"وقل رب زدني علما"

مدارس جوهرة عمان

أوراق عمل في

طرائق التكامل وتطبيقاته

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

٠٧٩٥٥٦٢٤٤٤

طرق التكامل

التكامل بالتعويض :

يستخدم في الحالات التالية .

① دائري زاويته غير خطية
← ص = الزاوية .

② أسي طبيعي الأس غير خطي .
← ص = الأس

③ المركب :
← ص = ما بين القوسين .

[1] جد التكاملات التالية :

١) $\int \text{٤س جا}(\text{س}^2+1)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$= \int \cancel{\text{٤س}}\ \text{جا ص} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$= \int \text{٢جا ص دص} = -\text{٢جتا ص} + \text{ج}$

$= -\text{٢جتا}(\text{س}^2+1) + \text{ج}$

٢) $\int (\text{٤س}+2)\,\text{هـ}^{\text{س}^2+\text{س}-5}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + \text{س} - 5$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}+1}$

$= \int 2\cancel{(\text{٢س}+1)}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢س}+1}}$

$= \int \text{٢هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \text{٢هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \text{٢هـ}^{\text{س}^2+\text{س}-5} + \text{ج}$

٣) $\int \text{س}^2\,\text{ظتا}^2(\text{س}^3-5)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 - 5$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^2}$

$= \int \cancel{\text{س}^2}\,\text{ظتا}^2\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$= \int \frac{1}{3}\,\text{ظتا}^2\text{ص دص}$

$= \int \frac{1}{3}(\text{قتا}^2\text{ص} - 1)\,\text{دص}$

$= \frac{1}{3}(-\text{ظتا ص} - \text{ص}) + \text{ج}$

$= \frac{1}{3}(-\text{ظتا}(\text{س}^3-5) - \text{س}^3 + 5) + \text{ج}$

٤) $\int \frac{1}{\text{س}^3}\,\text{هـ}^{7+\frac{1}{\text{س}^2}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 7 + \frac{1}{\text{س}^2}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-1\times\text{٢س}}{\text{س}^4}}$

$\text{دس} = \frac{-\text{س}^3}{2}\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}^3}}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{-\cancel{\text{س}^3}}{2}\,\text{دص}$

$= \int -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{هـ}^{7+\frac{1}{\text{س}^2}} + \text{ج}$

٥) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}^2(\text{٣هـ}^{\text{س}}+1)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{٣هـ}^{\text{س}} + 1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٣هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{جتا}^2\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$= \int \frac{1}{3}\,\text{جتا}^2\text{ص دص}$

$= \int \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(1 + \text{جتا٢ص})\,\text{دص}$

$= \frac{1}{6}\left(\text{ص} + \frac{1}{2}\,\text{جا٢ص}\right) + \text{ج}$

$= \frac{1}{6}\left(\text{٣هـ}^{\text{س}} + 1 + \frac{1}{2}\,\text{جا}2(\text{٣هـ}^{\text{س}}+1)\right) + \text{ج}$

٦) $\int_{٠}^{٢} \text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د س}$.

$= \int_{٠}^{٢} \text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \times \cancel{\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$٠ \leftarrow ٠$

$٨ \leftarrow ٢$

$= \int_{٠}^{٨} \cancel{\text{س}^{٢}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{٣\cancel{\text{س}^{٢}}}$

$= \frac{١}{٣}\ \text{هـ}^{\text{ص}} \Big]_{٠}^{٨}$

$= \frac{١}{٣}(\text{هـ}^{٨} - ١)$

$\boxed{٢}$ اذا كان:

$\int_{١}^{٥} (٣\text{ق}(\text{س}) + ٣)\ \text{د س} = ٢٦$

جد $\int_{٠}^{٢} \left(٤\text{س} + \text{ق}(٢\text{س}+١)\right) \text{د س}$

الحل:

$٣ \times \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\text{د س} + ٨ = ٢٦$

$\therefore \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = ٦$

$\int_{٠}^{٢} ٤\text{س}\ \text{د س} + \int_{٠}^{٢} \text{ق}(٢\text{س}+١)\ \text{د س}$

$\text{ص} = ٢\text{س} + ١$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢}$

$١ \leftarrow ٠$

$٥ \leftarrow ٢$

$= ٢\text{س}^{٢}\Big]_{٠}^{٢} + \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{ص}) \times \frac{\text{د ص}}{٢}$

$= ٨ + \frac{١}{٢} \times \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\ \text{د ص}$.

$= ٨ + \frac{١}{٢} \times ٦ = ١١$.

تدريب:

$\boxed{١}$ جد التكاملات التالية:

١) $\int \text{س}\ \text{ظا}^{٢}(\text{س}^{٢}+٥)\ \text{د س}$

٢) $\int \text{جا}٢\text{س}\ \text{هـ}^{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{د س}$.

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{\text{هـ}^{\frac{٢}{\text{س}}-١}}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$.

٤) $\int (٣\text{س}^{٢}-٤\text{س}+٢)\ \text{جتا}(\text{س}-١)^{٣}\ \text{د س}$

٥) $\int \text{هـ}^{\text{س}^{٤}+٣\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{د س}$.

٦) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{ظا س}}}{١+\text{جتا}٢\text{س}}\ \text{د س}$

$\boxed{٢}$ اذا كان:

$\int_{٠}^{١} \left(\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س}) - ٦\text{س}\right) \text{د س} = ٥$

جد: $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣\text{جتا}٢\text{س}\ \text{ق}(\text{جا}٢\text{س})\ \text{د س}$

$\boxed{٣}$ اذا كان:

$\int_{١}^{٤} (\text{ق}(\text{س}) - ١)\ \text{د س} = ٨$

$\int_{١}^{٢} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٤\text{س})\ \text{د س} = ١٦$

جد $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(٣\text{س}-٢)\ \text{د س}$.

تكامل ضرب اقترانين أو أكثر

في هذه الحالة يجب التخلص من عملية الضرب وذلك:

بالتوزيع أو المتطابقات.

وإذا تعذر ذلك

نستخدم التعويض أو الأجزاء.

قانون الأجزاء:

$\int ن\, دهـ = ن \times هـ - \int هـ\, دن$.

وإذا كان التكامل محدود فإن:

$\int_{أ}^{ب} ن\, دهـ = [ن \times هـ]_{أ}^{ب} - \int_{أ}^{ب} هـ\, دن$.

$\boxed{1}$ جد التكاملات التالية:

1) $\int 5س\, قا^2(س^2+3)\, دس$

$ص = س^2 + 3$

$= \int 5\cancel{س}\, قا^2ص \times \frac{دص}{2\cancel{س}}$ ، $دس = \frac{دص}{2س}$

$= \int \frac{5}{2}\, قا^2ص\, دص$

$= \frac{5}{2} ظاص + جـ = \frac{5}{2} ظا(س^2+3) + جـ$

2) $\int 2س\, جتا3س\, دس$.

الحل:

$ن = 2س \longrightarrow دن = 2\, دس$

$دهـ = جتا3س\, دس \longrightarrow هـ = \frac{1}{3} جا3س$

$= \frac{2}{3} س\, جا3س - \int \frac{2}{3} جا3س\, دس$

$= \frac{2}{3} س\, جا3س + \frac{2}{9} جتا3س + جـ$

3) $\int 8س\, هـ^{2س+3}$

$ن = 8س \longrightarrow دن = 8\, دس$

$دهـ = هـ^{2س+3} \longrightarrow هـ = \frac{هـ^{2س+3}}{2}$

$= 4س\, هـ^{2س+3} - \int 4هـ^{2س+3}\, دس$

$= 4س\, هـ^{2س+3} - 2هـ^{2س+3} + جـ$

4) $\int 4س\, جا^2س^2\, دس$.

$ص = س^2$

$= \int 4\cancel{س}\, جا^2ص \times \frac{دص}{\cancel{2س}}$ ، $دس = \frac{دص}{2س}$

$= \int 2\, جا^2ص\, دص$

$= \int \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}(1 - جتا2ص)\, دص$

$= ص - \frac{1}{2} جا2ص + جـ$

$= س^2 - \frac{1}{2} جا2س^2 + جـ$

5) $\int 4س\, جا^2س\, دس$

الحل:

$ن = 4س \longrightarrow دن = 4\, دس$

$دهـ = جا^2س\, دس$

$دهـ = \frac{1}{2}(1 - جتا2س)\, دس \longrightarrow هـ = \frac{1}{2}(س - \frac{جا2س}{2})$

$= 2س(س - \frac{جا2س}{2}) - \int 2(س - \frac{جا2س}{2})\, دس$

$= 2س^2 - س\, جا2س - 2(\frac{س^2}{2} + \frac{جتا2س}{4}) + جـ$

$= س^2 - س\, جا2س - \frac{1}{2} جتا2س + جـ$

٦) $\int$ جا^{5} س جتا س دس

ص = جا س ، دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

= $\int$ ص^{5} $\cancel{\text{جتا س}}$ × $\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

= $\frac{\text{ص}^6}{6}$ + جـ

= $\frac{1}{6}$ جا^{6} س + جـ

٧) $\int$ قا^{4} ٢س ظا ٢س دس

ص = قا ٢س ، دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢ قا ٢س ظا ٢س}}$

= $\int$ ص^{4} × $\cancel{\text{ظا ٢س}}$ × $\frac{\text{دص}}{\text{٢ قا ٢س } \cancel{\text{ظا ٢س}}}$

= $\int$ ص^{4} × $\frac{\text{دص}}{\text{٢ص}}$

= $\int \frac{1}{2}$ ص^{3} دص = $\frac{1}{8}$ ص^{4} + جـ = $\frac{1}{8}$ قا^{4} ٢س + جـ

٨) $\int$ ٩س^{2} هـ^{3س} دس

الحل: نستخدم طريقة الجدول

ن	دهـ
٩س^{2} (+)	هـ^{3س}
١٨س (−)	$\frac{1}{3}$ هـ^{3س}
١٨ (+)	$\frac{1}{9}$ هـ^{3س}
صفر	$\frac{1}{27}$ هـ^{3س}

= ٣س^{2} هـ^{3س} − ٢س هـ^{3س} + $\frac{2}{3}$ هـ^{3س} + جـ

٩) $\int$ جتا س (قا^{3} س + ٢س) دس

= $\int$ جتا س قا^{3} س دس + $\int$ ٢س جتا س دس

= $\int \frac{1}{\cancel{\text{قا س}}}$ × قا$^{\cancel{3}\,2}$ س دس + $\int$ ٢س جتا س دس

ن = ٢س ← دن = ٢ دس

دهـ = جتا س دس ← هـ = جا س

= $\int$ قا^{2} س دس + ٢س جا س − ٢ $\int$ جا س دس

= ظا س + ٢س جا س + ٢ جتا س + جـ

١٠) $\int$ جا ٢س (٦س + ٣ جتا^{2} س) دس

الحل:

= $\int$ ٦س جا ٢س دس + $\int$ ٣ جا ٢س جتا^{2} س دس   (جا ٢س ← ٢ جا س جتا س)

= $\int$ ٦س جا ٢س دس + $\int$ ٦ جا س جتا^{3} س دس

اجزاء   تعويض

ن = ٦س ← دن = ٦ دس

دهـ = جا ٢س دس ← هـ = −$\frac{1}{2}$ جتا ٢س

= −٣س جتا ٢س + $\int$ ٣ جتا ٢س دس

= −٣س جتا ٢س + $\frac{3}{2}$ جا ٢س

$\int$ ٦ جا س جتا^{3} س دس

ص = جتا س ، دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جا س}}$

= $\int$ ٦ $\cancel{\text{جا س}}$ × ص^{3} × $\frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جا س}}}$

= −$\frac{6}{4}$ ص^{4} = −$\frac{3}{2}$ جتا^{4} س

∴ −٣س جتا ٢س + $\frac{3}{2}$ جا ٢س − $\frac{3}{2}$ جتا^{4} س + جـ

$\boxed{2}$ اذا كان: $\int_{1}^{2}$ ن(س) دس = ٣

ن(١) = ٥ ، ن(٢) = ٨

جد: $\int_{2}^{1}$ س ن$'$(س) دس

ن = س ← دن = دس

دهـ = ن$'$(س) دس ← هـ = ن(س)

= س ن(س) $\Big]_{2}^{1}$ − $\int_{2}^{1}$ ن(س) دس

= ١×ن(١) − ٢ن(٢) + ٣

= ٥ − ١٦ + ٣ = −٨

تدريب :

[1] جد التكاملات التالية :

1) $\int ٣س \,\text{جا}(٢س+٥)\, دس$

2) $\int_{0}^{\pi} \text{ظا}س \,\text{جا}^{٥}س \, دس$

3) $\int (٤س+٦)\,\text{ظا}^{٢}(س^{٢}+٣س)\, دس$

4) $\int هـ^{٢س}\,(٤س + هـ^{٣س})\, دس$

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{(س+١)^{٢}}{\text{قتا}^{٢}س}\, دس$

6) $\int س\,(\text{جتا}\,س^{٢} - هـ^{٣س+١})\, دس$

7) $\int (س^{٣}+٢س)\, هـ^{س}\, دس$

8) $\int (٢س+١)\, هـ^{٢\text{لو}\,\text{جتا}س}\, دس$

[3] اذا كان : ق(-١) = ٢ ، ق(٣) = ٤

ق'(-١) = -٣ ، ق'(٣) = ٦

جد 1) $\int_{-1}^{3} (٣س-١)\, ق''(س)\, دس$

2) $\int_{0}^{2} س\, ق''(٢س-١)\, دس$

11) $\int س^{٥}\,\text{جتا}\,س^{٣}\, دس$

ص = $س^{٣}$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$= \int س^{٥}\,\text{جتا}ص \times \frac{دص}{\cancel{٣س^{٢}}}$

$= \int \frac{١}{٣} س^{٣}\,\text{جتا}ص\, دص$

$= \int \frac{١}{٣} ص\,\text{جتا}ص\, دص$

$ع = \frac{١}{٣}ص \longrightarrow دع = \frac{١}{٣}دص$

$دهـ = \text{جتا}ص\,دص \longrightarrow هـ = \text{جا}ص$

$= \frac{١}{٣}ص\,\text{جا}ص - \int \frac{١}{٣}\text{جا}ص\, دص$

$= \frac{١}{٣}ص\,\text{جا}ص + \frac{١}{٣}\text{جتا}ص + جـ$

$= \frac{١}{٣}س^{٣}\,\text{جا}س^{٣} + \frac{١}{٣}\text{جتا}س^{٣} + جـ$

12) $\int هـ^{\sqrt[3]{س}}\, دس$

$ص = \sqrt[3]{س}$

$ص^{٣} = س$

$٣ص^{٢}\, دص = دس$

$= \int هـ^{ص} \times ٣ص^{٢}\, دص$

$= \int ٣ص^{٢}\, هـ^{ص}\, دص$

ع		دهـ
$٣ص^{٢}$	+	$هـ^{ص}$
٦ص	−	$هـ^{ص}$
٦	+	$هـ^{ص}$
صفر		$هـ^{ص}$

$= ٣ص^{٢}هـ^{ص} - ٦ص\,هـ^{ص} + ٦هـ^{ص} + جـ$

$= ٣\sqrt[3]{س^{٢}}\,هـ^{\sqrt[3]{س}} - ٦\sqrt[3]{س}\,هـ^{\sqrt[3]{س}} + ٦هـ^{\sqrt[3]{س}} + جـ$

١٣) $\int$ جا٢س قتا²(جاس) دس

ص = جاس

= $\int$ جا٢س قتا²ص × $\frac{دص}{جتاس}$ ، دس = $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ ٢جاس ~~جتاس~~ قتا²ص × $\frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

= $\int$ ٢ص قتا²ص دص

ق = ٢ص ← دق = ٢دص

دهـ = قتا²ص دص ← هـ = −ظتاص

= −٢ص ظتاص + $\int$ ٢ظتاص دص

= −٢ص ظتاص + ٢لوهـ|جاص| + جـ

= −٢جاس ظتا(جاس) + ٢لوهـ|جا(جاس)| + جـ

١٤) $\int$ س⁵ هـ^(س²+١) دس

ص = س² + ١

= $\int$ س⁵ هـ^ص × $\frac{دص}{٢س}$ ، دس = $\frac{دص}{٢س}$

= $\int$ ½ س⁴ هـ^ص دص   لكن س² = ص − ١ ، س⁴ = (ص − ١)²

= $\int$ ½ (ص − ١)² هـ^ص دص

ق	دهـ
½ (ص − ١)²	هـ^ص
(ص − ١)	هـ^ص
١	هـ^ص
صفر	هـ^ص

= ½ (ص − ١)² هـ^ص − (ص − ١) هـ^ص + هـ^ص + جـ

= ½ س⁴ هـ^(س²+١) − س² هـ^(س²+١) + هـ^(س²+١) + جـ

١٥) $\int$ س ظا²$\sqrt{س^2+1}$ دس

ص = $\sqrt{س^2+1}$

ص² = س² + ١

$\cancel{2}$ص دص = $\cancel{2}$س دس

دس = $\frac{ص}{س}$ دص

= $\int$ $\cancel{س}$ ظا²ص × $\frac{ص}{\cancel{س}}$ دص

= $\int$ ص ظا²ص دص

ق = ص ← دق = دص

دهـ = ظا²ص دص

دهـ = (قا²ص − ١) دص ← هـ = ظاص − ص

= ص ظاص − ص² − $\int$(ظاص − ص) دص

= ص ظاص − ص² + لوهـ|جتاص| + $\frac{ص^2}{2}$ + جـ

= $\sqrt{س^2+1}$ ظا$\sqrt{س^2+1}$ − $\frac{س^2+1}{2}$ + لوهـ|جتا$\sqrt{س^2+1}$| + جـ

تدريب :

[1] جد التكاملات التالية :

١) $\int$ جا٢س هـ^(جتا²س) دس

٢) $\int$ جتا²$\sqrt{س}$ دس

٣) $\int$ هـ^(٤س) جا(هـ^س − ٢) دس

٤) $\int$ (س + ١)³ هـ^(س² + ٢س − ٣) دس

[2] اذا كان $\int_1^2$ ق(س) دس = ١٠ ، ق(١) = −١ ، ق(٢) = ٣

جد : $\int_0^1$ س⁵ قَ(س³ + ١) دس

١٦) ∫ ٢س جاس جا٣س دس

الحل:

ع = ٢س ⟵ دع = ٢ دس

ده = جا٣س جاس

ده = -½ (جتا٤س - جتا٢س) دس

∴ هـ = -½ (جا٤س/٤ - جا٢س/٢)

= -¼ س جا٤س + ½ س جا٢س + ∫ (جا٤س/٤ - جا٢س/٢) دس

= -¼ جا٤س + ½ جا٢س - ١/١٦ جتا٤س + ¼ جتا٢س + ج

١٧) ∫ (س جاس / جتا^٣س) دس

= ∫ س ظاس قا^٢س دس

ع = س ⟵ دع = دس

ده = ظاس قا^٢س دس

ص = قاس

دس = دص / (قاس ظاس)

ده = ~~ظاس~~ × ص^٢ × دص / (~~قاس ظاس~~)

ده = ص ⟵ هـ = ص^٢/٢ ⟵ هـ = ½ قا^٢س

= ½ س قا^٢س - ∫ ½ قا^٢س دس

= ½ س قا^٢س - ½ ظاس + ج

١٨) ∫ ٢س جاس^٢ جتا^٧س^٢ دس

ص = س^٢

دس = دص / ٢س

= ∫ ~~٢س~~ جاص جتا^٧ص × دص / ~~٢س~~

ع = جتاص

دص = دع / (-جاص)

= ∫ ~~جاص~~ × ع^٧ × دع / (~~-جاص~~)

= -١/٨ ع^٨ + ج = -١/٨ جتا^٨س^٢ + ج

١٩) ∫ من ٠ إلى π/٢ ظتاس √جاس دس

ص = √جاس

ص^٢ = جاس

٢ص دص = جتاس دس

دس = (٢ص / جتاس) دص

٠ ⟵ ٠

π/٢ ⟵ ١

= ∫ من ٠ إلى ١ ظتاس × ص × (٢ص / جتاس) دص

= ∫ من ٠ إلى ١ (~~جتاس~~ / جاس) × (٢ص^٢ / ~~جتاس~~) دص

= ∫ من ٠ إلى ١ (٢ص^٢ / ص^٢) دص = ∫ ٢ دص = ٢ × ١

= ٢

٢٠) ∫ من ٠ إلى π/٤ س (جتا^٤س - جا^٤س) دس

ع = س ⟵ دع = دس

ده = (جتا^٤س - جا^٤س) دس

ده = (جتا^٢س - جا^٢س) (~~جتا^٢س + جا^٢س~~) دس

ده = جتا٢س × ١

ده = جتا٢س ⟵ هـ = ½ جا٢س

= ½ س جا٢س]٠^(π/٤) - ∫ من ٠ إلى π/٤ ½ جا٢س دس

= π/٨ - ٠ + ¼ جتا٢س]٠^(π/٤)

= π/٨ + ¼ (٠ - ١) = π/٨ - ¼

= (π - ٢) / ٨

تدريب:

جد: ١) ∫ ٦س جا٣س جتا٣س دس

٢) ∫ س جتا^٢س قتا^٢س دس

تكامل القوس المرفوع لقوة .

اذا كان خطي ومنفرد نستخدم القاعدة

$$\int (\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}} \, \text{د}\text{س} = \frac{(\text{أ}\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)\times \text{أ}} + \text{جـ} \quad , \; \text{ن} \neq -1$$

وبغير ذلك : نتخلص منه (ان امكن) والا نستخدم التكامل بالتعويض .

جد التكاملات التالية :

1) $\int \text{س} (\text{جا}\text{س} + \text{جتا}\text{س})^2 \, \text{د}\text{س}$.

الحل : $= \int \text{س} (\text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جا}\text{س}\,\text{جتا}\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})$

$= \int \text{س} (1 + \text{جا}2\text{س}) \, \text{د}\text{س}$.

$= \int \text{س} \, \text{د}\text{س} + \int \text{س}\,\text{جا}2\text{س} \, \text{د}\text{س}$ (اجزاء)

$\text{م} = \text{س} \longrightarrow \text{د}\text{م} = \text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{هـ} = \text{جا}2\text{س}\,\text{د}\text{س} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{-\text{جتا}2\text{س}}{2}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{1}{2}\text{س}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{2}\int \text{جتا}2\text{س}\,\text{د}\text{س}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{1}{2}\text{س}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \text{جـ}$

2) $\int_0^{\pi} \text{س} \sqrt{1 + \text{جتا}\text{س}} \, \text{د}\text{س}$.

الحل: ← متطابقة

$= \int_0^{\pi} \text{س} \sqrt{2\,\text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{2}} \, \text{د}\text{س}$.

$= \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,\text{س} \left|\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}\right| \text{د}\text{س}$

$0 \le \text{س} \le \pi$

$0 \le \frac{\text{س}}{2} \le \frac{\pi}{2}$

$= \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,\text{س}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{2} \, \text{د}\text{س}$

$\text{م} = \sqrt{2}\,\text{س} \longrightarrow \text{د}\text{م} = \sqrt{2}\,\text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{هـ} = \text{جتا}\frac{\text{س}}{2}\,\text{د}\text{س} \longrightarrow \text{هـ} = 2\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2}$

$= 2\sqrt{2}\,\text{س}\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2} \Big]_0^{\pi} - \int 2\sqrt{2}\,\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\,\text{د}\text{س}$

$= 2\sqrt{2}\,\pi + 4\sqrt{2}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{2} \Big]_0^{\pi}$

$= 2\sqrt{2}\,\pi - 4\sqrt{2}$

3) $\int 2\text{س}^3 (\text{س}^2 + 7)^5 \, \text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 7$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{2\text{س}}$

$= \int 2\cancel{\text{س}^3}\,\text{س}^2 \times \text{ص}^5 \times \frac{\text{د}\text{ص}}{\cancel{2\text{س}}}$

$= \int \text{س}^2 \text{ص}^5 \, \text{د}\text{ص}$ لكن $\text{س}^2 = \text{ص} - 7$

$= \int (\text{ص} - 7)\,\text{ص}^5 \, \text{د}\text{ص}$

$= \int (\text{ص}^6 - 7\text{ص}^5) \, \text{د}\text{ص}$

$= \frac{\text{ص}^7}{7} - \frac{7}{6}\text{ص}^6 + \text{جـ}$

$= \frac{1}{7}(\text{س}^2 + 7)^7 - \frac{7}{6}(\text{س}^2 + 7)^6 + \text{جـ}$

4) $\int_{-1}^{2} \text{س} \sqrt{5 - \text{س}^2} \, \text{د}\text{س}$.

$\text{ص} = \sqrt{5 - \text{س}^2}$

$\text{ص}^2 = 5 - \text{س}^2$

$2\text{ص}\,\text{د}\text{ص} = -2\text{س}\,\text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{س} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}\,\text{د}\text{ص}$

$-1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 1$

$= \int_2^1 -\cancel{\text{س}} \times \text{ص} \times \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}} \, \text{د}\text{ص}$

$= \int_1^2 \text{ص}^2 \, \text{د}\text{ص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} \Big]_1^2$

$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

5) $\int \text{هـ}^{3\text{س}} (\text{هـ}^{\text{س}} - 2)^5 \, \text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} - 2$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{3\text{س}} \times \text{ص}^5 \times \frac{\text{د}\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{2\text{س}} \times \text{ص}^5 \, \text{د}\text{ص}$

لكن $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص} + 2$

$(\text{هـ}^{\text{س}})^2 = (\text{ص} + 2)^2$

$\text{هـ}^{2\text{س}} = \text{ص}^2 + 4\text{ص} + 4$

$= \int (\text{ص}^2 + 4\text{ص} + 4)\,\text{ص}^5 \, \text{د}\text{ص}$

$= \int (\text{ص}^7 + 4\text{ص}^6 + 4\text{ص}^5) \, \text{د}\text{ص}$

$= \frac{1}{8}\text{ص}^8 + \frac{4}{7}\text{ص}^7 + \frac{4}{6}\text{ص}^6 + \text{جـ}$

$= \frac{1}{8}(\text{هـ}^{\text{س}} - 2)^8 + \frac{4}{7}(\text{هـ}^{\text{س}} - 2)^7 + \frac{4}{6}(\text{هـ}^{\text{س}} - 2)^6 + \text{جـ}$

٦) $\int_{1}^{\text{هـ}^3} \frac{1}{\text{س}\sqrt{1+\text{لو}_\text{هـ}\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \sqrt{1+\text{لو}_\text{هـ}\text{س}}$

$\text{ص}^2 = 1+\text{لو}_\text{هـ}\text{س}$

$2\text{ص}\,\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{س}\,\text{دص}$

$1 \longleftarrow 1$

$\text{هـ}^3 \longleftarrow 2$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{\cancel{\text{س}}\times\cancel{\text{ص}}} \times 2\cancel{\text{ص}}\,\cancel{\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int_{1}^{2} 2\,\text{دص}$

$= 2(2-1) = 2$

٧) $\int \frac{1}{\text{س}^2-1}\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}$

$\text{ص}^2 = \frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$

$2\text{ص}\,\text{دص} = \frac{(\text{س}-1)\times 1 - (\text{س}+1)\times 1}{(\text{س}-1)^2}\,\text{دس}$

$2\text{ص}\,\text{دص} = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2}\,\text{دس}$

$\text{دس} = -\text{ص}(\text{س}-1)^2\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{\cancel{(\text{س}-1)}(\text{س}+1)} \times \text{ص} \times -\text{ص}(\text{س}-1)^{\cancel{2}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{-\text{ص}^2(\text{س}-1)}{\text{س}+1}\,\text{دص}$ لكن $\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1} = \frac{1}{\text{ص}^2}$

$= \int -\cancel{\text{ص}^2} \times \frac{1}{\cancel{\text{ص}^2}}\,\text{دص} = -\text{ص} + \text{ج}$

$= -\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} + \text{ج}$

٨) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(5+\sqrt{\text{س}})^3}\,\text{دس}$

$\text{ص} = 5+\sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}-5 = \sqrt{\text{س}}$

$(\text{ص}-5)^2 = \text{س}$

$\text{دس} = 2(\text{ص}-5)\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\times\text{ص}^3} \times 2(\text{ص}-5)\,\text{دص}$

لكن $\sqrt{\text{س}} = \text{ص}-5$

$= \int \frac{1}{\cancel{(\text{ص}-5)}\times\text{ص}^3} \times 2\cancel{(\text{ص}-5)}\,\text{دص}$

$= \int 2\text{ص}^{-3}\,\text{دص} = -\text{ص}^{-2} + \text{ج}$

$= -(5+\sqrt{\text{س}})^{-2} + \text{ج}$

٩) $\int \text{جتا}^3\text{س}\,(1+\text{جا}\text{س})^5\,\text{دس}$

$\text{ص} = 1+\text{جا}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا}\text{س}}$

$= \int \text{جتا}^{\cancel{3}\,2}\text{س} \times \text{ص}^5 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا}\text{س}}}$

$= \int \text{جتا}^2\text{س} \times \text{ص}^5\,\text{دص}$

لكن $\text{جا}\text{س} = \text{ص}-1$

$\text{جا}^2\text{س} = (\text{ص}-1)^2$

$= \text{ص}^2 - 2\text{ص} + 1$

$= \int (1-\text{جا}^2\text{س})\,\text{ص}^5\,\text{دص}$

$= \int (1-(\text{ص}^2-2\text{ص}+1))\,\text{ص}^5\,\text{دص}$

$= \int (2\text{ص}-\text{ص}^2) \times \text{ص}^5\,\text{دص}$

$= \int (2\text{ص}^6 - \text{ص}^7)\,\text{دص}$

$= \frac{2}{7}\text{ص}^7 - \frac{\text{ص}^8}{8} + \text{ج}$

$= \frac{2}{7}(1+\text{جا}\text{س})^7 - \frac{1}{8}(1+\text{جا}\text{س})^8 + \text{ج}$

١٠) $\int (\text{س}-1)^{3}(\text{س}^{2}-2\text{س}+5)^{7}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^{2}-2\text{س}+5$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}-2}$

$= \int (\text{س}-1)^{\cancel{3}\,2} \times \text{ص}^{7} \times \frac{\text{د ص}}{2\cancel{(\text{س}-1)}}$

$= \int \frac{1}{2}(\text{س}^{2}-2\text{س}+1)\,\text{ص}^{7}\,\text{د ص}$

لكن $\text{س}^{2}-2\text{س} = \text{ص}-5$

$= \int \frac{1}{2}(\text{ص}-4)\,\text{ص}^{7}\,\text{د ص}$

$= \int \frac{1}{2}(\text{ص}^{8}-4\text{ص}^{7})\,\text{د ص}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^{9}}{9}-\frac{\text{ص}^{8}}{2}\right)+\text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\text{س}^{2}-2\text{س}+5)^{9}}{9}-\frac{(\text{س}^{2}-2\text{س}+5)^{8}}{2}\right)+\text{جـ}$

١١) $\int (\text{س}^{2}-2\text{س})\sqrt{\text{س}+3}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+3}$

$\text{ص}^{2} = \text{س}+3$

$2\text{ص}\,\text{د ص} = \text{د س}$

$= \int (\text{س}^{2}-2\text{س})\,\text{ص} \times 2\text{ص}\,\text{د ص}$

$= \int (\text{س}^{2}-2\text{س}) \times 2\text{ص}^{2}\,\text{د ص}$

لكن $\text{س} = \text{ص}^{2}-3$

$= \int \left((\text{ص}^{2}-3)^{2}-2(\text{ص}^{2}-3)\right) \times 2\text{ص}^{2}\,\text{د ص}$

$= \int (\text{ص}^{4}-6\text{ص}^{2}+9-2\text{ص}^{2}+6) \times 2\text{ص}^{2}\,\text{د ص}$

$= \int (\text{ص}^{4}-8\text{ص}^{2}+15) \times 2\text{ص}^{2}\,\text{د ص}$

$= \int 2(\text{ص}^{6}-8\text{ص}^{4}+15\text{ص}^{2})\,\text{د ص}$

$= 2\left(\frac{\text{ص}^{7}}{7}-\frac{8}{5}\text{ص}^{5}+5\text{ص}^{3}\right)+\text{جـ}$

$= 3\left(\frac{\sqrt{(\text{س}+3)^{7}}}{7}-\frac{8}{5}\sqrt{(\text{س}+3)^{5}}+5\sqrt{(\text{س}+3)^{3}}\right)+\text{جـ}$

تدريب ١ جد التكاملات التالية.

١) $\int \text{س}^{8}(\text{س}^{3}-2)^{4}\,\text{د س}$

٢) $\int \text{جاس}\,(1+\text{جتا}2\text{س})^{3}\,\text{د س}$

٣) $\int_{-1}^{0} \text{س}^{5}\sqrt{\text{س}^{3}+1}\,\text{د س}$.

٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}2\text{س}}{\sqrt{1+\text{جتا}^{2}\text{س}}}\,\text{د س}$.

٥) $\int \frac{\text{س}^{3}}{(\text{س}+1)^{5}}\,\text{د س}$.

٦) $\int \text{جتا}2\text{س}\,(\text{جاس}+\text{جتاس})^{5}\,\text{د س}$

٧) $\int_{1}^{4} \sqrt{\frac{(\sqrt{\text{س}}-1)^{3}}{\text{س}}}\,\text{د س}$

٨) $\int \frac{\text{قا}^{4}\text{س}}{\sqrt{1+\text{ظاس}}}\,\text{د س}$.

١٢) $\int \frac{2\text{س}^{2}+\sqrt{1-\text{س}^{2}}}{\text{س}\sqrt{1-\text{س}^{2}}}\,\text{د س}$

$= \int \left(\frac{2\text{س}^{\cancel{2}}}{\cancel{\text{س}}\sqrt{1-\text{س}^{2}}}+\frac{\cancel{\sqrt{1-\text{س}^{2}}}\;1}{\text{س}\cancel{\sqrt{1-\text{س}^{2}}}}\right)\text{د س}$

$= \int \frac{2\text{س}}{\sqrt{1-\text{س}^{2}}}\,\text{د س} + \int \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\text{س}^{2}}$

$\text{ص}^{2} = 1-\text{س}^{2}$

$2\text{ص}\,\text{د ص} = -2\text{س}\,\text{د س} \leftarrow \text{د س} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}\,\text{د ص}$

$= \int \frac{-2\cancel{س}}{\cancel{ص}} \times \frac{\cancel{ص}}{\cancel{س}} \, دص + لو|س|$

$= \int -2 \, دص + لو|س|$

$= -2ص + لو|س| + جـ$

$= -2\sqrt{س^2-1} + لو|س| + جـ$

١٣) $\int (س^5 + 2س)^3 \, دس$

$= \int (س(س^4+2))^3 \, دس$

$= \int س^3 (س^4+2)^3 \, دس$

$= \int \cancel{س^3} \times ص^3 \times \frac{دص}{4\cancel{س^3}}$ ، $ص = س^4 + 2$ ، $دس = \frac{دص}{4س^3}$

$= \frac{1}{16} ص^4 + جـ$

$= \frac{1}{16} (س^4+2)^4 + جـ$

١٤) $\int \sqrt[3]{3س^4 - س^3} \, دس$

الحل:

$= \int \sqrt[3]{س^3(3س-1)} \, دس$

$= \int س \sqrt[3]{3س-1} \, دس$

$ص = \sqrt[3]{3س-1}$

$ص^3 = 3س - 1$

$3ص^2 \, دص = 3 \, دس$

$دس = ص^2 \, دص$

$= \int س \times ص \times ص^2 \, دص$

لكن $س = \frac{ص^3+1}{3}$

$= \int \frac{1}{3}(ص^3+1) \times ص^3 \, دص$

$= \int \frac{1}{3}(ص^6 + ص^3) \, دص$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{ص^7}{7} + \frac{ص^4}{4}\right) + جـ$

١٥) $\int_{-1}^{0} س^4 \sqrt{س^5 + س^2} \, دس$

$= \int_{-1}^{0} س^4 \sqrt{س^2(س^3+1)} \, دس$

$= \int_{-1}^{0} س^4 |س| \sqrt{س^3+1} \, دس$

$= \int_{-1}^{0} -س^5 \sqrt{س^3+1} \, دس$

$= \int -س^3 \times ص \times \cancel{س^2} \times \frac{2ص}{3\cancel{س^2}} \, دص$ ، $ص = \sqrt{س^3+1}$ ، $ص^2 = س^3 + 1$ ، $2ص \, دص = 3س^2 \, دس$ ، $دس = \frac{2ص}{3س^2} \, دص$ ، $-1 \leftarrow 0$ ، $0 \leftarrow 1$

$= \int_{0}^{1} -\frac{2}{3} س^3 ص^2 \, دص$

$= \int_{0}^{1} -\frac{2}{3} (ص^2-1) ص^2 \, دص$

$= \int_{0}^{1} -\frac{2}{3} (ص^4 - ص^2) \, دص$

$= -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{ص^5}{5} - \frac{ص^3}{3} \right) \right]_{0}^{1}$

$= -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{45}$

١٦) $\int س^{13} \left(\frac{2}{س^2} + 1 \right)^5 \, دس$

$= \int س^{13} \times \left(\frac{س^2+2}{س^2} \right)^5 \, دس$

$= \int س^{13} \times \frac{(س^2+2)^5}{س^{10}} \, دس$

$= \int س^3 (س^2+2)^5 \, دس$

$ص = س^2 + 2$ ، $دس = \frac{دص}{2س}$

$= \int \cancel{س^3} \times ص^5 \times \frac{دص}{2\cancel{س}}$

$= \int \frac{1}{2} (ص-2) \times ص^5 \, دص$

$= \int \frac{1}{2} (ص^6 - 2ص^5) \, دص$

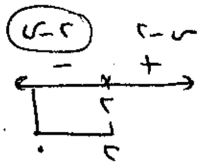
$= \frac{1}{2} \left(\frac{ص^7}{7} - \frac{ص^6}{3} \right) + جـ$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{(س^2+2)^7}{7} - \frac{(س^2+2)^6}{3} \right) + جـ$

١٧) $\int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3 - 8}{\sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4}}\, \text{دس}$

الحل

$= \int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3 - 8}{\sqrt{(\text{س} - 2)^2}}\, \text{دس}$



$= \int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3 - 8}{|\text{س} - 2|}\, \text{دس}$

$= \int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3 - 8}{2 - \text{س}}\, \text{دس}$

$= \int_{0}^{2} \frac{\cancel{(\text{س} - 2)}^{-1}(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)}{\cancel{2 - \text{س}}}\, \text{دس}$

$= -\left[\left(\frac{\text{س}^3}{3} + \text{س}^2 + 4\text{س}\right)\right]_{0}^{2}$

$= -\left(\frac{8}{3} + 4 + 8\right) = -\frac{44}{3}$.

