" وقل رب زدني علما"

أوراق عمل في

قواعد التكامـــل

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

0795562444

التكامل غير المحدود

معكوس المشتقة :

يسمى الاقتران م(س) معكوس المشتقة للاقتران ف(س) اذا تحقق شرطان :

١) ف(س) متصل على مجاله

٢) م' (س) = ف(س)

أي أن :

م(س) ← ف(س) ← ف'(س)

استقاقه ←

→ تكامل غير محدود

وبذلك فإن :

التكامل غير المحدود هو العملية العكسية للاشتقاق ويرمز له بالرمز :

$\int$ ف(س) دس .

فإذا كان :

ف(س) = ٣س

فإن كل من الاقترانات التالية تعتبر معكوس المشتقة للاقتران ف .

م$_1$(س) = س^3

م$_2$(س) = س^3 + ١

م$_3$(س) = س^3 + ٦

م$_4$(س) = س^3 - ٩

⋮

ونعبر عن كل من هذه الاقترانات بالاقتران

م(س) = س^3 + جـ ، جـ ∈ ح

وتسمى هذه الصورة العامة لمعكوس المشتقة .

تذكر أن :

الفرق بين اي معكوسي مشتقة للاقتران ف(س) يساوي دائماً ثابت .

أي أن :

$$م_1(س) - م_2(س) = جـ$$

حيث م$_1$(س) ، م$_2$(س) معكوسي مشتقة للاقتران ف(س) .

---

١) بيّن أن الاقتران :

م(س) = $\frac{س}{س+1}$ هو معكوس المشتقة للاقتران :

ف(س) = $\frac{1}{(س+1)^2}$ ، س ≠ -١

الحل :

ف(س) متصل على ح - {-١}

لأنه قسم متصلين

م'(س) = $\frac{1 \times (س+1) - س \times 1}{(س+1)^2}$

= $\frac{س+1-س}{(س+1)^2}$ = $\frac{1}{(س+1)^2}$

∴ م'(س) = ف(س)

∴ م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران ف

---

٢) بيّن أن الاقتران م(س) = س^4 - جاس + ٢ هو معكوس المشتقة للاقتران

ف(س) = ٤س^3 - جتاس

الحل :

ف(س) متصل على ح لأنه طرح متصلين

م'(س) = ٤س^3 - جتاس .

∴ م'(س) = ف(س)

∴ م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران ف(س) .

٣) اذا كان :
$م(س) = س^3 + ٥س^2 - ٣س + ٧$
هو معكوس المشتقة للاقتران $ه(س)$
فجد $ه(-٢)$

الحل :
$ه(س) = م'(س) = ٣س^2 + ١٠س - ٣$
$ه(-٢) = ١٢ - ٢٠ - ٣ = -١١$

٤) اذا كان :
$م(س)$ هو معكوس المشتقة للاقتران
$ه(س) = ٥س - جا٢س$ فجد $م'(\frac{\pi}{٦})$

الحل :
$م'(س) = ه(س) = ٥س - جا٢س$
$م''(س) = ٥ - ٢جا٢س$
$م''(\frac{\pi}{٦}) = ٥ - ٢ \times \frac{١}{٢} = ٤$

٥) اذا كان :
$م(س) = \sqrt{٦س - ٢}$ معكوس المشتقة
للاقتران $ه(س)$ ، وكان $ه'(P) = -\frac{٩}{٨}$
فجد الثابت P .

الحل :
$ه(س) = م'(س) = \frac{٦}{٢\sqrt{٦س-٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٦س-٢}}$
$ه'(س) = \frac{-٣ \times \frac{٦}{٢\sqrt{٦س-٢}}}{(\sqrt{٦س-٢})^2} = \frac{-٩}{(\sqrt{٦س-٢})^3}$
$ه'(P) = \frac{-٩}{(\sqrt{٦P-٢})^3} = -\frac{٩}{٨}$
$(\sqrt{٦P-٢})^3 = ٨$
$\sqrt{٦P-٢} = ٢ \leftarrow ٦P - ٢ = ٤$
$٦P = ٦$
$\therefore P = ١$

٦) اذا كان $م_١(س)$ ، $م_٢(س)$ معكوسي مشتقة
للاقترانين $ه(س)$ وكان :
$ه(س) = \frac{م_٢(س) - م_١(س)}{س^2 + ١}$
$ه'(١) = ٣$ فجد $ه(٢)$

الحل :
$ه(س) = \frac{جـ}{س^2 + ١}$
$ه'(س) = \frac{-جـ \times ٢س}{(س^2+١)^2}$
$ه'(١) = \frac{-جـ}{٢} = ٣ \leftarrow جـ = -٦$
$\therefore ه(س) = \frac{-٦}{س^2+١}$
$\therefore ه(٢) = \frac{-٦}{٥}$

٧) اذا كان $م(س)$ ، $ه(س)$ معكوسي مشتقة
للاقتران $ه(س)$ وكان :
$م(س) = س^2 - ٥س + ٣$
فجد قاعدة $ه(س)$ علما بان $ه(٣) = ٧$

الحل :
$م(س) - ه(س) = جـ$
$س^2 - ٥س + ٣ - ه(س) = جـ$
$ه(س) = س^2 - ٥س + ٣ - جـ$
لكن
$ه(٣) = ٩ - ١٥ + ٣ - جـ = ٧$
$\therefore جـ = -١٠$
$\therefore ه(س) = س^2 - ٥س + ١٣$

تدريب :

① بيّن أن الاقتران :
م(س) = جا٢س − جتا٢س + ١
هو مقلوس المشتقة للاقتران ؟
ف(س) = ٣جا٢س .

② اذا كان م(س) ، ف(س) مقلوسي مشتقة للاقتران ف(س) وكان
ل(س) = ٣م(س) − ف(س) + س
فجد ل'(٢) علما بأن ف(٢) = ٤

③ اذا كان م(س) مقلوس المشتقة للاقتران ف(س) = م^٣(س) + س^٢
فجد ف'(−١) علما بأن ف(−١) = ٩

قواعد التكامل .

قاعدة ١ : $\int P\,ds = Ps + ج$

أكمل :

١) $\int 3\,ds = 3s + ج$

٢) $\int -7\,dm = -7m + ج$

٣) $\int \frac{2}{5}\,ds = \frac{2}{5}s + ج$

٤) $\int 8\,ds = 8s + ج$

٥) $\int \frac{dm}{4} = \frac{1}{4}m + ج$

٦) $\int ds = s + ج$

قاعدة ٢ :

$$\int P s^{ن}\,ds = P \times \frac{s^{ن+1}}{ن+1} + ج$$

بشرط : $ن \neq -1$

١ جد التكاملات التالية :

١) $\int 8s^3\,ds = 8 \times \frac{s^4}{4} + ج$
$= 2s^4 + ج$

٢) $\int 5s^2\,ds = \frac{5}{3}s^3 + ج$

٣) $\int s^4\,ds = \frac{s^5}{5} + ج$

٤) $\int_{-1}^{2} 6s\,ds = \left[\frac{6}{2}s^2\right]_{-1}^{2}$
$= \left[3s^2\right]_{-1}^{2} = 12 - 3 = 9$

٥) $\int_{1}^{3} 4s^{-3}\,ds = 4 \times \left[\frac{s^{-2}}{-2}\right]_{1}^{3}$
$= \left[\frac{-2}{s^2}\right]_{1}^{3} = \frac{-2}{9} + 2 = \frac{16}{9}$

٦) $\int \frac{2}{s^5}\,ds = \int 2s^{-5}\,ds$
$= \frac{2}{-4}s^{-4} + ج$
$= -\frac{1}{2}s^{-4} + ج$

٧) $\int 4s^{\frac{1}{3}}\,ds = 4 \times \frac{3}{4}s^{\frac{4}{3}} + ج$
$= 3s^{\frac{4}{3}} + ج$

٨) $\int 6s^{\frac{2}{5}}\,ds = 6 \times \frac{5}{3}s^{\frac{3}{5}} + ج$
$= 10s^{\frac{3}{5}} + ج$.

٩) $\int_{٤}^{١} \sqrt{س}\, د س = \int_{٤}^{١} س^{\frac{١}{٢}}\, د س$

$= \left[\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٤}^{١} = \frac{٢}{٣} \left[\sqrt{س^{٣}} \right]_{٤}^{١}$

$= \frac{٢}{٣} (١ - ٨) = -\frac{١٤}{٣}$

١٠) $\int_{-١}^{٨} \frac{\sqrt[٣]{س}}{س}\, د س$

$= \int_{-١}^{٨} \frac{س^{\frac{١}{٣}}}{س}\, د س = \int_{-١}^{٨} س^{-\frac{٢}{٣}}\, د س$

$= \left[٣ س^{\frac{١}{٣}} \right]_{-١}^{٨} = \left[٣ \sqrt[٣]{س} \right]_{-١}^{٨}$

$= ٣(٢ + ١) = ٩$

[٢] اذا كان :

$ق(س) = \frac{٨}{\sqrt{س^{٣}}}$

فجد معكوس المشتقة م(س) للاقتران ق علما بأن م(٤) = ١

الحل :

$\int ق(س)\, د س = \int ٨ س^{-\frac{٣}{٢}}\, د س$

$م(س) = ٨ \times -٢ س^{-\frac{١}{٢}} + ج$

$م(س) = \frac{-١٦}{\sqrt{س}} + ج$

لكنه م(٤) $= \frac{-١٦}{٢} + ج = ١$

$\therefore ج = ٩$

$\therefore م(س) = \frac{-١٦}{\sqrt{س}} + ٩$.

تذكر أن :

التكامل يُوزع على الجمع والطرح فقط .

$\int (ق(س) \pm و(س))\, د س$

$= \int ق(س)\, د س \pm \int و(س)\, د س$.

[٣] جد التكاملات التالية :

١) $\int (٦ س^{٢} + ٥)\, د س$.

$= ٦ \times \frac{س^{٣}}{٣} + ٥ س + ج$

$= ٢ س^{٣} + ٥ س + ج$

٢) $\int (٤ س^{٣} - ٣ س + ٧)\, د س$.

$= ٤ \times \frac{س^{٤}}{٤} - ٣ \times \frac{س^{٢}}{٢} + ٧ س + ج$

$= س^{٤} - \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٧ س + ج$

٣) $\int_{-١}^{٣} (٢ س - ٦)\, د س$.

$= \left[٢ \times \frac{س^{٢}}{٢} - ٦ س \right]_{-١}^{٣}$

$= (٩ - ١٨) - (١ + ٦) = -١٦$

٤) $\int س^{٢} \left(\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٥}} \right) د س$.

الحل :

$= \int \left(٢ س - \frac{١}{س^{٣}} \right) د س$.

$= \int \left(٢ س - س^{-٣} \right) د س$.

$= س^{٢} + \frac{س^{-٢}}{-٢} + ج$

٥) $\int \frac{س^{٣} + ٢ س - ١٥}{س - ٣}\, د س$.

الحل :

$= \int \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{س - ٣}\, د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥ س + ج$.

٦) $\int_1^8 (٤\sqrt[3]{س} - \frac{٨}{س^٢})\, د س$

الحل:

$= \int_1^8 (٤ س^{\frac{1}{3}} - ٨ س^{-٢})\, د س$

$= \left[\frac{٤}{\frac{4}{3}} س^{\frac{4}{3}} + ٨ س^{-١} \right]_1^8$

$= ٣ \sqrt[3]{س^٤} + \frac{٨}{س} \Big]_1^8$

$= (٣٢ + ١) - (٣ + ٨) = ٣٨$

٧) $\int \frac{س - ١}{\sqrt[3]{س}}\, د س$

الحل:

$= \int (س - ١) \times س^{-\frac{1}{3}}\, د س$

$= \int (س^{\frac{2}{3}} - س^{-\frac{1}{3}})\, د س$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{5}{3}} - \frac{٣}{٢} س^{\frac{2}{3}} + ج$

٨) $\int \frac{س^٣ - ٤ س^٢}{\sqrt{س} - ٢}\, د س$

الحل:

$= \int \frac{س^٢ (س - ٤)}{\sqrt{س} - ٢}\, د س$

$= \int \frac{س^٢ (\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)}{\sqrt{س} - ٢}\, د س$

$= \int س^٢ (س^{\frac{1}{2}} + ٢)\, د س$

$= \int (س^{\frac{5}{2}} + ٢ س^٢)\, د س$

$= \frac{٢}{٧} س^{\frac{7}{2}} + \frac{٢}{٣} س^٣ + ج$

ملاحظة: يمكن حل المثال أعلاه بالقرب بالمرافق ثم الاختصار.

