المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الثاني

الصف التاسع

٩

قرّرتْ وزارةُ التربيةِ والتعليمِ تدريسَ هذا الكتابِ في مدارسِ المملكةِ الأُردُنيّةِ الهاشميةِ جميعِها، بناءً على قرارِ مجلسِ التربيةِ والتعليمِ رَقْـمِ (٢٠١٥/٣١) تاريخ ٢٦/٣/٢٠١٥م، بدءًا منَ العامِ الدراسي ٢٠١٥م/٢٠١٦م.

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٥/٥/٢٠٨٢)
ISBN: 978 - 9957 - 84 - 627 - 5

قام بتأليف هذا الكتاب كلٌّ من:
فدوى خليل الطناطشة، اسماعيل علي صالح، د. [illegible] العزوقات، رناد حسن بغدادي.
وأشرف على تأليفه كل من:
أ. د. وصفي أحمد شطناوي، أ. د. أحمد عبدالله رحيل، أ. د. عبدالله محمد ربابعة، أ. د. ربى محمد مقدادي، عصام سليمان الشطناوي (مقررًا).

التحرير العلمي: عصام سليمان الشطناوي
التحرير اللغوي: حياة عبدالله عبيدات
التحرير الفني: نرمين داوود العزة
التصميم والرسم: هاني سلطي مقطش
الإنتــــــاج: علي محمد العويدات

دقق الطباعة: اسماعيل علي صالح
راجعها: عصام سليمان الشطناوي

الطَّبعةُ الأُولى (التجريبيّة)
١٤٣٦هـ/ ٢٠١٥م

قائمةُ المحتويات

٥

تُستخدمُ الأسسُ في كثيرٍ منَ المجالاتِ، حيثُ تُساعدُ في تسهيلِ الحساباتِ المتعلقةِ بكثيرٍ منَ المواضيعِ، مثلَ علمِ الفلكِ، والأبعادِ بينَ الكواكبِ والنجومِ وبعدِها عنِ الأرضِ، وعلمِ الأحياءِ الدقيقةِ، وحسابِ سرعاتِ الضوءِ والنيازكِ وغيرِها، وحسابِ حجمِ جسيماتٍ صغيرةٍ لا تُرى بالعينِ المجردةِ مثل: الذراتِ والإلكتروناتِ.

الوحدةُ الخامسةُ

الأسسُ النسبيّةُ

يُتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- التعرفِ على القوانينِ المتعلقةِ بالأسسِ النسبيةِ.
- تطبيقِ قوانينِ الأسسِ النسبيةِ – على فرضِ أنها معرفةٌ – في تبسيطِ التعابيرِ العدديّةِ:

  إذا كانتْ م، ن أعدادًا نسبيةً؛ فإنّ:

  - $س^{ن} \times س^{م} = س^{ن+م}$
  - $س^{ن} \div س^{م} = س^{ن-م}$
  - $(س \times ص)^{م} = س^{م} \times ص^{م}$
  - $(س \div ص)^{م} = س^{م} \div ص^{م}$
  - $(س^{ن})^{م} = (س^{م})^{ن} = س^{ن م}$
  - $س^{٠} = ١$
  - $س^{-م} = ١ \div س^{م}$
- حلّ مسائلَ حياتيةٍ على الأسسِ النسبيةِ.

تهيئة

١) اكتبْ كلًّا ممّا يأتي على صورةِ أُسٍّ:

أ) $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$

ب) $-٣ \times -٣ \times -٣$

جـ) $-١ \times -١ \times -١ \times ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥$

د) $\frac{-٤}{٥} \times \frac{-٤}{٥} \times \frac{-٤}{٥} \times \frac{-٤}{٥}$

هـ) $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

و) $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{-١}{٧} \times \frac{-١}{٧} \times \frac{-١}{٧}$

٢) اكتبْ كلًّا مما يأتي على شكلِ أُسٍّ واحدٍ ثمّ جِدِ الناتجَ:

أ) $٢^{٥} \times ٢^{٧}$

ب) $٦^{٤} \times$ [illegible]^{٤}

جـ) $١٠^{٢} \times ١٠^{-٣}$

د) $(٠,٢٥ \times ٠,٧)^{٢}$

هـ) $\frac{(-٨)^{١٠}}{(-٨)^{١٠}}$

و) $\frac{٩^{١٢}}{٣^{١٢}}$

ز) $\frac{[illegible]}{٣^{٥}}$

٣) عبّرْ بالصورةِ العلميةِ عنْ كلٍّ منَ الأعدادِ الآتيةِ:

أ) ٧٠٠٠٠٠٠٠٠

ب) ٦٩٥٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

جـ) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٤

د) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٨١٢٥

٤) اكتبِ العددَ الذي يمثلُ كلاًّ مما يأتي:

أ) ٩×١٠^{٤}

ب) $٢,٤٥٢ \times ١٠^{٨}$

جـ) ٥×١٠^{-٦}

ب) $١,٩٧٦١ \times ١٠^{-١٣}$

هـ) $٧\frac{١}{٢} \times ١٠^{٥}$

و) $٣\frac{١}{٤} \times ١٠^{-٧}$

٥) حلِّلِ الأعدادَ الآتيةَ إلى عواملها الأولية، ثمَّ اكتبْها باستخدامِ الأسسِ:

٢٠٠، ٥٦، ١٩٦، ٣٤٣، [illegible]، ٥١٢

٦) حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) $س^{٥} = ٢٤٣$

ب) $٢ س^{٤} = ١٢٥٠$

٥ – ١ الأسسُ النسبيّةُ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ الأسسَ النسبيةَ.
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً على الأسسِ النسبيةِ.

صندوقُ خشبٍ مكعّبُ الشكلِ طولُ ضلعهِ $\sqrt{س}$ سم، يرادُ ملؤُهُ بالترابِ:

١) جِدْ حجمَ الترابِ.

٢) اكتبْ حجمَ الترابِ على صورةِ أسسٍ.

• تذكَّرْ

إذا كانَ س، م ∈ ص، س ≠ صفرًا، فإنَّ:

$$(س)^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$$

$$\left(\frac{١}{س}\right)^{-م} = س^{م}$$

تعلَّمْ

- ■ ط : مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيةِ.
- ■ ص : مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ.
- ■ ح : مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ.
- ■ ن : مجموعةُ الأعدادِ النسبيةِ.

مثال (٥–١):

جِدْ قيمَةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) $٦^{٢}$ ٢) $(-٣)^{٥}$ ٣) $٥^{-٤}$

٤) $(-٢)^{-٣}$ ٥) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢}$ ٦) $\left(\frac{-٢}{٧}\right)^{٣}$

الحلُّ:

١) $٦^{٢} = ٦ \times ٦ = ٣٦$

٢) $(-٣)^{٥} = -٣ \times -٣ \times -٣ \times -٣ \times -٣ = -٢٤٣$

٣) $(٥^{-٤}) = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٤} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{٦٢٥}$

٤) $(-٢)^{-٣} = \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٣} = \frac{-١}{٢} \times \frac{-١}{٢} \times \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٨}$

٥) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$

٦) $\left(\frac{-٢}{٧}\right)^{٣} = \frac{-٢}{٧} \times \frac{-٢}{٧} \times \frac{-٢}{٧} = \frac{-٨}{٣٤٣}$

تدريب ٥-١

جِدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $(٣)^{٦}$ ب) $(٢)^{-٤}$ جـ) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٧}$

د) $\left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٣}$ هـ) $\left(\frac{٢}{٦}\right)^{-٢}$ و) $\left(\frac{-٦}{٨}\right)^{-١}$

ز) $(-٢)^{-٤}$ ح) (-٥) ط) $(١٧٨)^{٠}$

الأسسُ النسبيةُ:

لمعرفةِ الأسسِ النسبيةِ، إليكَ الآتي:

مربعُ العددِ $٢ = ٢^{٢} = ٢ \times ٢ = ٤$ والجذرُ التربيعيُّ للعددِ $٤ = \sqrt{٤} = ٢$

وتُكتبُ $\sqrt{٤}$ على صورةِ $(٤)^{\frac{١}{٢}}$ وتُسمى **أُسًّا نسبيًّا**.

وكذلكَ

مكعبُ العددِ $٤ = ٤^{٣} = ٤ \times ٤ \times ٤ = ٦٤$ والجذرُ التكعيبيُّ للعددِ $٦٤ = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

وتكتبُ $\sqrt[٣]{٦٤}$ على صورةِ $(٦٤)^{\frac{١}{٣}}$

الحلُّ:

١) $٧٠٠٠٠٠٠ = ٧ \times ١٠^{٦}$

٢) $٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٤,٩١٨ \times ١٠^{١٢}$

٣) $٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣ = \frac{٣}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠} = \frac{٣}{١٠^{١٠}} = ٣ \times ١٠^{-١٠}$

٤) $٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠١٢٥ = \frac{١٢٥}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠} = \frac{١٢٥}{١٠^{١٤}}$

$= ١٢٥ \times ١٠^{-١٤}$

$= ١,٢٥ \times ١٠^{-١٤} \times ١٠^{٢} = ١,٢٥ \times ١٠^{-١٢}$

تدريبٌ (٥-٤)

عبّرْ بالصورةِ العلميّةِ عنْ كلٍّ منَ الأعدادِ الآتيةِ:

أ) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣٤٦ ب) ٩٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

جـ) ٩٨١٧٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ د) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٢١٥

قاعدةٌ (١)

عندَ كتابةِ العددِ بالصورةِ العلميّةِ فإنّهُ يُكتبُ على صورةِ $أ \times ١٠^{ن}$ حيثُ $أ \in [١، ١٠)$، $ن \in ص$:

١) عندَ إزاحةِ الفاصلةِ العشريةِ إلى اليسارِ نضربُ في $١٠^{ن}$، حيثُ ن عددُ المنازلِ التي تتحركُها الفاصلةُ العشريةُ.

٢) عندَ إزاحةِ الفاصلةِ العشريةِ إلى اليمينِ نضربُ في $١٠^{-ن}$، حيثُ ن عددُ المنازلِ التي تتحركُها الفاصلةُ العشريةُ.

مثالٌ (٥-٥)

اكتبِ الأعدادَ الآتيةَ دونَ استخدامِ الصورةِ العلميّةِ:

١) $٤,٥ \times ١٠^{-٧}$ ٢) ٨×١٠^{١٦}

٣) $٩,٢٣٧ \times ١٠^{٩}$ ٤) ٦×١٠^{-١٥}

٣) $(٥^{-٤}) = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٤} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{٦٢٥}$

٤) $(-٢)^{-٣} = \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٣} = \frac{-١}{٢} \times \frac{-١}{٢} \times \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٨}$

٥) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٦}$

٦) $\left(\frac{-٢}{٧}\right)^{٣} = \frac{-٢}{٧} \times \frac{-٢}{٧} \times \frac{-٢}{٧} = \frac{-٨}{٣٤٣}$

تدريبٌ ٥-١

جِدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $(٣)^{٦}$ ب) $(٢)^{-٤}$ جـ) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{٢}$

د) $\left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٢}$ هـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢}$ و) $\left(\frac{-٦}{٨}\right)^{-١}$

ز) $(-٢)^{-٤}$ ح) (-٥) ط) $(١٧٨)^{٠}$

الأسسُ النسبيةُ:

لمعرفةِ الأسسِ النسبيةِ، إليكَ الآتي:

مربعُ العددِ ٢ $= ٢^{٢} = ٢ \times ٢ = ٤$ والجذرُ التربيعيُّ للعددِ ٤ $= \sqrt{٤} = ٢$

وتُكتَبُ $\sqrt{٤}$ على صورةِ $(٤)^{\frac{١}{٢}}$ وتُسمى **أُسًّا نسبيًّا**.

وكذلكَ

مكعبُ العددِ ٤ $= ٤^{٣} = ٤ \times ٤ \times ٤ = ٦٤$ والجذرُ التكعيبيُّ للعددِ ٦٤ $= \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

وتكتبُ $\sqrt[٣]{٦٤}$ على صورةِ $(٦٤)^{\frac{١}{٣}}$

قاعدةٌ (١)

١) إذا كانتْ ن عددًا زوجيًا موجبًا، وكانتْ س عددًا حقيقيًا موجبًا، فإنّ: $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{ن}}}$

٢) إذا كانتْ ن عددًا فرديًا موجبًا، وكانتْ س عددًا حقيقيًا ، فإنّ: $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{ن}}}$

سؤالٌ: لماذا يُشترطُ أنْ يكونَ س عددًا موجبًا إذا كانَ ن عددًا زوجيًا؟

مثالٌ (٥-٢)

اكتبْ كلاًّ ممّا يأتي على صورةِ أسسٍ نسبيةٍ، ثمّ جِدْ قيمةَ كلٍّ منها:

١) $\sqrt{\text{١٤٤}}$ ٢) $\sqrt[\text{٣}]{\text{١٢٥}}$ ٣) $\sqrt{\frac{\text{٤}}{\text{١٦}}}$ ٤) $\sqrt[\text{٣}]{\frac{\text{١-}}{\text{٢٧}}}$

الحلُّ:

١) $\sqrt{\text{١٤٤}} = (\text{١٤٤})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{١٢}$ ٢) $\sqrt[\text{٣}]{\text{١٢٥}} = (\text{١٢٥})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} = \text{٥}$

٣) $\sqrt{\frac{\text{٤}}{\text{١٦}}} = \left(\frac{\text{٤}}{\text{١٦}}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٤}}$ ٤) $\sqrt[\text{٣}]{\frac{\text{١-}}{\text{٢٧}}} = \left(\frac{\text{١-}}{\text{٢٧}}\right)^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} = \frac{\text{١-}}{\text{٣}}$

تدريبٌ (٥-٢)

اكتبْ كلاًّ ممّا يأتي على صورةِ أسسٍ نسبيةٍ ثمّ جِدْ قيمةَ كلٍّ منها:

أ) $\sqrt{\text{٨١}}$ ب) $\sqrt[\text{٣}]{\text{٢١٦-}}$ جـ) $\sqrt[\text{٣}]{\text{٥١٢}}$

د) $\sqrt{\frac{\text{٣٦}}{\text{١٠٠}}}$ هـ) $\sqrt[\text{٣}]{\frac{\text{٦٤}}{\text{١٠٠٠}}}$ و) $\sqrt[\text{٣}]{\frac{\text{٢٧-}}{\text{١٣٣١}}}$

تعلّمْ:

نستخدمُ طريقةَ التحليلِ إلى العواملِ لحسابِ قيمِ بعضِ الأسسِ النسبيةِ المختلفةِ.

مثالٌ (٥-٣)

جِدْ قيمةَ $(٦٢٥)^{\frac{١}{٤}}$

الحلُّ:

٦٢٥	٥
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	قِفْ

$(٦٢٥)^{\frac{١}{٤}} = (٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥)^{\frac{١}{٤}} = ٥$

حيثُ نأخذُ منْ كلِّ (٤) أعدادٍ أوليةٍ متشابهةٍ عددًا واحدًا فيكونُ الناتجُ هوَ ٥، وهذهِ هيَ نفسُ طريقةِ حسابِ الجذرِ التربيعيِّ والجذرِ التكعيبيِّ للعددِ.

تدريب (٥-٣)

جِدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $(١٠٢٤)^{\frac{١}{٥}}$ ب) $(٧٢٩)^{\frac{١}{٦}}$ جـ) $(٥١٢)^{-\frac{١}{٣}}$

د) $(١٢٩٦)^{\frac{١}{٤}}$ هـ) $(١٤٤)^{\frac{١}{٢}}$ و) $(٤٩ \times ٤٩ \times ٤٩)^{\frac{١}{٦}}$

لاحظْ أنَّ:

١) $٥٠ = ٥ \times ١٠$ ٢) $٠,٥ = \frac{٥}{١٠} = ٥ \times ١٠^{-١}$

٣) $٥٠٠ = ١٠٠ \times ٥ = ٥ \times ١٠^{٢}$ ٤) $٠,٠٥ = \frac{٥}{١٠٠} = ٥ \times ١٠^{-٢}$

٥) $٥٠٠٠ = ١٠٠٠ \times ٥ = ٥ \times ١٠^{٣}$ ٦) $٠,٠٠٥ = \frac{٥}{١٠٠٠} = ٥ \times ١٠^{-٣}$

ومِنْ هنا يُمكنُ الاستنتاجُ أنَّ قوى العددِ ١٠ تُستخدمُ لكتابةِ الأعدادِ النسبيةِ على الصورةِ الآتيةِ:

$$أ \times ١٠^{ن} ، حيث \; ١ \le أ < ١٠ ، \; أ \in ح ، \; ن \in ص$$

وتُسمّى هذهِ الصورةُ **الصورةَ العلميّةَ**.

مثالٌ (٥-٤)

عبّرْ بالصورةِ العلميّةِ عنْ كلٍّ منَ الأعدادِ الآتيةِ:

١) ٧٠٠٠٠٠٠ ٢) ٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

٣) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣ ٤) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠١٢٥

الحلُّ:

١) $٧٠٠٠٠٠٠ = ٧ \times ١٠^{٦}$

٢) $٤٩١٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٤{,}٩١٨ \times ١٠^{١٢}$

٣) $٠{,}٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣ = \frac{٣}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠} = \frac{٣}{١٠^{١٠}} = ٣ \times ١٠^{-١٠}$

٤) $٠{,}٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠١٢٥ = \frac{١٢٥}{١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠} = \frac{١٢٥}{١٠^{١٤}}$

$= ١٢٥ \times ١٠^{-١٤}$

$= ١{,}٢٥ \times ١٠^{-١٤} \times ١٠^{٢} = ١{,}٢٥ \times ١٠^{-١٢}$

تدريب (٥–٤)

عبِّرْ بالصورةِ العلميّةِ عنْ كلٍّ منَ الأعدادِ الآتيةِ:

أ) ٣٤٦٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ب) ٩٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠

جـ) ٩٨١٧٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ د) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٣٢

قاعدةٌ (١)

عندَ كتابةِ العددِ بالصورةِ العلميّةِ فإنّهُ يُكتبُ على صورةِ $أ \times ١٠^{ن}$ حيثُ $أ \in [١، ١٠)$، $ن \in ص$:

١) عندَ إزاحةِ الفاصلةِ العشريةِ إلى اليسارِ نضربُ في $١٠^{ن}$، حيثُ ن عددُ المنازلِ التي تتحركُها الفاصلةُ العشريةُ.

٢) عندَ إزاحةِ الفاصلةِ العشريةِ إلى اليمينِ نضربُ في $١٠^{-ن}$، حيثُ ن عددُ المنازلِ التي تتحركُها الفاصلةُ العشريةُ.

مثالٌ (٥–٥)

اكتبِ الأعدادَ الآتيةَ دونَ استخدامِ الصورةِ العلميّةِ:

١) $٤{,}٥ \times ١٠^{-٧}$ ٢) ٨×١٠^{١٦}

٣) $٩{,}٢٣٧ \times ١٠^{٩}$ ٤) ٦×١٠^{-١٥}

الحلُّ:

١) $٤,٥ \times ١٠^{-٧} = ٠,٠٠٠٠٠٠٤٥$ ٢) $٨ \times ١٠^{١٦} = ٨٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠$

٣) $٩,٢٣٧ \times ١٠^{٩} = ٩٢٣٧٠٠٠٠٠٠$ ٤) $٦ \times ١٠^{-١٥} = ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٦$

تدريبٌ ٥-٥

١) اكتبِ الأعدادَ الآتيةَ دونَ استخدامِ الصورةِ العلميّةِ:

أ) ٥×١٠^{١٠} ب) $٨,٦ \times ١٠^{-١١}$

جـ) ٤×١٠^{-١٨} د) $١,٣٧ \times ١٠^{٢٠}$

٢) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

• فكّرْ

هلْ يمكنُكَ كتابةُ الأعدادِ الصحيحةِ السالبةِ مستعملاً قوى العددِ ١٠؟

أعطِ أمثلةً على ذلكَ.

تمارينُ ومسائلُ

١) عبّرْ بالصورةِ العلميّةِ عنْ كلٍّ منَ الأعدادِ الآتيةِ:

أ) ٩٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠   ب) ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠١٨٦

جـ) −٠,٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٧   د) ١٦٢٠٠٠٠

هـ) ١٥٤,٦٣   و) −٣٢٠٠٠,٠٠٤٥

٢) اكتبِ الأعدادَ الآتيةَ دونَ استخدامِ الصورةِ العلميّةِ:

أ) ٣٩×١٠^{٥} ب) ٢×١٠^{-٨}

جـ) ٦٢٥×١٠^{-٤} د) ١٨٧٠٩×١٠^{١٥}

هـ) $٥٤,٨٢ \times ١٠^{-١٦}$ و) $-١٣٩,٧٠٦ \times ١٠^{١١}$

٣) جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $\left(\frac{-٢}{٣}\right)^{٤}$ ب) $\left(\frac{١}{٥}\right)^{-٥}$ جـ) $(٤)^{٦}$

د) $(-٦)^{٢}$ هـ) $\left(\frac{٣}{٩}\right)^{-٣}$ و) $٢^{٨}$

هـ) $(٧٩٢)^{\frac{١}{٣}}$ و) $\left(\frac{١}{٣٢}\right)^{\frac{١}{٥}}$ ز) $(٢٥٦)^{-\frac{١}{٤}}$

٤) أرادتْ ولاءُ ملءَ صندوقٍ زجاجيٍّ مكعبِ الشكلِ برملٍ ملوّنٍ، فإذا كانَ حجمُ الرملِ الملونِ = ٨٠٠٠ سم^{٣}، فكمْ طولُ حرفِ الصندوقِ؟

٥ - ٢ قوانينُ الأسسِ (١)

النتاجات

- تعرُّفُ قوانينَ الأسسِ النسبيةِ.
- تحلُّ مسائلَ حياتيّةً باستعمالِ قوانينِ الأسسِ النسبيةِ.

حديقتانِ مربعتا الشكلِ، طولُ ضلعِ الأولى (س) م، وطولُ ضلعِ الثانيةِ (ص) م، اكتبْ على صورةِ أسسٍ كلًّا منْ:

١) حاصلِ ضربِ مساحتيهما.

٢) ناتجِ قسمةِ مساحتيهما.

هلْ يمكنُ كتابةُ:

١) ناتجِ جمعِ مساحتيهما على صورةِ أسسٍ؟

٢) ناتجِ طرحِ مساحتيهما على صورةِ أسسٍ؟

مثالٌ (٥-٦):

جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) $٢^{٤}$ ٢) $٢^{٣}$ ٣) $٢^{٤} \times ٢^{٣}$

٤) $٢^{٧}$ ٥) $\frac{٢^{٤}}{٢^{٣}}$ ٦) $٢^{٤-٣}$

الحلُّ:

١) $٢^{٤} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$ ٢) $٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$

٣) $٢^{٤} \times ٢^{٣} = ١٦ \times ٨ = ١٢٨$ ٤) $٢^{٧} = ٢^{٤+٣} = ١٢٨$

٥) $\frac{٢^{٤}}{٢^{٣}} = \frac{١٦}{٨} = ٢$ ٦) $٢^{٤-٣} = ٢^{١} = ٢$

مثالٌ (٥-٧):

جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) $٢^{٣}$ ٢) $(٢^{٣})^{٢}$ ٣) $(٢^{٢})^{٣}$ ٤) $٢^{٣ \times ٢}$

الحلُّ:

١) $٢^{٣} = ٨$ ٢) $(٢^{٣})^{٢} = ٨^{٢} = ٨ \times ٨ = ٦٤$

٣) $(٢^{٢})^{٣} = ٤^{٣} = ٤ \times ٤ \times ٤ = ٦٤$ ٤) $٢^{٣ \times ٢} = ٢^{٦} = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٦٤$

ماذا تلاحظُ؟

قاعدة (١)

إذا كانَ س عددًا حقيقيًّا، وكانَ م، ن عددينِ نسبيينِ، فإنَّ:

١) $س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

٢) $\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$ ، س $\neq$ صفرًا

٣) $(س^{م})^{ن} = (س^{ن})^{م} = س^{ن \times م}$

مثالٌ (٥-٨):

جِدْ قيمَةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) $(٨١)^{\frac{١}{٤}} \times ٩$ ٢) $\left(\frac{-٢٤٣}{٣٢}\right)^{\frac{١}{٥}}$ ٣) $\sqrt{(٢^{٨})^{٢}}$ ٤) $\frac{٦٢٥}{١٢٥}$

الحلُّ:

١) $(٨١)^{\frac{١}{٤}} \times ٩ = (٣^{٤})^{\frac{١}{٤}} \times ٣^{٢} = ٣^{٤ \times \frac{١}{٤}} \times ٣^{٢} = ٣^{١} \times ٣^{٢} = ٣^{١+٢} = ٣^{٣} = ٢٧$

٢) $\left(\frac{-٢٤٣}{٣٢}\right)^{\frac{١}{٥}} = \frac{(-٢٤٣)^{\frac{١}{٥}}}{(٣٢)^{\frac{١}{٥}}} = \frac{((-٣)^{٥})^{\frac{١}{٥}}}{((٢)^{٥})^{\frac{١}{٥}}} = \frac{(-٣)^{٥ \times \frac{١}{٥}}}{(٢)^{٥ \times \frac{١}{٥}}} = \frac{(-٣)^{١}}{٢^{١}} = \frac{-٣}{٢}$

٣) $\sqrt{(٢^{٨})^{٢}} = (٢^{١٦})^{\frac{١}{٢}} = ٢^{٨}$

٤) $\frac{٦٢٥}{١٢٥} = \frac{٥ \times ٥ \times ٥ \times ٥}{٥ \times ٥ \times ٥} = \frac{(٥)^{٤}}{(٥)^{٣}} = ٥^{٤-٣} = ٥^{١} = ٥$

تدريبٌ (٥-٦)

جِدْ قيمَةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $(٢١٦)^{\frac{١}{٣}} \times ٣٦$ ب) $(-١٢٨)^{\frac{١}{٧}}$

جـ) $\left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{\frac{١}{٤}}$ د) $\sqrt[٦]{٧٢٩}$

مثالٌ (٥-٩):

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِمّا يأتي:

١) $٣^{٥} \times ٢^{٥}$ ٢) $(٣ \times ٢)^{٥}$ ٣) $٨^{٣} \div ٤^{٣}$ ٤) $\left(\frac{٨}{٤}\right)^{٣}$

٥) $٩^{٥} \div ٩^{٥}$ ٦) $\left(\frac{٩}{٩}\right)^{٥}$ ٧) $\frac{١}{٧^{-٤}}$

الحلُّ

١) $٣^{٥} \times ٢^{٥} = (٣\times٣\times٣\times٣\times٣) \times (٢\times٢\times٢\times٢\times٢)$

$= (٣\times٢) \times (٣\times٢) \times (٣\times٢) \times (٣\times٢) \times (٣\times٢)$

$= (٣\times٢)^{٥} = ٦^{٥} = ٧٧٧٦$

٢) $(٣ \times ٢)^{٥} = ٦^{٥} = ٧٧٧٦$

٣) $٨^{٣} \div ٤^{٣} = \frac{٨\times٨\times٨}{٤\times٤\times٤} = \frac{٨}{٤} \times \frac{٨}{٤} \times \frac{٨}{٤} = \left(\frac{٨}{٤}\right)^{٣} = ٢^{٣} = ٨$

٤) $\left(\frac{٨}{٤}\right)^{٣} = ٢^{٣} = ٨$

٥) $٩^{٥} \div ٩^{٥} = \frac{٩^{٥}}{٩^{٥}} = ١$

٦) $\left(\frac{٩}{٩}\right)^{٥} = ١^{٥} = ١$

٧) $\frac{١}{٧^{-٤}} = ٧^{٤} = ٧\times٧\times٧\times٧ = ٢٤٠١$

ماذا تلاحظُ؟

• فكِّرْ

برِّرْ ما يأتي:

- $س^{٠} = ١$ ، $س \neq$ صفراً!
- $س^{-م} = \frac{١}{س^{م}}$ ، $س \neq$ صفراً!

قاعدةٌ (٢)

إذا كانَ س، ص عددينِ حقيقيينِ، حيثُ $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$ ، وكان (م) عددًا نسبيًا، على فرضِ أنَّ $س^م$ ، $ص^م$ معرّفانِ، فإنَّ:

١) $س^م \times ص^م = (س \times ص)^م$

٢) $\frac{س^م}{ص^م} = \left(\frac{س}{ص}\right)^م$

٣) $س^٠ = ١$

٤) $س^{-م} = \frac{١}{س^م}$

فكّرْ

إذا كانَ $س \neq$ صفرًا ، م عددًا نسبيًا، هلْ يمكنُ أنْ يكونَ $س^م$ غيرَ معرّفٍ؟ برّرْ إجابتكَ.

تدريبٌ (٥-٧)

جِدْ قيمَةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $(١٥)^٢$

ب) [illegible]$^{٢} \times ٣^{-٢}$

جـ) $\left(\frac{١}{٧}\right)^٢ \times ٤٩$

د) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٢} \times \frac{٤}{١٥}$

مثالٌ (٥-١٠):

جِدْ قيمَةَ كلٍّ مما يأتي:

١) $(\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٣})^٩$

٢) $\frac{(\sqrt{٥}-١)^{١٥}}{(\sqrt{٥}-١)^{١٣}}$

الحلُّ:

١) $(\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٣})^٩ = \sqrt[٣]{(٢)^٩} \times \sqrt[٣]{(٣)^٩} = \sqrt[٣]{((٢)^٣)^٣} \times \sqrt[٣]{((٣)^٣)^٣}$

$= ٢^٣ \times ٣^٣ = ٨ \times ٢٧ = ٢١٦$

٢) $\frac{(\sqrt{٥}-١)^{١٥}}{(\sqrt{٥}-١)^{١٣}} = (\sqrt{٥}-١)^{١٥-١٣} = (\sqrt{٥}-١)^٢$

$= ٥ - ٢\sqrt{٥} + ١ = ٦ - ٢\sqrt{٥}$

١) جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $\dfrac{٥^{-٢} \times ٢٠^{٤}}{٢^{٧}}$ ب) $(٦٤)^{\frac{١}{٢}} \times (٦٤)^{\frac{١}{٣}}$ جـ) $\dfrac{\sqrt{٢}}{١٦^{\frac{١}{٨}}}$

د) $\dfrac{(٢٤)^{٣}}{٦^{٥} \times ٩^{-٢}}$ هـ) $\dfrac{\sqrt{١٢٦}}{\sqrt{٦}}$ و) $\sqrt{٩٠٠} \times \sqrt{١٩٦}$

٢) جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي بأبسطِ صورةٍ:

أ) $(\sqrt[٣]{٧})^{-٣}$ ب) $\dfrac{(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٥}}{(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{-٥}}$ جـ) $\left(\dfrac{١٠}{(\sqrt{٦})^{-٣}}\right)^{٢}$

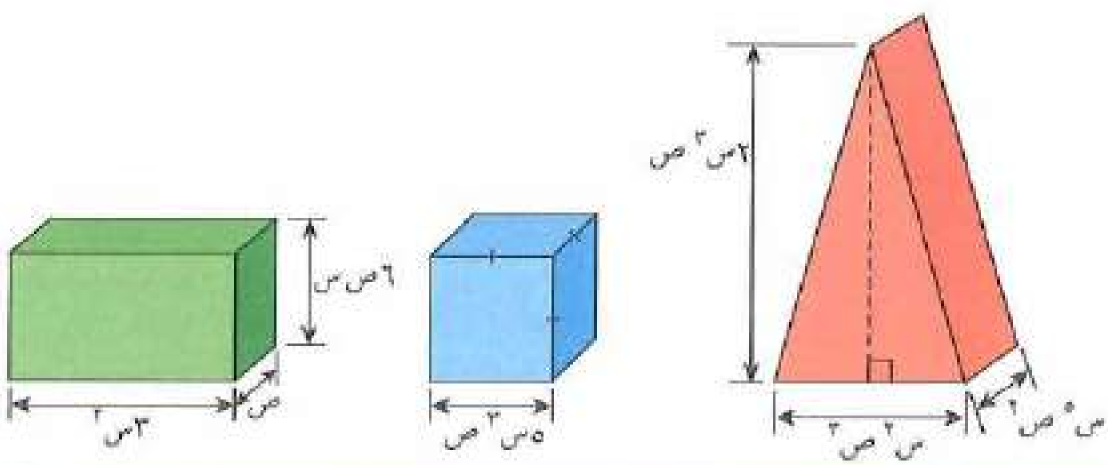
د) $\left(\dfrac{\sqrt{٢} \times \sqrt[٣]{٣}}{\sqrt{٥}}\right)^{١٢}$ هـ) $(\sqrt{٢} - ١)^{١٠} (\sqrt{٢} + ١)^{١٠}$ و) $\left(\dfrac{٢٥٦}{٦٢٥}\right)^{-\frac{١}{٤}}$

٣) برهنْ أنّهُ إذا كانَ أ ، ب عددينِ حقيقيينِ بحيثُ أ ، ب $\neq$ صفرًا، وكانَ ن عددًا نسبيًا على فرضِ أنَّ $\left(\dfrac{أ}{ب}\right)^{ن}$ معرّفةٌ فإنَّ:

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{-ن}$$

٤) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

٥) إذا كانتْ أطوالُ أحرفِ كلٍّ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ بالسنتيمتراتِ، فَعبِّرْ عنْ حجمِ كلٍّ منها مستخدمًا الأُسُسَ:

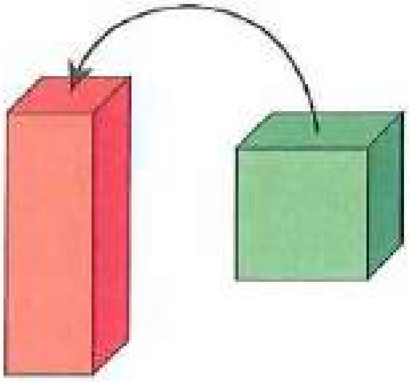


قوانينُ الأسسِ (٢)

النتاجاتُ:

- تتعرّفُ قوانينَ الأسسِ النسبيّةِ

خزانُ ماءٍ على شكلِ مكعبٍ طولُ حرفِهِ ($\frac{١}{٢}$) م، مملوءٌ بالماءِ، فُرّغَ الماءُ في خزانٍ آخرَ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ لهُ السعةُ نفسُها، قاعدتهُ مربعةُ الشكلِ وارتفاعُه (١) م، ما طولُ ضلعِ قاعدتِهِ؟



نشاط (١-١)

جِد قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

١) $\sqrt[٣]{٨^{٢}}$ ٢) $(\sqrt[٣]{٨})^{٢}$

٣) $\sqrt{٤^{٣}}$ ٤) $(\sqrt{٤})$

٥) $\sqrt{١٦^{\frac{١}{٢}}}$ ٦) $(\sqrt{١٦})^{\frac{١}{٢}}$

ماذا تُلاحظُ؟

لا بدَّ أنّكَ لاحظتَ أنّهُ:

قاعدةُ (١)

إذا كانتْ م $\in$ ط، ن عددًا نسبيًا، س $\in$ ح$^{+}$، فإنَّ:

$$\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ن}}} = (\sqrt[\text{م}]{\text{س}})^{\text{ن}} = (\text{س}^{\frac{١}{\text{م}}})^{\text{ن}} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$$

مثالٌ (٥-١١):

جِدْ قيمَةَ كلٍّ مِمّا يأتي:

١) $\sqrt[٣]{(٢١٦)^{٢}}$ ٢) $\sqrt[٥]{٨^{١٠}}$ ٣) $\sqrt[٤]{\left(\frac{١٢٩٦}{٨١}\right)^{٣}}$

الحلُّ:

١) $\sqrt[٣]{(٢١٦)^{٢}} = \sqrt[٣]{(٦^{٣})^{٢}}$ كتابةُ العددِ على شكلِ أسسٍ

$= \left(\sqrt[٣]{٦^{٣}}\right)^{٢} = \left(٦^{\frac{٣}{٣}}\right)^{٢} = ٦^{٢} = ٣٦$ استخدامُ قوانينِ الأسسِ

٢) $\sqrt[٥]{٨^{١٠}} = ٨^{\frac{١٠}{٥}} = ٨^{٢} = ٦٤$ استخدامُ قوانينِ الأسسِ

٣) $\sqrt[٤]{\left(\frac{١٢٩٦}{٨١}\right)^{٣}} = \left(\frac{١٢٩٦}{٨١}\right)^{\frac{٣}{٤}} = \left(\frac{٦^{٤}}{٣^{٤}}\right)^{\frac{٣}{٤}}$ تحويلُ الجذرِ إلى أسٍّ

$= \left(\frac{٦}{٣}\right)^{٤\times\frac{٣}{٤}} = \left(\frac{٦}{٣}\right)^{٣} = ٢^{٣} = ٨$ كتابةُ العددِ على شكلِ أسسٍ واستخدامُ قوانينِ الأسسِ

مثالٌ (٥-١٢):

جِدْ قيمَةَ كلٍّ مِمّا يأتي:

١) $(\sqrt{٢})^{٣}\times(\sqrt{٢})^{٤}$ ٢) $\frac{(\sqrt{٣})^{٧}}{(\sqrt{٣})^{٦}}$ ٣) $(\sqrt{٥})^{-٤}\times(\sqrt{٥})^{٨}$

الحلُّ:

١) $(\sqrt{٢})^{٣}\times(\sqrt{٢})^{٤} = (\sqrt{٢})^{٣+٤} = (\sqrt{٢})^{٧}$ الأساساتُ متساويةٌ، نجمعُ الأسسَ

٢) $\frac{(\sqrt{٣})^{٧}}{(\sqrt{٣})^{٦}} = (\sqrt{٣})^{٧-٦} = (\sqrt{٣})^{١} = \sqrt{٣}$ الأساساتُ متساويةٌ، نطرحُ الأسسَ

٣) $(\sqrt{٥})^{-٤}\times(\sqrt{٥})^{٨} = (\sqrt{٥})^{-٤+٨} = (\sqrt{٥})^{٤} = \left((٥)^{\frac{١}{٢}}\right)^{٤}$ الأساساتُ متساويةٌ، نجمعُ الأسسَ

$= (٥)^{\frac{١}{٢}\times ٤} = ٥^{\frac{٤}{٢}} = ٥^{٢} = ٢٥$

ويمكنُ حلُّ مثالِ (٥-٢-١) كالآتي:

١) $(\sqrt{٢})^{٣} \times (\sqrt{٢})^{٤} = ٢^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{\frac{٤}{٢}} = ٢^{(\frac{٣}{٢}+\frac{٤}{٢})} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$ تحويلُ الجذرِ إلى أسٍّ نسبيّ ثم نجمعُ

$= ٢^{(\frac{١}{٢})\times ٧} = (٢^{\frac{١}{٢}})^{٧} = (\sqrt{٢})^{٧}$

٢) $\frac{(\sqrt{٣})^{٧}}{(\sqrt{٣})^{٦}} = \frac{(٣)^{\frac{٧}{٢}}}{(٣)^{\frac{٦}{٢}}} = ٢^{\frac{٧}{٢}-\frac{٦}{٢}} = ٣^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣}$ تحويلُ الجذرِ إلى أسٍّ نسبيّ ثم نطرحُ

٣) $(\sqrt{٥})^{-٤} \times (\sqrt{٥})^{٨} = ٥^{-\frac{٤}{٢}} \times ٥^{\frac{٨}{٢}} = ٥^{-\frac{٤}{٢}+\frac{٨}{٢}}$

$= ٥^{\frac{٤}{٢}} = ٥^{٢} = ٢٥$

تدريب ٥-٨

جِدْ قيمَةَ كلٍّ مِمّا يأتي:

أ) $\sqrt{٨} \times \sqrt{١٨}$

ب) $\sqrt[٣]{\frac{٣٤٣}{١٣٣١}}$

جـ) $\sqrt[٣]{٤٠} \times \sqrt[٣]{٢٥}$

د) $\sqrt{\frac{١٦٩}{١٤٤}}$

تدريب ٥-٩

جِدْ قيمَةَ كلٍّ مِمّا يأتي بأبسطِ صورةٍ:

أ) $\sqrt[٣]{\frac{٧٢٩}{٦٤}} \times \sqrt[٥]{\frac{٣٢}{٢٤٣}}$

ب) $\sqrt[٣]{\frac{٢٤}{٣٧٥}}$

جـ) $\left(\sqrt[٨]{(\frac{١٢٥}{٤٥})}\right)^{٤}$

د) $\sqrt[٣]{٦٤} \times \sqrt{٦٤}$

تمارينٌ ومسائلُ

١) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيُّها غيرُ صحيحةٍ؟ مع تصحيحِ الخطأ:

أ) $٧^{٥} \div ٧^{٢} = ٧^{٣}$ ب) $٦^{٤} \times ٦^{٢} = ٦^{٨}$

جـ) $ص^{٣} \div ص^{٣} = ٠$ ، ص $\neq$ صفرًا د) $(٩^{٠})^{٥} = (٩^{٥})^{٠} = ١$

هـ) $ع^{٦} \div ع^{٢} = ع^{٣}$ ، ع $\neq$ صفرًا و) $٨^{٠} \times ٧ = ٧$

٢) اكتبِ العباراتِ الآتيةَ بأسسٍ صحيحةٍ موجبةٍ:

أ) $\sqrt{\frac{س^{٩}}{س^{٥}}}$ ، س $\neq$ صفرًا ب) $\sqrt[٦]{\frac{م^{٣}}{م^{-٣}}}$ ، م $\neq$ صفرًا

جـ) $\sqrt[٥]{\frac{ص^{٣}}{ص^{٨}}}$ ، ص $\neq$ صفرًا د) $\sqrt[٧]{س^{-٧}}$ ، س $\neq$ صفرًا

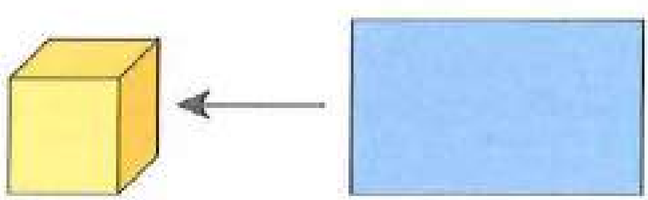
هـ) $\sqrt{ن^{-٦} \times (ن^{-٤})^{٢}}$ ، ن $\neq$ صفرًا و) $\sqrt[٤]{(هـ^{-٢})^{٦}}$ ، هـ $\neq$ صفرًا

٣) جِدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي بأبسطِ صورةٍ:

أ) $\sqrt{\frac{(١٢)^{٣} \times ١٨٠}{(٥ \times ٣)^{٣}}}$ ب) $\sqrt{\frac{(٤ \times ٧)^{٥}}{٧^{٤}}} \times ٢^{-١٠}$ جـ) $\sqrt[٣]{\frac{٦^{٣} \times ٢٤}{(٢ \times ٣)^{٧} \times ٢^{٨}}}$

د) $\sqrt[٨]{\frac{٣^{١٩} \times ٢^{-٨}}{٣^{١١}}}$ هـ) $\sqrt[٦]{(٨^{٦})^{-٢}}$ و) $\sqrt[٣]{-٣٣٧٥}$

٤) جِدْ طولَ حرفِ صندوقٍ مكعبِ الشكلِ إذا استُخدمَ في صنعهِ صفيحةٌ معدنيةٌ مساحتُها ١٥٠ سم^{٢}.