١٨) $\int (6\text{س}^5 - \text{س}^4)(3\text{س} - 1)^4\, \text{دس}$

الحل :

$= \int \text{س}^4 (6\text{س} - 1)(3\text{س} - 1)^4\, \text{دس}$

$= \int (6\text{س} - 1) \times \left((\text{س})(3\text{س} - 1)\right)^4\, \text{دس}$

$= \int (6\text{س} - 1)(3\text{س}^2 - \text{س})^4\, \text{دس}$

$\text{ص} = 3\text{س}^2 - \text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{6\text{س} - 1}$

$= \int \cancel{(6\text{س} - 1)} \times \text{ص}^4 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{6\text{س} - 1}}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{5}(3\text{س}^2 - \text{س})^5 + \text{جـ}$

١٩) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{جاس جتا}^3\text{س} + \text{جتا}^4\text{س}}}\, \text{دس}$

الحل

$= \int \frac{1}{\sqrt{\text{جتا}^4\text{س}\,(\text{ظاس} + 1)}}\, \text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}\sqrt{\text{ظاس} + 1}}\, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\sqrt{\text{ظاس} + 1}}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{ظاس} + 1}$

$\text{ص}^2 = \text{ظاس} + 1$

$2\text{ص دص} = \text{قا}^2\text{س دس}$

$\text{دس} = \frac{2\text{ص}}{\text{قا}^2\text{س}}\, \text{دص}$

$= \int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{2\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}\, \text{دص}$

$= \int 2\, \text{دص}$

$= 2\text{ص} + \text{جـ} = 2\sqrt{\text{ظاس} + 1} + \text{جـ}$

٢٠) $\int \sqrt{1 + \text{س}^{-\frac{2}{3}}}\, \text{دس}$ ، $\text{س} > 0$.

الحل

$= \int \sqrt{\text{س}^{-\frac{2}{3}}(\text{س}^{\frac{2}{3}} + 1)}\, \text{دس}$

$= \int \left|\text{س}^{-\frac{1}{3}}\right| \sqrt{\text{س}^{\frac{2}{3}} + 1}\, \text{دس}$

لكن $\text{س} > 0$.

$= \int \text{س}^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\text{س}^{\frac{2}{3}} + 1}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{\frac{2}{3}} + 1}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^{\frac{2}{3}} + 1$

$2\text{ص دص} = \frac{2}{3}\text{س}^{-\frac{1}{3}}\, \text{دس}$

$\text{دس} = 3\text{ص س}^{\frac{1}{3}}\, \text{دص}$

$= \int \cancel{\text{س}^{-\frac{1}{3}}} \times \text{ص} \times 3\cancel{\text{س}^{\frac{1}{3}}}\, \text{ص دص}$.

$= \int 3\text{ص}^2\, \text{دص}$

$= \text{ص}^3 + \text{جـ}$

$= \left(\sqrt{\text{س}^{\frac{2}{3}} + 1}\right)^3 + \text{جـ}$

٢١) $\int \sqrt{\frac{4س-1}{س^5}}\ دس$

$= \int \sqrt{4س^{-4} - س^{-5}}\ دس$

$= \int \sqrt{س^{-4}(4 - س^{-1})}\ دس$

$= \int س^{-2} \sqrt{4 - س^{-1}}\ دس$

$ص = \sqrt{4 - س^{-1}}$

$ص^2 = 4 - س^{-1}$

$2ص\ دص = س^{-2}\ دس$

$دس = \frac{2ص\ دص}{س^{-2}}$

$= \int \cancel{س^{-2}} \times ص \times \frac{2ص\ دص}{\cancel{س^{-2}}}$

$= \int 2ص^2\ دص$

$= \frac{2}{3} ص^3 + ج$

$= \frac{2}{3} \left(\sqrt{4 - س^{-1}}\right)^3 + ج$

٢٢) $\int \frac{(س+1)^9}{س^{11}}\ دس$

الحل:

$= \int \frac{(س(1+س^{-1}))^9}{س^{11}}\ دس$

$= \int \frac{س^9 (1+س^{-1})^9}{س^{11}}\ دس$

$= \int س^{-2} (1+س^{-1})^9\ دس$

$ص = 1 + س^{-1}$

$دس = \frac{دص}{-س^{-2}}$

$= \int \cancel{س^{-2}} \times ص^9 \times \frac{دص}{-\cancel{س^{-2}}}$

$= \int -ص^9\ دص$

$= -\frac{ص^{10}}{10} + ج$

$= \frac{-1}{10} (1+س^{-1})^{10} + ج$

٢٣) $\int \frac{س^7}{(س^3 - 2س)^4}\ دس$

الحل:

$= \int \frac{س^7}{((س(س^2-2))^4}\ دس$

$= \int \frac{س^7}{س^4 (س^2-2)^4}\ دس$

$= \int س^3 (س^2-2)^{-4}\ دس$

$ص = س^2 - 2$

$دس = \frac{دص}{2س}$

$= \int \cancel{س^3}^{2} \times ص^{-4} \times \frac{دص}{2\cancel{س}}$

$= \int \frac{1}{2} (ص+2)\ ص^{-4}\ دص$

$= \int \frac{1}{2} (ص^{-3} + 2ص^{-4})\ دص$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{ص^{-2}}{-2} - \frac{2}{3} ص^{-3}\right) + ج$

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} (س^2-2)^{-2} - \frac{2}{3} (س^2-2)^{-3}\right) + ج$

تدريب: جد التكاملات التالية:

١) $\int س^6 \sqrt{س - \frac{3}{س^4}}\ دس$

٢) $\int_{1}^{\sqrt{3}} (س^3 - س)^3\ دس$

٣) $\int \frac{(2س+1)^5}{س^7}\ دس$

٤) $\int \sqrt[3]{س^{\frac{-3}{4}} + 1}\ دس$

٥) $\int \frac{1}{(3جاس + جتاس)^2}\ دس$

٦) $\int \frac{\sqrt{س^4 + س}}{س^6}\ دس$

٧) $\int_{0}^{2} \frac{3س^3}{\sqrt{س^5 + س^2}}\ دس$

٢٤) أثبت أن :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن+2}} \, ء س = \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} \text{ ، ن فردي} \\ \frac{1}{ن+1} \text{ ، ن زوجي .} \end{cases}$$

البرهان :

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\left(س(1-س^{-1})\right)^{ن}}{س^{ن+2}} \, ء س$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\cancel{س^{ن}}(1-س^{-1})^{ن}}{\cancel{س^{ن}} \times س^{2}} \, ء س$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} س^{-2}(1-س^{-1})^{ن} \, ء س$$

$ص = 1 - س^{-1}$

$\frac{ءص}{س^{-2}} = ء س$

$$= \int_{-1}^{0} \cancel{س^{-2}} \times ص^{ن} \times \frac{ء ص}{\cancel{س^{-2}}}$$

$\frac{1}{2} \longleftarrow -1$

$1 \longleftarrow 0$

$$= \left[\frac{ص^{ن+1}}{ن+1}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} = - \frac{(-1)^{ن} \times -1}{ن+1}$$

$$= \frac{(-1)^{ن}}{ن+1} = \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} \text{ ، ن فردي} \\ \frac{1}{ن+1} \text{ ، ن زوجي .} \end{cases}$$

تكامل القسمة

اولاً : $\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}} \, ء س$

← نستخدم القاعدة اذا كان البسط مشتق للمقام

واذا تعذر ذلك نستخدم :

الكسور الجزئية أو القسمة الطويلة

حسب درجة كل من البسط والمقام .

(أ) التكامل بالكسور الجزئية :

← يستخدم لإيجاد $\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ بالشروط التالية :

١) درجة البسط < درجة المقام

٢) المقام تربيعي ويحلل الى عاملين مختلفين .

جد التكاملات التالية :

١) $\int \frac{5س}{س^{2}-3س-4} \, ء س$.

$$= \int \frac{5س}{(س-4)(س+1)} \, ء س$$

$$= \int \frac{أ}{س-4} \, ء س + \int \frac{ب}{س+1} \, ء س \, .$$

$س = 4 \longleftarrow أ = \frac{20}{5} = 4$

$س = -1 \longleftarrow ب = \frac{-5}{-5} = 1$

$$= \int \frac{4}{س-4} \, ء س + \int \frac{1}{س+1} \, ء س$$

$$= 4 \, لو_{هـ}|س-4| + لو_{هـ}|س+1| + جـ$$

٢) $\int_{0}^{3} \frac{2س+3}{س^2-3س+2}\, دس$

$= \int_{0}^{3} \frac{2س+3}{(س-1)(س-2)}\, دس$

$= \int_{0}^{3} \frac{أ}{س-2}\, دس + \int_{0}^{3} \frac{ب}{س-1}\, دس$

$س=2 \longleftarrow أ = \frac{7}{1} = 7$

$س=1 \longleftarrow ب = \frac{5}{-1} = -5$

$= \int_{0}^{3} \frac{7}{س-2}\, دس + \int_{0}^{3} \frac{-5}{س-1}\, دس$

$= 7\, لو_هـ|س-2| \Big]_{0}^{3} - 5\, لو_هـ|س-1| \Big]_{0}^{3}$

$= 7(\cdot - لو_هـ 2) - 5(لو_هـ 2 - \cdot)$

$= -7\, لو_هـ 2 - 5\, لو_هـ 2 = -12\, لو_هـ 2$

٣) $\int \frac{دس}{3س^2+5س-12}$

$= \int \frac{1}{(3س-4)(س+3)}\, دس$

$= \int \frac{أ}{3س-4}\, دس + \int \frac{ب}{س+3}\, دس$

$س = \frac{4}{3} \longleftarrow أ = \frac{1}{\frac{4}{3}+3} = \frac{3}{13}$

$س=-3 \longleftarrow ب = \frac{-1}{13}$

$= \int \frac{\frac{3}{13}}{3س-4}\, دس + \int \frac{\frac{-1}{13}}{س+3}\, دس$

$= \frac{1}{13}\, لو_هـ|3س-4| - \frac{1}{13}\, لو_هـ|س+3| + جـ$

٤) $\int_{-1}^{2} \frac{12}{4س^2-4س+1}\, دس$

$= \int_{-1}^{2} \frac{12}{(2س-1)(2س-1)}\, دس$

$= \int_{-1}^{2} 12(2س-1)^{-2}\, دس$

$= 12 \times \frac{(2س-1)^{-1}}{-1 \times 2} \Big]_{-1}^{2}$

$= \frac{-6}{2س-1} \Big]_{-1}^{2} = -2 - 2 = -4$

٥) $\int \frac{س-3}{س^2-4س+4}\, دس$

$= \int \frac{س-3}{(س-2)(س-2)}\, دس$

$= \int (س-3)(س-2)^{-2}\, دس$

$= \int (س-3)\, ص^{-2}\, دص \qquad \{ ص = س-2 ،\ دس = دص$

$= \int (ص-1)\, ص^{-2}\, دص$

$= \int \left(\frac{1}{ص} - ص^{-2}\right) دص$

$= لو_هـ|ص| + ص^{-1} + جـ$

$= لو_هـ|س-2| + (س-2)^{-1} + جـ$

تدريب : جد التكاملات التالية.

١) $\int_{-1}^{2} \frac{5}{س^2-س-6}\, دس$

٢) $\int \frac{3س+2}{3س^2-8س}\, دس$

٣) $\int \frac{س+2}{(س+3)^2+4س}\, دس$

٤) $\int_{1}^{3} \frac{|س-4|}{8س-س^2-12}\, دس$

٥) $\int \frac{6س}{6س^2-س-2}\, دس$

<u>تذكر أنه</u> : ان لم يكن المقام تربيعيا فإننا نحلل ونستخدم التعويض أو القاعدة

٦) $\int \frac{1}{س^{3} + س} \, د س$.

$= \int \frac{1}{س(س^{2}+1)} \, د س$ $\quad ص = س^{2}$

$= \int \frac{1}{س(ص+1)} \times \frac{دص}{2س}$ $\quad د س = \frac{دص}{2س}$

$= \int \frac{1}{2س^{2}(ص+1)} \, دص$ لكن $س^{2} = ص$

$= \int \frac{1}{2ص(ص+1)} \, دص$

$= \int \frac{أ}{2ص} \, دص + \int \frac{ب}{ص+1} \, دص$.

$ص = 0 \longrightarrow أ = 1$ ، $ص = -1 \longrightarrow ب = \frac{1}{2}$

$= \int \frac{1}{2ص} \, دص + \int \frac{-\frac{1}{2}}{ص+1} \, دص$

$= \frac{1}{2} لو_هـ |2ص| - \frac{1}{2} لو_هـ |ص+1| + جـ$

$= \frac{1}{2} لو_هـ |2س^{2}| - \frac{1}{2} لو_هـ |س^{2}+1| + جـ$

طريقة أخرى :

$\int \frac{1}{س^{3}(1+س^{-2})} \, د س$

$= \int \frac{س^{-3}}{1+س^{-2}} \, د س$

$\longrightarrow -2س^{-3}$

$= -\frac{1}{2} لو_هـ |1+س^{-2}| + جـ$.

ملاحظة :

لا يمكن اعتمادها في كل الأسئلة من هذا النوع

٧) $\int \frac{س^{3}}{2س^{4} + س^{8}} \, د س$

الحل :

$= \int \frac{س^{3}}{س^{8}(س^{-4}+1)} \, د س$

$= \int \frac{س^{-5}}{س^{-4}+1} \, د س$

$\longrightarrow -4س^{-5}$

$= -\frac{1}{4} لو_هـ |س^{-4}+1| + جـ$

٨) $\int \frac{6س^{2}}{س^{6} - 9} \, د س$

$= \int \frac{6س^{2}}{(س^{3}-3)(س^{3}+3)} \, د س$ $\quad ص = س^{3}$

$= \int \frac{\cancel{6س^{2}}}{(ص-3)(ص+3)} \times \frac{دص}{\cancel{3س^{2}}}$ $\quad د س = \frac{دص}{3س^{2}}$

$= \int \frac{2}{(ص-3)(ص+3)} \, دص$

$= \int \frac{أ}{ص-3} \, دص + \int \frac{ب}{ص+3} \, دص$

$ص = 3 \longrightarrow أ = \frac{1}{3}$

$ص = -3 \longrightarrow ب = -\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} لو_هـ |ص-3| - \frac{1}{3} لو_هـ |ص+3| + جـ$

$= \frac{1}{3} لو_هـ |س^{3}-3| - \frac{1}{3} لو_هـ |س^{3}+3| + جـ$

تدريب : جد التكاملات التالية .

١) $\int \frac{1}{س^{10} - س} \, د س$.

٢) $\int \frac{12}{س^{5} + 3س} \, د س$.

٣) $\int \frac{6س}{س^{4} + س^{2} - 2} \, د س$.

(ب) التكامل بالقسمة الطويلة.

لـه يستخدم لإيجاد $\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$

إذا كانت درجة البسط $\geq$ درجة المقام.

بحيث نرتب حدود البسط والمقام تنازليا

ثم نستخدم القسمة الطويلة ونطبق القانون:

$$\int \text{الناتج} + \int \frac{\text{الباقي}}{\text{المقام نفسه}}$$

جد التكاملات التالية:

١) $\int_{٠}^{٣} \frac{س^٣ + ٤س - ١٥}{٢ - س} \, دس$

الحل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & -س^٢ - ٢س - ٨ \\
\hline
-س + ٢ & س^٣ + ٤س - ١٥ \\
 & \cancel{-س^٣} + ٢س^٢ \\
\hline
 & \cancel{٢س^٢} + ٤س - ١٥ \\
 & \cancel{-٢س^٢} + ٤س \\
\hline
 & \cancel{٨س} - ١٥ \\
 & \cancel{-٨س} + ١٦ \\
\hline
 & ١
\end{array}
$$

$$= \int_{٠}^{٣} (-س^٢ - ٢س - ٨) \, دس + \int_{٠}^{٣} \frac{١}{٢ - س} \, دس$$

$$= \left[-\frac{س^٣}{٣} - س^٢ - ٨س - لو_هـ|٢ - س| \right]_{٠}^{٣}$$

$$= -٩ - ٩ - ٢٤ - (لو_هـ ١ - لو_هـ ٢)$$

$$= -٤٢ + لو_هـ ٢$$

٢) $\int \frac{٣س^٢ - ٧س - ١٩}{س^٢ - ٣س - ١٠} \, دس$

الحل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & ٣ \\
\hline
س^٢ - ٣س - ١٠ & ٣س^٢ - ٧س - ١٩ \\
 & \cancel{-٣س^٢} + ٩س + ٣٠ \\
\hline
 & ٢س + ١١
\end{array}
$$

$$= \int ٣ \, دس + \int \frac{٢س + ١١}{س^٢ - ٣س - ١٠} \, دس$$

$$= ٣س + \int \frac{٢س + ١١}{(س - ٥)(س + ٢)} \, دس$$

$$= ٣س + \int \frac{أ}{س - ٥} \, دس + \int \frac{ب}{س + ٢} \, دس$$

$س = ٥ \leftarrow أ = \frac{٢١}{٧} = ٣$

$س = -٢ \leftarrow ب = \frac{٧}{-٧} = -١$

$$= ٣س + \int \frac{٣}{س - ٥} \, دس + \int \frac{-١}{س + ٢} \, دس$$

$$= ٣س + ٣ لو_هـ|س - ٥| - لو_هـ|س + ٢| + جـ$$

٣) $\int \frac{٢س^٣}{(س - ٣)(س + ١)} \, دس$

$$= \int \frac{٢س^٣}{س^٢ - ٢س - ٣} \, دس$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & ٢س + ٤ \\
\hline
س^٢ - ٢س - ٣ & ٢س^٣ \\
 & \cancel{-٢س^٣} + ٤س^٢ + ٦س \\
\hline
 & \cancel{٤س^٢} + ٦س \\
 & \cancel{-٤س^٢} + ٨س + ١٢ \\
\hline
 & ١٤س + ١٢
\end{array}
$$

$$= \int (٢س + ٤) \, دس + \int \frac{١٤س + ١٢}{(س - ٣)(س + ١)} \, دس$$

$$= س^٢ + ٤س + \int \frac{أ}{س - ٣} \, دس + \int \frac{ب}{س + ١} \, دس$$

$س = ٣ \leftarrow أ = \frac{٥٤}{٤} = \frac{٢٧}{٢}$

$س = -١ \leftarrow ب = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$

$$= س^٢ + ٤س + \int \frac{\frac{٢٧}{٢}}{س - ٣} \, دس + \int \frac{\frac{١}{٢}}{س + ١} \, دس$$

$$= س^٢ + ٤س + \frac{٢٧}{٢} لو_هـ|س - ٣| + \frac{١}{٢} لو_هـ|س + ١| + جـ$$

تدريب : جد التكاملات التالية :

1) $\int \frac{1 + 6س - س^2}{س + 3}\, دس$

2) $\int \frac{س^3}{س^2 + 1}\, دس$

3) $\int \frac{س^2 - س + 4}{(س-2)^2 - 9}\, دس$

ثانياً : $\int \frac{\text{اقتران آخر}}{\text{اقتران آخر}}\, دس$

← نستخدم القاعدة اذا كان البسط مشتق المقام

واذا تعذر ذلك :

← يجب التخلص من المقام

← بالمتطابقات

أو الاختصار أو الضرب بالمرافق

والا نستخدم التعويض ليصبح كل من المقام والبسط كثيرات حدود .

* جد التكاملات التالية :

1) $\int \frac{جتا^3 س}{2 - جاس}\, دس$

$= \int \frac{جتا^{\cancel{3}}س}{2 - ص} \times \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$ ، $ص = جاس$ ، $دس = \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{1 - جا^2 س}{2 - ص}\, دص$

$= \int \frac{1 - ص^2}{2 - ص}\, دص$

$= \int \frac{ص^2 - 1}{ص - 2}\, دص$

$$\begin{array}{r} ص + 2 \\ ص - 2 \overline{)\, ص^2 - 1} \\ \underline{-\cancel{ص^2} + 2ص} \\ \cancel{2ص} - 1 \\ \underline{-\cancel{2ص} + 4} \\ 3 \end{array}$$

$= \int (ص + 2)\, دص + \int \frac{3}{ص - 2}\, دص$

$= \frac{ص^2}{2} + 2ص + لو_هـ|ص - 2| + جـ$

$= \frac{1}{2} جا^2 س + 2جاس + لو_هـ|جاس - 2| + جـ$

2) $\int \frac{3هـ^{2س} - 9}{هـ^{2س} - 6س}\, دس$

← $2هـ^{2س} - 6 = 2(هـ^{2س} - 3)$

$= \int \frac{3(هـ^{2س} - 3)}{هـ^{2س} - 6س}\, دس$

$= \frac{3}{2} لو_هـ|هـ^{2س} - 6س| + جـ$

3) $\int \frac{2س}{1 + جتا2س}\, دس$

$= \int \frac{\cancel{2}س}{\cancel{2}جتا^2 س}\, دس$

$= \int س\, قا^2 س\, دس$

$ق = س \longrightarrow دق = دس$

$دهـ = قا^2 س\, دس \longrightarrow هـ = ظاس$

$= س\, ظاس - \int ظاس\, دس$

$= س\, ظاس + لو_هـ|جتاس| + جـ$

4) $\int \frac{س + جاس}{1 - جتاس}\, دس$

$= \int \frac{س}{1 - جتاس}\, دس + \int \frac{جاس}{1 - جتاس}\, دس$

← جاس

$= \int \frac{س}{2جا^2 \frac{س}{2}}\, دس + لو_هـ|1 - جتاس|$

$= \int \frac{1}{2} س\, قتا^2 \frac{س}{2}\, دس + لو_هـ|1 - جتاس|$

$ق = \frac{1}{2} س \longrightarrow دق = \frac{1}{2} دس$

$دهـ = قتا^2 \frac{س}{2}\, دس \longrightarrow هـ = -2ظتا\frac{س}{2}$

$= -س\, ظتا\frac{س}{2} + \int ظتا\frac{س}{2}\, دس + لو_هـ|1 - جتاس|$

$= -س\, ظتا\frac{س}{2} + 2لو_هـ|جا\frac{س}{2}| + لو_هـ|1 - جتاس| + جـ$

٥) $\int \dfrac{\text{ظتاس قتاس}}{9 - 4\,\text{قتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

ص = قتاس ، $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-\text{قتاس ظتاس}}$

$= \int \dfrac{\cancel{\text{ظتاس قتاس}}}{9 - 4\text{ص}^2} \times \dfrac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتاس ظتاس}}}$

$= \int \dfrac{1}{4\text{ص}^2 - 9}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{1}{(2\text{ص}-3)(2\text{ص}+3)}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{\text{أ}}{2\text{ص}-3}\,\text{دص} + \int \dfrac{\text{ب}}{2\text{ص}+3}\,\text{دص}$

$\text{ص} = \frac{3}{2} \longrightarrow \text{أ} = \frac{1}{6}$ ، $\text{ص} = -\frac{3}{2} \longrightarrow \text{ب} = -\frac{1}{6}$

$= \int \dfrac{\frac{1}{6}}{2\text{ص}-3}\,\text{دص} + \int \dfrac{-\frac{1}{6}}{2\text{ص}+3}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}-3| - \frac{1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}+3| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\,\text{قتاس}-3| - \frac{1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\,\text{قتاس}+3| + \text{جـ}$

٦) $\int \dfrac{1}{2\text{س} - 1 + \sqrt{2\text{س}+1}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{2\text{س}+1}$ ، $\text{ص}^2 = 2\text{س}+1$ ، $2\text{ص دص} = 2\,\text{دس}$ ، $\text{دس} = \text{ص دص}$

$= \int \dfrac{1}{2\text{س}-1+\text{ص}} \times \text{ص دص}$

لكن $2\text{س} = \text{ص}^2 - 1$

$= \int \dfrac{\text{ص}}{\text{ص}^2 - 1 - 1 + \text{ص}}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{\text{ص}}{\text{ص}^2 + \text{ص} - 2}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{\text{ص}}{(\text{ص}+2)(\text{ص}-1)}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{\text{أ}}{\text{ص}+2}\,\text{دص} + \int \dfrac{\text{ب}}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$\text{ص} = -2 \longrightarrow \text{أ} = \frac{2}{3}$ ، $\text{ص} = 1 \longrightarrow \text{ب} = \frac{1}{3}$

$= \int \dfrac{\frac{2}{3}}{\text{ص}+2}\,\text{دص} + \int \dfrac{\frac{1}{3}}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$= \frac{2}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$

$= \frac{2}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{2\text{س}+1}+2| + \frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{2\text{س}+1} - 1| + \text{جـ}$

٧) $\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \dfrac{\text{قا}^4\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س} - 3\,\text{ظاس} + 2}\,\text{دس}$

ص = ظاس ، $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$ ، $0 \longrightarrow 0$ ، $\frac{3\pi}{4} \longrightarrow -1$

$= \int_{0}^{-1} \dfrac{\text{قا}^{\cancel{4}\,2}\text{س}}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2} \times \dfrac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int_{0}^{-1} \dfrac{1 + \text{ظا}^2\text{س}}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\,\text{دص}$

$= \int_{0}^{-1} \dfrac{\text{ص}^2 + 1}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\,\text{دص}$

$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline \text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2 & \text{ص}^2 + 1 \\ & -\text{ص}^2 + 3\text{ص} - 2 \\ \hline & 3\text{ص} - 1 \end{array}$

$= \int_{0}^{-1} 1\,\text{دص} + \int_{0}^{-1} \dfrac{3\text{ص} - 1}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\,\text{دص}$

$= -1 + \int_{0}^{-1} \dfrac{3\text{ص} - 1}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-1)}\,\text{دص}$

$= -1 + \int_{0}^{-1} \dfrac{\text{أ}}{\text{ص}-2}\,\text{دص} + \int_{0}^{-1} \dfrac{\text{ب}}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$\text{ص} = 2 \longrightarrow \text{أ} = 5$ ، $\text{ص} = 1 \longrightarrow \text{ب} = -2$

$= -1 + 5\left[\text{لو}|\text{ص}-2|\right]_{0}^{-1} - 2\left[\text{لو}|\text{ص}-1|\right]_{0}^{-1}$

$= -1 + 5(\text{لو}3 - \text{لو}2) - 2(\text{لو}2 - 0)$

$= -1 + 5\,\text{لو}3 - 7\,\text{لو}2$

٨) $\int \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^5} - \text{س}^2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص دص} = \text{دس}$

$= \int \dfrac{\text{س}}{\text{ص}^5 - \text{ص}^4} \times 2\text{ص دص}$

$= \int \dfrac{\text{ص}^2}{\text{ص}^4(\text{ص}-1)} \times 2\text{ص دص}$

$= \int \dfrac{2\text{ص}^3}{\text{ص}^4(\text{ص}-1)}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{2}{\text{ص}(\text{ص}-1)}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{\text{أ}}{\text{ص}}\,\text{دص} + \int \dfrac{\text{ب}}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$\text{ص} = 0 \longrightarrow -2$ ، $\text{ص} = 1 \longrightarrow \text{ب} = 2$

$= \int \dfrac{-2}{\text{ص}}\,\text{دص} + \int \dfrac{2}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$

$= -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$

$= -2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}| + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}} - 1| + \text{جـ}$

٩) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8+\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8+1-\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{9-\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$ ، $0 \leftarrow 0$ ، $1 \leftarrow \frac{\pi}{2}$

$= \int_{0}^{1} \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{9-\text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int_{0}^{1} \frac{1}{(3-\text{ص})(3+\text{ص})}\ \text{دص}$

$= \int_{0}^{1} \frac{\text{أ}}{3-\text{ص}}\ \text{دص} + \int_{0}^{1} \frac{\text{ب}}{3+\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{ص} = 3 \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{6}$ ، $\text{ص} = -3 \leftarrow \text{ب} = \frac{1}{6}$

$= \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3-\text{ص}}\ \text{دص} + \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3+\text{ص}}\ \text{دص}$

$= -\frac{1}{6}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|3-\text{ص}|\right]_{0}^{1} + \frac{1}{6}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|3+\text{ص}|\right]_{0}^{1}$

$= -\frac{1}{6}(\text{لو}_{\text{هـ}}2 - \text{لو}_{\text{هـ}}3) + \frac{1}{6}(\text{لو}_{\text{هـ}}4 - \text{لو}_{\text{هـ}}3)$

$= -\frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}2 + \cancel{\frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}3} + \frac{2}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}2 - \cancel{\frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}3}$

$= \frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}2$

١٠) $\int \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} - 3\text{هـ}^{\text{س}} - 4}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \frac{\text{ص}^3}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} - 4} \times \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$= \int \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} - 4}\ \text{دص}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \text{ص}^2-3\text{ص}-4 \overline{)\ \text{ص}^2} \\ \underline{-\text{ص}^2+3\text{ص}+4} \\ 3\text{ص}+4 \end{array}$$

$= \int 1\ \text{دص} + \int \frac{3\text{ص}+4}{(\text{ص}-4)(\text{ص}+1)}\ \text{دص}$

$= \text{ص} + \int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-4}\ \text{دص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}\ \text{دص}$

$\text{ص} = 4 \leftarrow \text{أ} = \frac{16}{5}$ ، $\text{ص} = -1 \leftarrow \text{ب} = \frac{-1}{5}$

$= \text{ص} + \int \frac{\frac{16}{5}}{\text{ص}-4}\ \text{دص} + \int \frac{\frac{-1}{5}}{\text{ص}+1}\ \text{دص}$

$= \text{ص} + \frac{16}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-4| - \frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{ج}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{16}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-4| - \frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \text{ج}$

١١) $\int \frac{\text{جتاس}}{1+3\text{جاس}-\text{جتا}2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{\cancel{1}+3\text{جاس}-\cancel{1}+2\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{2\text{جا}^2\text{س}+3\text{جاس}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{2\text{ص}^2+3\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \frac{1}{\text{ص}(2\text{ص}+3)}\ \text{دص}$

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{ص}}\ \text{دص} + \int \frac{\text{ب}}{2\text{ص}+3}\ \text{دص}$

$\text{ص} = 0 \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{3}$ ، $\text{ص} = \frac{-3}{2} \leftarrow \text{ب} = \frac{-2}{3}$

$= \int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}}\ \text{دص} + \int \frac{\frac{-2}{3}}{2\text{ص}+3}\ \text{دص}$

$= \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص}+3| + \text{ج}$

$= \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}| - \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{جاس}+3| + \text{ج}$

١٢) $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{2-\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس} - \text{جاس}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}-\text{جتاس}}$

$= \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{ص}+2} \times \frac{\text{دص}}{-(\text{جاس}+\text{جتاس})}$

$= \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}-\text{جا}^2\text{س}}{\text{ص}+2} \times \frac{\text{دص}}{-(\text{جاس}+\text{جتاس})}$

$= \int \frac{(\cancel{\text{جتاس}+\text{جاس}})(\text{جتاس}-\text{جاس})}{\text{ص}+2} \times \frac{\text{دص}}{-(\cancel{\text{جاس}+\text{جتاس}})}$

$= \int \frac{-\text{ص}}{\text{ص}+2}\ \text{دص}$

$$\begin{array}{r} -1 \\ \text{ص}+2 \overline{)\ -\text{ص}} \\ \underline{\text{ص}+2} \\ 2 \end{array}$$

$= \int -1\ \text{دص} + \int \frac{2}{\text{ص}+2}\ \text{دص}$

$= -\text{ص} + 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \text{ج}$

$= \text{جاس} - \text{جتاس} + 2\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}-\text{جاس}+2| + \text{ج}$

١٣) $\int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{٤س-٨}-٢}\, دس$

$= \int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{٢\sqrt{س-٢}-٢}$

$ص = \sqrt{س-٢}$

$ص^٢ = س-٢$

$٢ص\, دص = دس$

$= \int \frac{ص+١}{٢ص-٢} \times ٢ص\, دص$

$= \int \frac{ص^٢+ص}{ص-١}\, دص$

$$\begin{array}{r|l} ص+٢ & \\ \hline ص^٢+ص & ص-١ \\ \cancel{-ص^٢}+ص & \\ \hline \cancel{٢ص}+٢ & \\ ٢ & \end{array}$$

$= \int (ص+٢)\, دص + \int \frac{٢}{ص-١}\, دص$

$= \frac{١}{٢}ص^٢ + ٢ص + ٢\,لو_{هـ}|ص-١| + ج$

$= \frac{١}{٢}(س-٢) + ٢\sqrt{س-٢} + ٢\,لو_{هـ}|\sqrt{س-٢}-١| + ج$

١٤) $\int_{٥}^{٨} \frac{١}{\sqrt{٩س^٢-س^٣}}\, دس$

$= \int_{٥}^{٨} \frac{١}{\sqrt{س^٢(٩-س)}}\, دس$

$= \int_{٥}^{٨} \frac{١}{س\sqrt{٩-س}}\, دس$

$ص = \sqrt{٩-س}$

$ص^٢ = ٩-س$

$-٢ص\, دص = دس$

$٥ \leftarrow ٢$

$٨ \leftarrow ١$

$= \int_{٢}^{١} \frac{١}{س \times \cancel{ص}} \times -٢\cancel{ص}\, دص$

$= \int_{١}^{٢} \frac{٢}{س}\, دص$

لكن $س = ٩ - ص^٢$

$= \int_{١}^{٢} \frac{٢}{(٣+ص)(٣-ص)}\, دص$

$= \int_{١}^{٢} \frac{أ}{٣-ص}\, دص + \int_{١}^{٢} \frac{ب}{٣+ص}\, دص$

$ص=٣ \leftarrow أ = \frac{١}{٣}$ ، $ص = -٣ \leftarrow ب = \frac{١}{٣}$

$= -\frac{١}{٣}\,لو_{هـ}|٣-ص| \Big]_{١}^{٢} + \frac{١}{٣}\,لو_{هـ}|٣+ص| \Big]_{١}^{٢}$

$= -\frac{١}{٣}(٠ - لو_{هـ}٢) + \frac{١}{٣}(لو_{هـ}٥ - لو_{هـ}٤)$

$= \frac{١}{٣}لو_{هـ}٢ + \frac{١}{٣}لو_{هـ}٥ - \frac{٢}{٣}لو_{هـ}٢$

$= \frac{١}{٣}لو_{هـ}٥ - \frac{١}{٣}لو_{هـ}٢$

١٥) $\int \sqrt{١-هـ^{س}}\, دس$

$ص = \sqrt{١-هـ^{س}}$

$ص^٢ = ١-هـ^{س}$

$٢ص\, دص = -هـ^{س}\, دس$

$دس = \frac{-٢ص}{هـ^{س}}\, دص$

$= \int ص \times \frac{-٢ص}{هـ^{س}}\, دص$

لكن $هـ^{س} = ١ - ص^٢$

$= \int \frac{-٢ص^٢}{١-ص^٢}\, دص$

$= \int \frac{٢ص^٢}{ص^٢-١}\, دص$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢ص^٢ & ص^٢-١ \\ \cancel{-٢ص^٢}+٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$= \int ٢\, دص + \int \frac{٢}{(ص-١)(ص+١)}\, دص$

$= ٢ص + \int \frac{أ}{ص-١}\, دص + \int \frac{ب}{ص+١}\, دص$

$ص=١ \leftarrow أ = ١$ ، $ص = -١ \leftarrow ب = -١$

$= ٢ص + \int \frac{١}{ص-١}\, دص + \int \frac{-١}{ص+١}\, دص$

$= ٢ص + لو_{هـ}|ص-١| - لو_{هـ}|ص+١| + ج$

$= ٢\sqrt{١-هـ^{س}} + لو_{هـ}|\sqrt{١-هـ^{س}}-١| - لو_{هـ}|\sqrt{١-هـ^{س}}+١| + ج$

تدريب : جد التكاملات التالية :

١) $\int_{٩}^{١٦} \frac{دس}{س - ٣\sqrt{س} + ٢}$

٢) $\int \frac{قا^٢س}{٥ - قا^٢س}\, دس$

٣) $\int \frac{جا٢س}{جتا^٢س - جاس + ٥}\, دس$

٤) $\int \frac{١}{هـ^{س} - هـ^{-س}}\, دس$

٥) $\int \frac{\sqrt{س^٢+٩}}{س}\, دس$

٦) $\int_{١}^{٨} \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^٤} + ٤س + ٣\sqrt[٣]{س^٢}}\, دس$

تمرين $\boxed{١}$

$\boxed{١}$ جد التكاملات التالية :

١) $\int س^{٢}\, ظا^{٢}(س^{٣}+٧)\, دس$.

٢) $\int \frac{٢س+٣}{٤س-س^{٢}-٣}\, دس$

٣) $\int_{٠}^{\frac{ط}{٤}} قا^{٤}س\, جاس\, دس$.

٤) $\int \frac{(س-١)^{٢}}{قا٢س}\, دس$.

٥) $\int \frac{\sqrt[٣]{س}}{٥-س\sqrt[٣]{س}}\, دس$.

٦) $\int س^{٧}\left(س^{٢}+\frac{١}{س}\right)^{٥} دس$

٧) $\int_{٠}^{ط} (١+جا٢س)\, جتا^{٢}س\, دس$

٨) $\int هـ^{\sqrt{س-١}}\, دس$.

٩) $\int \frac{١}{س}\, جتا^{٢}(لو_{هـ}س)\, دس$

١٠) $\int هـ^{٢س}\sqrt{١-هـ^{س}}\, دس$

١١) $\int_{١}^{٥} \sqrt{س^{٣}+س^{٢}-س-١}\, دس$.

١٢) $\int \frac{دس}{س^{٥}\, هـ^{\frac{١}{س}}}$

١٣) $\int \frac{٣-\frac{س}{س-١}}{س+٢}\, دس$.

١٤) $\int س\, جتا\sqrt{١+س^{٢}}\, دس$

١٥) $\int \frac{س-هـ^{س}}{\sqrt[٣]{هـ^{س}}}\, دس$.