٩) $\int_4^9 \frac{(س+٣)^٢ - ٩}{س \sqrt{س}}\, د س$

الحل:

$= \int_4^9 \frac{س^٢ + ٦ س + ٩ - ٩}{س \sqrt{س}}\, د س$

$= \int_4^9 \frac{(س+٦)}{\sqrt{س}}\, د س$

$= \int_4^9 (س + ٦) \times س^{-\frac{1}{2}}\, د س$

$= \int_4^9 (س^{\frac{1}{2}} + ٦ س^{-\frac{1}{2}})\, د س$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{3}{2}} + ٦ \times ٢ س^{\frac{1}{2}} \Big]_4^9$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^٣} + ١٢ \sqrt{س} \Big]_4^9$

$= (١٨ + ٣٦) - (\frac{١٦}{٣} + ٢٤)$

$= ٥٤ - \frac{١٦}{٣} = \frac{١٤٦}{٣}$

تدريب: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{١}{س} (٣ س^٣ - ٧ \sqrt{س})\, د س$

② $\int_1^4 \sqrt{س^٣} (\frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{\sqrt{س}})\, د س$

③ $\int \frac{(٢ - س)^٣}{س \sqrt{س}}\, د س$

④ $\int \frac{س^٢ - ٥ س + ٦}{س^٤ - ٣ س^٣}\, د س$

⑤ $\int \frac{(س - ٢)^٢ - س}{(س - ١) \sqrt{س}}\, د س$

١٠) $\int_{-٢}^{١} (٦س^{٢} - \int_{١}^{٢} ٤ص\,د ص)\,د س$

الحل: نجد أولاً: $\int_{١}^{٢} ٤ص\,د ص$

$= ٢ص^{٢}\,]_{١}^{٢}$

$= ٨ - ٢ = \boxed{٦}$

$\therefore \int_{-٢}^{١} (٦س^{٢} - ٦)\,د س$

$= ٢س^{٣} - ٦س\,]_{-٢}^{١}$

$= (٢ - ٦) - (-١٢ + ١٢) = صفر$.

لكنه $م(س) = ٤س - ٣س^{٢}$

$\therefore م(٢) = ٨ - ١٢ = -٤$

$م(-١) = -٤ - ٣ = -٧$

$\therefore (٢ \times ٣ - ٧ - ٢) - (٨ \times ٣ - ٤ - ٨)$

$= -٢٠ + ٢٣ = \boxed{٣}$

٤ إذا كان

$ق(س) = ٢س - \frac{٦}{\sqrt[٣]{س}}$

وكان $م(١) = ٣$ فجد $م(٨)$

الحل:

$\int ق(س)\,د س = \int (٢س - ٦س^{-\frac{١}{٣}})\,د س$

$م(س) = س^{٢} - ٦ \times \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} + ج$

$م(س) = س^{٢} - ٩\sqrt[٣]{س^{٢}} + ج$

لكنه $م(١) = ٣$

$٣ = ١ - ٩ + ج \leftarrow ج = ١١$

$م(س) = س^{٢} - ٩\sqrt[٣]{س^{٢}} + ١١$

$\therefore م(٨) = ٦٤ - ٩ \times ٤ + ١١ = ٣٩$

٥ إذا كان $م(س) = ٢س^{٣} - س^{٣} + ٥$

هو معكوس المشتقة للاقتران $م(س)$

فجد: $\int_{-١}^{٢} (٣ق(س) - ٤س)\,د س$

الحل:

$= ٣م(س) - ٢س^{٢}\,]_{-١}^{٢}$

$= (٣م(١) - ٨) - (٣م(-١) - ٢)$

٦ إذا كان $م(س)$ كثير حدود من الدرجة الأولى بحيث أن

$\int_{-١}^{١} م(س)\,د س = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} م(س)\,د س = ٢$

فجد قاعدة $م(س)$

الحل:

$م(س) = ب س + ب$

$\int_{-١}^{١} (ب س + ب)\,د س = ٤$

$ب \times \frac{س^{٢}}{٢} + ب س\,]_{-١}^{١} = ٤$

$(\frac{١}{٢}ب + ب) - (\frac{١}{٢}ب - ب) = ٤$

$٢ب = ٤ \leftarrow ب = ٢$

$\int_{١}^{٣} (ب س + ٢)\,د س = ٢$

$ب \times \frac{س^{٢}}{٢} + ٢س\,]_{١}^{٣} = ٢$

$(\frac{٩}{٢}ب + ٦) - (\frac{١}{٢}ب + ٢) = ٢$

$٤ب + ٤ = ٢ \leftarrow ب = -\frac{١}{٢}$.

$\therefore م(س) = -\frac{١}{٢}س + ٢$

تدريب:

① جد $\int_{-٢}^{-١} (\frac{١}{\sqrt{٣س+١}} \times \int_{١}^{٣} (٢س+١)\,د س)\,د س$

② إذا كان $م(س) = ٤ + \sqrt{س+١}$ هو معكوس المشتقة للاقتران $ق$ فجد:

$\int_{٠}^{٣} (٢م(س) + ق(س))\,د س$.

٦ اذا كان $\text{ق}'(س) = \frac{٦}{\sqrt{س}}$ وكان منحنى $\text{ق}(س)$ يمر بالنقطة $(٤، ٠)$ وميل المماس عند هذه النقطة يساوي ١ فجد قاعدة الاقتران $\text{ق}(س)$.

الحل:

$\text{ق}(س) = \int \frac{٦}{س^{\frac{١}{٢}}} \, \text{د}س$

$\text{ق}(س) = ٦ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} + \text{ج}$

$\text{ق}(س) = ١٢ \sqrt{س} + \text{ج}$

بكلم: $\text{ق}(٤) = ١$ = ميل المماس.

$١ = ١٢ \times ٢ + \text{ج} \longleftarrow \text{ج} = -٢٣$

$\therefore \text{ق}(س) = ١٢ \sqrt{س} - ٢٣$

$\text{ق}(س) = \int (١٢ س^{-\frac{١}{٢}} - ٢٣) \, \text{د}س$

$\text{ق}(س) = ٨ س^{\frac{١}{٢}} - ٢٣ س + \text{ج}$

$\text{ق}(س) = ٨ \sqrt{س^{٣}} - ٢٣ س + \text{ج}$

بكلم $\text{ق}(٤) = ٠$

$٠ = ٨ \times ٨ - ٢٣ \times ٤ + \text{ج}$

$\text{ج} = ٢٨$

$\therefore \text{ق}(س) = ٨ \sqrt{س^{٣}} - ٢٣ س + ٢٨$

٧ اذا كان: $\text{ق}''(س) = ٦ س$ وكان

$\int_{-١}^{٣} \text{ق}'(س) \, \text{د}س = ٣٦$ ، $\text{ق}(١) = ٧$

فجد $\text{ق}(٢)$.

الحل:

$\int \text{ق}'(س) \, \text{د}س = \int ٦ س \, \text{د}س$

$\text{ق}'(س) = ٣ س^{٢} + \text{ج}$

بكلم: $\int_{-١}^{٣} (٣ س^{٢} + \text{ج}) \, \text{د}س = ٣٦$

$[س^{٣} + \text{ج} س]_{-١}^{٣} = ٣٦$

$(٢٧ + ٣ \text{ج}) - (-١ - \text{ج}) = ٣٦$

$٢٨ + ٤ \text{ج} = ٣٦$

$٤ \text{ج} = ٨ \longleftarrow \text{ج} = ٢$

$\therefore \text{ق}'(س) = ٣ س^{٢} + ٢$

$\int \text{ق}(س) \, \text{د}س = \int (٣ س^{٢} + ٢) \, \text{د}س$

$\text{ق}(س) = س^{٣} + ٢ س + \text{ج}$

بكلم $\text{ق}(١) = ٧$

$٧ = ١ + ٢ + \text{ج} \longleftarrow \text{ج} = ٤$

$\therefore \text{ق}(س) = س^{٣} + ٢ س + ٤$

$\therefore \text{ق}(٢) = ٨ + ٤ + ٤ = ١٦$

تدريب:

① اذا كان $\text{ق}'(س) = \frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٤}}}$ وكان $\text{ق}(٨) = ٢١$

م(س) هو اقتران معكوس المشتقة للاقتران ق حيث أن $\text{م}(-١) = ١٣$ فجد قاعدة الاقتران م(س).

② اذا كان $\text{ق}''(س) = ١٢ س$

وكان $\text{ق}'(١) = ٤$

$\int_{١}^{٢} \text{ق}(س) \, \text{د}س = ١٠$

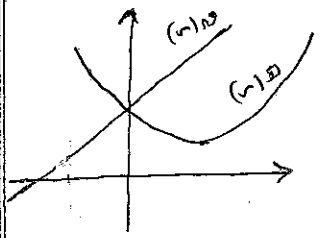
فجد: $\text{ق}(-١)$

③ اذا كان $\text{ق}'(س) = ٣$ وكان

$\int_{١}^{٣} \text{ق}(س) \, \text{د}س = \frac{٥٠}{٣}$ ، $\text{ق}(٠) = ٣$

فجد قاعدة الاقتران ق(س)

④ اذا كان ق(س)، ه(س) كما في الشكل وكان:



$\text{ه}'(س) = ٤ س + ٢$

$\text{ق}(س) = ٢ س + ٤$

فجد: $\int_{-١}^{٢} \text{ه}(س) \, \text{د}س$.

٨ جد قيمة الثابت جـ اذا كان :

$$\int_{2}^{جـ} (2س - 4)\,دس = 16$$

الحل :

$$\left[س^2 - 4س \right]_{2}^{جـ} = 16$$

$$(جـ^2 - 4جـ) - (4 - 8) = 16$$

$$جـ^2 - 4جـ - 12 = 0 \leftarrow (جـ - 6)(جـ + 2) = 0$$

$$\therefore جـ = 6 \text{ او } جـ = -2$$

٩ جد قيمة الثابت ب اذا كان :

$$\int_{-2}^{1} \left(6س - \int_{-1}^{3} ب\,دس \right) دس = 27$$

الحل : نجد اولا :

$$\int_{-1}^{3} ب\,دس = \left[بس \right]_{-1}^{3}$$

$$= 3ب + ب = 4ب$$

$$\int_{-2}^{1} (6س - 4ب)\,دس = 27$$

$$\left[3س^2 - 4بس \right]_{-2}^{1} = 27$$

$$(3 - 4ب) - (12 + 8ب) = 27$$

$$-9 - 12ب = 27 \leftarrow ب = -3$$

١٠ اذا كانت ن عدد صحيح موجب

فأثبت ان $\int_{0}^{1} (س^ن + س^{\frac{1}{ن}})\,دس = 1$

البرهان :

$$= \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1} + \frac{ن}{ن+1} س^{\frac{ن+1}{ن}} \right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{ن+1} + \frac{ن}{ن+1} - \text{صفر}$$

$$= \frac{1}{ن+1} = 1$$

١١ اذا كان ن عدد صحيح موجب فجد قيم ن التي تحقق المعادلة التالية :

$$\int_{-1}^{1} س^ن\,دس = 2 \int_{0}^{1} س^ن\,دس$$

الحل :

$$\left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1} \right]_{-1}^{1} = 2 \times \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1} \right]_{0}^{1}$$

$$\frac{1}{ن+1} - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} = 2 \times \frac{1}{ن+1}$$

$$1 - (-1)^{ن+1} = 2 \leftarrow (-1)^{ن+1} = -1$$

$$(-1)^ن \times (-1)^1 = -1 \leftarrow (-1)^ن = +1$$

$\therefore$ ن عدد زوجي .

اي ان : ن = 2 ، 4 ، 6 ، .....