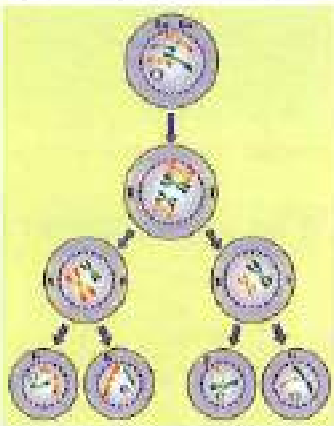


٥ – ٤ المعادلاتُ الأسّيةُ

النتاجات:

- تُكوِّنُ معادلاتٍ أسيّةً.
- تَحُلُّ مسائلَ وتطبيقاتٍ حياتيةً باستخدامِ الأسسِ.

في عمليةِ تكاثرِ البكتيريا تنقسمُ الخليةُ الواحدةُ إلى خليتينِ، وتنقسمُ الخليتانِ إلى أربعِ خلايا وهكذا، فإذا كانتْ كلُّ عمليةِ انقسامٍ تحتاجُ إلى دقيقةٍ واحدةٍ، وكان عددُ البكتيريا الناتجةُ بعدَ (ن) منْ مراتِ الانقسامِ هو (١٢٨) خليةً، جِدْ قيمةَ (ن).



انقلِ الجدولَ الآتي إلى دفترِكَ، ثمَّ أكملِ الفراغاتِ الموجودةَ فيهِ:

الانقسامُ	عددُ الخلايا الناتجةِ	كتابتُها على صورةِ أسٍّ
الأولُ	٢	$٢^{١} = ٢$
الثاني	٤	$٢^{٢} = ٤$
الثالثُ	....	....
الرابعُ	....	....
الخامسُ	....	....
بعدَ ن منَ المرّاتِ	١٢٨	....

يلاحظُ في الجدولِ المذكورِ أنَّ $٢^{ن} = ١٢٨$ وهذا النوعُ منَ العباراتِ الرياضيّةِ يُسمّى **معادلةً أسيّةً** لأنَّ المتغيرَ فيها أسٌّ.

المعادلةُ الأسيّةُ: هيَ عبارةٌ رياضيةٌ يكونُ الأساسُ فيها عددًا حقيقيًا والأسُّ متغيرًا، وتحتوي على إشارةِ المساواةِ (=).

ويمكنُ كتابتُها على الصورةِ $أ^{س} = ب$ ، حيثُ أ، ب $\in$ ح.

• فكّرْ

- هلْ يمكنُ أنْ يكونَ ب عددًا سالبًا؟
- هلْ يمكنُ أنْ يكونَ أ = صفرًا أو ١؟

ومنَ الأمثلةِ على المعادلاتِ الأسيّةِ:

$٢^{س-١} = ٣٢$ ، $٣^{ص} = ٢٧$ ، $٩^{٤-ع} = ٧٢٩$ ، $\left(\frac{١}{٥}\right)^{س} = \frac{١}{١٢٥}$

وحتى نستطيعَ حلّها يجبُ كتابةُ الطرفينِ بصورةٍ أسيّةٍ تتساوى فيها الأساساتُ، وذلكَ بتحليلِ الأعدادِ إلى العواملِ الأوليةِ واستخدامِ قوانينِ الأسسِ. وبالتالي تكونُ الأسسُ متساويةً، أيْ أنَّ:

$٢^{ن} = ١٢٨ = ٢×٢×٢×٢×٢×٢×٢$

$٢^{ن} = ٢^{٧}$ الأساساتُ متساويةٌ (٢)

$ن = ٧$ الأسسُ تساوى

١٢٨	٢
٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	قِفْ

قاعدةٌ (١)

إذا كانَ أ عددًا حقيقيًا موجبًا، أ ≠ ١ وكان $أ^{س} = أ^{ن}$ ، فإنّ س = ن

تدريب (٥-١٠)

حلِّ المعادلاتِ الأسيّةَ الآتيةَ:

أ) $٣^{س} = ٨١$ ب) [illegible]

جـ) $\left(\frac{٤}{٧}\right)^{ص} = \frac{٢٥٦}{٢٤٠١}$ د) $\left(\frac{١}{٨}\right)^{-ص} = \frac{١}{٥١٢}$

مثالٌ (٥-١٣):

حلِّ المعادلاتِ الأسيّةَ الآتيةَ:

١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ٢^{٨}$ ٢) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ع} = ٠,٠٠٠١$

٣) $٣ × ٩^{ص} = ٢٤٣$

الحلُّ: ١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ٢^{٨}$

$٢^{-س} = ٢^{٨}$ استخدامُ قوانينِ الأسسِ

$-س = ٨$ الأساساتُ متساويةٌ في الطرفينِ، تتساوى الأسسُ

$س = -٨$

٢) $\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ع} = ٠,٠٠١$

$\left(\frac{١}{١٠}\right)^{ع} = \left(\frac{١}{١٠٠٠}\right) = \left(\frac{١}{١٠}\right)^{٣}$ تحويلُ الطرفِ الأيسرِ إلى أسسٍ

ويكونُ $ع = ٣$

٣) $٣ \times ٩^{ص} = ٢٤٣$

$٣ \times ٣^{٢ص} = ٣^{٥}$ تحويلُ الطرفينِ إلى أسسٍ

$٣^{٢ص+١} = ٣^{٥}$ استخدامُ قوانينِ الأسسِ

ويكونُ $٢ص + ١ = ٥$ تساوي الأسسِ

$٢ص = ٤$ طرحُ العددِ (١) منَ الطرفينِ

$ص = ٢$ قسمةُ الطرفينِ على العددِ (٢)

تدريب ٥-١١

حلِّ المعادلاتِ الأسيةَ الآتيةَ:

أ) $(٠,٣)^{س} = (٠,٠٠٨١)$

ب) [illegible] $= ٣$

جـ) $١١^{٦ل} = ١٢١^{٢ل} \times ١١^{٢}$

د) $\left(\frac{١}{٨}\right)^{س} \times ٨^{٥} = ٤^{٦}$

فكِّرْ

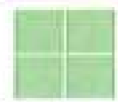
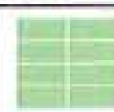
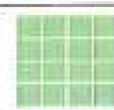
إذا كانتْ $١^{س} = ١^{٢}$، أجبْ عمّا يأتي:

- اذكرْ بعضَ الحلولِ الممكنةِ لهذهِ المعادلةِ.
- هلْ يمكنُ حصرُ عددِ الحلولِ الممكنةِ إذا كانَ الأساسُ ١ ؟
- إذا كانتِ المعادلةُ الأسيّةُ أساسُها صفرٌ، فهلْ يمكنُ حصرُ عددِ الحلولِ الممكنةِ لها؟

للاطلاعِ على المزيدِ منَ الموادِ التعليميّةِ:

بإمكانِكَ الرجوعُ إلى المناهجِ المحوسبةِ والاطلاعُ على منظومةِ التعليمِ الإلكترونيِّ (EduWave) على الوسائطِ الإلكترونيةِ المتعلقةِ بالمعادلاتِ الأسيّةِ.

١) أحضرْ ورقةً مربعةَ الشكلِ، واطوِها منَ المنتصفِ مراتٍ عدةٍ، ثمّ أكملِ الفراغاتِ في الجدولِ الآتي بعدَ أنْ تنقلَهُ إلى دفترِكَ:

	عددُ مراتِ الطيّ	عددُ الأجزاءِ الناتجةِ	الصورةُ الأسيةُ لعددِ الأجزاءِ الناتجةِ
	٠	١	$٢^{٠} = ١$
	١	٢	$٢^{١} = ٢$
	$\square$	٤	$٢^{\square} = ٤$
	$\square$	٨	$٢^{\square} = ٨$
	$\square$	١٦	$٢^{\square} = ١٦$

٢) حلِّ المعادلاتِ الأسيةَ الآتيةَ:

أ) $٤^{س} = ١٦$ ب) $(٠,٠١)^{ص} = (٠,٠٠٠١)^{٧}$ جـ) $٢^{س} \times ٤^{٢س} = ١٠٢٤$

جـ) $\left(\frac{٥}{٦}\right)^{ل} = \frac{٢١٦}{١٢٥}$ د) $\left(\frac{١}{٤}\right)^{س+١} = \left(\frac{٥}{١٠}\right)^{٧}$ و) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{ص} \times ٢٧ = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٧ص}$

٣) حصلَ مخترعُ لعبةِ الشطرنجِ على مكافأةٍ منَ الملكِ وهيَ حبوبٌ منَ القمحِ: حبةُ قمحٍ عنِ المربعِ الأوّلِ في لوحةِ الشطرنجِ، حبتانِ عنِ المربعِ الثاني، أربعُ حباتٍ عنِ المربعِ الثالثِ وهكذا، جِدِ الآتي:

أ) ما عددُ حباتِ القمحِ التي حصلَ عليها في المربعِ التاسعِ؟

ب) إذا كانَ عددُ حباتِ القمحِ التي حصلَ عليها في المربعِ س هوَ ٢٠٤٨، جِدْ قيمةَ س.

جـ) جِدْ عددَ حباتِ القمحِ التي حصلَ عليها في المربعِ الحادي والعشرينَ باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ.

د) جِدْ مجموعَ حباتِ القمحِ التي حصلَ عليها منَ المربعاتِ الثمانيةِ الأولى.

مراجعة

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ خمسِ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، ولكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ واحدٌ فقطْ منها صحيحٌ، اخترْ رمزَ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منها:

(١) قيمةُ س التي تحققُ المعادلةَ $٣^{\text{س}-١} = ٢٧$ تساوي:

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ١ د) ٢

(٢) العددُ $٧ \times ١٠^{-١} + ٣ \times ١٠ + ٤ \times ١٠^{٢}$ هوَ تحليلٌ للعددِ:

أ) ٤٣٠,٧ ب) ٤٣,٧ جـ) ٤٣,٠٧ د) ٤٣٧

(٣) تحليلُ المقدارِ $(\text{س}^{٢} - ٥)$ هوَ:

أ) $(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)$ ب) $(\text{س} - \sqrt{٥})(\text{س} - \sqrt{٥})$

جـ) $(\text{س} + \sqrt{٥})(\text{س} + \sqrt{٥})$ د) $(\text{س} - \sqrt{٥})(\text{س} + \sqrt{٥})$

(٤) قيمةُ المقدارِ $\sqrt[٣]{\frac{١٢٥\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}}{٣\,\text{ص}^{٣}\,\text{س}}}$ علماً س = −١ ، ص = ٣، هوَ:

أ) $\frac{٥}{٣}$ ب) $\frac{١٢٥}{٢٧}$ جـ) [illegible] د) $\frac{-١٢٥}{٢٧}$

(٥) إحدى العباراتِ الرياضيةِ الآتيةِ صحيحةٌ:

أ) $\text{س}^{٣} \times \text{س}^{٢} = \text{س}^{٦}$ ب) $\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} = \text{س}^{٦}$

جـ) $\text{س}^{٣} \div \text{س}^{٢} = \text{س}^{٥}$ د) $\text{س}^{٣} \times \text{س}^{٢} = \text{س}^{٥}$

٢) اكتبْ كلًّا منَ الأعدادِ الآتيةِ بالصورةِ العلميةِ:

أ) ٣٥٠,١٢ ب) ٧٠٠٠٠٠٠ جـ) ٤٨٩٠٠٠٠٠٠٠٠ د) ٦٢,٠٠٣

٣) حلَّ المعادلاتِ الأسيّةَ الآتيةَ:

أ) $٤^{\text{س}-١} = ٢^{\text{س}+٣}$ ب) $٢^{\text{ص}} = ١$

جـ) $٤٩^{\text{س}^{٢}-٢} = ٧^{\text{س}^{٢}}$ د) $\sqrt{\frac{١٢٥ \times ٣^{\text{ص}}}{٥ \times ٣^{-\text{ص}}}} = ٤٠٥$

٤) جِدْ قيمةَ كلٍّ منَ المقاديرِ الآتيةِ وفقَ قيمةِ المتغيراتِ المعطاةِ إزاءَ كلٍّ منها:

أ) $\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٣} - ٧\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٥}$ عندما س = ٢، ص = −١

ب) $٢^{\text{ع}+\text{ص}} \times ٤^{\text{ص}} + ١٦^{\text{ع}} \times ٥$ عندما ع = ١، ص = ٠

جـ) $\sqrt{\text{س}^{٢}\,\text{ع}^{٢}} + \sqrt[٣]{٣\,\text{س}^{٣}\,\text{ع}^{٥}}$ عندما س = ٤ ، ع = −٣

٥) أعدْ كتابةَ المقاديرِ الأسيةِ الآتيةِ دونَ استخدامِ خطِّ الكسرِ:

أ) $\dfrac{\text{س}^{٥}\,\text{ص}^{٦}}{\text{س}^{-٤}\,\text{ص}^{-٢}}$ ، س ≠ صفرًا ، ص ≠ صفرًا

ب) $\dfrac{٣٩\,\text{ع}^{٢}\,\text{س}^{-٥}}{١٣\,\text{س}^{٢}\,\text{ع}^{-١}}$ ، س ≠ صفرًا ، ع ≠ صفرًا

جـ) $\dfrac{٧}{\text{م}^{-١٠}}$ ، م ≠ صفرًا

د) $\dfrac{٦\,\text{ص}\,\text{ع}^{٥}\,\text{س}^{٢}}{٢\,\text{ص}^{-٤}\,\text{ع}^{-٣}}$ ، ص ≠ صفرًا ، ع ≠ صفرًا

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) ضَعْ علامةَ (✓) أمامَ العبارةِ الصحيحةِ وعلامةَ (✗) أمامَ العبارةِ غيرِ الصحيحةِ فيما يأتي:

أ) $ص^{٢} + ص^{٢} = ص^{٤}$

ب) $(٣\,س)^{٣} = ٢٧\,س^{٣}$

جـ) $(ب^{٥})^{٣} = ب^{٣} \times ب^{٣} \times ب^{٣}$

د) $ع^{١١} - ع^{٤} = ع^{٧}$

هـ) $(-٢\,م^{٤})^{٢} = -٢\,م^{٨}$

و) $\left(\frac{١}{٩}\right)^{-٢} = ٣^{٤}$

ز) $٤\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٧} = ٢\sqrt{٧}$

ح) $\sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٣}$

٢) ضعِ العددَ المناسبَ في $\square$ حتى تصبحَ العبارةُ صحيحةً:

أ) $س^{١٦} \times س^{\square} = س^{\square + ٤} = س^{٩}$ ، $س \neq ٠$

ب) $ص^{\square \times ٦} = ص^{١٨}$

جـ) $ع^{٢} \times ل^{\square} = (ع \times ل)^{\square}$

د) $م^{\square} \div م^{-٤} = م^{٧ - \square} = م^{٢}$ ، $م \neq ٠$

٣) اكتبِ المقاديرَ الآتيةَ بأبسطِ صورةٍ:

أ) $(-٢\,أ\,ب^{٢})(أ^{٤}\,ب^{٣}\,جـ)^{٢}$

ب) $\left(\sqrt{س^{٢}\,ص^{٢}}\right)\left(\sqrt{١٦\,ص^{-٤}\,س^{٥}}\right)$ ، ص > صفرٍ ، س > صفرٍ

جـ) $\frac{ص^{٥} + ص^{٣}}{ص^{٣}}$ ، $ص \neq ٠$

د) $\frac{ل^{٣} - ل^{٥}}{ل^{٤} - ل^{٥}}$ ، $ل \neq ٠$ ، $ل \neq ١$

هـ) $(١٠\,س^{٧}) \div (-٥\,س^{-٨})$ ، $س \neq ٠$

و) $\sqrt[٣]{\frac{أ^{٦}\,ب^{١٠}}{ب^{٧}\,أ^{١٥}}}$ ، $أ \neq ٠$ ، $ب \neq ٠$

٤) إذا كانتْ س = ٤ ، ص = ٣ ، جِدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $\sqrt{\frac{س^{٢}\,ص^{٣}}{س\,ص^{٥}}}$ ،

ب) $\sqrt[٣]{(س^{-٣}\,ص^{٧})(س^{٦}\,ص^{-٤})}$

جـ) $\frac{(س^{٢} - ٣\,ص)^{٥}}{(س^{٢} - ٣\,ص)^{٢}}$ ،

د) $\left(\frac{س^{٣}}{ص^{٤}}\right)^{٢} \times \left(\frac{-ص^{٣}}{س^{٢}}\right)^{٤}$

٥) حلّ المعادلاتِ الأسيّةَ الآتيةَ:

أ) $١١^{س} = ١٣٣١$

ب) $٤^{ص} \times ٨^{٢ص} = ٢٥٦$

جـ) $\frac{١٨^{ع}}{٣٢} = ٣^{٢ع}$

د) $٢٥^{س} \times ٧^{٢س} = ١$

هـ) $٧^{٣س+١} = ٤٩^{س}$

و) $(١٠٠٠)^{ص+١} = (١٠)^{٢ص-١}$

ز) $٢ \times ٦^{ع-٢} = ١٢ \times ٦^{٧-ع}$

ح) $(٨)^{٤س+١} \times (٤)^{-٢س} = ١^{س}$

٦) اكتبِ العباراتِ الآتيةَ بأسسٍ صحيحةٍ موجبةٍ:

أ) $\left(\frac{س^{٢}}{س^{٨}}\right)$ ، $س \neq ٠$

ب) $ن^{-٥}$ ، $ن \neq ٠$

جـ) $(م^{-٨})^{٣}$ ، $م \neq ٠$

د) $\frac{س^{-٣} ع^{-٣}}{ع^{٤} س^{-٨}}$ ، $ع \neq ٠$ ، $س \neq ٠$

٧) خزانُ ماءٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، ارتفاعُه (٥ س) م، قاعدتُه مربعةُ الشكلِ، جِدْ طولَ ضلعِ القاعدةِ إذا كانتْ سعةُ الخزانِ ($٢٠ س^{٢}$) مترٍ مكعبٍ.

٨) جِدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt[٣]{٢}}\right)^{٦}$

ب) $\frac{(\sqrt{٧} - ٢)^{٨}}{(\sqrt{٧} + ٢)^{١٠}}$

٦

تنبعُ أهميةُ الهندسةِ الإحداثيةِ منْ أنَّها تربطُ بينَ مفاهيمِ الجبرِ ومفاهيمِ الهندسةِ، وقدِ اهتمَ العلماءُ القدامى بالهندسةِ الإحداثيةِ أمثالُ ثابتِ بنِ قُرَّةٍ والخوارزميّ والبيروني وطاليس وفيثاغورسَ، حيثُ أثْرَوْا العلمَ بإنجازاتٍ مبتكرةٍ في الهندسةِ الإحداثيةِ وتطبيقاتِها العمليةِ.

وللهندسةِ الإحداثيةِ تطبيقاتٌ حياتيةٌ هامةٌ، فما المخططاتُ الهندسيةُ وحسابُ المسافاتِ عليها، والمستوياتُ الإحداثيةُ، ومعادلةُ الخطِّ المستقيمِ، والدائرةُ ومعادلتُها وما يرتبطُ بها منْ إنشاءاتٍ هندسيةٍ وتطبيقاتٍ حياتيةٍ، إلّا أمثلةٌ واقعيةٌ على تطبيقِ الهندسةِ الإحداثيةِ في حياتِنا.

الوحدةُ السادسةُ

الهندسةُ الإحداثيّةُ

يُتوقعُ منَ الطّالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- حسابِ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.
- إيجادِ إحداثيي نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.
- إيجادِ معادلةِ الخطِّ المستقيمِ منْ معلوماتٍ كافيةٍ معطاةٍ.
- إيجادِ معادلةِ الدائرةِ بالصورةِ القياسيّةِ منْ معلوماتٍ كافيةٍ معطاةٍ.
- إيجادِ إحداثيي مركزِ وطولِ نصفِ قطرِ الدائرةِ إذا عُلِمَتْ معادلتُها.
- حلِّ مسائلَ عمليّةٍ على مفاهيمِ الهندسةِ الإحداثيّةِ.

تهيئة

١ أكتبْ نصَّ نظريةِ فيثاغورسَ.

٢ أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، إذا كانَ أ ب = (٤) سم، أ جـ = (١٠) سم، جِدْ ب جـ.

٣ ما ميلُ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطتينِ (−١، ٥)، (٢، −٣)؟

٤ أرسمِ المستوى الإحداثيَّ وعيّنْ عليهِ كلاًّ منَ النقاطِ الآتيةِ:

أ (٠، ٠)

ب (٠، ٣)

جـ (−٢، ٥)

د (١، −٣)

هـ (−٤، −٦)

و (٤، ٠)

ز (١، $\frac{١}{٢}$)

٥ أيّ النقاطِ الآتيةِ تحققُ المعادلةَ (س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س = ١)؟

أ) (−٢، ١)

ب) (٢، ١)

جـ) (٢، −١)

د) (١، $\sqrt{٢}$)

٦) حلَّ كلَّ معادلةٍ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) ٢س + ٥ = −١٧

ب) أ + $\frac{\text{أ}+٣}{٢}$ = −٥

جـ) $\frac{٣}{٥}$س − ١ = −٦

د) س^{٢} − ٥ = ١١

٧) حلَّ المعادلتينِ الآتيتينِ بإكمالِ المربعِ:

أ) س^{٢} + ٦س + ٥ = صفرًا

ب) س^{٢} − ٨س − ٥ = صفرًا

٨) إذا كانَ (س+١، ٥) = (٤، ٢ص−١)، فجِدْ قيمةَ كلٍّ منْ س، ص.

٩) جِدِ الزوجَ المرتبَ (س، ص) الذي يحققُ كلاً منَ المعادلتينِ الآتيتينِ معًا:

٢س + ص = ٥

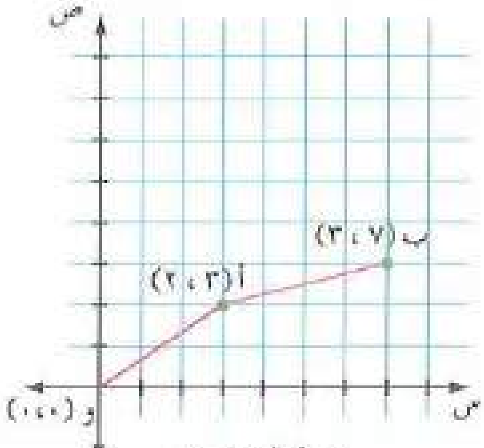
س − ص = ٤

٦ - ١ المسافةُ بينَ نقطتينِ

النتاجاتُ

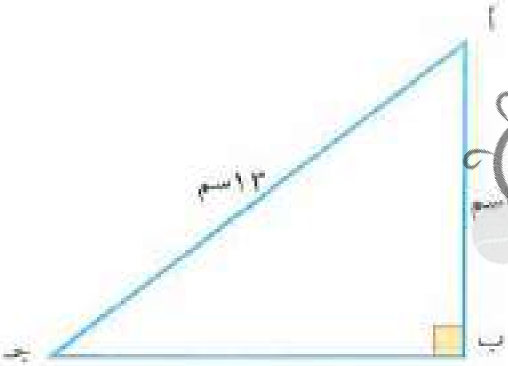
- تَجِدُ المسافةَ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ.
- تَحُلُّ مسائلَ عمليةً على المسافةِ بينَ نقطتينِ.

في الشكلِ (٦-١) النقاطُ و، أ، ب، حيثُ تمثلُ النقطةُ أ مدرسةً، وتمثلُ النقطتانِ و، ب مركزينِ صحِّيينِ. يصلُ بينَ كلٍّ منهما والمدرسةِ طريقٌ مستقيمٌ، احتاجَ أحدُ طلبةِ المدرسةِ لعلاجٍ سريعٍ، كيفَ يمكنكَ المساعدةُ في تحديدِ المركزِ الصحيِّ المناسبِ؟ ولماذا؟



الشكلُ (٦-١)

١) يمثلُ الشكلُ (٦-٢) المثلثَ أ ب جـ قائمَ الزاويةِ في ب، فيه أ ب = ٥ سم، أ جـ = ١٣ سم، جِدْ طولَ الضلعِ ب جـ.



الشكلُ (٦-٢)

٢) اعتمدِ الشكلَ (٦-٣) في الإجابةِ عمّا يأتي:

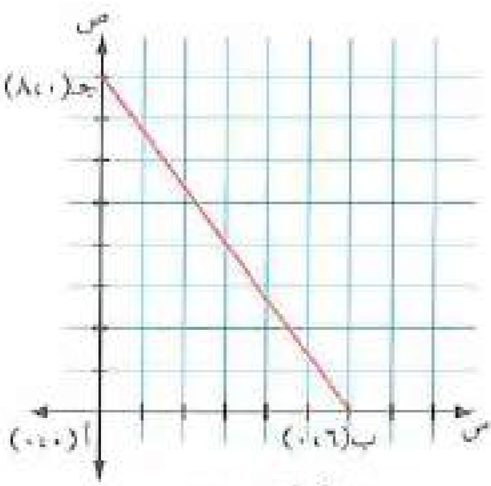
أ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب.

ب) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ جـ.

جـ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ ب جـ باستخدامِ نظريةِ فيثاغورسَ.

د) جِدْ قيمةَ $\sqrt{(٠-٦)^{٢} + (٨-٠)^{٢}}$

ماذا تلاحظُ؟



الشكلُ (٦-٣)

٣) اعتمدِ الشكلَ (٦-٤) في الإجابةِ عمّا يأتي:

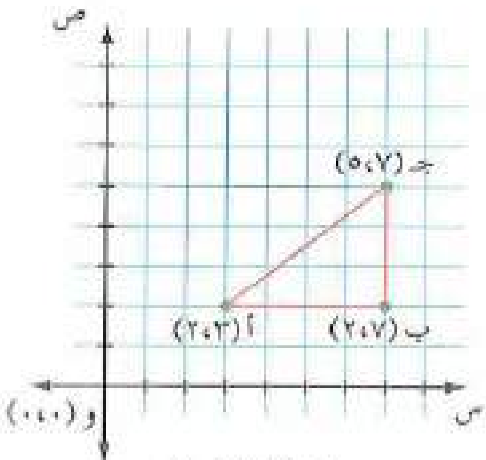
أ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب.

ب) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ ب جـ.

جـ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ جـ باستخدامِ نظريةِ فيثاغورسَ.

د) جِدْ قيمةَ $\sqrt{(٧-٣)^{٢} + (٥-٢)^{٢}}$

ماذا تلاحظُ؟



الشكلُ (٦-٤)

نشاط (٦-١)

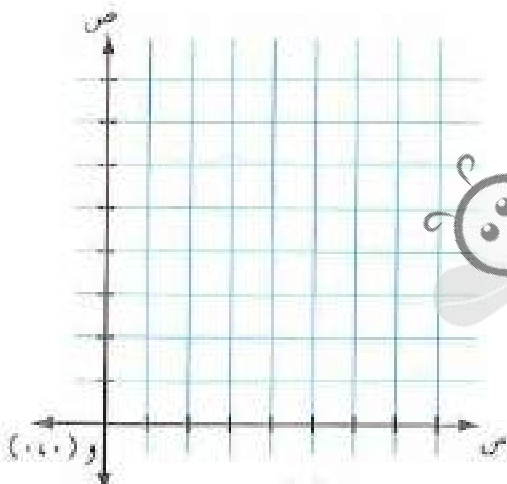
١) يمثّلُ الشكلُ (٦-٥) المستوى الإحداثيّ، عيّنْ عليهِ كلًّا منَ النقطتينِ أ (٢، ١)، ب (٦، ٤).

٢) أرسمْ خطًّا موازيًا لمحورِ السيناتِ منَ النقطةِ أ.

٣) أرسمْ خطًّا موازيًا لمحورِ الصاداتِ منَ النقطةِ ب.

٤) عيّنْ نقطةَ تقاطعِ الخطينِ اللذينِ رسمتَهما، ولتكنِ النقطةَ جـ.

ما إحداثيا النقطةِ جـ؟



الشكلُ (٦-٥)

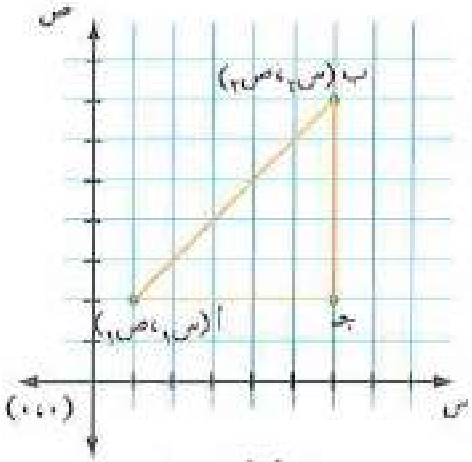
٥) ما طولُ القطعةِ المستقيمةِ أ جـ؟

٦) ما طولُ القطعةِ المستقيمةِ ب جـ؟

٧) ما نوعُ المثلثِ أ ب جـ (منْ حيثُ زواياهُ)؟

٨) ما طولُ القطعةِ المستقيمةِ أ ب؟ (استخدمْ نظريةَ فيثاغورسَ).

نشاط (٦-٢)



الشكلُ (٦-٦)

يمثلُ الشكلُ (٦-٦) المستوى الإحداثيّ، فيه النقطتانِ أ (س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$).

١) ما إحداثيا النقطةِ جـ؟

٢) ما طولُ أ جـ بدلالةِ إحداثياتِ النقطتينِ أ ، جـ؟

٣) ما طولُ ب جـ بدلالةِ إحداثياتِ النقطتينِ ب ، جـ؟

٤) استخدمْ نظريةَ فيثاغورسَ لإيجادِ طولِ أ ب بدلالةِ إحداثياتِ النقطتينِ أ ، ب.

٥) استنتجْ قاعدةَ المسافةِ بينَ النقطتينِ أ ، ب منْ خلالِ الفرعِ (٤).

نتيجةٌ

إذا كانتْ النقطتانِ أ (س$_{١}$، ص$_{١}$)، ب (س$_{٢}$، ص$_{٢}$)، فإنَّ:

طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب = المسافةَ بينَ النقطتينِ أ ، ب

$$= \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

ملاحظةٌ: يُعَبَّرُ أحيانًا عنْ طولِ القطعةِ المستقيمةِ أ ب بالرمزِ أ ب .

مثال (٦-١):

جِدِ المسافةَ بينَ النقطتينِ م (٢، ٣)، ن (٧، -١):

الحلُّ:

س$_{١}$ = ٢ ، ص$_{١}$ = ٣ ، س$_{٢}$ = ٧ ، ص$_{٢}$ = -١

المسافةُ بينَ النقطتينِ م ، ن = طولَ $\overline{م ن}$ = $\sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$

م ن = $\sqrt{(٧ - ٢)^{٢} + ((-١) - ٣)^{٢}}$

= $\sqrt{(٥)^{٢} + (-٤)^{٢}}$ = $\sqrt{٤١}$

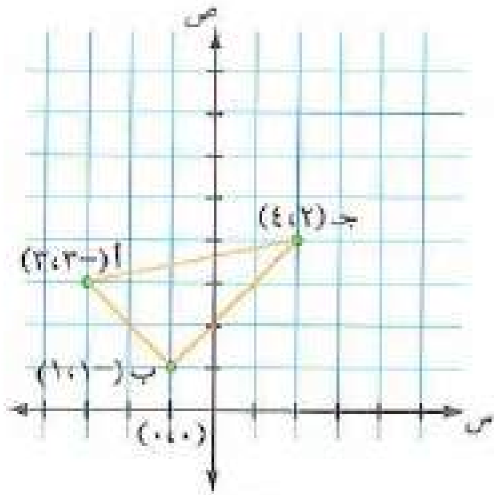
تدريب (٦-١)

جِدْ طولَ $\overline{ل هـ}$، حيثُ ل (٣، -١)، هـ (-٢، ٢).

مثالٌ (٦-٢):

يمثّلُ الشكلُ (٦-٧) المثلثَ أ ب جـ ، بيّنْ أنَّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في ب.

الحلُّ:



الشكلُ (٦-٧)

النقطةُ أ (-٣ ، ٣) : $س_{١} = -٣$ ، $ص_{١} = ٣$

النقطةُ ب (-١ ، ١) : $س_{٢} = -١$ ، $ص_{٢} = ١$

النقطةُ جـ (٢ ، ٤) : $س_{٣} = ٢$ ، $ص_{٣} = ٤$

نحسبُ أطوالَ أضلاعِ المثلثِ أ ب جـ :

$$أ\,ب = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

$$= \sqrt{((-١) - (-٣))^{٢} + (١ - ٣)^{٢}}$$

$$= \sqrt{(٢)^{٢} + (-٢)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$$

$$ب\,جـ = \sqrt{(س_{٣} - س_{٢})^{٢} + (ص_{٣} - ص_{٢})^{٢}}$$

$$= \sqrt{(٢ - (-١))^{٢} + (٤ - ١)^{٢}}$$

$$= \sqrt{(٣)^{٢} + (٣)^{٢}} = \sqrt{١٨}$$

$$أ\,جـ = \sqrt{(س_{٣} - س_{١})^{٢} + (ص_{٣} - ص_{١})^{٢}}$$

$$= \sqrt{(٢ - (-٣))^{٢} + (٤ - ٣)^{٢}}$$

$$= \sqrt{(٥)^{٢} + (١)^{٢}}$$

$$= \sqrt{٢٥ + ١} = \sqrt{٢٦}$$

لاحظْ أنَّ: $(أ\,ب)^{٢} + (ب\,جـ)^{٢} = ٨ + ١٨$

$= ٢٦$

وأنَّ $(ب\,جـ)^{٢} = ٢٦$

بما أنَّ $(أ\,ب)^{٢} + (ب\,جـ)^{٢} = (ب\,جـ)^{٢}$، فإنَّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في ب وفقَ نظريةِ فيثاغورسَ.

تدريب (٦-٢)

إذا كانتِ النقاطُ أ (١، ٢)، ب (٥، ٦)، جـ (٧، ٤)، د (٣، ٠) نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، بيِّنْ أنَّ كلَّ ضلعينِ متقابلينِ في الشكلِ الرباعيِّ أ ب جـ د متساويانِ في الطولِ.

مثالٌ (٦-٣):

النقطتانِ م (٢، −٣)، ل (س، ٥)، تمثلانِ نهايتي قطرِ دائرةٍ مركزُها ن، إذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ (٥) سم، جِدْ قيمَ س الممكنة.

الحلُّ: طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ = ٥ سم

طولُ قطرِ الدائرةِ = ١٠ سم

م ل = ١٠ سم

م (٢، −٣): $س_1$ = ٢، $ص_1$ = −٣

ل (س، ٥): $س_2$ = س، $ص_2$ = ٥

م ل = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$ — قانونٌ

١٠ = $\sqrt{(س - ٢)^2 + (٥ - (-٣))^2}$ — تعويضٌ

١٠٠ = $(س - ٢)^2 + (٨)^2$ — تربيعُ الطرفينِ

١٠٠ − ٦٤ = $(س - ٢)^2$ — طرحُ ٦٤ منَ الطرفينِ

٣٦ = $(س - ٢)^2$

٦ = |س − ٢| — أخذُ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

إمّا س − ٢ = ٦ ومنها س = ٨

وإمّا س − ٢ = −٦ ومنها س = −٤

تدريب (٦-٣)

حلِّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

تمارينٌ ومسائلُ

١) جِدِ المسافةَ بينَ كلِّ زوجٍ منَ النقاطِ الآتيةِ:

أ) (٢ ، −٤) ، (−٣ ، ٨)

ب) (−١ ، ٥) ، (−٤ ، −٢)

جـ) (−٥ ، ٤) ، (٧ ، −١)

د) (م ، هـ+١) ، (م − ٦ ، هـ − ٧)

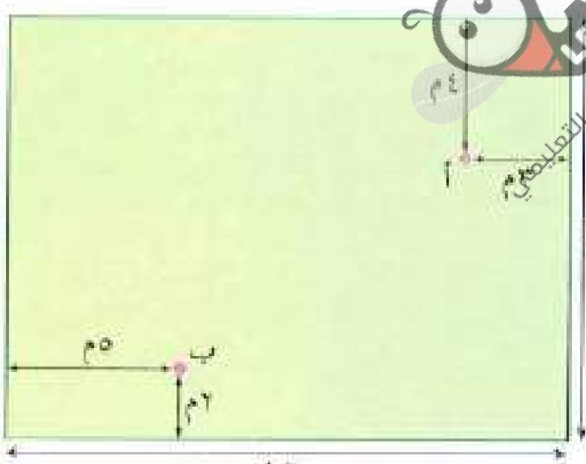
هـ) (٥ ، −٤) ، (٥ ، ٨)

٢) إذا كانتِ النقطةُ م (٢ ، ١) تمثّلُ موقعَ سيارةٍ ، والنقاطُ أ (٥ ، ٠)، ب (٦ ، ٢)، جـ (٤ ، ٣) تمثّلُ مواقعَ ثلاثِ محطاتِ وقودٍ ، أيُّ المحطاتِ الثلاثِ أقربُ إلى السيارةِ؟

٣) إذا كانتْ أب قطعةً مستقيمةً طولُها (٥) وحداتٍ، وكانتْ أ (ل ، ٤)، ب (٧ ، ١)، فجِدْ جميعَ القيمِ الممكنةِ للثابتِ ل.

٤) م ن ل مثلثٌ فيه م (٢ ، ١)، ن (٥ ، ٥)، ل (−٢ ، ٤)، ما نوعُ المثلثِ م ن ل منْ حيثُ أطوالُ أضلاعِهِ؟

٥) يمثّلُ الشكلُ (٦−٨) حديقةً مستطيلةَ الشكلِ، النقطتانِ أ، ب تمثّلانِ موقعَ حنفيتينِ لريِّ المزروعاتِ، نريدُ أنْ نصلَ بينَ الحنفيتينِ بأنبوبٍ مستقيمٍ، ما طولُ الأنبوبِ؟



الشكلُ (٦−٨)

٦) إذا كانتِ القطعةُ المستقيمةُ أ ب قطرًا في دائرةٍ طولُ نصفِ قطرِها ٦,٥سم، وكانتِ النقطةُ أ (ع، −٤)، النقطةُ ب (٢ع، ع+٣). جِدْ جميعَ القيمِ الممكنةِ للثابتِ ع.

٧) أرسمِ المستوى الإحداثيَّ، وعيِّنْ عليهِ النقاطَ الآتيةَ:

د (٤، ٤)، هـ (−٥، ٥)، و (−٤، −٤)، ع (٥، −٥)

أ) جِدْ أطوالَ أضلاعِ الشكلِ الرباعيِّ د هـ و ع.

ب) ما نوعُ الشكلِ الرباعيِّ د هـ و ع؟

جـ) جِدْ طولَ كلٍّ منْ قُطري الشكلِ د هـ و ع.

٨) دائرةٌ مركزُها النقطةُ م (−٥، ٣) وتمرُّ بالنقطةِ هـ (٣، ٩):

أ) ما طولُ قطرِها؟

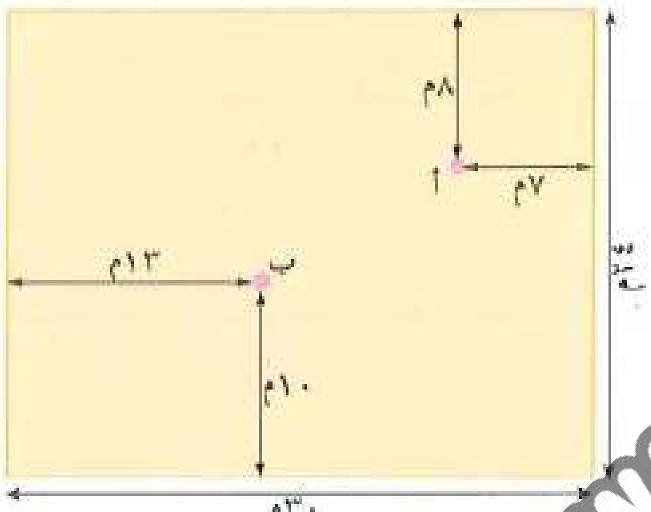
ب) إذا كانتِ النقطةُ و (١، ك) تقعُ على الدائرةِ، جِدْ جميعَ القيمِ الممكنةِ للثابتِ ك.