١٦) $\int \frac{جا^{٢}س}{(٢س-جا٢س)^{٣}}\, دس$.

١٧) $\int \frac{\sqrt{س^{٢}-س^{٤}}}{س^{٥}}\, دس$ ، $٠ < س \leq ١$

١٨) $\int \frac{جتاس-جا٢س}{جا^{٢}س+جاس-٢}\, دس$.

١٩) $\int \frac{(س^{٢}+١)^{٥}}{س^{١٣}}\, دس$.

٢٠) $\int_{-٢}^{٢} \frac{\sqrt{س^{٤}+٦س^{٢}+٩}}{س^{٢}-س}\, دس$.

٢١) $\int \frac{1}{س\sqrt{س^2+1}}\, ءس$

٢٢) $\int (1 - هـ^{س})^5\, ءس$

٢٣) $\int \frac{س^3 - 2س}{\sqrt{س^2+1}}\, ءس$

٢٤) $\int (س^4 - س^2)^3 \left(س - \frac{1}{س}\right)^3 ءس$

٢٥) $\int (س+1)^3 \, جا(2س + س^2)\, ءس$

٢٦) $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{س+1} - 1}{\sqrt{س+1} + 1}\, ءس$

٢٧) $\int \frac{(س + \sqrt{س})^3}{2س^2}\, ءس$

٢٨) $\int \frac{1}{\sqrt{هـ^{س} + 1}}\, ءس$

٢٩) $\int س \left(\frac{1}{س^2+5} + \frac{1}{س^3 - 4س}\right) ءس$

٣٠) $\int \frac{1}{س^2}\left(1 + هـ^{\frac{1}{س}}\right)^3 ءس$

٣١) $\int_{2}^{3} \frac{\sqrt{س^3 - 2س^2}}{3س}\, ءس$

٣٢) $\int هـ^{2س + هـ^{س}}\, ءس$

٣٣) $\int_{3}^{8} \frac{ءس}{\sqrt{س^3 + س^2}}$

٣٤) $\int \frac{س\, جتا2س}{جتا^2س}\, ءس$

٣٥) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - س^2}}{س^4}\, ءس$

٣٦) $\int \frac{س^3 + 2س^2 + س + 1}{(س+1)^2}\, ءس$

٣٧) $\int \left(\frac{س-1}{س+1}\right)^2 ءس$

٣٨) $\int_{1}^{هـ} \sqrt{\left(س - \frac{1}{س}\right)^2 + 4}\;\, ءس$

٣٩) $\int \frac{\sqrt[3]{ظتاس + 3}}{3 - 2جتا^2س}\, ءس$

٤٠) $\int \frac{جتاس}{جتا2س}\, ءس$

[٢] إذا كان :

$$\int_{1}^{5} (2ق(س) - 1)\, دس = 10$$

جد $\int_{3}^{1} \left(ق(2س-1) + 4س \right) دس$

[٣] إذا كان :

$$\int_{4}^{5} (س+2)\, ق(س-3)\, دس = 12$$

$$\int_{0}^{2} ق(س)\, دس = 4$$

جد $\int_{0}^{2} س\, ق(س)\, دس$

[٤] إذا كان :

ق(1) = 2 ، ق(4) = 3

قَ(1) = -1 ، قَ(4) = 5

جد $\int_{-1}^{2} س^3\, قً(س^2)\, دس$

تكامل اللوغاريتم الطبيعي

نستخدم التكامل بالأجزاء ونفرض

ه = اللوغاريتم

وإذا كان مضروب في مشتقته

نستخدم التكامل بالتعويض ونفرض

ص = اللوغاريتم أو ما بداخله

1) $\int س^2\, لو_هـ س\, دس$

$ه = لو_هـ س \longrightarrow ده = \frac{1}{س}\, دس$

$دهـ = س^2\, دس \longrightarrow هـ = \frac{س^3}{3}$

$= \frac{1}{3} س^3\, لو_هـ س - \int \frac{1}{3} س^2\, دس$

$= \frac{1}{3} س^3\, لو_هـ س - \frac{1}{9} س^3 + جـ$

2) $\int قا^2س\, لو_هـ جاس\, دس$

$ه = لو_هـ جاس \longrightarrow ده = \frac{جتاس}{جاس}\, دس$

$دهـ = قا^2س\, دس \longrightarrow هـ = ظاس$

$= ظاس\, لو_هـ جاس - \int \frac{\cancel{جاس}}{\cancel{جتاس}} \times \frac{\cancel{جتاس}}{\cancel{جاس}}\, دس$

$= ظاس\, لو_هـ جاس - س + جـ$

3) $\int ظتاس\, لو_هـ جاس\, دس$

$ص = لو_هـ جاس$

$دس = \dfrac{دص}{\frac{جتاس}{جاس}}$

$= \int ظتاس \times ص \times \frac{جاس}{جتاس}\, دص$

$دس = \frac{جاس}{جتاس}\, دص$

$= \int \frac{\cancel{جتاس}}{\cancel{جاس}} \times ص \times \frac{\cancel{جاس}}{\cancel{جتاس}}\, دص$

$= \frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{1}{2} (لو_هـ جاس)^2 + جـ$

٤) $\int \text{س} \, (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} \, \text{ءس}$

$\text{ع} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} \longrightarrow \text{ءع} = 2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{1}{\text{س}} \, \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{س} \, \text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{1}{2}\text{س}^{2}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - \int \text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \, \text{ءس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \longrightarrow \text{ءع} = \frac{1}{\text{س}} \, \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{س} \, \text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{1}{2}\text{س}^{2}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - \frac{1}{2}\text{س}^{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{1}{2}\text{س} \, \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - \frac{1}{2}\text{س}^{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{1}{4}\text{س}^{2} + \text{ج}$

٥) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 4\text{س}}$

$= \int \frac{1}{\text{س}\left((\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 4\right)} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\frac{1}{\text{س}}}$

$\text{ءس} = \text{س} \, \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}}(\text{ص}^{2} - 4)} \times \cancel{\text{س}} \, \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{(\text{ص}-2)(\text{ص}+2)} \, \text{ءص}$

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-2} \, \text{ءص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص}+2} \, \text{ءص}$

$\text{ص} = 2 \longrightarrow \text{أ} = \frac{1}{4}$

$\text{ص} = -2 \longrightarrow \text{ب} = -\frac{1}{4}$

$= \int \frac{\frac{1}{4}}{\text{ص}-2} \, \text{ءص} + \int \frac{-\frac{1}{4}}{\text{ص}+2} \, \text{ءص}$

$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \text{ج}$

$= \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-4| - \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+2| + \text{ج}$

٦) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2\text{س}+1} \, \text{ءس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{2\text{س}+1}$

$\text{ع} = \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1) \longrightarrow \text{ءع} = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{2\text{س}+1} \, \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{س}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1) - \int \frac{\text{س}}{2\text{س}+1} \, \text{ءس}$

$\text{س} \div (2\text{س}+1) = \frac{1}{2}, \quad \text{س} - (\text{س} + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1) - \int \frac{1}{2} \, \text{ءس} + \int \frac{\frac{1}{2}}{2\text{س}+1} \, \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1) - \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س}+1| + \text{ج}$

٧) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+2)}{\sqrt{\text{س}+2}} \, \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+2}$

$\text{ص}^{2} = \text{س}+2$

$2\text{ص} \, \text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^{2}}{\cancel{\text{ص}}} \times 2\cancel{\text{ص}} \, \text{ءص}$

$= \int 4 \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \, \text{ءص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \longrightarrow \text{ءع} = \frac{1}{\text{ص}} \, \text{ءص}$

$\text{ءهـ} = 4 \, \text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = 4\text{ص}$

$= 4\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int 4 \, \text{ءص}$

$= 4\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - 4\text{ص} + \text{ج}$

$= 4\sqrt{\text{س}+2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2} - 4\sqrt{\text{س}+2} + \text{ج}$

٨) ∫ قا^{4}س لوهـ ظاس دس

ص = لوهـ ظاس

= ∫ قا^{4}س × ص × $\frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ دص   دس = $\frac{\text{دص}}{\frac{\text{قا}^{2}\text{س}}{\text{ظاس}}}$

= ∫ (1 + ظا^{2}س) ص ظاس دص

لكن ظاس = هـ^{ص} .   دس = $\frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ دص

= ∫ (1 + هـ^{2ص}) × ص هـ^{ص} دص

= ∫ ص (هـ^{ص} + هـ^{3ص}) دص .

ى = ص ⟵ دى = دص

دهـ = (هـ^{ص} + هـ^{3ص}) دص ⟵ هـ = هـ^{ص} + $\frac{\text{هـ}^{3ص}}{3}$

= ص هـ^{ص} + $\frac{1}{3}$ ص هـ^{3ص} − ∫ (هـ^{ص} + $\frac{\text{هـ}^{3ص}}{3}$) دص

= ص هـ^{ص} + $\frac{1}{3}$ ص هـ^{3ص} − هـ^{ص} − $\frac{\text{هـ}^{3ص}}{9}$ + ج

= ظاس لوهـ ظاس + $\frac{1}{3}$ ظا^{3}س لوهـ ظاس

− ظاس − $\frac{1}{9}$ ظا^{3}س + ج

تدريب : جد التكاملات التالية :

١) ∫ جاس لوهـ قاس دس

٢) ∫ جتا^{3}س لوهـ جاس دس .

٣) ∫ $\frac{\text{لوهـ}(س-1)}{(س+3)^{2}}$ دس

٤) $\int_{1}^{\text{هـ}}$ (لوهـ س)^{2} دس .

٥) ∫ $\frac{\text{لوهـ ظاس}}{\text{جا}2\text{س}}$ دس .

٦) ∫ لوهـ(س^{2} − س) دس .

تكاملات هامة .

أولاً : التكامل الدوري .

∫ هـ$^{أس+ب}$ جا(جـس+د) دس

∫ هـ$^{أس+ب}$ جتا(جـس+د) دس

جد التكاملات التالية :

١) ∫ هـ^{2س} جاس دس .

ى = هـ^{2س} ⟵ دى = 2 هـ^{2س} دس

دهـ = جاس دس ⟵ هـ = − جتاس

∫ هـ^{2س} جاس دس = − هـ^{2س} جتاس + ∫ 2 هـ^{2س} جتاس دس

ى = 2 هـ^{2س} ⟵ دى = 4 هـ^{2س} دس

دهـ = جتاس دس ⟵ هـ = جاس

∫ هـ^{2س} جاس دس = − هـ^{2س} جتاس + 2 هـ^{2س} جاس − ∫ 4 هـ^{2س} جاس دس

5 ∫ هـ^{2س} جاس دس = هـ^{2س} (2 جاس − جتاس)

∫ هـ^{2س} جاس دس = $\frac{\text{هـ}^{2س}}{5}$ (2 جاس − جتاس) + ج

٢) ∫ هـ^{س} جتا3س دس

ى = هـ^{س} ⟵ دى = هـ^{س} دس

دهـ = جتا3س دس ⟵ هـ = $\frac{1}{3}$ جا3س

= $\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا3س − ∫ $\frac{1}{3}$ هـ^{س} جا3س دس .

ى = $\frac{1}{3}$ هـ^{س} ⟵ دى = $\frac{1}{3}$ هـ^{س} دس

دهـ = جا3س دس ⟵ هـ = − $\frac{1}{3}$ جتا3س

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\,\text{ءس} = \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٣\text{س} + \frac{١}{٩}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س} - \int \frac{١}{٩}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}$

$\frac{١٠}{٩}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}}\left(\frac{١}{٣}\text{جا}٣\text{س} + \frac{١}{٩}\text{جتا}٣\text{س}\right)$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\,\text{ءس} = \frac{٩}{١٠}\text{هـ}^{\text{س}}\left(\frac{١}{٣}\text{جا}٣\text{س} + \frac{١}{٩}\text{جتا}٣\text{س}\right) + \text{جـ}$

٣) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(٢\,\text{جا}٣\text{س}\,\text{جتاس} - \text{جا}٢\text{س}\right)\text{ءس}$

الحل:

$= \int \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \cancel{٢}\,\frac{١}{\cancel{٢}}\left(\text{جا}٤\text{س} + \cancel{\text{جا}٢\text{س}} - \cancel{\text{جا}٢\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جا}٤\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \longrightarrow \text{ءق} = ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جا}٤\text{س} \longrightarrow \text{هـ} = -\frac{١}{٤}\text{جتا}٤\text{س}$

$= -\frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جتا}٤\text{س} + \int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جتا}٤\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ق} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٢\text{س}} \longrightarrow \text{ءق} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتا}٤\text{س}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{١}{٤}\text{جا}٤\text{س}$

$= \int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جا}٤\text{س}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جتا}٤\text{س} + \frac{١}{٨}\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جا}٤\text{س} - \int \frac{١}{٤}\text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جا}٤\text{س}\,\text{ءس}$

$\frac{٥}{٤}\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جا}٤\text{س}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(-\frac{١}{٤}\text{جتا}٤\text{س} + \frac{١}{٨}\text{جا}٤\text{س}\right)$

$\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{جا}٤\text{س}\,\text{ءس} = \frac{٤}{٥}\text{هـ}^{٢\text{س}}\left(\frac{١}{٨}\text{جا}٤\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جتا}٤\text{س}\right) + \text{جـ}$

تدريب: جد التكاملات التالية:

١) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{ءس}$.

٢) $\int \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{ءس}$.

٣) $\int \text{هـ}^{٤\text{س}}\left(\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}\right)\text{ءس}$.

ثانيا: تكاملات الشطب.

١) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس} + \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \longrightarrow \text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \cancel{\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس}} + \cancel{\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}\,\text{ءس}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جـ}$.

٢) $\int \text{جاس}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\text{ءس}$.

$= \int \text{جاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$.

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \longrightarrow \text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جاس}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = -\text{جتاس}$

$= -\text{جتاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{\text{جتاس}}{\text{س}}\,\text{ءس}$.

$\text{ق} = \frac{١}{\text{س}} \longrightarrow \text{ءق} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس}\,\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \text{جاس}$

$= -\text{جتاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \cancel{\int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}} - \cancel{\int \frac{\text{جاس}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}}$

$= -\text{جتاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \text{جـ}$.

٣) $\int \frac{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س}+1)^{-2}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \longrightarrow \text{دع} = (\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

$\text{دو} = (\text{س}+1)^{-2}\,\text{دس} \longrightarrow \text{و} = -(\text{س}+1)^{-1}$

$= -\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+1)^{-1} + \int (\text{س}+1)^{-1}(\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس}$

$= -\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+1)^{-1} + \int \frac{1}{\cancel{\text{س}+1}} \times \text{هـ}^{\text{س}}\,\cancel{(\text{س}+1)}\,\text{دس}$

$= \frac{-\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

ثالثاً : $\int (\text{دالة})^{\text{ن}} \times (\text{دالة})^{\text{م}}\,\text{دس}$

نستخدم التكامل بالتعويض

وإذا كان ن ، م كلاهما زوجيا في حالة (جا ، جتا)

نستخدم متطابقات النصف .

١) $\int \text{جا}^4\text{س}\,\text{جتا}^5\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا س} \quad , \quad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$= \int \text{ص}^4\,\text{جتا}^{\cancel{5}\,4}\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

$= \int \text{ص}^4 \times (\text{جتا}^2\text{س})^2\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}^4\,(1-\text{جا}^2\text{س})^2\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}^4\,(1-\text{ص}^2)^2\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}^4\,(1-2\text{ص}^2+\text{ص}^4)\,\text{دص}$

$= \int (\text{ص}^4 - 2\text{ص}^6 + \text{ص}^8)\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} - \frac{2}{7}\text{ص}^7 + \frac{1}{9}\text{ص}^9 + \text{جـ}$

$= \frac{1}{5}\text{جا}^5\text{س} - \frac{2}{7}\text{جا}^7\text{س} + \frac{1}{9}\text{جا}^9\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{ظا}^3 4\text{س}\,\text{قا}^3 4\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{قا}\,4\text{س} \quad , \quad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\,\text{قا}4\text{س}\,\text{ظا}4\text{س}}$

$= \int \text{ظا}^{\cancel{3}\,2} 4\text{س} \times \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{4\,\cancel{\text{قا}4\text{س}\,\text{ظا}4\text{س}}}$

$= \int (\text{قا}^2 4\text{س} - 1)\,\text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{4\,\cancel{\text{ص}}}$

$= \int (\text{ص}^2 - 1) \times \frac{1}{4}\text{ص}^2\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{4}(\text{ص}^4 - \text{ص}^2)\,\text{دص}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\text{ص}^5}{5} - \frac{\text{ص}^3}{3}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{\text{قا}^5 4\text{س}}{5} - \frac{\text{قا}^3 4\text{س}}{3}\right) + \text{جـ}$

٣) $\int \text{قتا}^4\text{س}\,\text{ظتا}^5\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتا س} \quad , \quad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قتا}^{\cancel{4}\,2}\text{س} \times \text{ص}^5 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{قتا}^2\text{س}}}$

$= \int -(1+\text{ظتا}^2\text{س})\,\text{ص}^5\,\text{دص}$

$= \int -\text{ص}^5\,(1+\text{ص}^2)\,\text{دص}$

$= \int (-\text{ص}^5 - \text{ص}^7)\,\text{دص}$

$= \frac{-\text{ص}^6}{6} - \frac{\text{ص}^8}{8} + \text{جـ}$

$= \frac{-\text{ظتا}^6\text{س}}{6} - \frac{\text{ظتا}^8\text{س}}{8} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{جا}^3\text{س}\,\text{قا}^7\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \text{جا}^3\text{س} \times \text{قا}^3\text{س} \times \text{قا}^4\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \text{جا}^3\text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^3\text{س}} \times \text{قا}^4\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \text{ظا}^3\text{س}\,\text{قا}^4\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا س} \quad , \quad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{ص}^3\,\text{قا}^{\cancel{4}\,2}\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^3\,(1+\text{ص}^2)\,\text{دص}$

$= \int (\text{ص}^3 + \text{ص}^5)\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^4}{4} + \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$

٥) $\int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{جا}^{4}\text{س}\ \text{دس}$.

$= \int \underbrace{\text{جتا}^{2}\text{س} \times \text{جا}^{2}\text{س}} \times \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}\right)^{2} \times \frac{1}{2}\left(1 - \text{جتا}2\text{س}\right)\text{دس}$

$= \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}2\text{س}\left(1 - \text{جتا}2\text{س}\right)\text{دس}$.

$= \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}2\text{س}\ \text{دس} - \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}2\text{س}\ \text{جتا}2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{جتا}2\text{س}}$

$= \frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\int\left(1 - \text{جتا}4\text{س}\right)\text{دس} - \frac{1}{8}\int \text{ص}^{2}\,\cancel{\text{جتا}2\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{2\,\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}$

$= \frac{1}{16}\left(\text{س} - \frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right) - \frac{1}{48}\text{ص}^{3} + \text{ج}$

$= \frac{1}{16}\left(\text{س} - \frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right) - \frac{1}{48}\text{جا}^{3}2\text{س} + \text{ج}$.

رابعاً : $\int (\text{دائري})^{\text{ن}}\ \text{دس}$.

نستخدم التكامل بالتعويض

واذا كان ن زوجياً في حالة (جا ، جتا)

نستخدم متطابقات النصف .

١) $\int \text{جا}^{5}3\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جا}^{2}3\text{س} \times \text{جا}^{3}3\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جا}^{3}3\text{س}\left(1 - \text{جتا}^{2}3\text{س}\right)\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتا}3\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-3\,\text{جا}3\text{س}}$

$= \int \text{جا}^{2}3\text{س}\left(1 - \text{ص}^{2}\right) \times \frac{\text{دص}}{-3\,\cancel{\text{جا}3\text{س}}}$

$= \int \left(1 - \text{جتا}^{2}3\text{س}\right)\left(1 - \text{ص}^{2}\right) \times \frac{\text{دص}}{-3}$

$= \int -\frac{1}{3}\left(1 - \text{ص}^{2}\right)^{2}\text{دص}$

$= \int -\frac{1}{3}\left(1 - 2\text{ص}^{2} + \text{ص}^{4}\right)\text{دص}$

$= -\frac{1}{3}\left(\text{ص} - \frac{2}{3}\text{ص}^{3} + \frac{1}{5}\text{ص}^{5}\right) + \text{ج}$

$= -\frac{1}{3}\left(\text{جتا}3\text{س} - \frac{2}{3}\text{جتا}^{3}3\text{س} + \frac{1}{5}\text{جتا}^{5}3\text{س}\right) + \text{ج}$

٢) $\int \text{قا}^{6}\text{س}\ \text{دس}$.

$= \int \text{قا}^{4}\text{س} \times \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$.

$= \int \text{قا}^{4}\text{س}\left(1 + \text{ظا}^{2}\text{س}\right)\text{دس}$

$= \int \text{قا}^{\cancel{4}\,2}\text{س}\left(1 + \text{ص}^{2}\right) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{ص} = \text{ظاس}\\ \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}\end{array}\right.$

$= \int \left(1 + \text{ظا}^{2}\text{س}\right)\left(1 + \text{ص}^{2}\right)\text{دص}$

$= \int \left(1 + \text{ص}^{2}\right)^{2}\text{دص}$

$= \int \left(1 + 2\text{ص}^{2} + \text{ص}^{4}\right)\text{دص}$

$= \text{ص} + \frac{2}{3}\text{ص}^{3} + \frac{1}{5}\text{ص}^{5} + \text{ج}$

$= \text{ظاس} + \frac{2}{3}\text{ظا}^{3}\text{س} + \frac{1}{5}\text{ظا}^{5}\text{س} + \text{ج}$

٣) $\int \text{ظتا}^{4}\text{س}\ \text{دس}$.

$= \int \text{ظتا}^{2}\text{س} \times \text{ظتا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{ظتا}^{2}\text{س}\left(\text{قتا}^{2}\text{س} - 1\right)\text{دس}$

$= \int \text{ظتا}^{2}\text{س}\ \text{قتا}^{2}\text{س}\ \text{دس} - \int \text{ظتا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{2}\text{س}}$

$= \int \text{ص}^{2}\,\cancel{\text{قتا}^{2}\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتا}^{2}\text{س}}} - \int \left(\text{قتا}^{2}\text{س} - 1\right)\text{دس}$

$= -\frac{\text{ص}^{3}}{3} - \left(-\text{ظتاس} - \text{س}\right) + \text{ج}$

$= -\frac{1}{3}\text{ظتا}^{3}\text{س} + \text{ظتاس} + \text{س} + \text{ج}$

٤) $\int^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا}^{4}\text{س}\ \text{دس}$.

$= \int^{\frac{\pi}{4}} \left(\text{جتا}^{2}\text{س}\right)^{2}\text{دس}$

$= \int^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\left(1 + \text{جتا}2\text{س}\right)\right)^{2}\text{دس}$

$= \int^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}\left(1 + 2\,\text{جتا}2\text{س} + \text{جتا}^{2}2\text{س}\right)\text{دس}$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{جتا}٢س + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} (1 + \text{جتا}٤س) \right) دس$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{٣}{٨} + \frac{1}{٢} \text{جتا}٢س + \frac{1}{٨} \text{جتا}٤س \right) دس$$

$$= \left[\frac{٣}{٨} س + \frac{1}{٤} \text{جا}٢س + \frac{1}{٣٢} \text{جا}٤س \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{٣\pi}{٣٢} + \frac{1}{٤} + ٠ - ٠ = \frac{٣\pi + ٨}{٣٢}$$

٥) اذا كان : $ع_ن = \int \text{ظا}^{ن} س \, دس$

ن : عدد صحيح ≥ ٢

فأثبت أن :

$$ع_ن + ع_{ن-٢} = \frac{1}{ن-1} \text{ظا}^{ن-1} س$$

البرهان :

$$ع_ن = \int \text{ظا}^{ن-٢} س \times \text{ظا}^{٢} س \, دس$$

$$= \int \text{ظا}^{ن-٢} س \, (\text{قا}^{٢} س - 1) \, دس$$

$$= \int \text{ظا}^{ن-٢} س \, \text{قا}^{٢} س \, دس - \int \text{ظا}^{ن-٢} س \, دس$$

$ص = \text{ظا} س$

$$دس = \frac{دص}{\text{قا}^{٢} س}$$

$$\therefore ع_ن = \int ص^{ن-٢} \cancel{\text{قا}^{٢} س} \times \frac{دص}{\cancel{\text{قا}^{٢} س}} - ع_{ن-٢}$$

$$ع_ن + ع_{ن-٢} = \frac{ص^{ن-1}}{ن-1}$$

$$ع_ن + ع_{ن-٢} = \frac{1}{ن-1} \text{ظا}^{ن-1} س$$

تدريب :

جد التكاملات التالية :

١) $\int \text{جا}^{٣} س \, \text{جتا}^{٣} س \, دس$

٢) $\int \text{قا}^{٤} س \, \text{ظا}^{٢} س \, دس$.

٣) $\int \text{جتا}^{٣} ٢س \, \text{قتا}^{٨} ٢س \, دس$

٤) $\int \text{ظا}^{٥} ٣س \, دس$.

٥) $\int \text{جا}^{ن} س \, \text{جتا}^{٣} س \, دس$ ، $ن \geq 1$

٦) $\int \text{قتا}^{٤} س \, دس$.

٧) $\int \text{ظا}^{٣} س \, \text{جتا}^{٧} س \, دس$.

٨) $\int \text{جا}^{٢} س \, \text{ظا}^{٢} س \, دس$.

٩) $\int \frac{\text{جا}^{٥} س}{\text{جتا}^{٧} س} \, دس$.

تمرين $\boxed{٢}$

$\boxed{١}$ جد التكاملات التالية :

١) $\int س^{٣} لو_{هـ} \frac{١}{\sqrt{س}} \, ءس$

٢) $\int قا^{٣}س \, ظا^{٥}س \, ءس$

٣) $\int لو_{هـ}(س^{٢} - ٦س + ٩) \, ءس$

٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} هـ^{س} \sqrt{٢ + ٢جتا٢س} \, ءس$

٥) $\int جا٢س \, لو_{هـ} جتاس \, ءس$

٦) $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{١}{س} لو_{هـ}(٣ - لو_{هـ}س) \, ءس$

٧) $\int لو_{هـ} \frac{هـ^{٢س}}{س - ١} \, ءس$

٨) $\int قاس \, لو_{هـ} جتاس \, ءس$

$\boxed{٢}$ اذا كان $ع_{ن} = \int (لو_{هـ}س)^{ن} \, ءس$

فأثبت أن : $ع_{ن} = س(لو_{هـ}س)^{ن} - ن \, ع_{ن-١}$

تمرين عام

جد التكاملات التالية :

١) $\int \frac{س^{٢}}{(س-٢)^{٢} - س} \, ءس$

٢) $\int \frac{١}{(س + \frac{١}{س})^{٣}} \, ءس$

٣) $\int س \, هـ^{\sqrt{س^{٢}+١}} \, ءس$

٤) $\int \frac{٢جا٣س \, جتاس}{جتا٢س} \, ءس$

٥) $\int لو_{هـ}(س^{٢} + ٢س) \, ءس$

٦) $\int \frac{جاس + جتاس}{هـ^{س} + جاس} \, ءس$

٧) $\int \frac{١}{جاس + ٨قتاس} \, ءس$

٨) $\int \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}}}{س} \, ءس$

٩) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٥}س \sqrt{١ + جتا٢س} \, ءس$

١٠) $\int ظا^{٢}\sqrt{س} \, ءس$

١١) $\int \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤} \, ءس$

حل التمارين

$\boxed{\text{تمرين } 1}$

1) $\int س^2\, ظا^2(س^3+7)\, دس$

$ص = س^3 + 7$ ، $دس = \frac{دص}{3س^2}$

$= \int \cancel{س^2}\, ظا^2ص \times \frac{دص}{3\cancel{س^2}}$

$= \frac{1}{3}\int (قا^2ص - 1)\, دص$

$= \frac{1}{3}(ظاص - ص) + جـ$

$= \frac{1}{3}\left(ظا(س^3+7) - س^3 - 7\right) + جـ$

2) $\int \frac{2س+3}{-(س^2-4س+3)}\, دس$

$= \int \frac{-2س-3}{(س-3)(س-1)}\, دس$

$= \int \frac{أ}{س-3}\, دس + \int \frac{ب}{س-1}\, دس$

$س = 3 \longrightarrow أ = \frac{-9}{2}$

$س = 1 \longrightarrow ب = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

$= \frac{-9}{2} لو_هـ|س-3| + \frac{5}{2} لو_هـ|س-1| + جـ$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} قا^4س\, جاس\, دس$

$ص = قاس$ ، $دس = \frac{دص}{قاس\, ظاس}$

$0 \longrightarrow 1$ ، $\frac{\pi}{3} \longrightarrow 2$

$= \int_1^2 ص^4 جاس \times \frac{دص}{قاس\, ظاس}$

$= \int_1^2 ص^{\cancel{4}\,3}\, \cancel{جاس} \times \frac{دص}{\cancel{ص}} \times \frac{جتاس}{\cancel{جاس}}$

$= \int_1^2 ص^3\, دص \times \frac{1}{ص}$

$= \int_1^2 ص^2\, دص$

$= \frac{1}{3} ص^3 \Big]_1^2$

$= \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$

4) $\int (س-1)^2\, جتا2س\, دس$

ق		دع
$(س-1)^2$	+	$جتا2س$
$2(س-1)$	−	$\frac{1}{2} جا2س$
2	+	$-\frac{1}{4} جتا2س$
صفر		$-\frac{1}{8} جا2س$

$= \frac{1}{2}(س-1)^2 جا2س + \frac{1}{2}(س-1) جتا2س$

$- \frac{1}{4} جا2س + جـ$

5) $\int \frac{\sqrt[3]{س}}{5 - س\sqrt[3]{س}}\, دس$

$ص = \sqrt[3]{س}$ ، $ص^3 = س$ ، $3ص^2\, دص = دس$

$= \int \frac{ص}{5 - س\, ص} \times 3ص^2\, دص$

$= \int \frac{3ص^3}{5 - ص^4}\, دص$

$\longrightarrow -4ص^3$

$= -\frac{3}{4} لو_هـ|5 - ص^4| + جـ$

$= -\frac{3}{4} لو_هـ|5 - \sqrt[3]{س^4}| + جـ$

6) $\int س^7 \times \left(\frac{س^3+1}{س}\right)^5 دس$

$= \int س^{\cancel{7}\,2} \times \frac{(س^3+1)^5}{\cancel{س^5}}\, دس$

$= \int س^2 (س^3+1)^5\, دس$

$ص = س^3 + 1$ ، $دس = \frac{دص}{3س^2}$

$= \int \cancel{س^2} \times ص^5 \times \frac{دص}{3\cancel{س^2}}$

$= \int \frac{1}{3} ص^5\, دص$

$= \frac{1}{3} \times \frac{ص^6}{6} + جـ$

$= \frac{1}{18}(س^3+1)^6 + جـ$

٧) $\int_{0}^{\pi} (1+\text{جا}٢\text{س})\,\text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\pi} (1+\text{جا}٢\text{س}) \times \frac{1}{2}(1+\text{جتا}٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\text{جتا}٢\text{س}+\text{جا}٢\text{س}+\text{جا}٢\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} (1+\text{جتا}٢\text{س}+\text{جا}٢\text{س}+\frac{1}{2}\text{جا}٤\text{س})\ \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\Big[(\text{س} + \frac{\text{جا}٢\text{س}}{2} - \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{2} - \frac{1}{8}\text{جا}٤\text{س})\Big]_{0}^{\pi}$

$= \frac{1}{2}\Big((\pi + ٠ - \frac{1}{2} - ٠) - (٠ + ٠ - \frac{1}{2} - ٠)\Big)$

$= \frac{1}{2}(\pi - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}}) = \frac{\pi}{2}$

طريقة أخرى :

$= \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس} + \int_{0}^{\pi} \text{جا}٢\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس}$ ← ٢جاس جتاس

$= \int_{0}^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\ \text{دس} + \int_{0}^{\pi} ٢\,\text{جاس}\,\text{جتا}^3\text{س}\ \text{دس}$

مطابقة — تعويض ؛ ص = جتاس

٨) $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}-1}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}-1}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}-1$ ، $٢\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times ٢\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ق} = ٢\text{ص} \longrightarrow \text{دق} = ٢\ \text{دص}$

$\text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} \longrightarrow \text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= ٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int ٢\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= ٢\sqrt{\text{س}-1}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}-1}} - ٢\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}-1}} + \text{ج}$

٩) $\int \frac{1}{\text{س}}\,\text{جتا}^2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{1}{\text{س}}}$ ، $\text{دس} = \text{س}\ \text{دص}$

$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}}}\,\text{جتا}^2\text{ص} \times \cancel{\text{س}}\ \text{دص}$

$= \int \frac{1}{2}(1+\text{جتا}٢\text{ص})\ \text{دص}$

$= \frac{1}{2}(\text{ص} + \frac{\text{جا}٢\text{ص}}{2}) + \text{ج}$

$= \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}(٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \text{ج}$

١٠) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، $\text{ص}^2 = 1-\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $٢\text{ص}\ \text{دص} = -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$ ، $\text{دس} = \frac{-٢\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دص}$

$= \int \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \text{ص} \times \frac{-٢\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دص}$

$= \int -\text{هـ}^{\text{س}} \times ٢\text{ص}^2\ \text{دص}$

$= \int -٢\text{ص}^2(\text{ص}^2-1)\ \text{دص}$

$= \int -٢(\text{ص}^4-\text{ص}^2)\ \text{دص}$

$= -٢(\frac{\text{ص}^5}{5} - \frac{\text{ص}^3}{3}) + \text{ج}$

$= -٢\left(\frac{\sqrt{(1-\text{هـ}^{\text{س}})^5}}{5} - \frac{\sqrt{(1-\text{هـ}^{\text{س}})^3}}{3}\right) + \text{ج}$

١١) $\int_{1}^{5} \sqrt{\text{س}^3+\text{س}^2-\text{س}-1}\ \text{دس}$

$= \int_{1}^{5} \sqrt{\text{س}^2(\text{س}+1)-(\text{س}+1)}\ \text{دس}$

$= \int_{1}^{5} \sqrt{(\text{س}+1)(\text{س}^2-1)}\ \text{دس}$ ← $(\text{س}+1)(\text{س}-1)$

$= \int_{1}^{5} \sqrt{(\text{س}+1)^2(\text{س}-1)}\ \text{دس}$

$= \int_{1}^{5} |\text{س}+1|\sqrt{\text{س}-1}\ \text{دس}$

س+١ : + ، س−١ : − ، −١ ، ٥

$= \int_{1}^{5} (\text{س}+1)\sqrt{\text{س}-1}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}-1}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}-1$ ، $٢\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$ ، $1 \longrightarrow ٠$ ، $5 \longrightarrow 2$

$= \int_{0}^{2} (\text{س}+1) \times \text{ص} \times ٢\text{ص}\ \text{دص}$

$= \int_{0}^{2} ٢\text{ص}^2(\text{ص}^2+2)\ \text{دص}$

$= \int_{0}^{2} ٢(\text{ص}^4+٢\text{ص}^2)\ \text{دص}$

$= ٢\Big[(\frac{\text{ص}^5}{5} + \frac{٢\text{ص}^3}{3})\Big]_{0}^{2}$

$= ٢(\frac{32}{5} + \frac{16}{3}) = ٢ \times \frac{176}{15} = \frac{352}{15}$

$$12)\ \int \frac{1}{\text{س}^{5}\,\text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}} \qquad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\frac{-1}{\text{س}^{2}}} \qquad \text{دس} = -\text{س}^{2}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^{\cancel{5}\,3}\,\text{هـ}^{\text{ص}}} \times -\cancel{\text{س}^{2}}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{-1}{\text{س}^{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}}}\,\text{دص}$$

$$= \int -\text{ص}^{3}\,\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{دص}$$

ع	ده
$-\text{ص}^{3}$	$\text{هـ}^{-\text{ص}}$
-3ص^{2}	$-\text{هـ}^{-\text{ص}}$
-6ص	$\text{هـ}^{-\text{ص}}$
-6	$-\text{هـ}^{-\text{ص}}$
صفر	$\text{هـ}^{-\text{ص}}$

$$= \text{ص}^{3}\,\text{هـ}^{-\text{ص}} + 3\text{ص}^{2}\,\text{هـ}^{-\text{ص}} + 6\text{ص}\,\text{هـ}^{-\text{ص}} + 6\,\text{هـ}^{-\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{\text{س}^{3}}\,\text{هـ}^{\frac{-1}{\text{س}}} + \frac{3}{\text{س}^{2}}\,\text{هـ}^{\frac{-1}{\text{س}}} + \frac{6}{\text{س}}\,\text{هـ}^{\frac{-1}{\text{س}}} + 6\,\text{هـ}^{\frac{-1}{\text{س}}} + \text{جـ}$$

$$13)\ \int \frac{3\text{س} - 3 - \text{س}}{\text{س} - 1} \times \frac{1}{\text{س} + 2}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{2\text{س} - 3}{(\text{س} - 1)(\text{س} + 2)}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{أ}}{\text{س} - 1}\,\text{دس} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س} + 2}\,\text{دس}$$

$$\text{س} = 1 \longrightarrow \text{أ} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{س} = -2 \longrightarrow \text{ب} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{3}}{\text{س} - 1}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{7}{3}}{\text{س} + 2}\,\text{دس}$$

$$= -\frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 1| + \frac{7}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + 2| + \text{جـ}$$

$$14)\ \int \text{س}\,\text{جتا}\sqrt{1 + \text{س}^{2}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{1 + \text{س}^{2}} \qquad \text{ص}^{2} = 1 + \text{س}^{2} \qquad 2\text{ص}\,\text{دص} = 2\text{س}\,\text{دس} \qquad \text{دس} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{دص}$$

$$= \int \cancel{\text{س}}\,\text{جتا}\text{ص} \times \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}\,\text{دص}$$

$$= \int \text{ص}\,\text{جتا}\text{ص}\,\text{دص}$$

$$\text{ع} = \text{ص} \longrightarrow \text{دع} = \text{دص}$$

$$\text{ده} = \text{جتا}\text{ص}\,\text{دص} \longrightarrow \text{ه} = \text{جا}\text{ص}$$

$$= \text{ص}\,\text{جا}\text{ص} - \int \text{جا}\text{ص}\,\text{دص}$$

$$= \text{ص}\,\text{جا}\text{ص} + \text{جتا}\text{ص} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{\text{س}^{2} + 1}\,\text{جا}\sqrt{\text{س}^{2} + 1} + \text{جتا}\sqrt{\text{س}^{2} + 1} + \text{جـ}$$

$$15)\ \int \frac{\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\sqrt[3]{\text{هـ}^{\text{س}}}}\,\text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}} - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{3}}} \right) \text{دس}$$

$$= \int \left(\text{س}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}} - \text{هـ}^{\frac{2}{3}\text{س}} \right) \text{دس}$$

$$= \int \text{س}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}} - \frac{3}{2}\,\text{هـ}^{\frac{2}{3}\text{س}}$$

$$\text{ع} = \text{س} \longrightarrow \text{دع} = \text{دس}$$

$$\text{ده} = \text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}}\,\text{دس} \longrightarrow \text{ه} = -3\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}}$$

$$= -3\text{س}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}} + \int 3\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}}\,\text{دس} - \frac{3}{2}\,\text{هـ}^{\frac{2}{3}\text{س}}$$

$$= -3\text{س}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}} - 9\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}\text{س}} - \frac{3}{2}\,\text{هـ}^{\frac{2}{3}\text{س}} + \text{جـ}$$