تدريب :

① ما قيمة الثابت ب اذا كان :

$$\int_{-2}^{4} 3ب\,دس = \int_{ب}^{4} 2س\,دس$$

② ما قيمة الثابت جـ اذا كان :

$$\int_{-1}^{3} (3س^2 + \int_{جـ}^{3} 6\,دس)\,دس = 40$$

③ ما قيمة الثابت ن بحيث ان ن عدد صحيح موجب

$$\int_{0}^{1} (3س^ن - س^{\frac{1}{ن}})\,دس = \frac{1}{3}$$

قاعدة : تكامل القوس المرفوع لقوة
[٣] ← شرط : مادافله خطي :

$$\int (أ س + ب)^{ن} \, د س = \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + ج$$

حيث $ن \neq -١$

* جـ التكاملات التالية :

١) $\int (٣ - ٢س)^{٥} \, د س$

$= \frac{(٣ - ٢س)^{٦}}{٣ \times ٦} + ج$

$= \frac{(٣ - ٢س)^{٦}}{١٨} + ج$

٢) $\int \sqrt[٣]{٦س + ١} \, د س$

$= \int (٦س + ١)^{\frac{١}{٣}} \, د س$

$= \frac{(٦س + ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٦ \times \frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{١}{٨} (٦س + ١)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

٣) $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{٤س + ١}} \, د س$

$= \int_{٠}^{٢} (٤س + ١)^{-\frac{١}{٢}} \, د س$

$= \left[\frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{٤ \times \frac{١}{٢}} \right]_{٠}^{٢}$

$= \left[\frac{١}{٢} \sqrt{٤س + ١} \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٢} (٣ - ١) = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$

* $\int (س^{٢} - ٦س + ٩)(٢س - ٦)^{٣} \, د س$

٤) $\int س^{٤} (٥ - \frac{٣}{س})^{٤} \, د س$

$= \int س \times (\frac{٥س - ٣}{س})^{٤} \, د س$

$= \int \cancel{س^{٤}} \times \frac{(٥س - ٣)^{٤}}{\cancel{س^{٤}}} \, د س$

$= \frac{(٥س - ٣)^{٥}}{٢٥} + ج$

٥) $\int_{١}^{٨} س \sqrt[٣]{\frac{٤}{س^{٢}} - \frac{٥}{س^{٣}}} \, د س$

$= \int_{١}^{٨} س \times \sqrt[٣]{\frac{٤س - ٥}{س^{٣}}} \, د س$

$= \int_{١}^{٨} \cancel{س} \times \frac{\sqrt[٣]{٤س - ٥}}{\cancel{س}} \, د س$

$= \int_{١}^{٨} (٤س - ٥)^{\frac{١}{٣}} \, د س$

$= \left[\frac{(٤س - ٥)^{\frac{٤}{٣}}}{٤ \times \frac{٤}{٣}} \right]_{١}^{٨}$

$= \left[\frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٤س - ٥)^{٤}} \right]_{١}^{٨}$

$= \frac{٣}{١٦} (١٨١ - ١) = \frac{٣}{١٦} \times ٨٠ = ١٥$

٦) $\int (٣س - \sqrt{س})^{٢} \, د س$

اكل :

$= \int (٩س^{٢} - ٦س\sqrt{س} + س) \, د س$

$= \int (٩س^{٢} - ٦س \times س^{\frac{١}{٢}} + س) \, د س$

$= \int (٩س^{٢} - ٦س^{\frac{٣}{٢}} + س) \, د س$

$= ٣س^{٣} - \frac{١٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢} + ج$

٧) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٣س+٣}}\,دس$

الحل:

$= \int \frac{٥س}{\sqrt{٧س+٣}+\sqrt{٣س+٣}} \times \frac{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٣س+٣}}{\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٣س+٣}}$

$= \int \frac{٥س(\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٣س+٣})}{٧س+٣-٣س-٣}$

$= \int \frac{٥س(\sqrt{٧س+٣}-\sqrt{٣س+٣})}{٥س}\,دس$

$= \int (٧س+٣)^{\frac{1}{٢}} - (٣س+٣)^{\frac{1}{٢}}\,دس$

$= \frac{(٧س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{(٣س+٣)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ج$

تدريب:

جد التكاملات التالية:

① $\int_{٠}^{٢} (\frac{١}{٢}س+١)^{٣}\,دس$

② $\int_{١}^{٢} (١-س)(س-١)^{٥}\,دس$

③ $\int \frac{١}{س} \sqrt[٣]{٣س^{٤}+س^{٣}}\,دس$

④ $\int_{١}^{٥} (٤س^{٣}-٤س+١)^{-\frac{١}{٤}}\,دس$

⑤ $\int \frac{س+٢}{\sqrt{٣س+٤}-\sqrt{س}}\,دس$

⑥ $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} (س^{٢}-\frac{١}{س})^{٢}\,دس$

قاعدة [٤]: تكامل الاقتران الأسي الطبيعي

لـ شرط: الأس خطي.

* جد التكاملات التالية:

١) $\int هـ^{٣س+٧}\,دس = \frac{هـ^{٣س+٧}}{٣} + ج$

٢) $\int \frac{٦}{هـ^{٢س}}\,دس = \int ٦هـ^{-٢س}\,دس$

$= ٦ \times \frac{هـ^{-٢س}}{-٢} + ج$

$= -٣هـ^{-٢س} + ج$

٣) $\int (٦س - ١٠هـ^{٥س} + ٣)\,دس$

$= ٦ \times \frac{س^{٢}}{٢} - ١٠ \times \frac{هـ^{٥س}}{٥} + ٣س + ج$

$= ٣س^{٢} - ٢هـ^{٥س} + ٣س + ج$

٤) $\int (هـ^{-٣س} + \sqrt[٣]{هـ^{٢س}} + هـ^{٢})\,دس$

$= \int (هـ^{-٣س} + هـ^{\frac{٢س}{٣}} + هـ^{٢})\,دس$

$= -\frac{١}{٣}هـ^{-٣س} + ٣هـ^{\frac{٢س}{٣}} + هـ^{٢}س + ج$

٥) $\int \frac{هـ^{٣س}-٨}{هـ^{س}-٢}\,دس$

$= \int \frac{(هـ^{س}-٢)(هـ^{٢س}+٢هـ^{س}+٤)}{(هـ^{س}-٢)}$

$= \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + هـ^{٢س} + ٤س + ج$

٦) $\int \frac{هـ^{٣س}+٤هـ^{٥س}-٩}{هـ^{٣س}}\,دس$

$= \int (هـ^{٣س}+٤هـ^{٢س}-٩هـ^{-٣س})\,دس$

$= \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + ٢هـ^{٢س} + ٣هـ^{-٣س} + ج$

٧) $\int_{1}^{e^2} \frac{1}{e-1}\, dx$

الحل:

$= \frac{1}{e-1} [x]_1^{e^2}$

$= \frac{1}{e-1}(e^2-1) = \frac{(e-1)(e+1)}{e-1}$

$= e+1$

٨) $\int (e^x + e^{-x})^2\, dx$

الحل:

$= \int (e^{2x} + 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x})\, dx$

$= \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\, dx$

$= \frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} + c$

٩) $\int_{1}^{3} e^{1+\ln 2x}\, dx$

$= \int_{1}^{3} e \times e^{\ln 2x}\, dx$

$= \int_{1}^{3} e \times 2x\, dx$

$= \int_{1}^{3} 2e x\, dx$

$= 2e \times \frac{x^2}{2}]_1^3 = e(9-1)$

$= 8e$

١٠) $\int_{1}^{\ln 3} e^{2x}\, dx$

$= \frac{e^{2x}}{2}]_0^{\ln 3} = \frac{1}{2}(e^{2\ln 3} - e^0)$

$= \frac{1}{2}(e^{\ln 9} - 1)$

$= \frac{1}{2}(9-1) = 4$

قاعدة ٥ : تكامل الاقتران الكسري
(القسم)

(أ) $\int \frac{k}{px+b}\, dx$

$= \frac{k}{p} \ln|px+b| + c$

← البسط ثابت والمقام خطي .

(ب) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$

$= \ln|g(x)| + c$

← البسط مشتق للمقام .

* حل التكاملات التالية :

١) $\int_{2}^{4} \frac{1}{9-2x}\, dx$

الحل:

$= -\frac{1}{2} \ln|9-2x|]_2^4$

$= -\frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln 5$

٢) $\int_{1}^{3} \frac{6x}{3x^2-5}\, dx$

← $6x$

الحل:

$= \ln|3x^2-5|]_1^3$

$= \ln 22 - \ln 2 = \ln \frac{22}{2} = \ln 11$

٣) $\int \tan x\, dx$

الحل:

$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

← $\cos x$

$= \ln|\sin x| + c$

٤) $\int_{0}^{2} (2س-3)^{-1}$ دس

الحل: $= \int_{0}^{2} \frac{1}{2س-3}$ دس

$= \frac{1}{2} \left[\ln_{e} |2س-3| \right]_{0}^{2}$

$= \frac{1}{2} (\ln_{e} 1 - \ln_{e} 3) = -\frac{1}{2} \ln_{e} 3$

٥) $\int \frac{س+2}{3س^{2}+2س-8}$ دس

الحل:

$= \int \frac{1}{(3س-4)(س+2)}$ دس

$= \frac{1}{10} \ln_{e} |3س-4| + ج$

٦) $\int \frac{5س^{2}}{س^{3}+4}$ دس

$\leftarrow 3س^{2}$

الحل:

$= \frac{5}{3} \ln_{e} |س^{3}+4| + ج$

٧) $\int \frac{3جا^{2}س}{1+جتا^{2}س}$ دس

$\leftarrow -2جتاس جاس$

$= -جا^{2}س$

$= -3 \ln_{e} |1+جتا^{2}س| + ج$

٨) $\int \frac{3س-6}{س^{2}-4س-9}$ دس

$\leftarrow 2س-4$

$= 2(س-2)$

$= \int \frac{3(س-2)}{س^{2}-4س-9}$ دس

$= \frac{3}{2} \ln_{e} |س^{2}-4س-9| + ج$

٩) $\int \frac{س^{3}+5س-4}{س^{2}}$ دس

الحل:

$= \int (\frac{س^{3}}{س^{2}} + \frac{5س}{س^{2}} - \frac{4}{س^{2}})$ دس

$= \int (س + \frac{5}{س} - 4س^{-2})$ دس

$= \frac{س^{2}}{2} + 5 \ln_{e} |س| + 4س^{-1} + ج$

١٠) $\int_{-1}^{2} (\frac{2}{س^{2}} - 1)^{2}$ دس

الحل:

$= \int_{-1}^{2} (\frac{4}{س^{4}} - \frac{4}{س^{2}} + 1)$ دس

$= \int_{-1}^{2} (4س^{-2} - \frac{4}{س} + 1)$ دس

$= \left[-4س^{-1} - 4 \ln_{e} |س| + س \right]_{-1}^{2}$

$= \left[\frac{-4}{س} - 4 \ln_{e} |س| + س \right]_{-1}^{2}$

$= (-2 - 4 \ln_{e} 2 + 2) - (4 - 0 - 1)$

$= -4 \ln_{e} 2 - 3$

تدريب: جد التكاملات التالية.

١) $\int (هـ^{3س} - \frac{6}{2س+1})$ دس

٢) $\int \frac{(هـ^{س}-2)(هـ^{س}+3)}{هـ^{س}}$ دس

٣) $\int \frac{(س+3)^{2}}{2س^{2}}$ دس

٤) $\int 3س \, هـ^{2+3 \ln_{e} س}$ دس

٥) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+ظا^{2}س}{2+ظاس}$ دس

تمرين [1]

[1] جد التكاملات التالية :

١) $\int_{1}^{} \frac{1}{س} \left(\sqrt{س^3} - \frac{س}{2س+1} \right) د س$

٢) $\int \frac{س^3 - 8}{س^2 - 3س} د س$

٣) $\int_{لو ٢}^{} \frac{3}{\sqrt{هـ^{6س}}} د س$

٤) $\int \frac{5 + 5 ظا^2 س}{ظا س} د س$

٥) $\int_{1}^{} \sqrt{س} (\sqrt{س} + 2)^2 د س$

٦) $\int \frac{3س - 2}{(9س^2 - 12س + 4)^3} د س$

٧) $\int هـ^{5س} \sqrt{هـ^{2س} + 4هـ^{س} + 3} د س$

٨) $\int \frac{3}{\sqrt{س} + \sqrt{س - 3}} د س$

٩) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{س} - س}{1 - \sqrt{س}} د س$

١٠) $\int_{-1}^{1} \frac{(هـ^{س} + 1)^2}{هـ^{س}} د س$

[2] اذا كان :

$ق(س) = \frac{\sqrt{س^3} + 4}{س^2}$

وكان $م(4) = 3$ حيث $م(س)$ معكوس المشتقة للاقتران ق

جد $م'(1)$.