٦ – ٢ إحداثيا نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ

النتاجات

- تجدُ إحداثيي نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.
- تحلُّ مسائلَ عمليةً على إحداثيي نقطةِ منتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.

يمثّلُ الشكلُ (٦ – ٩) ساحةً مدرسيةً مستطيلةَ الشكلِ، النقطتانِ أ، ب تمثلانِ آلتي تصويرٍ، أرادَ مديرُ المدرسةِ وضعَ آلةِ تصويرٍ ثالثةٍ في منتصفِ المسافةِ بينَ النقطتينِ أ، ب، ساعدْ مديرَ المدرسةِ في تحديدِ موقعِ آلةِ التصويرِ الثالثةِ.



الشكلُ (٦–٩)

نشاط (٦-٣)

ارسمِ المستوى الإحداثيَّ وعيّنْ عليهِ النقطتينِ أ، ب، ثمَّ حدّدْ عليهِ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أ ب في كلِّ حالةٍ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

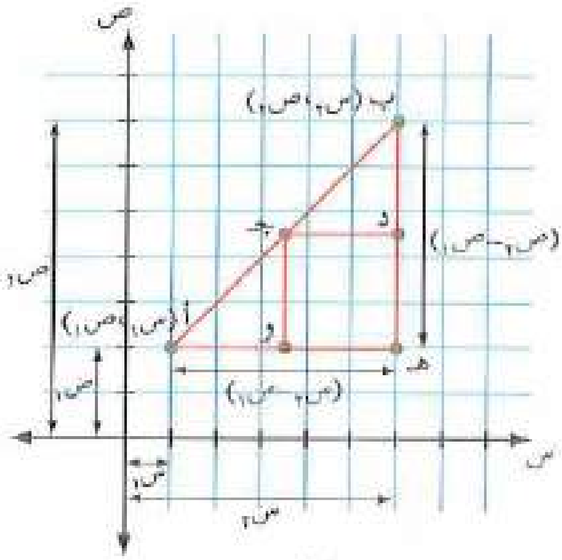
١) أ (٢، ٠)، ب (٦، ٠)
٢) أ (١، ١)، ب (٥، ١)
٣) أ (٠، ٤)، ب (٠، ٦)
٤) أ (٣، ٢)، ب (٣، ٤)

أ) ماذا تلاحظُ في الفرعينِ (١) و (٢)؟
ب) ماذا تلاحظُ في الفرعينِ (٣) و (٤)؟

نلاحظُ منَ الفرعينِ (١)، و (٢) بأنَّ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتينِ أ $(س_١، م)$، ب $(س_٢، م)$ تعطى بالعلاقةِ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢}، م\right)$.

كما نلاحظُ منَ الفرعينِ (٣) و (٤) بأنَّ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ النقطتينِ أ $(ن، ص_١)$، ب $(ن، ص_٢)$ تعطى بالعلاقةِ $\left(ن، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$.

يمثلُ الشكلُ (٦-١٠) النقطتينِ أ ($س_1$، $ص_1$)، ب ($س_2$، $ص_2$) في المستوى الإحداثيِّ. النقطةُ جـ نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أب.



الشكلُ (٦-١٠)

المثلثانِ جـ و أ، ب هـ أ مثلثانِ متشابهانِ (سوفَ ندرسُ حالاتِ تشابهِ المثلثاتِ بالتفصيلِ في الوحدةِ الثامنةِ).

ينتجُ منَ التشابهِ تناسبُ الأضلاعِ المتناظرةِ:

$$\frac{جـ\,و}{ب\,هـ} = \frac{و\,أ}{هـ\,أ} = \frac{جـ\,أ}{ب\,أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{و\,أ}{هـ\,أ} = \frac{١}{٢}$$

$$و\,أ = \frac{١}{٢}\,هـ\,أ$$

$$و\,أ = \frac{١}{٢}(س_2 - س_1) \quad \text{لماذا؟}$$

الإحداثيُّ السينيُّ للنقطةِ جـ = $س_1 + و\,أ$ لماذا؟

$$= س_1 + \frac{١}{٢}(س_2 - س_1) \qquad \text{تعويضُ و أ}$$

$$= س_1 + \frac{١}{٢}س_2 - \frac{١}{٢}س_1 \qquad \text{فكُّ القوسِ}$$

$$= \frac{١}{٢}س_1 + \frac{١}{٢}س_2 \qquad \text{تجميعُ الحدودِ}$$

$$= \frac{س_1 + س_2}{٢}$$

تدريبٌ (٦-٤)

بيّنْ أنَّ الإحداثيَّ الصاديَّ للنقطةِ جـ = $\frac{ص_1 + ص_2}{٢}$

نتيجةٌ:

إذا كانتِ النقطتانِ أ ($س_1$، $ص_1$)، ب ($س_2$، $ص_2$)، فإنَّ:

إحداثيي نقطةِ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أ ب هما: $\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢}\right)$

مثالٌ (٦-٤):

إذا كانتِ النقطتانِ أ (−١، ٤)، ب (٥، ١٠) نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، جِدْ إحداثيي نقطةِ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أ ب.

الحلُّ:

لتكنْ $\text{س}_{١} = -١$ ، $\text{ص}_{١} = ٤$ ، $\text{س}_{٢} = ٥$ ، $\text{ص}_{٢} = ١٠$

$$\text{إحداثيا نقطةِ منتصفِ } \overline{\text{أب}} = \left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢} ، \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{(-١) + ٥}{٢} ، \frac{٤ + ١٠}{٢}\right)$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} ، \frac{١٤}{٢}\right)$$

$$= (٢ ، ٧)$$

تدريبٌ (٦-٥)

جِدْ إحداثيي نقطةِ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ جـ د، حيثُ جـ (٢ ، ٤)، د (−٢، −٦).

مثالٌ (٦-٥):

إذا كانتِ النقطتانِ أ (−٢، ٥)، ب (١، −١) نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، وكانتِ النقطةُ ب نقطةَ منتصفِ $\overline{\text{أهـ}}$ ، ما إحداثيا النقطةِ هـ ؟

الحلُّ:

نفرضُ أنَّ إحداثيي النقطةِ هـ هما (س، ص)

النقطةُ ب هي نقطةُ منتصفِ $\overline{\text{أهـ}}$

$$\text{إحداثيا النقطةِ ب} = \left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢} ، \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢}\right)$$

$$(١ ، -١) = \left(\frac{\text{س} + (-٢)}{٢} ، \frac{\text{ص} + ٥}{٢}\right)$$

$$١ = \frac{\text{س} + (-٢)}{٢} \quad \text{لماذا؟}$$

$$٢ = \text{س} + (-٢) \quad \text{لماذا؟}$$

$$\text{س} = ٤ \quad \text{لماذا؟}$$

$$-١ = \frac{ص + ٥}{٢}$$ لماذا؟

$$-٢ = ص + ٥$$ لماذا؟

$$ص = -٧$$ لماذا؟

إحداثيا النقطةِ هـ = (٤، -٧)

تدريبٌ (٦-٦)

إذ كانتِ النقطةُ ن (٠، ٢) نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ م ل، حيثُ م (٤، -١)، فما إحداثيا النقطةِ ل؟

تدريبٌ (٦-٧)

حلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

١) إذا كانتِ النقاطُ أ(٢، −١)، ب(٨، −١)، جـ(٨، ٧) رؤوسَ مثلثٍ، وكانتِ النقاطُ د، هـ، و منتصفاتِ الأضلاعِ أب، ب جـ، أ جـ على الترتيبِ:

أ) جدْ إحداثي كلٍّ منَ النقاطِ د، هـ، و.

ب) جِدْ محيطَ المثلثِ أ ب جـ.

جـ) جِدْ محيطَ المثلثِ د هـ و. ماذا تلاحظُ؟

٢) إذا كانتِ النقطةُ م(−٢، ٣) مركزَ المربعِ أ ب جـ د ، وكانت النقطةُ أ(−٤، ٦):

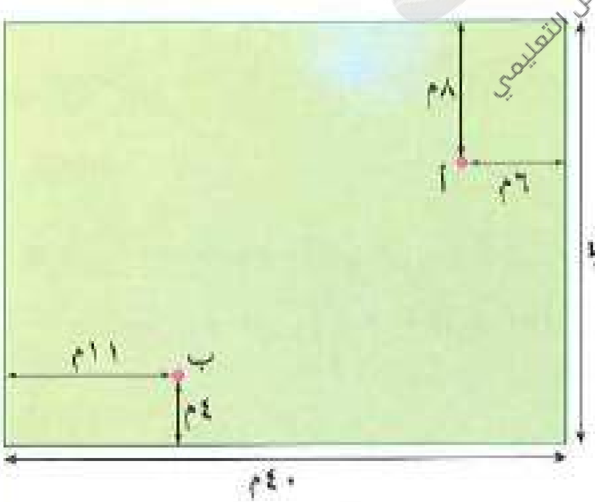
أ) جِدْ طولَ قطرِ المربعِ.

ب) جِدْ إحداثياتِ النقاطِ ب، جـ، د.

٣) إذا كانتِ النقاطُ أ(س+٤، ص−١)، ب(س+٢، ٥)، م(٥,٠ ، ٤)، وكانت النقطةُ م نقطة منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أب، فما قيمةُ كلٍّ منْ س، ص؟

٤) إذا كانتِ النقاطُ أ(س^٢، ٢)، ب(س^٢+٢ص^٢+ص)، م(٢، ٤)، وكانتِ النقطةُ م نقطة منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{أب}$، فجِدْ قيمَ كلٍّ منْ س، ص الممكنة.

٥) يمثلُ الشكلُ (٦−١١) حديقةً مستطيلةَ الشكلِ النقطتانِ أ، ب تمثلانِ موقعَ حنفيتينِ لريِّ المزروعاتِ، يريدُ صاحبُ المزرعةِ أنْ يضعَ حنفيةً ثالثةً في منتصفِ المسافةِ بينَ الحنفيتينِ، ساعدْ صاحبَ المزرعةِ في تحديدِ موقعِ الحنفيةِ الثالثةِ.



الشكلُ (٦−١١)

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ

النتاجاتُ:

- تجدُ معادلة الخطِّ المستقيمِ إذا عُلم ميلُهُ وعُلمتْ نقطةٌ تقعُ عليهِ.

يسيرُ قطارٌ منَ المدينةِ أ إلى المدينةِ ب بسرعةٍ منتظمةٍ ويقفُ عندَ كلِّ محطةٍ بينَ المدينتينِ، يبينُ الجدولُ الآتي رقمَ المحطةِ (ن)، والمدّةَ الزمنيّةَ للرحلةِ (س) ساعةٍ وبُعدَ المحطةِ عنِ المدينةِ أ (ص) كم:

الشكلُ (٦-١٢)

رقمُ المحطةِ (ن)	١	٢	٣	٤
المدّةُ الزمنيّةُ للرحلةِ (س) ساعةٍ	٠,٥	٠,٧٥	١,٧٥	٢
بُعدُ المحطةِ عنِ المدينةِ أ (ص) كم	٨٠	١٢٠	؟	٣٢٠

ما بُعدُ المحطةِ الثالثةِ عنِ المدينةِ أ؟

ارسمِ المستوى الإحداثيَّ وعيِّنْ عليهِ الأزواجَ المرتبةَ (س،ص) المعطاةَ في الجدولِ أعلاهُ.

تُسمى العلاقةُ الجبريةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ السينيِّ والإحداثيِّ الصاديِّ للنقطةِ (س،ص) التي تقعُ على الخطِّ المستقيمِ: **معادلةَ الخطِّ المستقيمِ**.

تعلّم

- ميلُ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطتينِ $(س_1، ص_1)$، $(س_2، ص_2)$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ، حيثُ $س_2 \neq س_1$، ويُرمزُ له بالرمزِ (م).

نشاط (٦-٤)

١) ارسمِ المستوى الإحداثيَّ وعيِّنْ عليهِ النقاطَ الآتيةَ:

أ (٠، ٢) ، ب (١، ٣) ، جـ (٣، ٥)

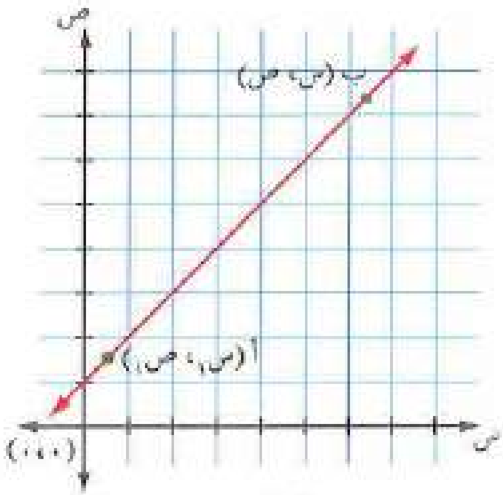
٢) احسبْ ميلَ كلٍّ منْ أ ب، ب جـ، أ جـ، ماذا تلاحظُ؟

٣) صلْ بينَ النقاطِ أ، ب، جـ بخطٍّ مستقيمٍ، وليكُنِ الخطُّ المستقيمَ ل. ما ميلُ الخطِّ المستقيمِ ل؟

٤) لتكنَ النقطةُ د (س، ص) نقطةً في المستوى الإحداثيِّ تقعُ على الخطِّ المستقيمِ ل، جِدْ علاقةً جبريةً تربطُ بينَ س وص منْ خلالِ النقطةِ أ والميلِ الذي أوجدتَهُ في فرعِ (٢).

٥) هلِ النقاطُ أ، ب، جـ تحققُ العلاقةَ الجبريةَ التي حصلتَ عليها في فرعِ (٤)؟

في الشكلِ (٦-١٢)، لإيجادِ معادلةِ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلُه (م)، ويمرُّ بالنقطةِ أ $(\text{س}_1، \text{ص}_1)$، نفرضُ أنَّ ب (س،ص) نقطةٌ أخرى على المستقيمِ.



الشكلُ (٦-١٢)

$$\text{ميلُ المستقيمِ} = \text{م} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$$

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

وهذهِ هيَ العلاقةُ الجبريةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيينِ السينيِّ والصاديِّ لأيِّ نقطةٍ مثلِ ب (س، ص) تقعُ على الخطِّ المستقيمِ.

نتيجةٌ:

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلُه (م)، ويمرُّ بالنقطةِ $(\text{س}_1، \text{ص}_1)$ هيَ:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$$

• فكّرْ

- هلْ للخطِّ المستقيمِ الموازي لمحورِ السيناتِ ميلٌ؟ برّرْ إجابَتكَ.
- ما معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الموازي لمحورِ السيناتِ ويمرُّ بالنقطةِ (م، ن)؟
- ما معادلةُ محورِ السيناتِ؟

مثالٌ (٦-٦):

جِدْ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلُهُ (٤)، ويمرُّ بالنقطةِ أ (-١، ٣).

الحلُّ:

$\text{م} = ٤$ ، $\text{س}_1 = -١$ ، $\text{ص}_1 = ٣$

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ: $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$ معادلةٌ

$\text{ص} - ٣ = ٤\,(\text{س} - (-١))$ تعويضٌ

$\text{ص} - ٣ = ٤\text{س} + ٤$ تبسيطٌ

$\text{ص} = ٤\text{س} + ٧$ تبسيطٌ

تدريبٌ ٦-٨

جِدْ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلهُ (−٥)، ويمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

مثالٌ (٦-٧):

ما معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بكلٍّ مِنَ النقطتينِ أ (١، ٢)، ب (−١، ٦)؟

الحلُّ:

$\text{س}_{١} = ١$ ، $\text{ص}_{١} = ٢$ ، $\text{س}_{٢} = -١$ ، $\text{ص}_{٢} = ٦$

ميلُ الخطِّ المستقيمِ $= \text{م} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$ قانونٌ

$\text{م} = \dfrac{٦ - ٢}{-١ - (١)}$ تعويضٌ

$\text{م} = \dfrac{٤}{-٢}$ تبسيطٌ

$\text{م} = -٢$ تبسيطٌ

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ: $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$ معادلةٌ

$\text{ص} - ٢ = (-٢)\,(\text{س} - ١)$ تعويضٌ

$\text{ص} - ٢ = -٢\text{س} + ٢$ تبسيطٌ

$\text{ص} = -٢\text{س} + ٤$ تبسيطٌ

• فكّرْ

هلْ تختلفُ معادلةُ المستقيمِ في المثالِ (٦-٧) باستخدامِ النقطةِ ب (−١، ٦) بدلاً مِنَ النقطةِ أ (١، ٢)؟

تدريبٌ (٦-٩)

جِدْ معادلةَ المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ أ(-١، ٤)، ب(-٢، ٥).

تدريبٌ (٦-١٠)

حلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مثالٌ (٦-٨):

ما معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلهُ (٣)، ومقطعهُ الصاديُّ (-٢)؟

الحلُّ:

بما أنَّ المقطعَ الصاديَّ = -٢ ، فإنَّ الخطَّ المستقيمَ

يمرُّ بالنقطةِ (٠، -٢)، لاحظِ الشكلَ (٦-١٣)

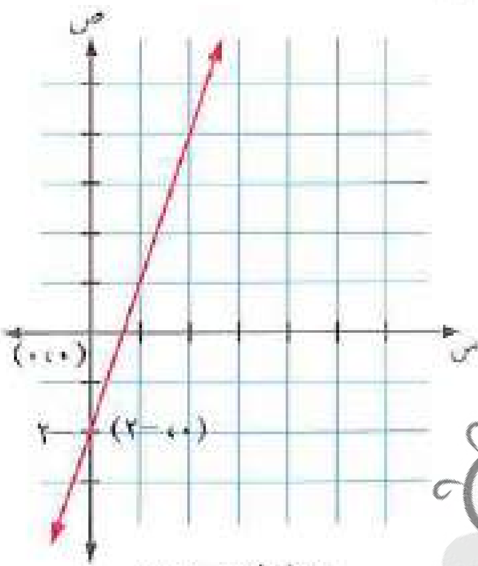
$س_1 = ٠$ ، $ص_1 = -٢$ ، $م = ٣$

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ: $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - (-٢) = ٣(س - ٠)$

$ص + ٢ = ٣س$

$ص = ٣س - ٢$



الشكلُ (٦-١٣)

تدريبٌ (٦-١١)

ما معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلهُ (٤)، ومقطعهُ السينيُّ (٥)؟

مثالٌ (٦-٩):

ما معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي مقطعهُ السينيُّ (-٣)، ومقطعهُ الصاديُّ (٢)؟

الحلُّ:

بما أنَّ المقطعَ السينيَّ = -٣ ، فإنَّ الخطَّ المستقيمَ يمرُّ بالنقطةِ (-٣، ٠)

بما أنَّ المقطعَ الصاديَّ = ٢ ، فإنَّ الخطَّ المستقيمَ يمرُّ بالنقطةِ (٠، ٢)

$س_1 = -٣$ ، $ص_1 = ٠$ ، $س_2 = ٠$ ، $ص_2 = ٢$

ميلُ الخطِّ المستقيمِ $= \text{م} = \dfrac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$\text{م} = \dfrac{٢ - ٠}{٠ - (-٣)}$

$\text{م} = \dfrac{٢}{٣}$

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ: $\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_{١})$ معادلةٌ

$\text{ص} - ٠ = \dfrac{٢}{٣}(\text{س} - (-٣))$ تعويضٌ

$\text{ص} = \dfrac{٢}{٣}\text{س} + ٢$ تبسيطٌ

تعلَّمْ

لإيجادِ المقطعِ السينيِّ للمستقيمِ الذي معادلتُهُ: ص = م س + أ فإنّنا نعوّضُ مكانَ ص صفرًا.
ولإيجادِ المقطعِ الصاديِّ للمستقيمِ الذي معادلتُهُ: ص = م س + أ فإنّنا نعوضُ مكانَ س صفرًا.

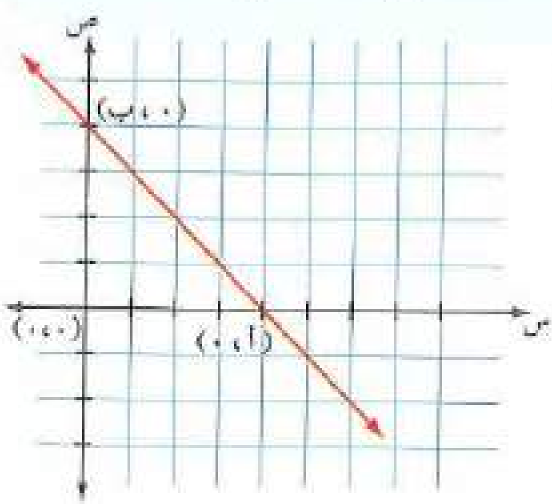
سؤالٌ: جِدِ المقطعَ السينيَّ والمقطعَ الصاديَّ للمستقيمِ الذي معادلتُهُ: ص = ٢س + ٢

فكِّرْ وناقشْ

معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي مقطعهُ السينيُّ (أ)، ومقطعهُ الصاديُّ (ب)، هيَ:

$\dfrac{\text{س}}{\text{أ}} + \dfrac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$، حيثُ أ ≠ صفرًا، ب ≠ صفرًا

لاحظِ الشكلَ (٦–١٤)



الشكلُ (٦–١٤)

تمارينٌ ومسائلُ

١) أيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ على الخطِّ المستقيمِ الذي معادلتُهُ ص = ٢س − ١ ؟

أ (٢، ٥)

ب (−١، −٣)

جـ (٣، ٥)

د (م، ٢م − ١)

هـ (١، ٠)

و (ك + ١، ٢ك + ١)

٢) اكتبْ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ في كلِّ حالةٍ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) ميلُهُ (−٣)، ويمرُّ بالنقطةِ (٢، −١)

ب) يمرُّ بالنقطتينِ (−١، ٠)، (٢، ٢)

جـ) ميلُهُ (٢)، ومقطعهُ السينيُّ (−٥)

د) ميلُهُ (−١)، ومقطعهُ الصاديُّ (٤)

هـ) مقطعهُ السينيُّ (٣)، ومقطعهُ الصاديُّ (٢)

و) يوازي محورَ السيناتِ ومقطعهُ الصاديُّ (٦)

٣) جِدْ إحداثيي نقطةِ تقاطعِ المستقيمِ الذي معادلتهُ ٣س + ٢ص = ٦ معَ محورِ السيناتِ.

٤) جِدْ إحداثيي نقطةِ تقاطعِ المستقيمِ الذي معادلتهُ ٥س − ٣ص = ١٢ معَ محورِ الصاداتِ.

٥) جِدْ كلاًّ منَ المقطعِ السينيِّ والمقطعِ الصاديِّ للمستقيمِ الذي معادلتهُ ٤ص = ٣س − ٢٤

٦) ما معادلةُ المستقيمِ الذي ميلهُ (−٢)، ويمرُّ بنقطةِ تقاطعِ المستقيمِ الذي معادلتهُ س + ٥ص = ١٥ معَ محورِ الصاداتِ؟

٧) المستقيمُ ل يمرُّ بالنقطتينِ (٣ك، ١)، (ك، ٤ − ك)، وميلهُ (٢):

أ) ما قيمةُ الثابتِ ك؟

ب) ما معادلةُ المستقيمِ ل؟

٨) جِدْ إحداثيي نقطةِ تقاطعِ المستقيمِ الذي معادلتهُ ٢س+ ٣ص = ٧ ، معَ المستقيمِ الذي معادلتهُ ص = ٥.

٩) جِدْ إحداثيي نقطةِ تقاطعِ المستقيمِ الذي معادلتهُ س − ٣ص= −٢، معَ المستقيمِ الذي معادلتهُ س+ ص= ٦

١٠) إذا كانتِ النقطتانِ أ (٢، ٣)، ب (−٢، ٤)، وكانَ المستقيمانِ أ جـ ، ب جـ متقاطعينِ في النقطةِ جـ ، وكان ميلاهُما −١، ٢ على الترتيبِ، ما إحداثيا النقطةِ جـ ؟

١١) إذا كانتِ النقاطُ ن (١، ٣)، هـ (٣، −٣)، ك(٢، −٤)، و(١، −١) نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، فجِدْ:

أ) معادلةَ المستقيمِ ن هـ.

ب) معادلةَ المستقيمِ ك و.

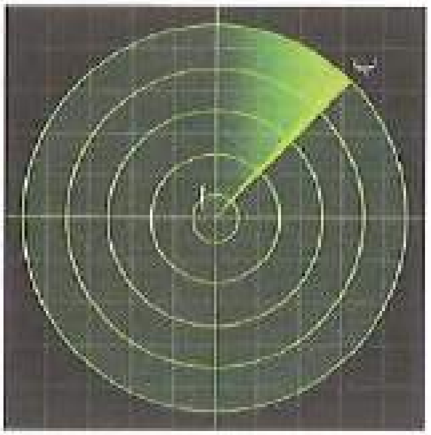
جـ) نقطةَ تقاطعِ المستقيمينِ ن هـ، ك و (إنْ وُجِدَتْ).

٦ - ٤ معادلةُ الدائرةِ

النتاجات

- تجدُ معادلة الدائرةِ بالصورةِ القياسيّةِ منْ معلوماتٍ كافيةٍ.
- تجدُ إحداثيي مركزِ دائرةٍ وطولَ نصفِ قطرِها إذا عُلمتْ معادلتُها.
- تحلُّ مسائلَ عمليةً على الدائرةِ.

النقطةُ (أ) في الشكلِ (٦-١٥) تمثلُ موقعَ رادارٍ يرصدُ سيارةً (النقطةُ ب) بحيثُ تبقى السيارةُ على بعدٍ ثابتٍ مقدارهُ (٦٠) كم عنِ الرادارِ.



الشكلُ (٦-١٥)

أ) ما الشكلُ الهندسيُّ الذي تتحركُ عليهِ السيارةُ؟

ب) ما معادلةُ المنحنى الذي تتحركُ عليهِ السيارةُ؟ (معتبرًا النقطةَ (أ) نقطةَ الأصلِ).

معادلةُ الدائرةِ هي العلاقةُ الجبريةُ التي تربطُ بينَ الإحداثيِّ السينيِّ والإحداثيِّ الصاديِّ لجميعِ النقاطِ التي تقعُ على الدائرةِ. وكلُّ زوجٍ مرتبٍ (س، ص) يحققُ معادلةَ الدائرةِ يمثلُ نقطةً على الدائرةِ.

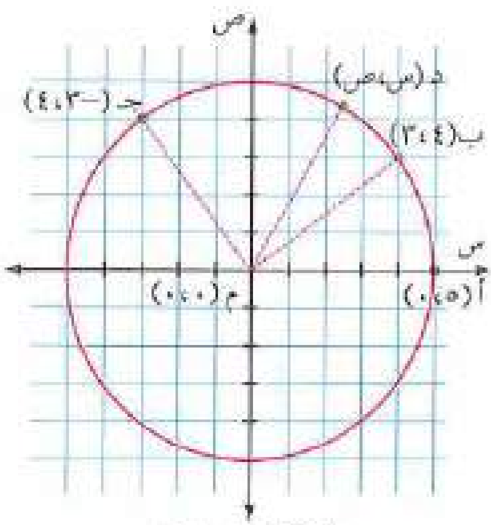
• تذكّر

الدائرةُ: هيَ جميعُ النقاطِ في المستوى التي تبعدُ بعدًا ثابتًا عنْ نقطةٍ ثابتةٍ في المستوى المذكورِ نفسهِ.

- بُعدُ النقاطِ عنِ النقطةِ الثابتةِ يُسمّى طولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ.
- النقطةُ الثابتةُ تُسمّى مركزَ الدائرةِ.

نشاط (٦-٥)

يمثلُ الشكلُ (٦-١٦) دائرةً يقعُ مركزُها على نقطةِ الأصلِ (م) وتمرُّ بكلٍّ منَ النقاطِ أ، ب، جـ، د.



الشكلُ (٦-١٦)

١) جِدْ طولَ كلٍّ منَ القطعِ المستقيمةِ م أ، م ب، م جـ، ماذا تلاحظُ؟

٢) ما طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ؟

٣) ما طولُ القطعةِ المستقيمةِ م د؟ لماذا؟

٤) استخدمْ فرعَ (٣) وقانونَ المسافةِ بينَ النقطتينِ م، د في إيجادِ العلاقةِ بينَ س، ص.
٥) تحققْ مِنْ أنَّ النقاطَ أ، ب، جـ تحققُ المعادلةَ التي حصلتَ عليها في فرعِ (٤).
٦) هلْ يمكنُكَ التعبيرُ عنْ معادلةِ دائرةٍ مركزُها (٠، ٠) وطولُ نصفِ قطرِها (ر)؟

معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ (٠، ٠) وطولُ نصفِ قطرِها (ر) هيَ:

$$(س)^{٢} + (ص)^{٢} = (ر)^{٢}$$

مثالٌ (٦-١٠):

ما معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ وطولُ قطرِها (٨) وحداتٍ؟

الحلُّ:

نقطةُ المركزِ هيَ نقطةُ الأصلِ (٠، ٠) وطولُ نصفِ قطرِها ر = ٤ وحداتٍ.

معادلةُ الدائرة: $س^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} = (٤)^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

تدريبٌ ٦-١٢

ما معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ الأصلِ وتمرُّ بالنقطةِ (-١، ٦)؟

تدريبٌ ٦-١٣

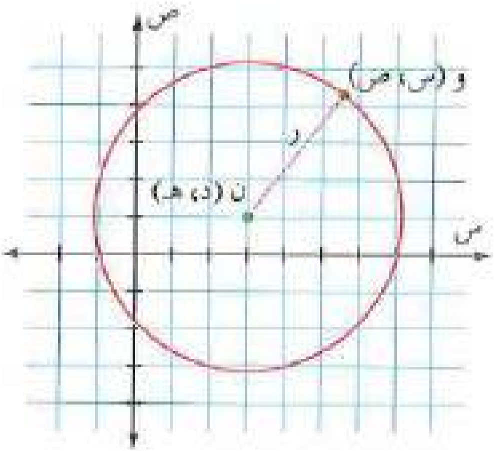
إذا كانتِ النقطتانِ أ (٥، -١٢)، ب (-٥، ١٢) نهايتي قطرٍ في دائرةٍ مركزُها النقطةُ م:

أ) ما إحداثيا مركزِ الدائرةِ؟

ب) ما طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ؟

جـ) ما معادلةُ الدائرةِ؟

يوضحُ الشكلُ (٦–١٧) دائرةً مركزُها النقطةُ ن (د، هـ)، وطولُ نصفِ قطرِها (ر)، النقطةُ و (س،ص) نقطةٌ تقعُ على محيطِ الدائرةِ.



الشكلُ (٦–١٧)

طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ = البعدَ بينَ النقطتينِ ن ، و

$$ر = \sqrt{(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢}$$

$$ر^٢ = (س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢$$

تُسمّى هذهِ الصورةُ:

الصورةَ القياسيةَ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (د،هـ) وطولُ نصفِ قطرِها (ر).

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (د، هـ) وطولُ نصفِ قطرِها (ر) هيَ:

$$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$$

مثالٌ (٦–١١):

ما معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (–١، ٤) وطولُ نصفِ قطرِها (٦) وحداتٍ؟

الحلُّ:

إحداثيا نقطةِ المركزِ (د ، هـ) = (–١، ٤)

طولُ نصفِ القطرِ = ر = ٦

معادلةُ الدائرةِ هيَ: $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

$(س - (-١))^٢ + (ص - ٤)^٢ = (٦)^٢$ تعويضٌ

$(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$ تبسيطٌ

مثالٌ (٦–١٢):

ما معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (–٢، ٤) وتمرُّ بالنقطةِ (٣، –١)؟

الحلُّ:

إحداثيا المركزِ (د ، هـ) = (–٢، ٤)

طولُ نصفِ القطرِ = ر = البعدَ بينَ المركزِ (–٢، ٤) والنقطةِ (٣، –١) الواقعةِ على الدائرةِ

$$ر = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$= \sqrt{(٣-(-٢))^{٢} + ((-١)-٤)^{٢}}$

$= \sqrt{(٥)^{٢} + (-٥)^{٢}}$

$= \sqrt{٢٥ + ٢٥}$

$= \sqrt{٥٠}$

معادلةُ الدائرةِ هيَ : $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

$(س-(-٢))^{٢} + (ص-٤)^{٢} = (\sqrt{٥٠})^{٢}$

$(س+٢)^{٢} + (ص-٤)^{٢} = ٥٠$

تدريب (٦-١٤)

أ) جِدْ معادلةَ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (٧، ٠) وتمرُّ بالنقطةِ (−١، ٦).

ب) جِدْ إحداثيي نقطةِ المركزِ وطولَ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها $(س-٥)^{٢} + (ص+٣)^{٢} = ٤٩$

مثالٌ (٦-١٣):

جِدْ إحداثيي نقطةِ المركزِ وطولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص - ١١ = صفرًا$

الحلُّ:

معادلةُ الدائرةِ ($س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص - ١١ = صفرًا$) ليستْ على الصورةِ القياسيةِ، نكتبُها على الصورةِ القياسيةِ بإكمالِ المربعِ لكلٍّ منَ المتغيرينِ س ، ص.

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص - ١١ = صفرًا$

$(س^{٢} - ٦س) + (ص^{٢} + ٨ص) = ١١$ ترتيبُ الحدودِ وفصلُ المتغيراتِ

$(س^{٢} - ٦س + (٣)^{٢}) + (ص^{٢} + ٨ص) = ١١ + (٣)^{٢}$ إكمالُ المربعِ للمتغيرِ س

$(س^{٢} - ٦س + (٣)^{٢}) + (ص^{٢} + ٨ص + (٤)^{٢}) = ١١ + (٣)^{٢} + (٤)^{٢}$ التبرير....

$(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١١ + ٩ + ١٦$ تحليل

$(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٣٦$ الصورةُ القياسيةُ

فيكونُ: $د = ٣$ ، $هـ = -٤$ ، $ر^{٢} = ٣٦$

إحداثيا مركزِ الدائرةِ (د ، هـ) = (٣، −٤)

طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ = ر = (٦) وحداتٍ.

تدريب ٦-١٥

جِدْ إحداثيي نقطةِ المركزِ وطولَ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢س - ٦ص - ١٥ = $ صفرًا

الصورةُ القياسيةُ لمعادلةِ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (د،هـ) وطولُ نصفِ قطرِها (ر) هيَ:

$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ر^{٢}$

$(س^{٢} - ٢دس + د^{٢}) + (ص^{٢} - ٢هـص + هـ^{٢}) = ر^{٢}$ المفكوكُ

$س^{٢} + ص^{٢} - ٢دس - ٢هـص + (د^{٢} + هـ^{٢} - ر^{٢}) = $ صفرًا ترتيبُ الحدودِ

نفرضُ أنَّ $(-٢د) = أ$ ، $(-٢هـ) = ب$ ، $(د^{٢} + هـ^{٢} - ر^{٢}) = جـ$

فتكونُ معادلةُ الدائرةِ: $س^{٢} + ص^{٢} + أس + ب ص + جـ = $ صفرًا

تُسمّى هذهِ الصورةُ **الصورةَ العامةَ لمعادلةِ الدائرةِ**، لاحظ أنَّ:

١) معاملُ $س^{٢}$ = معاملُ $ص^{٢}$ = ١

٢) إحداثيا نقطةِ المركزِ = (د ، هـ) = (− نصفِ معاملِ س ، − نصفِ معاملِ ص)

٣) طولُ نصفِ القطرِ = $ر = \sqrt{د^{٢} + هـ^{٢} - \text{الحدِّ الثابتِ (جـ)}}$ ، حيثُ $(د^{٢} + هـ^{٢} - جـ \geq ٠)$

تدريب ٦-١٦

حلَّ تدريبَ (٦− ١٥) باستخدامِ الصورةِ العامةِ لمعادلةِ الدائرةِ.

• فكِّرْ

في الصورةِ العامةِ لمعادلةِ الدائرةِ:

- لماذا كانَ الشرطُ $(د^{٢} + هـ^{٢} - جـ \geq ٠)$؟
- إذا كانَ $د^{٢} + هـ^{٢} - جـ = $ صفرًا ، ماذا تمثلُ معادلةُ الدائرةِ؟

مثالٌ (٦-١٤):

حدِّدْ موقعَ كلٍّ مِنَ النقاطِ الآتيةِ بالنسبةِ للدائرةِ التي معادلتُها $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = ٢٥$

أ $(٢، -٢)$ ، ب $(-٢، -٦)$ ، جـ $(٢ ، ٦)$

الحلُّ: $\text{ر}^{٢} = ٢٥ \Leftarrow \text{ر} = ٥$

أ $(٢، -٢)$: $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = (٢ - ١)^{٢} + (-٢ + ٢)^{٢}$ تعويض

$= ١ + ٠ = ١ < ٢٥$

أيْ أنَّ بُعدَ النقطةِ أ عنِ المركزِ أصغرُ منْ ر ، لذلكَ النقطةُ أ تقعُ داخلَ الدائرةِ.

ب $(-٢، -٦)$: $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = ((-٢) - ١)^{٢} + ((-٦) + ٢)^{٢}$ تعويض

$= ٩ + ١٦ = ٢٥ = \text{ر}^{٢}$

أيْ أنَّ بُعدَ النقطةِ ب عنِ المركزِ يساوي ر ، لذلكَ النقطةُ ب تقعُ على الدائرةِ.

جـ $(٢ ، ٦)$: $(\text{س} - ١)^{٢} + (\text{ص} + ٢)^{٢} = (٢ - ١)^{٢} + (٦ + ٢)^{٢}$ تعويض

$= ١ + ٦٤ = ٦٥ > ٢٥$

أيْ أنَّ بُعدَ النقطةِ جـ عنِ المركزِ أكبرُ منْ ر ، لذلكَ النقطةُ جـ تقعُ خارجَ الدائرةِ.

تدريب ٦-١٧

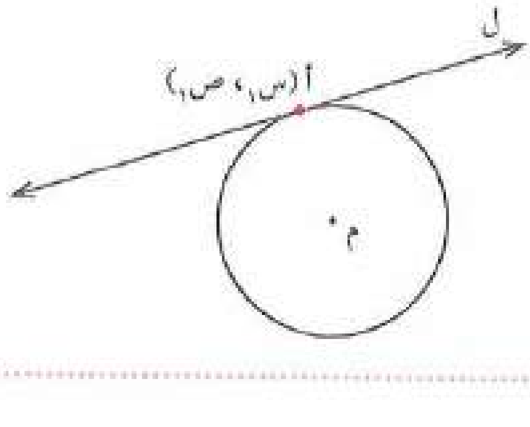
حلِّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

تحدٍّ: جِدْ معادلةَ دائرةٍ تمسُّ كلاًّ مِنَ المستقيمينِ $\text{س} + \text{ص} = ٢$ ، $\text{س} + \text{ص} = -٢$

هلْ هناكَ حلولٌ أخرى؟ برِّرْ إجابتَكَ.

تعلَّمْ:

يُسمّى المستقيمُ ل مماسًا للدائرةِ التي مركزُها م إذا قطعها في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ. كما في الشكلِ المجاورِ.



تمارينُ ومسائلُ

١) اكتبْ معادلةَ الدائرةِ في كلِّ حالةٍ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) مركزُها النقطةُ الأصلِ وطولُ نصفِ قطرِها (٢) وحدةٌ.

ب) مركزُها النقطةُ (−١، ٣) وطولُ قطرِها (١٤) وحدةً.

جـ) مركزُها النقطةُ (٤، −١) وتمرُّ بالنقطةِ (٩، −٢).

د) مركزُها النقطةُ (٥، ٣) وتمسُّ محورَ السيناتِ.

هـ) طولُ قطرِها (٦) وحداتٍ وتمسُّ كلًّا مِنْ محورِ السيناتِ ومحورِ الصاداتِ (جِدْ جميعَ الحلولِ الممكنةِ).

٢) جِدْ إحداثيي المركزِ وطولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها:

أ) $س^٢ + ص^٢ = ١٢١$

ب) $(ص − ٢)^٢ + (س + ٤)^٢$ [illegible]

جـ) $(٣س − ٦)^٢ + (٣ص + ١٢)^٢ =$ [illegible]

د) $س^٢ + ص^٢ = ٤س −$ [illegible]

هـ) $س^٢ + ص^٢ − ٨س = ١٢$

٣) حدِّدْ موقعَ كلِّ نقطةٍ منَ النقاطِ الآتيةِ بالنسبةِ للدائرةِ التي معادلتُها

$(س − ٥)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٩$

ن (٢، −١) ، و (١، ٠) ، ل (٤، −٢) ، ك (٥، −١)

٤) ما معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها النقطةُ (٤، ١) وتمسُّ المستقيمَ الذي معادلتُه ص = −٢ ؟

٥) ما معادلةُ الدائرةِ التي يقعُ مركزُها على المستقيمِ الذي معادلتُه س=٥، وتمسُّ محورَ الصاداتِ عندَ النقطةِ (٠، ٣)؟

مراجعةٌ

١) إذا كانتِ النقطتانِ أ(−٥، ١)، ب(٠، −٣) نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، فأجبْ عمّا يأتي:

أ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب.

ب) جِدْ إحداثيي نقطةِ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أ ب.

جـ) جِدْ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ أ ب.

د) جِدْ معادلةَ الدائرةِ التي تكونُ $\overline{\text{أ ب}}$ قطرًا فيها.

٢) إذا كانتِ النقطتانِ م(−١، ٧)، ن(س، ١) نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، وكانتِ النقطةُ جـ (٣، ص) نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ م ن، فما قيمةُ كلٍّ مِنْ س، ص؟

٣) إذا كانتِ النقاطُ ل(−١، ٣)، ن(٥، ١)، هـ(١، −١) رؤوسَ مثلثٍ، فجِدْ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بنقطةِ منتصفِ الضلعِ ن ل، والرأسِ هـ.