١٦) $$\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{(\text{٢س} - \text{جا٢س})^3}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{ص}^3} \times \frac{\text{دص}}{\text{٢}(\text{١} - \text{جتا٢س})}$$ $$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{٢س} - \text{جا٢س} \\ \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{٢} - \text{٢جتا٢س}} \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جا}^2\text{س}}}{\text{ص}^3} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢} \times \text{٢جا}^2\text{س}}}$$

$$= \int \tfrac{1}{4}\,\text{ص}^{-3}\,\text{دص} = \tfrac{1}{4} \times \frac{\text{ص}^{-2}}{-2} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{٢س} - \text{جا٢س})^{-2}}{-8} + \text{جـ}$$

١٧) $$\int \frac{\sqrt{\text{س}^4(\text{س}^2 - 1)}}{\text{س}^5}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2 - 1}}{\text{س}^5}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{-3}\sqrt{\text{س}^{-2} - 1}\,\text{دس}$$

$$= \int \cancel{\text{س}^{-3}} \times \text{ص} \times \frac{-\text{ص}}{\cancel{\text{س}^{-3}}}\,\text{دص}$$ $$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \sqrt{\text{س}^{-2} - 1} \\ \text{ص}^2 = \text{س}^{-2} - 1 \\ \text{٢ص دص} = -\text{٢س}^{-3}\,\text{دس} \\ \text{دس} = \dfrac{-\text{ص}}{\text{س}^{-3}}\,\text{دص} \end{array} \right.$$

$$= \int -\text{ص}^2\,\text{دص}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\,\text{ص}^3 + \text{جـ}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\sqrt{(\text{س}^{-2} - 1)^3} + \text{جـ}$$

١٨) $$\int \frac{\text{جتاس} - \text{٢جاس جتاس}}{\text{جا}^2\text{س} + \text{جاس} - 2}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}(\text{١} - \text{٢ص})}{\text{ص}^2 + \text{ص} - 2} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$ $$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{جاس} \\ \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{جتاس}} \end{array} \right.$$

$$= \int \frac{\text{١} - \text{٢ص}}{(\text{ص} + 2)(\text{ص} - 1)}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{\text{أ}}{\text{ص} + 2}\,\text{دص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص} - 1}\,\text{دص}$$

$$\text{ص} = -2 \longrightarrow \text{أ} = \frac{5}{-3} \quad ، \quad \text{ص} = 1 \longrightarrow \text{ب} = \frac{-1}{3}$$

$$= \frac{-5}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + 2| - \tfrac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - 1| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-5}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس} + 2| - \tfrac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس} - 1| + \text{جـ}$$

١٩) $$\int \frac{(\text{س}^2(1 + \text{س}^{-2}))^5}{\text{س}^{13}}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{س}^{10}(1 + \text{س}^{-2})^5}{\text{س}^{13}}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{س}^{-3}(1 + \text{س}^{-2})^5\,\text{دس}$$

$$= \int \cancel{\text{س}^{-3}} \times \text{ص}^5 \times \frac{\text{دص}}{-2\cancel{\text{س}^{-3}}}$$ $$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = 1 + \text{س}^{-2} \\ \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{-2\text{س}^{-3}} \end{array} \right.$$

$$= -\tfrac{1}{2} \times \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$$

$$= -\tfrac{1}{12}(1 + \text{س}^{-2})^6 + \text{جـ}$$

٢٠) $$\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{(\text{س}^2 + 3)^2}}{\text{س}^2 - \text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{\text{س}^2 + 3}{\text{س}^2 - \text{س}}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline \text{س}^2 + 3 & \text{س}^2 - \text{س} \\ -\text{س}^2 + \text{س} & \\ \hline \text{س} + 3 & \end{array}$$

$$= \int_{-2}^{2} 1\,\text{دس} + \int_{-2}^{2} \frac{\text{س} + 3}{\text{س}(\text{س} - 1)}\,\text{دس}$$

$$= 4 + \int_{-2}^{2} \frac{\text{أ}}{\text{س}}\,\text{دس} + \int_{-2}^{2} \frac{\text{ب}}{\text{س} - 1}\,\text{دس}$$

$$\text{س} = 0 \longrightarrow \text{أ} = -3$$

$$\text{س} = 1 \longrightarrow \text{ب} = 4$$

$$= 4 + \int_{-2}^{2} \frac{-3}{\text{س}}\,\text{دس} + \int_{-2}^{2} \frac{4}{\text{س} - 1}\,\text{دس}$$

$$= 4 - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big]_{-2}^{2} + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 1|\Big]_{-2}^{2}$$

$$= 4 - (\cancel{\text{لو}_{\text{هـ}}2} - \cancel{\text{لو}_{\text{هـ}}2}) + 4(\text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}3)$$

$$= 4 - 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$$

٢١) $\int \frac{1}{س\sqrt{س^2+1}}\, دس$

$ص = \sqrt{س^2+1}$

$ص^2 = س^2+1$

$٢ص\, دص = ٢س\, دس$

$دس = \frac{ص}{س}\, دص$

$= \int \frac{1}{س\, \cancel{ص}} \times \frac{\cancel{ص}}{س}\, دص$

$= \int \frac{1}{س^2}\, دص$

$= \int \frac{1}{ص^2-1}\, دص$

$= \int \frac{1}{(ص+1)(ص-1)}\, دص$

$= \int \frac{أ}{ص-1}\, دص + \int \frac{ب}{ص+1}\, دص$

$ص = 1 \leftarrow أ = \frac{1}{2}$ ، $ص = -1 \leftarrow ب = -\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} لوـ_{هـ}\left|\sqrt{س^2+1} - 1\right| - \frac{1}{2} لوـ_{هـ}\left|\sqrt{س^2+1} + 1\right| + جـ$

٢٢) $\int (1 - هـ^{س})^5\, دس$

$ص = 1 - هـ^{س}$

$دس = \frac{دص}{-هـ^{س}}$

$= \int ص^5 \times \frac{دص}{-هـ^{س}}$

$= \int \frac{ص^5}{ص-1}\, دص$

$$\begin{array}{l} \quad ص^4+ص^3+ص^2+ص+1 \\ ص-1 \;\big)\; ص^5 \\ \underline{-\cancel{ص^5}+ص^4} \\ \quad ص^4 \\ \underline{-\cancel{ص^4}+ص^3} \\ \quad ص^3 \\ \underline{-\cancel{ص^3}+ص^2} \\ \quad ص^2 \\ \underline{-\cancel{ص^2}+ص} \\ \quad ص \\ \underline{-\cancel{ص}+1} \end{array}$$

$= \int (ص^4+ص^3+ص^2+ص+1)\, دص + \int \frac{1}{ص-1}\, دص$

$= \frac{ص^5}{5} + \frac{ص^4}{4} + \frac{ص^3}{3} + \frac{ص^2}{2} + ص + لوـ_{هـ}|ص-1|$

$+ جـ$

٢٣) $\int \frac{س^3 - ٢س}{\sqrt{س^2+1}}\, دس$

$ص = \sqrt{س^2+1}$

$ص^2 = س^2+1$

$٢ص\, دص = ٢س\, دس$

$دس = \frac{ص}{س}\, دص$

$= \int \frac{\cancel{س}(س^2-٢)}{\cancel{ص}} \times \frac{\cancel{ص}}{\cancel{س}}\, دص$

$= \int (ص^2 - ٣)\, دص$

$= \frac{1}{3} ص^3 - ٣ص + جـ$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(س^2+1)^3} - ٣\sqrt{س^2+1} + جـ$

٢٤) $\int \left(س^2(س^2-1)\right)^3 \times \left(\frac{س^2-1}{س}\right)^3 دس$

$= \int س^6 (س^2-1)^6 \times \frac{1}{س^3}\, دس$

$= \int س^3 (س^2-1)^6\, دس$

$ص = س^2 - 1$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$= \int س^{\cancel{3}\,2} \times ص^6 \times \frac{دص}{٢\cancel{س}}$

$= \int \frac{1}{2}(ص+1)\, ص^6\, دص$

$= \int \frac{1}{2}(ص^7 + ص^6)\, دص$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{ص^8}{8} + \frac{ص^7}{7}\right) + جـ$

٢٥) $\int (س+1)^3\, جا(٢س + س^2)\, دس$

$ص = ٢س + س^2$

$دس = \frac{دص}{٢+٢س}$

$دس = \frac{دص}{٢(س+1)}$

$= \int (س+1)^{\cancel{3}\,2}\, جاص \times \frac{دص}{\cancel{(س+1)}\,٢}$

$= \int \frac{1}{2}(س^2+٢س+1)\, جاص\, دص$

$= \int \frac{1}{2}(ص+1)\, جاص\, دص$

$ع = \frac{1}{2}(ص+1) \longrightarrow دع = \frac{1}{2}\, دص$

$دهـ = جاص\, دص \longrightarrow هـ = -جتاص$

$= -\frac{1}{2}(ص+1)\, جتاص + \int \frac{1}{2}\, جتاص\, دص$

$= -\frac{1}{2}(ص+1)\, جتاص + \frac{1}{2}\, جاص + جـ$

$= -\frac{1}{2}(س^2+٢س+1)\, جتا(س^2+٢س)$

$+ \frac{1}{2}\, جا(س^2+٢س) + جـ$

٢٦) $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{س+1}-1}{\sqrt{س+1}+1} \, دس$

$ص = \sqrt{س+1}$

$ص^2 = س+1$

$2ص\,دص = دس$

$0 \leftarrow 1$

$3 \leftarrow 2$

$= \int_{1}^{2} \frac{ص-1}{ص+1} \times 2ص\,دص$

$= \int_{1}^{2} \frac{2ص^2-2ص}{ص+1} \, دص$

$$\begin{array}{r|l} 2ص-4 & \\ \hline \cancel{2ص^2}-2ص & ص+1 \\ -\cancel{2ص^2}-2ص & \\ \hline -\cancel{4ص} & \\ \cancel{4ص}+4 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$= \int_{1}^{2} (2ص-4)\,دص + \int_{1}^{2} \frac{4}{ص+1}\,دص$

$= \left[ص^2 - 4ص\right]_{1}^{2} + 4\left[لو_{هـ}|ص+1|\right]_{1}^{4}$

$= (4-8) - (1-4) + 4(لو_{هـ}3 - لو_{هـ}2)$

$= -1 + 4(لو_{هـ}3 - لو_{هـ}2)$

٢٧) $\int \frac{\left((\sqrt{س})(\sqrt{س}+1)\right)^3}{2س^2} \, دس$

$= \int \frac{(\sqrt{س})^3(\sqrt{س}+1)^3}{2س^2} \, دس$

$= \int \frac{(\sqrt{س}+1)^3}{2\sqrt{س}} \, دس$

$ص = \sqrt{س}+1$

$ص-1 = \sqrt{س}$

$(ص-1)^2 = س$

$2(ص-1)\,دص = دس$

$= \int \frac{ص^3}{2\sqrt{س}} \times 2(ص-1)\,دص$

$= \int \frac{ص^3}{\cancel{2(ص-1)}} \times \cancel{2(ص-1)}$

$= \int ص^3\,دص$

$= \frac{1}{4}ص^4 + جـ$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{س}+1)^4 + جـ$

٢٨) $\int \frac{1}{\sqrt{هـ^س+1}} \, دس$

$ص = \sqrt{هـ^س+1}$

$ص^2 = هـ^س+1$

$\frac{2ص\,دص}{هـ^س} = دس$

$= \int \frac{1}{\cancel{ص}} \times \frac{2\cancel{ص}}{هـ^س}\,دص$

$= \int \frac{2}{ص^2-1}\,دص$

$= \int \frac{2}{(ص-1)(ص+1)}\,دص$

$= \int \frac{أ}{ص-1}\,دص + \int \frac{ب}{ص+1}\,دص$

$ص=1 \leftarrow أ=1$ ، $ص=-1 \leftarrow ب=-1$

$= لو_{هـ}|ص-1| - لو_{هـ}|ص+1| + جـ$

$= لو_{هـ}\left|\sqrt{هـ^س+1}-1\right| - لو_{هـ}\left|\sqrt{هـ^س+1}+1\right| + جـ$

٢٩) $\int \left(\frac{س}{س^2+5} + \frac{س}{س^3-4س} \right) دس$

$= \int \frac{س}{س^2+5}\,دس + \int \frac{\cancel{س}}{\cancel{س}(س^2-4)}\,دس$

ل $2س$

$= \frac{1}{2}لو_{هـ}|س^2+5| + \int \frac{1}{(س-2)(س+2)}\,دس$

$= \frac{1}{2}لو_{هـ}|س^2+5| + \int \frac{أ}{س-2}\,دس + \int \frac{ب}{س+2}\,دس$

$س=2 \leftarrow أ=\frac{1}{4}$ ، $س=-2 \leftarrow ب=-\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}لو_{هـ}|س^2+5| + \frac{1}{4}لو_{هـ}|س-2| - \frac{1}{4}لو_{هـ}|س+2| + جـ$

٣٠) $\int \frac{1}{\text{س}^2}\left(1+\text{ه}^{\frac{1}{\text{س}}}\right)^3 \text{دس}$

$\text{ص} = 1 + \text{ه}^{\frac{1}{\text{س}}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\frac{1}{\text{س}^2} \times \text{ه}^{\frac{1}{\text{س}}}}$

$= \int \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}} \times \text{ص}^3 \times \frac{-\cancel{\text{س}^2}}{\text{ه}^{\frac{1}{\text{س}}}} \text{دص}$

$= \int \frac{-\text{ص}^3}{\text{ص}-1} \text{دص}$

$-\text{ص}^3 \div (\text{ص}-1) = -\text{ص}^2 - \text{ص} - 1$ والباقي -1

$= \int (-\text{ص}^2 - \text{ص} - 1)\, \text{دص} + \int \frac{-1}{\text{ص}-1}$

$= -\frac{\text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^2}{2} - \text{ص} - \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}-1| + \text{ج}$

٣١) $\int_2^3 \frac{\sqrt{\text{س}^2(\text{س}-2)}}{3\text{س}} \text{دس}$

$= \int_2^3 \frac{|\text{س}|\sqrt{\text{س}-2}}{3\text{س}} \text{دس}$

$= \int_2^3 \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt{\text{س}-2}}{3\cancel{\text{س}}} \text{دس} = \int_2^3 \frac{1}{3}(\text{س}-2)^{\frac{1}{2}} \text{دس}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}(\text{س}-2)^{\frac{3}{2}} \Big]_2^3$

$= \frac{2}{9}\sqrt{(\text{س}-2)^3} \Big]_2^3$

$= \frac{2}{9}(1-0) = \frac{2}{9}$

٣٢) $\int \text{ه}^{2\text{س}} \times \text{ه}^{\text{ه}^{\text{س}}} \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ه}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ه}^{\text{س}}}$

$= \int \text{ه}^{2\text{س}} \times \text{ه}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{ه}^{\text{س}}}$

$= \int \text{ه}^{\text{س}} \times \text{ه}^{\text{ص}} \text{دص}$

$= \int \text{ص}\, \text{ه}^{\text{ص}} \text{دص}$

$\text{م} = \text{ص} \longrightarrow \text{دم} = \text{دص}$

$\text{ده} = \text{ه}^{\text{ص}} \text{دص} \longrightarrow \text{ه} = \text{ه}^{\text{ص}}$

$= \text{ص}\,\text{ه}^{\text{ص}} - \int \text{ه}^{\text{ص}} \text{دص}$

$= \text{ص}\,\text{ه}^{\text{ص}} - \text{ه}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \text{ه}^{\text{س}}\,\text{ه}^{\text{ه}^{\text{س}}} - \text{ه}^{\text{ه}^{\text{س}}} + \text{ج}$

٣٣) $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2(\text{س}+1)}} \text{دس}$

$= \int_3^8 \frac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}+1}} \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+1}$

$\text{ص}^2 = \text{س}+1$

$2\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$3 \longrightarrow 2$

$8 \longrightarrow 3$

$= \int_2^3 \frac{1}{(\text{ص}^2-1)\cancel{\text{ص}}} \times 2\cancel{\text{ص}}\, \text{دص}$

$= \int_2^3 \frac{2}{\text{ص}^2-1} \text{دص}$

$= \int_2^3 \frac{2}{(\text{ص}-1)(\text{ص}+1)} \text{دص}$

$= \int_2^3 \frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} \text{دص} + \int_2^3 \frac{\text{ب}}{\text{ص}+1} \text{دص}$

$\text{ص} = 1 \longrightarrow \text{أ} = 1$ ، $\text{ص} = -1 \longrightarrow \text{ب} = -1$

$= \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}-1| \Big]_2^3 - \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}+1| \Big]_2^3$

$= \text{لو}_{\text{ه}} 2 - 0 - (\text{لو}_{\text{ه}} 4 - \text{لو}_{\text{ه}} 3)$

$= -\text{لو}_{\text{ه}} 2 + \text{لو}_{\text{ه}} 3$

٣٤) $\int \frac{\text{س}(2\text{جتا}^2\text{س} - 1)}{\text{جتا}^2\text{س}} \text{دس}$

$= \int 2\text{س}\, \text{دس} - \int \text{س}\, \text{قا}^2\text{س}\, \text{دس}$

$\text{م} = \text{س} \longrightarrow \text{دم} = \text{دس}$

$\text{ده} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} \longrightarrow \text{ه} = \text{ظاس}$

$= \text{س}^2 - \left(\text{س}\,\text{ظاس} - \int \text{ظاس}\, \text{دس}\right)$

$= \text{س}^2 - \text{س}\,\text{ظاس} - \text{لو}_{\text{ه}}|\text{جتاس}| + \text{ج}$

٣٥) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{\text{س}^2(\text{س}^{-2}-1)}}{\text{س}^4}\,\text{د س}$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt{\text{س}^{-2}-1}}{\text{س}^{\cancel{4}\,3}}\,\text{د س}$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \text{س}^{-3}\sqrt{\text{س}^{-2}-1}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{-2}-1}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^{-2}-1$

$2\,\text{ص د ص} = -2\,\text{س}^{-3}\,\text{د س}$

$\text{د س} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}^{-3}}\,\text{د ص}$

$\frac{1}{2} \longrightarrow \sqrt{3}$

$1 \longrightarrow 0$

$= \int_{\sqrt{3}}^{0} \cancel{\text{س}^{-3}} \times \text{ص} \times \frac{-\text{ص}}{\cancel{\text{س}^{-3}}}\,\text{د ص}$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \text{ص}^2\,\text{د ص}$

$= \frac{1}{3}\text{ص}^3 \Big]_{0}^{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 0) = \sqrt{3}$

٣٦) $\int \frac{\text{س}^3+2\text{س}^2+\text{س}+1}{\text{س}^2+2\text{س}+1}\,\text{د س}$

$$\begin{array}{r|l} & \text{س} \\ \hline \text{س}^2+2\text{س}+1 & \text{س}^3+2\text{س}^2+\text{س}+1 \\ & -\text{س}^3-2\text{س}^2-\text{س} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$= \int \text{س}\,\text{د س} + \int \frac{1}{(\text{س}+1)^2}\,\text{د س}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} + \int (\text{س}+1)^{-2}\,\text{د س}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} - (\text{س}+1)^{-1} + \text{ج}$

٣٧) $\int \frac{\text{س}^2-2\text{س}+1}{\text{س}^2+2\text{س}+1}\,\text{د س}$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline \text{س}^2+2\text{س}+1 & \text{س}^2-2\text{س}+1 \\ & -\text{س}^2-2\text{س}-1 \\ \hline & -4\text{س} \end{array}$$

$= \int 1\,\text{د س} + \int \frac{-4\text{س}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{د س}$

$= \text{س} - \int 4\text{س}(\text{س}+1)^{-2}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}+1$

$\text{د س} = \text{د ص}$

$= \text{س} - \int 4\text{س} \times \text{ص}^{-2}\,\text{د ص}$

$= \text{س} - \int 4(\text{ص}-1)\,\text{ص}^{-2}\,\text{د ص}$

$= \text{س} - \int 4\left(\frac{1}{\text{ص}} - \text{ص}^{-2}\right)\text{د ص}$

$= \text{س} - 4\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ص}^{-1}\right) + \text{ج}$

$= \text{س} - 4\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| + (\text{س}+1)^{-1}\right) + \text{ج}$

٣٨) $\int_{1}^{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}^2 - 3 + \frac{1}{\text{س}^2} + 4}\,\text{د س}$

$= \int_{1}^{\text{هـ}} \sqrt{\text{س}^2 + 2 + \frac{1}{\text{س}^2}}\,\text{د س}$

$= \int_{1}^{\text{هـ}} \sqrt{\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)^2}\,\text{د س}$

$= \int_{1}^{\text{هـ}} \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}}\right)\text{د س}$

$= \left[\frac{\text{س}^2}{2} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\right]_{1}^{\text{هـ}}$

$= \left(\frac{\text{هـ}^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right)$

$= \frac{\text{هـ}^2}{2} + \frac{1}{2}$

٣٩) $\int \frac{\sqrt[3]{3+\text{ظتا س}}}{2\,\text{جا}^2\text{س}}\,\text{د س}$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{قتا}^2\text{س}\,\sqrt[3]{3+\text{ظتا س}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{3+\text{ظتا س}}$

$\text{ص}^3 = 3 + \text{ظتا س}$

$\frac{-3\text{ص}^2\,\text{د ص}}{\text{قتا}^2\text{س}} = \text{د س}$

$\int \frac{1}{2}\,\cancel{\text{قتا}^2\text{س}} \times \text{ص} \times \frac{-3\text{ص}^2}{\cancel{\text{قتا}^2\text{س}}}$

$= \int -\frac{3}{2}\,\text{ص}^3\,\text{د ص}$

$= -\frac{3}{8}\,\text{ص}^4 + \text{ج} = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{(3+\text{ظتا س})^4} + \text{ج}$

٤٠) $\int \dfrac{\text{جتاس}}{١-٢\,\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \dfrac{\cancel{\text{جتاس}}}{١-٢\text{ص}^2} \times \dfrac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \dfrac{١}{(١-\sqrt{٢}\,\text{ص})(١+\sqrt{٢}\,\text{ص})}\,\text{دص}$

$= \int \dfrac{\text{أ}}{١-\sqrt{٢}\,\text{ص}}\,\text{دص} + \int \dfrac{\text{ب}}{١+\sqrt{٢}\,\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{ص} = \dfrac{١}{\sqrt{٢}} \leftarrow \text{أ} = \dfrac{١}{٢}$ ، $\text{ص} = \dfrac{-١}{\sqrt{٢}} \leftarrow \text{ب} = \dfrac{١}{٢}$

$= \dfrac{-١}{٢\sqrt{٢}}\,\text{لو}_{\text{ه}}|١-\sqrt{٢}\,\text{ص}| + \dfrac{١}{٢\sqrt{٢}}\,\text{لو}_{\text{ه}}|١+\sqrt{٢}\,\text{ص}| + \text{ج}$

$\boxed{٢}$ $٢ \times \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} - ٤ = ١٠$

$\therefore \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٧$

$\int_{٣}^{١} \text{ق}(٢\text{س}-١)\,\text{دس} + \Big[٢\text{س} - \text{س}^2\Big]_{٣}^{١}$

$\text{ص} = ٢\text{س} - ١$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{٢}$

$٣ \longrightarrow ٥$

$١ \longrightarrow ١$

$= \int_{٥}^{١} \text{ق(ص)} \times \dfrac{\text{دص}}{٢} + ٢ - ١٨$

$= \dfrac{١}{٢} \times -٧ - ١٦ = -\dfrac{٣٩}{٢}$

$\boxed{٣}$ $\int_{٣}^{٥} (\text{س}+٢)\,\text{ق}(\text{س}-٣)\,\text{دس} = ١٢$

$\text{ص} = \text{س} - ٣ \longrightarrow \text{دس} = \text{دص}$

$٣ \longrightarrow ٠$ ، $٥ \longrightarrow ٢$

$\int_{٠}^{٢} (\text{ص}+٥)\,\text{ق(ص)}\,\text{دص} = ١٢$

$\int_{٠}^{٢} \text{ص ق(ص)}\,\text{دص} + \int_{٠}^{٢} ٥\,\text{ق(ص)}\,\text{دص} = ١٢$

$\int_{٠}^{٢} \text{ص ق(ص)}\,\text{دص} + ٥ \times ٤ = ١٢$

$\therefore \int_{٠}^{٢} \text{ص ق(ص)}\,\text{دص} = -٨$

$\boxed{٤}$ $\int_{-١}^{٢} \text{س}^3\,\text{ق}''(\text{س}^2)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$-١ \longrightarrow ١$

$٢ \longrightarrow ٤$

$= \int_{١}^{٤} \text{س}^{\cancel{3}\,2}\,\text{ق}''(\text{ص}) \times \dfrac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$= \int_{١}^{٤} \dfrac{١}{٢}\,\text{ص}\,\text{ق}''(\text{ص})\,\text{دص}$

$\text{ع} = \dfrac{١}{٢}\text{ص} \longrightarrow \text{دع} = \dfrac{١}{٢}\,\text{دص}$

$\text{ده} = \text{ق}''(\text{ص})\,\text{دص} \longrightarrow \text{ه} = \text{ق}'(\text{ص})$

$= \Big[\dfrac{١}{٢}\,\text{ص}\,\text{ق}'(\text{ص})\Big]_{١}^{٤} - \int_{١}^{٤} \dfrac{١}{٢}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص}$

$= ٢ \times ٥ + \dfrac{١}{٢} \times ١ - \Big[\dfrac{١}{٢} \times \text{ق(ص)}\Big]_{١}^{٤}$

$= ١٠ + \dfrac{١}{٢} - \dfrac{١}{٢}(٣ - ٢)$

$= ١٠ + \dfrac{١}{٢} - \dfrac{١}{٢} = ١٠$

حل تمرين $\boxed{2}$

$\boxed{1}$ ١) $\int \text{س}^{3}\,\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$$= \int -\tfrac{1}{2}\,\text{س}^{3}\,\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س}\;\text{دس}$$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س} \longrightarrow \text{دم} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ده} = -\frac{1}{2}\text{س}^{3}\,\text{دس} \longrightarrow \text{ه} = -\frac{1}{8}\text{س}^{4}$

$$= -\frac{1}{8}\text{س}^{4}\,\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س} + \int \frac{1}{8}\text{س}^{3}\,\text{دس}$$

$$= -\frac{1}{8}\text{س}^{4}\,\text{لو}_{\text{ه}}\,\text{س} + \frac{1}{32}\text{س}^{4} + \text{ج}$$

٢) $\int \text{قا}^{3}\text{س}\;\text{ظا}^{5}\text{س}\;\text{دس}$

$$= \int \text{ص}^{\cancel{3}\,2}\;\text{ظا}^{\cancel{5}\,4}\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{ص ظا س}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{قا س} \\ \text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{قا س ظا س}} \end{array} \right.$$

$$= \int \text{ص}^{2}\,(\text{قا}^{2}\text{س} - 1)^{2}\,\text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^{2}\,(\text{ص}^{2} - 1)^{2}\,\text{دص}$$

$$= \int \text{ص}^{2}\,(\text{ص}^{4} - 2\text{ص}^{2} + 1)\,\text{دص}$$

$$= \int (\text{ص}^{6} - 2\text{ص}^{4} + \text{ص}^{2})\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{7}\text{ص}^{7} - \frac{2}{5}\text{ص}^{5} + \frac{1}{3}\text{ص}^{3} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{7}\text{قا}^{7}\text{س} - \frac{2}{5}\text{قا}^{5}\text{س} + \frac{1}{3}\text{قا}^{3}\text{س} + \text{ج}$$

٣) $\int \text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}-3)^{2}\,\text{دس}$

$$= \int 2\,\text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}-3)\,\text{دس}$$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}-3) \longrightarrow \text{دم} = \frac{1}{\text{س}-3}\,\text{دس}$

$\text{ده} = 2\,\text{دس} \longrightarrow \text{ه} = 2\text{س}$

$$= 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}-3) - \int \frac{2\text{س}}{\text{س}-3}\,\text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 2\text{س} & \text{س}-3 \\ \cancel{-2\text{س}} + 6 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

$$= 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}-3) - \int 2\,\text{دس} - \int \frac{6}{\text{س}-3}\,\text{دس}$$

$$= 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{ه}}(\text{س}-3) - 2\text{س} - 6\,\text{لو}_{\text{ه}}|\text{س}-3| + \text{ج}$$

٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ه}^{\text{س}} \sqrt{2 \times 2\,\text{جتا}^{2}\text{س}}\;\text{دس}$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ه}^{\text{س}} \times 2\,\text{جتا س}\;\text{دس}$$

$\text{م} = 2\text{ه}^{\text{س}} \longrightarrow \text{دم} = 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ده} = \text{جتا س دس} \longrightarrow \text{ه} = \text{جا س}$

$$= \left[2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جا س}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جا س}\;\text{دس}$$

$\text{م} = 2\text{ه}^{\text{س}} \longrightarrow \text{دم} = 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ده} = \text{جا س دس} \longrightarrow \text{ه} = -\text{جتا س}$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جتا س}\;\text{دس} = 2\text{ه}^{\frac{\pi}{2}} + \left[2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جتا س}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جتا س}\;\text{دس}$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جتا س دس} = 2\text{ه}^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\text{ه}^{\text{س}}\,\text{جتا س دس} = \text{ه}^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

٥) $\int 2\,\text{جا س جتا س}\;\text{لو}_{\text{ه}}\text{جتا س}\;\text{دس}$

$$= \int 2\,\cancel{\text{جا س}}\,\text{جتا س} \times \text{ص} \times \frac{-\text{جتا س}}{\cancel{\text{جا س}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{لو}_{\text{ه}}\text{جتا س} \\ \text{دس} = -\dfrac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\,\text{دص} \end{array} \right.$$

$$= \int -2\text{ص}\,\text{جتا}^{2}\text{س}\;\text{دص}$$

$$= \int -2\text{ص}\,\text{ه}^{2\text{ص}}\,\text{دص} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{لكن}\;\text{جتا س} = \text{ه}^{\text{ص}} \\ \text{جتا}^{2}\text{س} = \text{ه}^{2\text{ص}} \end{array} \right.$$

$\text{م} = -2\text{ص} \longrightarrow \text{دم} = -2\,\text{دص}$

$\text{ده} = \text{ه}^{2\text{ص}}\,\text{دص} \longrightarrow \text{ه} = \frac{1}{2}\text{ه}^{2\text{ص}}$

$$= -\text{ص}\,\text{ه}^{2\text{ص}} + \frac{1}{2}\text{ه}^{2\text{ص}} + \text{ج}$$

ملاحظة ! عليك فرض ص = جتا س

٦) $\int_{هـ}^{هـ^2} \frac{1}{س} لو_هـ(3 - لو_هـ س)\, ءس$

ص = لو_هـ س

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{\cancel{س}} لو_هـ(3-ص) \times \cancel{س}\, ءص$ ، ءس = س ءص ، هـ ← 1 ، هـ² ← 2

$= \int_{1}^{2} لو_هـ(3-ص)\, ءص$

ع = لو_هـ(3-ص) ⟵ ءع = $\frac{-1}{3-ص}$ ءص

ءهـ = ءص ⟵ هـ = ص

$= ص\, لو_هـ(3-ص) \Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{ص}{3-ص}\, ءص$

$$\begin{array}{r} -1 \\ -ص+3 \,\big)\, ص \\ \underline{\cancel{ص}-3} \\ 3 \end{array}$$

$= 2 \times 0 - 1 \times لو_هـ 2 + \int_1^2 -1\, ءص + \int_1^2 \frac{3}{3-ص}\, ءص$

$= -لو_هـ 2 - 1 - 3\, لو_هـ |3-ص| \Big]_1^2$

$= -لو_هـ 2 - 1 - 3(0 - لو_هـ 2)$

$= 2\, لو_هـ 2 - 1$

٧) $\int \left(لو_هـ هـ^{2س} - لو_هـ(1-س) \right) ءس$

$= \int \left(2س - لو(1-س) \right) ءس$

$= س^2 - \int لو_هـ(1-س)\, ءس$

ع = لو_هـ(1-س) ⟵ ءع = $\frac{-1}{1-س}$ ءس

ءهـ = ءس ⟵ هـ = س

$= س^2 - س\, لو_هـ(1-س) - \int \frac{-س}{1-س}\, ءس$

$$\begin{array}{r} -1 \\ -س+1 \,\big)\, س \\ \underline{\cancel{س}-1} \\ 1 \end{array}$$

$= س^2 - س\, لو_هـ(1-س) - \int -1\, ءس - \int \frac{1}{1-س}\, ءس$

$= س^2 - س\, لو_هـ(1-س) + س + لو_هـ|1-س| + جـ$

٨) $\int قا^2 س\, لو_هـ جتا س\, ءس$

ع = لو_هـ جتا س ⟵ ءع = $\frac{-جا س}{جتا س}$ ءس

ءهـ = قا²س ءس ⟵ هـ = ظا س

$= ظا س\, لو_هـ جتا س + \int ظا^2 س\, ءس$

$= ظا س\, لو_هـ جتا س + \int (قا^2 س - 1)\, ءس$

$= ظا س\, لو_هـ جتا س + ظا س - س + جـ$

$\boxed{9}$ $ع_ن = \int (لو_هـ س)^ن\, ءس$

ع = $(لو_هـ س)^ن$ ⟵ ءع = $ن (لو_هـ س)^{ن-1} \times \frac{1}{س}$ ءس

ءهـ = ءس ⟵ هـ = س

$ع_ن = س (لو_هـ س)^ن - \int ن (لو_هـ س)^{ن-1}\, ءس$

$ع_ن = س (لو_هـ س)^ن - ن \int (لو_هـ س)^{ن-1}\, ءس$

$\therefore ع_ن = س (لو_هـ س)^ن - ن\, ع_{ن-1}$

حل التمرين العام .