[3] اذا كان :

$ق(س) = س جتا س$

جد : $\int_{}^{\pi} (ق''(س) - 3ق(س)) د س$

[4] اذا كان :

$ق'(س) = \frac{1}{س^2} + هـ^{1-س}$

وكان : $ق(1) = 3$ ، $ق(-1) = 0$

جد قاعدة الاقتران $ق(س)$

[5] اذا كان $هـ(س)$ ، $م(س)$ معكوس المشتقة للاقتران ق وكان :

$\int_{-2}^{3} (م(س) - هـ(س)) د س = 30$

جد $\int_{-2}^{3} \frac{هـ'(س) - 14س}{\sqrt{3س + 7}} د س$

[6] اذا كان :

$ق'(س) = 6س$

وكان :

$ق(1) = 5$ ، $\int_{-2}^{2} ق(س) د س = 4$

جد $ق(2)$

قاعدة ٦ : تكامل المقدارات المثلثية
لـ شرط : الزاوية خطية

١) $\int$ جاس دس = − جتاس + جـ

٢) $\int$ جتاس دس = جاس + جـ

٣) $\int$ ظاس دس = − لو|جتاس| + جـ

٤) $\int$ ظتاس دس = لو|جاس| + جـ

٥) $\int$ قا^{2}س دس = ظاس + جـ

٦) $\int$ قتا^{2}س دس = − ظتاس + جـ

٧) $\int$ قاس ظاس دس = قاس + جـ

٨) $\int$ قتاس ظتاس دس = − قتاس + جـ

المتطابقات

١ جا^{2}س + جتا^{2}س = ١
١ + ظا^{2}س = قا^{2}س
١ + ظتا^{2}س = قتا^{2}س

٢ جا^{2}س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا٢س)

جتا^{2}س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا٢س)

جاس جتاس = $\frac{1}{2}$ جا٢س

(جاس ± جتاس)^2 = ١ ± جا٢س

٣ جا٢س = ٢ جاس جتاس

جتا٢س = { جتا^{2}س − جا^{2}س ; ١ − ٢ جا^{2}س ; ٢ جتا^{2}س − ١ }

٤ ١) جاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ (جا(أ+ب) + جا(أ−ب))
٢) جتاأ جتاب = $\frac{1}{2}$ (جتا(أ+ب) + جتا(أ−ب))
٣) جاأ جاب = $\frac{-1}{2}$ (جتا(أ+ب) − جتا(أ−ب))

تذكر أن :
① $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ = ظاس قاس
② $\frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}$ = ظتاس قتاس

١ جد التكاملات التالية :

١) $\int$ (جا^{3}س − ٤ جتاس + ٥ قتا^{2}س) دس
الحل :
= − جتاس − ٤ جاس − ٥ ظتاس + جـ

٢) $\int$ (ظاس + قاس ظتاس) دس
الحل :
= − لو|جتاس| − قاس + جـ

٣) $\int$ (جتا٣س + ٢ ظتا٧س) دس
الحل :
= $\frac{1}{3}$ جا٣س + $\frac{2}{7}$ لو|جا٧س| + جـ

٤) $\int$ (جتا٤س ظا٤س + $\frac{1}{\text{جتا}^6\text{س}}$) دس
الحل :
= $\int$ (جتا٤س × $\frac{\text{جا٤س}}{\text{جتا٤س}}$ + قا^{6}س) دس
= − $\frac{1}{4}$ جتا٤س + $\frac{1}{6}$ ظا٦س + جـ

٥) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (جا٣س + \frac{جاس}{جتا^2 س})$ دس

الحل: $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (جا٣س + ظاس قاس)$ دس

$= -\frac{1}{3} جتا٣س + قاس]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (\frac{1}{3} + ٢) - (-\frac{1}{3} + ١)$

$= \frac{٢}{3} + ١ = \frac{٥}{3}$

٦) $\int ظتاس (ظاس + قتاس)$ دس

الحل: $= \int (ظتاس ظاس + ظتاس قتاس)$ دس

$= \int (١ + ظتاس قتاس)$ دس

$= س - قتاس + ج$

٧) $\int جا^2 س$ دس

الحل: $= \int \frac{1}{2} (١ - جتا٢س)$ دس

$= \frac{1}{2} (س - \frac{جا٢س}{٢}) + ج$

٨) $\int جتا^2 ٣س$ دس

الحل: $= \int \frac{1}{2} (١ + جتا٦س)$ دس

$= \frac{1}{2} (س + \frac{جا٦س}{٦}) + ج$

٩) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ظا^2 س$ دس

الحل: $= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (قا^2 س - ١)$ دس

$= ظاس - س]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= ١ - \frac{\pi}{4} - ٠ = ١ - \frac{\pi}{4}$

١٠) $\int ظتا^5 س$ دس

الحل: $= \int (قتا^2 س - ١)$ دس

$= -\frac{1}{5} ظتا^4 س - س + ج$

١١) $\int جاس (جاس + جتاس)$ دس

الحل:

$= \int (جا^2 س + جاس جتاس)$ دس

$= \int \frac{1}{2} (١ - جتا٢س) + \frac{1}{2} جا٢س$ دس

$= \frac{1}{2} (س - \frac{جا٢س}{٢}) - \frac{1}{4} جتا٢س + ج$

١٢) $\int ظاس جا^2 س$ دس

الحل:

$= \int ظاس (١ - جتا^2 س)$ دس

$= \int ظاس - ظاس جتا^2 س$ دس

$= \int ظاس - \frac{جاس}{جتاس} \times جتا^2 س$ دس

$= \int (ظاس - \frac{1}{2} جا٢س)$ دس

$= -لو|جتاس| + \frac{1}{4} جتا٢س + ج$

تدريب: جد التكاملات التالية

① $\int ظتاس (جتا^2 س + ظتاس)$ دس

② $\int جا^2 س جتا^2 س$ دس.

③ $\int ظاس قتا^2 س$ دس.

④ $\int ٤ جاس جا٢س جتاس$ دس.

⑤ $\int قا^2 س (جاس + جا^2 س)$ دس.

⑥ $\int جتا^2 س$ هـ$^{٢ لو ظاس}$ دس.

١٣) $\int (\text{جتا}^4 س - \text{جا}^4 س)\, د س$

الحل:

$= \int (\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س)(\text{جتا}^2 س + \text{جا}^2 س)\, د س$

$= \int \text{جتا} 2س \times 1\, د س$

$= \frac{1}{2} \text{جا} 2س + ج$

١٤) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^2 س - \text{جا}^4 س}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^2 س (1 - \text{جا}^2 س)}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^2 س \, \text{جتا}^2 س}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} س \, \text{جتا} س\, د س$ | في الربع الأول: جا س > ٠، جتا س > ٠

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \text{جا} 2س\, د س$

$= -\frac{1}{4} \text{جتا} 2س \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{4}(-1 - 1) = \frac{1}{2}$

١٥) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جتا} 2س}\, د س$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{2 \text{جا}^2 س}\, د س$

$= \int_{0}^{\pi} \sqrt{2}\, \text{جا} س$ | في الربع الأول والثاني: جا س > ٠

$= -\sqrt{2} \text{جتا} س \Big]_{0}^{\pi}$

$= -\sqrt{2}(-1 - 1) = 2\sqrt{2}$

١٦) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 + \text{جا} س}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{(\text{جا} \frac{س}{2} + \text{جتا} \frac{س}{2})^2}\, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\text{جا} \frac{س}{2} + \text{جتا} \frac{س}{2})\, د س$ | في الربع الأول: جا $\frac{س}{2}$ > ٠، جتا $\frac{س}{2}$ > ٠

$= -2 \text{جتا} \frac{س}{2} + 2 \text{جا} \frac{س}{2} \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= (-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}) - (-2 + 0) = 2$

١٧) $\int (\text{قا} س + \text{ظا} س)^2\, د س$

الحل:

$= \int (\text{قا}^2 س + 2 \text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{ظا}^2 س)\, د س$

$= \int (\text{قا}^2 س + 2 \text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{قا}^2 س - 1)\, د س$

$= \int (2 \text{قا}^2 س + 2 \text{قا} س \, \text{ظا} س - 1)\, د س$

$= 2 \text{ظا} س + 2 \text{قا} س - س + ج$

تدريب: جد التكاملات التالية:

① $\int (\text{ظا} س + \text{جتا} س)^2\, د س$

② $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \text{جتا} 4س}\, د س$

③ $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا} س \sqrt{4 - 4 \text{جا}^2 س}\, د س$

١٨) $\int \frac{\text{جا} س + \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}\, د س$

الحل:

$= \int (\frac{\text{جا} س}{\text{جتا}^2 س} + \frac{\text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س})\, د س$

$= \int (\text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{ظا}^2 س)\, د س$

$= \int (\text{قا} س \, \text{ظا} س + \text{قا}^2 س - 1)\, د س$

$= \text{قا} س + \text{ظا} س - س + ج$

١٩) $\int \frac{3 \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س \, \text{جتا}^2 س}\, د س$

الحل:

$= \int \frac{3 \text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س}{4 \text{جا}^2 س \, \text{جتا}^2 س}\, د س$

$= \int \frac{3 \text{جا}^2 س}{4 \text{جا}^2 س \, \text{جتا}^2 س} + \frac{\text{جتا}^2 س}{4 \text{جا}^2 س \, \text{جتا}^2 س}\, د س$

$= \int (\frac{3}{4} \text{قا}^2 س + \frac{1}{4} \text{قتا}^2 س)\, د س$

$= \frac{3}{4} \text{ظا} س - \frac{1}{4} \text{ظتا} س + ج$

٢٠) $\int \frac{1-\text{جا}^2 س}{\text{جا}^{\frac{2}{3}} س \text{ جتا}^{\frac{2}{3}} س} \, د س$

الحل:

$= \int \frac{1-\text{جا}^2 س}{(\text{جا}^{\frac{2}{3}} س \text{ جتا}^{\frac{2}{3}} س)^2} \, د س$

$= \int \frac{1-\text{جا}^2 س}{(\frac{1}{2} \text{جا} س)^2} \, د س$

$= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int ٤ \text{ظتا}^2 س \, د س = \int ٤ (\text{قتا}^2 س - ١) \, د س$

$= ٤ (-\text{ظتا} س - س) + ج$

٢١) $\int \frac{(\text{جا} س - \text{جتا} س)^2}{\text{جتا}^2 س} \, د س$

الحل:

$= \int \frac{1-\text{جا}٢س}{\text{جتا}^2 س} \, د س$

$= \int (\frac{1}{\text{جتا}^2 س} - \frac{\text{جا}٢س}{\text{جتا}^2 س}) \, د س$

$= \int (\text{قا}^2 س - \text{قا} س \text{ظا} س) \, د س$

$= \frac{1}{2} \text{ظا}٢س - \frac{1}{2} \text{قا} س + ج$

٢٢) $\int \frac{د س}{\text{جا} س \text{ جتا} س}$

الحل:

$= \int \frac{1}{\text{جا} س \text{ جتا} س} \, د س$

$= \int \frac{\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س}{\text{جا} س \text{ جتا} س} \, د س$

$= \int (\frac{\text{جا}^2 س}{\text{جا} س \text{ جتا} س} + \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا} س \text{ جتا} س}) \, د س$

$= \int (\text{ظا} س + \text{ظتا} س) \, د س$

$= -\text{لو}|\text{جتا} س| + \text{لو}|\text{جا} س| + ج$

٢٣) $\int \frac{\text{جتا}^2 س}{1-\text{جتا}٢س} \, د س$

الحل: $= \int \frac{\text{جتا}^2 س}{٢\text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int \frac{1}{2} \text{ظتا}^2 س \, د س$

$= \int \frac{1}{2} (\text{قتا}^2 س - 1) \, د س$

$= \frac{1}{2} (-\text{ظتا} س - س) + ج$

٢٤) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}^{\frac{3}{2}} س}{1+\text{جتا} س} \, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}^{\frac{3}{2}} س}{٢\text{جتا}^2 \frac{س}{2}} \, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \text{قا}^{\frac{3}{2}} س \text{ ظا}^{\frac{3}{2}} س \, د س$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} [\text{قا}^{\frac{3}{2}} س]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{2}{3\sqrt{2}} - 1$

تدريب: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س \text{ جتا}^2 س} \, د س$

② $\int \frac{(1+\text{جتا} س)^2}{\text{جا}^2 س} \, د س$

③ $\int \frac{\text{جتا}٢س}{\text{جتا}^2 س} \, د س$

④ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+\text{جتا}٢س}}{\text{جتا}^3 س} \, د س$

⑤ $\int \frac{\text{جا}^4 س}{\text{جتا}^4 س} \, د س$

٢٥) $\int_{-\pi}^{0} \frac{٢جاس}{٣-جتاس}\,دس$

الحل: نفرض $ص = جتاس$

$= ٣\ لو_{هـ}|٣-جتاس|\ ]_{-\pi}^{0}$

$= ٣(لو_{هـ}١ - لو_{هـ}٣) = -٣لو_{هـ}٣$

٢٦) $\int \frac{جاس}{١-جاس}\,دس \times \frac{١+جاس}{١+جاس}$

$= \int \frac{جاس+جا^{٢}س}{١-جا^{٢}س}\,دس$

$= \int \frac{جاس+جا^{٢}س}{جتا^{٢}س}\,دس$

$= \int (\frac{جاس}{جتا^{٢}س} + \frac{جا^{٢}س}{جتا^{٢}س})\,دس$

$= \int (قاس ظاس + ظا^{٢}س)\,دس$

$= \int (قاس ظاس + قا^{٢}س - ١)\,دس$

$= قاس + ظاس - س + ج$

٢٧) $\int \frac{دس}{(قاس+ظاس)^{٢}}$

الحل:

$= \int \frac{١}{(قاس+ظاس)^{٢}}\,دس \times \frac{(قاس-ظاس)^{٢}}{(قاس-ظاس)^{٢}}$

$= \int \frac{(قاس-ظاس)^{٢}}{(قا^{٢}س-ظا^{٢}س)^{٢}}\,دس$ ، $قا^{٢}س-١$

$= \int \frac{قا^{٢}س-٢قاسظاس+ظا^{٢}س}{(١)^{٢}}\,دس$

$= \int (قا^{٢}س-٢قاسظاس-١)\,دس$

$= ٢ظاس-٢قاس-س+ج$

٢٨) $\int \frac{١-جا٢س}{جاس-جتاس}\,دس$

الحل:

$= \int \frac{(جاس-جتاس)^{٢}}{جاس-جتاس}\,دس$

$= -جتاس-جاس+ج$

٢٩) $\int \frac{١+ظاس}{١-ظاس}\,دس$

$= \int \frac{١+\frac{جاس}{جتاس}}{١-\frac{جاس}{جتاس}}\,دس$

$= \int \frac{جتاس+جاس}{جتاس-جاس} \times \frac{جتاس}{جتاس-جاس}\,دس$

$= \int \frac{جاس+جتاس}{جتاس-جاس}\,دس$

$= -لو_{هـ}|جتاس-جاس|+ج$

٣٠) $\int \frac{دس}{جا^{٢}س-جا^{٤}س}$

$= \int \frac{١}{جا^{٢}س(١-جا^{٢}س)}\,دس$

$= \int \frac{١}{جا^{٢}سجتا^{٢}س}\,دس$

$= \int \frac{١}{(\frac{١}{٢}جا٢س)^{٢}}\,دس$

$= \int ٤قتا^{٢}٢س\,دس$

$= -٢ظتا٢س+ج$

٣١) $\int \frac{1 - \text{جتا}٦س}{1 + \text{جتا}٦س}$ دس

الكل $= \int \frac{٢\text{جا}^{٢}٣س}{٢\text{جتا}^{٢}٣س}$ دس

$= \int (\text{ظا}^{٢}٣س)$ دس

$= \int (\text{قا}^{٢}٣س - 1)$ دس

$= \frac{1}{٣}\text{ظا}٣س - س + ج$.