٤) جِدْ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ في كلٍّ مما يأتي:

أ) ميلهُ (٤)، ويمرُّ بالنقطةِ (−١، ٢).

ب) يمرُّ بالنقطتينِ (٢، −١)، (٥، ٣).

جـ) ميلهُ (−٣) ويمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

د) مقطعهُ الصاديُّ (٦)، ويوازي محورَ السينات.

هـ) مقطعهُ السينيُّ (−٣)، ومقطعهُ الصاديُّ (٢).

٥) إذا كانتِ النقاطُ أ(١، ٦)، ب(−١، ٢)، جـ(٥، ١) نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، فما معادلةُ الدائرةِ التي مركزُها نقطةُ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ أب، وتمرُّ بالنقطةِ جـ؟

٦) ما معادلةُ المستقيمِ الذي ميلهُ (٢)، ويمرُّ بمركزِ الدائرةِ التي معادلتُها
$(٢س-٢)^{٢} + (٢ص+٤)^{٢} = ١٠٠$؟

٧) إذا كانَ أ ب جـ مثلثًا، فيه النقطةُ أ(٢، ٣)، وكانتِ النقطةُ د(٣، ٥) منتصفَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب، والنقطةُ هـ(−١، ٤٫٥) منتصفَ القطعةِ المستقيمةِ أ جـ:

أ) جِدْ إحداثيي كلٍّ منَ النقطتينِ ب، جـ.

ب) بيّنْ أنَّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في أ.

٨) جِدْ إحداثيي المركزِ وطولَ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها:

أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٦٤$

ب) $(ص+١)^{٢} + س^{٢} = ٨١$

جـ) $(٢س-٦)^{٢} + (٢ص+١٢)^{٢} = ١٩٦$

د) $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٤س - ١٢ص - ١٢$

٩) إذا كانتِ النقطةُ ك (ن، −١) تقعُ على محيطِ الدائرةِ التي معادلتُها

$(س-١)^{٢} + (ص-٥)^{٢} = ٤٠$

جِدْ جميعَ القيمِ الممكنةِ للثابتِ ن.

١٠) جِدْ إحداثيي كلٍّ مِنْ نقطتي تقاطعِ الخطِّ المستقيمِ الذي معادلتُه (ص = ٣) معَ الدائرةِ التي معادلتُها $(س+٢)^{٢} + (ص-٥)^{٢} = ٢٩$

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ مِنْ ثماني فقراتٍ مِنْ نوعِ الاختيارِ مِنْ متعدِّدٍ، لكلِّ فقرةٍ أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، اخترْ رمزَ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منها.

(١) إذا كانتِ النقطتانِ و (٢، ١)، م (−٢، −٢) نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، فإنَّ طولَ القطعةِ المستقيمةِ وم يساوي:

أ) ٧ ب) ٢٥ جـ) ٥ د) ١

(٢) ما طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلتُها ٩ س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٩٠٠؟

أ) ٤٥٠ ب) ٣٠ جـ) ٥٠ د) ١٠

(٣) ما إحداثيا مركزِ الدائرةِ التي معادلتُها س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٨ص − ١٠ = ٠؟

أ) (٣، −٤) ب) (−٣، ٤) جـ) (٦، −٨) د) (−٦، ٨)

(٤) أيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ على محيطِ الدائرةِ التي معادلتُها س^{٢} + (ص−٢)^{٢} = ٢٥؟

أ) (٥، ٠) ب) (٤، ٥) جـ) (٠، ٥) د) (٠، −٤)

(٥) إذا كانتِ النقطتانِ هـ (١، ٣)، و(٣، −١) نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، وكانتِ النقطةُ هـ نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ و ل، فما إحداثيا النقطةِ ل؟

أ) (٢، ١) ب) (−١، ٧) جـ) (٤، ٢) د) (٥، −٥)

(٦) معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي ميلهُ (٥) ويمرُّ بنقطةِ الأصلِ هيَ:

أ) ص= ٥ ب) ص= ٥س جـ) ص= س+٥ د) س= ٥ص

(٧) أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ تُمثِّلُ معادلةَ دائرةٍ؟

أ) س^{٢} + ص = ٢٥ ب) س^{٢} − ص^{٢} = ٢٥

جـ) س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٢٥ د) س^{٢} = ٢٥ − ص^{٢}

(٨) ميلُ الخطِّ المستقيمِ الذي معادلتُهُ (ص−٣) = ٢ (٣−س) يساوي:

أ) ٣ ب) −٣ جـ) −٢ د) ٢

٢) أ ب جـ مثلثٌ رؤوسُهُ النقاطُ أ (١، ١)، ب (١، ٧)، جـ (٨، ٤):

أ) بيّنْ أنَّ المثلثَ أ ب جـ متساوي الساقينِ.

ب) ما مساحةُ المثلثِ أ ب جـ؟

٣) ما معادلةُ الخطِّ المستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطتينِ (−١، ٥)، (١، −٣)؟

٤) ما معادلةُ الدائرةِ التي طولُ قطرِها (١٠) وحداتٍ ومركزُها النقطةُ (−٢، ١)؟

٥) إذا كانتِ النقاطُ ك (٣، ١)، ن (−١، −٥)، ل (س، ص) نقاطًا في المستوى الإحداثيِّ، وكانَ ميلُ الخطِّ المستقيمِ ك ل يساوي (١)، وميلُ الخطِّ المستقيمِ ن ل يساوي (٢)، فجِدْ إحداثيي النقطةِ ل.

٦) إذا كانتِ النقطةُ (٣، ٥) تقعُ على محيطِ دائرةٍ مركزُها النقطةُ (د، ٢)، وكانَ طولُ نصفِ قطرِ الدائرةِ يساوي ٥ وحداتٍ:

أ) جِدْ جميعَ القيمِ الممكنةِ للثابتِ د.

ب) جِدْ معادلةَ الدائرةِ في كلِّ حالةٍ.

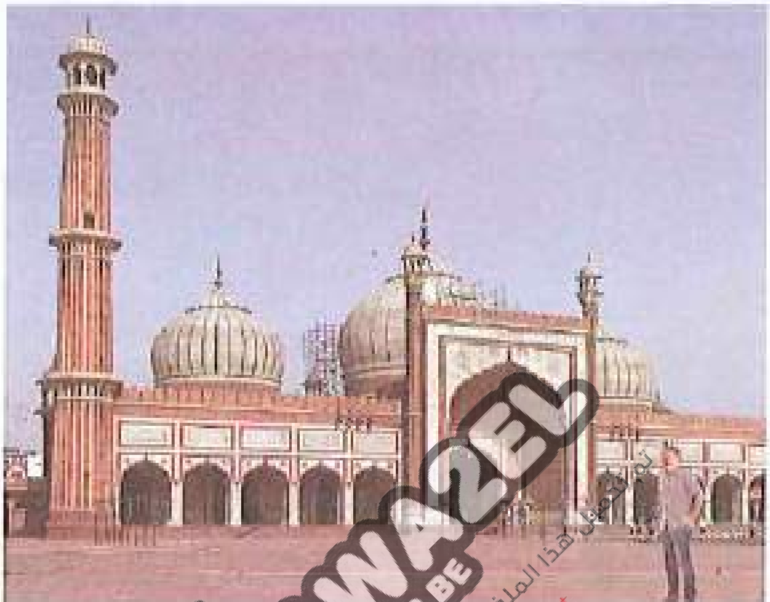
٧

يبحثُ حسابُ المثلثاتِ في العلاقةِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ، وقياساتِ زواياه، وإيجادِ أطوالِ هذهِ الأضلاعِ، وقياساتِ هذهِ الزوايا.

ويستخدمُ حسابُ المثلثاتِ لحسابِ المسافاتِ والارتفاعاتِ وقياساتِ الزوايا في تطبيقاتٍ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثلَ: إيجادِ ارتفاعاتِ الأبراجِ، والعماراتِ، والأعمدةِ، ودراسةِ حركةِ الصواريخِ، والأقمارِ الصناعيةِ، والمركباتِ الفضائيةِ، ورصدِ النجومِ، كما يُستخدمُ حسابُ المثلثاتِ في الملاحةِ، والمساحةِ، والجغرافيا، والفيزياءِ، وكثيرٍ منْ فروعِ الهندسةِ.

الوحدةُ السابعةُ

النسبُ المثلثيةُ



الشكل

يُتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- استقصاءِ مفاهيمِ النسبِ المثلثيةِ (الجيبِ وجيبِ التمامِ والظلِّ).
- إيجادِ النسبِ المثلثيةِ (الجيبِ وجيبِ التمامِ والظلِّ) في المثلثِ القائمِ الزاويةِ.
- حلِّ مسائلَ تتعلقُ بالمثلثِ قائمِ الزاويةِ.
- استقصاءِ العلاقاتِ الآتيةِ: جا س = جتا (٩٠° − س).

  جتا س = جا (٩٠° − س).

  جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١.

  $ظا س = \frac{جاس}{جتاس}$

- استخدامِ النسبِ المثلثيةِ (الجيبِ وجيبِ التمامِ والظلِّ) في حلِّ المثلثِ القائمِ الزاويةِ.
- حلِّ مسائلَ حياتيةٍ تتعلقُ بزوايا الارتفاعِ والانخفاضِ.

تهيئة

١) س ص ع مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ص، فيهِ: س ص = ٨سم، ص ع = ٦سم، جِدْ س ع.

٢) يقفُ حمزةُ على النقطةِ (أ) التي تبعدُ ١٢م عنْ قاعدةِ بنايةٍ ارتفاعُها ٥م.

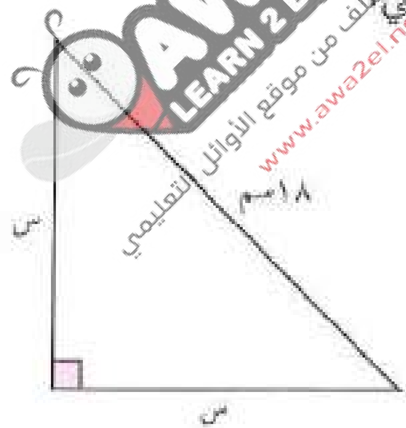
أ) ارسمْ شكلاً هندسيًا يوضحُ المسألةَ.

ب) جِدِ البعدَ بينَ النقطةِ (أ) وقمةِ البنايةِ.

٣) ما مجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ؟

٤) مثلثٌ قائمُ الزاويةِ قياسُ إحدى زواياه الحادةِ يساوي ٣٥°، فما قياسُ الزاويةِ الثالثةِ؟

٥) جِدْ قيمةَ س في الشكلِ الآتي:



٦) حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

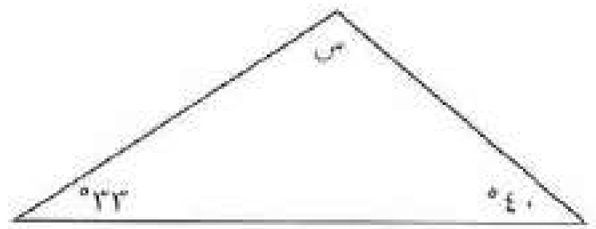
أ) $س^2 + ٠,٣٦ = ١$

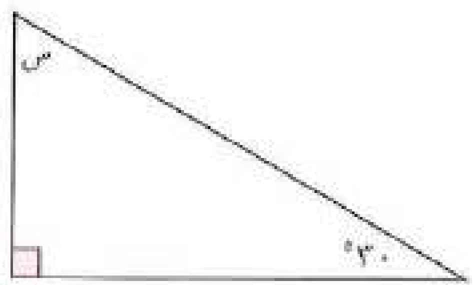
ب) $\frac{س}{٥} = ٠,٤$

ج) $\frac{٣}{ص} = ٢$

د) $٥س + ٣ = ٢س - ٩٠$

٧ ما قياسُ الزوايا المجهولةِ في المثلثاتِ الآتيةِ؟



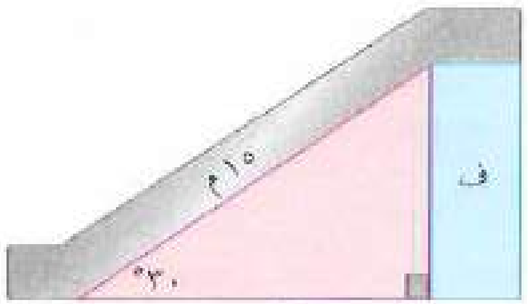


٧ – ١ جيبُ الزاويةِ الحادةِ

النتاجاتُ

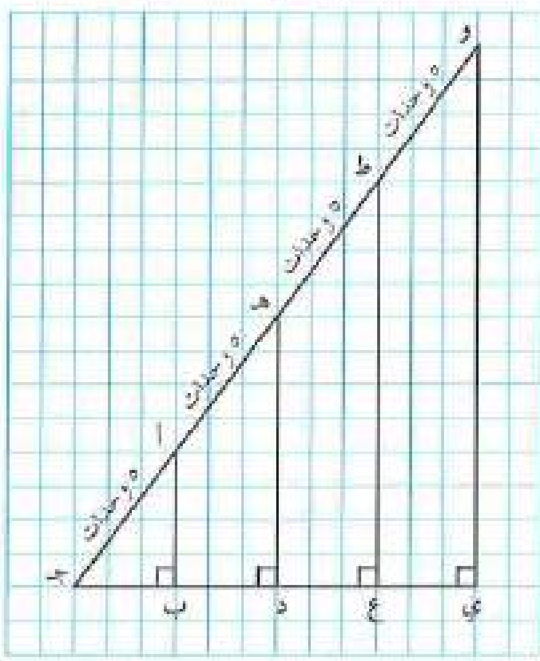
- تحسبُ جيبَ زاويةٍ حادةٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- تحسبُ قياسَ الزاويةِ إذا عُلِمَ جيبُها.
- تحلُّ مسائلَ عمليّةً على الجيبِ.

يبينُ الشكلُ (٧–١) سلّماً كهربائيًا طولهُ ١٠م، وقياسُ الزاويةِ التي يكوّنُها معَ الأرضِ ٣٠°، جِدِ ارتفاعَ أعلى السلّمِ (ف) عنْ سطحِ الأرضِ.



الشكلُ (٧–١)

الشكلُ (٧–٢) فيهِ جـ زاويةٌ حادةٌ مشتركةٌ في كلٍّ مِنَ المثلثاتِ القائمةِ الزاويةِ: أ ب جـ، هـ د جـ، ط ع جـ، و ي جـ، تأملِ الشكلَ واملأِ الفراغاتِ في الجدولِ الآتي:



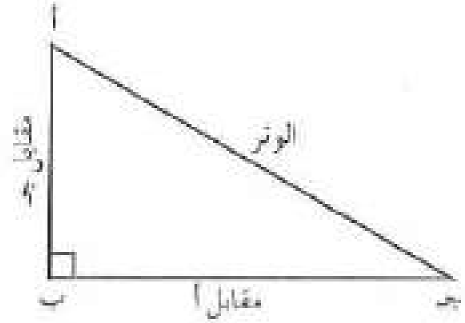
الشكلُ (٧–٢)

المثلثُ	طولُ المقابلِ (بالوحدةِ)	طولُ الوترِ (بالوحدةِ)	$\frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}}$
أ ب جـ	٤	٥	$\frac{٤}{٥}$
هـ د جـ	٨	١٠	
ط ع جـ			
و ي جـ			

ماذا تلاحظُ على النسبةِ $\frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}}$؟

لا بُدَّ أنّكَ لاحظتَ أنَّ النسبةَ ثابتةٌ، وتمثّلُ النسبةُ $\frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}}$ نسبةَ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ جـ إلى طولِ الوترِ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ، وهيَ نسبةٌ ثابتةٌ، وتُسمّى هذهِ النسبةُ **جيبَ الزاويةِ** الحادّةِ جـ، ويُرمزُ لها بالرمزِ **(جا جـ)**.

الشكلُ (٧–٣) يمثلُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ، نسبةُ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ الحادةِ إلى طولِ الوترِ تُسمّى **جيبَ الزاويةِ**، ويُرمزُ لها بالرمزِ (جا) وبالإنجليزيةِ (Sine) وتُقرأُ (صاين)، واختصارًا (sin).



الشكلُ (٧–٣)

$$\text{جا أ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

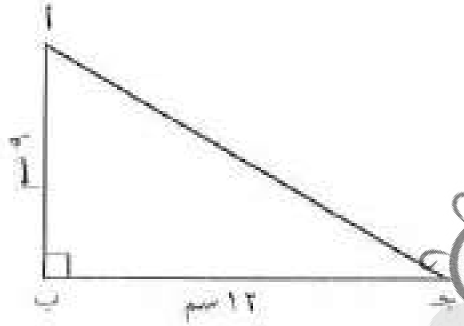
نشاط (٧-١)

ابحثْ في الإنترنتْ عنْ سببِ تسميةِ جيبِ الزاويةِ بهذا الاسمِ.

مثالٌ (٧–١):

في الشكلِ (٧–٤)، أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، فيهِ أ ب = ٩سم، ب جـ = ١٢سم، جدْ كلًا ممّا يأتي:

١) أ جـ   ٢) جا أ   ٣) جا جـ   ٤) جا^{٢} أ + جا^{٢} جـ



الشكلُ (٧–٤)

الحلُّ:

١) منَ الشكلِ (٧–٤)، ووَفقَ نظريةِ فيثاغورس:

$$(\text{أجـ})^{٢} = (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$$
$$= ٩^{٢} + ١٢^{٢}$$
$$= ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$$

إذنْ طولُ الوترِ أ جـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥سم.

٢) $\text{جا أ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{١٢}{١٥}$

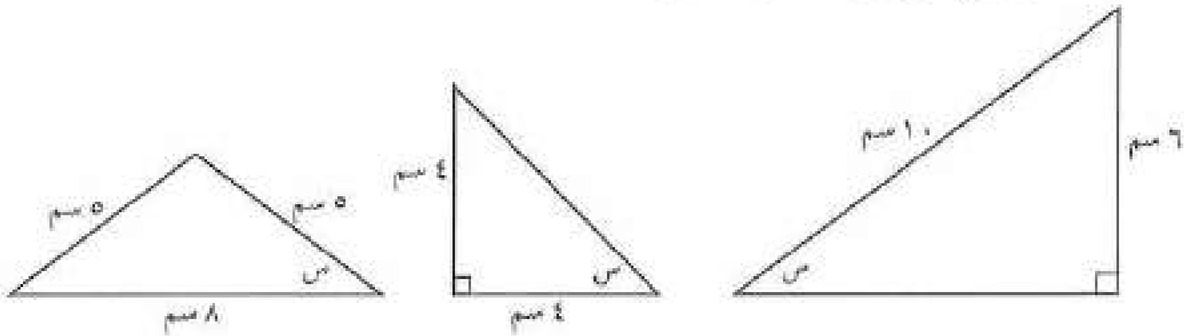
٣) $\text{جا جـ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ جـ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{٩}{١٥}$

٤) جا^{٢} أ + جا^{٢} جـ = ١ لماذا؟

ناقش: أ جـ ≠ –١٥. لماذا؟

تدريب (٧-١)

احسبْ جا س في كلٍّ مِنَ المثلثاتِ الآتيةِ:



الشكلُ (٧-٥)

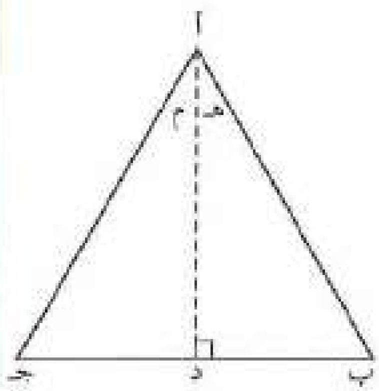
تدريب (٧-٢)

في الشكلِ (٧-٦)، أ ب جـ مثلثٌ متساوي الأضلاعِ، نُصِّفتْ الزاويةُ أ حيثُ أُسقِطَ عمودٌ منْ أ على منتصفِ الضلعِ ب جـ في النقطةِ د ، أجِبْ عمّا يأتي:

أ) ما قياسُ كلٍّ منْ: ∢ أ ، ∢ ب ، ∢ جـ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

ب) ما قياسُ كلٍّ منْ: ∢ هـ ، ∢ م؟ برِّرْ إجابتَكَ.

جـ) ماذا تلاحظُ على أطوالِ الأضلاعِ المتناظرةِ وقياساتِ الزوايا المتناظرةِ في المثلثينِ أ د ب، أ د جـ؟



الشكلُ (٧-٦)

مثالٌ (٧-٢):

في التدريبِ (٧-٢)، افرضْ أنَّ طولَ أ ب يساوي س، ثمَّ جِدْ كلاًّ ممّا يأتي:

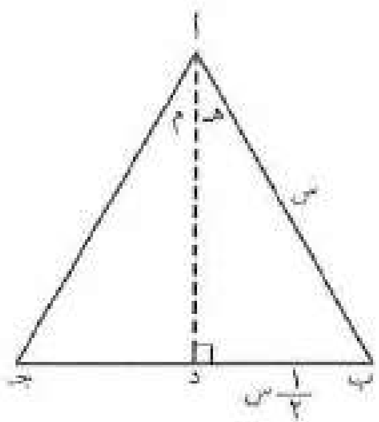
١) طولَ ب د ٢) طولَ أ د ٣) جا ب ٤) جا هـ

الحلُّ:

١) بما أنَّ أ د يُنصِّفُ ب جـ ، وأنَّ المثلثَ متساوي الأضلاعِ كما في الشكلِ (٧-٧) فإنَّ:

طولَ ب د = طولَ د جـ = $\frac{1}{2}$ س

٢) (أب)^2 = (ب د)^2 + (أ د)^2 نظريةُ فيثاغورسَ



الشكلُ (٧-٧)

$$س^{٢} = \frac{١}{٤} س^{٢} + (أ\, د)^{٢}$$

$$(أ\, د)^{٢} = \frac{٣}{٤} س^{٢} \quad ومنه \quad أ\, د = \frac{\sqrt{٣}}{٢} س$$

سؤال: لماذا أ د $\neq \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ س؟

٣) $جا\, ب = \dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} س}{س} = \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤) $جا\, هـ = \dfrac{\frac{١}{٢} س}{س} = \dfrac{١}{٢}$

• فكِّرْ

هلْ يمكنُكَ استنتاجُ قيمةِ كلٍّ مِنْ جا ٣٠°، جا ٦٠° منْ خلالِ حلِّ المثالِ (٧-٢)؟

تُستخدمُ الآلةُ الحاسبةُ في إيجادِ جيبِ زاويةٍ معلومةٍ عنْ طريقِ فتحِ الآلةِ الحاسبةِ وإدخالِ قياسِ الزاويةِ، ثمَّ الضغطِ على المفتاحِ «sin».

كما تستخدمُ في إيجادِ قياسِ الزاويةِ إذا عُلِمَ قيمةُ الجيبِ لها عنْ طريقِ فتحِ الآلةِ الحاسبةِ وإدخالِ قيمةِ جيبِ الزاويةِ، ثمَّ الضغطِ على المفتاحِ «Inv» ثمَّ الضغطِ على المفتاحِ «sin».

مثالٌ (٧-٣):

استخدمِ الآلةَ الحاسبةَ في إيجادِ جا ٣٥°

الحلُّ: نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ وتُدخلُ قياسَ الزاويةِ ٣٥°، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ «sin» فيكونُ الناتجُ

جا ٣٥° = ٠,٥٧٣٥٧٦٤٣٦٣٥١٠٤٦٠٩٦١٠٨٠٣١٩١ ≈ ٠,٥٧

أنظرِ الشكلَ (٧-٨)

الشكلُ (٧-٨)

مثالٌ (٧-٤):

إذا علمتَ أنَّ جاس = ٠,٥، فجدْ قياسَ الزاويةِ س.

الحلُّ: نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ ونُدخلُ قيمةَ جيبِ الزاويةِ (٠,٥)، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ «Inv» ثمَّ على المفتاحِ «$\sin^{-1}$» فيكونُ الناتجُ قيمةَ الزاويةِ س = ٣٠°، أنظرِ الشكلَ (٧-٩).

الشكلُ (٧-٩)

مثالٌ (٧-٥):

قامَ لاعبٌ بالتزلجِ منْ تلةٍ ارتفاعُها (١٠٠)م، وقياسُ زاويةِ ميلِها عنْ سطحِ الأرضِ ١٨°، كما في الشكلِ (٧-١٠) أحسبْ طولَ مسارِ التزلجِ ل.

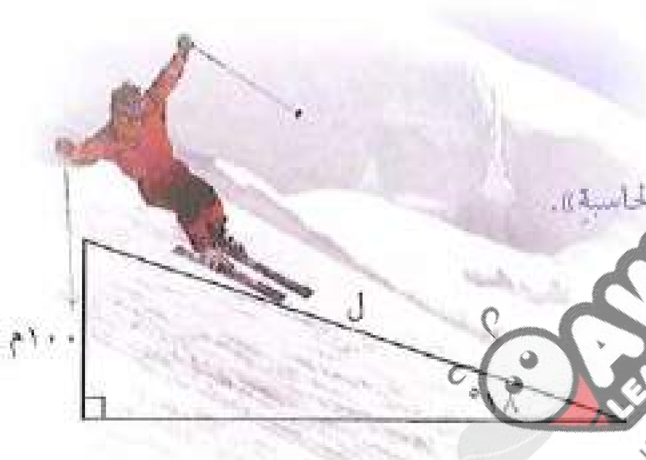
الحلُّ: جا ١٨° = $\frac{١٠٠}{ل}$

جا ١٨° = ٠,٣٠٩٠ «باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ».

ل × ٠,٣٠٩٠ = ١٠٠

أيْ أنَّ ل = ١٠٠ ÷ ٠,٣٠٩٠

ل = ٣٢٤م تقريبًا.



الشكلُ (٧-١٠)

تدريبٌ ٧-٣

حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

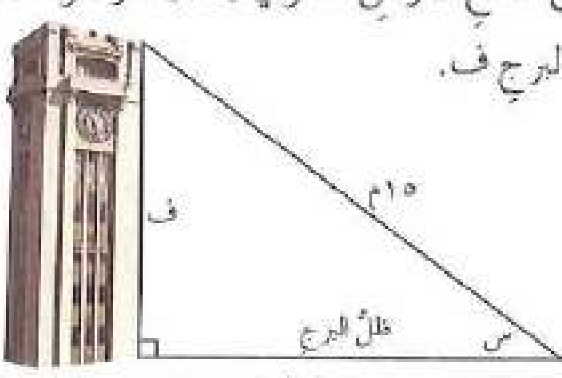
مثالٌ (٧-٦):

في لحظةٍ ما كانتِ المسافةُ بينَ قمةِ برجٍ ورأسِ ظلِّهِ على سطحِ الأرضِ تساوي (١٥) مترًا، وكانَ جاس = ٠,٦ كما في الشكلِ (٧-١١)، جدِ ارتفاعَ البرجِ ف.

الحلُّ: جا س = ٠,٦

$\frac{ف}{١٥}$ = ٠,٦

ف = ١٥ × ٠,٦ = ٩م.



الشكلُ (٧-١١)

تمارينُ ومسائلُ

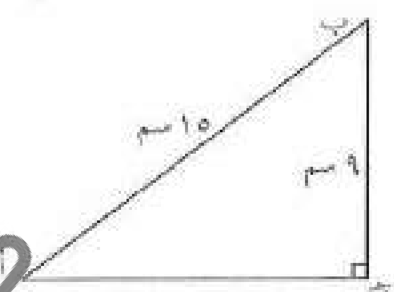
١) أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، فيهِ أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم، جِدْ كلاًّ مما يأتي:

أ) أ جـ ب) جا أ جـ) جا جـ

٢) س ص ع مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ص، فيهِ س ص = ٥ سم، ص ع = ١٢ سم، جِدْ:

أ) س ع ب) جاس جـ) قياسُ الزاويةِ س باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ.

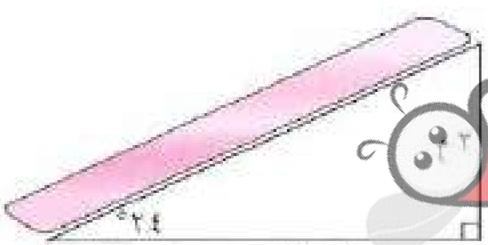
٣) احسبْ جا أ ، جا ب، في الشكلينِ (٧-١٢/أ)، (٧-١٢/ب)



الشكلُ (٧-١٢/أ)

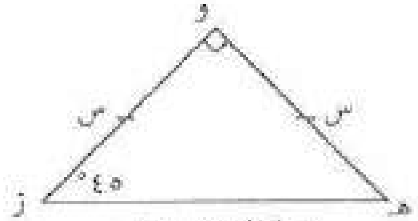
الشكلُ (٧-١٢/ب)

٤) جِدْ طولَ لوحِ تزلجٍ يرتفعُ أحدُ طرفيهِ عنِ الأرضِ (٢)م، ويصنعُ طرفهُ الآخرُ معَ الأرضِ زاويةً قياسُها (٢٤°)، انظرِ الشكلَ (٧-١٣).



الشكلُ (٧-١٣)

٥) هـ و ز مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في و، كما في الشكلِ (٧-١٤) أثبتْ أنّ جا ٤٥° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$



الشكلُ (٧-١٤)

٦) شجرةٌ ارتفاعُها (١٠)م، كما في الشكلِ (٧-١٥)، إذا كانَ جا هـ = ٠,٥، فجِدِ المسافةَ بينَ قمةِ الشجرةِ ورأسِ الظلِّ.

الشكلُ (٧-١٥)

٧ – ٢ جيبُ تمامِ الزاويةِ الحادّةِ

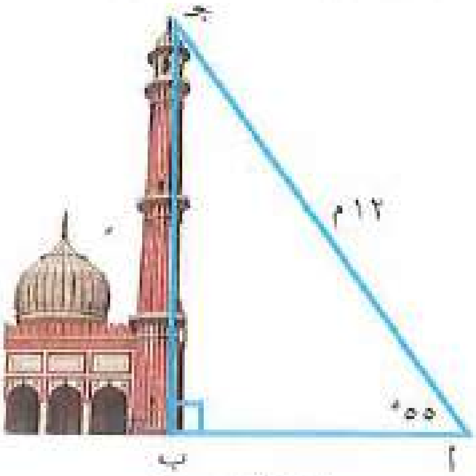
النتاجات

- تَحسبُ جيبَ تمامِ زاويةٍ حادةٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- تَحسبُ قياسَ الزاويةِ إذا عُلِمَ جيبُ تمامِها.
- تَحُلُّ مسائلَ عمليةً على جيبِ التمامِ.

رصدَ شخصٌ منَ النقطةِ أ مئذنةَ مسجدٍ، حيثُ تبعدُ النقطةُ أ (١٢)م عنْ قمةِ المئذنةِ، فإذا كانَ قياسُ الزاويةِ أ = ٥٥°، فجِدْ:

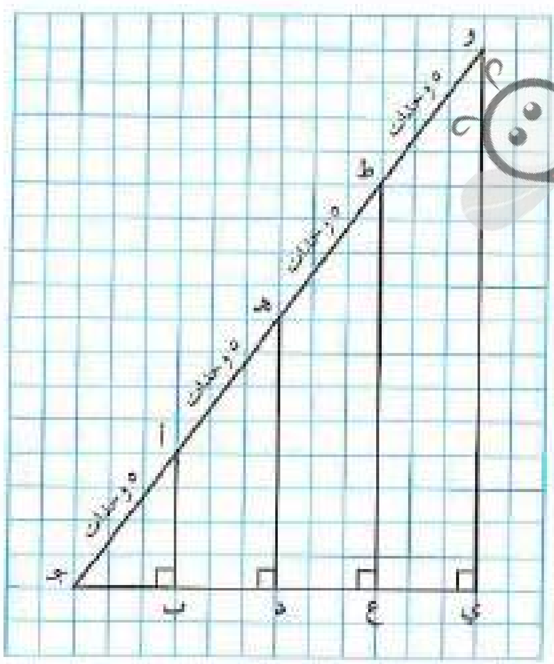
١) بُعدَ النقطةِ أ عنِ المسجدِ.

٢) ارتفاعَ المئذنةِ عنْ سطحِ المسجدِ، إذا كانَ ارتفاعُ المسجدِ (٥)م.



الشكلُ (٧–١٦)

الشكلُ (٧–١٧) فيهِ جـ زاويةٌ حادةٌ مشتركةٌ في كلٍّ مِنَ المثلثاتِ القائمةِ الزاويةِ: أ ب جـ، هـ د جـ، ط ع جـ، و ي جـ.
تأملِ الشكلَ وأملأِ الفراغاتِ في الجدولِ الآتي:



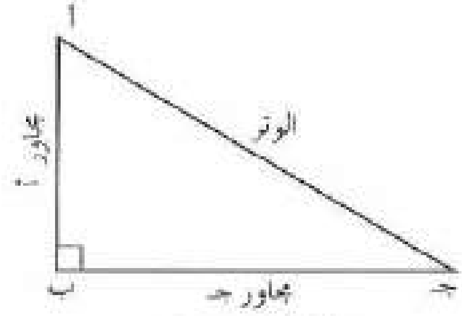
الشكلُ (٧–١٧)

المثلث	طولُ المجاور (بالوحدةِ)	طولُ الوترِ (بالوحدةِ)	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
أ ب جـ	٣	٥	$\frac{٣}{٥}$
هـ د جـ	٦	١٠	
ط ع جـ			
و ي جـ			

ماذا تلاحظُ على النسبةِ $\frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترِ}}$ ؟

لا بُدَّ أنّكَ لاحظتَ أنّ النسبةَ ثابتةٌ، وتمثّلُ النسبةُ $\frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترِ}}$ نسبةَ طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ جـ إلى طولِ الوترِ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ، وهيَ نسبةٌ ثابتةٌ، وتُسمّى هذهِ النسبةُ **جيبَ تمامِ الزاويةِ** الحادّةِ جـ، ويُرمزُ لها بالرمزِ (**جتا جـ**).

الشكلُ (٧–١٨) يمثّلُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ، نسبةُ طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ الحادةِ إلى طولِ الوترِ تُسمّى **جيبَ تمامِ الزاويةِ**، ويُرمزُ لها بالرمزِ (**جتا**) وبالإنجليزيةِ (Cosine) وتُقرأُ (كوصاين)، واختصارًا (cos).



الشكلُ (٧–١٨)

$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ جـ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

نشاط (٧-٢)

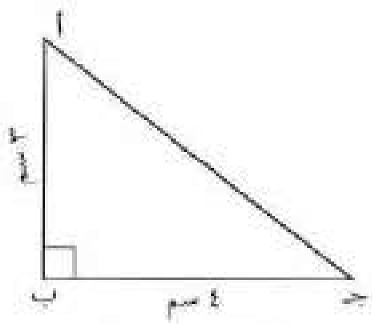
ابحثْ في الإنترنتْ عنْ سببِ تسميةِ جيبِ تمامِ الزاويةِ بهذا الاسمِ.

مثالٌ (٧–٧):

أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، فيهِ أ ب = ٣سم، ب جـ = ٤سم، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:

١) أ جـ ٢) جتا أ ٣) جتا جـ ٤) جا أ ٥) جا جـ **ماذا تلاحظُ؟**

الحلُّ:



الشكلُ (٧–١٩)

١) منَ الشكلِ (٧–١٩)، ووَفقَ نظريةِ فيثاغورس:

$$(\text{أجـ})^{٢} = (\text{أب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$$

$$= ٣^{٢} + ٤^{٢}$$

$$= ٩ + ١٦ = ٢٥$$

إذنْ طولُ الوترِ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥سم.

٢) $\text{جتا أ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ أ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{٣}{٥}$

٣) $\text{جتا جـ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ جـ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{٤}{٥}$

٤) $\text{جا أ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{٤}{٥}$

٥) $\text{جا جـ} = \frac{\text{طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ جـ}}{\text{طولُ الوترِ}} = \frac{٣}{٥}$

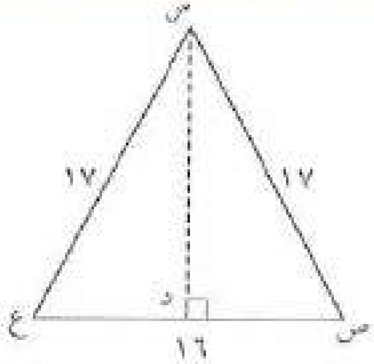
تلاحظُ أنّ جا أ = جتا جـ ، جا جـ = جتا أ ، كما تلاحظُ أنّ الزاويتينِ أ ، جـ متتامتانِ (مجموعُهما ٩٠°) وسندرسُ لاحقًا العلاقةَ بينَ جيبِ الزاويةِ وجيبِ تمامِ متممتِها.

تدريب (٧-٤)

في الشكلِ (٧-٢٠): إذا كانَ س ص = س ع = ١٧سم

ص ع = ١٦سم، فجِدْ كلًّا مما يأتي:

جا ع ، جتا ع ، جتا هـ د س ع



الشكلُ (٧-٢٠)

تدريب (٧-٥)

أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب ، إذا كان أ ب = ب جـ = س، جِدْ:

أ) ق د أ + ق د جـ   ب) أ جـ   جـ) جتا أ   د) جا أ

هـ) جتا جـ   و) جا جـ   ز) جتا^{٢} أ + جتا^{٢} (٩٠° − أ)

• فكّرْ

هَلْ يمكنُكَ استخدامُ تدريبِ (٧-٥) لإيجادِ جا ٤٥°، جتا ٤٥°؟ برّرْ إجابتكَ.

ناقشْ قالتْ ليانُ: إذا كانتْ هـ زاويةً حادةً فإنَّ: ١) جا هـ > ١   ٢) جتا هـ < ١

مثال (٧-٨):

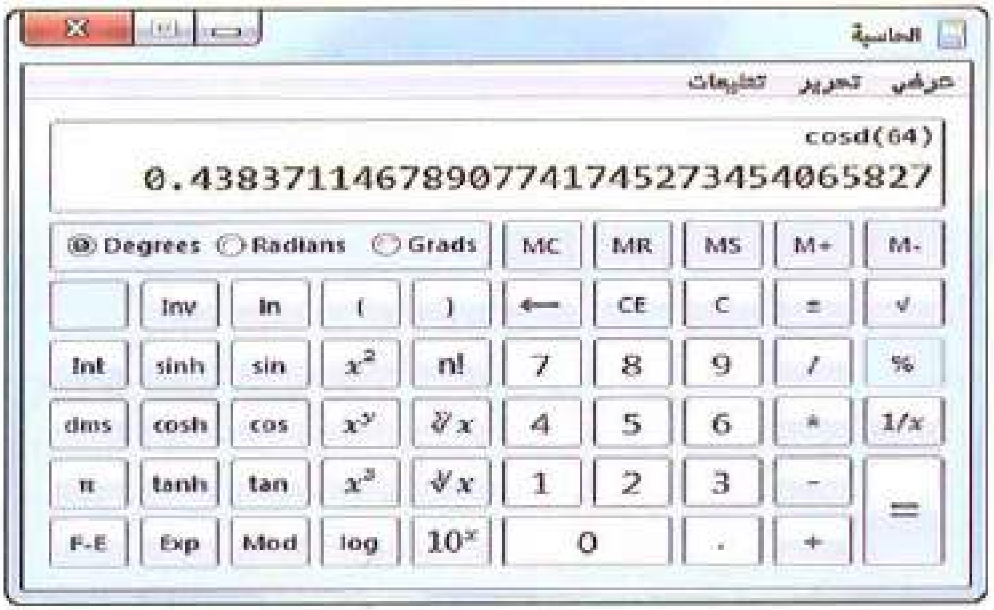
جِدْ ما يأتي باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

١) جتا ٦٤°

٢) إذا كانَ جتا هـ = ٠,٨٧ ، فجِدْ قياسَ الزاويةِ هـ.

الحلُّ:

١) نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ وندخلُ قياسَ الزاويةِ ٦٤ ، ثمّ نضغطُ على المفتاحِ «cos» فيكونُ الناتجُ جتا ٦٤° = ٠,٤٣٨٣٧١١٤٦٧٨٩٠٧٧٤١٧٤٥٢٧٣٤٥٤٠٦٥٨٢٧ ≈ ٠,٤٤ تقريبًا.



الشكلُ (٧-٢١)

٢) ولإيجادِ قيمةِ الزاويةِ هـ نُدخِلُ قيمةَ جيبِ تمامِ الزاويةِ ٠,٨٧ ، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ «Inv» ثمَّ على المفتاحِ «$\cos^{-1}$» فيكونُ الناتجُ قياسُ الزاويةِ هـ = ٢٩,٥٤° تقريبًا.

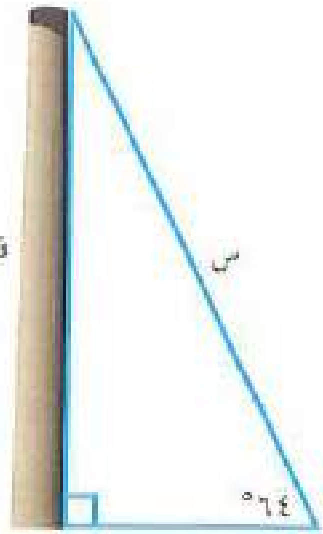
الشكلُ (٧-٢٢)

مثال (٧-٩):

ربطتْ شركةُ الكهرباءِ عمودَ كهرباءٍ مِنْ قمتِهِ إلى نقطةٍ على الأرضِ تبعُدُ عنْ قاعدتِهِ (٤)م، فإذا كانَ السلكُ يكوّنُ معَ الأرضِ زاويةً قياسُها ٦٤°، فجدْ طولَ السلكِ، ثمَّ جدْ طولَ العمودِ.

الحلُّ:

نفرضُ أنَّ طولَ السلكِ س، وطولَ العمودِ ف كما في الشكلِ (٧–٢٣).