١) $\int \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٤}\, \text{د}\text{س}$

$$\begin{array}{r} ١ \\ \text{س}^2 - ٥\text{س} + ٤ \,\big)\, \overline{\text{س}^2} \\ \underline{-\cancel{\text{س}^2} + ٥\text{س} - ٤} \\ ٥\text{س} - ٤ \end{array}$$

$= \int ١\, \text{د}\text{س} + \int \frac{٥\text{س} - ٤}{(\text{س}-٤)(\text{س}-١)}\, \text{د}\text{س}$

$= \text{س} + \int \frac{\text{أ}}{\text{س}-٤}\, \text{د}\text{س} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س}-١}\, \text{د}\text{س}$

$\text{س} = ٤ \rightarrow \text{أ} = \frac{١٦}{٣}$ ، $\text{س} = ١ \rightarrow \text{ب} = \frac{-١}{٣}$

$= \text{س} + \frac{١٦}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٤| - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١| + \text{ج}$

٢) $\int \frac{١}{\left(\frac{\text{س}^2 + ١}{\text{س}}\right)^3}\, \text{د}\text{س}$

$= \int \frac{\text{س}^3}{(\text{س}^2 + ١)^3}\, \text{د}\text{س}$ ، $\text{ص} = \text{س}^2 + ١$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{٢\text{س}}$

$= \int \frac{\text{س}^3}{\text{ص}^3} \times \frac{\text{د}\text{ص}}{٢\text{س}}$

$= \int \frac{١}{٢} \text{س}^2\, \text{ص}^{-3}\, \text{د}\text{ص}$

$= \int \frac{١}{٢} (\text{ص} - ١)\, \text{ص}^{-3}\, \text{د}\text{ص}$

$= \int \frac{١}{٢} (\text{ص}^{-2} - \text{ص}^{-3})\, \text{د}\text{ص}$

$= \frac{١}{٢} \left(-\text{ص}^{-1} + \frac{\text{ص}^{-2}}{٢}\right) + \text{ج}$

$= \frac{١}{٢} \left(-(\text{س}^2 + ١)^{-1} + \frac{١}{٢} (\text{س}^2 + ١)^{-2}\right) + \text{ج}$

٣) $\int \text{س}\, \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}^2 + ١}}\, \text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 + ١}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^2 + ١$

$٢\text{ص}\,\text{د}\text{ص} = ٢\text{س}\, \text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\, \text{د}\text{ص}$

$= \int \cancel{\text{س}}\, \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}\, \text{د}\text{ص}$

$= \int \text{ص}\, \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{د}\text{ص}$

$\text{م} = \text{ص} \longrightarrow \text{د}\text{م} = \text{د}\text{ص}$

$\text{د}\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{د}\text{ص} \longrightarrow \text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= \text{ص}\, \text{هـ}^{\text{ص}} - \int \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{د}\text{ص}$

$= \text{ص}\, \text{هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \sqrt{\text{س}^2 + ١}\; \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}^2 + ١}} - \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}^2 + ١}} + \text{ج}$

٤) $\int \frac{٢\text{جا}٣\text{س}\, \text{جتا}\text{س}}{\text{جتا}٢\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$= \int \frac{\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}} (\text{جا}٤\text{س} + \text{جا}٢\text{س})}{\text{جتا}٢\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$= \int \frac{٢\text{جا}٢\text{س}\, \text{جتا}٢\text{س} + \text{جا}٢\text{س}}{\text{جتا}٢\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$= \int (٢\text{جا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س})\, \text{د}\text{س}$

$= -\text{جتا}٢\text{س} - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا}٢\text{س}| + \text{ج}$

٥) $\int \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س})\, \text{د}\text{س}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س}) \longrightarrow \text{د}\text{م} = \frac{٢\text{س} + ٢}{\text{س}^2 + ٢\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{ع} = \text{د}\text{س} \longrightarrow \text{ع} = \text{س}$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س}) - \int \frac{٢\text{س}^2 + ٢\text{س}}{\text{س}^2 + ٢\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س}) - \int \frac{٢\cancel{\text{س}} (\text{س} + ١)}{\cancel{\text{س}} (\text{س} + ٢)}\, \text{د}\text{س}$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س}) - \int \frac{٢\text{س} + ٢}{\text{س} + ٢}\, \text{د}\text{س}$

$$\begin{array}{r} ٢ \\ \text{س} + ٢ \,\big)\, \overline{٢\text{س} + ٢} \\ \underline{-\cancel{٢\text{س}} - ٤} \\ -٢ \end{array}$$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س}) - \int ٢\, \text{د}\text{س} + \int \frac{٢}{\text{س} + ٢}\, \text{د}\text{س}$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^2 + ٢\text{س}) - ٢\text{س} + ٢\, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٢| + \text{ج}$

٦) $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\frac{1}{\text{هـ}^{س}} + \text{جاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\frac{1 + \text{هـ}^{س}\text{جاس}}{\text{هـ}^{س}}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{س}\text{جاس} + \text{هـ}^{س}\text{جتاس}}{1 + \text{هـ}^{س}\text{جاس}}\ \text{دس}$

$\hookrightarrow \text{هـ}^{س}\text{جتاس} + \text{هـ}^{س}\text{جاس}$

$= \text{لو}_{هـ}|1 + \text{هـ}^{س}\text{جاس}| + \text{ج}$

٧) $\int \frac{1}{\text{جاس} + \frac{8}{\text{جاس}}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{1}{\frac{\text{جا}^2\text{س} + 8}{\text{جاس}}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جتا}^2\text{س} + 8}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{9 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جاس}}^{\,-1}}{9 - \text{ص}^2} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{جاس}}}$ $\left\{ \text{ص} = \text{جتاس} \quad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} \right.$

$= \int \frac{1}{\text{ص}^2 - 9}\ \text{دص}$

$= \int \frac{1}{(\text{ص} - 3)(\text{ص} + 3)}\ \text{دص}$

$= \int \frac{أ}{\text{ص} - 3}\ \text{دص} + \int \frac{ب}{\text{ص} + 3}\ \text{دص}$

ص $= 3 \leftarrow أ = \frac{1}{6}$ ، ص $= -3 \leftarrow ب = \frac{-1}{6}$

$= \frac{1}{6}\text{لو}_{هـ}|\text{ص} - 3| - \frac{1}{6}\text{لو}_{هـ}|\text{ص} + 3| + \text{ج}$

$= \frac{1}{6}\text{لو}_{هـ}|\text{جتاس} - 3| - \frac{1}{6}\text{لو}_{هـ}|\text{جتاس} + 3| + \text{ج}$

٨) $\int \frac{\sqrt{4 - \text{س}^2}}{\text{س}}\ \text{دس}$

ص $= \sqrt{4 - \text{س}^2}$

ص$^2 = 4 - $ س^2

$2\text{ص}\ \text{دص} = -2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}\ \text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{-\text{ص}}{\text{س}}\ \text{دص}$

$= \int \frac{-\text{ص}^2}{\text{س}^2}\ \text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 4}\ \text{دص}$

$= \int 1\ \text{دص} + \int \frac{4}{\text{ص}^2 - 4}\ \text{دص}$

$= \text{ص} + \int \frac{4}{(\text{ص} - 2)(\text{ص} + 2)}\ \text{دص}$

$= \text{ص} + \int \frac{أ}{\text{ص} - 2}\ \text{دص} + \int \frac{ب}{\text{ص} + 2}\ \text{دص}$

ص $= 2 \leftarrow أ = 1$ ، ص $= -2 \leftarrow ب = -1$

$= \text{ص} + \text{لو}_{هـ}|\text{ص} - 2| - \text{لو}_{هـ}|\text{ص} + 2| + \text{ج}$

$= \sqrt{4 - \text{س}^2} + \text{لو}_{هـ}|\sqrt{4 - \text{س}^2} - 2| - \text{لو}_{هـ}|\sqrt{4 - \text{س}^2} + 2|$
$+ \text{ج}$

٩) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^5\text{س} \times \sqrt{2\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^5\text{س} \times \sqrt{2}\ \text{جتاس}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\ \text{قا}^4\text{س}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}(1 + \text{ظا}^2\text{س})\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{1} \cancel{\text{قا}^2\text{س}}(1 + \text{ص}^2)\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$ $\left\{ \text{ص} = \text{ظاس} \quad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}} \quad 0 \longrightarrow 0 \quad \frac{\pi}{4} \longrightarrow 1 \right.$

$= \left[\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3} \right]_{0}^{1}$

$= 1 + \frac{1}{3} - 0 = \frac{4}{3}$

١٠) ∫ ظا² √س دس

= ∫ ظا²ص × ٢ص دص ‏ ‏ { ص = √س ، ص² = س ، ٢ص دص = دس

ع = ٢ص ⟵ دع = ٢ دص

دهـ = ظا²ص دص

دهـ = (قا²ص − ١) دص ⟵ هـ = ظاص − ص

= ٢ص ظاص − ٢ص² − ∫(٢ظاص − ٢ص) دص

= ٢ص ظاص − ٢ص² + ٢ لوهـ|قاص| + ص² + جـ

= ٢√س ظا√س − س + ٢ لوهـ|قا√س| + جـ

---

١١) $\int \frac{\sqrt[3]{س} - ١}{\sqrt[3]{س^٢} - ٤}$

$= \int \frac{ص - ١}{ص^٢ - ٤} \times ٣ص^٢ \, دص$ ‏ ‏ { $ص = \sqrt[3]{س}$ ، $ص^٣ = س$ ، $٣ص^٢ دص = دس$

$= \int \frac{٣ص^٣ - ٣ص^٢}{ص^٢ - ٤} \, دص$

$$\begin{array}{r} ٣ص - ٣ \\ ص^٢ - ٤ \;\big)\; ٣ص^٣ - ٣ص^٢ \\ -٣ص^٣ + ١٢ص \\ \hline -٣ص^٢ + ١٢ص \\ ٣ص^٢ - ١٢ \\ \hline ١٢ص - ١٢ \end{array}$$

$= \int (٣ص - ٣) \, دص + \int \frac{١٢ص - ١٢}{(ص-٢)(ص+٢)} \, دص$

$= \frac{٣}{٢}ص^٢ - ٣ص + \int \frac{أ}{ص-٢} \, دص + \int \frac{ب}{ص+٢} \, دص$

ص = ٢ ⟵ أ = ٣ ، ص = −٢ ⟵ ب = ٩

$= \frac{٣}{٢}ص^٢ - ٣ص + ٣\,لوهـ|ص-٢| + ٩\,لوهـ|ص+٢| + جـ$

$= \frac{٣}{٢}\sqrt[3]{س^٢} - ٣\sqrt[3]{س} + ٣\,لوهـ|\sqrt[3]{س} - ٢| + ٩\,لوهـ|\sqrt[3]{س} + ٢|$
$+ جـ$

المساحة .

أولاً : المساحة بين اقترانين .

إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين فإن مساحة المنطقة المحصورة بينهما هي :

$$م = \int_{أ}^{ب} \left(ق(س) - هـ(س)\right) دس$$

مع مراعاة أن المساحة موجبة دائماً .

ملاحظات هامة :

1) المستقيم الذي معادلته : $ص = أ$ يمثل اقتران .
بينما المستقيم الذي معادلته : $س = أ$ يمثل عمود ويكون بداية المنطقة أو نهايتها

2) يُعتبر محور السينات اقتراناً ومعادلته $ص = ٠$.
لكنه محور الصادات عمود ومعادلته $س = ٠$.

3) لإيجاد المساحة بين اقترانين نجد نقط تقاطعهما ولا حاجة للرسم .

4) لإيجاد المساحة بين ٣ اقترانات يجب الرسم .

$\boxed{1}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين :

1) $ق(س) = س^2 - س$ ، $هـ(س) = س + ٣$

الحل :

$ق(س) = هـ(س)$

$س^2 - س = س + ٣$

$س^2 - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠ \leftarrow س = ٣ ، -١$

$$\int_{-1}^{3} (س + ٣) - (س^2 - س)\ دس$$

$$= \int_{-1}^{3} (٢س - س^2 + ٣)\ دس$$

$$= س^2 - \frac{س^3}{٣} + ٣س \Big]_{-1}^{3}$$

$$= (٩ - ٩ + ٩) - (١ + \frac{١}{٣} - ٣)$$

$$= ٩ + ٢ - \frac{١}{٣} = ١١ - \frac{١}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

$\therefore م = \frac{٣٢}{٣}$

2) $ق(س) = ٤س^3 - ٣س$ ، $هـ(س) = ٥س$

الحل : $ق(س) = هـ(س)$

$٤س^3 - ٣س = ٥س \leftarrow ٤س^3 - ٨س = ٠$

$٤س(س^2 - ٢) = ٠ \leftarrow س = ٠ ، \sqrt{٢} ، -\sqrt{٢}$

$-\sqrt{٢}$ — $م_1$ — ٠ — $م_2$ — $\sqrt{٢}$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} (٤س^3 - ٨س)\ دس$$

$$= س^4 - ٤س^2 \Big]_{-\sqrt{2}}^{0}$$

$$= ٠ - (٤ - ٨) = ٤ \leftarrow م_1 = ٤$$

$$\int_{0}^{\sqrt{2}} (٤س^3 - ٨س)\ دس$$

$$= س^4 - ٤س^2 \Big]_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$= (٤ - ٨) - ٠ = -٤ \leftarrow م_2 = ٤$$

$\therefore م = م_1 + م_2$

$م = ٤ + ٤ = ٨$

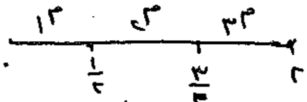
٣) $\text{د(س)} = \text{جتا}\,\text{ط}\,\text{س}$ ومحور السينات والواقعة في الفترة $[٠ ، ٢]$

الحل:

$\text{جتا ط س} = ٠$ ، $\text{ط س} \in [٠ ، ٢\text{ط}]$

$\text{ط س} = \frac{\text{ط}}{٢} ، \frac{٣\text{ط}}{٢}$

$\text{س} = \frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}$



$\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{جتا ط س ءس} = \frac{١}{\text{ط}}\,\text{جا ط س}\Big]_{٠}^{\frac{١}{٢}}$

$= \frac{١}{\text{ط}}(١ - ٠) = \frac{١}{\text{ط}}$

$\therefore \text{م}_١ = \frac{١}{\text{ط}}$

$\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \text{جتا ط س ءس} = \frac{١}{\text{ط}}\,\text{جا ط س}\Big]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{١}{\text{ط}}(-١ - ١) = \frac{-٢}{\text{ط}}$

$\therefore \text{م}_٢ = \frac{٢}{\text{ط}}$

$\int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} \text{جتا ط س ءس} = \frac{١}{\text{ط}}\,\text{جا ط س}\Big]_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

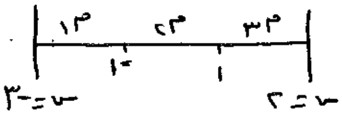
$= \frac{١}{\text{ط}}(٠ + ١) = \frac{١}{\text{ط}}$

$\therefore \text{م}_٣ = \frac{١}{\text{ط}}$

$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣ = \frac{١}{\text{ط}} + \frac{٢}{\text{ط}} + \frac{١}{\text{ط}} = \frac{٤}{\text{ط}}$

٤) $\text{د(س)} = ٣\text{س}^٢ - ٣$ ومحور السينات والمستقيمان: $\text{س} = -٣$ ، $\text{س} = ٢$

الحل:



$٣\text{س}^٢ - ٣ = ٠$

$\text{س}^٢ = ١ \longleftarrow \text{س} = \pm ١$

$\int_{-٣}^{-١} (٣\text{س}^٢ - ٣)\,\text{ءس} = \text{س}^٣ - ٣\text{س}\Big]_{-٣}^{-١}$

$= (-١ + ٣) - (-٢٧ + ٩)$

$= ٢ + ١٨ = ٢٠$

$\therefore \text{م}_١ = ٢٠$

$\int_{-١}^{١} (٣\text{س}^٢ - ٣)\,\text{ءس} = \text{س}^٣ - ٣\text{س}\Big]_{-١}^{١}$

$= (١ - ٣) - (-١ + ٣) = -٢ - ٢ = -٤$

$\therefore \text{م}_٢ = ٤$

$\int_{١}^{٢} (٣\text{س}^٢ - ٣)\,\text{ءس} = \text{س}^٣ - ٣\text{س}\Big]_{١}^{٢}$

$= (٨ - ٦) - (١ - ٣) = ٢ + ٢ = ٤$

$\therefore \text{م}_٣ = ٤$

$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣ = ٢٠ + ٤ + ٤ = ٢٨$

٥) $\text{د(س)} = \text{جتا}٢\text{س}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{جا س}$ الواقعة في الفترة $[\frac{\text{ط}}{٢} ، \text{ط}]$

الحل:

$\text{جتا}٢\text{س} = \text{جا س}$

$١ - ٢\text{جا}^٢\text{س} = \text{جا س}$

$٢\text{جا}^٢\text{س} + \text{جا س} - ١ = ٠$

$(٢\text{جا س} - ١)(\text{جا س} + ١) = ٠$

$\text{جا س} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{جا س} = -١$

$\text{س} = \frac{٥\text{ط}}{٦}$ ، $\text{س} = \frac{٣\text{ط}}{٢}$ ×

$\int_{\frac{\text{ط}}{٢}}^{\frac{٥\text{ط}}{٦}} (\text{جتا}٢\text{س} - \text{جا س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{جتا س}\Big]_{\frac{\text{ط}}{٢}}^{\frac{٥\text{ط}}{٦}}$

$= \left(\frac{١}{٢} \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) - ٠ = \frac{-٣}{٤}\sqrt{٣}$

$\therefore \text{م}_١ = \frac{٣}{٤}\sqrt{٣}$

$\int_{\frac{٥\text{ط}}{٦}}^{\text{ط}} (\text{جتا}٢\text{س} - \text{جا س})\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س} + \text{جتا س}\Big]_{\frac{٥\text{ط}}{٦}}^{\text{ط}}$

$= (٠ - ١) - \left(\frac{-٣}{٤}\sqrt{٣}\right)$

$= -١ + \frac{٣}{٤}\sqrt{٣}$

$\therefore \text{م}_٢ = \frac{٣}{٤}\sqrt{٣} - ١$

$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$= \frac{٣}{٤}\sqrt{٣} + \frac{٣}{٤}\sqrt{٣} - ١ = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} - ١$

ثانياً: المساحة بين ثلاثة اقترانات.

في هذه الحالة يجب الرسم وذلك كما يلي:

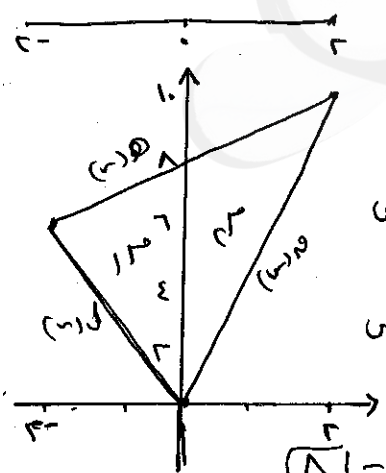
١) نجد نقط تقاطع كل اقترانين
٢) نحدد نقط كل اقتران.
٣) تعيين النقط في المستوى ونصل بينها
٤) يجب تجزئة المنطقة الى منطقتين أو أكثر عند احدى نقط التقاطع.

[١] جد مساحة المنطقة المحصورة بين:

١) $\text{ق(س)} = \text{س}^3 + \text{س}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{س} + ٨$
$\text{ل(س)} = -٣\text{س}$

الحل:

$\text{هـ(س)} = \text{ل(س)}$	$\text{ق(س)} = \text{ل(س)}$	$\text{ق(س)} = \text{هـ(س)}$
$\text{س} + ٨ = -٣\text{س}$	$\text{س}^3 + \text{س} = -٣\text{س}$	$\text{س}^3 + \cancel{\text{س}} = \cancel{\text{س}} + ٨$
$٨ = -٤\text{س}$	$\text{س}^3 + ٤\text{س} = ٠$	$\text{س}^3 = ٨$
$\boxed{\text{س} = -٢}$	$\text{س}(\text{س}^2 + ٤) = ٠$	$\boxed{\text{س} = ٢}$
	$\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\text{س}^2 = -٤$ ×	



$\text{م}_1 = \int_{-٢}^{٠} \text{هـ(س)} - \text{ل(س)}$

$\text{م}_1 = \int_{-٢}^{٠} \text{س} + ٨ + ٣\text{س}$

$= \int_{-٢}^{٠} (٤\text{س} + ٨)\, \text{دس}$

$= [٢\text{س}^2 + ٨\text{س}]_{-٢}^{٠}$

$= ٠ - (٨ - ١٦) = \boxed{٨}$

$\text{م}_2 = \int_{٠}^{٢} (\text{هـ(س)} - \text{ق(س)})\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٨) - (\text{س}^3 + \text{س})\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢} (٨ - \text{س}^3)\, \text{دس} = [٨\text{س} - \frac{\text{س}^4}{٤}]_{٠}^{٢} = \boxed{١٢}$

$\therefore \text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = ٨ + ١٢ = ٢٠$ وحدة مربعة

[٢] ما قيمة الثابت أ > ٠ بحيث أن، مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانين $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{أس}}$ ، $\text{هـ(س)} = \frac{\text{س}^2}{\text{أ}}$ تساوي ١٢ وحدة مربعة.

الحل: $\sqrt{\text{أس}} = \frac{\text{س}^2}{\text{أ}}$

$\text{أس} = \frac{\text{س}^4}{\text{أ}^2} \longrightarrow \text{س}^4 = \text{أ}^3\text{س}$

$\text{س}^4 - \text{أ}^3\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{س}(\text{س}^3 - \text{أ}^3) = ٠$

$\therefore$ س = ٠ أو س = أ

$\int_{٠}^{\text{أ}} (\text{أس})^{\frac{1}{2}} - \frac{\text{س}^2}{\text{أ}}\, \text{دس}$

$= \left[\frac{٢}{٣\text{أ}}(\text{أس})^{\frac{3}{2}} - \frac{\text{س}^3}{٣\text{أ}}\right]_{٠}^{\text{أ}}$

$= \left[\frac{٢}{٣\text{أ}}\sqrt{(\text{أس})^3} - \frac{\text{س}^3}{٣\text{أ}}\right]_{٠}^{\text{أ}}$

$= \frac{٢}{٣}\text{أ}^2 - \frac{١}{٣}\text{أ}^2 = \frac{١}{٣}\text{أ}^2$

$\therefore \frac{١}{٣}\text{أ}^2 = ١٢ \longrightarrow \text{أ}^2 = ٣٦ \longrightarrow \text{أ} = ٦$

تدريب:

[١] جد مساحة المنطقة المحصورة بين:

١) $\text{ق(س)} = ٤\text{س}^3 - ٤\text{س}$ ومحور السينات

٢) $\text{ق(س)} = ٢\text{س}^2 + \text{س}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{س}^2 + ٢$
ومحور الصادات والمستقيم س = ٢

٣) $\text{ق(س)} = ١ + \text{جاس}$ ، $\text{هـ(س)} = ١ + \text{جتاس}$
والواقعة في الفترة $[\frac{\pi}{٢}, \frac{٣\pi}{٢}]$

٤) $\text{ق(س)} = \text{جتا}\frac{\pi}{٢}\text{س}$ ومحور السينات
والواقعة في الفترة [٠، ٤]

[٣] جد الثابت أ > ٠، إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ق(س)} = ٦ - ٢\text{س}^2$ ، ص = ٢أ في الربع الأول تساوي $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة

٢) $ق(س) = س^٢$ ، $هـ(س) = س + ٢$

$ل(س) = ٢ - س$

والواقعة في الربع الثاني ← $س \le ٠$ ، $ص \ge ٠$

الحل:

$ق(س) = هـ(س)$

$س^٢ = س + ٢$

$س^٢ - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢$ ✗ ، $\boxed{س = -١}$

$ق(س) = ل(س)$

$س^٢ = ٢ - س$

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٢}$ ، $س = ١$ ✗

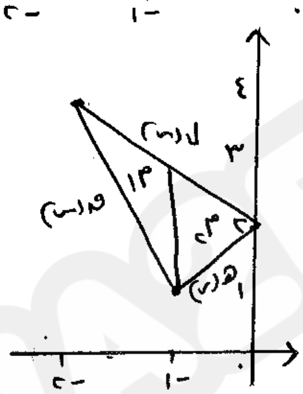
$هـ(س) = ل(س)$

$س + ٢ = ٢ - س$

$٢س = ٠$

$\boxed{س = ٠}$

$-٢ \quad -١ \quad ٠$



$م_١ = \int_{-٢}^{-١} ل(س) - ق(س)$

$= \int_{-٢}^{-١} (٢ - س - س^٢)\, ءس$

$= ٢س - \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \Big]_{-٢}^{-١}$

$= (-٢ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}) - (-٤ - ٢ + \frac{٨}{٣})$

$= ٤ - \frac{١}{٢} - \frac{٧}{٣} = \frac{٧}{٦}$

$م_٢ = \int_{-١}^{٠} \left(ل(س) - هـ(س)\right)\, ءس$

$= \int_{-١}^{٠} (٢ - س) - (س + ٢)\, ءس$

$= \int_{-١}^{٠} -٢س\, ءس$

$= -س^٢ \Big]_{-١}^{٠}$

$= ٠ + ١ = ١$

$\therefore م = م_١ + م_٢$

$= \frac{٧}{٦} + ١ = \frac{١٣}{٦}$ وحدة مربعة

٣) $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = ٦ - س$ ومحور السينات أي $ص = ٠$

الحل:

$ق(س) = هـ(س)$

$\sqrt{س} = ٦ - س$

$س = (٦ - س)^٢$

$س = ٣٦ - ١٢س + س^٢$

$س^٢ - ١٣س + ٣٦ = ٠$

$(س - ٩)(س - ٤) = ٠$

$س = ٩$ ✗ ، $\boxed{س = ٤}$

$ق(س) = ص$

$\sqrt{س} = ٠$

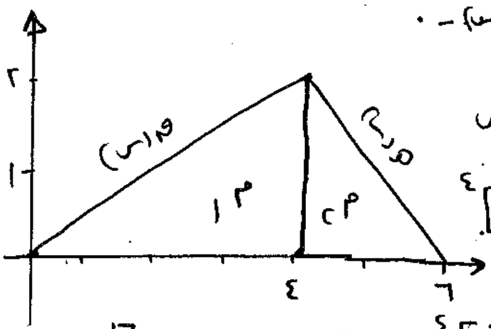
$\boxed{س = ٠}$

$هـ(س) = ص$

$٦ - س = ٠$

$\boxed{س = ٦}$

$٤ \quad ٦$



$م_١ = \int_{٠}^{٤} ق(س) - ٠$

$= \int_{٠}^{٤} س^{\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} \Big]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣}(٨ - ٠) = \frac{١٦}{٣}$

$م_٢ = \int_{٤}^{٦} هـ(س) - ٠ = \int_{٤}^{٦} (٦ - س)\, ءس$

$= ٦س - \frac{س^٢}{٢} \Big]_{٤}^{٦} = (٣٦ - ١٨) - (٢٤ - ٨)$

$= ٢$

$\therefore م = م_١ + م_٢ = \frac{١٦}{٣} + ٢ = \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة

٤) $ص = ٦ - س^٢$ ، $ص = س + ٤$

$ص = -س$

الحل:

$ص_١ = ص_٢$

$٦ - س^٢ = س + ٤$

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\boxed{س = -٢}$ ، $\boxed{س = ١}$

$ص_١ = ص_٣$

$٦ - س^٢ = -س$

$س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

$\boxed{س = ٣}$ ، $\boxed{س = -٢}$

$ص_٢ = ص_٣$

$س + ٤ = -س$

$٤ = -٢س$

$\boxed{س = -٢}$

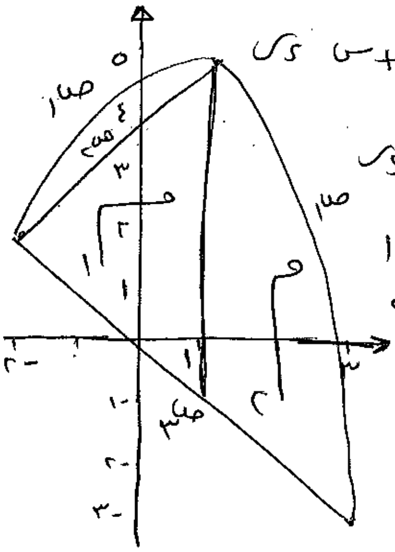
$-٢ \quad ١ \quad ٣$

$م_1 = \int_{-٢}^{١} (س+٤) + س \, دس$

$= \int_{-٢}^{١} (٢س+٤) \, دس$

$= [س^2 + ٤س]_{-٢}^{١}$

$= ٥ + ٤ = ٩$



$م_2 = \int_{١}^{٣} ٦ - س^2 + س \, دس$

$= [٦س - \frac{س^3}{٣} + \frac{س^2}{٢}]_{١}^{٣}$

$= (١٨ - ٩ + \frac{٩}{٢}) - (٦ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}) = \frac{٢٢}{٣}$

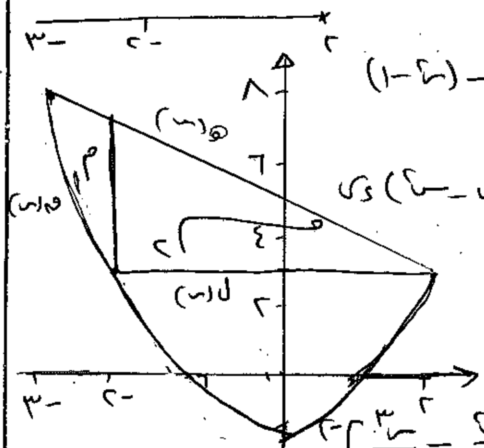
$\therefore م = م_1 + م_2 = ٩ + \frac{٢٢}{٣} = \frac{٤٩}{٣}$

٥) $ق(س) = س^2 - ١$ ، $هـ(س) = ٥ - س$

$ل(س) = ٣$

الحل :

$ق(س) = هـ(س)$	$ق(س) = ل(س)$	$هـ(س) = ل(س)$
$س^2 - ١ = ٥ - س$	$س^2 - ١ = ٣$	$٥ - س = ٣$
$س^2 + س - ٦ = ٠$	$س^2 = ٤$	$\boxed{س = ٢}$
$(س+٣)(س-٢) = ٠$	$\boxed{س = -٢}$	
$\boxed{س = -٣}$ ، $\boxed{س = ٢}$	$\boxed{س = ٢}$	



$م_1 = \int_{-٣}^{-٢} (٥ - س) - (س^2 - ١)$

$= \int_{-٣}^{-٢} (٦ - س - س^2) \, دس$

$= [٦س - \frac{س^2}{٢} - \frac{س^3}{٣}]_{-٣}^{-٢}$

$= (-١٢ - ٢ + \frac{٨}{٣}) - (-١٨ - \frac{٩}{٢} + ٩) = \frac{١٣}{٦}$

$م_2 = \int_{-٢}^{٢} (٥ - س - ٣) \, دس$

$= [٢س - \frac{س^2}{٢}]_{-٢}^{٢}$

$= (٤ - ٢) - (-٤ - ٢) = ٨$

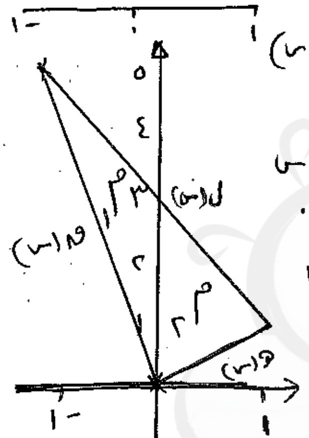
$\therefore م = م_1 + م_2 = \frac{١٣}{٦} + ٨ = \frac{٦١}{٦}$

٦) $ق(س) = س^2 - ٤س$ ، $هـ(س) = س^3$

$ل(س) = ٣ - ٢س$ والواقعة فوق محور السينات

الحل : لـهـ ص ≥ ٠

$ق(س) = هـ(س)$	$ق(س) = ل(س)$	$هـ(س) = ل(س)$
$س^2 - ٤س = س^3$	$س^2 - ٤س = ٣ - ٢س$	$س^3 = ٣ - ٢س$
$س^3 - س^2 + ٤س = ٠$	$س^2 - ٢س - ٣ = ٠$	$س^3 + ٢س - ٣ = ٠$
$س(س^2 - س + ٤) = ٠$	$(س-٣)(س+١) = ٠$	بالتجريب
$\boxed{س = ٠}$ ، $\Delta = ١ - ٤ \times ٤ = -١٥$ لا حل < ٠	$س = ٣$ ✗ ، $\boxed{س = -١}$	$\boxed{س = ١}$



$م_1 = \int_{-١}^{٠} (٣ - ٢س) - (س^2 - ٤س)$

$= \int_{-١}^{٠} (٣ + ٢س - س^2) \, دس$

$= [٣س + س^2 - \frac{س^3}{٣}]_{-١}^{٠}$

$= ٠ - (-٣ + ١ + \frac{١}{٣})$

$م_1 = \frac{٥}{٣}$

$م_2 = \int_{٠}^{١} (٣ - ٢س) - س^3 \, دس$

$= [٣س - س^2 - \frac{س^4}{٤}]_{٠}^{١}$

$= ٣ - ١ - \frac{١}{٤}$

$= \frac{٧}{٤}$

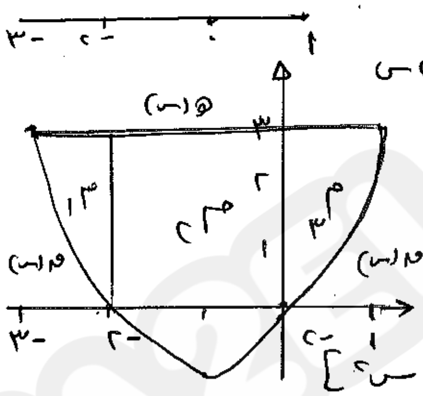
$\therefore م = م_1 + م_2$

$= \frac{٥}{٣} + \frac{٧}{٤} = \frac{٤١}{١٢}$

٧) ق(س) = س² + ٢س ، هـ(س) = ٣ ومحور السينات .

الحل :

ق(س) = هـ(س)	ق(س) = ص	هـ(س) = ص
س² + ٢س = ٣	س² + ٢س = ٠	٣ = ٠
س² + ٢س − ٣ = ٠	س(س + ٢) = ٠	✗
(س + ٣)(س − ١) = ٠	$\boxed{\text{س} = ٠}$ ، $\boxed{\text{س} = -٢}$	
$\boxed{\text{س} = -٣}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$		



$$\text{م}_1 = \int_{-٣}^{-٢} (٣ - \text{س}^2 - ٢\text{س})\,د\text{س}$$

$$= \left[٣\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٣} - \text{س}^2\right]_{-٣}^{-٢}$$

$$= \left(-٦ + \frac{٨}{٣} - ٤\right) - \left(-٩ + ٩ - ٩\right) = \frac{٥}{٣}$$

$$\text{م}_2 = \int_{-٢}^{٠} (٣ - ٠)\,د\text{س} = ٦$$

$$\text{م}_3 = \int_{٠}^{١} (٣ - \text{س}^2 - ٢\text{س})\,د\text{س} = \text{م}_1 = \frac{٥}{٣}$$

$$\therefore \text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3 = \frac{٥}{٣} + ٦ + \frac{٥}{٣} = \frac{٢٨}{٣}$$

طريقة أخرى :

$$\text{م} = \int_{-٣}^{١} (٣ - \text{س}^2 - ٢\text{س})\,د\text{س} - \int_{-٢}^{٠} (-\text{س}^2 - ٢\text{س})\,د\text{س}$$

$$= \left[٣\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٣} - \text{س}^2\right]_{-٣}^{١} + \left[\frac{\text{س}^3}{٣} + \text{س}^2\right]_{-٢}^{٠}$$

$$= \left(٣ - \frac{١}{٣} - ١\right) - \left(-٩ + ٩ - ٩\right)$$

$$+ \ ٠ - \left(-\frac{٨}{٣} + ٤\right)$$

$$= \frac{٣٢}{٣} - \frac{٤}{٣}$$

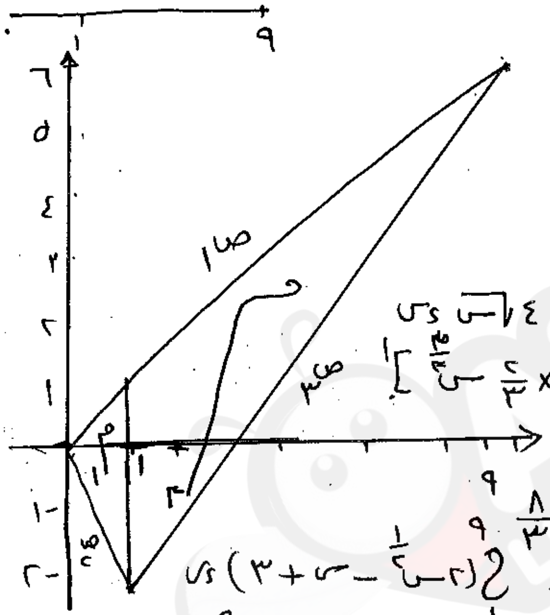
$$= \frac{٢٨}{٣}$$

٨) ص² = ٤س ، س − ص = ٣

الحل :

ص₁ = ٢√س ، ص₂ = −٢√س ، ص₃ = س − ٣

ص₁ = ص₂	ص₁ = ص₃	ص₂ = ص₃
٢√س = −٢√س	٢√س = س − ٣	−٢√س = س − ٣
√س = −√س	٤س = (س − ٣)²	٤س = (س − ٣)²
٢√س = ٠	٤س = س² − ٦س + ٩	س = ٩ ، $\boxed{\text{س} = ١}$
$\boxed{\text{س} = ٠}$	س² − ١٠س + ٩ = ٠	✗
	(س − ٩)(س − ١) = ٠	
	$\boxed{\text{س} = ٩}$ ، س = ١ ✗	



$$\text{م}_1 = \int_{٠}^{١} ٤\sqrt{\text{س}}\,د\text{س}$$

$$= ٤ \times \frac{٢}{٣}\left[\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١}$$

$$\text{م}_1 = \frac{٨}{٣}$$

$$\text{م}_2 = \int_{١}^{٩} (٢\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٣)\,د\text{س}$$

$$= \left[\frac{٤}{٣}\sqrt{\text{س}^3} - \frac{\text{س}^2}{٢} + ٣\text{س}\right]_{١}^{٩}$$

$$= \left(٣٦ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧\right) - \left(\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣\right) = \frac{٥٦}{٣}$$

$$\therefore \text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = \frac{٨}{٣} + \frac{٥٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$$

تدريب : جد مساحة المنطقة المحصورة بين :

١) ص = س³ ، ص = س + ٦ ، ص = $\frac{-\text{س}}{٢}$

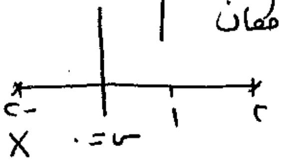
٢) ص = ٥س − س² − ٤ ، ص = س
ومحور السينات

٣) ص = $\frac{٣}{\text{س}}$ ، ص = س − ٢ ، ص = ٣
الواقعة في الربع الأول

٩) ص = ٣ − س^٢ ، ص = س + ١
ص = ٥ − س ومحور الصادات .