٣٢) $\int \text{جا}٢س \, \text{جا}٣س$ دس

الكل :

$= -\frac{1}{٢}\int (\text{جتا}٥س - \text{جتا}س)$ دس

$= -\frac{1}{٢}\int (\text{جتا}٥س - \text{جتا}س)$ دس

$= -\frac{1}{٢}\left(\frac{\text{جا}٥س}{٥} - \text{جا}س\right) + ج$

٣٣) $\int \text{جتا}س (\text{جتا}٥س - ٢\text{جتا}س)$ دس

الكل :

$= \int (\text{جتا}س \, \text{جتا}٥س - ٢\text{جتا}^{٢}س)$ دس

$= \int \text{جتا}٥س \, \text{جتا}س - (1 + \text{جتا}٢س)$ دس

$= \int \frac{1}{٢}(\text{جتا}٦س + \text{جتا}٤س) - \text{جتا}٢س - 1$ دس

$= \frac{1}{٢}\left(\frac{\text{جا}٦س}{٦} + \frac{\text{جا}٤س}{٤}\right) - \frac{1}{٢}\text{جا}٢س - س + ج$

٣٤) $\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتا}س}$ دس

الكل : $= \int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جتا}س} \times \frac{\text{جا}س}{\text{جا}س}$ دس

$= \int \frac{\text{جتا}٣س \, \text{جا}س}{\text{جتا}س \, \text{جا}س}$ دس .

$= \int \frac{\frac{1}{٢}(\text{جا}٤س + \text{جا}٢س)}{\frac{1}{٢}\text{جا}٢س}$ دس

$= \int \left(\frac{\text{جا}٤س}{\text{جا}٢س} - \frac{\text{جا}٢س}{\text{جا}٢س}\right)$ دس

$= \int \frac{٢\text{جا}٢س \, \text{جتا}٢س}{\text{جا}٢س} - 1$ دس

$= \int (٢\text{جتا}٢س - 1)$ دس

$= \text{جا}٢س - س + ج$.

تدريب : جد التكاملات التالية :

① $\int \frac{1 + \text{جا}^{٢}س}{1 + \text{جتا}٢س}$ دس .

② $\int \frac{س}{1 + \text{قا}س}$ دس

③ $\int \frac{٢ + \text{ظا}^{٢}س}{س + \text{ظا}س}$ دس

④ $\int \frac{\text{جا}^{٢}س}{(1 + \text{جتا}س)^{٢}}$ دس .

⑤ $\int \frac{1 + \text{جتا}^{٣}س}{1 - \text{جتا}س}$ دس

⑥ $\int \frac{\text{جتا}٢س}{(\text{جا}س + \text{جتا}س)^{٢}}$ دس .

تمرين ٢

١ جد التكاملات التالية :

١) $\int (٣جا^{٣}س - ٥ظاس)$ دس

٢) $\int \frac{قا^{٢}س - ظا^{٢}س}{جا^{٥}س}$ دس

٣) $\int قا^{٢}س جا^{٢}س$ دس

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} جتاس هـ^{٢لوقتاس}$ دس

٥) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{ظا^{٢}س + ظا^{٤}س}$ دس

٦) $\int \frac{جتا^{٣}س - ٥}{١ - جا^{٢}س}$ دس

٧) $\int \frac{٣ + ٣ظتا^{٢}س}{جتا^{٢}س}$ دس

٨) $\int \frac{جا^{٢}س + جتا^{٢}س}{١ + جتا٤س}$ دس

٩) $\int \frac{١}{١ + قتاس}$ دس

١٠) $\int جا٣س (جاس - جتاس)^{٢}$ دس

١١) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{س + جتاس}$ دس

١٢) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\sqrt{١ + جا٢س}}{جاس + جتاس}$ دس

١٣) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\frac{١ - جتا٢س}{٢}}$ دس

١٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\sqrt{١ + جتا٢س}}{جا^{٢}س}$ دس

١٥) $\int جاس جا٢س جتا٣س$ دس

١٦) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \sqrt{\frac{١ - جتا٢س}{١ + جتا٢س}}$ دس

١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{جا^{٢}س}{١ + جتا٢س}$ دس

٢ اذا كان ق' (س) = -٤جتا٢س وكان للاقتران ق قيمة صغرى محلية قيمتها -٢ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فجد قاعدة ق(س)

٣ اذا كان ا(س) ، ب(س) معكوسي المشتقة للاقتران هـ وكان :

$\int_{٠}^{\pi} (٣ا(س) - هـ(س)) دس = ٣\pi + ٢$

ا(س) = جاس + جتاس - ٢ ، فجد قاعدة ب(س)

خواص التكامل المحدود

① اذا كان جـ عدد ثابت فإن :

$$\int_{أ}^{ب} جـ \, دس = جـ (ب - أ)$$

② $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = - \int_{ب}^{أ} ق(س) \, دس$

③ $\int_{أ}^{أ} ق(س) \, دس = صفر$.

④ $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm و(س)) \, دس$

$= \int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \pm \int_{أ}^{ب} و(س) \, دس$

⑤ $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س) \, دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س) \, دس$

⑥ اذا كان $ق(س) \geq 0$ لكل $س \in [أ ، ب]$

فان : $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \geq 0$.

شرط : $أ < ب$

⑦ اذا كان $ق(س) \geq و(س)$ لكل $س \in [أ ، ب]$

فإن : $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \geq \int_{أ}^{ب} و(س) \, دس$

شرط $أ < ب$

---

[1] جد التكاملات التالية :

ا) $\int_{2}^{5} 4 \, دس = 4(5-2) = 12$

ب) $\int_{-3}^{3} \sqrt{س^2 + 5} \, دس = صفر$.

---

[2] جد قيمة الثابت ب اذا كان :

أ) $\int_{-2}^{4} 3ب \, دس = 36$

الحل : $3ب(4+2) = 36$ /3

$6ب = 12 \leftarrow ب = 2$

ب) $\int_{ب+1}^{2ب+3} 5 \, دس = 40$

الحل : $5(2ب+3-ب-1) = 40$ /5

$ب + 2 = 8 \leftarrow ب = \frac{6}{2}$

---

[3] اذا كان : $\int_{2}^{4} (2س - ق(س) + 4) \, دس = 11$

فجد : $\int_{4}^{2} (9 - 2ق(س)) \, دس$.

الحل :

$س^2]_{2}^{4} - 3 \int_{2}^{4} ق(س) \, دس + 4 \times 2 = 11$

$12 - 3 \int_{2}^{4} ق(س) \, دس + 8 = 11$

$\therefore \int_{2}^{4} ق(س) \, دس = \frac{-9}{-3} = 3$

$\int_{4}^{2} (9 - 2ق(س)) \, دس$

$= 9 \times -2 - 2 \int_{4}^{2} ق(س) \, دس$

$= -18 - 2 \times -3 = -12$

٤ اذا كان :

$$\int_1^5 \frac{1}{2} \text{ق}(س)\,\text{د}س = -٤$$

$$\int_1^5 (٣\text{ق}(س) + ٢)\,\text{د}س = ١٠$$

أجد : $\int_1^5 (٤\text{ق}(س) - ٥\text{ق}(س))\,\text{د}س$

الحل :

$$\int_1^5 \text{ق}(س)\,\text{د}س = -٨$$

$$٣\int_1^5 \text{ق}(س)\,\text{د}س - ٨ = ١٠ \leftarrow \int_5^1 \text{ق}(س)\,\text{د}س = ٦$$

$$\therefore \int_1^5 (٤\text{ق}(س) - ٥\text{ق}(س))\,\text{د}س$$

$$= ٤ \times -٨ - ٥ \times ٦ = -٦٢$$

٥ اذا كان :

$$\text{ع} = \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}^٢س\,\text{جتا}٢س\,\text{د}س$$

$$\text{ل} = \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جا}^٢س\,\text{جتا}٢س\,\text{د}س$$

أجد قيمة ع + ل

الحل :

$$\text{ع} + \text{ل} = \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}^٢س\,\text{جتا}٢س\,\text{د}س + \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جا}^٢س\,\text{جتا}٢س\,\text{د}س$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}٢س\,\text{د}س$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}٢س\,(\text{جتا}^٢س - \text{جا}^٢س)\,\text{د}س$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}٢س \times \text{جتا}٢س\,\text{د}س$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتا}^٢٢س\,\text{د}س$$

$$= \frac{1}{٢}\int_0^{\frac{\pi}{٤}} (١ + \text{جتا}٤س)\,\text{د}س$$

$$= \frac{1}{٢}\left[س + \frac{\text{جا}٤س}{٤}\right]_0^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= \frac{\pi}{٨} - \text{صفر} = \frac{\pi}{٨}$$

٦ اذا كان ق(س) ، و(س) معكوسي المشتقة للاقترانين ق(س) و و(س) على الترتيب :

$$\int_0^5 \frac{\text{ق}(س) - \text{و}(س)}{٢}\,\text{د}س + \int_2^5 \text{هـ}^{س}\,\text{د}س = ١٠$$

أجد : $\int_1^3 ٢س\,\text{ق}(س^٢)\,\text{د}س$

الحل :

$$\text{ق}(س) - \text{و}(س) = ج$$

$$\int_2^5 \left[\frac{ج}{٢}س + \text{هـ}^{س}\right]_{\ln ٣} = ١٠$$

$$٣ \times \frac{ج}{٢} + \frac{1}{٢}(\text{هـ}^{\ln ٣} - ١) = ١٠$$

$$\frac{٣}{٢}ج + \frac{٩}{٢} - \frac{1}{٢} = ١٠ \quad \times ٢$$

$$٣ج + ٨ = ٢٠ \leftarrow ج = ٤$$

$$\therefore \int_1^3 ٢س\,\text{ق}(س^٢)\,\text{د}س - \int_1^3 ٢س\,\text{و}(س^٢)\,\text{د}س$$

$$= \int_1^3 ٢س(\text{ق}(س^٢) - \text{و}(س^٢))\,\text{د}س$$

$$= \int_1^3 ٢س \times ٤\,\text{د}س = -٨ \times \frac{س^٢}{٢}\Big]_1^3$$

$$= -٤(٩ - ١) = -٣٢$$

تدريب :

① اذا كان : $\int_1^2 (٥\text{ق}(س) - ٦س)\,\text{د}س = ١$

أجد : $\int_1^2 (٦س^٢ + ٢\text{ق}(س) - ٣)\,\text{د}س$

② اذا كان : $\int_1^3 (٤\text{ق}(س) + ٨\text{ق}(س))\,\text{د}س = ١٩$

$\int_1^3 (٣\text{ق}(س) - ٢)\,\text{د}س = ٥$ ، أجد : $\int_1^3 ٤\text{ق}(س)\,\text{د}س$

③ اذا كان : $\int_0^2 \left(\int_1^3 \text{ق}(س)\,\text{د}س\right)\,\text{د}س = -١٢$

أجد : $\int_1^3 (٧\text{ق}(س) - ٤س + ٣)\,\text{د}س$

④ اذا كان : $\int_2^4 \text{ق}(س)\,\text{د}س = ٦$ أجد :

$$\int_2^4 \text{ق}(س)\,\text{د}س + \int_4^2 (٥ - \text{ق}(س))\,\text{د}س$$

٧ اذا كان :

$\int_{-٢}^{٦} ق(س)\,د س = ٣$ ، $\int_{-٢}^{١} ق(س)\,د س = ٧$

فجد : $\int_{-١}^{٦} ق(س)\,د س$.