الشكلُ (٧–٢٣)

$$\text{جتا } ٦٤° = \frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{٤}{\text{س}}$$

جتا ٦٤° = ٠,٤٣٨٣ عن طريقِ الآلةِ الحاسبةِ

$$٠,٤٣٨٣ = \frac{٤}{\text{س}}$$

$$\text{ومنهُ س} = \frac{٤}{٠,٤٣٨٣} = ٩,١\text{م طولُ السلكِ تقريبًا.}$$

ولإيجادِ طولِ العمودِ فإنَّ:

$$\text{جا } ٦٤° = \frac{\text{المقابلُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}}$$

جا ٦٤° = ٠,٨٩٨٧ عن طريقِ الآلةِ الحاسبةِ

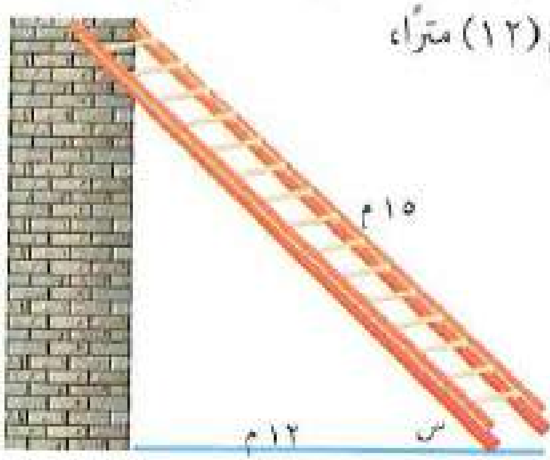
$$٠,٨٩٨٧ = \frac{\text{ف}}{٩,١}$$ ، ومنهُ ف = ٠,٨٩٨٧ × ٩,١م = ٨,١٧م طولُ العمودِ تقريبًا.

تدريب (٧–٦)

حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

مثالٌ (٧–١٠):

سلّمٌ طولُهُ (١٥) مترًا يتكئُ طرفُهُ العلويُّ على حائطٍ رأسيٍّ وطرفُه السفليُّ على أرضٍ أفقيةٍ، فإذا كانتِ المسافةُ بينَ قاعدةِ الحائطِ والطرفِ السفليِّ للسلّمِ (١٢) مترًا، فجِدْ قياسَ الزاويةِ (س) بينَ السلّمِ وسطحِ الأرضِ.



الشكلُ (٧–٢٤)

الحلُّ:

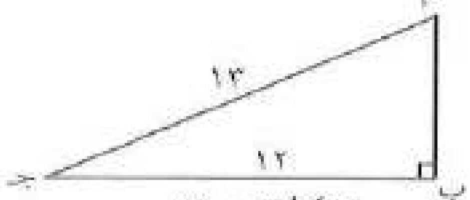
$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاورُ}}{\text{الوترُ}} = \frac{١٢}{١٥}$$

ومنهُ جتا س = ٠,٨

وبالتالي س = ٣٧° تقريبًا «باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ»

تمارينُ ومسائلُ

١) أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب ، كما في الشكلِ (٧ – ٢٥)، فيه أ جـ = (١٣)سم، ب جـ = (١٢) سم، جِدْ كلاً مما يأتي:



الشكلُ (٧–٢٥)

أ) أ ب ب) جتا أ

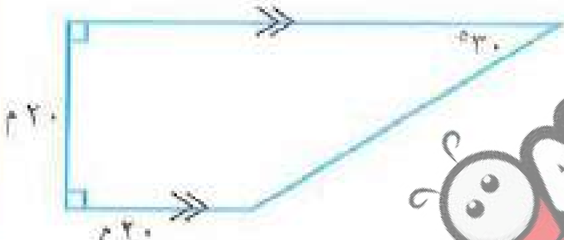
جـ) جتا جـ د) جا أ

٢) ل م ن مثلثٌ متساوي الساقينِ فيهِ ل م = ل ن = (١٠)سم، م ن = (١٦)سم، جِدْ:

أ) جا م ب) جتا ن جـ) جتا م

٣) يمثلُ الشكلُ (٦–٢٦) قطعةَ أرضٍ على شكلِ شبهِ منحرفٍ.

أحسبْ محيطَ قطعةِ الأرضِ.

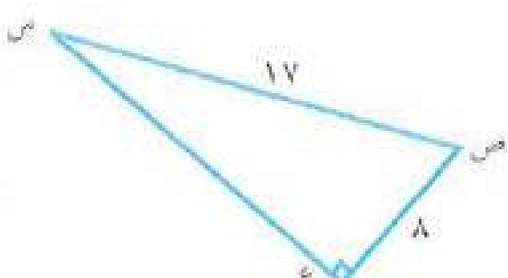


الشكلُ (٧–٢٦)

٤) أ ب جـ د مستطيلٌ فيهِ : أ ب = (٥٠)سم، ب جـ = (١٢٠)سم، جِدْ جتا ∠ أ جـ د.

٥) إذا كانتْ (س) زاويةً حادةً، بحيثُ جا س = جتا س، فما قيمةُ س؟

٦) في الشكلِ (٧–٢٧) جِدْ قياسَ الزاويةِ ص.



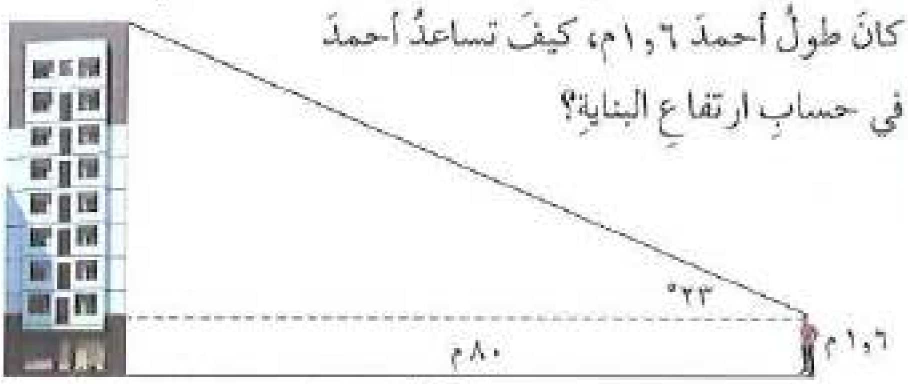
الشكلُ (٧–٢٧)

٧ - ٣ ظلُّ الزاويةِ الحادّةِ

النتاجاتُ

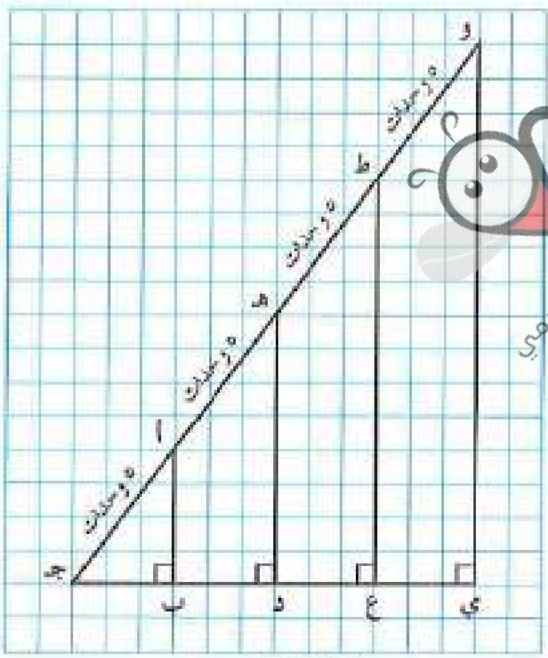
- تَحْسِبُ ظلَّ زاويةٍ حادةٍ في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ.
- تَحْسِبُ قياسَ الزاويةِ إذا عُلِمَ ظلُّها.
- تَحُلُّ مسائلَ عمليةً على الظلِّ.

وقفَ أحمدُ على بعدِ ٨٠م منْ قاعدةِ بنايةٍ، وكانَ قياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَ خطِّ نظرِهِ المارِّ بقمةِ البنايةِ والخطِ الأفقيِّ ٢٣°، إذا كانَ طولُ أحمدَ ١,٦م، كيفَ تساعدُ أحمدَ في حسابِ ارتفاعِ البنايةِ؟



الشكلُ (٧-٢٨)

الشكلُ (٧-٢٩) فيهِ جـ زاويةٌ حادّةٌ مشتركةٌ في كلٍّ مِنَ المثلثاتِ القائمةِ الزاويةِ:
أ ب جـ، هـ د جـ، ط ع جـ، و ي جـ
تأمّلِ الشكلَ واملأْ الفراغاتِ في الجدولِ الآتي:



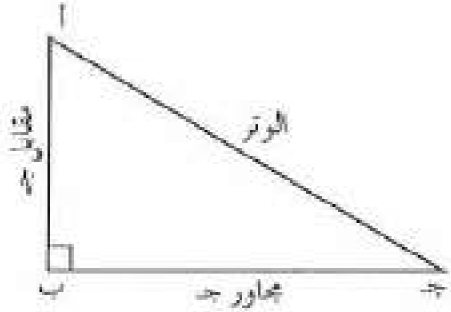
الشكلُ (٧-٢٩)

المثلثُ	طولُ المقابلِ (بالوحدة)	طولُ المجاورِ (بالوحدة)	المقابلُ / المجاورُ
أ ب جـ	٤	٣	$\frac{٤}{٣}$
هـ د جـ	٨	٦	
ط ع جـ			
و ي جـ			

ماذا تلاحظُ على النسبةِ $\frac{\text{المقابلِ}}{\text{المجاورِ}}$ ؟

لا بُدَّ أنّكَ لاحظتَ أنَّ النسبةَ ثابتةٌ، وتمثّلُ النسبةُ $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ نسبةَ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ جـ إلى طولِ الضلعِ المجاورِ في المثلثِ قائمِ الزاويةِ، وهيَ نسبةٌ ثابتةٌ، وتُسمّى هذهِ النسبةُ **ظلَّ الزاويةِ** الحادّةِ جـ، ويُرمزُ لها بالرمزِ (**ظا جـ**).

الشكلُ (٧-٣٠) يمثّلُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ، نسبةُ طولِ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ الحادةِ إلى طولِ الضلعِ المجاورِ تُسمّى **ظلَّ الزاويةِ**، ويرمزُ لها بالرمزِ (**ظا**) وبالإنجليزيةِ (Tangent) وتقرأُ (تانجنت)، واختصارًا (tan).



الشكلُ (٧-٣٠)

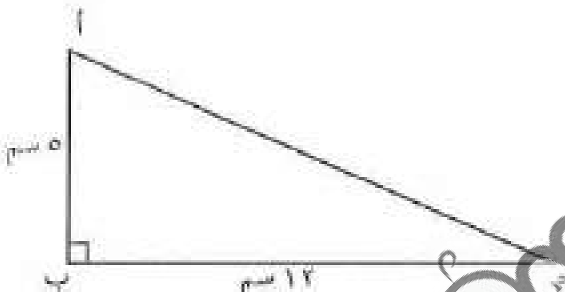
$$\text{ظا جـ} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ جـ}}{\text{طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$

مثالٌ (٧-١١):

أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، فيهِ أ ب = (٥) سم، ب جـ = (١٢) سم، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:

١) أ جـ ٢) ظا أ ٣) ظا جـ ٤) جا أ ٥) جتا أ

الحلُّ:



الشكلُ (٧-٣١)

١) منَ الشكلِ (٧-٣١)، ووَفقَ نظريةِ فيثاغورس:

$$(\text{أجـ})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{ب جـ})^2$$

$$= ٥^2 + ١٢^2$$

$$= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$$

إذنْ طولُ الوترِ أ جـ $= \sqrt{١٦٩} = ١٣$ سم

٢) $\text{ظا أ} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ أ}} = \frac{١٢}{٥}$

٣) $\text{ظا جـ} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ جـ}}{\text{طولِ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ جـ}} = \frac{٥}{١٢}$

٤) $\text{جا أ} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ أ}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{١٢}{١٣}$

٥) $\text{جتا أ} = \frac{\text{طولَ الضلعِ المجاورِ للزاويةِ أ}}{\text{طولِ الوترِ}} = \frac{٥}{١٣}$

سؤالٌ: منْ خلالِ المثالِ (٧-١١) هلْ يمكنكَ التوصّلُ إلى علاقةٍ بينَ جا أ ، جتا أ ، ظا أ؟

• فكِّرْ

متى يكونُ ظا هـ = ١، حيثُ هـ زاويةٌ حادّةٌ؟

تدريب ٧-٧

س ص ع مثلثٌ قائمٌ في ص، فيهِ: س ص = ٢سم، س ع = ١٣سم، جِدْ ظا س ، ظا ع.

ناقشْ

قالتْ رغدُ: إذا كانَتْ هـ زاويةً حادّةً، فإنَّ ظا هـ ≥ ١.

مثال (٧-١٢):

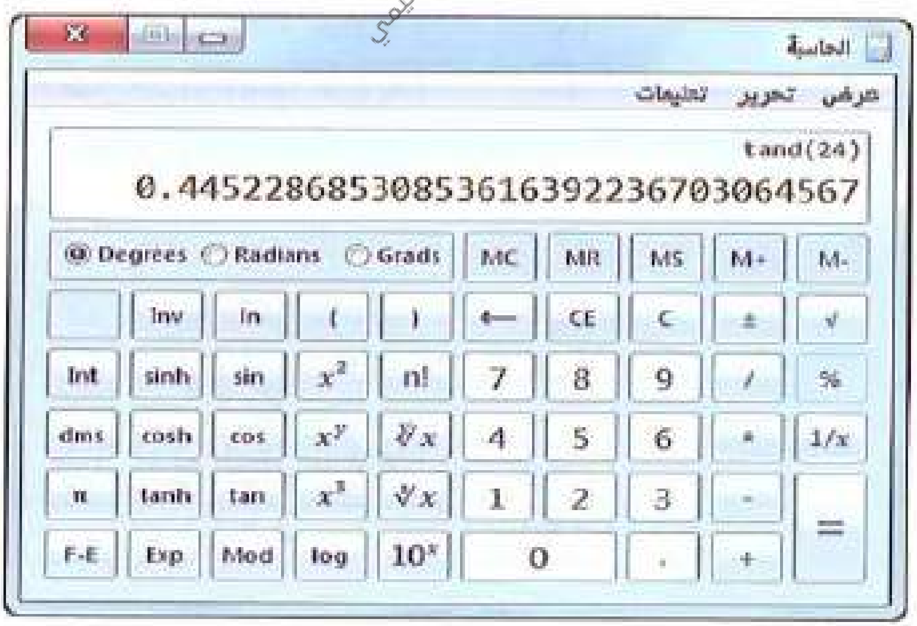
جِدْ ما يأتي باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

١) ظا ٢٤°

٢) إذا كانَ ظا هـ = ١,٨٣ ، فجِدْ قياسَ الزاويةِ هـ.

الحلُّ:

١) نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ ونُدخِلُ قياسَ الزاويةِ ٢٤° ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ «tan» فيكونُ الناتجُ ظا ٢٤° = ٠,٤٤٥٢ تقريبًا انظرِ الشكلَ (٧-٣٢).



الشكلُ (٧-٣٢)

٢) ولإيجادِ قيمةِ الزاويةِ هـ نُدخِلُ قيمةَ ظلِّ الزاويةِ ١,٨٣، ثُمَّ نضغطُ على المفتاحِ «Inv» ثُمَّ على المفتاحِ «$\tan^{-1}$» فيكونُ الناتجُ قيمةَ الزاويةِ ٦١,٣٥° تقريبًا، أنظرِ الشكلَ (٧-٣٣).

الشكلُ (٧-٣٣)

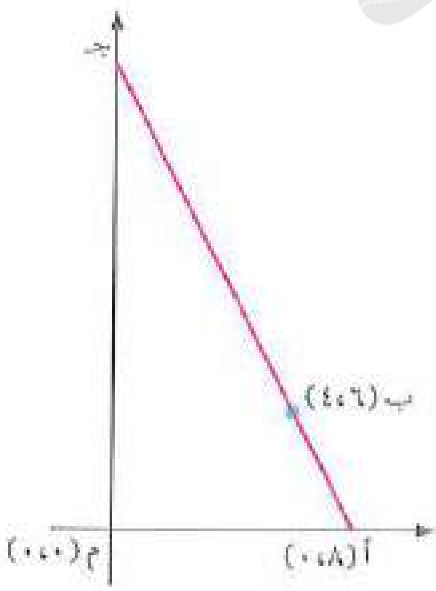
تدريبٌ ٧-٨

في الشكلِ (٧-٣٤): أ(٨،٠)، ب(٦،٤)، م(٠،٠)

والنقطةُ جـ تقعُ على محورِ الصاداتِ الموجبِ. جِدْ:

أ) ظا هـ م أ جـ.

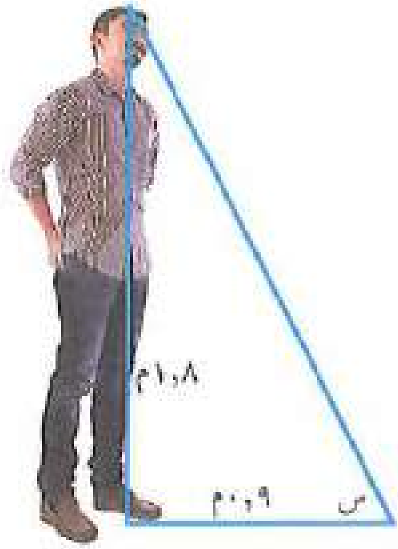
ب) إحداثيا النقطةِ جـ.



الشكلُ (٧-٣٤)

مثال (٧-١٣):

رجلٌ طولُه ١,٨م، في لحظةٍ ما كانَ طولُ ظلّه على أرضٍ مستويةٍ (٠,٩)م، كما في الشكلِ (٧-٣٥)، أرادَ هذا الرجلُ معرفةَ الزاويةِ التي تصنعُها أشعةُ الشمسِ معَ ظلّهِ هل يمكنُكَ مساعدةُ الرجلِ في تحديدِ تلكَ الزاويةِ؟



الشكلُ (٧-٣٥)

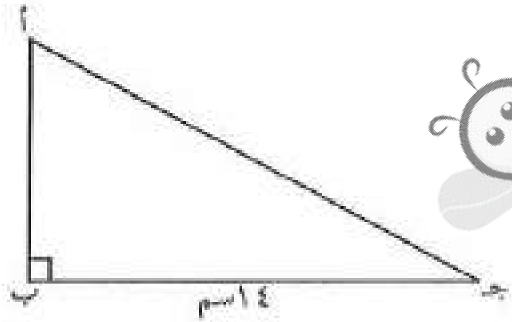
الحلُّ:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابلَ}}{\text{المجاورِ}} = \frac{١,٨}{٠,٩} = ٢$$

ظا س = ٢ ومنه س = ٦٣,٤° تقريبًا   عنْ طريقِ الآلةِ الحاسبةِ

مثال (٧-١٤):

يمثّلُ الشكلُ (٧-٣٦) مثلثًا قائمَ الزاويةِ في ب فيهِ: ب جـ = ١٤سم، ظا أ = $\frac{٧}{٣}$، جِدْ طولَ أ ب.



الشكلُ (٧-٣٦)

الحلُّ:

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٧}{٣}$$

ومنهُ، $\frac{١٤}{\text{أ ب}} = \frac{٧}{٣}$

ومنهُ، أ ب = $\frac{٣ \times ١٤}{٧}$

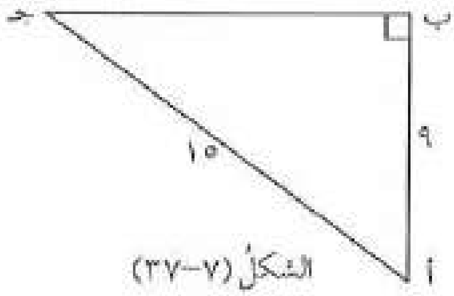
ومنهُ، أ ب = ٦ سم.

تدريبٌ ٧-٩

حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

١) يمثّلُ الشكلُ (٧-٣٧) مثلثًا قائمَ الزاويةِ في ب، فيهِ أ جـ = ١٥سم، أ ب = ٩سم، جِدْ كلًّا ممّا يأتي:

أ) ب جـ ب) ظا أ جـ) ظا جـ

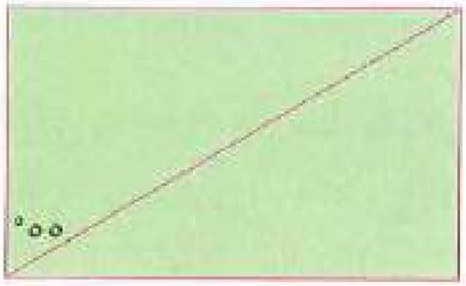


الشكلُ (٧-٣٧)

٢) د م ن مثلثٌ متساوي الساقينِ فيهِ د م = د ن = ٨سم، م ن = ٦سم، جِدْ:

أ) ظا م ب) ظا ن

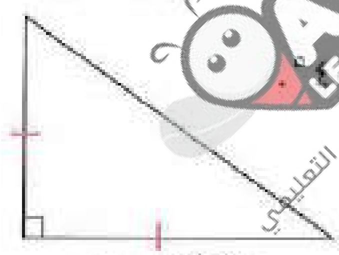
٣) قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ طولُها ١٠٠م، فإذا كانَ قطرُ القطعةِ يصنعُ زاويةً مقدارُها ٥٥° معَ ضلعِها الأصغرِ، كما في الشكلِ (٧-٣٨)، فما عرضُ قطعةِ الأرضِ؟



الشكلُ (٧-٣٨)

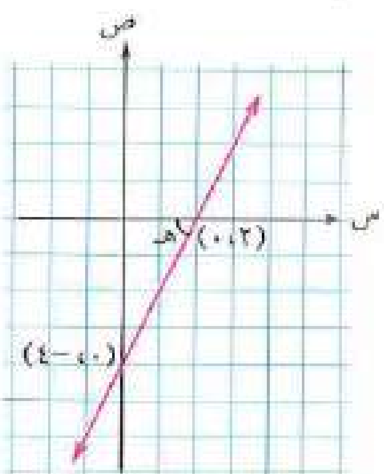
٤) س ص ع مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ص، فيهِ س ص = ١٦سم، وظا س = ٢، جِدْ طولَ س ع.

٥) استخدمِ الشكلَ (٧-٣٩) في إيجادِ ظا ٤٥°


الشكلُ (٧-٣٩)

٦) المستقيمُ ص = ٢س - ٤، يقطعُ محوري السيناتِ والصاداتِ عندَ النقطتينِ (٢، ٠)، (٠، -٤) على الترتيبِ، ويشكّلُ معَ المحورينِ الإحداثيينِ مثلثًا كمَا في الشكلِ (٧-٤٠)، ∠ هـ تمثّلُ الزاويةَ الحادةَ التي يصنعُها المستقيمُ معَ محورِ السيناتِ. جِدْ كلًّا ممّا يأتي:

أ) جا هـ ب) جتا هـ جـ) ظا هـ



الشكلُ (٧-٤٠)

٧ – ٤ العلاقةُ بينَ النسبِ المثلثيةِ

النتاجات

- تستقصي العلاقاتِ الآتيةَ:

جا س = جتا (٩٠° – س).

جتا س = جا (٩٠° – س).

جا^٢ س + جتا^٢ س = ١

ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

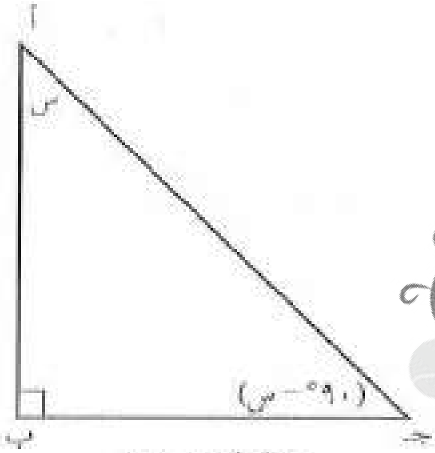
أجبْ عنِ الآتي دونَ استخدامِ الآلةِ الحاسبةِ أو المثلثِ قائمِ الزاويةِ:

١) جِدِ القيمةَ العدديةَ للمقدارِ:

جا ٣٣° – جتا ٥٧°

٢) إذا كانَ جا ١٧° = ٠,٣ ، فما قيمةُ جتا ٧٣°

الشكلُ (٧–٤١) يمثّلُ مثلثًا قائمَ الزاويةِ في ب، إذا كانَ قياسُ الزاويةِ أ يساوي س، فإنَّ قياسَ الزاويةِ جـ يساوي (٩٠° – س)، فإنّ:



الشكلُ (٧–٤١)

جا س = $\frac{\text{المقابلُ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

جتا (٩٠° – س) = $\frac{\text{المجاورُ للزاويةِ جـ}}{\text{الوترِ}}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ماذا تستنتجُ؟

لا بدَّ أنّكَ توصلتَ إلى أنَّ: جا س = جتا (٩٠° – س)

بشكلٍ عامٍّ، إذا كانتْ س زاويةً حادةً فإنَّ:

جا س = جتا (٩٠° – س) ، جتا س = جا (٩٠° – س)

مثالُ (٧–١٥):

إذا كانَ جتا ٣٥° = ٠,٨١٩٢، فما قيمةُ جا ٥٥°؟

الحلُّ: جا ٥٥° = جتا (٩٠° – ٥٥°) **العلاقةُ**

= جتا ٣٥°

= ٠,٨١٩٢

تدريب (٧-١٠)

أ) إذا كانَ جا س= ٠,٣٥٨٤ ، فما قيمةُ جتا (٩٠°-س)؟

ب) جِدِ القيمةَ العدديةَ للمقدارِ: جا ٢٥° - جتا ٦٥°

مثال (٧-١٦):

إذا كانَ جا٥س= جتا٤س، فما قيمةُ س بالدرجاتِ؟ حيثُ ٠ < س < ١٨°

الحلُّ: جتا ٤س = جا (٩٠°-٤س) ....(١) العلاقةُ

جتا ٤س = جا (٥س) ....(٢) معطى

إذنْ جا (٩٠°-٤س) = جا ٥س من تساوي المعادلتينِ (١) و (٢)

ومنهُ ٩٠° - ٤س = ٥س

٩٠° = ٩س

س = ١٠°

ناقشْ: قامَ رائدٌ بحلِّ المثالِ (٧-١٦) بالطريقةِ الآتيةِ:

بما أنَّ جا ٥س = جتا٤س

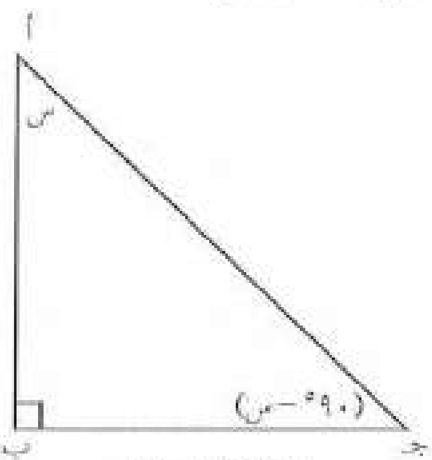
فإنَّ: ٥س + ٤س = ٩٠° ومنهُ ٩س = ٩٠°

س = ١٠°

ما رأيكَ بما قامَ بهِ رائدٌ؟ وكيفَ تفسّرُ خطواتِ حلِّهِ؟

• فكّرْ:

هلْ يوجدُ زاويةٌ حادةٌ قياسُها س بحيثُ: جا س = جتا س؟ ما قياسُها؟



الشكلُ (٧-٤٢)

استخدمِ الشكلَ (٧-٤٢) في إيجادِ:

جا^2 س + جتا^2 س ، حيثُ س زاويةٌ حادةٌ.

$$\text{جا س} = \frac{\text{المقابلُ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاورُ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جا}^2\text{ س} + \text{جتا}^2\text{ س} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^2$$

$$= \frac{(\text{ب جـ})^2 + (\text{أ ب})^2}{(\text{أ جـ})^2} = 1 \text{ . لماذا؟}$$

ومنْ ذلكَ نستنتجُ العلاقةَ الآتيةَ:

$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$، لكلِّ زاويةٍ حادةٍ س.

ناقشْ: تأكدْ منْ صحةِ العلاقةِ السابقةِ معَ زملائِكَ مستخدمينَ الآلةَ الحاسبةَ وبفرضِ أنَّ س أيُّ زاويةٍ حادةٍ.

مثالٌ (٧-١٧):

إذا كانتْ س زاويةً حادةً، وكانَ جا س = ٠,٨ ، فما قيمةُ جتا س؟

الحلُّ:

باستخدامِ العلاقةِ: $\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$

$(0{,}8)^2 + \text{جتا}^2\text{س} = 1$

$\text{جتا}^2\text{ س} = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

ومنهُ جتا س $= \pm\ 0{,}6$ ، إذنْ جتا س $= 0{,}6$. لماذا؟

تدريبٌ (٧-١١)

إذا كانتْ س زاويةً حادةً، وكانَ جتا س $= \frac{5}{13}$ ، فما قيمةُ جا س؟

مثالٌ (٧-١٨):

جِدِ القيمةَ العدديةَ للمقدارِ: $\text{جا}^2\ 15° + \text{جا}^2\ 75°$

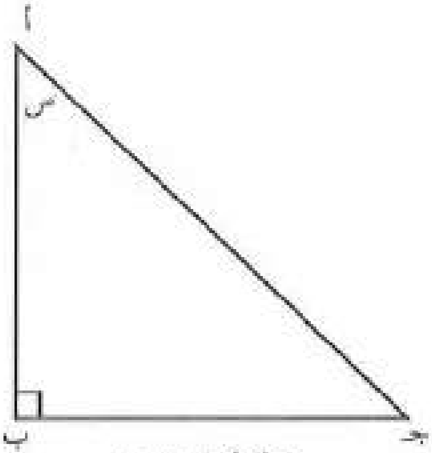
الحلُّ:

جا ٧٥° = جتا ١٥°

ومنهُ $\text{جا}^2\ 15° + \text{جا}^2\ 75° = \text{جا}^2\ 15° + \text{جتا}^2\ 15° = 1$

استخدمِ الشكلَ (٧-٤٣) في اكتشافِ:

العلاقةِ بينَ جا س، جتا س، ظا س، حيثُ س زاويةٌ حادةٌ.



الشكلُ (٧-٤٣)

$$\text{جا س} = \frac{\text{المقابلَ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاورَ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابلَ للزاويةِ أ}}{\text{المجاورِ للزاويةِ أ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\dfrac{\text{المقابلَ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}}{\dfrac{\text{المجاورِ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}}$$

بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على الوترِ

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

ومن ذلكَ نستنتجُ العلاقةَ الآتيةَ:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \text{، جتا س} \neq ٠$$

• فكِّرْ

لماذا جتا س $\neq$ ٠ ؟

ناقشْ: تأكّد منْ صحةِ العلاقةِ السابقةِ معَ زملائِكَ مستخدمينَ الآلةَ الحاسبةَ وبفرضِ أنَّ س أيُّ زاويةٍ حادةٍ.

مثالٌ (٧-١٩):

إذا كانَتْ س زاويةً حادّةً، وكانَ ظا س = ٣، فجِدْ جا س، جتا س.

الحلُّ:

ظا س = ٣ ، ومنهُ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = ٣ ، ومنهُ جا س = ٣ جتا س

لكنّ جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ إذنْ:

(٣ جتا س)^{٢} + جتا^{٢} س = ١

٩ جتا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

١٠ جتا^{٢} س = ١ $\Leftarrow$ جتا^{٢} س = $\frac{١}{١٠}$

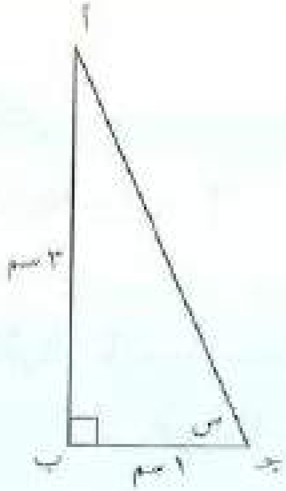
جتا س = $\pm \frac{١}{\sqrt{١٠}}$

جتا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ومنهُ جا س = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ، لماذا؟

ناقش: قامتْ آلاءُ بحلِّ المثالِ (٧-١٩) بالطريقةِ الآتيةِ:

رسمتْ آلاءُ المثلثَ المجاورَ وحدّدتْ عليهِ س زاويةً حادةً

وقالتْ: بما أنَّ ظا س = ٣ = $\frac{٣}{١}$ فإنَّهُ يمكنُ اعتبارُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ س هوَ البسطُ ويساوي ٣سم، والضلعِ المجاورِ للزاويةِ س هو المقامُ ويساوي ١سم.



وكتبتْ: (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} من نظريةِ فيثاغورس

(أ جـ)^{٢} = ٩+١

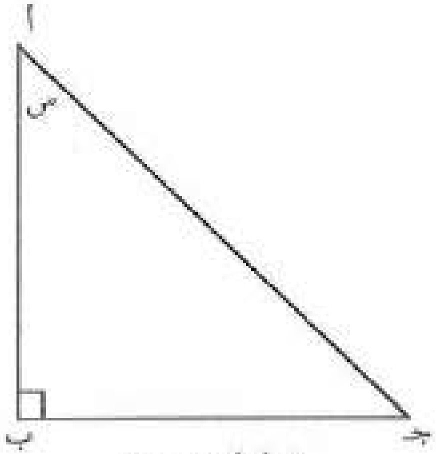
(أ جـ)^{٢} = ١٠ ومنهُ، أ جـ = $\sqrt{١٠}$

ومنهُ، جتا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، جا س = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

ما رأيكَ بما قامتْ بهِ آلاءُ؟

استخدمِ الشكلَ (٧–٤٣) في اكتشافِ:

العلاقةِ بينَ جا س، جتا س، ظا س، حيثُ س زاويةٌ حادةٌ.



الشكلُ (٧–٤٣)

$$\text{جا س} = \frac{\text{المقابلَ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاورَ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابلَ للزاويةِ أ}}{\text{المجاورِ للزاويةِ أ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\frac{\text{المقابلَ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}}{\frac{\text{المجاورِ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}}$$

بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على الوترِ

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

ومن ذلكَ نستنتجُ العلاقةَ الآتيةَ:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \text{، جتا س} \neq 0$$

• فكّرْ

لماذا جتا س $\neq$ ٠ ؟

ناقشْ: تأكّد منْ صحةِ العلاقةِ السابقةِ معَ زملائِكَ مستخدمينَ الآلةَ الحاسبةَ وبفرضِ أنْ س أيُّ زاويةٍ حادةٍ.

مثال (٧-١٩):

إذا كانت س زاوية حادة، وكان ظا س= ٣، فجد جا س، جتا س.

الحل:

ظا س= ٣ ، ومنه $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = ٣ ، ومنه جا س= ٣ جتا س

لكن جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ إذن:

(٣ جتا س)^{٢} + جتا^{٢} س = ١

٩ جتا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

١٠ جتا^{٢} س = ١ ⟸ جتا^{٢} س = $\frac{١}{١٠}$

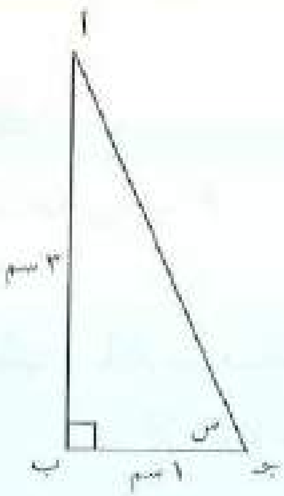
جتا س = ± $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

جتا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ومنه، جا س = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ، لماذا؟

ناقش: قامت آلاء بحل المثال (٧-١٩) بالطريقة الآتية:

رسمت آلاء المثلث المجاور وحددت عليه س زاوية حادة

وقالت: بما أن ظا س = ٣ = $\frac{٣}{١}$ فإنه يمكن اعتبار الضلع المقابل للزاوية س هو البسط ويساوي ٣سم، والضلع المجاور للزاوية س هو المقام ويساوي ١سم.



وكتبت: (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} من نظرية فيثاغورس

(أ جـ)^{٢} = ٩+١

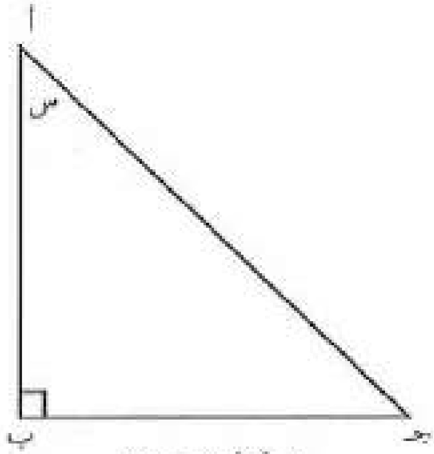
(أ جـ)^{٢} = ١٠ ومنه، أ جـ = $\sqrt{١٠}$

ومنه، جتا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، جا س = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$

ما رأيك بما قامت به آلاء؟

استخدمِ الشكلَ (٧–٤٣) في اكتشافِ:

العلاقةِ بينَ جا س، جتا س، ظا س، حيثُ س زاويةٌ حادةٌ.



الشكلُ (٧–٤٣)

$$\text{جا س} = \frac{\text{المقابلُ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاورُ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابلُ للزاويةِ أ}}{\text{المجاورِ للزاويةِ أ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\dfrac{\text{المقابلُ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}}{\dfrac{\text{المجاورِ للزاويةِ أ}}{\text{الوترِ}}}$$

بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على الوترِ

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

ومن ذلكَ نستنتجُ العلاقةَ الآتيةَ:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\text{، جتا س} \neq ٠$$

• فكّرْ

لماذا جتا س ≠ ٠ ؟

ناقشْ: تأكدْ منْ صحةِ العلاقةِ السابقةِ معَ زملائِكَ مستخدمينَ الآلةَ الحاسبةَ وبفرضِ أنْ س أيُّ زاويةٍ حادةٍ.

مثالٌ (٧-١٩):

إذا كانَت س زاويةً حادّةً، وكانَ ظا س = ٣، فجِدْ جا س، جتا س.

الحلُّ:

ظا س = ٣ ، ومنهُ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = ٣ ، ومنهُ جا س = ٣ جتا س

لكنْ جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ إذنْ:

(٣ جتا س)^{٢} + جتا^{٢} س = ١

٩ جتا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

١٠ جتا^{٢} س = ١ ⟸ جتا^{٢} س = $\frac{١}{١٠}$

جتا س = ± $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$

جتا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، ومنهُ جا س = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ، لماذا؟

ناقش: قامتْ آلاءُ بحلِّ المثالِ (٧-١٩) بالطريقةِ الآتيةِ:

رسمتْ آلاءُ المثلثَ المجاورَ وحددتْ عليهِ س زاويةً حادةً

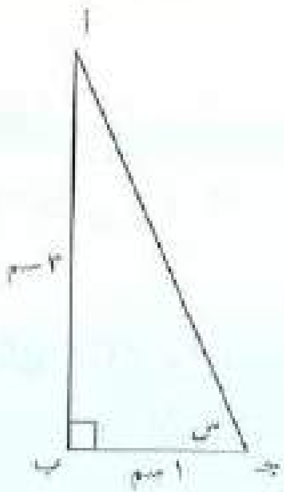
وقالتْ: بما أنّ ظا س = ٣ = $\frac{٣}{١}$ فإنّهُ يمكنُ اعتبارُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ س هوَ البسطُ ويساوي ٣سم، والضلعِ المجاورِ للزاويةِ س هو المقامُ ويساوي ١سم.

وكتبتْ: (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} منْ نظريةِ فيثاغورس

(أ جـ)^{٢} = ٩+١

(أ جـ)^{٢} = ١٠ ومنهُ، أ جـ = $\sqrt{١٠}$

ومنهُ، جتا س = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، جا س = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$



ما رأيكَ بما قامتْ بهِ آلاءُ؟

مثال (٧-٢٠):

أثبتْ أنَّ ظا س × ظا (٩٠° − س) = ١

الحلُّ:

$$\text{ظا س} \times \text{ظا}(٩٠° - \text{س}) = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا}(٩٠° - \text{س})}{\text{جتا}(٩٠° - \text{س})}$$

$$= \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = ١$$ ، لماذا؟

تدريبٌ ٧-١٢

إذا كانتْ هـ زاويةً حادةً، وكانَ جا هـ = ٥ جتا هـ، فَجِدْ:

أ) ظا هـ ب) جتا هـ

تدريبٌ ٧-١٣

حُلَّ المسائلَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) إذا كانَ جا س = ٠,٣٧٤٦ ، فما قيمةُ جتا (٩٠° − س)، حيثُ س قياسُ زاويةٍ حادّةٍ؟

٢) اثبتْ أنَّ جا (٣٠° + س) = جتا (٦٠° − س)، حيثُ أنَّ س < ٦٠°

٣) إذا كانتْ س تمثلُ قياسَ زاويةٍ حادةٍ، وكانَ جا (٩٠° − س) = ٠,٤ فَجِدْ:

أ) جتا س　　ب) جا س　　جـ) ظا س

٤) جِدِ القيمةَ العدديةَ لكلٍّ مِنَ المقاديرِ الآتيةِ:

أ) ٣ جتا ١٩° − ٣ جا ٧١°

ب) جتا^{٢} ٨٣° + جتا^{٢} ٧°

جـ) ظا ٣٤° × ظا ٥٦°

هـ) $\frac{\text{جتا (٤٨°)}}{\text{جا (٤٢°)}}$

٥) إذا كانَتْ س زاويةً حادةً، وكانَ جا س = [illegible]، فجِدْ جتا س، ظا س.