الحل : $\boxed{\text{س} = ٠}$

٣ − س^٢ = س + ١	٣ − س^٢ = ٥ − س	٥ − س = س + ١
س^٢ + س − ٢ = ٠	س^٢ − س + ٢ = ٠	٤ = ٢س
(س + ٢)(س − ١) = ٠	Δ = ١ − ٤ × ١ × ٢	$\boxed{\text{س} = ٢}$
س = −٢ ✗ ، $\boxed{\text{س} = ١}$	= −٧ ✗ لا يتقاطعان	

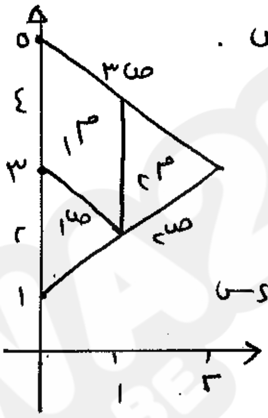


$\text{م}_١ = \int_٠^١ (٥ - \text{س}) - (٣ - \text{س}^٢)\, \text{د س}$

$= \int_٠^١ (٢ - \text{س} + \text{س}^٢)\, \text{د س}$

$= \left[٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} + \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_٠^١$

$= ٢ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١١}{٦}$



$\text{م}_٢ = \int_١^٢ (٥ - \text{س}) - (\text{س} + ١)\, \text{د س}$

$= \int_١^٢ (٤ - ٢\text{س})\, \text{د س}$

$= \left[٤\text{س} - \text{س}^٢\right]_١^٢ = (٨ - ٤) - (٤ - ١) = ١$

$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = \frac{١١}{٦} + ١ = \frac{١٧}{٦}$

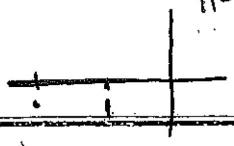
١٠) ق(س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ومحور السينات
والمستقيمان : ٢س − ص = ٠ ، س − هـ = ٠
والواقعة في الربع الأول هـ : العدد النيبري

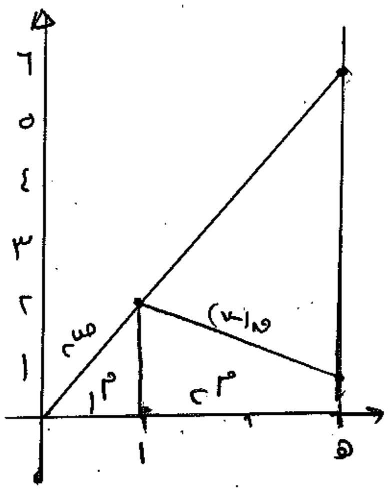
الحل : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

ق(س) = $\frac{٢}{\text{س}}$ ، ص١ = ٠ ، ص٢ = ٢س

$\boxed{\text{س} = \text{هـ}}$

ق(س) = ص١	ق(س) = ص٢	ص١ = ص٢
$\frac{٢}{\text{س}} = ٠$	$\frac{٢}{\text{س}} = ٢\text{س}$	٠ = ٢س
٢ = ٠	س^٢ = ١	$\boxed{\text{س} = ٠}$
✗	$\boxed{\text{س} = ١}$ ، س = −١ ✗	





$\text{م}_١ = \int_٠^١ ٢\text{س}\, \text{د س}$

$= \left[\text{س}^٢\right]_٠^١$

$= ١ - ٠$

$\text{م}_١ = ١$

$\text{م}_٢ = \int_١^{\text{هـ}} \frac{٢}{\text{س}}\, \text{د س}$

$= ٢\, \text{لو}|\text{س}| \Big]_١^{\text{هـ}}$

$= ٢(١ - ٠) = ٢ \rightarrow \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = ٣$

١١) ق(س) = س^٣ + ١ ، ل(س) = س^٢ + ٥
والمستقيمان ص + س − ١ = ٠ ، $\boxed{\text{س} = ٣}$
← ص = ١ − س

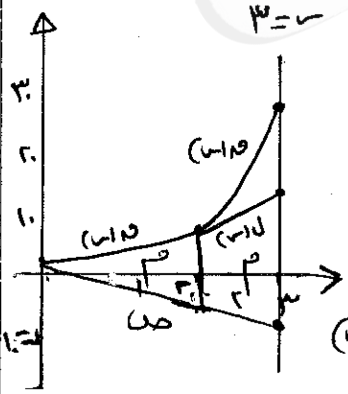
ق(س) = ل(س)	ق(س) = ص	ل(س) = ص
س^٣ + ١ = س^٢ + ٥	س^٣ + ١ = ١ − س	س^٢ + ٥ = ١ − س
س^٣ − س^٢ − ٤ = ٠	س^٣ + س = ٠	س^٢ + س + ٤ = ٠
بالتجريب	س(س^٢ + ١) = ٠	Δ = ١ − ٤ × ٤
$\boxed{\text{س} = ٢}$	$\boxed{\text{س} = ٠}$	= −١٥ ✗

$\text{م}_١ = \int_٠^٢ (\text{س}^٣ + ١) - (١ - \text{س})$

$= \int_٠^٢ (\text{س}^٣ + \text{س})\, \text{د س}$

$= \left[\frac{\text{س}^٤}{٤} + \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_٠^٢$

$= ٤ + ٢ = ٦$



$\text{م}_٢ = \int_٢^٣ (\text{س}^٢ + ٥) - (١ - \text{س})$

$= \int_٢^٣ (\text{س}^٢ + \text{س} + ٤)\, \text{د س}$

$= \left[\frac{\text{س}^٣}{٣} + \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٤\text{س}\right]_٢^٣$

$= (٩ + \frac{٩}{٢} + ١٢) - (\frac{٨}{٣} + ٢ + ٨)$

$= \frac{٧٧}{٦} \quad \therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = ٦ + \frac{٧٧}{٦} = \frac{١١٣}{٦}$

12) ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس
ومحور السينات والواقعة في $\left[\frac{\pi}{4} ، \frac{2\pi}{3}\right]$
← ص = ٠

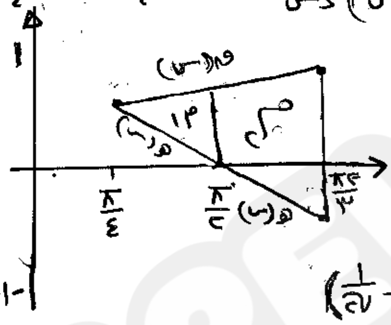
الحل:

ق(س) = هـ(س)
جاس = جتاس
ظاس = ١
$\boxed{س = \frac{\pi}{4}}$

ق(س) = ص
جاس = ٠
س = ٠ X

هـ(س) = ص
جتاس = ٠
$\boxed{س = \frac{\pi}{2}}$

$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{2\pi}{3}$



م١ = $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ (جاس − جتاس) دس

= −جتاس − جاس $\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

= (٠ − ١) − $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

∴ م١ = $\sqrt{2}$ − ١

م٢ = $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}$ جاس دس = −جتاس $\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}$

= $\frac{1}{2}$ − ٠ = $\frac{1}{2}$

∴ م = م١ + م٢ = $\sqrt{2}$ − $\frac{1}{2}$

تدريب:

جد مساحة المنطقة المحصورة بين:

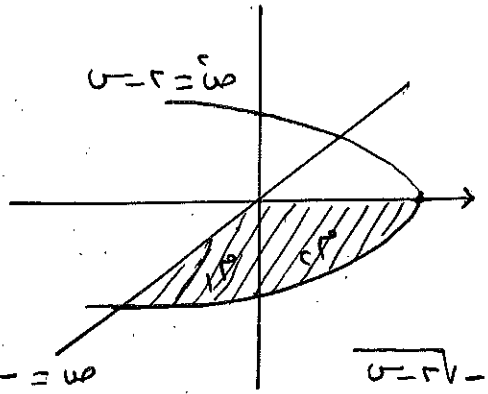
1) ق(س) = ٤ − س² ، هـ(س) = س − ٢
ل(س) = ٦ − س ومحور الصادات.

2) ص = س² + ٣ ، ص = ٦ − ٢س
ومحور السينات والمستقيم س = −١

3) ص = $\frac{8}{س^2}$ ، ص = س ، ص = ٨
ومحور الصادات.

2] جد مساحة المنطقة المظللة فيما يلي:

1)



الحل:

ص١ = $-\sqrt{2 - س}$
ص٢ = س
ص٣ = ٠

ص١ = ص٣
$-\sqrt{2 - س}$ = ٠
٢ − س = ٠
$\boxed{س = 2}$

ص١ = ص٢
$-\sqrt{2 - س}$ = س
٢ − س = س²
س² + س − ٢ = ٠
(س + ٢)(س − ١) = ٠
$\boxed{س = -2}$ ، س = ١ X

م١ = $\int_{-2}^{0}$ س + $(2 - س)^{\frac{1}{2}}$ دس

= $\frac{س^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{(2-س)^3}\Big]_{-2}^{0}$

= $\left(0 - \frac{2}{3}\sqrt{8}\right) - \left(2 - \frac{16}{3}\right)$

∴ م١ = $\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{8} - 2$

م٢ = $\int_{0}^{2} (2 - س)^{\frac{1}{2}}$ دس

= $-\frac{2}{3}\sqrt{(2-س)^3}\Big]_{0}^{2}$

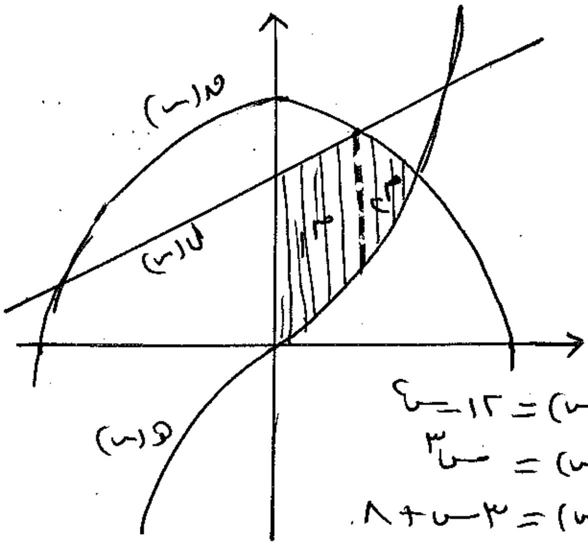
= $-\frac{2}{3}\left(0 - \sqrt{8}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{8}$

∴ م = م١ + م٢

= $\frac{16}{3} - \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{8}} - 2 + \cancel{\frac{2}{3}\sqrt{8}}$

= $\frac{10}{3}$ وحدة مربعة

٢)



$م(س) = ١٢ - س^٢$

$ه(س) = س^٣$

$ل(س) = ٣س + ٨$

الحل:

$م(س) = ل(س)$	$م(س) = ه(س)$
$١٢ - س^٢ = ٣س + ٨$	$١٢ - س^٢ = س^٣$
$س^٢ + ٣س - ٤ = ٠$	$س^٣ + س^٢ - ١٢ = ٠$
$(س + ٤)(س - ١) = ٠$	بالتجريب:
$س = -٤$ ✗ ، $\boxed{س = ١}$	$\boxed{س = ٢}$

$$م_١ = \int_{}^{١} ٣س + ٨ - س^٣ \; ءس$$

$$= \left[\frac{٣}{٢}س^٢ + ٨س - \frac{س^٤}{٤}\right]^{١}$$

$$= \frac{٣}{٢} + ٨ - \frac{١}{٤} = \frac{٣٧}{٤}$$

$$م_٢ = \int_{١}^{٢} ١٢ - س^٢ - س^٣ \; ءس$$

$$= \left[١٢س - \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٤}{٤}\right]_{١}^{٢}$$

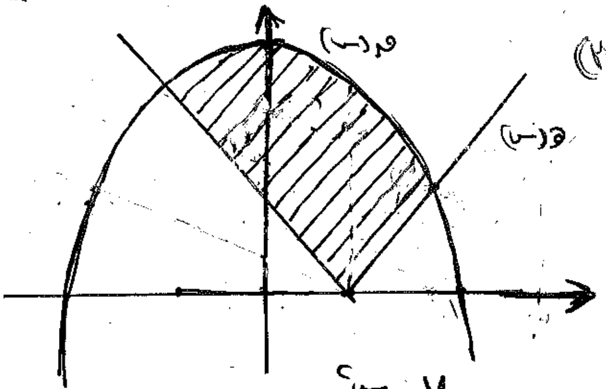
$$= \left(٢٤ - \frac{٨}{٣} - ٤\right) - \left(١٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right)$$

$$= ٨ - \frac{٧}{٣} + \frac{١}{٤} = \frac{٧١}{١٢}$$

$$\therefore م = م_١ + م_٢$$

$$= \frac{٣٧}{٤} + \frac{٧١}{١٢} = \frac{٩١}{٦}$$

٣)



$م(س) = \frac{٧ - س^٢}{٣}$

$ه(س) = |س - ١|$

الحل: $م(س) = ه(س)$

$$\frac{٧ - س^٢}{٣} = |س - ١|$$

إما:

$$\frac{٧ - س^٢}{٣} = ١ - س$$

$$٧ - س^٢ = ٣ - ٣س$$

$$س^٢ - ٣س - ٤ = ٠$$

$$(س - ٤)(س + ١) = ٠$$

$س = ٤$ ✗ ، $\boxed{س = -١}$

أو

$$\frac{٧ - س^٢}{٣} = س - ١$$

$$٧ - س^٢ = ٣س - ٣$$

$$س^٢ + ٣س - ١٠ = ٠$$

$$(س + ٥)(س - ٢) = ٠$$

$س = -٥$ ✗ ، $\boxed{س = ٢}$

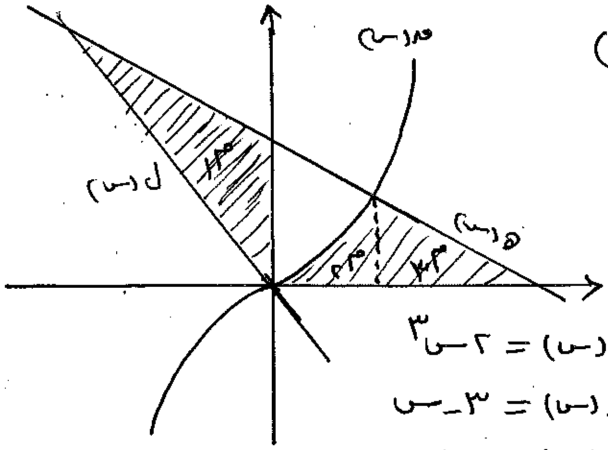
$$م = \int_{-١}^{٢} \frac{١}{٣}(٧ - س^٢) - |س - ١| \; ءس$$

$١ - س$ 　 $س - ١$

-١ 　 ١ 　 ٢

$$= \int_{-١}^{٢} \frac{١}{٣}(٧ - س^٢) \; ءس - \left(\int_{-١}^{١} ١ - س + \int_{١}^{٢} س - ١\right)$$

٤)



$\text{د(س)} = ٢\text{س}^٣$

$\text{هـ(س)} = ٣ - \text{س}$

$\text{ل(س)} = -٢\text{س}$

الحل:

$\text{هـ(س)} = \text{ل(س)}$ ، $٣ - \text{س} = -٢\text{س}$ ، $٣ = -\text{س}$ ، $\boxed{\text{س} = -٣}$

$\text{د(س)} = \text{هـ(س)}$ ، $٢\text{س}^٣ = ٣ - \text{س}$ ، $٢\text{س}^٣ + \text{س} - ٣ = ٠$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{هـ(س)} = ٠$ ، $٣ - \text{س} = ٠$ ، $\boxed{\text{س} = ٣}$

$$\text{م}_١ = \int_{-٣}^{٠} (٣ - \text{س} + ٢\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{-٣}^{٠} (٣ + \text{س})\,\text{دس} = \left[٣\text{س} + \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{-٣}^{٠}$$

$$= ٠ - (-٩ + \frac{٩}{٢}) = \frac{٩}{٢}$$

$$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} ٢\text{س}^٣\,\text{دس} = \left[\frac{\text{س}^٤}{٢}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{م}_٣ = \int_{١}^{٣} (٣ - \text{س})\,\text{دس} = \left[٣\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{١}^{٣}$$

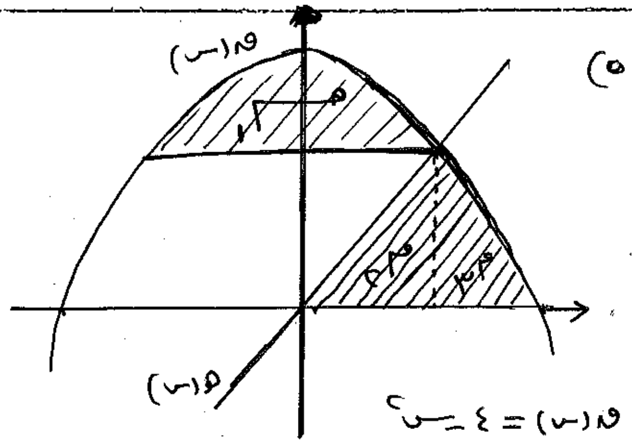
$$= (٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٢$$

$$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣$$

$$= \frac{٩}{٢} + \frac{١}{٢} + ٢$$

$\therefore \text{م} = ٥ + ٢ = ٧$ وحدات مربعة

٥)



$\text{د(س)} = ٤ - \text{س}^٢$

$\text{هـ(س)} = ٣\text{س}$

الحل:

$\text{د(س)} = \text{هـ(س)}$ ، $\text{د(س)} = ٠$

$٤ - \text{س}^٢ = ٣\text{س}$ ، $٤ - \text{س}^٢ = ٠$

$\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٤ = ٠$ ، $\boxed{\text{س} = ٢}$

$(\text{س} + ٤)(\text{س} - ١) = ٠$ ، $\cancel{\text{س} = -٢}$

$\cancel{\text{س} = -٤}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

لكن $\text{د(١)} = \text{هـ(١)} = ٣$

$\therefore$ معادلة الخط الأفقي هي: $\text{ص} = ٣$

$\therefore \text{د(س)} = \text{ص}$

$٤ - \text{س}^٢ = ٣ \longrightarrow \text{س}^٢ = ١$

$\therefore \cancel{\text{س} = ١}$ ، $\boxed{\text{س} = -١}$

$$\text{م}_١ = \int_{-١}^{١} (٤ - \text{س}^٢ - ٣)\,\text{دس}$$

$$= \int_{-١}^{١} (١ - \text{س}^٢)\,\text{دس} = \left[\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{-١}^{١}$$

$$= (١ - \frac{١}{٣}) - (-١ + \frac{١}{٣}) = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} ٣\text{س}\,\text{دس} = \left[\frac{٣}{٢}\text{س}^٢\right]_{٠}^{١} = \frac{٣}{٢}$$

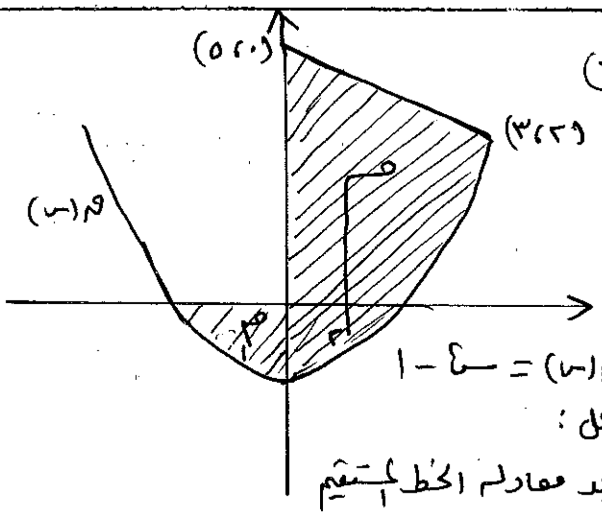
$$\text{م}_٣ = \int_{١}^{٢} (٤ - \text{س}^٢)\,\text{دس} = \left[٤\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

$$= (٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣}) = \frac{٥}{٣}$$

$$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣$$

$= \frac{٤}{٣} + \frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٣} = \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

٦)



$\text{ق(س)} = \text{س}^٢ - ١$

الحل :

نجد معادلة الخط المستقيم

ميل الخط $= \frac{٥-٣}{٠-٢} = -١$

معادلته : $\text{ص} - ٥ = -١(\text{س} - ٠)$

$\therefore \text{ص} = ٥ - \text{س}$

$\text{ق(س)} = ٠ \longrightarrow \text{س}^٢ - ١ = ٠$

$\therefore \boxed{\text{س} = ١} ، \boxed{\text{س} = -١}$

$\text{م}_١ = \int_{-١}^{٠} ٠ - (\text{س}^٢ - ١) \, \text{د س}$

$= \int_{-١}^{٠} (١ - \text{س}^٢) \, \text{د س} = \text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣} \Big]_{-١}^{٠}$

$= ٠ - (-١ + \frac{١}{٣}) = \frac{٢}{٣}$

$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{٢} (٥ - \text{س}) - (\text{س}^٢ - ١) \, \text{د س}$

$= \int_{٠}^{٢} (٦ - \text{س} - \text{س}^٢) \, \text{د س}$

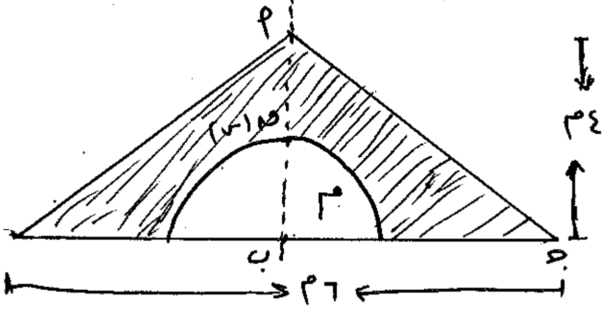
$= ٦\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٣}{٣} \Big]_{٠}^{٢}$

$= ١٢ - ٢ - \frac{٨}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$

$\therefore \text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٢٢}{٣} = ٨$

٣ الشكل المجاور يمثل الواجهة الأمامية لأحد المباني ، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران $\text{ق(س)} = ٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢$ ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة اذا علمت أنه سعر دهان الوحدة المربعة $\frac{١}{٢}$ دينار



الحل :

$\text{ق(س)} = ٠ \longrightarrow ٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢ = ٠$

$\therefore \text{س}^٢ = ٤ \longrightarrow \text{س} = ٢ ، \text{س} = -٢$

مساحة المنطقة المظللة =

$٢ \times ($مساحة Δ أ ب جـ − مساحة المنطقة م$)$

مساحة Δ أ ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٤ = ٦$

مساحة م $= \int_{٠}^{٢} (٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢) \, \text{د س}$

$= ٢\text{س} - \frac{١}{٦}\text{س}^٣ \Big]_{٠}^{٢}$

$= ٤ - \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة $= ٢ \times (٦ - \frac{٨}{٣})$

$= \frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة

$\therefore$ التكلفة = المساحة × السعر

$= \frac{٢٠}{٣} \times \frac{١}{٢}$

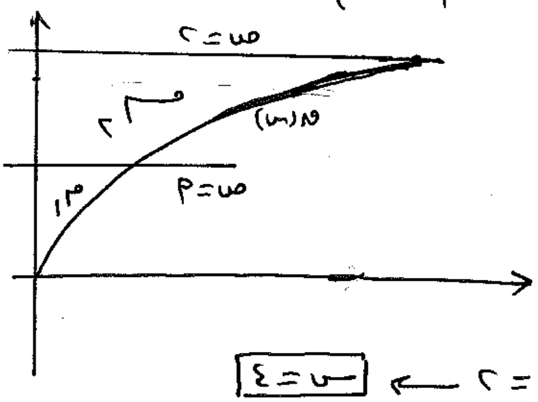
$= \frac{١٠}{٣}$ دينار .

٤ في الشكل المرسوم اذا علمت أن :

$\text{د(س)} = \sqrt{\text{س}}$

فما قيمة الثابت أ التي تجعل :

مساحة م١ = $\frac{1}{2}$ مساحة م٢ .



الحل :

$\sqrt{\text{س}} = ٢ \longrightarrow \boxed{\text{س} = ٤}$

$\sqrt{\text{س}} = \text{أ} \longrightarrow \boxed{\text{س} = \text{أ}^2}$

م = م١ + م٢　　لكن م٢ = ٢م١

م = م١ + ٢م١

∴ م = ٣م١

$$\int_{\text{أ}^2}^{٤} (٢ - \text{س}^{\frac{1}{2}})\, \text{دس} = ٣ \int^{\text{أ}^2} (\text{أ} - \text{س}^{\frac{1}{2}})\, \text{دس}$$

$$\left[٢\text{س} - \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3}\right]_{\text{أ}^2}^{٤} = ٣\left[\left(\text{أس} - \frac{2}{3}\sqrt{\text{س}^3}\right)\right]^{\text{أ}^2}$$

$$٨ - \frac{16}{3} = ٣\left(\text{أ}^3 - \frac{2}{3}\text{أ}^3\right)$$

$$\frac{8}{3} = ٣ \times \frac{1}{3}\text{أ}^3$$

$$\therefore \text{أ}^3 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

إيجاد التكامل المحدود من الرسم ⟵ باستخدام المساحة

① $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{دس} = \begin{cases} \text{م} & : \text{د فوق محور س} \\ -\text{م} & : \text{د تحت محور س} \end{cases}$

م : المساحة بين د(س) ومحور س .

بشرط ب > أ .

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د(س)}|\, \text{دس} = \text{م}$

بشرط ب > أ .

③ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{د(س)} - \text{هـ(س)})\, \text{دس} = \begin{cases} \text{م} & : \text{د(س)} > \text{هـ(س)} \\ -\text{م} & : \text{د(س)} < \text{هـ(س)} \end{cases}$

م : المساحة بين د(س) ، هـ(س)

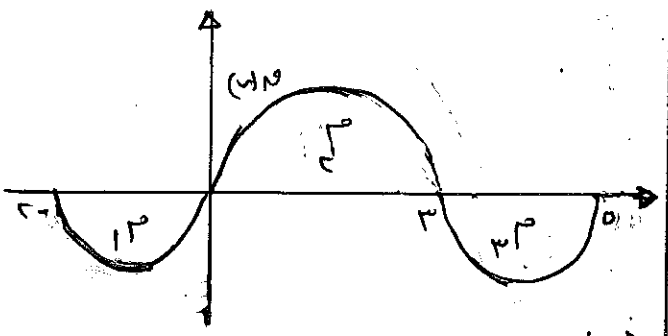
بشرط ب > أ .

١ في الشكل المرسوم منحنى د(س)

مساحة م١ = ٣ وحدات مربعة

مساحة م٢ = ٦ وحدات مربعة

مساحة م٣ = ٤ وحدات مربعة



جد :

١) $\int_{-٢}^{٣} \text{د(س)}\, \text{دس} = -\text{م}_1 + \text{م}_2 = -٣ + ٦$

$= ٣$

٢) $\int_{٥}^{٠} د(س)\,دس = -\int_{٠}^{٥} د(س)\,دس$

$= -(م_٢ - م_٣) = -(٦ - ٤) = -٢$

٣) $\int_{-٢}^{٥} د(س)\,دس = -م_١ + م_٢ - م_٣$

$= -٣ + ٦ - ٤ = -١$

٤) $\int_{-٢}^{٥} |د(س)|\,دس = م_١ + م_٢ + م_٣$

$= ٣ + ٦ + ٤ = ١٣$

٥) $\left|\int_{-٢}^{٥} د(س)\,دس\right| = |-م_١ + م_٢ - م_٣|$

$= |-١| = ١$

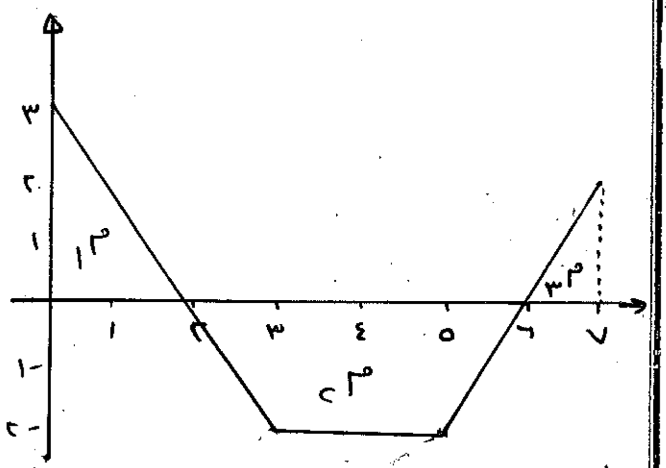
٦) $\int_{-٢}^{٣} (٢س + ٤د(س) - ٥)\,دس$

$= س^٢]_{-٢}^{٣} + ٤\int_{-٢}^{٣} د(س)\,دس - ٢٥$

$= ٥ + ٤(-م_١ + م_٢) - ٢٥$

$= -٢٠ + ٤ × ٣ = -٨$

$\boxed{٢}$ اذا كانت د(س) ممثلا كما في الشكل.



الحل:

مساحة $م_١ = \frac{١}{٢} × ٢ × ٣ = ٣$

مساحة $م_٢ = \frac{١}{٢}(٤ + ٢) × ٢ = ٦$

مساحة $م_٣ = \frac{١}{٢} × ١ × ٢ = ١$

١) $\int_{٠}^{٧} د(س)\,دس$

$= م_١ - م_٢ + م_٣$

$= ٣ - ٦ + ١ = -٢$

٢) $\int_{٢}^{٥} |د(س)|\,دس = م_٢ - \frac{١}{٢} × ١ × ٢$

$= ٦ - ١ = ٥$.

٣) $\int_{٠}^{٣} ٢س\,دَ(س)\,دس$.

هـ = ٢س ← ده = ٢ دس

دع = دَ(س) دس ← ع = د(س)

$= ٢س\,د(س)]_{٠}^{٣} - \int_{٠}^{٣} ٢د(س)\,دس$.

$= (٦ × -٢) - (٠ × ٣) - ٢(م_١ - \frac{١}{٢} × ١ × ٢)$

$= -١٢ - ٢ × ٢ = -١٦$.

٤) $\int_{١}^{٣} د(٨ - ٢س)\,دس$

ص = ٨ - ٢س

$دس = \frac{دص}{-٢}$

١ ← ٦

٣ ← ٢

$= \int_{٦}^{٢} د(ص) × \frac{دص}{-٢}$

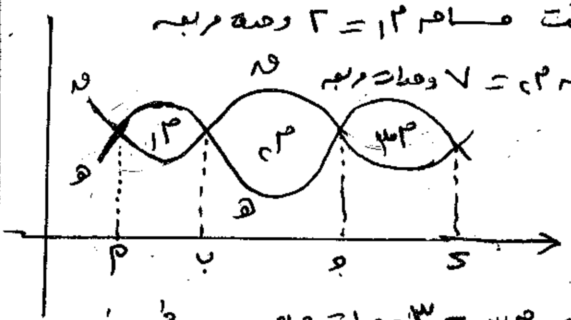
$= \frac{١}{٢}\int_{٢}^{٦} د(ص)\,دص$

$= \frac{١}{٢} × -م_٢ = \frac{١}{٢} × -٦ = -٣$.

$\boxed{٣}$ في الشكل المرسوم منحنى كل من د(س)، هـ(س)

اذا كانت مساحة $م_١$ = ٢ وحدة مربعة

مساحة $م_٢$ = ٧ وحدات مربعة



مساحة $م_٣$ = ٣ وحدات مربعة . أوجد :

$\int_{ء}^{م} (د(س) - هـ(س))\,دس = م_١ - م_٢ + م_٣$

$= ٢ - ٧ + ٣ = -٢$

تمرين [٣]

[١] جد مساحة المنطقة المحصورة بين:

١) $ق(س) = س^٣$ ، $هـ(س) = س^٢ + ٢س$

٢) $ق(س) = جاس$ ، $هـ(س) = جا٢س$
والواقعة في الفترة $[٠ ، \pi]$

٣) $ص = ٩ - س^٢$ ، $ص = ٨س$
ومحور السينات والواقعة في الربع الأول.

٤) $ق(س) = ٩ - س^٢$ ، $هـ(س) = س^٢ + ١$
$ل(س) = ١٠$

٥) $ق(س) = س^٢ - ٤$ ، $هـ(س) = ٢س + ٤$
ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.

٦) $ق(س) = س^٢ + ١$ ، $هـ(س) = ٧ - س$
$ل(س) = ٥$ والمستقيم $س = ١$

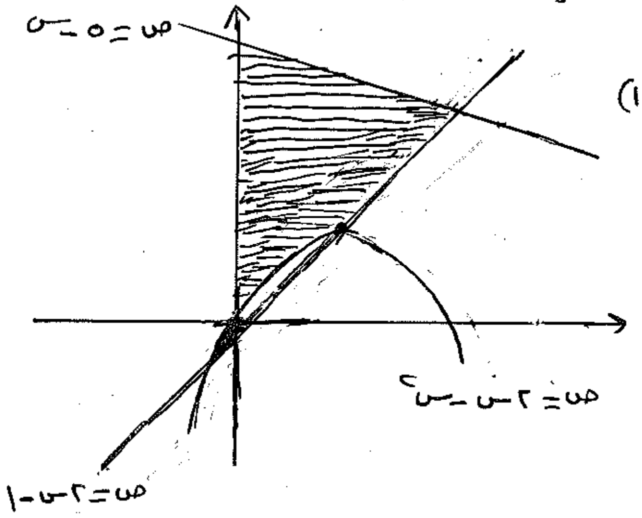
٧) $ق(س) = ٤ - س^٢$ ، $ص = س - ٢$
$ص = ٦ - س$ ومحور الصادات.

٨) $ص = (س - ١)^٢$ ، $ص = ٥ - س^٢$
$ص = س + ٥$ والواقعة في الربع الأول

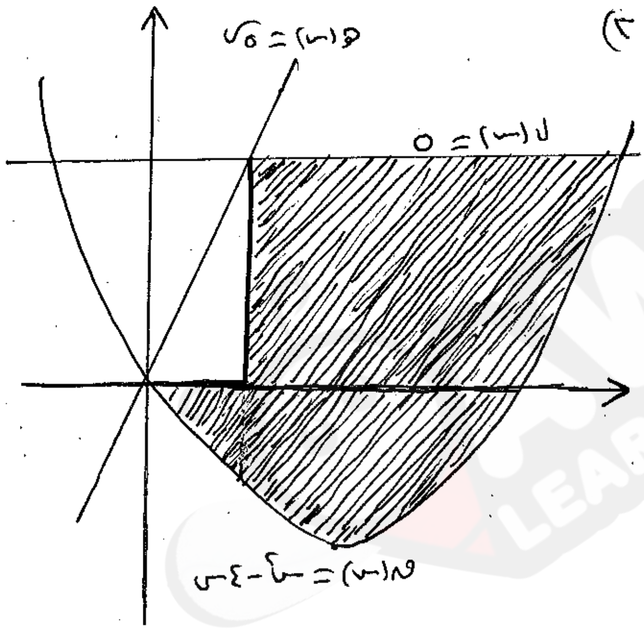
٩) $ص = \sqrt{٣س}$ ، $ص = ٥ - س$
$ص = س - ١$ والمستقيم $س = -١$

[٣] جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل

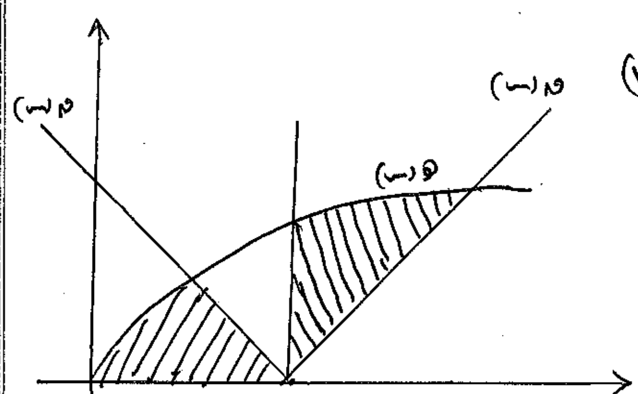
١)



٢)



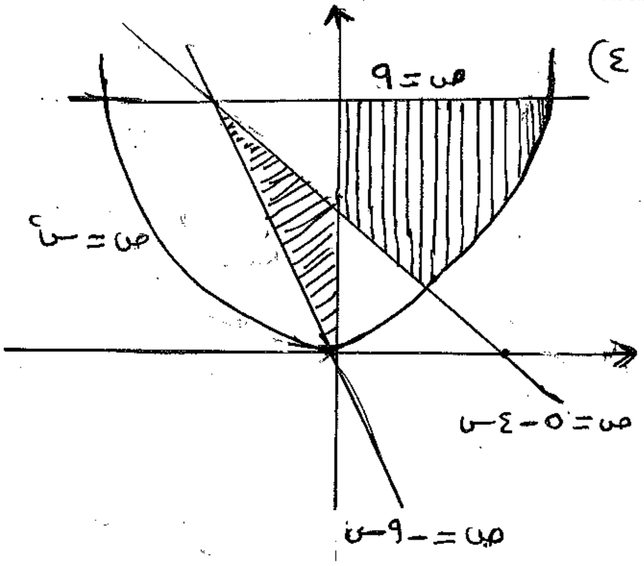
٣)



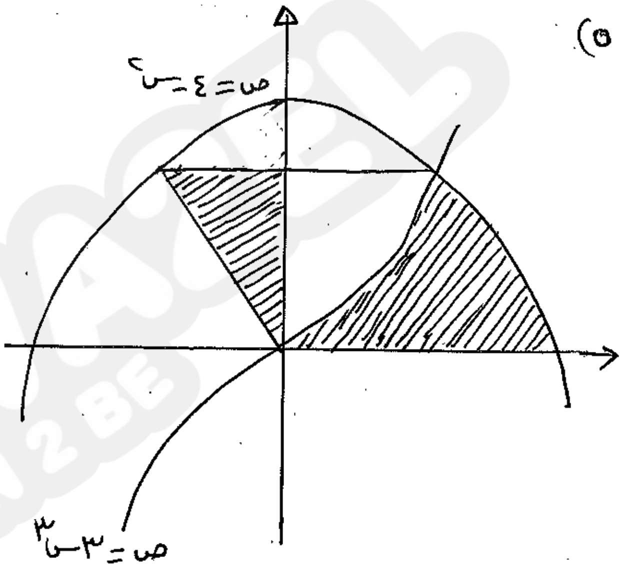
$ق(س) = |س - ٢|$

$هـ(س) = \sqrt{س}$

٤)



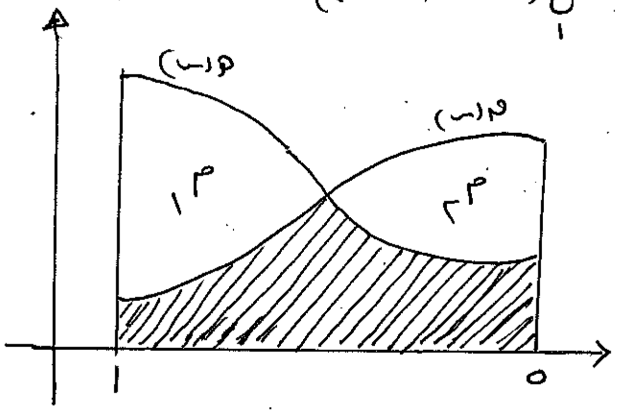
٥)



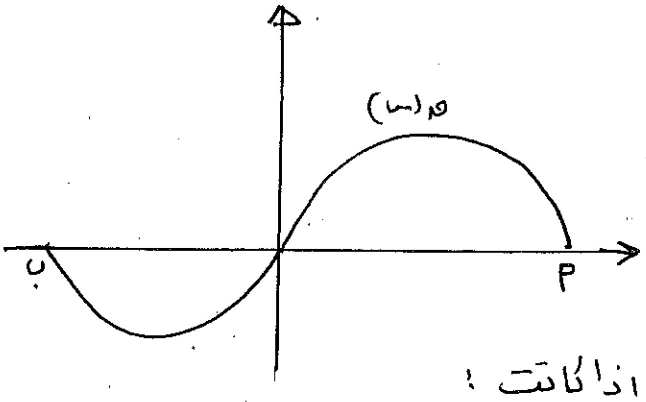
٦) مساحة م١ = ٦ وحدات مربعة

مساحة م٢ = ٤ وحدات مربعة

$$\int_{1}^{5} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\right) \text{دس} = ٣٤$$



٣ في الشكل المرسوم .



