرِّب في كلا الاختبارين.

12 أجد احتمال نجاح المُتَدَرِّب في أحد الاختبارين، ورسوبه في الآخر.



سُئِلَ 100 شخصٍ عن وجود أخٍ لهم أو أختٍ، وقد توزَّعوا
وفق إجاباتهم كما في شكل فنّ المجاور، حيث:

B : الأشخاص الذين لكلٍّ منهم أخ.

S : الأشخاص الذين لكلٍّ منهم أخت.

إذا اختيرَ أحد هؤلاء الأشخاص عشوائيًا، فما احتمال:

13 أن يكون له أخ؟

14 أن يكون له أخ، علمًا بأن له أختًا؟

15 أن يكون له أخت، علمًا بأن له أخًا؟

وظائف: يُبيِّن الجدول المجاور أعداد المتقدمين لوظيفة في إحدى الشركات، ومؤهلاتهم العلمية، وخبراتهم السابقة.

لديه خبرة سابقة			
لا	نعم		
27	54	نعم	لديه شهادة جامعية
4	5	لا	لديه شهادة جامعية

إذا اختيرَ أحد المتقدمين للوظيفة عشوائيًا، فما احتمال:

16 أن يكون لديه خبرة سابقة، علمًا بأن لديه شهادة جامعية؟

17 ألا يكون لديه شهادة جامعية، علمًا بأن لديه خبرة سابقة؟

إشارات مرور: تمرُّ غادة في رحلة عودتها من العمل بشارع رئيسٍ عليه إشارتان ضوئيتان. إذا كان احتمال أن تصل الإشارة الأولى، وتجتازها وهي مضاءة باللون الأخضر G هو 0.3، وإذا كانت مضاءة بالأحمر R ، فإن احتمال وصولها الإشارة الثانية وهي مضاءة بالأحمر هو 0.8، أما إذا كانت الإشارة الأولى مضاءة بالأخضر، فإن احتمال وصولها الإشارة الثانية وهي مضاءة بالأحمر هو 0.4

أستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد كلٍّ من الاحتمالات الآتية:

18 احتمال وصولها كلاً من الإشارتين وهما مضاءتان بالأحمر.

19 احتمال وصولها كلاً من الإشارتين وهما مضاءتان بالأخضر.

20 احتمال وصولها إحدى الإشارتين وهي مضاءة بالأخضر، ووصولها الإشارة الأخرى وهي مضاءة بالأحمر.

أرصادٌ جويةٌ: أفادت مذيعةُ النشرة الجوية أنَّ احتمالَ تساقطِ الثلوج يومَ الإثنينِ هيَ 25%، وأنها ترتفعُ إلى 90% يومَ الثلاثاءِ. أستمَلِ التمثيلَ بالشجرة الاحتمالية لإيجادِ احتمالِ:

21 تساقطِ الثلوج يومَ الثلاثاءِ، وعدمِ تساقطِها يومَ الإثنينِ.

22 عدمِ تساقطِ الثلوج في كلا اليومينِ.

23 تساقطِ الثلوج في أحدِ اليومينِ على الأقلِ.

صيدٌ: أطلقَ صيَّادٌ طلقةً واحدةً على هدفٍ، وأطلقَ آخرُ طلقةً واحدةً على الهدفِ نفسه. إذا كان احتمالُ إصابةِ الأولِ للهدفِ 70%، واحتمالُ إصابةِ الثاني للهدفِ 60%، فأجدُ احتمالَ:

24 إصابةِ كلا الصيَّادينِ للهدفِ.

25 عدمِ إصابتهما للهدفِ.

26 إصابةِ الصيَّادِ الثاني للهدفِ، علمًا بأنَّ الصيَّادَ الأولَ أصابَ الهدفَ.

27 عدمِ إصابةِ الصيَّادِ الثاني للهدفِ، علمًا بأنَّ الصيَّادَ الأولَ لم يُصِبِ الهدفَ.

مهارات التفكير العليا

28 **تبريرٌ:** إذا كانَ (A) و (B) حادثينِ متنافيينِ في تجربةٍ عشوائيةٍ، فما قيمةُ $P(A | B)$ ؟ أبرِّرْ إجابتي.