٦) إذا كانَتْ س زاويةً حادةً، وكانَ جتا س = ٢ جا س، فجِدْ:

أ) ظا س　　ب) جتا س

٧) في حوارٍ بينَ الطالبتينِ شذى ورشا، قالتْ شذى: يمكنُ أن نجدَ زاويةً حادةً، جيبُها يساوي ٢، فردّتْ عليها رشا: لا يمكنُ ذلكَ. أيُّ الطالبتينِ كلامُها صحيحٌ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٧ - ٥ حلُّ المثلثِ قائمِ الزاويةِ

النتاجات

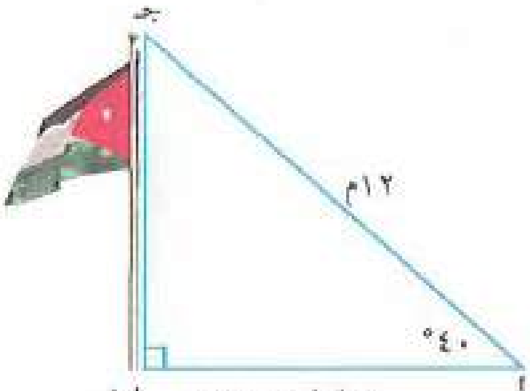
- تستخدمُ النسبَ المثلثيةَ (جا، جتا، ظا) في حلِّ المثلثِ قائمِ الزاويةِ.

وقفَ بشارٌ عندَ النقطةِ (أ) التي تبعدُ (١٢) مترًا عنْ قمةِ ساريةِ علمِ المدرسةِ، فإذا كانَ قياسُ الزاويةِ (أ) يساوي ٤٠°، كما في الشكلِ (٧-٤٤). فَجِدْ:

١) قياسَ الزاويةِ (جـ).

٢) المسافةَ بينَ النقطةِ (أ) التي يقفُ عندها بشارٌ، وقاعدةِ الساريةِ.

٣) ارتفاعَ الساريةِ.



الشكلُ (٧-٤٤)

مرّ معكَ في الدروسِ السابقةِ كيفيةُ حسابِ النسبِ المثلثيةِ (جا، جتا، ظا) للزاويةِ الحادّةِ في المثلثِ القائمِ الزاويةِ، مِنْ خلالِ ارتباطها بأطوالِ أضلاعِ المثلثِ القائمِ الزاويةِ، سنستخدمُ كُلَّ ما تعلمتَهُ في الدروسِ السابقةِ في إيجادِ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ، وقياساتِ زواياهُ، وسنبدأُ بتقديمِ التعريفينِ الآتيينِ:

تعريفٌ:

عناصرُ المثلثِ: أضلاعُهُ الثلاثةُ، وزواياهُ الثلاثُ.

حلُّ المثلثِ: إيجادُ أطوالِ أضلاعِهِ، وقياساتِ زواياهُ.

مثالٌ (٧-٢١):

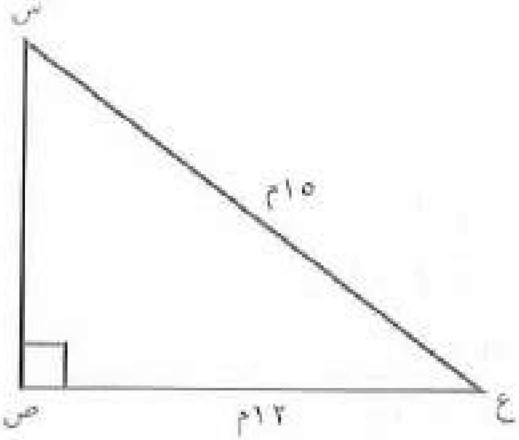
س ص ع مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ص، فيهِ: س ع = ١٥ سم، ص ع = ١٢ سم، جِدْ ما يأتي:

١) س ص

٢) قياساتِ زوايا المثلثِ.

الحلُّ:

١) مِنَ الشكلِ (٧-٤٥)، ووَفقَ نظريةِ فيثاغورسَ:



الشكلُ (٧-٤٥)

(س ع)^{٢} = (س ص)^{٢} + (ص ع)^{٢}

(١٥)^{٢} = (س ص)^{٢} + (١٢)^{٢}

٢٢٥ = (س ص)^{٢} + ١٤٤

(س ص)^{٢} = ٢٢٥ − ١٤٤

(س ص)^{٢} = ٨١

س ص = ٩ سم

٢) جا س = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦ ، وباستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ

س = ٣٧° تقريبًا.

ع = ٩٠° − ٣٧°. لماذا؟

ع = ٥٣° تقريبًا.

مثالٌ (٧-٢٢):

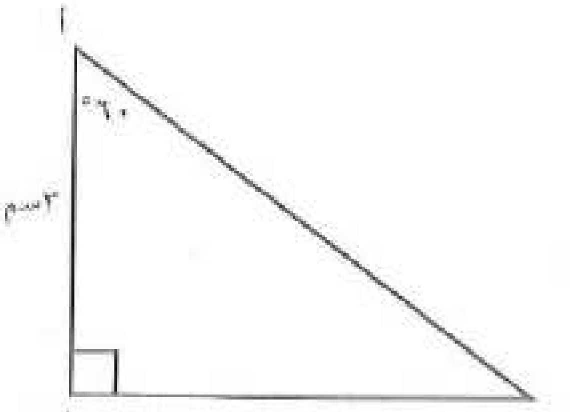
حُلَّ المثلثَ أ ب جـ القائمَ الزاويةِ في ب، والذي فيهِ: ق ∢ أ = ٦٠°، أ ب = ٣سم

الحلُّ:

ق ∢ جـ = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

جتا ٦٠° = ٠,٥ مِنَ الآلةِ الحاسبةِ.

$\frac{٣}{\text{أ جـ}}$ = ٠,٥ ومنه، أ جـ × ٠,٥ = ٣



الشكلُ (٧-٤٦)

إذنْ، أ جـ = ٦سم

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} مِنْ نظريةِ فيثاغورسَ

(٦)^{٢} = (٣)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = ٢٧

ب جـ = ٥,٢ سم تقريبًا.

• فكّرْ

في المثالِ (٧-٢٢) كيفَ تستطيعُ إيجادَ طولِ ب جـ دونَ استخدامِ نظريةِ فيثاغورسَ؟

تدريب (٧-١٤)

حلَّ المثلثَ ل م ن القائمَ الزاويةِ في م، الذي فيهِ: ل م = ١٦ سم، م ن = ١٢ سم

فكّرْ وناقشْ

هلْ تستطيعُ حلَّ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ إذا علمتَ قياساتِ زواياهُ فقطْ؟

مثالٌ (٧-٢٣):

قامَ سباحٌ بعبورِ نهرٍ عرضُهُ (٢٠) مترًا منَ النقطةِ (أ) على الضفةِ الأولى، فجرفَهُ التيارُ كما في الشكلِ (٧-٤٧)، ووصلَ النقطةَ جـ على الضفةِ المقابلةِ للنهرِ. جدِ المسافةَ التي قطعَها السبّاحُ.

الشكلُ (٧-٤٧)

الحلُّ:

أفهمُ : • نهرٌ عرضُهُ العموديُّ ٢٠ مترًا

• السباحُ انطلقَ منَ النقطةِ أ وسبحَ على الخطِّ (أ جـ).

• المطلوبُ حسابُ المسافةِ التي قطعَها السبّاحُ (أ جـ).

أخطّطُ: الشكلُ يبيّنُ المثلثَ أ ب جـ قائمَ الزاويةِ في ب ،

ستستخدمُ النسبَ المثلثيّةَ ومنها الجيبُ (جا) لمعرفةِ طولِ الوترِ في المثلثِ.

أنفّذُ : • المسافةُ التي قطعَها السباحُ تمثلُ طولَ الضلعِ أ جـ في المثلثِ القائمِ الزاويةِ أ ب جـ

• قياسُ الزاويةِ الحادّةِ أ = ٣٠° ، لماذا؟

جا أ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ تعريفُ جيبِ الزاويةِ الحادةِ

جا ٣٠° = $\frac{٢٠}{\text{أ جـ}}$ تعويضٌ

٠,٥ = $\frac{٢٠}{\text{أ جـ}}$ جا ٣٠° = ٠,٥

٠,٥ × أ جـ = ٢٠ ضربٌ تبادليٌّ

ومنهُ، أ جـ = ٤٠ مترًا نتيجةٌ

أتحققُ: جا ∢ ب أ جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوترِ}}$ = $\frac{٢٠}{٤٠}$

جا ∢ ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$

إذنْ ق ∢ ب أ جـ = ٣٠°

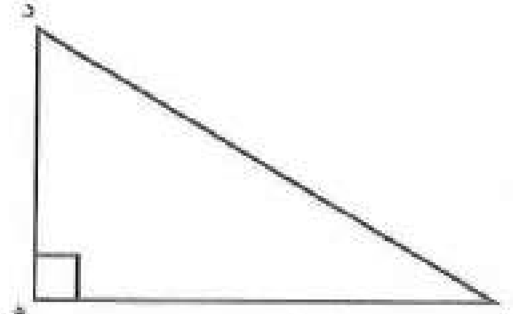
وهذا صحيحٌ لأنَّ ق ∢ ب أ جـ = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

لأنهما تشكّلانِ زاويةً مستقيمةً.

مثالٌ (٧-٢٤):

حُلَّ المثلثَ د هـ و القائمَ الزاويةِ في هـ، المرسومَ في الشكلِ(٧-٤٨) الذي فيهِ:

جتا و = ٠,٦ ، د و = ٩سم.



الشكلُ (٧-٤٨)

الحلُّ:

جتا و = ٠,٦ معطى

ومنهُ، قياسُ الزاويةِ و = ٥٣° تقريبًا استخدامُ الآلةِ الحاسبةِ

قياسُ الزاويةِ د = ٣٧° تقريبًا لماذا؟

جتا و = ٠,٦ معطى

$\frac{\text{و هـ}}{٩}$ = ٠,٦ تعريفُ جيبِ التمامِ وتعويضٌ

ومنهُ، و هـ = ٥,٤   تبسيطٌ

$جا\ و = \frac{د\ هـ}{٩}$ تعريفُ الجيبِ وتعويضٌ

$جا\ ٥٣ = \frac{د\ هـ}{٩}$ تعويضٌ

$٠,٨ = \frac{د\ هـ}{٩}$ استخدامُ الآلةِ الحاسبةِ

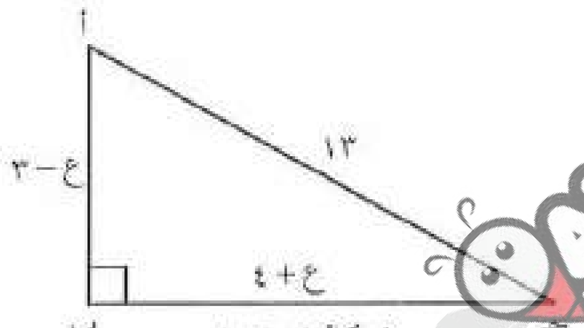
د هـ = ٧,٢ سم   نتيجةٌ

تدريبٌ ٧-١٥

حُلَّ المثلثَ س ص ع القائمَ الزاويةِ في ص، الذي فيهِ: س ص = ٧ سم، ظا س = ١.

مثالٌ (٧-٢٥):

جِدْ أطوالَ المثلثِ المرسومِ في الشكلِ (٧-٤٩) علمًا بأنّ الأطوالَ مقيسةٌ بالسنتيمترِ.



الشكلُ (٧-٤٩)

تذكّر:

$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢\ أ\ ب + ب^{٢}$

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢\ أ\ ب + ب^{٢}$

الحلُّ:

أطوالُ أضلاعِ المثلثِ هيَ: ١٣، ع + ٤، ع - ٣

$(١٣)^{٢} = (ع + ٤)^{٢} + (ع - ٣)^{٢}$ نظريةُ فيثاغورسَ

$١٦٩ = (ع^{٢} + ٨ع + ١٦) + (ع^{٢} - ٦ع + ٩)$

$١٦٩ = ٢ع^{٢} + ٢ع + ٢٥$

$٢ع^{٢} + ٢ع + ٢٥ - ١٦٩ = ٠$

$٢ع^{٢} + ٢ع - ١٤٤ = ٠$

$ع^{٢} + ع - ٧٢ = ٠$

$(ع - ٨)(ع + ٩) = ٠$

إمّا $ع - ٨ = ٠$ ومنهُ، $ع = ٨$

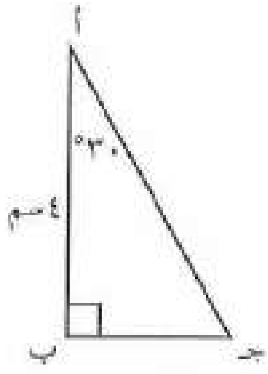
وإما $ع + ٩ = ٠$ ومنهُ، $ع = -٩$ وهذهِ القيمةُ مرفوضةٌ. لماذا؟

أطوالُ أضلاعِ المثلثِ هيَ: ١٣ سم، $ع + ٤ = ٨ + ٤ = ١٢$ سم، $ع - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$ سم

• فكّرْ

حُلَّ مثلثًا قائمَ الزاويةِ أطوالُ أضلاعِهِ الثلاثةِ أعدادٌ صحيحةٌ متتاليةٌ.

نشاط (٧-٣)



الشكلُ (٧-٥٠)

تأملِ الشكلَ (٧-٥٠)

١) ما قياسُ ∢ جـ؟

٢) ما طولُ ب جـ؟ باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ.

٣) جِدْ جا أ، جتا جـ؟ ماذا تلاحظُ.

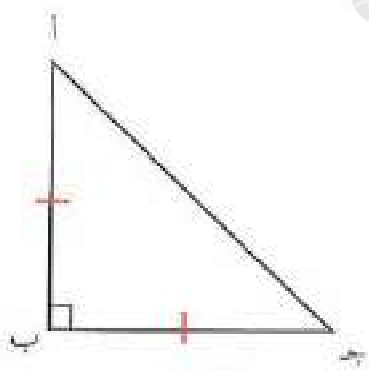
٤) استنتجْ قيمَ جا ٣٠°، جتا ٣٠°، جا ٦٠°، جتا ٦٠°.

تعلّمْ:

يُسمّى مثلُ هذا المثلثِ **مثلثًا ثلاثينيًا ستينيًا**

■ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$.

نشاط (٧-٤)



الشكلُ (٧-٥٠)

تأملِ الشكلَ (٧-٥١)

١) ما قياسُ كلٍّ منَ الزاويتينِ أ، جـ؟

٢) إذا كانَ طولُ أ ب وحدةً واحدةً، فما طولُ أ جـ؟

٣) جِدْ جا أ، جتا جـ . ماذا تلاحظُ؟

٤) استنتجْ قيمَ جا ٤٥°، جتا ٤٥°.

تعلّمْ:

■ جا ٤٥° = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

تدريب ٧-١٦

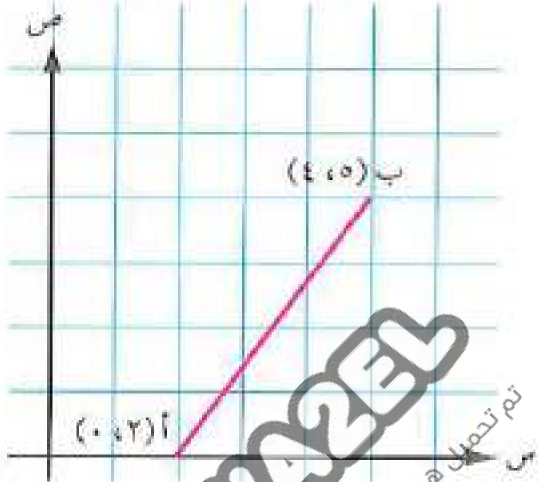
حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

تمارينٌ ومسائلُ

١) أ ب قطعة مستقيمةٌ تصلُ بينَ النقطتينِ أ (٢، ٠)، و ب (٥، ٤)، كما هُوَ مُوضّحٌ في الشكلِ (٧-٥٣). جِدْ:

أ) طولَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب.

ب) قياسَ الزاويةِ الحادةِ المحصورةِ بينَ القطعةِ المستقيمةِ أ ب ومحورِ السيناتِ.



الشكل (٧-٥٣)

٢) يسيرُ رجلٌ مقتربًا منْ قاعدةِ عمودِ كهربائيٍّ يعلوهُ مصباحٌ ارتفاعهُ (٥) م، في اللّحظةِ التي كانَ فيها طولُ ظلِّ الرجلِ يساوي (٢) م، كانَ قياسُ الزاويةِ بينَ المصباحِ ورأسِ ظلِّ الرجلِ ٣٨°. جِدِ المسافةَ بينَ الرجلِ وقاعدةِ العمودِ في تلكَ اللحظةِ.

٣) حُلَّ المثلثَ القائمَ الزاويةِ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) ل م ن مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في م، فيهِ: م ن = ٤ سم، ل م = ٢ سم.

ب) س ص ع مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ص، فيهِ: س ص = ٣ سم، وقياسُ الزاويةِ (س) يساوي ٦٠°.

جـ) أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، فيهِ: جا جـ = ٠,٥ ، أ جـ = ١٤ سم.

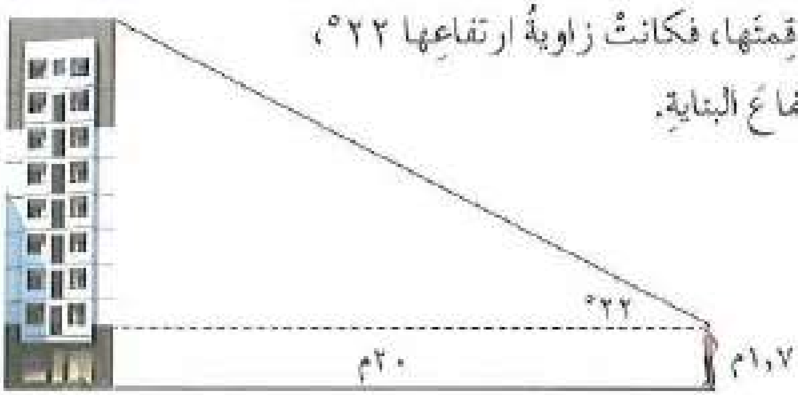
د) د هـ و مثلثٌ متساوي الساقينِ وقائمُ الزاويةِ في هـ، د هـ = ١سم.

٧ - ٦ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ

النتاجاتُ

- تحلُّ مسائلَ حياتيةً باستخدامِ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ.

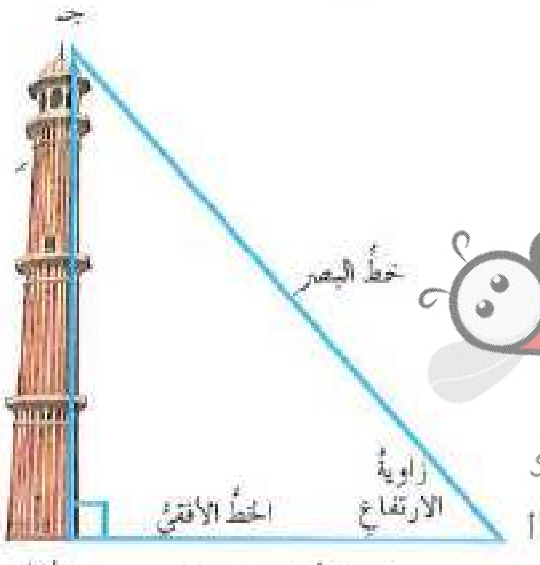
وقفَ شخصٌ طولُهُ (١,٧) مترًا على بُعدِ (٢٠) مترًا مِنْ بنايةٍ ورصدَ قمتَها، فكانتْ زاويةُ ارتفاعِها ٢٢°، جِدِ ارتفاعَ البنايةِ.



الشكلُ (٧–٥٣)

في الشكلِ (٧–٥٤) يرصدُ شخصٌ قمةَ مئذنةٍ مِنَ النقطةِ (أ)، يُسمّى الخطُّ المستقيمُ المارُّ بينَ الناظرِ وقمةِ المئذنةِ: **خطَّ البصرِ**.

وتُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ والخطِّ الأفقيِّ المارِّ بعينِ الناظرِ: **زاويةَ ارتفاعِ المئذنةِ**.



الشكلُ (٧–٥٤)

في الشكلِ (٧–٥٥) ينظرُ شخصٌ إلى سفينةٍ في البحرِ مِنْ قمةِ منارةٍ، (لاحظْ أنَّ موقعَ الشخصِ أعلى مِنْ موقعِ السفينةِ في البحرِ)، تُسمّى الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ والخطِّ الأفقيِّ المارِّ بعينِ الناظرِ: **زاويةَ انخفاضِ السفينةِ**.

الشكلُ (٧–٥٥)

فكّر وناقش:

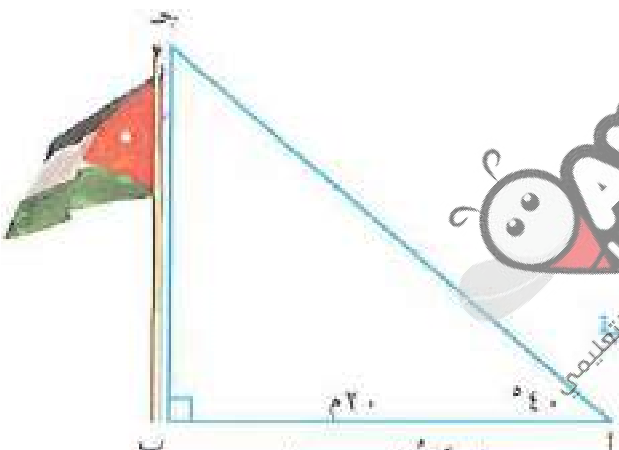
زاويةُ ارتفاعِ المنارةِ = زاويةَ انخفاضِ السفينةِ. برّرْ ذلكَ.

نشاط (٧-٥)

شخصانِ يقفُ أحدهُما فوقَ سطحِ بنايةٍ، ويقفُ الآخرُ على الشارعِ، وينظرُ كلٌّ منهما إلى الآخرِ. أرسمْ شكلاً يُوضحُ زاويةَ ارتفاعِ الشخصِ الواقفِ على البنايةِ، وزاويةَ انخفاضِ الشخصِ الواقفِ في الشارعِ.

مثال (٧-٢٦):

منْ نقطةٍ تبعدُ (٢٠) مترًا عنْ قاعدةِ ساريةِ العلمِ، قاسَ خالدٌ زاويةَ ارتفاعِ قمةِ الساريةِ، فوجدَ أنَّ قياسَها ٤٠°. ما ارتفاعُ هذهِ الساريةِ؟ أنظرِ الشكلَ (٧-٥٦)



الشكلُ (٧-٥٦)

الحلُّ:

ارتفاعُ الساريةِ هوَ طولُ الضلعِ ب جـ

ظا ٤٠° = $\frac{\text{ب جـ}}{٢٠}$		تعريفُ ظلِّ الزاويةِ
٠,٨٣٩١ = $\frac{\text{ب جـ}}{٢٠}$		استخدامُ الآلةِ الحاسبةِ
ب جـ	= ٠,٨٣٩١ × ٢٠	ضربٌ تبادليٌّ
ب جـ	= ١٧ م تقريبًا	نتيجةٌ

تعلّمْ:

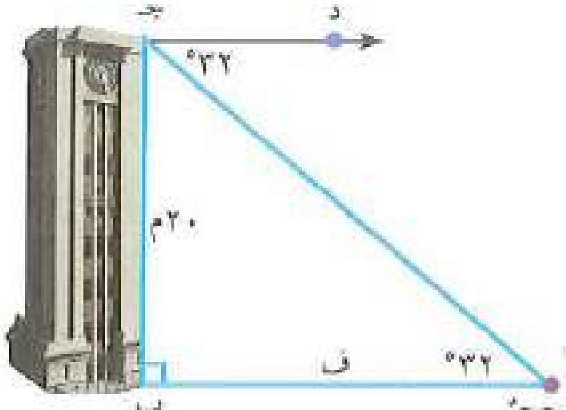
■ لقياسِ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ يستخدمُ جهازٌ يُسمّى الثيودوليت.

تدريب (٧-١٧)

وقفَ أسامةُ على بُعدِ (١٢) مترًا من قاعدةِ شجرةٍ ورصدَ قمتَها فكانتْ زاويةُ ارتفاعِها ٣٥°. ما ارتفاعُ هذهِ الشجرةِ؟

مثالٌ (٧-٢٧):

رصدَ موسى منْ برجٍ ارتفاعهُ (٢٠) مترًا، حجرًا بزاويةِ انخفاضٍ قياسُها ٣٢°، ما المسافةُ بينَ قاعدةِ البرجِ وموقعِ الحجرِ؟ أنظرِ الشكلَ (٧-٥٧).



الشكلُ (٧-٥٧)

الحلُّ:

الزاويةُ جـ أ ب = زاويةَ الانخفاضِ أ جـ د . لماذا؟

المسافةُ بينَ قاعدةِ البرجِ وموقعِ الحجرِ هيَ: ف

$$ظا ٣٢° = \frac{٢٠}{ف}$$

$$٠,٦٢٤٨ = \frac{٢٠}{ف}$$

$$ف = \frac{٢٠}{٠,٦٢٤٨} = ٣٢ \text{ مترًا تقريبًا.}$$

مثالٌ (٧-٢٨):

منْ قمةِ مدرسةٍ ارتفاعُها (١٤) مترًا، رصدَ الحارسُ شخصانِ يقفُ الأوّلُ عندَ النقطةِ (أ)، ويقفُ الثاني عندَ النقطةِ (ب)، كما هو موضحٌ في الشكلِ (٧-٥٨). جِدْ ما يأتي:

١) المسافةَ بينَ الحارسِ والشخصِ الذي يقفُ عندَ النقطةِ (أ).

٢) المسافةَ بينَ الحارسِ والشخصِ الذي يقفُ عندَ النقطةِ (ب).

٣) المسافةَ بينَ النقطتينِ (أ)، (ب).

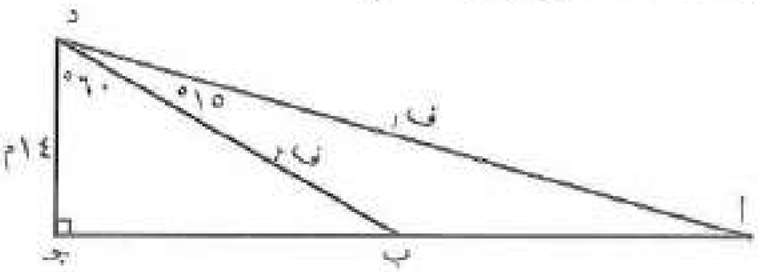
الحلُّ:

١) المسافةُ بينَ الحارسِ والشخصِ الذي يقفُ عندَ النقطةِ (أ) = $ف_١$

$$جتا ٧٥° = \frac{١٤}{ف_١} = ٠,٢٥٨٨$$

$$ف_١ = \frac{١٤}{٠,٢٥٨٨}$$

$ف_١$ = ٥٤ مترًا تقريبًا.



الشكلُ (٧-٥٨)

٢) المسافةُ بينَ الحارسِ والشخصِ الذي يقفُ عندَ النقطةِ (ب) = ف٢

جتا ٦٠° = $\frac{١٤}{ف_٢}$ = ٠,٥

ف٢ = $\frac{١٤}{٠,٥}$ = ٢٨ مترًا

٣) المسافةُ بينَ النقطتينِ (أ)، (ب) = أ جـ − ب جـ

ظا ٧٥° = $\frac{أ جـ}{١٤}$ = ٣,٧٣٢

أ جـ = ١٤ × ٣,٧٣٢ = ٥٢,٢٤ مترًا تقريبًا.

ظا ٦٠° = $\frac{ب جـ}{١٤}$ = ١,٧٣٢

ب جـ = ١٤ × ١,٧٣٢ = ٢٤,٢٤ مترًا تقريبًا.

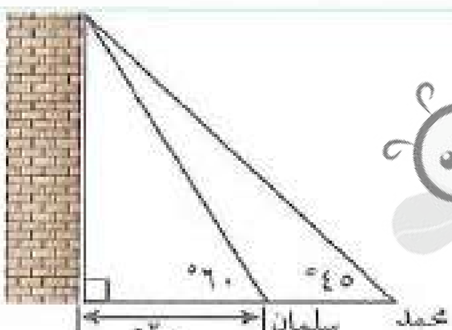
إذنْ أ جـ − ب جـ = ٥٢,٢٤ − ٢٤,٢٤ = ٢٨ مترًا

تدريب (٧-١٨)

يقفُ محمدٌ وسلمانُ أمامَ مستشفى، كما هوَ موضحٌ في الشكلِ (٧-٥٩)، جِدْ:

أ) ارتفاعَ المستشفى.

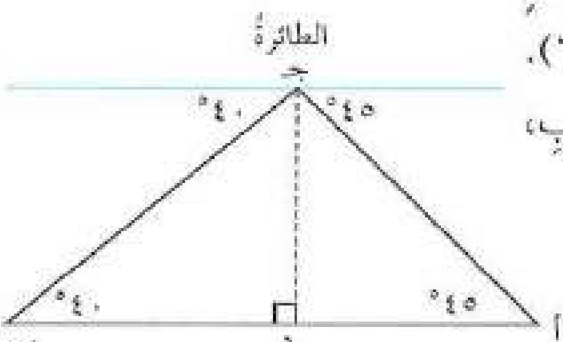
ب) المسافةَ بينَ محمدٍ وسلمانَ.



الشكلُ (٧-٥٩)

مثالٌ (٧-٢٩):

شاهدَ شخصٌ يركبُ طائرةً عموديةً ارتفاعُها (٧٠٠) مترٍ عن سطحِ البحرِ سفينتينِ أ، ب، كما في الشكلِ (٧-٦٠). إذا كانتْ زاويتا انخفاضِهما ٤٥°، ٤٠°، على الترتيبِ، فجِدِ المسافةَ بينَ السفينتينِ.



الشكلُ (٧-٦٠)

الحلُّ:

الزاويةُ جـ أ د = ٤٥°، لماذا؟

الزاويةُ جـ ب د = ٤٠°، لماذا؟

$$\text{ظا }٤٥° = \frac{٧٠٠}{\text{أ د}} = ١$$

ومنهُ، أ د = ٧٠٠ متر

$$\text{ظا }٤٠° = \frac{٧٠٠}{\text{ب د}} = ٠{,}٨٣٩١$$

ب د × ٠,٨٣٩١ = ٧٠٠ ومنهُ، ب د = $\frac{٧٠٠}{٠{,}٨٣٩١}$ = ٨٣٤ مترًا تقريبًا.

إذنْ المسافةُ بينَ السفينتينِ = أ ب = أ د + ب د = ٧٠٠ + ٨٣٤ = ١٥٣٤ مترًا.

تدريبٌ (٧-١٩)

حُلِّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

مثالٌ (٧-٣٠):

رصدتْ آيةُ قمةَ مئذنةٍ ارتفاعُها (١٨) مترًا كما في الشكلِ (٧-٦١)، من النقطةِ (أ) التي تبعدُ (٢٥) مترًا عنْ قاعدةِ المئذنةِ. جِدْ زاويةَ الارتفاعِ التي رصدتْ منها آيةُ قمةَ المئذنةِ.

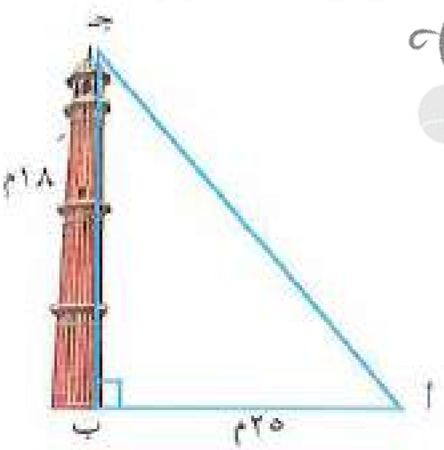
الحلُّ:

زاويةُ الارتفاعِ هيَ ∢ ب أ جـ

$$\text{ظا ∢ ب أ جـ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{١٨}{٢٥}$$

ومنهُ، ظا ب ∢ أ جـ = ٠,٧٢

إذنْ ق ∢ ب أ جـ = ٣٦° تقريبًا باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ.



الشكلُ (٧-٦١)

تدريبٌ (٧-٢٠)

رصدَ قائدُ طائرةٍ حربيةٍ في لحظةٍ ما هدفًا على الأرضِ، حيثُ كانتِ الطائرةُ على ارتفاعِ (٩٧٥) مترٍ عن سطحِ الأرضِ، وتبعدُ (١٨٠٠) مترٍ عنْ ذلكَ الهدفِ. جِدْ زاويةَ انخفاضِ الهدفِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) حديقةٌ مربعةُ الشكلِ، طولُ ضلعِها (√٢٠٠) مترًا، منْ أحدِ طرفي قطريها، رُصِدت قمةُ عمودِ إنارةٍ مثبّتٍ على الطرفِ الآخرِ لهذا القطرِ، فكانتْ زاويةُ ارتفاعِ قمةِ العمودِ ٢٢°. ما ارتفاعُ عمودِ الإنارةِ؟

٢) رَصَدَ سامرٌ طائرةً عموديةً منْ نقطةٍ على سطحِ الأرضِ، فكانت زاويةُ ارتفاعِها ٤٠°، فإذا كانَ بعدُ الطائرةِ عنْ سامرٍ في تلكَ اللحظةِ يساوي (٢٠٠٠) مترٍ، فما ارتفاعُ الطائرةِ عنْ سطحِ الأرضِ حينذاكَ؟

٣) وقفَ أكرمُ بينَ العمارتينِ أ، ب، على بعد (٣٠)م، (٤٠)م على الترتيبِ، أنظرِ الشكلَ (٧-٦٢)، إذا كانتَ زاويتا ارتفاعِ كلٍّ منَ العمارتينِ هما ٦٠°، ٢٥° على الترتيبِ، فجِدْ ارتفاعَ كلٍّ منَ العمارتينِ.

الشكل (٧-٦٢)

٤) ينظرُ رجلٌ إلى قاربِ صيدٍ منْ فوقِ جسرٍ يرتفعُ (١٥) مترًا عنْ سطحِ نهرٍ، إذا كانتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ ٢٨°، فجِدْ:

أ) المسافةَ بينَ القاربِ ونقطةٍ في النهرِ أسفلَ الجسرِ.

ب) المسافةَ بينَ الرجلِ والقاربِ.

٥) وُضِعَتْ كاميرا للمراقبةِ على ارتفاعِ (٣) أمتارٍ فوقَ سطحِ غرفةٍ لمراقبةِ المدخلِ الذي يبعدُ (٥) أمتارٍ عنِ الغرفةِ، جِدْ زاويةَ ارتفاعِ الكاميرا.

مراجعة

١) أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، فيهِ: ب جـ = $\sqrt{٢}$ سم، أ ب = ٥ سم، جِدْ كلاًّ مِمّا يأتي:

أ) جا أ   ب) جتا أ   جـ) ظا أ   د) جا جـ

هـ) جتا جـ   و) ظا جـ

٢) مثلثٌ متساوي الساقينِ ارتفاعُه (١٢) سم، وقياسُ زاويةِ الرأسِ ٧٠°، جِدْ طولَ القاعدةِ.

٣) إذا كانتْ س زاويةً حادةً، وكانَ جا (٩٠° − س) = ٠,٤ ، فجِدْ:

أ) جتا س   ب) جا س   جـ) ظا س   د) جتا (٩٠° − س)

٤) إذا كانَ ٤ جا^{٢} س = ٣، حيثُ س زاويةٌ حادةٌ، فجِدْ قيمةَ س.

٥) أثبتْ أنّ (جا س + جتا س)^{٢} = ١ + ٢ جا س جتا س.

٦) حُلَّ المثلثَ أ ب جـ القائمَ الزاويةِ في ب، فيه ب جـ = ١٠ سم، وقياسُ الزاويةِ جـ = ٤٢°.

٧) ل م ن مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في م، إذا كانَ قياسُ الزاويةِ ن = ٣٥°، فأجبْ عمّا يأتي:

أ) هلْ يمكنُ حلُّ المثلثِ ل م ن؟

ب) هلْ يوجدُ حلولٌ أخرى للمثلثِ؟

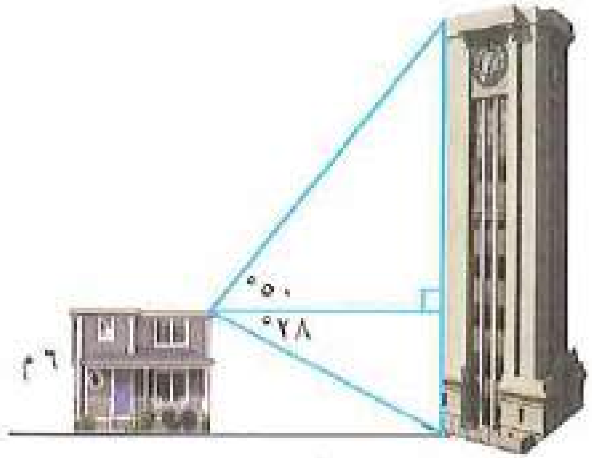
جـ) ما المعلومةُ اللازمُ توافرُها ليكونَ للمثلثِ حلٌّ وحيدٌ؟

٨) رصدَ هاشمٌ قمةَ ساريةِ العَلَمِ، منْ نقطةِ (أ) بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُها ٣٨°، ثُمّ تقدَّمَ (٧) م نحوَ السارية، ورصدَ قمةَ الساريةِ مرةً أخرى بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُها ٤٢°، جِدِ ارتفاعَ الساريةِ.

٩) يسكنُ شخصٌ في منزلٍ ارتفاعهُ (٦) أمتارٍ، يقابلُهُ برجٌ. رصدَ هذا الشخصُ مِنْ فوقِ منزلِهِ قمةَ البرجِ فكانتْ زاويةُ ارتفاعِهِ ٥٠°، ورصدَ أسفلَ البرجِ فكانتْ زاويةُ الانخفاضِ ٢٨°، أنظرِ الشكلَ (٧-٦٣). جِدْ ما يأتي:

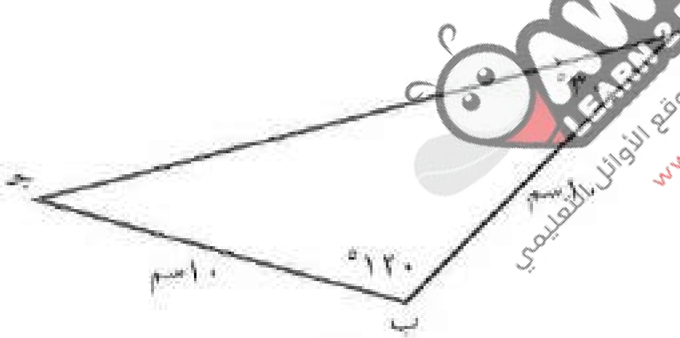
أ) البعدَ بينَ المنزلِ والبرجِ.

ب) ارتفاعَ البرجِ.



الشكلُ (٧-٦٣)

١٠) في الشكلِ (٧-٦٤)، أ ب جـ مثلثٌ منفرجُ الزاويةِ فيهِ: قياسُ الزاويةِ (أ) يساوي ٣٠° وقياسُ الزاويةِ ب يساوي ١٢٠°. إذا كانَ أ ب = ب جـ = ١٠سم، أحسبْ محيطَ هذا المثلثِ.



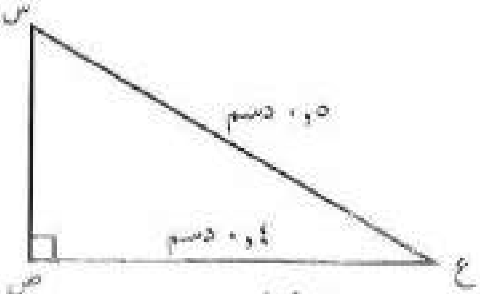
الشكلُ (٧-٦٤)

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ خمسِ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ مِنْ متعددٍ، لكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، اخترْ رمزَ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منها:

(١) في المثلثِ المرسومِ في الشكلِ (٧-٦٥) جتا س يساوي:

أ) ١,٣٣ ب) ٠,٨٠ جـ) ٠,٧٥ د) ٠,٦٠



الشكلُ (٧-٦٥)

(٢) $\frac{\text{جا } ٢٤°}{\text{جا } ٦٦°}$ يساوي:

أ) ١ ب) ٢ جا ٢٤° جـ) ظا ٢٤° د) ظا ٦٦°

(٣) القيمةُ العدديةُ للمقدارِ: $\frac{\text{جا } ٣٠° + \text{ظا } ٤٥°}{\text{جتا } ٦٠°}$ يساوي:

أ) ٥ ب) ٤ جـ) ٣ د) ١

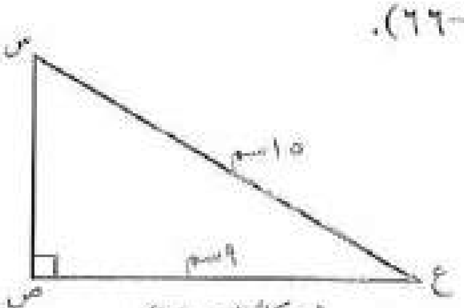
(٤) إذا كانَ ٣ جا س = ٦ جتا س، حيثُ (س) زاويةٌ حادةٌ، فإنَّ ظا س يساوي:

أ) ٦ ب) ٣ جـ) ٢ د) $\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كانَ ظا س = ٥، فإن ظا (٩٠° - س) يساوي:

أ) ٥ ب) ٠,٧٥ جـ) ١ د) $\frac{١}{٥}$

٢) جِدْ قياسَ الزاويةِ (س) في المثلثِ المرسومِ في الشكلِ (٧-٦٦).