الحل :

$\int_{-١}^{٦} ق(س)\,د س = \int_{-١}^{-٢} ق(س)\,د س + \int_{-٢}^{٦} ق(س)\,د س$

$= -٧ + ٣ = -٤$

٨ اذا كان :

$\int_{-١}^{٧} \left(\frac{ق(س)}{٢} + ٥ \right) د س = ٤٤$

$\int_{-٣}^{٧} ق(س)\,د س = ١٠$

فجد : $\int_{-٣}^{-١} (ق(س) - ٤ س)\,د س$

الحل :

$\int_{-١}^{٧} \frac{ق(س)}{٢}\,د س + ٤٠ = ٤٤$

$\therefore \int_{-١}^{٧} ق(س)\,د س = ٨$

$\int_{-٣}^{-١} ق(س)\,د س - \left[س^{٢} - ٢ س \right]_{-٣}^{-١}$

$= \int_{-٣}^{٧} ق(س)\,د س + \int_{٧}^{-١} ق(س)\,د س - ٢(١ - ٩)$

$= ١٠ - ٨ + ١٦ = ١٨$

٩ اذا كان : $\int_{٢}^{٥} (٣ ق(س) - ٣)\,د س = ٧$

فجد : $\int_{٥}^{١} ق(س)\,د س - \int_{٢}^{١} ق(س)\,د س$.

الحل :

$\int_{٢}^{٥} ٢ \times ق(س)\,د س - ٩ = ٧$

$\therefore \int_{٢}^{٥} ق(س)\,د س = ٨$

$\therefore \int_{٥}^{١} ق(س)\,د س + \int_{١}^{٢} ق(س)\,د س$

$= \int_{٥}^{٢} ق(س)\,د س = -٨$.

٩ جب فقط :

$\int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س - \int_{-١}^{٨} ق(س)\,د س + \int_{٣}^{٨} ق(س)\,د س$

الحل :

$= \int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س + \int_{٨}^{-١} ق(س)\,د س + \int_{٣}^{٨} ق(س)\,د س$

$= \int_{٨}^{٨} ق(س)\,د س$

$= \int_{٨}^{٨} ق(س)\,د س = صفر$.

تدريب :

① اذا كان : $\int_{١}^{٤} (ق(س) - ١)\,د س = ٨$

$\int_{١}^{٢} (٢ ق(س) + ٦ س)\,د س = ٥$

فجد $\int_{-٢}^{٤} ٣ ق(س)\,د س$.

② اذا كان : $\int_{٩}^{٢} (٢ ق(س) + ٣)\,د س = -١٧$

$\int_{٩}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,د س = -٢$

فجد : $\int_{٥}^{٩} (٤ ق(س) - ١)\,د س$.

⑨ اذا كان :

$$\int_1^2 ق(س)\,د س = 6 + \int_3^2 ق(س)\,د س$$

$$\int_5^3 \frac{ق(س)}{2}\,د س = 4$$

$$\int_5^1 (p\,ق(س) + 2س)\,د س = -18$$

أوجد الثابت p .

---

10 اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} 5س & ، س = -1 \\ 3 - س^2 & ، -1 < س \leq 2 \\ 4 - س & ، 2 < س \leq 3 \end{cases}$$

جد : 1) $\int_{-1}^{3} ق(س)\,د س$ 2) $\int_{2}^{3} ق(س)\,د س$

الحل :

1) $$\int_{-1}^{3} ق(س)\,د س = \int_{-1}^{2} (3 - س^2)\,د س + \int_{2}^{3} (4 - س)\,د س$$

$$= \left[3س - \frac{س^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[4س - \frac{س^2}{2}\right]_{2}^{3}$$

$$= (6 - \frac{8}{3}) - (-3 + \frac{1}{3}) + (12 - \frac{9}{2}) - (8 - 2)$$

$$= 6 - \frac{8}{3} + 3 - \frac{1}{3} + 12 - \frac{9}{2} - 8 + 2$$

$$= 15 - 3 - \frac{9}{2} = 12 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

2) $$\int_{2}^{3} ق(س)\,د س = \int_{2}^{3} (4 - س)\,د س$$

$$= \left[4س - \frac{س^2}{2}\right]_{2}^{3}$$

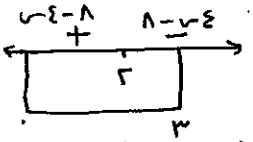
$$= (12 - \frac{9}{2}) - (8 - 2) = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

---

11 جد التكاملات التالية :

1) $$\int_{0}^{3} (|س - 1| + 2س)\,د س$$

الحل :



$$= \int_{0}^{1} (-س + 1 + 2س)\,د س + \int_{1}^{3} (س - 1 + 2س)\,د س$$

$$= \int_{0}^{1} (س + 1)\,د س + \int_{1}^{3} (3س - 1)\,د س$$

$$= \left[\frac{س^2}{2} + س\right]_{0}^{1} + \left[\frac{3س^2}{2} - س\right]_{1}^{3}$$

$$= (\frac{1}{2} + 1) - 0 + (\frac{27}{2} - 3) - (\frac{3}{2} - 1)$$

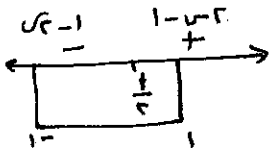
$$= \frac{3}{2} + 1 + \frac{27}{2} - 3 - \frac{3}{2} + 1 = 13 - 3 + 1 = 11$$

---

2) $$\int_{-1}^{1} \sqrt{4س^2 - 4س + 1}\,د س$$

الحل : $$= \int_{-1}^{1} \sqrt{(2س - 1)^2}\,د س$$

$$= \int_{-1}^{1} |2س - 1|\,د س$$



$$= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - 2س)\,د س + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2س - 1)\,د س$$

$$= \left[س - س^2\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[س^2 - س\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + 2 + 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + 2 = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

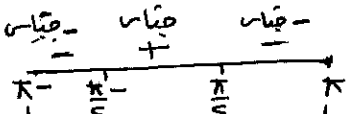
---

3) $$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 - 2جا^2 س}\,د س$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 - جا^2 س)}\,د س$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{جتا^2 س}\,د س$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}\,|جتا س|\,د س$$



$$\sqrt{2}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} -جتا س\,د س + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} جتا س\,د س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -جتا س\,د س\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[-جا س\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + جا س\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - جا س\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(-(-1) + (1 + 1) - (0 - 1)\right) = 4\sqrt{2}$$

---

⑫ اذا كان :

$$\int_{1}^{2} ق(س)\,د س = 7 + \int_{3}^{2} ق(س)\,د س$$

$$\int_{5}^{3} \frac{ق(س)}{2}\,د س = 4$$

$$\int_{5}^{1} (p\,ق(س) + 2س)\,د س = -18$$

أوجد الثابت p .

$$= \int_{0}^{2} (8 - 2س)\,د س + \int_{2}^{3} (6س - 8)\,د س$$

$$= \left[8س - س^2\right]_{0}^{2} + \left[3س^2 - 8س\right]_{2}^{3}$$

$$= (16 - 4) - 0 + (27 - 24) - (12 - 16)$$

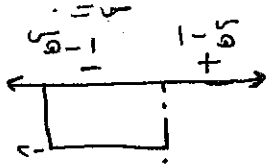
$$= 12 - 3 + 4 = 13$$

٤) $\int_{-2}^{0} \sqrt{e^{2x} - 2e^{x} + 1}\, dx$

الحل: $= \int_{-2}^{0} \sqrt{(e^{x}-1)^2}\, dx$

$= \int_{-2}^{0} |e^{x}-1|\, dx$

$e^{x}-1 = 0$
$e^{x} = 1$
$x = 0$



$= \int_{-2}^{0} (1-e^{x})\, dx$

$= \left[x - e^{x}\right]_{-2}^{0}$

$= (0-1) - (-2-e^{-2}) = 1 + \frac{1}{e^{2}}$

تدريب: جد التكاملات التالية

① $f(x) = \begin{cases} -x\,,\ -3 \le x < 0 \\ x\,,\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$

جد $\int_{-3}^{4} f(x)\, dx$

② $\int_{0}^{3} (x^2 - |x-1|)\, dx$

③ $\int_{2}^{3} \sqrt{9x^2 - 12x + 4}\, dx$

④ $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx$

⑤ $\int_{1}^{e} \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}}\, dx$

٦) اذا كان: $f(x) = \begin{cases} \sin x - 3\,,\ -2\pi \le x < 0 \\ |\frac{x}{\pi} - 1|\,,\ 0 < x \le 2\pi \end{cases}$

فجد: $\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\, dx$.

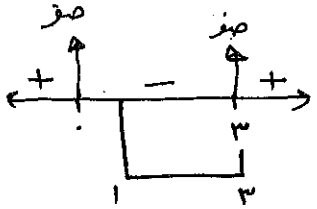
[1] دون حساب قيم التكامل بيّن أن:

١) $\int_{1}^{3} (x^2 - 3x)\, dx \le 0$.

الحل:

نثبت اشارة $f(x) = x^2 - 3x$ في الفترة $[1, 3]$

$x^2 - 3x = 0$
$x(x-3) = 0$
$x = 0\,,\ x = 3$



بما أن: $f(x) \le 0$ في $[1, 3]$

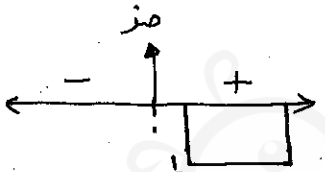
$\therefore \int_{1}^{3} f(x)\, dx \le$ صفر.

٢) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} (e^{x} - 1)\, dx > 0$.

الحل: $e^{x} - 1 = 0$

$e^{x} = 1$

$x = 0$



بما أن $e^{x} - 1 > 0$ في $[\frac{1}{2}, 2]$

$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{2} (e^{x} - 1)\, dx > 0$.

٣) $\int_{0}^{2\pi} (1 + \sin x)\, dx \ge$

الحل:

$-1 \le \sin x \le 1$ في $[0, 2\pi]$

$+1 \quad +1 \quad +1$

$0 \le 1 + \sin x \le 2$

بما أن $1 + \sin x \ge 0$ في $[0, 2\pi]$

$\therefore \int_{0}^{2\pi} (1 + \sin x)\, dx \ge 0$.

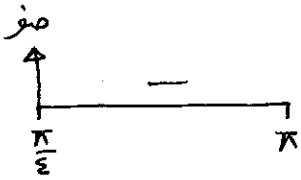
٤) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا}س - \text{جا}س)\,دس \leq$ .....

جاس − جتاس = ٠

جاس = جتاس

ظاس = ١

س = $\frac{\pi}{4}$ ، π

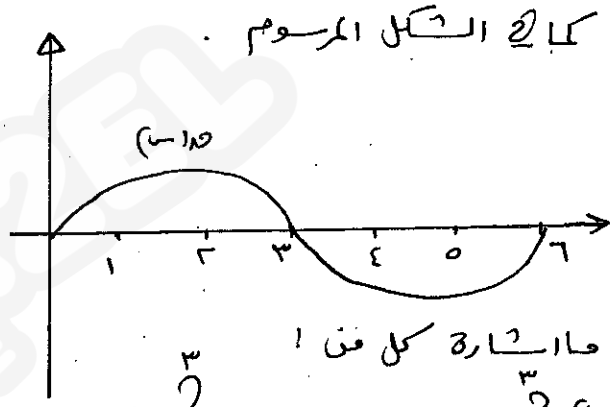


بما أن : جتاس − جاس ≥ ٠ ∀ س ∈ $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

$\therefore \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا}س - \text{جا}س)\,دس \leq$ ٠

---

٢) اذا كان ق(س) معرفا على $[٠, ٦]$
كما في الشكل المرسوم .



ما اشارة كل من :

١) $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس$ ٢) $\int_{٦}^{٣} ق(س)\,دس$

الحل : ١) بما أنه ق(س) ≥ ٠ ∀ $[١, ٣]$
لأنه فوق محور س

$\therefore \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس \geq$ ٠

٢) بما أنه ق(س) ≥ ٠ ∀ $[٣, ٦]$
لأنه تحت محور س

$\therefore \int_{٦}^{٣} ق(س)\,دس \geq$ ٠

---

٣) اذا كان : ق(س) ≥ ٥ ∀ $[-١, ٢]$
فجد اصغر قيمة للمقدار :

$\int_{-١}^{٢} (٢ق(س) - ٣)\,دس$

الحل :

ق(س) ≥ ٥	× ٢
٢ق(س) ≥ ١٠	− ٣
٢ق(س) − ٣ ≥ ٧	

$\therefore \int_{-١}^{٢} (٢ق(س) - ٣)\,دس \geq \int_{-١}^{٢} ٧\,دس$

$\therefore \int_{-١}^{٢} (٢ق(س) - ٣)\,دس \geq$ ١٤

∴ اصغر قيمة = ١٤ .

---

٤) اذا كان ق(س) معرفا على $[١, ٤]$
بحيث أن : ٣ ≤ ق(س) ≤ ٧
فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م
واصغر قيمة ممكنة للثابت ن اذا كان :

م ≤ $\int_{١}^{٤} (٢٤ - ٣ق(س))\,دس \leq$ ن .