29 **تبريرٌ:** قالتَ تماضرُ: إنَّه لأيَّ حادثينِ (A) و (B) في فضاءِ العينة Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$$P(A | B) = P(B | A)$$

هل قولُ تماضرَ صحيحٌ؟ أبرِّرْ إجابتي.

30 **تحَدُّ:** يحتوي كيسٌ على n من الكراتِ المُتماثلةِ مختلفةِ الألوانِ. إذا كانَ احتمالُ سحبِ الكرةِ الأولى ثمَّ سحبِ الكرةِ

الثانية من دونِ إرجاعٍ 2.4% تقريبًا، فما قيمةُ n ؟

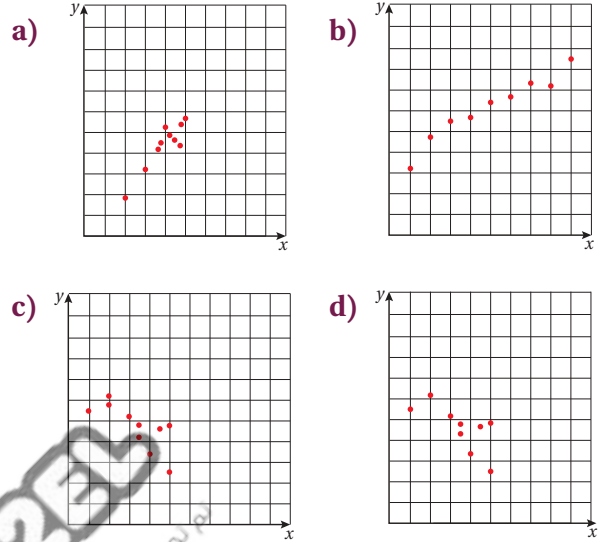
31 **مسألة مفتوحة:** أذكرْ مثالًا على حادثينِ مستقلينِ، ومثالًا آخرَ على حادثينِ غيرِ مستقلينِ، مُبيِّنًا كيفَ أجدُ احتمالَ وقوعِ

الحادثينِ معًا في كلِّ مثالٍ.

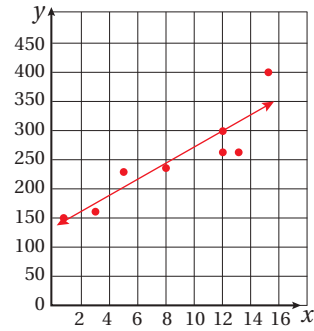
اختبارُ نهايةِ الوحدة

أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 شكل الانتشار الذي يُظهر الارتباط الموجب الأقوى بين (x) و (y) هو:



2 باستعمال المستقيم الأفضل مطابقةً في الشكل الآتي، تقدير قيمة y عندما $x = 7$ هو:

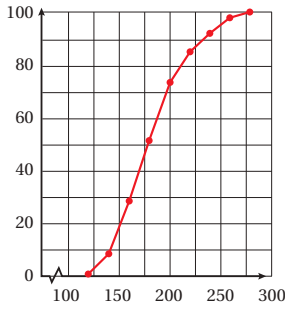


a) 150 b) 175
c) 200 d) 225

3 قيمة المدى الربيعي للقيم: 10، 7، 8، 10، 5، 11، 15، 12، 13، 9، 6، 7، 4 هي:

a) 5 b) 6
c) 9 d) 11

4 رسائل بريدية: يُبين الشكل الآتي المنحنى التكراري التراكمي لكتلة 100 رسالة (بالغرام) مُسجَلة لدى أحد مكاتب البريد. قيمة الربع الأعلى لكتل الرسائل هي:



a) 160 b) 200
c) 210 d) 230

5 في الجدول الآتي، إذا كان مجموع مُربعات انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي في التكرار المقابل لها هو 324، فإن قيمة التباين هي:

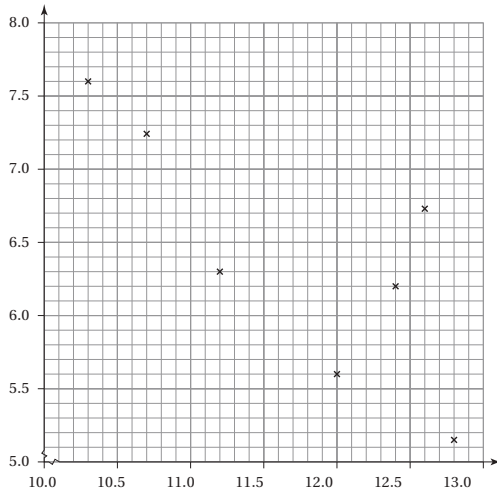
الفئات	التكرار
$10 > x \geq 5$	7
$15 > x \geq 10$	12
$20 > x \geq 15$	6

a) 13.50 b) 12.96
c) 3.67 d) 3.60

6 حجران نرد: ألقى حجران نرد منتظمين، أحدهما أحمر، والآخر أزرق عشوائياً مرة واحدة. احتمال ظهور عدد أولي على حجر النرد الأحمر، وعدد أقل من 3 على حجر النرد الأزرق هو:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{36}$
c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

اختبارُ نهايةِ الوحدة



8 أُعِينْ عَلَى شَكْلِ الانتِشَارِ نَقَاطَ الرِّيَاضِيِّينَ: I, J, K, L .

9 أَرَسِّمُ الْمُسْتَقِيمَ الْأَفْضَلَ مُطَابَقَةً.

10 أَسْتَعْمَلُ الْمُسْتَقِيمَ الْأَفْضَلَ مُطَابَقَةً لِتَقْدِيرِ مَسَافَةِ الْقَفْزَةِ

الطَوَلِيَةِ لِلْعَاطِبِ (A).

11 أَصِفُ الْارْتِبَاطَ فِي شَكْلِ الانتِشَارِ.

الْتِكْرَارُ	كُتْلَةُ الْبَيْضَةِ (x)
15	$30 < x \leq 40$
48	$40 < x \leq 50$
72	$50 < x \leq 60$
81	$60 < x \leq 70$
54	$70 < x \leq 80$
30	$80 < x \leq 90$

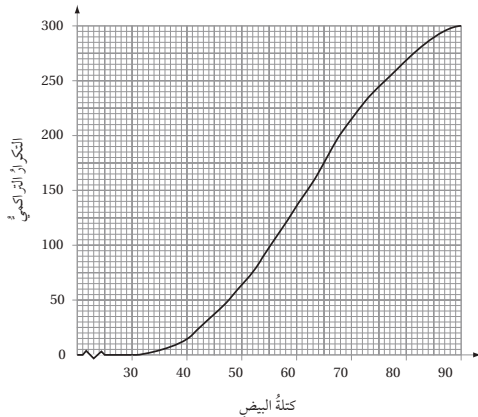
زِرَاعَةُ: دَوْنُ مِهْنَدِسْ

زِرَاعِيٌّ كُتْلَةُ 300

بَيْضَةٍ بِالْغَرَامِ، كَمَا فِي

الْجَدْوَلِ الْآتِي:

يُبَيِّنُ التَّمْثِيلُ الْآتِي الْمُنْحَنِي التَّكَرَّارِيَّ التَّرَاكُمِيَّ لِهَذَا الْجَدْوَلِ:



7 كِرَاتٌ: فِي صَنْدُوقِ 7 كِرَاتٍ حُمْرَاءَ، وَ3 كِرَاتٍ

خَضِرَاءَ، جَمِيعُهَا مُتَمَاثِلَةٌ. إِذَا سُجِبَتْ مِنْهُ كِرَتَانِ

عَشَوَائِيًّا عَلَى التَّوَالِي مِنْ دُونِ إِرجَاعٍ، فَإِنَّ احْتِمَالَ أَنْ

تَكُونِ الْكِرَتَانِ الْمَسْحُوبَتَانِ مِنَ اللَّوْنِ نَفْسِهِ هُوَ:

a) $\frac{29}{50}$

b) $\frac{24}{45}$

c) $\frac{21}{45}$

d) $\frac{1}{15}$

مَسَابَقَاتُ رِيَاضِيَّةٌ: شَارَكَ 12 مُتَسَابِقًا فِي سَبَاقِ الْجَرِيِّ مَسَافَةَ