الشكلُ (٧-٦٦)

٣) في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ، إذا كانَ جيبُ زاويةٍ حادّةٍ مساويًا لجيبِ تمامِها، فماذا يمكنُ أنْ تستنتجَ عنْ هذا المثلثِ؟ برّرْ إجابتَكَ.

٤) جِدِ القيمةَ العدديةَ للمقاديرِ الآتيةِ:

أ) جتا ٥٥° – جا ٣٥°

ب) جتا^{٢} ٣ س + جتا^{٢} (٩٠° – ٣ س)، حيثُ ، صفر < س < ٣٠°.

٥) حُلَّ المعادلةَ: جتا ٣ س – جا ٧ س = ٠ ، حيثُ، ٧ س يمثّلُ قياسَ زاويةٍ حادّةٍ.

٦) رصدتْ جنى سيارةً منْ قمةِ برجٍ ارتفاعُه (٢٥) مترًا عنْ سطحِ الأرضِ، وكانتْ زاويةُ الانخفاضِ ١٠° ، جِدْ:

أ) بعدَ السيارةِ عنْ قاعدةِ البرجِ.

ب) بعدَ السيارةِ عنْ قمةِ البرجِ.

٨

٨-١ التشابهُ.

٨-٢ تشابهُ المثلثاتِ.

٨-٣ التطابقُ.

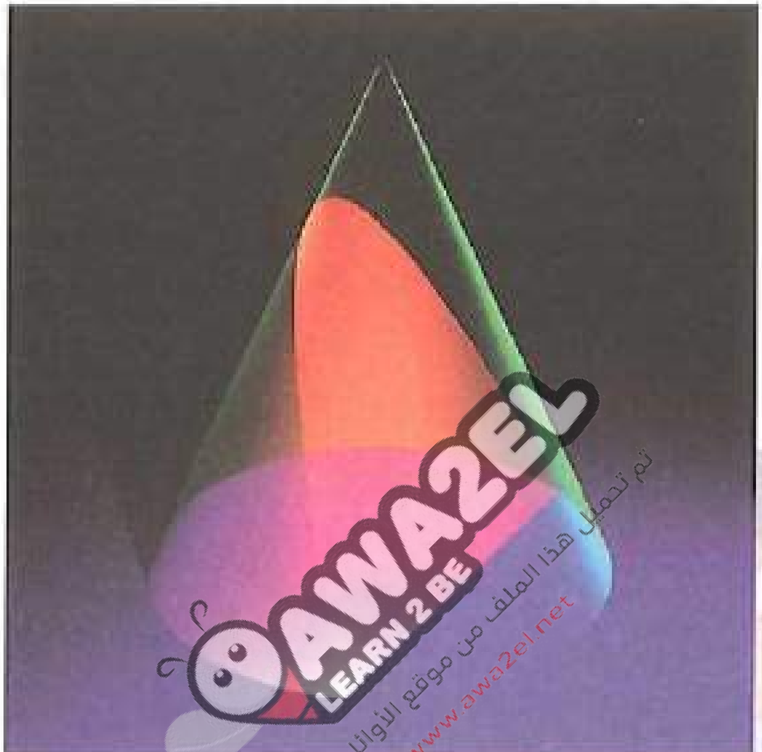
٨-٤ تطابقُ المثلثاتِ.

ما العلاقةُ بينَ القطعِ النقديّةِ منَ الفئةِ نفسِها؟ كيفَ شُيِّدتِ الأبنيةُ؟ على ماذا يعتمدُ مُصمِّمُ المخطَّطاتِ الهندسيّةِ؟ كيفَ يُكبَّرُ نموذجٌ ما؟ ما العلاقةُ بينَ مجموعةٍ منْ أعلامِ الأردنِّ؟ لماذا يجبُ أنْ تكونَ صفحاتُ الكتابِ متطابقةً؟

إذا خطرَ في بالكَ مثلُ هذهِ التساؤلاتِ، فستجدُ تفسيرًا لها عبرَ دراستِكَ هذهِ الوحدةِ، منْ خلالِ تعرُّفِ مفهومَيِ التشابهِ والتطابقِ، وتحديدِ تشابهِ المثلثاتِ وتطابقِها.

الوحدةُ الثامنةُ

الهندسةُ

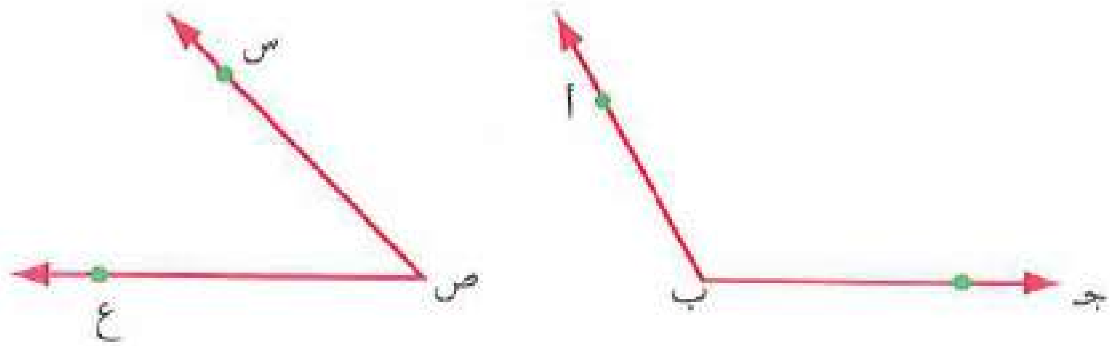


يُتوقعُ مِنَ الطّالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أنْ يكونَ قادرًا على:

- تحديدِ تشابهِ المثلثاتِ وتفسيرِهِ.
- تحديدِ تطابقِ المثلثاتِ.
- استقصاءِ العلاقةِ بينَ التطابقِ والتشابهِ.
- استخدامِ تشابهِ وتطابقِ المثلثاتِ في حلِّ مسائلَ.
- حلِّ مشكلاتٍ باستخدامِ مفهومي التطابقِ والتشابهِ.

تهيئة

١ باستخدامِ المنقلةِ جِدْ قياسَ الزاويتينِ الآتيتينِ:



٢ استخدمِ المسطرةَ والفرجارَ في رسمِ زاويةٍ قياسُها ١٧٥°، ورسمِ زاويةٍ قياسُها ٢٢°

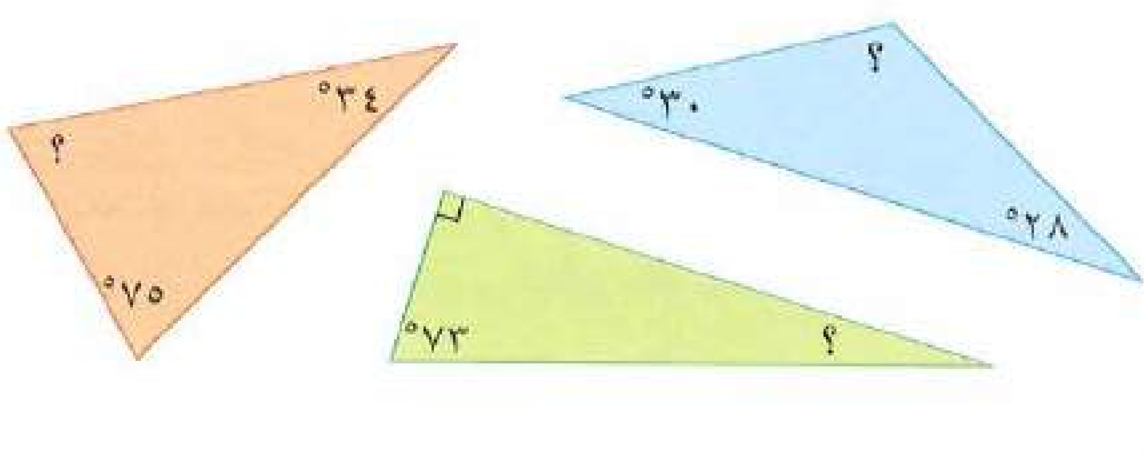
٣ ارسمِ المثلثَ ع ل و الذي فيهِ:

ع ل = ١٣ سم

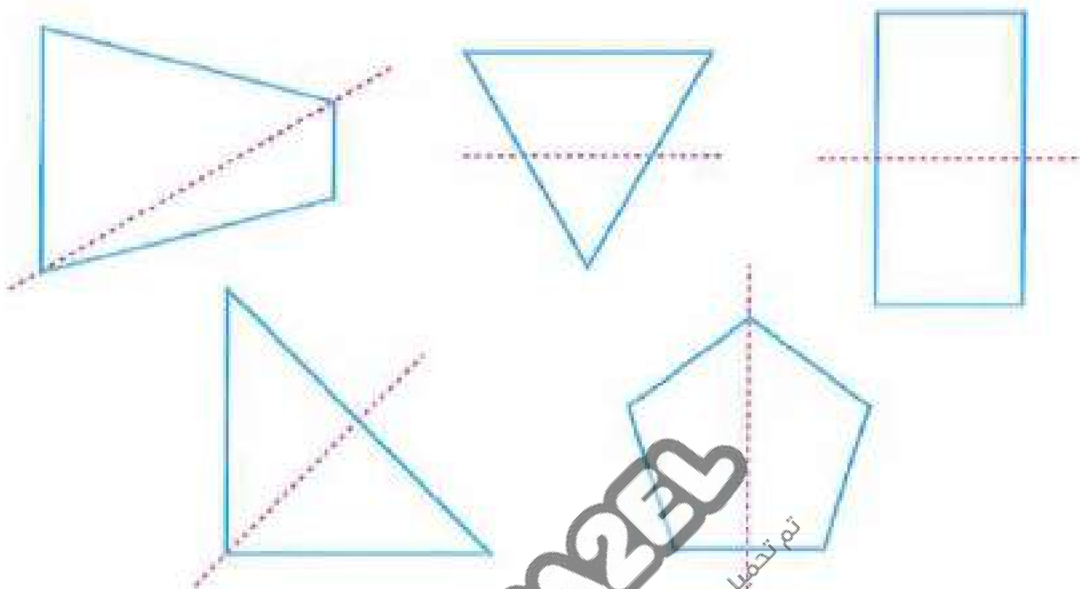
ع و = ١٥ سم

ق ∠ ع = ٤٥°

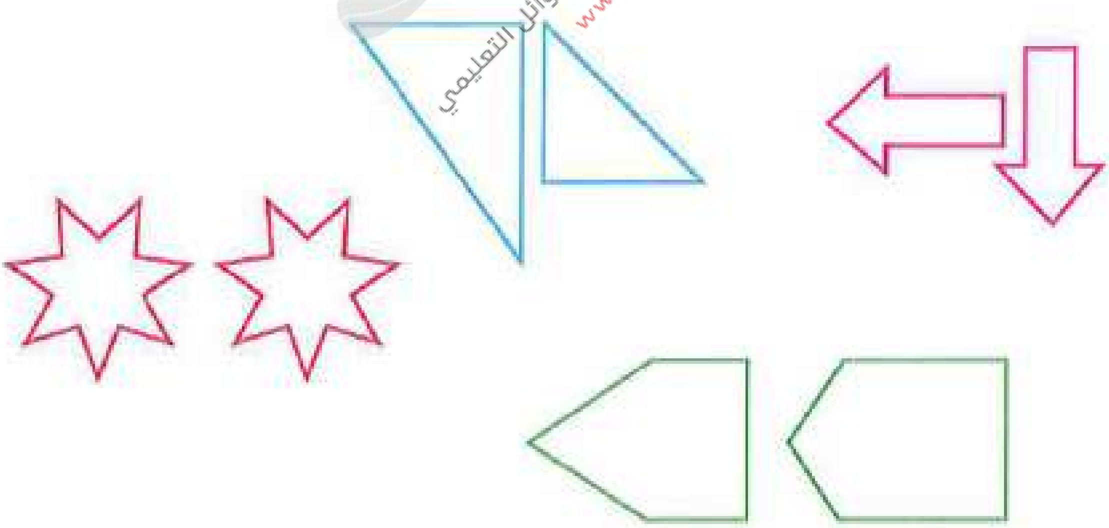
٤ جِدْ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ في المثلثاتِ الآتيةِ:



٥ هَلِ الخطُّ المنقَّطُ في كلِّ شكلٍ مِنَ الأشكالِ الآتيةِ هُوَ خطُّ تماثلٍ للشكلِ؟



٦ ميِّزِ الأزواجَ المتطابقَةَ في الأشكالِ الآتيةِ:



٨ – ١ التشابهُ

النتاجاتُ

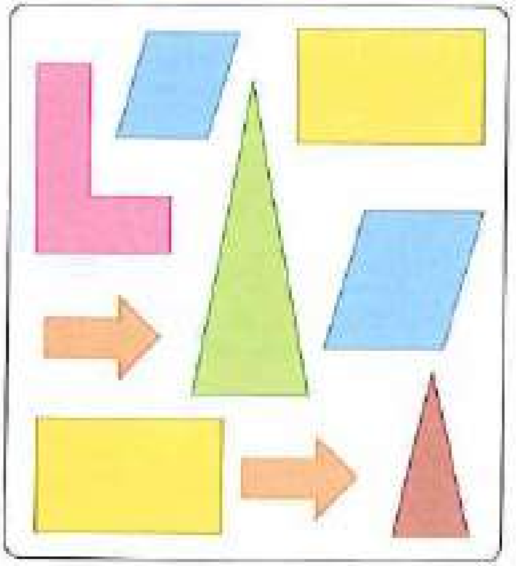
- تتعرّفُ مفهومَ التشابهِ
- تحلُّ مشكلاتٍ باستخدامِ خصائصِ التشابهِ.

تأملِ الشكلَ (٨–١).

هل يمكنُكَ تحديدُ الأشكالِ المتشابهةِ؟

كيفَ يمكنُكَ الحكمُ على تشابهِ مربعينِ؟

هلْ جميعُ المثلثاتِ متشابهةٌ؟



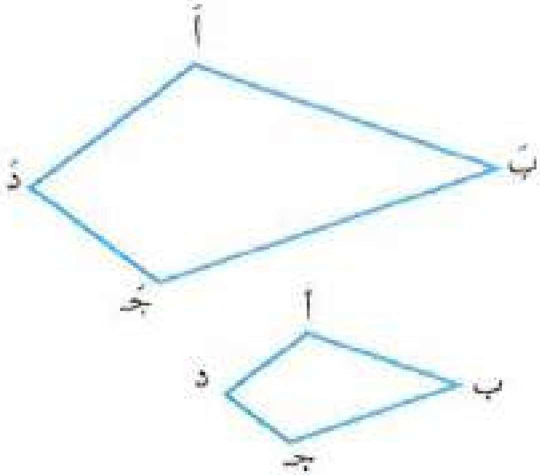
الشكلُ (٨–١)

يتشابهُ شكلانِ إذا كانَ لهما الهيئةُ نفسُها وإنِ اختلفا في الحجمِ بالتكبيرِ أو التصغيرِ. أما في المضلعاتِ **فيتشابهُ مضلعانِ** لهما العددُ نفسُهُ من الأضلاعِ إذا كانتْ زواياهما المتناظرةُ متساويةً في القياسِ وأطوالُ أضلاعِهما المتناظرةُ متناسبةً بنسبةٍ ثابتةٍ، ويُرمزُ للتشابهِ بالرمزِ (~).

في الشكلِ (٨–٢) على فرضِ أنّ

أ ب جـ د ~ أَ بَ جَـ دَ فيمكنُ تحديدُ

الأضلاعِ المتناظرةِ والزوايا المتناظرةِ كما يأتي:



الشكلُ (٨–٢)

الأضلاعُ المتناظرةُ:

الضلعُ أ ب يناظرُ الضلعَ أَ بَ

الضلعُ ب جـ يناظرُ الضلعَ بَ جَـ

الضلعُ جـ د يناظرُ الضلعَ جَـ دَ

الضلعُ د أ يناظرُ الضلعَ دَ أَ

الزوايا المتناظرةُ:

∡ أ ب جـ تناظرُ ∡ أَ بَ جَـ

∡ ب جـ د تناظرُ ∡ بَ جَـ دَ

∡ جـ د أ تناظرُ ∡ جَـ دَ أَ

∡ د أ ب تناظرُ ∡ دَ أَ بَ

قاعدةٌ (١)

يتشابهُ المضلعانِ إذا كانَ لهما نفسُ عددِ الأضلاعِ وكانتْ قياساتُ الزوايا المتناظرةِ فيهما متساويةً وكانتْ أطوالُ الأضلاعِ المتناظرةِ فيهما متناسبةً، ويقصدُ بالتناسبِ أنّ نسبةَ أيِّ ضلعٍ في المضلعِ الأوّلِ إلى نظيرِهِ في المضلعِ الثاني هيَ نسبةٌ ثابتةٌ، وتُسمّى هذهِ النسبةُ **مقياسَ الرسمِ** أوْ **معاملَ التشابهِ**.

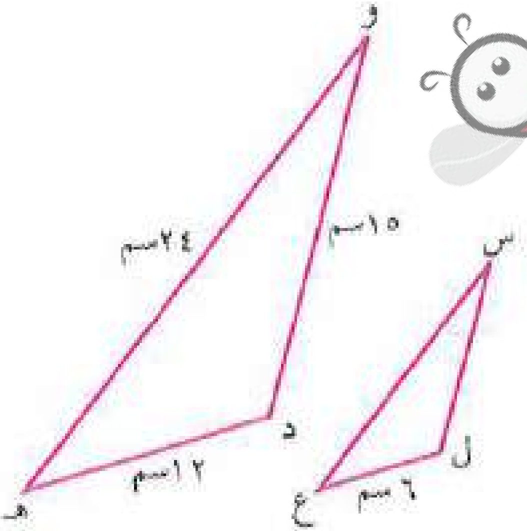
مثالٌ (٨-١):

إذا كانَ المثلثانِ في الشكلِ (٨-٣) متشابهينِ، فجدْ ما يأتي:

١) النسبةَ بينَ كلِّ ضلعينِ متناظرينِ

٢) طولَ كلٍّ منْ $\overline{\text{س ل}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$

٣) نسبةَ محيطِ Δ س ل ع : محيطِ Δ و د هـ



الشكلُ (٨-٣)

الحلُّ:

١) بما أنّ $\frac{\text{ل ع}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

فإنّ النسبةَ بينَ أيِّ ضلعينِ متناظرينِ هيَ ١ : ٢

٢) بما أنَّ Δ س ل ع، Δ و د هـ متشابهانِ فإنّ:

$$\frac{\text{س ل}}{\text{و د}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{د هـ}}$$

$$\frac{\text{س ل}}{\text{١٥}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٢}}$$

١٢ س ل = ٦ × ١٥ ومنهُ، س ل = ٧,٥ سم

$$\frac{\text{س ع}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{د هـ}}$$

$$\frac{\text{س ع}}{٢٤} = \frac{٦}{١٢}$$

٢) س ع = $\frac{٦ \times ٢٤}{١٢}$ ومنهُ س ع = ١٢سم

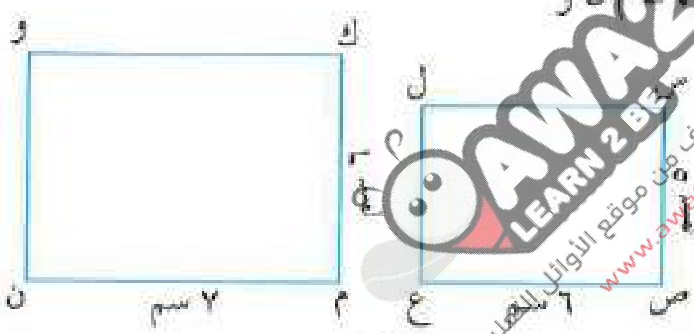
٣) نسبةُ محيطِ Δ س ل ع : محيطِ Δ و د هـ

(٧,٥ + ٦ + ١٢) : (١٥ + ١٢ + ٢٤)

١ : ٢ ماذا تلاحظُ؟

تدريبٌ (٨-١)

تحقّقْ مِنْ أنَّ المستطيلينِ س ص ع ل ، ك م ن و متشابهانِ أمْ لا ، وبرِّرْ إجابتَكَ.



الشكلُ (٨-٤)

مثالٌ (٨-٢):

رسمتْ شادنُ الواجهةَ الأماميةَ لمدرستِها على لوحةٍ منَ الكرتونِ، وكانَ الطولُ الذي يمثّلُ ارتفاعَ المدرسةِ في الرسمِ ٢٤سم، فإذا علمتَ أنَّ المدرسةَ مكّونةٌ منْ ثلاثةِ طوابقَ، ارتفاعُ الواحدِ منها ٤م، جِدْ معاملَ التشابهِ بينَ الرسمِ والأصلِ.

الحلُّ:

نحسبُ ارتفاعَ المدرسةِ الحقيقيَّ = (٤×١٠٠) سم × ٣ = ١٢٠٠سم

$$\frac{\text{الطولُ في الرسمِ}}{\text{الطولِ في الأصلِ}} = \frac{٢٤}{١٢٠٠} = \frac{٢}{١٠٠} = \frac{١}{٥٠}$$

أيْ أنَّ الطولَ في الرسمِ = $\frac{١}{٥٠}$ منَ الطولِ في الأصلِ.

تدريبٌ (٨-٢)

أرادَ عمادُ تكبيرَ صورتِه التي طولُها ٤سم، وعرضُها ٣ سم ليصبحَ طولُها ٢٠ سم، كَمْ سيكونُ عرضُ الصورةِ بعدَ التكبيرِ، مَعَ المحافظةِ على شكلِها؟

تعريفٌ:

يتكافأُ مضلعانِ في حالةٍ واحدةٍ فقطْ وهيَ: إذا تساوتْ مساحتاهما.

أيْ أنَّ: المضلعَ $س_١$ يكافئُ المضلعَ $س_٢$ إذا كانتْ:

مساحةُ $س_١$ = مساحةَ $س_٢$

مثالٌ (٨-٣):

س ص ع ل مربعٌ فيهِ س ص = ٤ سم، أ ب جـ د مربعٌ آخرُ فيهِ أ ب = ٤ سم، هلِ المربعانِ متشابهانِ؟ هلِ المربعانِ متكافئانِ؟ لماذا؟

الحلُّ:

بما أنَّ كلاً منَ الشكلينِ مربّعٌ، فإنَّ زواياهما قوائمُ، أيْ أنَّ الزوايا المتناظرةَ فيهما متساويةٌ في القياسِ، وأطوالَ الأضلاعِ المتناظرةِ فيهما متناسبةٌ لأنَّ أطوالَهما متساويةٌ، إذنِ المربعانِ متشابهانِ.

مساحةُ المربعِ س ص ع ل = $٤^٢$ = ١٦ $سم^٢$

مساحةُ المربعِ أ ب جـ د = $٤^٢$ = ١٦ $سم^٢$

وبما أنَّ مساحتيهما متساويتانِ، فإنَّ المربعينِ متكافئانِ.

ناقشْ:

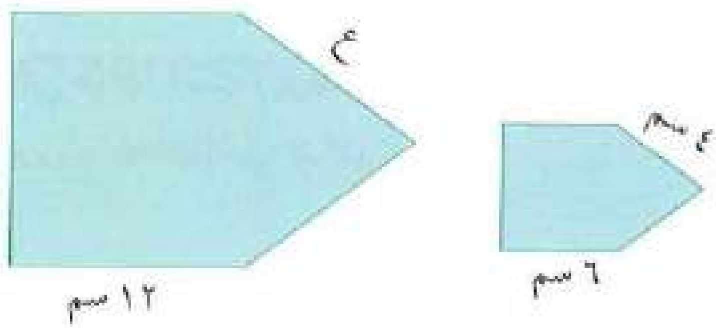
قالتْ نقاءُ: إذا تكافأَ مضلعانِ فإنَّهما يكونانِ متشابهينِ.

ما رأيكَ في صحّةِ ما قالتْ نقاءُ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) هل يمكنُ أنْ يكونَ المضلعُ الخماسيُّ مشابهًا للمضلعِ الرباعيِّ؟ فسِّرْ إجابتَكَ.

٢) ما قيمةُ ع في الشكلِ (٨–٥)، علمًا بأنَّ الشكلينِ متشابهانِ؟



الشكلُ (٨–٥)

٣) لدى رامة مغلفانِ مستطيلا الشكلِ، أحدهما طولُهُ (٢٢) سم، وعرضُهُ (١٠) سم، والثاني طولُهُ (٣٣) سم، وعرضُهُ (١٢) سم، هل الغلافانِ متشابهانِ؟

٤) هل يمكنكَ رسمُ مضلعينِ يتساوى فيهما عددُ الأضلاعِ وعددُ الزوايا، ولكنهما غيرُ متشابهينِ؟ أعطِ مثالاً لتدعمَ إجابتَكَ.

٥) هلِ المستطيلانِ المتشابهانِ متكافئانِ؟ بيِّنْ ذلكَ.

٦) أ ب جـ د مربعٌ فيهِ أ ب = ٧سم، ما عددُ المربعاتِ المشابهةِ للمربعِ أ ب جـ د والتي يمكنكَ رسمُها بحيثُ تكونُ مختلفةَ الأبعادِ؟

تشابهُ المثلّثاتِ

النتاجات

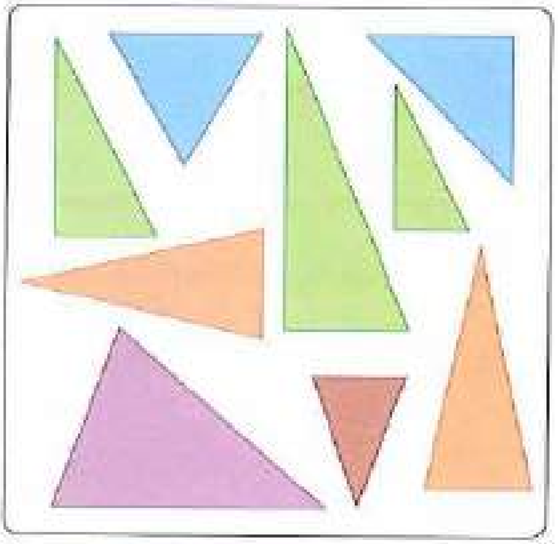
- تتعرّفُ حالاتِ تشابهِ المثلثاتِ.
- تُطبّقُ تشابهَ المثلثاتِ في حلِّ مسائلَ.

تأمّلِ الشكلَ (٨–٦).

متى يتشابهُ مثلثانِ؟

كيفَ يمكنكَ الحكمُ على تشابهِ مثلثينِ؟

ما العناصرُ التي يكفي توفّرُها كي يتشابهَ مثلثانِ؟



الشكلُ (٨–٦)

بالعودةِ إلى الشكلِ (٨–٦)، لا بُدَّ أنّكَ واجهتَ صعوبةً في تحديدِ المثلثاتِ المتشابهةِ وذلكَ لعدمِ توفّرِ العناصرِ الكافيةِ لتحديدِ التشابهِ بينَ هذهِ المثلثاتِ، وهنا لا بدَّ أنْ تتعرّفَ العناصرَ الكافيةَ التي تحكمُ منْ خلالِها على تشابهِ مثلثينِ.

نشاط (٨-١)

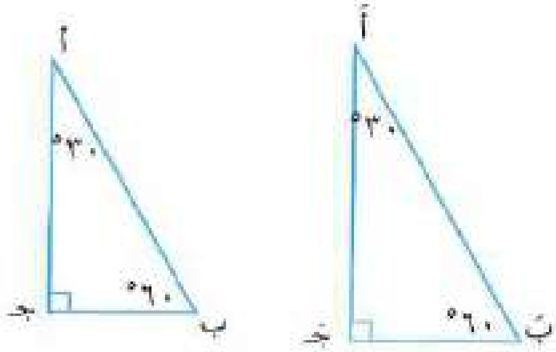
الشكلانِ المجاورانِ يمثلانِ مثلثينِ قائمي الزاويةِ، أجبْ عنْ كلٍّ مما يأتي:

١) هلِ الزوايا المتناظرةُ في الشكلينِ متساويةٌ في القياسِ؟

٢) هلْ تستطيعُ التوصلَ إلى علاقةٍ بينَ أطوالِ الأضلاعِ المتناظرةِ في الشكلينِ باستخدامِ النسبِ المثلثيةِ؟

٣) هلْ تستطيعُ الحكمَ فيما إذا كانَ المثلثانِ متشابهينِ أمْ لا؟

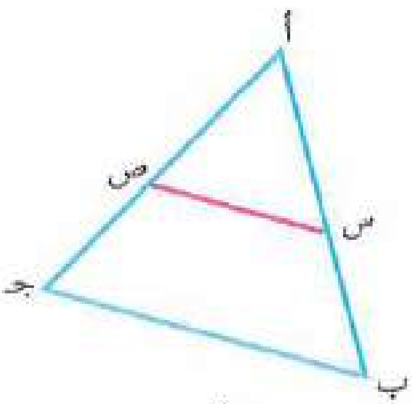
٤) ماذا تلاحظُ؟



لا بدَّ أنَّكَ لاحظتَ بعدَ الإجابةِ عنْ أسئلةِ النشاطِ (٨-١) إجابةً صحيحةً، أنَّ المثلثينِ متشابهانِ. ويمكنُكَ القولُ بأنَّهُ إذا تساوتْ قياساتُ الزوايا المتناظرةِ في مثلثينِ فإنَّ هذا كافٍ للحكمِ على تشابهِ المثلثينِ، وهذهِ حقيقةٌ مثبتةٌ في علْمِ الرياضياتِ وهيَ الحالةُ الأولى منْ تشابهِ المثلثاتِ.

الحالةُ الأولى: يتشابهُ مثلثانِ إذا تطابقتْ زواياهما المتناظرةُ.

مثالٌ (٨-٤)



الشكلُ (٨-٧)

في الشكلِ (٨-٧) إذا علمتَ أنَّ س ص // ب جـ

بيِّنْ أنَّ Δ أ س ص، Δ أ ب جـ متشابهانِ

الحلُّ

ق ∢ س أ ص = ق ∢ ب أ جـ   زاويةٌ مشتركةٌ

ق ∢ أ ص س = ق ∢ أ جـ ب   متناظرتانِ س ص // ب جـ

ق ∢ أ س ص = ق ∢ أ ب جـ   متناظرتانِ س ص // ب جـ

بما أنَّ الزوايا المتناظرةَ في المثلثينِ متساويةٌ في القياسِ فإنَّ المثلثينِ متشابهانِ

وبالرموزِ: Δ أ س ص ~ Δ أ ب جـ

قاعدةٌ (٢)

نتيجةُ (١): يتشابهُ مثلثانِ إذا تطابقتْ زاويتانِ متناظرتانِ فيهما.

نتيجةُ (٢): إذا رسمتَ قطعةً مستقيمةً تصِلُ بينَ ضلعينِ في مثلثٍ وتوازي الضلعَ الثالثَ، فإنَّ المثلثينِ الناتجينِ متشابهانِ.

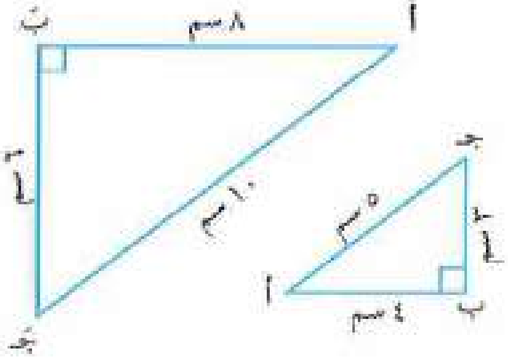
تدريبٌ (٨-٣)

ليكنْ أ ب جـ مثلثًا، ص نقطةٌ على ب جـ، س نقطةٌ على أ جـ، أ ب // س ص بحيثُ ب جـ = ٩سم، أ جـ = ١٠,٥ سم، س جـ = ٧ سم، أ ب = ٤,٥ سم، ص جـ = ٦ سم

أ) بيِّنْ أنَّ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص جـ

ب) احسبْ طولَ س ص

نشاط (٨-٢)



اعتمدِ الشكلينِ المجاورينِ في الإجابةِ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:

١) هلْ أطوالُ الأضلاعِ المتناظرةِ في المثلثينِ متناسبةٌ؟

٢) هلْ تستطيعُ التوصلَ إلى علاقةٍ بينَ قياساتِ الزوايا المتناظرةِ في الشكلينِ باستخدامِ النسبِ المثلثيةِ؟

٣) هلْ تستطيعُ أنْ تُحدِّدَ إذا كانَ المثلثانِ متشابهينِ أوْ لا؟

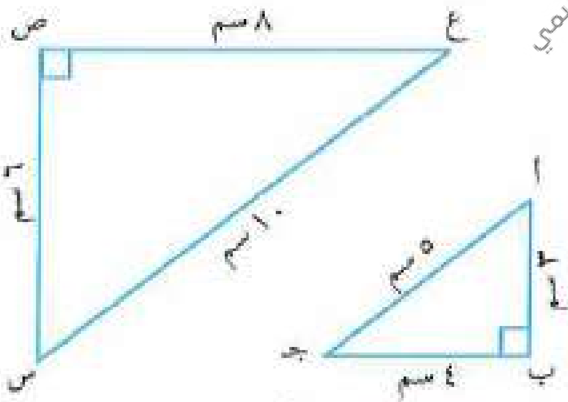
٤) ماذا تلاحظُ؟

لا بُدَّ أنكَ لاحظتَ – بعدَ الإجابةِ عنْ أسئلةِ النشاطِ (١) إجابةً صحيحةً – أنَّ المثلثينِ متشابهانِ.
ويمكنُكَ القولُ أنَّهُ إذا تناسبتِ الأطوالُ المتناظرةُ في مثلثينِ فإنَّ المثلثينِ متشابهانِ، وهذهِ حقيقةٌ مثبتةٌ في علمِ الهندسةِ، وهيَ الحالةُ الثانيةُ منْ تشابهِ المثلثاتِ.

الحالةُ الثانيةُ: يتشابهُ مثلثانِ إذا تناسبتْ أطوالُ أضلاعهما المتناظرةِ.

مثالٌ (٨-٥) *

اعتمدِ الشكلَ (٨-٨) في تحديدِ الزوايا المتساويةِ في القياسِ في كلٍّ منَ المثلثينِ أ ب جـ، س ص ع.



الشكلُ (٨-٨)

الحلُّ:

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$$

$$\frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨} = \frac{٥}{١٠}$$

Δ أ ب جـ يشابهُ Δ س ص ع   تناسبُ الأضلاعِ المتناظرةِ

إذًا جميعُ الزوايا المتناظرةِ متساويةٌ   تشابهُ المثلثاتِ

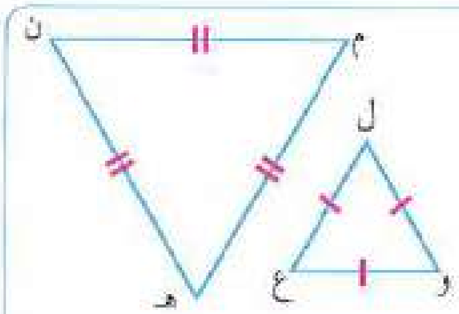
ومنهُ ق∠أ = ق∠س ، ق∠ب = ق∠ص ، ق∠جـ = ق∠ع

* المثالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

تدريب (٨-٤)

في الشكلِ (٨-٩) هل Δ ل و ع،

يشابهُ Δ هـ ن م ، برِّرْ إجابتَكَ.



الشكلُ (٨-٩)

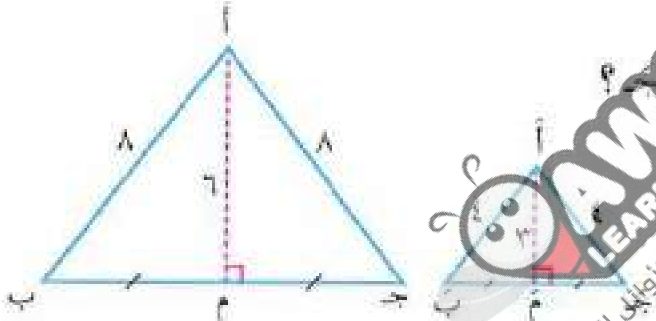
نشاط (٨-٣)

اعتمدِ الشكلينِ المجاورينِ في الإجابةِ عنْ كلٍّ مِمّا يأتي علمًا بأنَّ ق ∡ أ = ق ∡ أَ

١) هلْ هناكَ علاقةٌ بينَ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أَ جـَ}}$ ؟

٢) هلْ قياس ∡ ب أ جـ يساوي قياسَ ∡ بَ أَ جـَ ؟

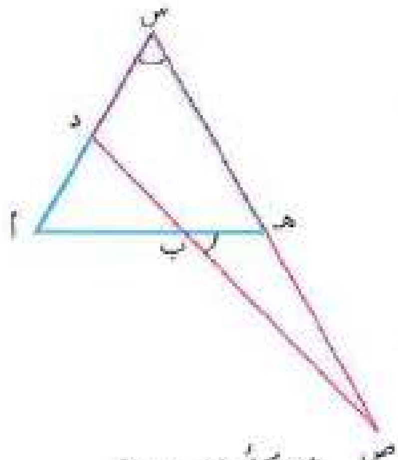
٣) هلْ يمكنكَ استنتاجُ أنَّ المثلثينِ متشابهانِ؟



لا بدَّ أنكَ لاحظتَ أنَّ المثلثينِ متشابهانِ، وهنا يمكنُكَ القولُ بأنَّهُ إذا تناسبَ طولا ضلعينِ في مثلثٍ معَ طولي الضلعينِ المناظرينِ لهما في مثلثٍ آخرَ، وكانتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَ الضلعينِ في الأوّلِ تطابقُ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الضلعينِ في الآخرِ، فإنَّ المثلثينِ متشابهانِ، وهذهِ حقيقةٌ مثبتةٌ في علمِ الهندسةِ، وهي الحالةُ الثالثةُ منْ تشابهِ المثلثاتِ.

الحالةُ الثالثةُ: يتشابهُ مثلثانِ إذا تناسبَ طولا ضلعينِ في أحدِهما معَ طولي الضلعينِ المناظرينِ لهما في الآخرِ، وكانتِ الزاويةُ المحصورةُ بينَ الضلعينِ في المثلثِ الأولِ تطابقُ الزاويةَ المناظرةَ لها في المثلثِ الثاني.

مثال (٨-٦):



الشكلُ (٨-١٠)

في الشكلِ (٨-١٠) أثبتْ أنَّ ق ∡ أ س ص = ق ∡ هـ ب ص
علمًا أنَّ أ د × أ س = أ ب × أ هـ

الحلُّ:

أ د × أ س = أ ب × أ هـ — معطياتٌ

$\frac{\text{أ د} \times \text{أ س}}{\text{أ هـ} \times \text{أ س}} = \frac{\text{أ ب} \times \text{أ هـ}}{\text{أ هـ} \times \text{أ س}}$ — بالقسمةِ على أ هـ × أ س

$\frac{\text{أ د}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ س}}$ ، ∡ أ مشتركةٌ — منَ المعطياتِ

Δ أ ب د ~ Δ أ س هـ — تناسبُ ضلعينِ وزاويةٍ محصورةٍ

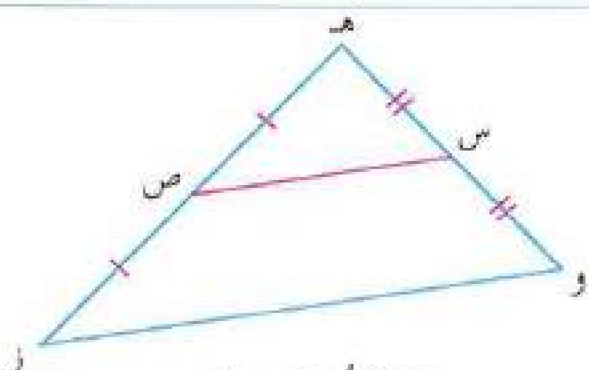
ق ∡ د ب أ = ق ∡ هـ س أ — منَ التشابهِ

ق ∡ د ب أ = ق ∡ هـ ب ص — بالتقابلِ بالرأسِ

إذن ق ∡ هـ س أ = ق ∡ هـ ب ص

إذن ق ∡ أ س ص = ق ∡ هـ ب ص

تدريبٌ ٨-٥

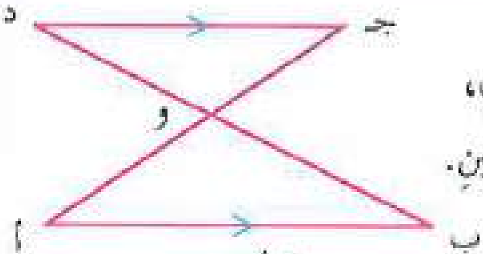


الشكلُ (٨-١١)

في الشكلِ (٨-١١) هـ ز = ٨ سم
ز و = ١٠ سم، هـ س = ٣ سم،

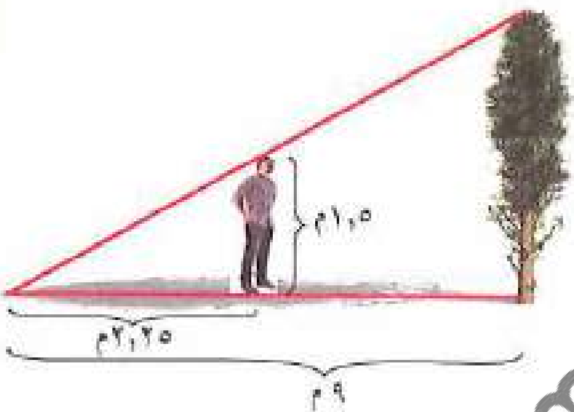
احسبْ طولَ $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$

تمارينُ ومسائلُ



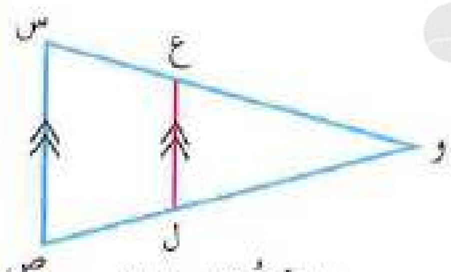
الشكلُ (٨–١٢)

١) في الشكلِ (٨–١٢) المثلثانِ أ و ب، جـ و د متشابهانِ، سَمِّ زوجًا منَ الزوايا المتناظرةِ بسببِ تشابهِ هذينِ المثلثينِ.