الحل :

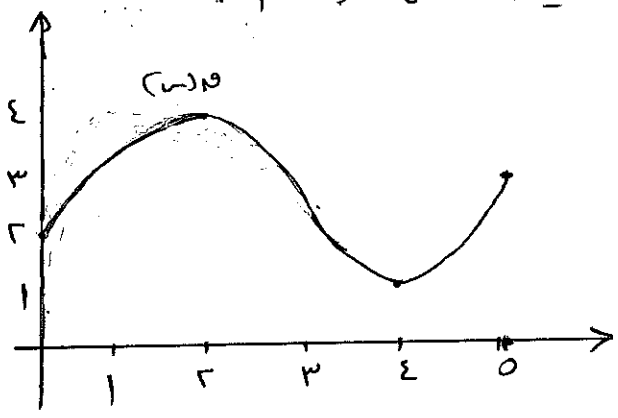
٣ ≤ ق(س) ≤ ٧	× − ٣
− ٦ ≥ − ٣ق(س) ≥ − ٢١	+ ٢٤
١٨ ≥ ٢٤ − ٣ق(س) ≥ ٣	

$\int_{١}^{٤} ١٨\,دس \geq \int_{١}^{٤} (٢٤ - ٣ق(س))\,دس \geq \int_{١}^{٤} ٣\,دس$

$٥٤ \geq \int_{١}^{٤} (٢٤ - ٣ق(س))\,دس \geq ٩$

∴ أكبر قيمة لـ م = ٩
اصغر قيمة لـ ن = ٥٤ .

٥ اذا كان $f(x)$ معرفا على $[0, 5]$ كما في الشكل المرسوم.



١) جد أكبر قيمة للثابت م وأصغر قيمة للثابت ن بحيث أن:

$$م \geq \int_0^5 \sqrt{3f(x)+13}\,dx \geq ن$$

الحل:

من الرسم: $1 \leq f(x) \leq 4$ ×3

$$3 \leq 3f(x) \leq 12 \quad +13$$

$$16 \leq 3f(x)+13 \leq 25$$

$$4 \leq \sqrt{3f(x)+13} \leq 5$$

$$\int_0^5 4\,dx \leq \int_0^5 \sqrt{3f(x)+13}\,dx \leq \int_0^5 5\,dx$$

$$20 \leq \int_0^5 \sqrt{3f(x)+13}\,dx \leq 25$$

∴ أكبر قيمة لـ م = 25

أصغر قيمة لـ ن = 20

٢) جد أكبر قيمة للمقدار: $\int_3^5 (5f(x)-4)\,dx$

الحل: من الرسم:

$$2 \leq f(x) \leq 4 \quad \times 5$$

$$10 \leq 5f(x) \leq 20 \quad -4$$

$$6 \leq 5f(x)-4 \leq 16$$

$$\int_3^5 6\,dx \leq \int_3^5 (5f(x)-4)\,dx \leq \int_3^5 16\,dx$$

$$-18 \leq \int_3^5 (5f(x)-4)\,dx \leq -48$$ ∴ أكبر قيمة = −18

٦ اذا كان $f(x)$ معرفا على $[-1, 1]$ بحيث أن:

$$-3 \leq f(x) \leq 4$$

فأثبت أن:

$$6 \leq \int_{-1}^{1} (2f^2(x)+3)\,dx \leq 70$$

الحل:

$$-3 \leq f(x) \leq 4$$

$$0 \leq f^2(x) \leq 16 \quad \times 2$$

$$0 \leq 2f^2(x) \leq 32 \quad +3$$

$$3 \leq 2f^2(x)+3 \leq 35$$

$$\int_{-1}^{1} 3\,dx \leq \int_{-1}^{1} (2f^2(x)+3)\,dx \leq \int_{-1}^{1} 35\,dx$$

$$6 \leq \int_{-1}^{1} (2f^2(x)+3)\,dx \leq 70$$

٧ دون حساب $\int_{-1}^{2} (2x^3+5)\,dx$ بين أن:

$$9 \leq \int_{-1}^{2} (2x^3+5)\,dx \leq 63$$

الحل: $-1 \leq x \leq 2$

$$-1 \leq x^3 \leq 8 \quad \times 2$$

$$-2 \leq 2x^3 \leq 16 \quad +5$$

$$3 \leq 2x^3+5 \leq 21$$

$$\int_{-1}^{2} 3\,dx \leq \int_{-1}^{2} (2x^3+5)\,dx \leq \int_{-1}^{2} 21\,dx$$

$$9 \leq \int_{-1}^{2} (2x^3+5)\,dx \leq 63$$

طريقة أخرى :

نفرض $م(س) = ٢س^٣ + ٥$

$م'(س) = ٦س^٢ = ٠$

$\boxed{س = ٠}$

$م(٠) = ٥$ ، $م(-١) = ٣$

$م(٣) = ٢١$

$٣ \leq ٢س^٣ + ٥ \leq ٢١$

$\int_{-١}^{٣} ٣ ds \leq \int_{-١}^{٣} (٢س^٣ + ٥) ds \leq \int_{-١}^{٣} ٢١ ds$

$٩ \leq \int_{-١}^{٣} (٢س^٣ + ٥) ds \leq ٦٣$

٨ دون إيجاد قيم التكامل بيّن أن :

$$\int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢ + ٣جاس} \, ds$$

ينحصر بين $\sqrt{٣}\pi$ ، ٢π

الحل :

نفرض : $م(س) = \sqrt{٢ + ٣جاس}$

$م'(س) = \frac{٣جتاس}{٢\sqrt{٢ + ٣جاس}}$

$جاس = ٠$ ، $٢ + ٣جاس = ٠$

$\boxed{س = \frac{\pi}{٢}}$ ، $جاس = -١$

$س = \frac{٣\pi}{٢}$ ✗

$\frac{٣\pi}{٢} \notin [٠ ، \pi]$

$م(٠) = \sqrt{٢}$

$م(\pi) = \sqrt{٢}$

$م(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

$\sqrt{٢} \leq \sqrt{٢ + ٣جاس} \leq ٢$

$\int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢} ds \leq \int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢ + ٣جاس} ds \leq \int_{٠}^{\pi} ٢ ds$

$\sqrt{٢}\pi \leq \int_{٠}^{\pi} \sqrt{٢ + ٣جاس} ds \leq ٢\pi$

٩ إذا علمت أن :

$م \leq \int_{١}^{٣} \frac{س}{١ + س^٤} ds \leq ل$.

جد أكبر قيم ممكنة للثابت م وأصغر قيم ممكنة للثابت ل دون حساب قيم $\int_{١}^{٣} \frac{س}{١ + س^٤} ds$.

الحل :

$م(س) = \frac{س}{١ + س^٤}$

$م'(س) = \frac{١ \times (١ + س^٤) - س \times ٤س^٣}{(١ + س^٤)^٢}$

$= \frac{١ - س^٤}{(١ + س^٤)^٢}$

$١ - س^٤ = ٠$ ، $١ + س^٤ = ٠$

$س = -١ \times \notin [٠ ، ١]$ ✗

$\boxed{س = ١}$

$م(٠) = ٠$ ، $م(١) = \frac{١}{٢}$

$٠ \leq \frac{س}{١ + س^٤} \leq \frac{١}{٢}$

$\int_{١}^{٣} ٠ ds \leq \int_{١}^{٣} \frac{س}{١ + س^٤} ds \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{٢} ds$

$صفر \leq \int_{١}^{٣} \frac{س}{١ + س^٤} ds \leq \frac{١}{٢}$.

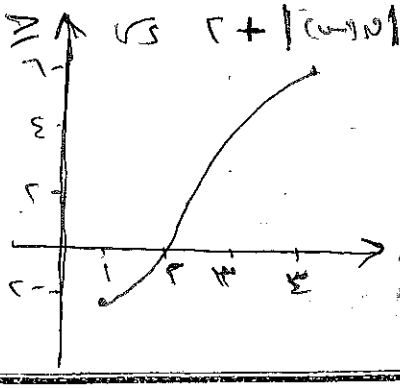
∴ أكبر قيم لـ م = صفر وأصغر قيم لـ ل = $\frac{١}{٢}$

تدريب :

إذا كان $م(س)$ كما في الشكل المرسوم

جد أكبر قيم للثابت م وأصغر قيم للثابت ن بحيث أن :

$م \leq \int_{١}^{٤} ٣م(س) ds + ٢ \leq ن$



١٠ دون اجراء عملية التكامل بيّن أن:

$$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2}\, ds \leq \frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$د(س) = \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2}$$

$$د'(س) = \frac{6\text{جتا}س \text{جا}س}{(3\text{جتا}^2 س + 2)^2}$$

$6\text{جتا}س \text{جا}س = 0$

$\text{جتا}س = 0 \leftarrow$ **$س = \frac{\pi}{2}$**

$\text{جا}س = 0 \leftarrow س = 0 ، س = \pi$

$3\text{جتا}^2 س + 2 = 0 \leftarrow \text{جتا}^2 س = -\frac{2}{3}$ ✗

$د(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ ، $د(0) = \frac{1}{5}$

$د(\pi) = \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5} ds \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2} ds \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} ds$$

$$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2} ds \leq \frac{\pi}{2}$$

طريقة أخرى:

$-1 \leq \text{جتا}س \leq 1$ ∀ $س \in [0, \pi]$

$0 \leq \text{جتا}^2 س \leq 1$ ×3

$0 \leq 3\text{جتا}^2 س \leq 3$ +2

$2 \leq 3\text{جتا}^2 س + 2 \leq 5$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5} ds \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2} ds \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} ds$$

$$\frac{\pi}{5} \leq \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2 س + 2} ds \leq \frac{\pi}{2}$$

١١ بيّن أن:

$$18 \leq \int_{1}^{3} (س^3 - 2س^2 + 7)\, ds \leq 30$$

دون حساب قيمة $\int_{1}^{3} (س^3 - 2س^2 + 7)\, ds$

الحل:

$د(س) = س^3 - 2س^2 + 7$

$د'(س) = 3س^2 - 4س = 0$

$س = 1$

$د(0) = 7$ ، $د(1) = 6$ ، $د(3) = 10$

$6 \leq س^3 - 2س^2 + 7 \leq 10$

$$\int_{1}^{3} 6\, ds \leq \int_{1}^{3} (س^3 - 2س^2 + 7)\, ds \leq \int_{1}^{3} 10\, ds$$

$$18 \leq \int_{1}^{3} (س^3 - 2س^2 + 7)\, ds \leq 30$$

١٢ بيّن أن:

$$\int_{-1}^{3} (س^2 - 4)\, ds \leq \int_{-1}^{3} 3س\, ds$$

دون حساب قيمة كل من التكاملين.

الحل: نفرض:

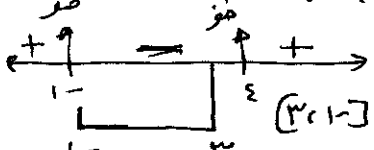
$د(س) = س^2 - 4$ ، $هـ(س) = 3س$

$ل(س) = د(س) - هـ(س) = س^2 - 4 - 3س$

ثم نبحث إشارة $ل(س)$ على خط الأعداد.

$س^2 - 3س - 4 = 0 \leftarrow (س - 4)(س + 1) = 0$

$س = 4$ ، $س = -1$



$\therefore ل(س) \leq 0$ ∀ $س \in [-1, 3]$

$\therefore س^2 - 4 \leq 3س$ ∀ $س \in [-1, 3]$

$$\int_{-1}^{3} (س^2 - 4)\, ds \leq \int_{-1}^{3} 3س\, ds$$

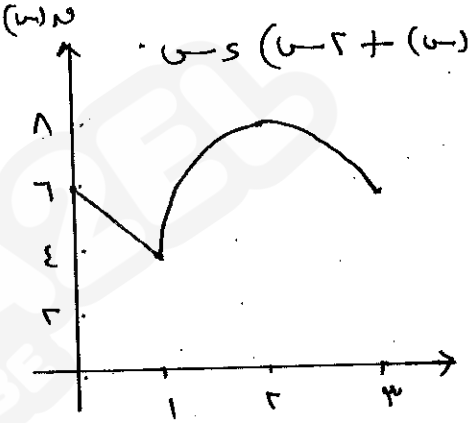
تدريب :

① دون حساب قيم التكامل بيّن أن :

$$\int_{-1}^{3} (س^3 - 4س^2)\, د س \geq 0$$

② اذا كان $ق(س)$ معرفاً على $[0,3]$ كما في الشكل .
أوجد أصغر قيم للمقدار :

$$\int_{1}^{3} (3ق(س) + 2س)\, د س$$



③ اذا كان :

$$\int_{1}^{5} ق(س)\, د س \leq 6$$

أوجد أكبر قيم للمقدار :

$$\int_{1}^{5} (3ق(س) + 4س - 11)\, د س$$

④ دون ايجاد قيم التكامل بيّن أن :

$$\int_{\pi}^{2\pi} (3 + جتا^2 س)\, د س$$

يحصر بين 6π ، 8π

⑤ دون حساب قيم $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2}\, د س$

جد أكبر قيم ممكنة للثابت م واصغر قيم ممكنة للثابت ك بحيث أن :

$$م \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2}\, د س \leq ك .$$

⑥ دون حساب قيم $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{س^2 - 3س + 7}}\, د س$
بيّن أن :

$$\frac{2}{5} \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{س^2 - 3س + 7}}\, د س \leq \frac{2}{3}$$

⑦ بيّن أن :

$$\int_{-1}^{1} (س^2 + 5س)\, د س < \int_{1}^{1} (6س + 6)\, د س$$

دون حساب قيم كل من التكاملين .