100 m، وَشَارَكَ 11 مُتَسَابِقًا مِنْهُمْ فِي مَسَابَقَةِ الْقَفْزِ الطَوَلِيِّ،

فَكَانَتْ نَتَائِجُهُمْ كَمَا فِي الْجَدْوَلِ الْآتِي:

الْمُتَسَابِقُ	زَمَنُ سَبَاقِ 100m (ثَانِيَّةً)	مَسَافَةُ الْقَفْزَةِ الطَوَلِيَّةِ (مَتْرًا)
A	12.1	y
B	10.3	7.60
C	12.8	5.15
D	10.7	7.25
E	12.6	6.72
F	11.2	6.30
G	12.0	5.60
H	12.4	6.20
I	10.6	6.90
J	12.7	5.70
K	11.3	6.85
L	11.1	6.70

يُبَيِّنُ التَّمْثِيلُ الْآتِي شَكْلَ الانتِشَارِ لَزَمَنِ سَبَاقِ الْجَرِيِّ مَسَافَةَ

100 m، وَمَسَافَةَ الْقَفْزَةِ الطَوَلِيَّةِ لِلْمُتَسَابِقِينَ مِنْ (B) إِلَى

(H):

اختبار نهاية الوحدة

أستعمل المنحنى التكراري التراكمي لإيجاد:

12 قيمة الوسيط لكتل البيض، مُفسراً دلالتَهُ.

13 قيمة المدى الربيعي لكتل البيض، مُفسراً دلالتَهُ.

14 قيمة المئين 80 لكتل البيض، مُفسراً دلالتَهُ.

15 عدد البيض الذي تزيد كتلته على 65g

16 يُمثّل الجدول الآتي كمية الأمطار في إحدى مناطق

المملكة على مدار 20 عامًا لأقرب مليمتراً:

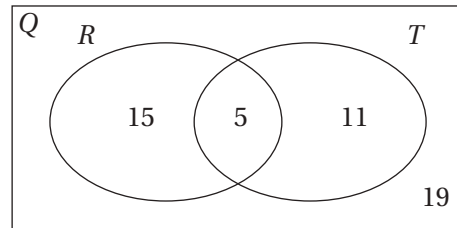
عدد السنوات	كمية الأمطار
2	$199 \leq x < 249$
3	$249 \leq x < 299$
6	$299 \leq x < 349$
3	$349 \leq x < 399$
4	$399 \leq x < 449$
2	$449 \leq x < 499$

أجدُ التباين والانحراف المعياري لكمية الأمطار.

سيارات: يُبين شكل فن الآتي عدد السيارات الحمراء R ،

وعدد السيارات ذات البابين T ، وعدد سيارات أخرى في أحد

مواقف السيارات Q :



إذا اختيرت سيارة عشوائياً، فما احتمال:

17 أن تكون حمراء، وذات بايْن؟

18 ألا تكون حمراء، ولها بابان؟

19 إذا اختيرت سيارة، وكانت ذات بايْن، فما احتمال ألا

تكون حمراء؟

20 إذا اختيرت سيارتان، الواحدة تلو الأخرى عشوائياً،

فما احتمال أن يكون لونهما أحمر؟

كرات ملونة: يحتوي كيس على كرتين سوداوين، وكرة

بيضاء. إذا كانت جميع الكرات مُتماثلة، وسحب مصعب

كرة عشوائياً، ثم كتب لونها، ثم أعادها إلى الكيس، ثم

سحب أخرى عشوائياً، ثم كتب لونها، فأستعمل التمثيل

بالشجرة الاحتمالية لإيجاد الاحتمالات الآتية:

21 الكرتان المسحوبتان بيضاوان.

22 الكرتان المسحوبتان مختلفتا اللون.

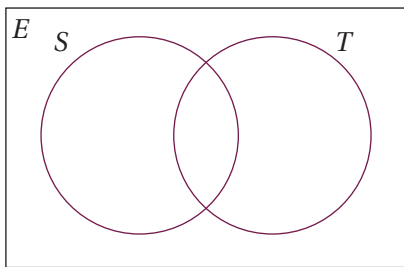
23 إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل لونها أسود.

إذا كانت (E) مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 25،

وكانت (S) مجموعة عوامل العدد 16، وكانت (T)

مجموعة عوامل العدد 24.