الشكلُ (٨–١٣)

٢) وقفَ طالبٌ أمامَ شجرةٍ كما في الشكلِ (٨–١٣)، ساعدْ هذا الطالبَ في إيجادِ طولِ الشجرةِ.



الشكلُ (٨–١٤)

٣) في الشكلِ (٨–١٤) ع ل // س ص، س ص = ٥ سم، ع ل = ٣ سم، و ل = ٨ سم، احسبْ طولَ و ص.

٤) Δ هـ و ي، Δ ع ص س مثلثانِ متشابهانِ، حيثُ و ي، هـ ي متناظرانِ على التوالي معَ ص س، ع س.

أ) اذكرِ الزوايا المتناظرةَ في هذينِ المثلثينِ.

ب) احسبْ طولَ ص س، ع س إذا علمتَ أنَّ:

و ي = ٢٠ سم، هـ ي = ٢٤ سم، هـ و = ٣٢ سم، ص ع = ١٦ سم.

التطابقُ

النتاجات

- تتوصّلُ إلى مفهومِ التطابقِ.
- تَحُلُّ مشكلاتٍ باستخدامِ خصائصِ التطابقِ.

تأملِ الشكلَ (٨–١٥)، هلْ يحتوي الشكلُ إشاراتٍ تعبّرُ عنْ التحذيرِ نفسِه؟

١) هلْ تمثّلُ اشارةُ التحذيرِ بوجودِ مدرسةٍ مضلعًا؟

٢) ما أوجهُ الشبهِ بينَ الاشاراتِ المتشابهةِ؟

الشكلُ (٨–١٥)

٣) قارنْ بينَ الزوايا المتناظرةِ والأضلاعِ المتناظرةِ؟

٤) اذا قُصّتْ إحدى الإشاراتِ المتشابهةِ وطُبقتْ على الأخرى ماذا ستلاحظُ؟

للتأكدِ مِنْ تطابقِ شكلينِ يُوضعُ أحدُهما على الآخرِ، فإذا غطّى أحدُهما الآخرَ تمامًا دونَ زيادةٍ أوْ نقصانٍ في أحدِهما، فإنهما **متطابقانِ**، ولا يحدثُ ذلكَ إلا إذا كانَ لهما الهيئةُ نفسُها، والقياساتُ نفسُها.

وإذا كانَ $ش_1$ ، $ش_2$ **شكلينِ متطابقينِ**، يُكتبُ ذلكَ بالرموزِ $ش_1 \equiv ش_2$

تعريفٌ (١)

١) تتطابقُ القطعتانِ المستقيمتانِ إذا كانتا متساويتينِ في الطولِ، أيْ أنَّ:

$\overline{س\ ص} \equiv \overline{ل\ ع}$ إذا وفقطْ إذا كانَ طولُ س ص = طولُ ل ع

٢) تتطابقُ الزاويتانِ إذا كانتا متساويتينِ في القياسِ، أيْ أنَّ:

$\measuredangle$ أ ب جـ $\equiv$ $\measuredangle$ هـ و ل إذا وفقطْ إذا كانَ ق $\measuredangle$ أ ب جـ = ق $\measuredangle$ هـ و ل

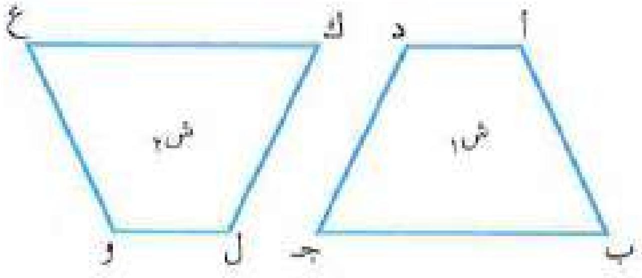
٣) يتطابقُ الشكلانِ الهندسيانِ إذا وُجِدَ تناظرٌ بينَ أضلاعِ ورؤوسِ الشكلينِ بحيثُ يطابقُ كلُّ ضلعٍ وكلُّ رأسٍ في أحدِ الأشكالِ نظيرَهُ في الشكلِ الآخرِ.

مثالٌ: (٨-٧):

تأملِ الشكلَ (٨-١٦)

إذا كان ش$_1$ ≡ ش$_2$

عيّنِ الأضلاعَ المتطابقةَ والزوايا المتطابقةَ.



الشكلُ (٨-١٣)

الحلُّ:

لاحظْ أنَّ كلا الشكلينِ ش$_1$ ، ش$_2$ رباعيٌّ، وحسبَ ترتيبِ الأضلاعِ المتناظرةِ والزوايا المتناظرةِ، يمكنُ كتابةُ جملِ التطابقِ لهما على النحوِ الآتي:

$\overline{\text{أب}} \equiv \overline{\text{لك}}$ ، ∡د أ ب ≡ ∡و ل ك

$\overline{\text{بجـ}} \equiv \overline{\text{كع}}$ ، ∡أ ب جـ ≡ ∡ل ك ع

$\overline{\text{جـد}} \equiv \overline{\text{عو}}$ ، ∡ب جـ د ≡ ∡ك ع و

$\overline{\text{دأ}} \equiv \overline{\text{ول}}$ ، ∡جـ د أ ≡ ∡ع و ل

تدريبٌ (٨-٦)

في المثالِ السابقِ، قمْ بقياسِ أطوالِ الأضلاعِ المتناظرةِ، وقياسِ الزوايا المتناظرةِ، ثمَّ ارسمْ شكلاً ثالثًا ش$_3$ حيثُ أنَّ ش$_3$ يطابقُ كلاً مِنْ ش$_1$ ، ش$_2$.

تعريفٌ (٢)

يتطابقُ مضلعانِ لهما العددُ نفسهُ منَ الأضلاعِ في حالةٍ واحدةٍ فقطْ، إذا تطابقتِ الأضلاعُ المتناظرةُ والزوايا المتناظرةُ فيهما.

مثالٌ (٨-٨):

أ ب جـ د مربعٌ طولُ ضلعِهِ = ٦سم، ع ل و ي مربعٌ آخرُ طولُ ضلعِهِ = ١٢سم، هلِ المربعانِ متطابقانِ؟ لماذا؟

الحلُّ:

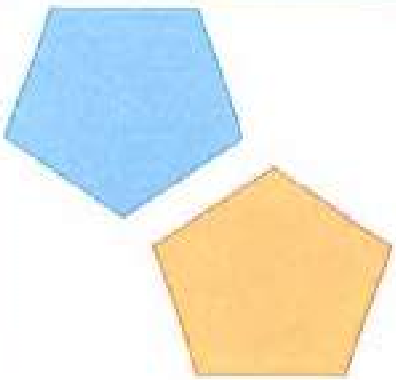
بما أنَّ كلاًّ منَ الشكلينِ مربّعٌ، إذًا زواياهما قوائمُ، أيْ أنَّ جميعَ الزوايا المتناظرةِ متطابقةٌ، ولكنْ أطوالَ الأضلاعِ المتناظرةِ غيرُ متساويةٍ لأنَّ أطوالَهما غيرُ متساويةٍ، ومنهُ:

المربعُ أ ب جـ د (لا يطابقُ) المربعَ ع ل و ي، وبالرموزِ:

المربعُ أ ب جـ د $\ncong$ المربعَ ع ل و ي

تدريب (٨–٧)

جِدْ قياساتِ كلٍّ منْ أطوالِ أضلاعِ وزوايا المضلعينِ في الشكلِ (٨–١٧)، وقرِّرْ إنْ كانا متطابقينِ، مستخدمًا الأدواتِ الهندسيّةِ.



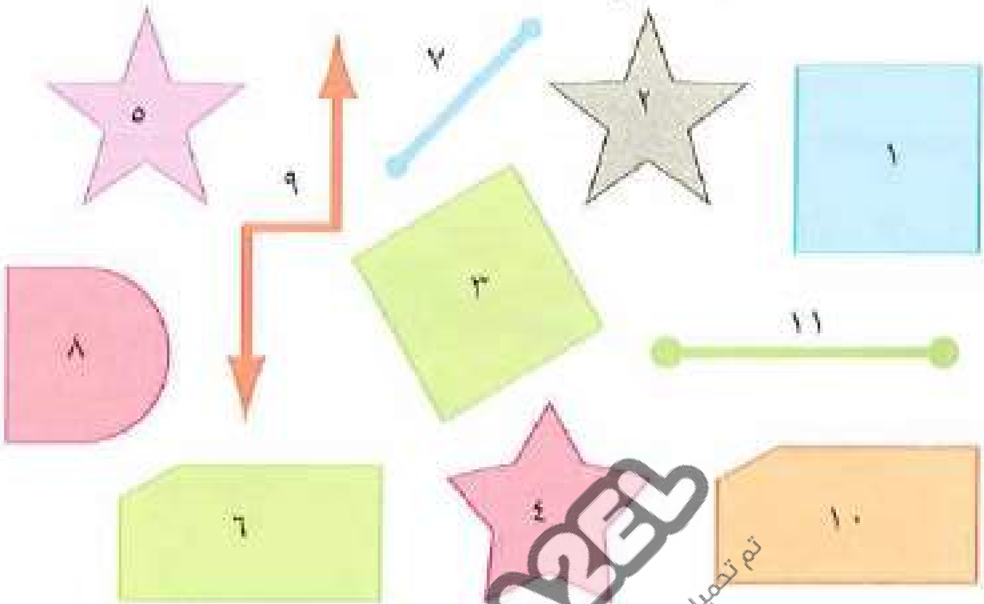
الشكلُ (٨–١٨)

تدريب (٨–٨)

ارسمْ مضلعينِ متطابقينِ، وبيِّنْ إذا كانا متكافئينِ.

١) قطعتانِ مستقيمتانِ طولُ كلٍّ منهما يساوي ١٠ سم، هلْ هما متطابقتانِ؟ لماذا؟

٢) عيِّنِ الأشكالَ المتطابقةَ في الشكلِ(٨–١٨)



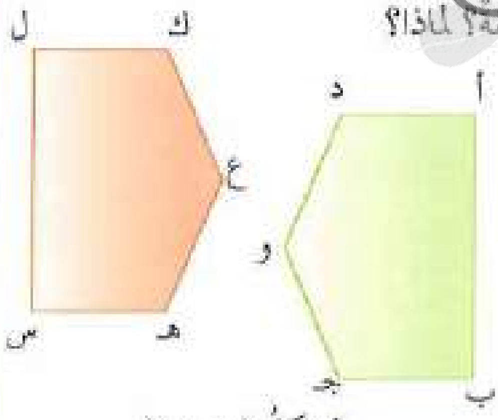
الشكلُ (٨–١٨)

٣) ارسمْ دائرتينِ متطابقتينِ، واحسبْ مساحةَ كلٍّ منهما.

٤) هلْ جميعُ المستطيلاتِ التي لها المساحةُ نفسُها متطابقةٌ؟ لماذا؟

٥) الشكلانِ الموضحانِ في الشكلِ(٨–١٩) متطابقانِ،

اكتبْ جملَ التطابقِ لهما.



الشكلُ (٨–١٩)

٦) هل يمكنكَ رسمُ مضلعينِ يتساوى فيهما عددُ الأضلاعِ، ولكنهما غيرُ متطابقينِ؟

أعطِ مثالاً لتدعمَ إجابتكَ.

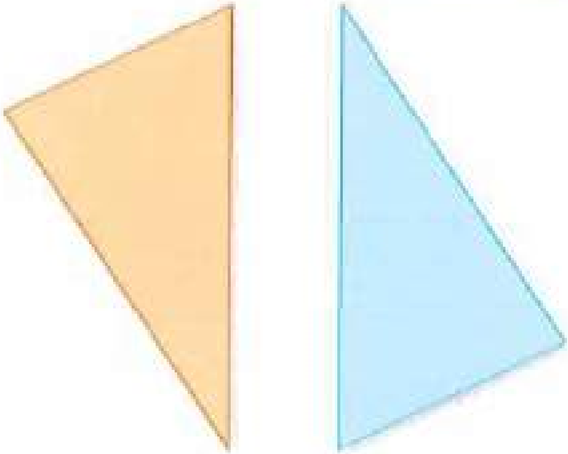
٧) أ ب جـ د مربعٌ فيهِ أ ب = ٧ سم، ما عددُ المربعاتِ المطابقةِ للمربعِ أ ب جـ د والتي يمكنُكَ رسمُها؟

٨ - ٤ تطابقُ المثلثاتِ

النتاجاتُ
- تستقرئُ حالاتِ تطابقِ المثلثاتِ.
- تحلُّ أسئلةً على تطابقِ المثلثاتِ.

١) متى يتطابقُ مثلثانِ؟

٢) هلْ تطابقُ بعضِ العناصرِ المتناظرةِ يضمنُ تطابقَ العناصرِ المتناظرةِ الأخرى؟

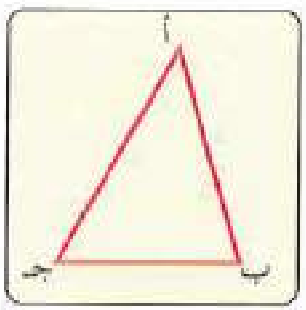


للتعرّفِ على حالاتِ تطابقِ المثلثاتِ نفّذِ النشاطَ الآتي:

نشاط (٨-٤)

احضرْ ورقةً وابدأْ بالخطواتِ الآتيةِ:

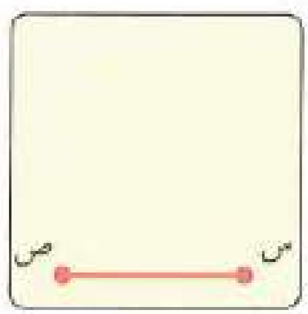
١) ارسمْ مثلثًا وليكنْ Δ أ ب جـ.



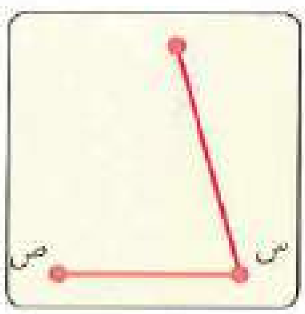
٢) استخدمِ المسطرةَ والمنقلةَ لقياسِ أطوالِ أضلاعِ Δ أ ب جـ، وزواياهُ.

٣) باستخدامِ القياساتِ التي حصلتَ عليها في خطوةِ (٢):

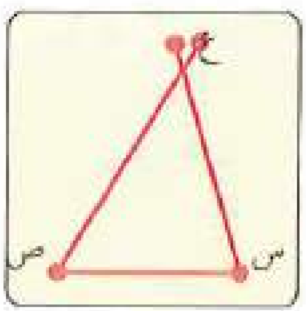
ارسمْ $\overline{\text{س ص}} \equiv \overline{\text{أ ب}}$



ارسمْ ∢ س = ∢ ب



ارسمْ ∢ ص = ∢ جـ

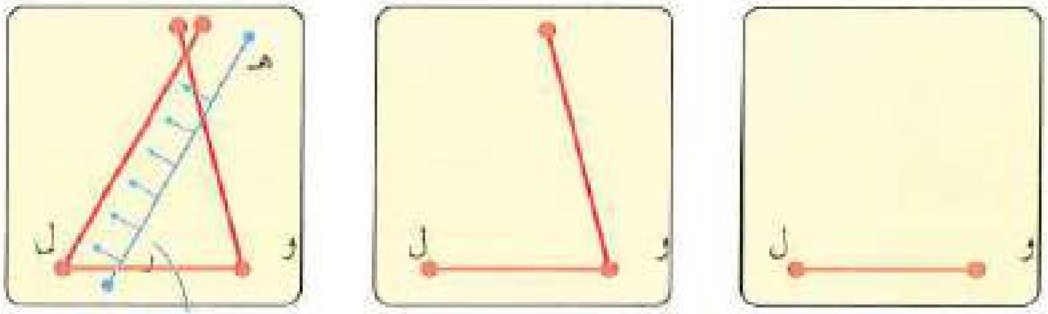


٤) قُصَّ Δ س ص ع وطابقْهُ معَ Δ أ ب جـ، ماذا تلاحظُ؟

٥) هل يمكنُكَ رسمُ Δ س ص ع في الخطوةِ (٣) بحيثُ يكونُ Δ س ص ع لا يطابقُ Δ أ ب جـ؟ لماذا؟

٥) باستخدامِ القياساتِ التي حصلتُ عليها في الخطوةِ (٢)

ارسمْ $\overline{و ل} \equiv \overline{أ ب}$ ارسمْ ∡ و ≡ ∡ ب ارسمْ ∡ هـ ≡ ∡ أ



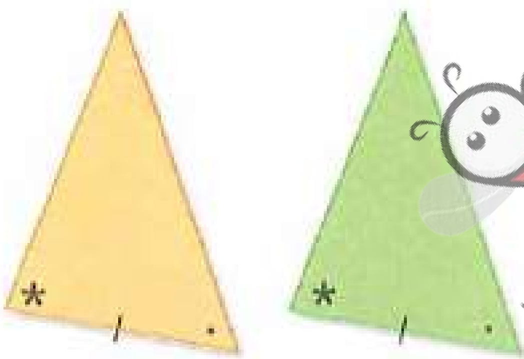
٦) قصَّ Δ و ل هـ وطابقْهُ مع Δ أ ب جـ ماذا تلاحظُ؟

هلْ يمكنُكَ رسمُ Δ و ل هـ في الخطوةِ (٥) بحيثُ يكونُ Δ و ل هـ لا يطابقُ Δ أ ب جـ؟ لماذا؟

والآنَ سنقومُ بدراسةِ أربعِ حالاتٍ مختلفةٍ لتطابقِ المثلثاتِ

الحالةُ الأولى:

يتطابقُ مثلثانِ إذا تطابقتْ زاويتانِ والضلعُ الواصلُ بينَ رأسيهما في المثلثِ الأوَّلِ معَ زاويتينِ والضلعِ الواصلِ بينَ رأسيهما في المثلثِ الثاني. (زاويةٌ، ضلعٌ، زاويةٌ)



الشكلُ (٨-٢٠)

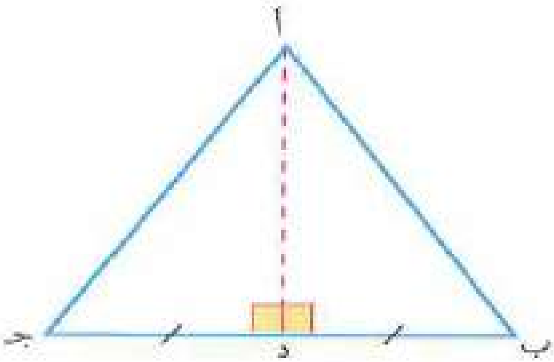
مثالٌ: (٨-٩):

في الشكلِ (٨-٢١)

Δ أ ب جـ متساوي الساقينِ

مساحةُ Δ أ ب د = ٢٤ سم٢

احسبْ مساحةَ Δ أ ب جـ



الشكلُ (٨-٢١)

الحلُّ:

ب د = جـ د   معطى بالشكلِ

ق ∡ أ ب د = ق ∡ أ جـ د   زوايا القاعدةِ لمثلثٍ متساوي الساقينِ

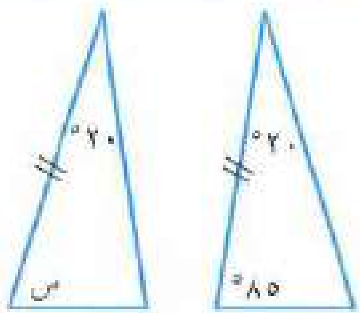
ق ∡ أ د ب = ق ∡ أ د جـ = ٩٠°   معطى بالشكلِ

إذًا: Δ أ ب د ≡ Δ أ جـ د   تطابقٌ (زاويةٌ، ضلعٌ، زاويةٌ)

ومنهُ، مساحةُ Δ أ ب جـ = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم٢

تدريبٌ ٨-٩

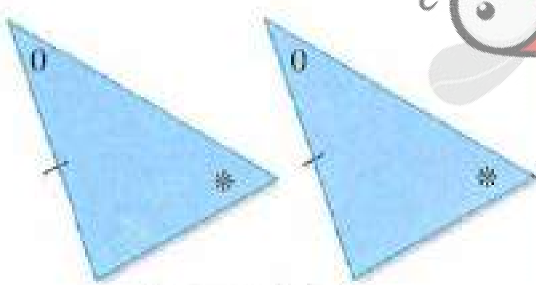
في الشكلِ (٨-٢٢) على فرضِ أنّ المثلثينِ متطابقانِ، جِدْ قياسَ الزاويةِ س



الشكلُ (٨-٢٢)

الحالةُ الثانيةُ:

يتطابقُ مثلثانِ إذا تطابقَ زاويتانِ متتاليتانِ والضلعُ المجاورُ لأحدهما في المثلثِ الأولِ معَ زاويتينِ متتاليتينِ والضلعِ المجاورِ لأحدهما في المثلثِ الثاني. (زاويةٌ، زاويةٌ، ضلعٌ)



الشكلُ (٨-٢٣)

مثالٌ (٨-١٠):

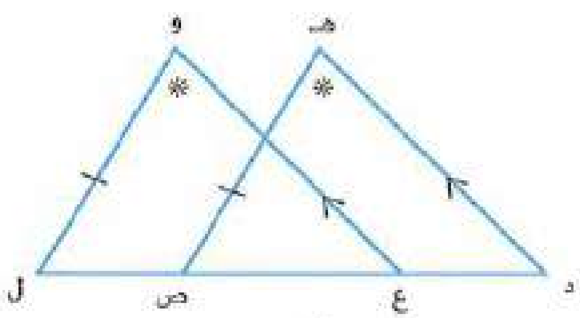
في الشكلِ (٨-٢٣)، إذا كانَ

$\overline{\text{و ل}}$ = $\overline{\text{هـ ص}}$

ق ∡ و = ق ∡ هـ

و ع // د هـ

بيّنْ أنّ Δ و ع ل = Δ هـ د ص



الشكلُ (٨-٢٤)

الحلُّ:

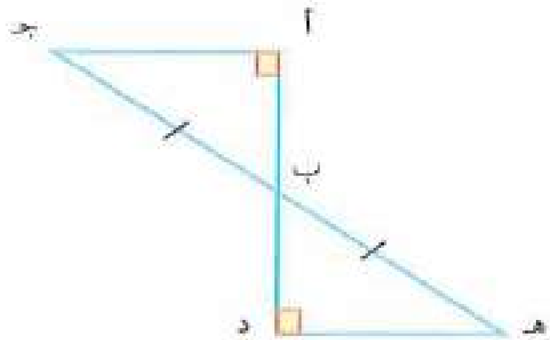
∢و = ∢هـ، و ل = هـ ص — من المعطياتِ

∢ع = ∢د — بالتناظرِ والتوازي

إذنْ Δ و ع ل ≡ Δ هـ د ص — زاويةٌ، زاويةٌ، ضلعٌ

تدريب (٨–١٠)

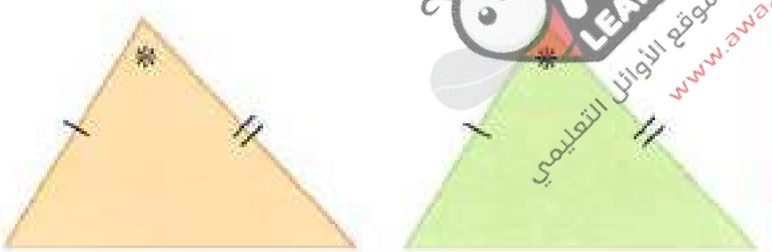
في الشكلِ (٨–٢٥)
أ د ⊥ أ جـ
أ د ⊥ د هـ
ب تنصّفُ جـ هـ،
ابحثْ في تطابقِ Δ أ ب جـ
و Δ د ب هـ



الشكلُ (٨–٢٥)

الحالةُ الثالثةُ:

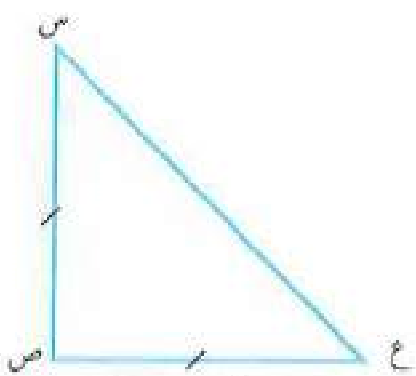
يتطابقُ مثلثانِ إذا كانَ الضلعانِ والزاويةُ المحصورةُ بينهما في أحدِ المثلثينِ تطابقُ نظيراتِها في المثلثِ الآخرِ. (ضلعٌ، زاويةٌ، ضلعٌ).



الشكلُ (٨–٢٦)

مثالٌ (٨–١١):

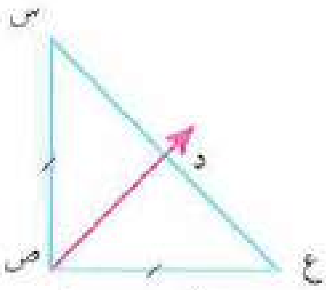
في المثلثِ س ص ع
س ص = ع ص
ارسمْ خطًّا يقسمُ Δ س ص ع
إلى مثلثينِ متطابقينِ، انظرِ الشكلَ (٨–٢٧/أ)



الشكلُ (٨–٢٧/أ)

الحلُّ:

Δ س ص ع متساوي الساقينِ، نرسمُ خطًّا مستقيمًا ص د، ينصِّفُ ∡ س ص ع حيثُ ص د محورُ تماثلٍ، انظرِ الشكلَ (٨–٢٧/ب).



الشكلُ (٨–٢٧/ب)

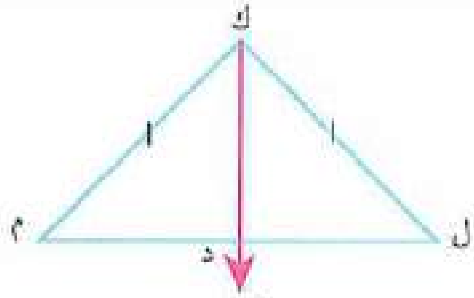
تدريب (٨–١١)

في الشكلِ (٨–٢٨)

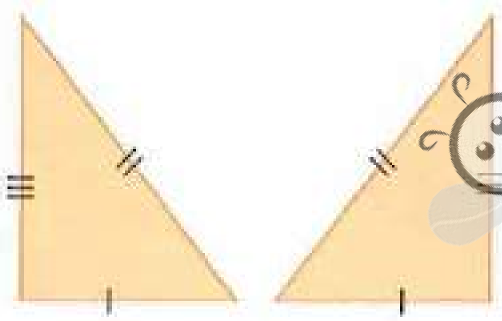
$\overleftrightarrow{\text{ك د}}$ ينصِّفُ ∡ م ك ل

$\overline{\text{ك ل}} = \overline{\text{ك م}}$

بيِّنْ أنَّ $\overline{\text{ل د}} = \overline{\text{د م}}$



الشكلُ (٨–٢٨)



الشكلُ (٨–٢٩)

الحالةُ الرابعةُ:

يتطابقُ مثلثانِ إذا كانتْ أضلاعُهما المتناظرةُ متطابقةً

(ضلعٌ، ضلعٌ، ضلعٌ)

مثالٌ (٨–١٢):

اعتمادًا على الشكلِ (٨–٣٠) إذا علمتَ أنَّ:

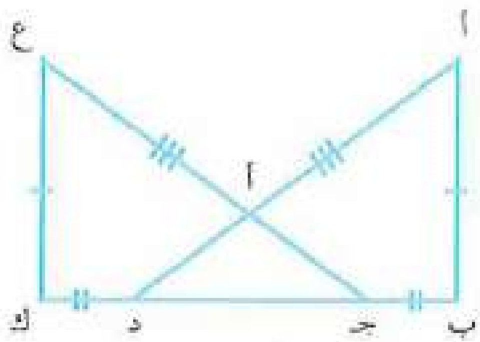
$\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ع ك}}$

$\overline{\text{ب جـ}} \equiv \overline{\text{ك د}}$

$\overline{\text{أ د}} \equiv \overline{\text{ع جـ}}$

بيِّنْ أنَّ:

Δ أ ب د ≡ Δ ع ك جـ



الشكلُ (٨–٣٠)

الحلُّ:

لاحظْ أنَّ

أ ب ≡ ع ك ، أ د ≡ ع جـ — من المعطياتِ

ب جـ ≡ ك د — من المعطياتِ

ب جـ + جـ د = ك د + جـ د — جـ د ضلعٌ مشتركٌ

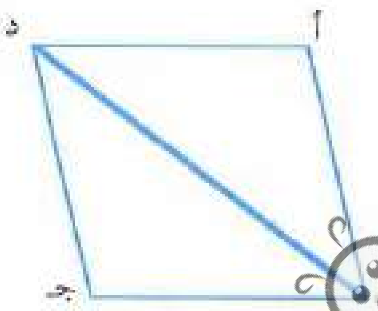
ب د ≡ ك جـ

إذنْ: Δ أ ب جـ ≡ Δ ع ك جـ — تطابقٌ بثلاثةِ أضلاعٍ

تدريبٌ (٨–١٢)

ليكنْ أ ب جـ د متوازي أضلاعٍ، بيِّنْ أنَّ المثلثينِ أ ب د، جـ د ب متكافئانِ

لاحظِ الشكلَ (٨–٣١)



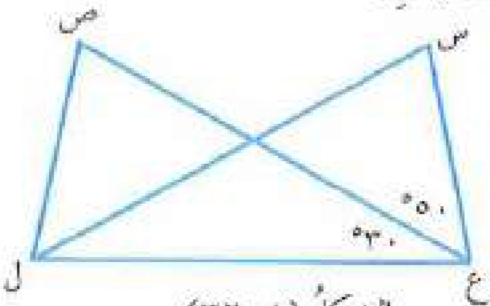
الشكلُ (٨–٣١)

١) في الشكلِ (٨-٣٢) المثلثانِ س ع ل، ص ع ل متطابقانِ،

وقياسُ ∢ ص ع ل = ٣٠°

قياسُ ∢ س ع ص = ٥٠°

احسبْ قياسَ ∢ ص ل ع



الشكلُ (٨-٣٢)

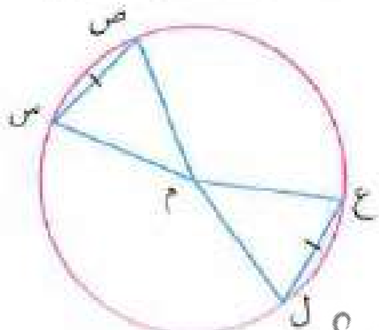
٢) إذا كانَ ب ك ر، س هـ و مثلثينِ، فيهما:

∢ ك ر ب ≅ ∢ هـ و س، ∢ ك ب ر ≅ ∢ هـ س و، ب ر ≅ س و فهلِ المثلثانِ متطابقانِ؟

٣) في الشكلِ (٨-٣٣)، ل ع ≅ س ص

بيّنْ أنَّ:

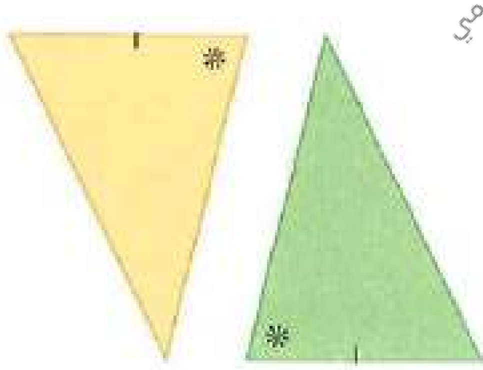
∢ ع م ل ≅ ∢ ص م س (حيثُ م مركزُ الدائرةِ)



الشكلُ (٨-٣٣)

٤) اعتمادًا على الشكلِ (٨-٣٤)،

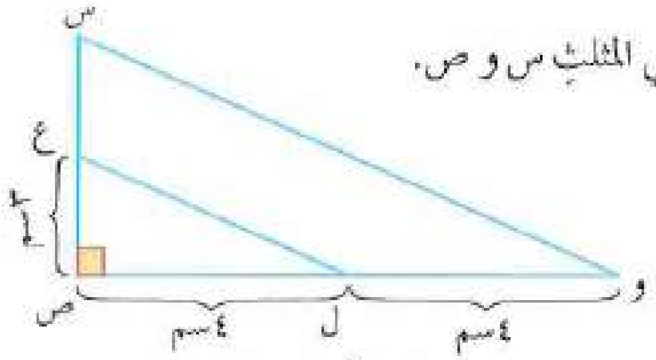
هلْ يمكنُكَ الحكمُ على تطابقِ المثلثينِ؟


الشكلُ (٨-٣٤)

٥) ارسمْ مثلثينِ متكافئينِ مساحةُ كلٍّ منهما تساوي (٦٠) سم^2، هلْ بالضرورةِ أنْ يكونا متطابقينِ؟

مراجعةٌ

١) في الشكلِ (٨–٣٥) احسبْ طولَ الوترِ في المثلثِ س و ص.



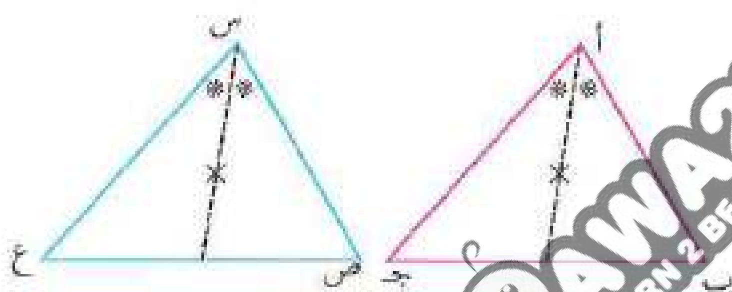
الشكلُ (٨–٣٥)

٢) تأملِ الشكلَ (٨–٣٦)

ب جـ = ص ع

بيّنْ أنَّ

Δ أ ب جـ $\equiv$ Δ س ص ع

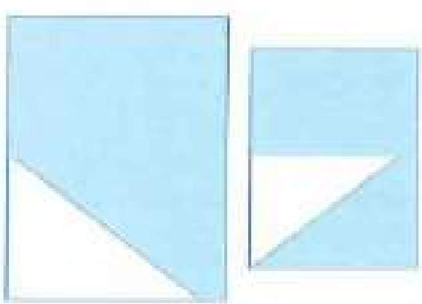


الشكلُ (٨–٣٦)

٣) عمودُ كهرباءٍ طولُهُ (٣٠) م، إذا كانَ طولُ ظلِّه في لحظةٍ ما (٤٠) م، فما طولُ عمودٍ آخر ملاصقٍ له طولُ ظلِّه (١٠) م؟

٤) هلِ المثلثانِ المتشابهانِ متطابقانِ؟ فسّرْ إجابتَكَ.

٥) انظرِ الشكلَ (٨–٣٦)، هلِ الشكلانِ متشابهانِ؟



الشكلُ (٨–٣٦)

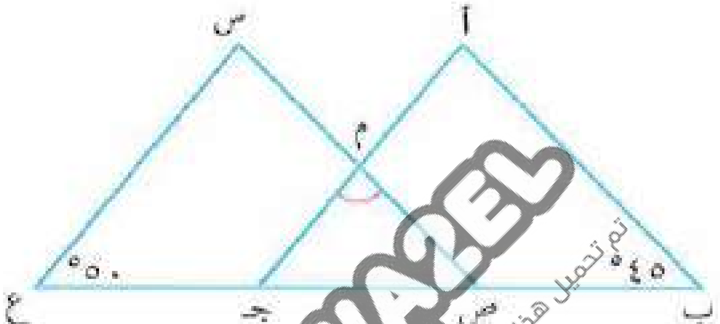
٦) أ ب جـ، س ع ص مثلثانِ متشابهانِ حيثُ أ ب، أ جـ متناظرانِ على الترتيبِ معَ س ع، س ص

أ) اذكرِ الزوايا المتناظرةَ في هذينِ المثلثينِ.

ب) احسبْ س ص إذا علمتَ أنَّ.

س ع = ١٠، أ جـ = ٢٤، أ ب = ٢٠

٧) في الشكلِ (٨–٣٧) المثلثانِ أ ب جـ، س ص ع متطابقانِ، حيثُ أنَّ قياسَ ∡ أ ب جـ = ٤٥°، ∡ س ع ص = ٥٠° جِدْ قياسَ ص م جـ ثمّ بيّنْ أنَّ Δ م ص جـ يشابهُ Δ أ ب جـ



الشكل (٨–٣٧)

اختبارٌ ذاتيٌ

١) ضعْ إشارةَ (✓) أمامَ العبارةِ الصحيحةِ، وإشارةَ (✗) أمامَ العبارةِ غيرِ الصحيحةِ فيما يأتي:

أ) الأشكالُ الهندسيةُ المتطابقةُ جميعُها متشابهةٌ.

ب) إذا تشابهَ مضلعانِ فإنَّ الأضلاعَ المتناظرةَ متناسبةٌ وقياساتِ الزوايا المتناظرةَ متساويةٌ.

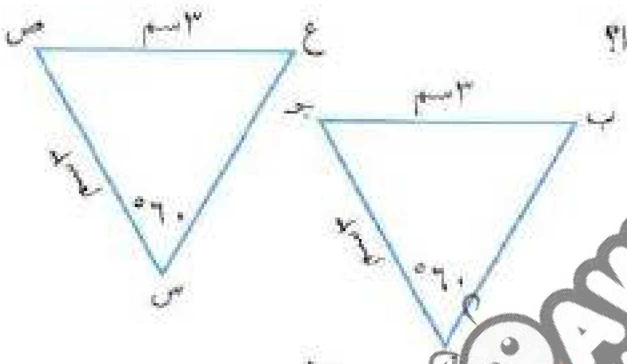
جـ) المضلعانِ المتشابهانِ متطابقانِ.

د) تُسمّى النسبةُ الثابتةُ بينَ أطوالِ الأضلاعِ المتناظرةِ في الأشكالِ المتشابهةِ بمقياسِ الرسمِ.

هـ) المضلعانِ المتشابهانِ معَ مضلعٍ ثالثٍ يكونانِ متشابهينِ.

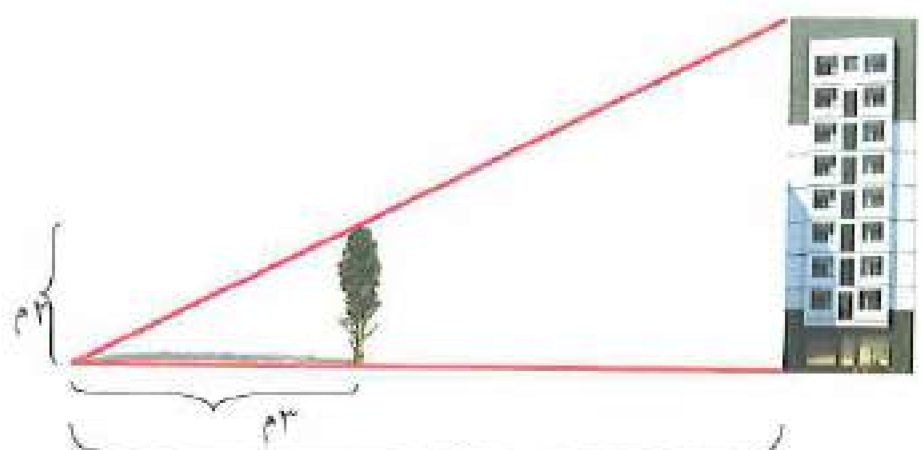
٢) هلِ المثلثانِ أ ب جـ، س ع ص متشابهانِ؟ لماذا؟

انظرِ الشكلَ (٨-٣٨)



الشكلُ (٨-٣٨)

٣) أرادَ سيفٌ حسابَ ارتفاعِ عمارةٍ، إذا كانَ طولُ ظلِّها ١٢ م، وطولُ شجرةٍ أمامَها ٢ م، وطولُ ظلِّ الشجرةِ ٣ م، فكَمْ سيكونُ ارتفاعُ تلكَ العمارةِ؟ انظرِ الشكلَ (٨-٣٩).

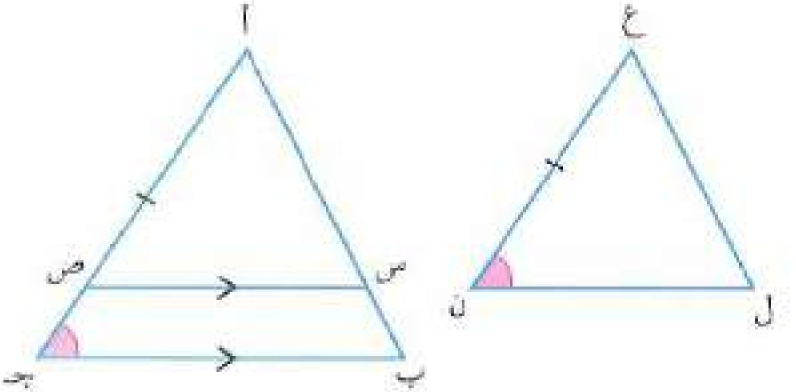


الشكلُ (٨-٣٩)

٤) في الشكل (٨-٤٠)، Δ أ ب جـ ~ Δ ع ل ن

أ ص = ع ن

س ص // ب جـ



الشكلُ (٨-٤٠)

أ) بيّنْ أنَّ: Δ أ س ص ≡ Δ ع ل ن

ب) استنتجْ أنَّ: $\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}}$

تمّ بحمدِ اللّهِ تعالى