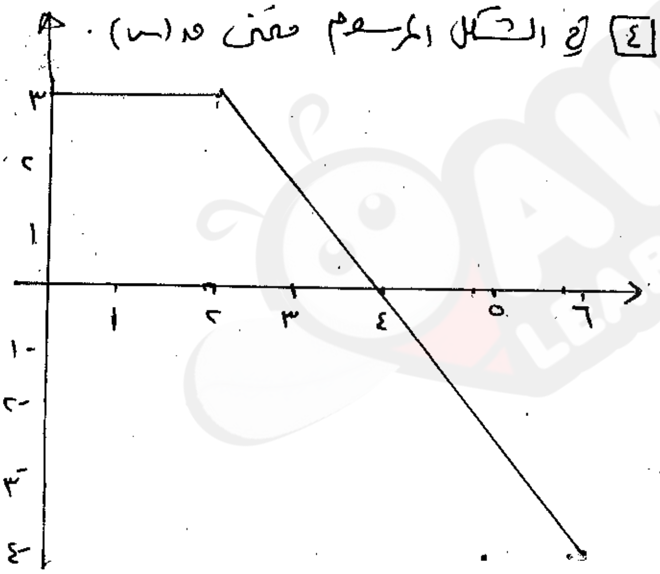
إذا كانت :

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات = ١٤ وحدة مربعة .

وكان : $\int_{0}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = ٦$

جد $\int_{\text{أ}}^{0} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$.

٤ في الشكل المرسوم منحنى ق(س) .



جد : ١) $\int_{6}^{0} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

٢) $\int_{2}^{6} |\text{ق}(\text{س})|\, \text{دس}$

٣) $\int_{-1}^{2} \text{س}\, \text{ق}(\text{س}^2 + 1)\, \text{دس}$

٥ في الشكل المرسوم الذي يمثل منحنى كل من ق(س)، هـ(س).

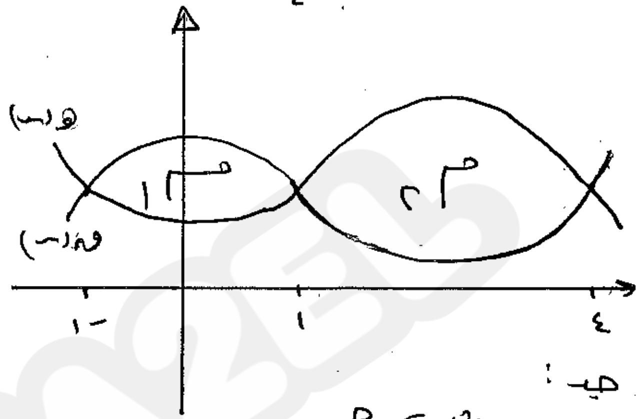
اذا علمت أن:

مساحة م١ = ٤ وحدات مربعة

مساحة م٢ = ٧ وحدات مربعة

وكان

$$\int_{-1}^{4} \frac{\text{ق(س)}}{\text{أ}}\,\text{دس} + \int_{4}^{-1} \frac{\text{هـ(س)}}{\text{أ}}\,\text{دس} = ١٢$$



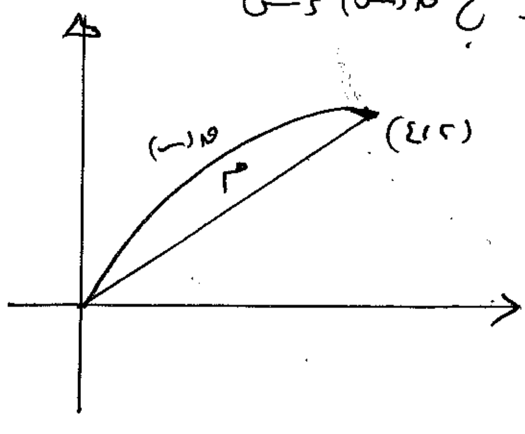
جد:

١) قيمة الثابت أ

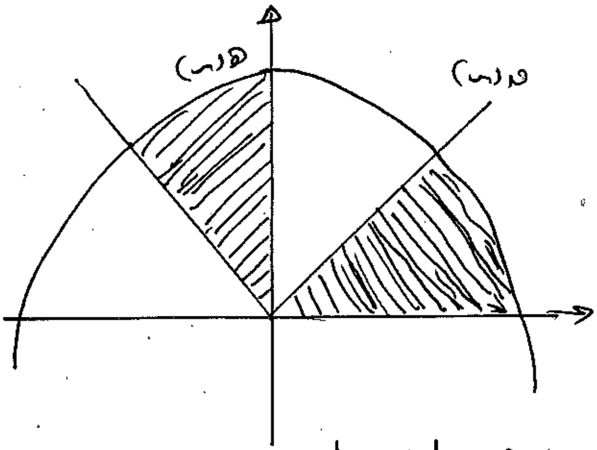
٢) $\int_{4}^{-1} \left(\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}\right)\,\text{دس}$

٦ في الشكل المرسوم اذا كانت مساحة المنطقة م تساوي ٩ وحدات مربعة

جد $\int^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس}$



٧ جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل



ق(س) = |٣س|

هـ(س) = ٤ − س^٢

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية : هي المعادلة التي تحتوي على مشتقات مثل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}^2}{\text{2ص}}$ ، $\text{صَ جاس} = \text{ص}^2 - 1$

حل المعادلة التفاضلية :
يعني التخلص من المشتقات في المعادلة وذلك بفصل المتغيرات ثم تكامل الطرفين .

$\boxed{1}$ حل المعادلات التفاضلية التالية :

1) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{3س}+1)(\text{س}-1)}{\text{2ص}-1}$

الحل :
بالضرب التبادلي :

$(\text{2ص}-1)\,\text{دص} = (\text{3س}+1)(\text{س}-1)\,\text{دس}$

$(\text{2ص}-1)\,\text{دص} = (\text{3س}^2-\text{2س}-1)\,\text{دس}$

$\therefore \int (\text{2ص}-1)\,\text{دص} = \int (\text{3س}^2-\text{2س}-1)\,\text{دس}$

$\text{ص}^2 - \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{س} + \text{ج}$

2) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\text{2س}^3}$

الحل :

$\text{2س}^3\,\text{دص} = \sqrt{\text{ص}}\,\text{دس}$

$\frac{2}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص} = \frac{1}{\text{س}^3}\,\text{دس}$

$\text{2ص}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دص} = \text{س}^{-3}\,\text{دس}$

$\therefore \int \text{2ص}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دص} = \int \text{س}^{-3}\,\text{دس}$

$\text{4ص}^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{س}^{-2}}{-2} + \text{ج}$

3) $\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{جاس} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\,\text{جتا}^2\text{س} = 0$.

الحل :

$\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{جاس} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\,\text{جتا}^2\text{س}$

$\text{هـ}^{-\text{ص}}\,\text{جاس دس} = \text{جتا}^2\text{س دص}$

$\frac{1}{\text{هـ}^{-\text{ص}}}\,\text{دص} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \text{ظاس قاس دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \text{ظاس قاس دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{قاس} + \text{ج}$.

4) $\text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{دص} - \text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{دس} = 0$.

$\text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{دص} = \text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}}{\text{قا}^2\frac{\text{س}}{2}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{دس}$

$\text{دص} = (\frac{1}{2}\text{جاس})^2\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{1}{4}\,\text{جا}^2\text{س دس}$

$\text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\,(1 - \text{جتا2س})\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{1}{8}\,(1 - \text{جتا2س})\,\text{دس}$

$\int \text{دص} = \int \frac{1}{8}\,(1 - \text{جتا2س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{1}{8}\,(\text{س} - \frac{1}{2}\text{جا2س}) + \text{ج}$

٥) $(س^{٢}+٣س)\frac{دص}{دس} = هـ^{-٢ص}(س+١)(س^{٢}-٩)$

الحل:

$(س^{٢}+٣س)\ دص = هـ^{-٢ص}(س+١)(س^{٢}-٩)\ دس$

$\frac{١}{هـ^{-٢ص}}\ دص = \frac{(س+١)(س^{٢}-٩)}{س^{٢}+٣س}\ دس$

$هـ^{٢ص}\ دص = \frac{(س+١)(س-٣)\cancel{(س+٣)}}{س\cancel{(س+٣)}}\ دس$

$هـ^{٢ص}\ دص = \frac{س^{٢}-٢س-٣}{س}\ دس$

$\int هـ^{٢ص}\ دص = \int (س-٢-\frac{٣}{س})\ دس$

$\frac{١}{٢}هـ^{٢ص} = \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س - ٣لو_{هـ}|س| + جـ$

٦) $جتا^{٢}س\ دص + ص\ دس = دص$

أثبت أن $ص = \pm جـ هـ^{-ظتاس}$ هو حل المعادلة

$جتا^{٢}س\ دص - دص = -ص\ دس$

$(جتا^{٢}س-١)\ دص = -ص\ دس$

$\frac{١}{ص}\ دص = \frac{١}{١-جتا^{٢}س}\ دس$

$\frac{١}{ص}\ دص = \frac{١}{جا^{٢}س}\ دس$

$\int \frac{١}{ص}\ دص = \int قتا^{٢}س\ دس$

$لو_{هـ}|ص| = -ظتاس + جـ$

$|ص| = هـ^{-ظتاس+جـ}$

$|ص| = هـ^{-ظتاس} \times \underbrace{هـ^{جـ}}_{ثابت}$

$|ص| = جـ\ هـ^{-ظتاس}$

$ص = \pm جـ\ هـ^{-ظتاس}$

٧) $\frac{دص}{دس} = ١ - ص + س^{٢} - ص س^{٢}$

الحل:

$دص = (١-ص+س^{٢}-ص س^{٢})\ دس$

$دص = \left((١-ص) + س^{٢}(١-ص)\right)\ دس$

$دص = (١-ص)(١+س^{٢})\ دس$

$\frac{١}{١-ص}\ دص = (١+س^{٢})\ دس$

$\int \frac{١}{١-ص}\ دص = \int (١+س^{٢})\ دس$

$-لو_{هـ}|١-ص| = س + \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

تدريب: حل المعادلات التفاضلية التالية

١) $س\ دص = \sqrt{س}\ (٥-٢ص)^{٤}\ دس$

٢) $ظا^{٢}س\ دص = هـ^{٢ص}\ دس - دص$

٣) $\frac{دص}{دس}\left(\sqrt{س+١} - \sqrt{س}\right) = ١$

٤) $٤ظاص - قا^{٢}س \frac{دص}{دس} = ٠$

٥) $\sqrt{\frac{س^{٢}+٥}{ص}}\ دس = \frac{دص}{س}$

٦) $(س^{٢}-س-٢)\frac{دص}{دس} = ٦س ص^{٢}$

تذكر أن:

① ميل المماس $= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

② ميل العمودي على المماس $= -\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

③ السرعة ع $= \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ ف: المسافة

④ التسارع ت $= \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ ع: السرعة

⑤ السرعة الابتدائية = ع(٠)

[٢] اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي:

$$\frac{\text{ظتا}^{٢}\text{ص}}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}$$

جد قاعدة هذه العلاقة علما بأن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{١}{٢}، ٠)$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ظتا}^{٢}\text{ص}}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}$

$$\sqrt{٢\text{س}+٣}\ \text{ءص} = \text{ظتا}^{٢}\text{ص}\ \text{ءس}$$

$$\frac{١}{\text{ظتا}^{٢}\text{ص}}\ \text{ءص} = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+٣}}\ \text{ءس}$$

$$\text{ظا}^{٢}\text{ص}\ \text{ءص} = (٢\text{س}+٣)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$$

$$\int(\text{قا}^{٢}\text{ص}-١)\ \text{ءص} = \int(٢\text{س}+٣)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$$

$$\text{ظاص} - \text{ص} = (٢\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{ظاص} - \text{ص} = \sqrt{٢\text{س}+٣} + \text{جـ}$$

$(\frac{١}{٢}، ٠)$

$$\text{لـ}\ ٠ = \sqrt{٢\times\frac{١}{٢}+٣} + \text{جـ}$$

$$\therefore \text{جـ} = -٢$$

$$\therefore \text{ظاص} - \text{ص} = \sqrt{٢\text{س}+٣} - ٢$$

[٣] اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي:

$$\sqrt{\text{هـ}^{\text{ص}}}\left(٣ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$$

وكان منحنى العلاقة يمر بالنقطة (١، ٠) جد قيمة ص عندما س = −١

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{ص}}\left(٩ - \frac{٦}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)$

$$\int \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}}\ \text{ءص} = \int\left(٩ - \frac{٦}{\text{س}} + \text{س}^{-٢}\right)\text{ءس}$$

$$-٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = ٩\text{س} - ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - \text{س}^{-١} + \text{جـ}$$

(١، ٠)

$$\text{لـ}\ -٢ = ٩ - ٦\times٠ - ١ + \text{جـ}$$

$$\therefore \text{جـ} = -١٠$$

$$\therefore -٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = ٩\text{س} - ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - \frac{١}{\text{س}} - ١٠$$

عندما س = −١

$$-٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = -٩ - ٦\times٠ + ١ - ١٠$$

$$-٢\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = -١٨$$

$$\therefore \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = ٩$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}٩$$

$$-\frac{١}{٢}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}٩$$

$$\therefore \text{ص} = -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٩$$

٤) اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي

$$س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}$$

جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ، ٤) ، هـ: العدد النيبيري

الحل:

$$-\frac{دس}{دص} = س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}$$

$$س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}\ دص = -دس$$

$$\int دص = \int \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}}\ دس$$

$$ص = \int \frac{-١}{س\sqrt{٣+لو_{هـ} س}}\ دس$$

$$ع = \sqrt{٣+لو_{هـ} س}$$

$$ع^{٢} = ٣+لو_{هـ} س$$

$$٢ع\ دع = \frac{١}{س}\ دس$$

$$دس = ٢ع\ س\ دع$$

$$ص = \int \frac{-١}{\cancel{س×ع}} × \cancel{٢ع\ س}\ دع$$

$$ص = -٢ع + جـ$$

$$ص = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ} س} + جـ$$

(هـ، ٤)

$$٤ = -٢×٢ + جـ$$

$$جـ = ٨$$

$$∴ ص = -٢\sqrt{٣+لو_{هـ} س} + ٨$$

تدريب:

١) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي

$$\frac{\sqrt{٢ص+١}}{\sqrt{٣س-٢}}$$

جد قاعدة هذه العلاقة اذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (١، ٤).

٢) اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي

$$٣جتا^{٢}ص\ (٣س - \frac{١}{س})^{-٢}$$

جد قاعدة هذه العلاقة اذا كان منحناها يمر بالنقطة $(١، \frac{\pi}{٤})$.

٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي:

$$\frac{٣س^{٣}+١}{\sqrt{هـ^{ص+٢لو_{هـ} س}}}\ ،\ س>٢.$$

وكان منحنى العلاقة يمر بالنقطة (-١، ٠) جد قيمة ص عندما س = ١

5 يسير جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $\text{ت} = \frac{1}{2\text{ع}}$ ، $\text{ع} > 0$ حيث:
ت: تسارع الجسم ، ع: سرعة الجسم
إذا كانت سرعة الجسم الابتدائية $\sqrt{5}$ م/ث فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد 11 ثانية من بدء حركته علماً بأنه قطع مسافة 6 م بعد 4 ثوانٍ من حركته.

الحل:

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{1}{2\text{ع}}$$

$$2\text{ع}\ \text{دع} = \text{دن}$$

$$\int 2\text{ع}\ \text{دع} = \int \text{دن}$$

$$\text{ع}^2 = \text{ن} + \text{جـ}$$

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ن}+\text{جـ}}$$ لكن:

$\text{ع} = \sqrt{5}$ ، $\text{ن} = 0$ $\longrightarrow \sqrt{5} = \sqrt{\text{جـ}} \longrightarrow \text{جـ} = 5$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{\text{ن}+5}$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \sqrt{\text{ن}+5}$$

$$\text{دف} = (\text{ن}+5)^{\frac{1}{2}}\ \text{دن}$$

$$\int \text{دف} = \int (\text{ن}+5)^{\frac{1}{2}}\ \text{دن}$$

$$\text{ف} = \frac{2}{3}(\text{ن}+5)^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$$

لكن

$\text{ف} = 6$ ، $\text{ن} = 4$ $\longrightarrow 6 = \frac{2}{3}\sqrt{(4+5)^3} + \text{جـ}$

$6 = 18 + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = -12$

$$\therefore \text{ف} = \frac{2}{3}\sqrt{(\text{ن}+5)^3} - 12$$

وعندما $\text{ن} = 11$

$$\text{ف} = \frac{2}{3} \times 64 - 12 = \frac{92}{3}\ \text{م}$$

6 بدأ جسم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقاً للعلاقة:

$$\text{ت} = -4\text{ع}^{\frac{3}{2}} \quad ، \quad \text{ع} > 0$$

ت: تسارع الجسم ، ع: سرعة الجسم
إذا كانت سرعة الجسم عند بدء الحركة 4 سم/ث فأثبت أن $\text{ف} = 2\text{ن}\sqrt{\text{ع}}$.

الحل:

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -4\text{ع}^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \text{ع}^{-\frac{3}{2}}\ \text{دع} = \int -4\ \text{دن}$$

$$-2\text{ع}^{-\frac{1}{2}} = -4\text{ن} + \text{جـ}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{\text{ع}}} = -4\text{ن} + \text{جـ}$$

لكن:

$\text{ع} = 4$ ، $\text{ن} = 0$ $\longrightarrow -1 = 0 + \text{جـ}$

$$\therefore \text{جـ} = -1$$

$$\frac{-2}{\sqrt{\text{ع}}} = -4\text{ن} - 1$$

$$\frac{2}{\sqrt{\text{ع}}} = 4\text{ن} + 1 \longrightarrow \text{ع} = \frac{4}{(4\text{ن}+1)^2}$$

$$\int \text{دف} = 4(4\text{ن}+1)^{-2}$$

$$\text{ف} = 4 \times \frac{(4\text{ن}+1)^{-1}}{-4} + \text{جـ}$$

$$\text{ف} = \frac{-1}{4\text{ن}+1} + \text{جـ}$$

لكن

$\text{ف} = 0$ ، $\text{ن} = 0$ $\longrightarrow 0 = -1 + \text{جـ} \Rightarrow \text{جـ} = 1$

$$\therefore \text{ف} = \frac{-1}{4\text{ن}+1} + 1$$

$\text{ف} = \frac{4\text{ن}}{4\text{ن}+1}$ لكن $4\text{ن}+1 = \frac{2}{\sqrt{\text{ع}}}$

$$\therefore \text{ف} = 4\text{ن} \times \frac{\sqrt{\text{ع}}}{2} = 2\text{ن}\sqrt{\text{ع}}$$

٧ قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ٤٥م عن الارض لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ث ويتسارع مقداره −١٠م/ث² جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود الى سطح الارض .

الحل :

ت = −١٠

دع/دن = −١٠ ⟵ ∫دع = ∫−١٠ دن

ع = −١٠ن + جـ

ع = ٤٠
ن = ٠ ⟵ ٤٠ = ٠ + جـ ⟵ جـ = ٤٠

∴ ع = −١٠ن + ٤٠

دف/دن = −١٠ن + ٤٠

∫دف = ∫(−١٠ن + ٤٠) دن

ف = −٥ن² + ٤٠ن + جـ

لكن

ن = ٠
ف = ٤٥ ⟵ ٤٥ = ٠ + ٠ + جـ

جـ = ٤٥

∴ ف = −٥ن² + ٤٠ن + ٤٥

وعندما تعود الكرة الى سطح الارض

⟵ ف = ٠

٠ = −٥ن² + ٤٠ن + ٤٥ ÷ −٥

ن² − ٨ن − ٩ = ٠

(ن − ٩)(ن + ١) = ٠

ن = ٩ ، ن = −١ ✗

∴ $\boxed{\text{ن} = ٩}$

٨ قذف جسم رأسيا لاسفل من قمة برج ارتفاعه ٣٠م عن الارض فتحرك بتسارع مقداره ١٠م/ث² ، اذا علمت أنه اصطدم بالارض بعد ٢ ثانية من حركته جد سرعته الابتدائية .

الحل :

دع/دن = ١٠

∫دع = ∫١٠ دن

ع = ١٠ن + جـ١

دف/دن = ١٠ن + جـ١

∫دف = ∫(١٠ن + جـ١) دن

ف = ٥ن² + جـ١ن + جـ٢

لكن

ن = ٠
ف = ٠ ⟵ ٠ = ٠ + ٠ + جـ٢

∴ جـ٢ = ٠

ف = ٥ن² + جـ١ن

ن = ٢
ف = ٣٠ ⟵ ٣٠ = ٢٠ + ٢جـ١

٢جـ١ = ١٠ ⟵ جـ١ = ٥

∴ ع(٠) = ١٠×٠ + ٥ = ٥م/ث .

تدريب :

قذف جسم رأسيا لاعلى من سطح بناية بسرعة ابتدائية ٣٠م/ث ويتسارع مقداره −١٠م/ث² اذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية واحدة من حركته يساوي ٦٠م جد أقصى ارتفاع يصل الجسم عن سطح الارض .

٩ آلة صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار. اذا كانت قيمتها ق تتناقص بمرور الزمن وفقه العلاقة:

$$\frac{دق}{دن} = -\frac{٥٠٠}{(ن+١)^{٢}}$$

حيث ق: قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها.
احسب قيمة الآلة بعد ٣ سنوات من شرائها.

الحل:

$$\frac{دق}{دن} = -٥٠٠(ن+١)^{-٢}$$

$$\int دق = \int -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\, دن$$

$$ق = -٥٠٠\,\frac{(ن+١)^{-١}}{-١} + جـ$$

$$ق = \frac{٥٠٠}{ن+١} + جـ$$

لكن

ق = ٢٥٠٠

ن = ٠ ← ٢٥٠٠ = ٥٠٠ + جـ

جـ = ٢٠٠٠

$$\therefore ق = \frac{٥٠٠}{ن+١} + ٢٠٠٠$$

عندما ن = ٣

$$\therefore ق = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠$$

ق = ١٢٥ + ٢٠٠٠

ق = ٢١٢٥ دينار

١٠ يضخ الغاز في بالون فيزداد حجمه وفقه العلاقة:

$$\frac{دح}{دن} = ٠{,}٠٤\, ح \quad سم^{٣}/د$$

حيث ح: حجم البالون بعد ن دقيقة من بدء ضخ الغاز فيه.
اذا علمت أن حجم البالون عند بداية ضخ الغاز فيه ٣ سم³، هـ: العدد النيبيري
جد حجم البالون بعد ٥ دقائق من ضخ الغاز فيه.

الحل:

دح = ٠,٠٤ ح دن

$$\int \frac{١}{ح}\, دح = \int ٠{,}٠٤\, دن$$

لوهـ ح = ٠,٠٤ ن + جـ

لكن

ح = ٣

ن = ٠ ← لوهـ ٣ = ٠ + جـ

لوهـ ٣ = جـ

∴ لوهـ ح = ٠,٠٤ ن + لوهـ ٣

وعندما ن = ٥

لوهـ ح = ٠,٠٤ × ٥ + لوهـ ٣

لوح − لو٣ = ٢

$$لو_{هـ} \frac{ح}{٣} = ٢$$

$$\frac{ح}{٣} = هـ^{٢}$$

∴ ح = ٣ هـ² سم³

$\boxed{١١}$ خزان ماء فارغ سعته ٢١ دسم³ يُصب فيه الماء بحيث يزداد حجمه حسب العلاقة:

$$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = (\text{٢ن} - ١)^{٢}$$

حيث ع: حجم الماء في الخزان بعد ن دقيقة من بدء صب الماء فيه.

احسب الزمن اللازم ليمتلئ الخزان بالماء.

الحل:

$$\int \text{دع} = \int (\text{٢ن}-١)^{٢}\ \text{دن}$$

$$\text{ع} = \frac{(\text{٢ن}-١)^{٣}}{٦} + \text{جـ}$$

لكن

ن = ٠ ، ع = ٠ ← $٠ = \frac{-١}{٦} + \text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = \frac{١}{٦}$

$$\text{ع} = \frac{(\text{٢ن}-١)^{٣} + ١}{٦}$$

وعندما يمتلئ الخزان بالماء ← ع = ٢١

$$٢١ = \frac{(\text{٢ن}-١)^{٣} + ١}{٦}$$

$$١٢٦ = (\text{٢ن}-١)^{٣} + ١$$

$$(\text{٢ن}-١)^{٣} = ١٢٥$$

٥ = ٢ن − ١ ← ن = ٣ .

تدريب: يتناقص سعر جهاز خلوي حسب العلاقة $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{-١٠}{\sqrt{\text{٢ن}+٩}}$

ع: سعر الجهاز بالدينار

ن: الزمن بالسنوات.

اذا علمت أن سعر الجهاز ١٥٠ دينار عام ٢٠١٦ . ففي أي عام يصبح سعر الجهاز ١٣٠ دينار.

تمرين $\boxed{٤}$

$\boxed{١}$ حل المعادلات التفاضلية التالية

١) ظتا س دص − (ص−٣)² قا س دس = ٠

٢) دص − س² هـ^ص دس = ٢س هـ^ص دس

٣) $\frac{\text{س}+١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}$ دس = (س²ص − ص) دص

٤) $(\text{هـ}^{\text{س}} + ٣)\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}$

٥) ٢دص − ظا² ص دس = ٢قا² ٣س دص + دس

$\boxed{٢}$ اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\sqrt{\text{ص}}\,(٢\text{هـ}^{\text{س}} - ١)^{٢}$ جد قاعدة العلاقة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٠، ٤) .

$\boxed{٣}$ اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\sqrt{\text{ص}}}{\pi\ \text{جتا}\ \pi\text{س}}$

جد قيمة ص عندما س = $\frac{٣}{٢}$ علماً بأن منحناها يمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$، ١٦)

$\boxed{٤}$ اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $٢\text{س}\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}$ جد قاعدة هذه العلاقة اذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (٠، ٣) .

[٥] يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ت = \frac{1}{2} ع^2$

ت : تسارعه ، ع : سرعته

إذا كانت سرعته الابتدائية ٤ م/ث جد المسافة المقطوعة بعد ٣ ثانية من بدء حركته علماً بأنه قطع مسافة ٥م بعد ثانية واحدة من بدء حركته .

[٦] يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ع = \frac{1}{\pi} جتا^2 \pi ف$

ع : سرعته ، ف : المسافة المقطوعة

إذا علمت أن الجسم قطع مسافة ١م بعد ثانية واحدة من حركته جد الزمن اللازم ليقطع الجسم مسافة $\frac{1}{4}$ م .

[٧] قُذفت كرة رأسياً لأعلى من سطح برج بسرعة ابتدائية ٨٠ قدم/ث وبتسارع −٣٢ قدم/ث² فإذا علمت أن ارتفاع الكرة عن الأرض بعد ٢ ثانية من قذفها يساوي ١٢٠ قدم جد ارتفاع البرج

[٨] أُطلقت رصاصة على كومة رمل فكان تسارعها داخل الرمل يُعطى بالعلاقة $ت = -\sqrt{ع}$ ، ع > ٠ .

ع : سرعة الرصاصة داخل الرمل .

إذا علمت أن سرعتها لحظة ملامستها الرمل هي ٢٥ م/ث وأنها قطعت مسافة ٣م داخل الرمل بعد ٤ ثواني من ملامستها للرمل جد أكبر مسافة أفقية تقطعها الرصاصة داخل الرمل .

[٩] في يوم السبت بدأت مساحة جرح تتناقص حسب العلاقة :

$\frac{دم}{دن} = \frac{-3}{(ن+2)^2}$ حيث

م : مساحة الجرح بعد ن يوماً من بدء نقصانها .

إذا علمت أن مساحة الجرح يوم الأحد هي ٢ سم²

١) جد مساحة الجرح يوم الاثنين

٢) في أي يوم تكون مساحة الجرح ٥ر١ سم²

[١٠] يزداد وزن طفل مولود حسب العلاقة

$\frac{دو}{دن} = ٠٫٢\sqrt{و}$

حيث : و : وزن الطفل بعد ن اسبوع من ولادته .

فإذا علمت أن وزن الطفل عند الولادة ٣٫٢٤ كغم فاحسب وزنه بعد اسبوعين من ولادته

[١١] اشترى تاجر قطعة أرض بمبلغ ٧٥٠٠ دينار وكان سعرها يزداد بمرور الزمن حسب العلاقة

$\frac{دس}{دن} = ٦٠٠\sqrt{٢ن+١}$

حيث س : سعر القطعة بعد ن سنة من شرائها .

بعد كم سنة يربح التاجر ٥٢٠٠ دينار

[١٢] شب حريق في غابة وكانت مساحة المنطقة التي أصابها الحريق تزداد حسب العلاقة

$\frac{دم}{دن}$ = ٢،٠ و٠،٣ م دونم/ساعة .

م : مساحة المنطقة المحروقة

ن : الزمن بالساعات

إذا علمت أن المساحة التي أصابها الحريق عند اكتشافه هي ٣ دونم فما المساحة المحروقة بعد ساعتين من اكتشاف الحريق

حل تمرين $\boxed{٣}$

$\boxed{١}$

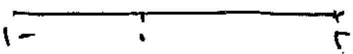
١) $س^٣ = س^٢ + ٢س$

$س^٣ - س^٢ - ٢س = ٠$

$س(س^٢ - س - ٢) = ٠$

$س(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٠ \text{ ، } س = ٢ \text{ ، } س = -١$



$\int_{-١}^{٠} (س^٣ - س^٢ - ٢س) \, ءس$

$= [\frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٣}{٣} - س^٢]_{-١}^{٠}$

$= ٠ - (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - ١) = \frac{٥}{١٢}$

∴ $م_١ = \frac{٥}{١٢}$

$\int_{٠}^{٢} (س^٣ - س^٢ - ٢س) \, ءس$

$= [\frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٣}{٣} - س^٢]_{٠}^{٢}$

$= (٤ - \frac{٨}{٣} - ٤) - ٠ = -\frac{٨}{٣}$

∴ $م_٢ = \frac{٨}{٣}$

∴ $م = م_١ + م_٢ = \frac{٥}{١٢} + \frac{٨}{٣} = \frac{٣٧}{١٢}$

٢) $جا س = جا ٢س$

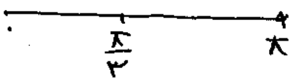
$جا س = ٢جا س \, جتا س$

$٢جا س \, جتا س - جا س = ٠$

$جا س (٢جتا س - ١) = ٠$

$جا س = ٠ \leftarrow س = ٠ \text{ ، } \pi$

$٢جتا س = ١ \leftarrow جتا س = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٣}$



$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} (جا س - جا ٢س) \, ءس$

$= [-جتا س + \frac{١}{٢} جتا ٢س]_{٠}^{\frac{\pi}{٣}}$

$= (-\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}) - (-١ + \frac{١}{٢}) = -\frac{١}{٤}$

∴ $م_١ = \frac{١}{٤}$

$\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi} (جا س - جا ٢س) \, ءس$

$= [-جتا س + \frac{١}{٢} جتا ٢س]_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi}$

$= (١ + \frac{١}{٢}) - (-\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}) = \frac{٩}{٤}$

∴ $م_٢ = \frac{٩}{٤}$

∴ $م = م_١ + م_٢ = \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{١٠}{٤}$

٣) $ص_١ = ٩ - س^٢ \text{ ، } ص_٢ = ٨س \text{ ، } ص_٣ = ٠$

$ص_١ = ص_٢$

$٩ - س^٢ = ٨س$

$س^٢ + ٨س - ٩ = ٠$

$(س + ٩)(س - ١) = ٠$

$س = -٩$ ✗ ، $\boxed{س = ١}$

$ص_١ = ص_٣$

$٩ - س^٢ = ٠$

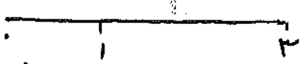
$س = -٣$ ✗

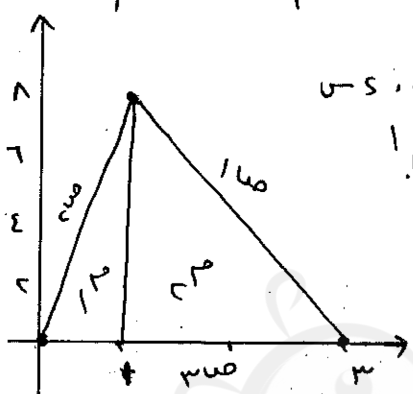
$\boxed{س = ٣}$

$ص_٢ = ص_٣$

$٨س = ٠$

$\boxed{س = ٠}$





$م_١ = \int_{٠}^{١} ٨س \, ءس$

$= [٤س^٢]_{٠}^{١}$

$م_١ = ٤$

$م_٢ = \int_{١}^{٣} (٩ - س^٢) \, ءس = [٩س - \frac{س^٣}{٣}]_{١}^{٣}$

$= (٢٧ - ٩) - (٩ - \frac{١}{٣}) = \frac{٢٨}{٣}$

∴ $م = م_١ + م_٢ = ٤ + \frac{٢٨}{٣} = \frac{٤٠}{٣}$

٤) $ن(س) = د(س)$

$٩ - س^٢ = س^٢ + ١$

$٨ = ٢س^٢$

$س^٢ = ٤$

$\boxed{س = ٢}$ ، $\boxed{س = -٢}$

$ن(س) = ل(س)$

$٩ - س^٢ = ١٠$

$س^٢ = -١$

✗

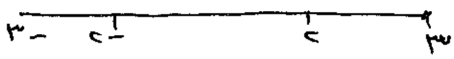
$د(س) = ل(س)$

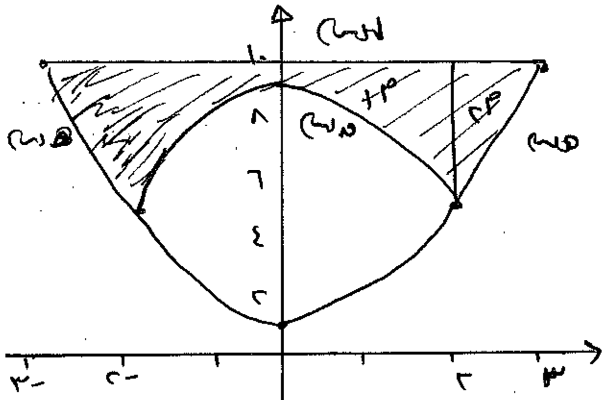
$س^٢ + ١ = ١٠$

$س^٢ = ٩$

$\boxed{س = ٣}$

$\boxed{س = -٣}$





م١ = ∫ من ٠ إلى ٢ (١٠ − (٩ − س²)) ءس

= ∫ من ٠ إلى ٢ (١ + س²) ءس = [س + س³/٣] من ٠ إلى ٢

= ٨ + ٨/٣ = ٣٢/٣

م٢ = ∫ من ٢ إلى ٣ (١٠ − (س² + ١)) ءس

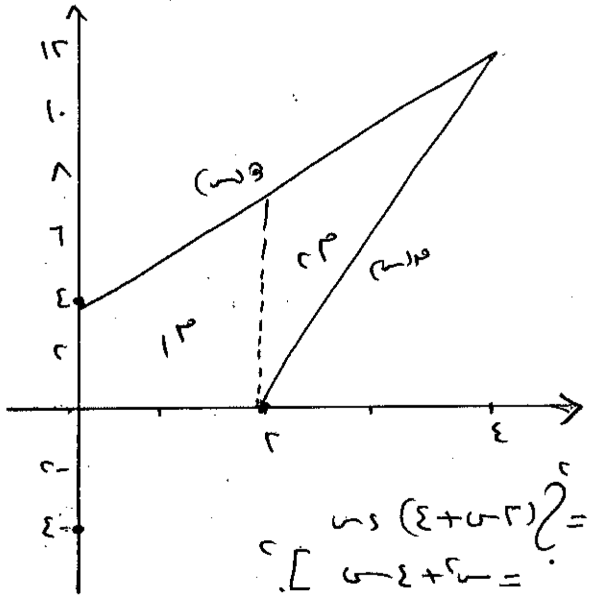
= ∫ من ٢ إلى ٣ (٩ − س²) ءس = [٩س − س³/٣] من ٢ إلى ٣

= (٢٧ − ٩) − (١٨ − ٨/٣) = ٨/٣

∴ م = ٢ (م١ + م٢) = ٢ (٣٢/٣ + ٨/٣) = ٨٠/٣

طريقة أخرى:

م = ∫ من −٣ إلى ٣ (١٠ − (س² + ١)) ءس − ∫ من −٢ إلى ٢ (٩ − س² − (س² + ١))



م١ = ∫ من ٠ إلى ٢ (٢س + ٤) ءس

= [س² + ٤س] من ٠ إلى ٢

= ٤ + ٨ = ١٢

م٢ = ∫ من ٢ إلى ٤ (٢س + ٤ − س² + ٤) ءس

= ∫ من ٢ إلى ٤ (٢س − س² + ٨) ءس

= [س² − س³/٣ + ٨س] من ٢ إلى ٤

= (١٦ − ٦٤/٣ + ٣٢) − (٤ − ٨/٣ + ١٦)

= ٢٨ − ٥٦/٣ = ٢٨/٣

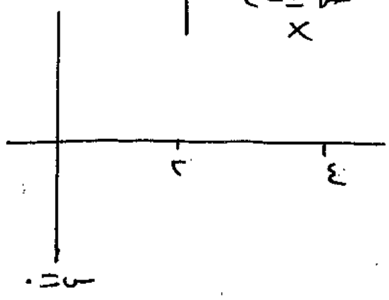
∴ م = م١ + م٢ = ١٢ + ٢٨/٣ = ٦٤/٣

٥) د(س) = هـ(س) | د(س) = ص | هـ(س) = ص

س² − ٤ = ٢س + ٤
س² − ٢س − ٨ = ٠
(س − ٤)(س + ٢) = ٠
$\boxed{س = ٤}$ ، س = −٢ ✗

س² − ٤ = ٠
س² = ٤
$\boxed{س = ٢}$
س = −٢ ✗

٢س + ٤ = ٠
س = −٢ ✗

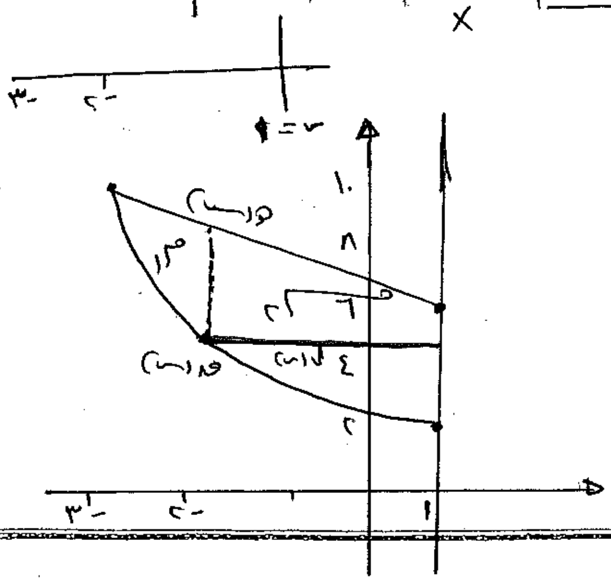


٦) د(س) = هـ(س) | د(س) = ل(س) | هـ(س) = ل(س)