24 أكتب أعداد المجموعة (E) في شكل فن الآتي.



إذا اختير عدد عشوائياً من المجموعة (E) ، فما احتمال:

25 أن يكون عاملاً لكل من العدد 16، والعدد 24؟

26 أن يكون عاملاً للعدد 16، علماً بأنه عامل للعدد 24؟

27 أن يكون عاملاً للعدد 24، علماً بأنه عامل للعدد 16؟

تدريبات على الاختبارات الدولية

لون العينين: يُبين الجدول الآتي احتمال أن يكون الشخص في مجتمع ما ذا عينين زرقاوين، أو بُنيّتين، أو خضراوين:

لون العينين	خضراوان	بُنيّان	زرقاوان
الاحتمال	0.1	0.5	0.4

إذا اختير شخصان عشوائيًا، فما احتمال:

35 أن تكون عينا كل منهما زرقاوين؟

36 أن تكون عينا كل منهما مختلفتي اللون؟

أقلام ملونة: يحتوي صندوق على 3 أقلام حمراء R ، وقلمين زرقاوين B ، و 4 أقلام خضراء G . اختارت شيما قلمين عشوائيًا من الصندوق على التوالي، ومن دون إرجاع. ما احتمال:

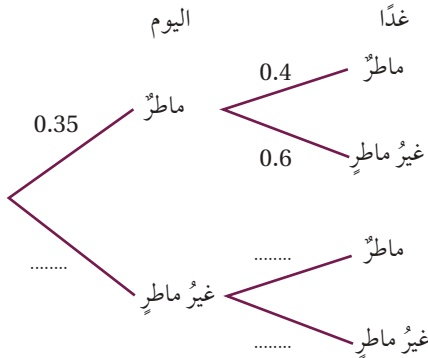
37 أن يكون لون القلمين أحمر؟

38 أن يكون للقلمين اللون نفسه؟

39 أن يكون لون أحد القلمين فقط أخضر؟

أمطار: إذا نزل المطر اليوم، فإن احتمال نزوله غدًا هو 0.4، وإذا لم ينزل اليوم، فإن احتمال نزوله غدًا هو 0.2:

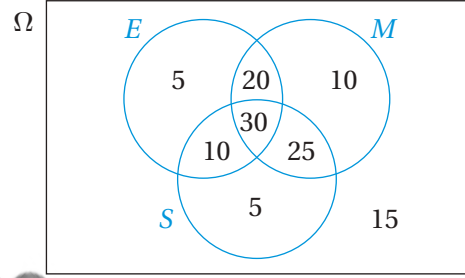
40 أكمل الفراغ في الشكل الآتي:



41 أجد احتمال نزول المطر في يوم واحد على الأقل من اليومين الواردين في الشكل.

28 ألا يكون عاملاً للعدد 16، علماً بأنه ليس عاملاً للعدد 24؟

تقدّم 120 طالباً لاختبارات في اللغة الإنجليزية (E)، والرياضيات (M)، والعلوم (S)، وقد توزّعوا وفق نجاحهم في هذه الاختبارات كما في شكل فنّ الآتي.

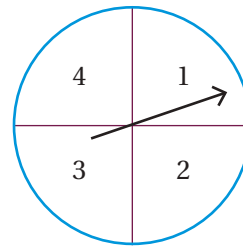


إذا اختير أحد هؤلاء الطلبة عشوائيًا، فما احتمال:

29 أن يكون ناجحاً في العلوم، علماً بأنه ناجح في الرياضيات؟

30 أن يكون ناجحاً في اللغة الإنجليزية، علماً بأنه ناجح في الرياضيات؟

31 ألا يكون ناجحاً في العلوم، علماً بأنه ليس ناجحاً في الرياضيات؟



إذا أُدير المؤشّر في الشكل المجاور مرتين عشوائيًا، وُجِعَ العددين اللذان توقّف عندهما المؤشّر، فما احتمال:

32 أن يكون المجموع أقل من 5؟

33 أن يتوقّف المؤشّر عند العدد نفسه في المرّتين إذا كان المجموع أقل من 5؟

34 أن يكون المجموع أقل من 5 إذا توقّف المؤشّر عند العدد نفسه في المرّتين؟