س² + ١ = ٧ − س
س² + س − ٦ = ٠
(س + ٣)(س − ٢) = ٠
$\boxed{س = −٣}$ ، س = ٢ ✗

س² + ١ = ٥
س² = ٤
س = ٢ ✗
$\boxed{س = −٢}$

٧ − س = ٥
س = ٢ ✗



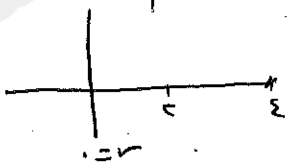
$$م_1 = \int_{-3}^{-2} (٧ - س - س^2 - ١)\ ءس$$
$$= \int_{-3}^{-2} (٦ - س - س^2)\ ءس$$
$$= \left[٦س - \frac{س^2}{٢} - \frac{س^3}{٣} \right]_{-٣}^{-٢}$$
$$= (-١٢ - ٢ + \frac{٨}{٣}) - (-١٨ - \frac{٩}{٢} + ٩)$$
$$= -٥ + \frac{٨}{٣} + \frac{٩}{٢} = \frac{١٣}{٦}$$

$$م_2 = \int_{-2}^{1} (٧ - س - ٥)\ ءس = \int_{-2}^{1} (٢ - س)\ ءس$$
$$= \left[٢س - \frac{س^2}{٢} \right]_{-٢}^{١}$$
$$= (٢ - \frac{١}{٢}) - (-٤ - ٢) = \frac{١٥}{٢}$$

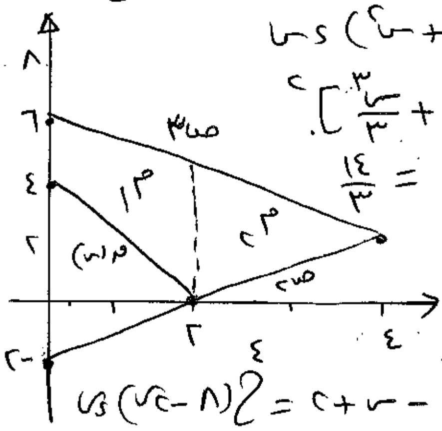
$$م = م_1 + م_2 = \frac{١٣}{٦} + \frac{١٥}{٢} = \frac{٥٨}{٦}$$
$$= \frac{٢٩}{٣}$$

٧)

ق(س) = ص١	ق(س) = ص٢	ص١ = ص٢
$٤ - س^2 = س - ٢$	$٤ - س^2 = ٦ - س$	$س - ٢ = ٦ - س$
$س^2 + س - ٦ = ٠$	$س^2 - س + ٢ = ٠$	$٢س = ٨$
$(س - ٢)(س + ٣) = ٠$	$\Delta = ١ - ٤ \times ١ \times ٢$	$\boxed{س = ٤}$
$س = -٣$ ، $\boxed{س = ٢}$	$= -٧$	
×	×	



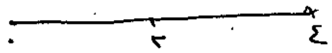
$$م_1 = \int_{0}^{2} ٦ - س - ٤ + س^2$$
$$= \int_{0}^{2} (٢ - س + س^2)\ ءس$$
$$= \left[٢س - \frac{س^2}{٢} + \frac{س^3}{٣} \right]_{٠}^{٢}$$
$$= ٤ - ٢ + \frac{٨}{٣} = \frac{١٤}{٣}$$

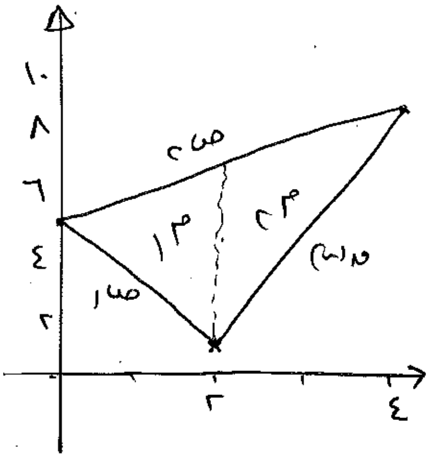


$$م_2 = \int_{2}^{4} ٦ - س - س + ٢ = \int_{2}^{4} (٨ - ٢س)\ ءس$$
$$= \left[٨س - س^2 \right]_{٢}^{٤} = (٣٢ - ١٦) - (١٦ - ٤)$$
$$= ٤$$
$$\therefore م = م_1 + م_2 = \frac{١٤}{٣} + ٤ = \frac{٢٦}{٣}$$

٨)

ق(س) = ص١	ق(س) = ص٢	ص١ = ص٢
$(س - ١)^2 = ٥ - س^2$	$(س - ١)^2 = س + ٥$	$٥ - س^2 = س + ٥$
$س^2 - ٢س + ١ = ٥ - س^2$	$س^2 - ٢س + ١ = س + ٥$	$س^2 + س = ٠$
$٢س^2 - ٢س - ٤ = ٠$	$س^2 - ٣س - ٤ = ٠$	$س(س + ١) = ٠$
$س^2 - س - ٢ = ٠$	$(س - ٤)(س + ١) = ٠$	$\boxed{س = ٠}$
$(س - ٢)(س + ١) = ٠$	$\boxed{س = ٤}$ ، $س = -١$	$س = -١$
$\boxed{س = ٢}$ ، $س = -١$	×	×
×		





$$م_1 = \int_{0}^{2} (س + ٥) - (٥ - س^2)\ ءس$$
$$= \int_{0}^{2} (س + س^2)\ ءس$$
$$= \left[\frac{س^2}{٢} + \frac{س^3}{٣} \right]_{٠}^{٢} = ٢ + \frac{٨}{٣} = \frac{١٤}{٣}$$

$$م_2 = \int_{2}^{4} (س + ٥) - (س - ١)^2\ ءس$$
$$= \int_{2}^{4} (س + ٥) - (س^2 - ٢س + ١)\ ءس$$
$$= \int_{2}^{4} (-س^2 + ٣س + ٤)\ ءس$$
$$= \left[-\frac{س^3}{٣} + \frac{٣س^2}{٢} + ٤س \right]_{٢}^{٤}$$
$$= (٢٤ - \frac{٦٤}{٣} + ١٦) - (٦ - \frac{٨}{٣} + ٨)$$
$$= ٢٦ - \frac{٥٦}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$$

$$\therefore م = م_1 + م_2 = \frac{١٤}{٣} + \frac{٢٢}{٣} = \frac{٣٦}{٣}$$
$$= ١٢$$

٩) $ص_1 = \sqrt{3-س}$ ، $ص_2 = 5 - س$ ، $ص_3 = س - 1$

$ص_1 = ص_2$

$\sqrt{3-س} = 5 - س$

$3 - س = 25 - 10س + س^2$

$س^2 - 9س + 22 = 0$

$\Delta = 81 - 4 \times 22 = -7$

$\times$

$ص_1 = ص_3$

$\sqrt{3-س} = س - 1$

$3 - س = س^2 - 2س + 1$

$س^2 - س - 2 = 0$

$(س-2)(س+1) = 0$

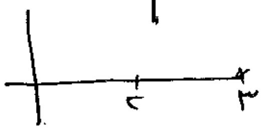
$\boxed{س = 2}$ ، $\boxed{س = -1}$

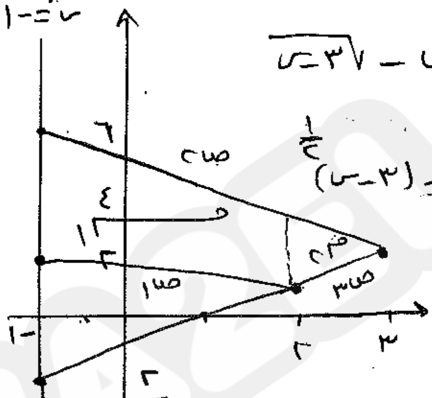
$ص_2 = ص_3$

$5 - س = س - 1$

$2س = 6$

$\boxed{س = 3}$





$م_1 = \int_{-1}^{2} 5 - س - \sqrt{3-س}$

$\int_{-1}^{2} 5 - س - (3-س)^{\frac{1}{2}}$

$= \left[5س - \frac{س^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{(3-س)^3} \right]_{-1}^{2}$

$= \left(10 - 2 + \frac{2}{3}\right) - \left(-5 - \frac{1}{2} + \frac{16}{3}\right)$

$= 13 + \frac{1}{2} - \frac{14}{3} = \frac{53}{6}$

$م_2 = \int_{2}^{3} 5 - س - س + 1 \; دس$

$= \int_{2}^{3} (6 - 2س) \; دس$

$= \left[6س - س^2 \right]_{2}^{3}$

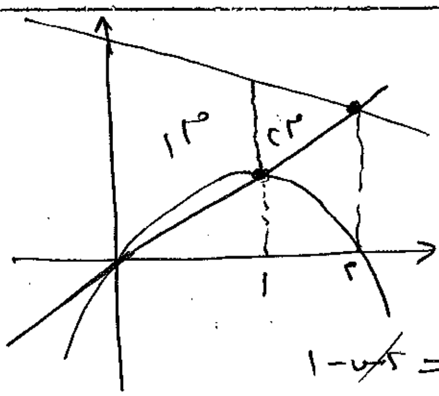
$= (18 - 9) - (12 - 4) = 1$

$\therefore م = م_1 + م_2$

$= \frac{53}{6} + 1 = \frac{59}{6}$

$\boxed{3}$

أ)



$2س - س^2 = \cancel{2س} - 1$

$س^2 = 1 \longrightarrow \boxed{س = 1}$

$5 - س = 2س - 1$

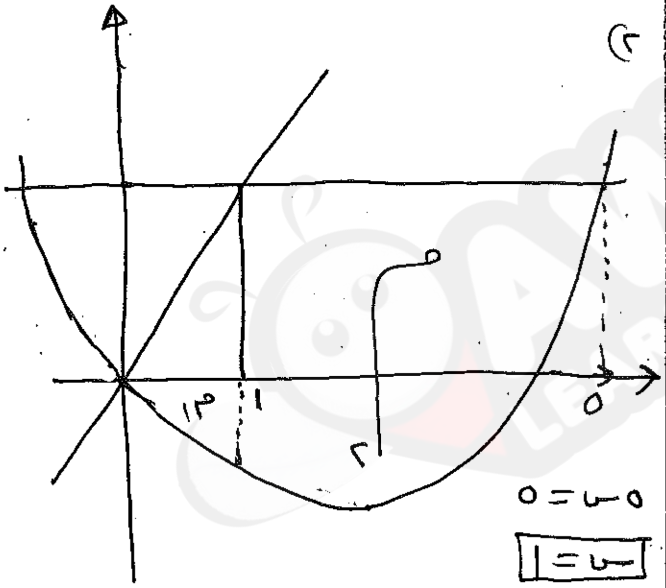
$6 = 3س \longrightarrow \boxed{س = 2}$

$م_1 = \int_{0}^{1} (5 - س) - (2س - س^2) \; دس$

$م_2 = \int_{1}^{2} (5 - س) - (2س - 1) \; دس$

$م = م_1 + م_2$

٢)



$5 = 5س$

$\boxed{س = 1}$

$س^2 - 4س = 5$

$س^2 - 4س - 5 = 0$

$(س - 5)(س + 1) = 0$

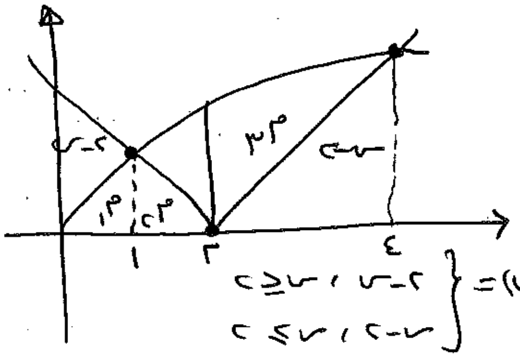
$\boxed{س = 5}$ ، $س = -1$ $\times$

$م_1 = \int_{0}^{1} 0 - (س^2 - 4س) \; دس = \frac{5}{3}$

$م_2 = \int_{1}^{5} 5 - (س^2 - 4س) \; دس = \frac{80}{3}$

$م = م_1 + م_2 = \frac{5}{3} + \frac{80}{3} = \frac{85}{3}$

(٣)



ق(س) = { ٢ - س ، س ≤ ٢ ؛ س - ٢ ، س ≥ ٢ }

√س = ٢ - س ، س ≤ ٢

س = ٤ - ٤س + س² ← س² - ٥س + ٤ = ٠

(س - ٤)(س - ١) = ٠

س = ٤ ✗ ، $\boxed{س = ١}$

√س = س - ٢ ، س ≥ ٢

س = س² - ٤س + ٤

س² - ٥س + ٤ = ٠ ← (س - ٤)(س - ١) = ٠

$\boxed{س = ٤}$ ، س = ١ ✗

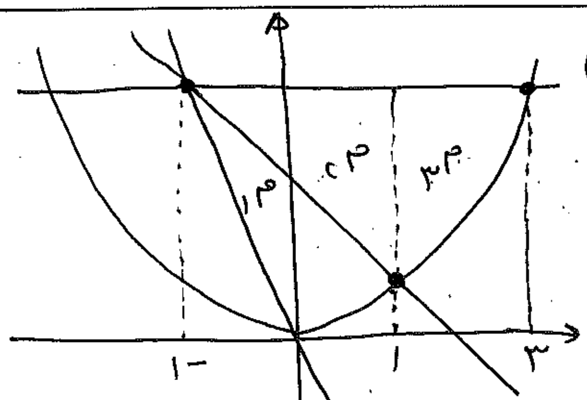
م١ = $\int_{0}^{1}$ س^½ دس

م٢ = $\int_{1}^{2}$ ٢ - س دس

م٣ = $\int_{2}^{4}$ س^½ - (س - ٢) دس

∴ م = م١ + م٢ + م٣ .

(٤)



٥ - ٤س = -٩س

٥ = -٥س ← $\boxed{س = -١}$

س² = ٥ - ٤س ← س² + ٤س - ٥ = ٠

(س + ٥)(س - ١) = ٠ ← س = -٥ ✗ ، $\boxed{س = ١}$

س² = ٩ ← $\boxed{س = ٣}$ ، س = -٣ ✗

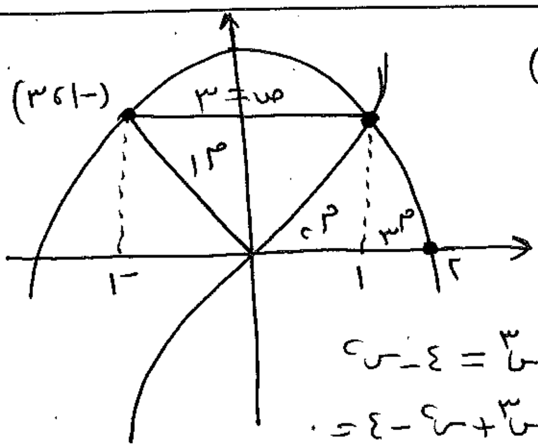
م١ = $\int_{-1}^{0}$ (٥ - ٤س) - (-٩س) دس

م٢ = $\int_{0}^{1}$ ٩ - (٥ - ٤س) دس

م٣ = $\int_{1}^{3}$ ٩ - س² دس .

م = م١ + م٢ + م٣

(٥)



٣س³ = ٤ - س²

٣س³ + س² - ٤ = ٠

∴ $\boxed{س = ١}$

∴ ص = ٣(١)² = ٣

∴ ٤ - س² = ٣ ← س² = ١

س = ١ ✗ ، $\boxed{س = -١}$

٤ - س² = ٠ ← $\boxed{س = ٢}$ ، س = -٢ ✗

ميل الخط = $\frac{٣}{-١}$ = -٣

معادلته : ص - ٠ = -٣(س - ٠)

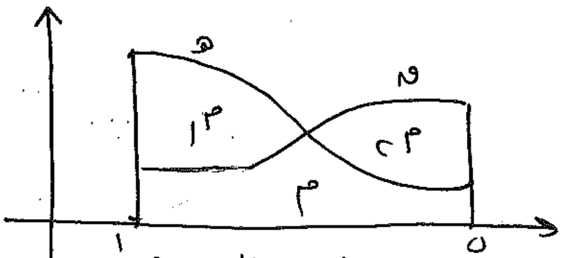
ص = -٣س

م١ = $\int_{-1}^{0}$ ٣ + ٣س دس

م٢ = $\int_{0}^{1}$ ٣س³ دس

م٣ = $\int_{1}^{2}$ ٤ - س² دس .

٦)



نفرض مساحة المنطقة المظللة = م

$$\int_{1}^{5} \text{هـ}(س)\,ءس = م + م_1 = م + ٦$$

$$\int_{1}^{5} \text{ق}(س)\,ءس = م + م_2 = م + ٤$$

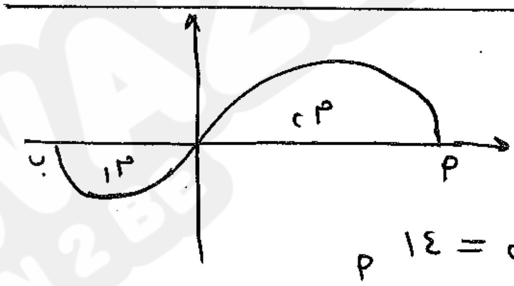
بالجمع

$$\therefore \int_{1}^{5} (\text{هـ}(س) + \text{ق}(س))\,ءس = ٢م + ١٠$$

$$٣٤ = ٢م + ١٠$$

$$٢م = ٢٤ \longleftarrow م = ١٢ .$$

[٣]



$$م_1 + م_2 = ١٤$$

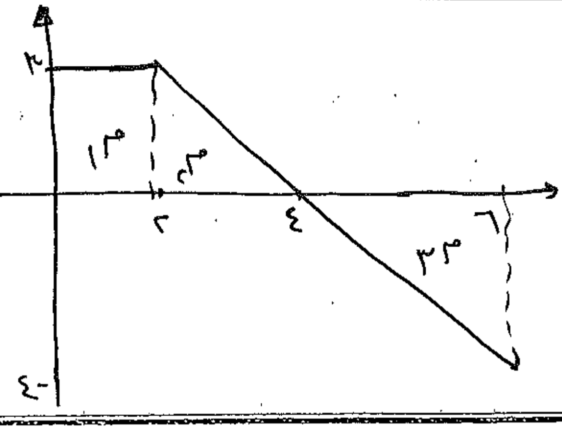
$$-\int_{ب}^{٠} \text{ق}(س)\,ءس + \int_{٠}^{أ} \text{ق}(س)\,ءس = ١٤$$

$$٦ + \int_{٠}^{أ} \text{ق}(س)\,ءس = ١٤$$

$$\therefore \int_{٠}^{أ} \text{ق}(س)\,ءس = ٨$$

$$\therefore \int_{أ}^{٠} \text{ق}(س)\,ءس = -٨$$

[٤]



م١ = ٢ × ٣ = ٦ وحدات مربعة.

م٢ = $\frac{1}{2} \times ٢ \times ٣$ = ٣ وحدات مربعة

م٣ = $\frac{1}{2} \times ٢ \times ٤$ = ٤ وحدات مربعة.

١) $\int_{٦}^{١} \text{ق}(س)\,ءس = -\int_{١}^{٦} \text{ق}(س)\,ءس$

$$= -(م_1 + م_2 - م_3)$$

$$= -(٦ + ٣ - ٤) = -٥ .$$

٢) $\int_{٢}^{٦} |\text{ق}(س)|\,ءس = م_2 + م_3$

$$= ٣ + ٤ = ٧$$

٣) $\int_{-١}^{٢} س\,\text{ق}(س^2+١)\,ءس$

ص = س² + ١

ءس = $\frac{ءص}{٢س}$

-١ ⟵ ٢

٢ ⟵ ٥

$$= \int_{٢}^{٥} \cancel{س}\,\text{ق}(ص) \times \frac{ءص}{٢\cancel{س}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{٢}^{٥} \text{ق}(ص)\,ءص$$

$$= \frac{1}{2}\left(م_2 - \frac{1}{2} \times ١ \times ٢\right) = \frac{1}{2}(٣ - ١) .$$

$$= ١$$

[٥] $\int_{-١}^{٤} \frac{\text{ق}(س)}{أ}\,ءس - \int_{-١}^{٤} \frac{\text{هـ}(س)}{أ}\,ءس = ١٢$

١) $\therefore \frac{1}{أ} \times \int_{-١}^{٤} (\text{ق}(س) - \text{هـ}(س))\,ءس = ١٢$

$$\frac{1}{أ} \times (م_1 - م_2) = ١٢$$

$$\frac{1}{أ}(٤ - ٧) = ١٢$$

$$\frac{-٣}{أ} = ١٢ \longleftarrow أ = \frac{-1}{4}$$

٢) $\int_{٤}^{-١} (\text{هـ}(س) - \text{ق}(س))\,ءس$

$$= -\int_{-١}^{٤} (\text{هـ}(س) - \text{ق}(س))\,ءس$$

$$= -(-م_1 + م_2) = -٣ .$$

٦ ميل الخط المستقيم = $\frac{٤-٠}{٢-٠} = ٢$

معادلته: ص $-$ ٠ $=$ ٢ (س $-$ ٠)

ص $=$ ٢س

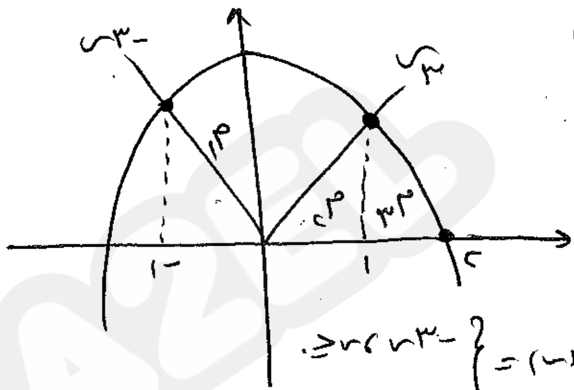
م $= \int_{٠}^{٢} ($ق(س) $-$ ٢س$)$ دس

$٩ = \int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس $-$ $[$س$^٢]_{٠}^{٢}$

$٩ = \int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس $-$ ٤

$\therefore \int_{٠}^{٢}$ ق(س) دس $= ١٣$

٧



ق(س) $= \begin{cases} \text{-٣س ، س} \le ٠ \\ \text{٣س ، س} > ٠ \end{cases}$

٤ $-$ س^٢ $=$ $-$٣س ، س $\le$ ٠

س^٢ $-$ ٣س $-$ ٤ $=$ ٠ $\leftarrow$ (س $-$ ٤)(س $+$ ١) $=$ ٠

س $=$ ٤ ✗ $\boxed{\text{س} = -١}$

٤ $-$ س^٢ $=$ ٣س ، س $>$ ٠

س^٢ $+$ ٣س $-$ ٤ $=$ ٠ $\leftarrow$ (س $+$ ٤)(س $-$ ١) $=$ ٠

س $=$ $-$٤ ✗ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

٤ $-$ س^٢ $=$ ٠ $\leftarrow$ س^٢ $=$ ٤ $\leftarrow$ $\boxed{\text{س} = ٢}$ ، س $=$ $-$٢ ✗

م١ $= \int_{-١}^{٠}$ ٤ $-$ س^٢ $+$ ٣س دس

م٢ $= \int_{٠}^{١}$ ٣س دس

م٣ $= \int_{١}^{٢}$ ٤ $-$ س^٢ دس

م $=$ م١ $+$ م٢ $+$ م٣

حل تمرين $\boxed{4}$

$\boxed{1}$

١) $\text{ظتاس}\ \text{ءص} = (\text{ص}-3)^2\ \text{قاس}\ \text{ءس}$

$\dfrac{1}{(\text{ص}-3)^2}\ \text{ءص} = \dfrac{\text{قاس}}{\text{ظتاس}}\ \text{ءس}$

$\int (\text{ص}-3)^{-2}\ \text{ءص} = \int \text{قاس ظاس}\ \text{ءس}$

$-(\text{ص}-3)^{-1} = \text{قاس} + \text{ج}$

٢) $\text{ءص} = 2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءس} + \text{س}^2\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءس}$

$\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءس}\ (2\text{س} + \text{س}^2)$

$\int \text{هـ}^{-\text{ص}}\ \text{ءص} = \int (\text{س}^2 + 2\text{س})\ \text{ءس}$

$-\text{هـ}^{-\text{ص}} = \dfrac{\text{س}^3}{3} + \text{س}^2 + \text{ج}$

٣) $\dfrac{\text{س}+1}{\text{لو}_\text{هـ}\text{ص}}\ \text{ءس} = \text{ص}(\text{س}^2-1)\ \text{ءص}$

$\dfrac{\text{س}+1}{\text{س}^2-1}\ \text{ءس} = \text{ص}\ \text{لو}_\text{هـ}\text{ص}\ \text{ءص}$

$\int \dfrac{1}{\text{س}-1}\ \text{ءس} = \int \text{ص}\ \text{لو}_\text{هـ}\text{ص}\ \text{ءص}$

$\text{و} = \text{لو}_\text{هـ}\text{ص} \rightarrow \text{ءو} = \dfrac{1}{\text{ص}}\text{ءص}$

$\text{ءهـ} = \text{ص}\ \text{ءص} \rightarrow \text{هـ} = \dfrac{\text{ص}^2}{2}$

$\text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-1| = \dfrac{\text{ص}^2}{2}\text{لو}_\text{هـ}\text{ص} - \int \dfrac{1}{2}\text{ص}\ \text{ءص}$

$\text{لو}_\text{هـ}|\text{س}-1| = \dfrac{\text{ص}^2}{2}\text{لو}_\text{هـ}\text{ص} - \dfrac{1}{4}\text{ص}^2 + \text{ج}$

٤) $(\text{هـ}^{\text{س}}+3)\ \text{ءص} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}}\ \text{ءس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص} = \int \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+3}\ \text{ءس}$

$\text{هـ}^{\text{س}}$ (المشتقة)

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_\text{هـ}|\text{هـ}^{\text{س}}+3| + \text{ج}$

٥) $2\text{ءص} - 2\ \text{قا}^2 3\text{س}\ \text{ءص} = \text{ءس} + \text{ظا}^2\text{ص}\ \text{ءس}$

$2\text{ءص}(1 - \text{قا}^2 3\text{س}) = \text{ءس}(1 + \text{ظا}^2\text{ص})$

$-2\text{ظا}^2 3\text{س}\ \text{ءص} = \text{قا}^2\text{ص}\ \text{ءس}$

$\dfrac{-2}{\text{قا}^2\text{ص}}\ \text{ءص} = \dfrac{1}{\text{ظا}^2 3\text{س}}\ \text{ءس}$

$-2\text{جتا}^2\text{ص}\ \text{ءص} = \text{ظتا}^2 3\text{س}\ \text{ءس}$

$-\int (1 + \text{جتا}2\text{ص})\ \text{ءص} = \int (\text{قتا}^2 3\text{س} - 1)\ \text{ءس}$

$-(\text{ص} + \dfrac{1}{2}\text{جا}2\text{ص}) = -\dfrac{1}{3}\text{ظتا}3\text{س} - \text{س} + \text{ج}$

$\boxed{2}$ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\text{ص}}\ (2\text{هـ}^{\text{س}} - 1)^2$

$\text{ءص} = \sqrt{\text{ص}}\ (2\text{هـ}^{\text{س}} - 1)^2\ \text{ءس}$

$\int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءص} = \int (4\text{هـ}^{2\text{س}} - 4\text{هـ}^{\text{س}} + 1)\ \text{ءس}$

$2\text{ص}^{\frac{1}{2}} = 2\text{هـ}^{2\text{س}} - 4\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{ج}$

$2\sqrt{\text{ص}} = 2\text{هـ}^{2\text{س}} - 4\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{ج}$

$(0, 4)$

$4 = 2 - 4 + \text{ج} \leftarrow \text{ج} = 6$

$\therefore 2\sqrt{\text{ص}} = 2\text{هـ}^{2\text{س}} - 4\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + 6$

$\boxed{3}$ $-\dfrac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \dfrac{\sqrt{\text{ص}}}{\pi\ \text{جا}\pi\text{س}}$

$\sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص} = -\pi\ \text{جا}\pi\text{س}\ \text{ءس}$

$\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{ءص} = -\int \pi\ \text{جا}\pi\text{س}\ \text{ءس}$

$\dfrac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} = -\text{جا}\pi\text{س} + \text{ج}$

$(\dfrac{1}{2}, 1)$

$\dfrac{2}{3}\sqrt{\text{ص}^3} = -\text{جا}\pi\text{س} + \text{ج}$

$\dfrac{2}{3} = -1 + \text{ج} \leftarrow \text{ج} = \dfrac{5}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3}\sqrt{\text{ص}^3} = -\text{جا}\pi\text{س} + \dfrac{5}{3}$

عندما $\text{س} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{2}{3}\sqrt{\text{ص}^3} = \dfrac{8}{3} \leftarrow \sqrt{\text{ص}^3} = 4$

$\text{ص}^3 = 16 \leftarrow \text{ص} = \sqrt[3]{16}$

[٤] $\frac{دص}{دس} = ٢س\sqrt{هـ^{س}}$

$\int دص = \int ٢س\ هـ^{\frac{١}{٢}س}\ دس$

$م = ٢س \longrightarrow دم = ٢\ دس$

$ده = هـ^{\frac{١}{٢}س}\ دس \leftarrow ه = ٢هـ^{\frac{١}{٢}س}$

$ص = ٤س\ هـ^{\frac{١}{٢}س} - \int ٤\ هـ^{\frac{١}{٢}س}\ دس$

$ص = ٤س\ هـ^{\frac{١}{٢}س} - ٨\ هـ^{\frac{١}{٢}س} + جـ$

$(٠ ، ٣)$

$\leftarrow ٣ = ٠ - ٨ + جـ \longrightarrow جـ = ١١$

$\therefore ص = ٤س\ هـ^{\frac{١}{٢}س} - ٨\ هـ^{\frac{١}{٢}س} + ١١$

[٥] $\frac{دع}{دن} = \frac{١}{٢}ع^{٢}$

$٢\ دع = ع^{٢}\ دن$

$\int ٢ع^{-٢}\ دع = \int دن$

$-٢ع^{-١} = ن + جـ$

$\frac{-٢}{ع} = ن + جـ$

$ع = ٤ ، ن = ٠ \longrightarrow -\frac{١}{٢} = جـ$

$\therefore \frac{-٢}{ع} = ن - \frac{١}{٢}$ $\times ٢$

$\frac{-٤}{ع} = ٢ن - ١$

$\leftarrow ع = \frac{-٤}{٢ن - ١}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{-٤}{٢ن - ١}$

$\therefore \int دف = \int \frac{-٤}{٢ن - ١}\ دن$

$ف = -٢ لو_{هـ}|٢ن - ١| + جـ$

$ن = ١ ، ف = ٥ \longrightarrow ٥ = -٢ \times ٠ + جـ \leftarrow جـ = ٥$

$ف = -٢ لو_{هـ}|٢ن - ١| + ٥$

عندما $ن = ٢$

$ف = -٢ لو_{هـ}٣ + ٥$

[٦] $\frac{دف}{دن} = \frac{١}{\pi} جتا^{٢} \pi ف$

$\int \pi قا^{٢} \pi ف\ دف = \int دن$

$ظا \pi ف = ن + جـ$

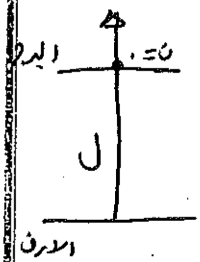
$ن = ١ ، ف = ١ \longrightarrow ٠ = ١ + جـ \longrightarrow جـ = -١$

$\therefore ظا \pi ف = ن - ١$

عندما $ف = \frac{١}{٤}$

$ظا \frac{\pi}{٤} = ن - ١ \longrightarrow ن = ٢$ ث.

[٧] $\frac{دع}{دن} = -٣٢$



$\int دع = \int -٣٢\ دن$

$ع = -٣٢ن + جـ$

$ع = ٨٠ ، ن = ٠ \longrightarrow ٨٠ = ٠ + جـ \leftarrow جـ = ٨٠$

$\therefore ع = -٣٢ن + ٨٠$

$\int دف = \int (-٣٢ن + ٨٠)\ دن$

$ف = -١٦ن^{٢} + ٨٠ن + جـ$

$ن = ٢ ، ف = ١٢٠ \longrightarrow ١٢٠ = -٦٤ + ١٦٠ + جـ$

$جـ = ٢٤$

$\therefore ف = -١٦ن^{٢} + ٨٠ن + ٢٤$

عندما $ن = ٠$

$\leftarrow ل = ٠ + ٠ + ٢٤ = ٢٤$ قدم.

[٨] $\frac{دع}{دن} = -ع^{\frac{١}{٢}}$

$\int -ع^{-\frac{١}{٢}}\ دع = \int دن$

$-٢ع^{\frac{١}{٢}} = ن + جـ$

$-٢\sqrt{ع} = ن + جـ$

$ن = ٠ ، ع = ٢٥ \longrightarrow -١٠ = ٠ + جـ \leftarrow جـ = -١٠$

$\therefore -٢\sqrt{ع} = ن - ١٠$

$\sqrt{ع} = ٥ - \frac{ن}{٢}$

$ع = (٥ - \frac{ن}{٢})^٢$

$\int دف = \int (٥ - \frac{١}{٢}ن)^٢ \, دن$

$ف = -\frac{٢}{٣}(٥ - \frac{١}{٢}ن)^٣ + جـ$

$ن = ٤ ، ف = ٣ \leftarrow ٣ = -\frac{٢}{٣} \times ٢٧ + جـ$

$جـ = ٢١$

$\therefore ف = -\frac{٢}{٣}(٥ - \frac{١}{٢}ن)^٣ + ٢١$

الكرة في أقصى $\leftarrow ع = ٠$

$(٥ - \frac{ن}{٢})^٢ = ٠$

$ن = ١٠$

$\therefore ف = -\frac{٢}{٣} \times$ صفر $+ ٢١ = ٢١$ م

٩

$\frac{دم}{دن} = -٣(ن+٢)^{-٢}$

$\int دم = \int -٣(ن+٢)^{-٢} \, دن$

$م = ٣(ن+٢)^{-١} + جـ$

$م = \frac{٣}{ن+٢} + جـ$

$ن = ١ ، م = ٢ \leftarrow ٢ = ١ + جـ \leftarrow جـ = ١$

$\therefore م = \frac{٣}{ن+٢} + ١$

١) عندما ن = ٢

$م = \frac{٣}{٤} + ١ = \frac{٧}{٤}$ سم^٢

٢) م = ١٫٥

$١٫٥ = \frac{٣}{ن+٢} + ١$

$\frac{١}{٢} = \frac{٣}{ن+٢}$

$ن + ٢ = ٦ \leftarrow ن = ٤$

يوم الأربعاء.

١٠

$\frac{دو}{دن} = ٠٫٢ \, و^{\frac{١}{٢}}$

$\int و^{-\frac{١}{٢}} \, دو = \int ٠٫٢ \, دن$

$٢و^{\frac{١}{٢}} = ٠٫٢ن + جـ$

$٢\sqrt{و} = ٠٫٢ن + جـ$

$ن = ٠ ، و = ٣٫٢٤ \leftarrow ٢ \times ١٫٨ = جـ \leftarrow جـ = ٣٫٦$

$\therefore ٢\sqrt{و} = ٠٫٢ن + ٣٫٦$

ن = ٢

$\leftarrow ٢\sqrt{و} = ٠٫٢ \times ٢ + ٣٫٦$

$٢\sqrt{و} = ٤ \leftarrow \sqrt{و} = ٢$

$\therefore و = ٤$ كغم

١١

$\int دس = \int ٦٠٠(٢ن+١)^{\frac{١}{٢}} \, دن$

$س = ٢٠٠(٢ن+١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$س = ٢٠٠\sqrt{(٢ن+١)^٣} + جـ$

$ن = ٠ ، س = ٧٥٠٠ \leftarrow ٧٥٠٠ = ٢٠٠ + جـ$

$جـ = ٧٣٠٠$

$س = ٢٠٠\sqrt{(٢ن+١)^٣} + ٧٣٠٠$

يربح التاجر ٥٢٠٠ عندما س = ٧٥٠٠ + ٥٢٠٠

$\therefore س = ١٢٧٠٠$

$١٢٧٠٠ = ٢٠٠\sqrt{(٢ن+١)^٣} + ٧٣٠٠$

$٥٤٠٠ = ٢٠٠\sqrt{(٢ن+١)^٣} \leftarrow \sqrt{(٢ن+١)^٣} = ٢٧$

$\sqrt{٢ن+١} = ٣ \leftarrow ٢ن + ١ = ٩ \leftarrow ن = ٤$

١٢

$\int \frac{١}{م} \, دم = \int ٠٫٠٢ \, دن$

$لو_{هـ} م = ٠٫٠٢ن + جـ$

$ن = ٠ ، م = ٣ \leftarrow لو_{هـ} ٣ = جـ$

$\therefore لو_{هـ} م = ٠٫٠٢ن + لو_{هـ} ٣$

$لو_{هـ} م - لو_{هـ} ٣ = ٠٫٠٢ن \leftarrow لو_{هـ} \frac{م}{٣} = ٠٫٠٢ن$

$\therefore \frac{م}{٣} = هـ^{٠٫٠٢ن} \leftarrow م = ٣هـ^{٠٫٠٢ن}$

عندما $ن = ٢ \leftarrow م = ٣هـ^{٠٫٠٤}$ دونم.