تمرين ٣

١ اذا كان :

$$\int_{ب}^{٢} ٢ب \, دس = -٣٠$$

فجد الثابت ب .

٢ اذا كان ،

$$\int_{١}^{٣} (٢ه(س) + \frac{١}{س^{٢}} - ٦) \, دس = -٩$$

فجد $\int_{١}^{٣} (\frac{ه(س)}{٣} - س^{٢}) \, دس$

٣ اذا كان :

$$\int_{١}^{٤} ٣ه(س) \, دس = ١٢$$

$$\int_{١}^{٤} (ه(س)+٢) \, دس = ١١$$

فجد : $\int_{٤}^{١} (٢ه(س) - ٣ه(س) - ٤س) \, دس$

٤ اذا كان :

م(س) ، ه(س) مكوصي المشتقة للاقتران و(س) ، وكان :

$$\int_{-١}^{٢} (م(س) - ه(س)) \, دس = ١٢$$

فجد :

$$\int_{٤}^{٤} ٣س \, م(س) \, دس + \int_{٤}^{٤} ٣س \, ه(س) \, دس$$

٥ اذا كان :

$$و(س) = \begin{cases} |س-٢| & ، -٢ \leq س \leq ٢ \\ \frac{١}{\sqrt[٣]{٣س-٧}} & ، ٢ < س < ٦ \end{cases}$$

فجد : $\int_{٠}^{٥} و(س) \, دس$.

٦ اذا كان :

$$\int_{-١}^{١} (٤ه(س) + ٣) \, دس = ١٨$$

$$\int_{١}^{٤} ٢ه(س) \, دس = ٢٠$$

فجد : $\int_{٤}^{-١} (٢س - ه(س)) \, دس$.

٧ اذا كان :

$$١٢ \leq \int_{٢}^{٢} (٥ه(س) + ١) \, دس \leq ٣٢$$

فجد أصغر وأكبر قيمة للاقتران و(س)

٨ دون حساب قيمة التكامل بيّن أن :

أ) $٠ \leq \int_{-١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}+١} \, دس \leq ٣$

ب) $-٣٢ \leq \int_{\pi}^{٣\pi} (٣جا^{٣}س + ١) \, دس \leq ٣\pi$

٩ جد $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢س-١|}{س^{٢}+١} \, دس$.

المشتقات

أولاً : مشتقة التكامل :

1 اذا كان $ص = \int_{ب}^{س} ل(س)\,دس$ فإن

$$\frac{دص}{دس} = ل(س)$$

2 اذا كان $ص = \int_{ب}^{ب} ل(س)\,دس$ فإن

$$\frac{دص}{دس} = صفر$$

1 جد $\frac{دص}{دس}$:

1) $ص = \int_{-1}^{س^3} \sqrt{س^2 + 3س + 10}\,دس$

عند $س = -1$

الحل : $\frac{دص}{دس} = \sqrt[3]{(س^3)^2 + 3س + 10}$

$= \sqrt[3]{(-1)^2 + 3(-1) + 10} = 2$

2) $ص = \int_{\pi}^{س^2} جتا س\,دس + \int_{\frac{\pi}{6}}^{س} ظا^2 س\,دس$

عند $س = \frac{\pi}{6}$

الحل : $\frac{دص}{دس} = 2س\,جتا 2س + صفر$

$= 2 \times \frac{\pi}{6} جتا \frac{\pi}{3} = 1$

3) $ص = 3 - ع^2 - 2\int_{2}^{س} 5س\,دس + \int_{-1}^{3} هـ^{س}\,دس$

عند $س = 2$

الحل :

$\frac{دص}{دس} = -6س - 2 \times 5س + صفر$

$= -4س$

$= -4 \times 2 = -8$

4) $ص = س^2 \times \int_{1}^{س^2} (2س + 1)\,دس$

عند $س = \frac{1}{2}$

الحل :

$ص = ع^2 (س^2 + س - 1)$

$ص = ع^2 (6 - 0) = 6ع^2$

$\frac{دص}{دس} = 12س$

$= 12 \times \frac{1}{2} = 6$

5) $ص = \int_{-ع}^{ع} (2س + ع^2 + 3دس)\,دس$

الحل : $\frac{دص}{دس} = صفر$.

3 اذا كان

$ه(س) = \int_{ج}^{س} (ج^{4س} - س^3 - ع^2)\,دس$

جد $ه'(-1)$

الحل :

$ه'(س) = \int_{ج}^{س} 4س\,دس - 3 - ع^2$

$= -8 - 3 - ع^2$.

$\therefore ه'(-1) = -8 - 3 = -11$

3 اذا كان

$ه(س) = \int_{ع^3}^{س} (ع^2 - 2ع + 5)\,دع$

جد $ه'(2)$

الحل :

$ه'(س) = -\int_{س^3}^{س} (ع^2 - 2ع + 5)\,دع$

$ه'(س) = -(س^6 - 2س^3 + 5) \times 3س^2$

$ه'(2) = -2س^6 + 6س^3 - 15$

$ه'(2) = 8 + 4 - 5 = 7$.

تدريب :

1 اذا كان $ص = \int_{1}^{س^3} (3ع^2 - 2)\,دع$ فجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = 1$

2 اذا كان :

$ه(س) = 2ع^2 - \int_{س}^{ع} ه(س)\,دس$ فجد $ه'(2)$

٤ اذا كان :

$\int$ ق(س) دس = $س^{٢}$ − جتا س + ٢

مجد ق $(\frac{\pi}{٢})$

الحل :

نشتق الطرفين :

ق(س) = ٢س + جا س

ق$(\frac{\pi}{٢})$ = π + ١

٥ اذا كان :

$\int$ (ق(س) + ٢) دس = $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ + ٩

وكان ق(١) = ٧ مجد الثابت ب

الحل :

نشتق الطرفين .

ق(س) + ٢ = ٣$س^{٢}$ + ٢ب س .

لكن ق(١) = ٧

٧ + ٢ = ٣ + ٢ب ← ب = ٣

٦ اذا كان :

$\int$ ق(س) دس + ٣ جا س = ٧ + جا^{٢} س

مجد ق $(\frac{\pi}{٦})$

الحل :

نشتق الطرفين :

ق(س) + ٣ جتا س = ٢ جا س جتا س

ق(س) + ٣ جتا س = جا ٢س .

ق(س) − ٣ جا س = ٢ جتا ٢س

ق$(\frac{\pi}{٦})$ − ٣ × $\frac{١}{٢}$ = ٢ × $\frac{١}{٢}$

ق$(\frac{\pi}{٦})$ − $\frac{٣}{٢}$ = ١

∴ ق$(\frac{\pi}{٦})$ = $\frac{٥}{٢}$.

٧ اذا كان :

$\int$ ق(س) دس = $\frac{س^{٢}+٨}{س+١}$ − ٥

وكان ق(٠) = ١٠ مجد ق(−١)

الحل :

نكامل الطرفين الايمن :

ق(س) = $\frac{س^{٢}+٨}{س+١}$ − ٥ + ﻫ

لكن ق(٠) = ١٠

١٠ = ٨ − ٥ + ﻫ ← ﻫ = ٧

∴ ق(س) = $\frac{س^{٢}+٨}{س+١}$ + ٢

∴ ق(−١) = ٣ + ٢ = ٥

٨ اذا كان

$\int$ س ق(س) دس = $س^{٢}$ − $\int$ ق(س) دس

وكان ق(٢) = −٤ مجد ق(٣)

الحل :

نشتق الطرفين

س ق(س) = ٢س − ق(س) − ق(س)

عندما س = ٢

٢ق(٢) = ٨ − ق(٢) = ١٢

∴ ق(٢) = ٦

٩ اذا كان ق(س) معكوس المشتقة الاولى لـ ﻫ

وكان $\int$ (ق(س) − جتا^{٢} س) دس = ظا س

مجد ق $(\frac{\pi}{٤})$

الحل : نشتق الطرفين .

ق(س) − جتا^{٢} س = قا^{٢} س

نشتق مرة اخرى .

ق(س) + ٢ جا س = ٢ قا س × قا س ظا س

ق$(\frac{\pi}{٤})$ + ٢ = ٤ ← ق$(\frac{\pi}{٤})$ = ٢

١٠ اذا كان :

$\int (ق(س)+٢س)\,دس = س^{٣}+ب س^{٢}+١$

وكان $ق(١)=٥$ ، $ق(٢)=٧$

جد : ١) قيمة الثابت ب

٢) $ق(٤)$

٣) $ق(٣)$

الحل :

١) نشتق الطرفين :

$ق(س)+٢س = ٣س^{٢}+٢ب س$

لكن $ق(١)=٥$

$٥+٢ = ٣+٢ب \leftarrow ب=٢$

٢) نعوض ب

$ق(س)+٢س = ٣س^{٢}+٤س$

$ق(س) = ٣س^{٢}+٢س$

$\therefore ق(٤) = ٤٨+٨ = ٥٦$

٣) نكامل الطرف الايسر :

$ق(س)+س^{٢} = س^{٣}+٢س^{٢}+١+جـ$

لكن $ق(٢)=٧$

$٧+٤ = ٨+٨+١+جـ$

$جـ = -٦$

$\therefore ق(س) = س^{٣}+س^{٢}-٥$

$\therefore ق(٣) = ٢٧+٩-٥$

$= ٣١$.

تدريب :

① اذا كان $\int ق(س)\,جا\frac{\pi}{٢}س\,دس = س^{٣}+١$

فجد $ق(٣)$

② اذا كان

$\int ق(س)\,دس = جاس - ب جتاس + ١$

وكان $ق(\frac{\pi}{٤}) = صفر$

فجد الثابت ب .

③ اذا كان :

$\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\,دس - جتاس = \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} (١+ظاس)\,دس$

وكان $ق(\pi) = ٤$ فجد $ق(٠)$

④ اذا كان $م(س)$ اقترانه معكوس المشتقة للاقتران $ق(س)$ وكان

$\int (س^{٣}+١)\,دس = س\,م(س) + ٨$

$م(٢) = ٦$ فجد $ق(٢)$.

⑤ اذا كان :

$ق(س) = \int_{-٣}^{س^{٣}} ق(ص)\,دص\,دس$

وكان : $ق(٢) = ٤$ ، $ق(-٣) = ٦$

فجد $ق(-١)$

تمرين ٤

١ اذا كان $ص = ٣ جتا س - \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جا ٢ص \, دص + \int_{٠}^{س} ظا ٢ص \, دص$

فجد $\left| \frac{دص}{دس} \right|_{س = \frac{\pi}{٦}}$

٢ اذا كان :

$ق(س) = ٥ - س^{٤} - \int_{٠}^{س} (٣ص + ق(ص)) \, دص$

فجد $ق(-٢)$

٣ اذا كان :

$ق(س) = -س^{٤} - \int_{١}^{س} (٣ص^{٤} - \int_{١}^{ص} ٢ق(ص) \, دص) \, دص$

فجد $ق(-١)$

٤ اذا كان :

$\int_{٠}^{س} ق(ص) \, دص = جتا^{٢} س - جتا س + ٢$

وكان $ق(\frac{\pi}{٢}) = ٣$ فجد $ق(\frac{\pi}{٢})$

٥ اذا كان $م(س)$ معكوس المشتقة للدالة $ق(س)$ حيث أن

$\int_{٠}^{س} ق(ص) \, دص = س^{٤} + ٣س + ٢$

$م(١) = ٣$ فجد $ق(-١)$

٦ اذا كان

$\int_{٠}^{س} (م(ص) + ٩) \, دص = ٢س^{٣} - ب س^{٢} + ٩$

وكان $ق(١) = ٨$ ، $ق(١) = ٦$

فجد الثوابت $م$ ، $ب$

٧ اذا كان $م(س)$ هو معكوس المشتقة للدالة $ق(س)$ حيث أن

$\int_{٠}^{س} (ق(ص) - ٢ص) \, دص = م س^{٣} + ٣س^{٢} - ٣$

$م(-١) = ٥$ ، $ق(٢) = ٢٠$

فجد :

١) قيمة الثابت $م$

٢) $م(٣)$

٣) $ق(٣)$

٨ اذا كان :

$\int_{١-}^{ب} ق(س) \, دس = س^{٣} + جـ$

$\int_{١-}^{ب} ق(س) \, دس = ٩$

فجد الثابت $ب$.

ثانياً : مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي

قاعدة :

1) اذا كان $ق(س) = \ln_{هـ} س$ فان

$ق'(س) = \frac{1}{س}$

2) اذا كان $ق(س) = \ln_{هـ} ل(س)$ فإن

$ق'(س) = \frac{ل'(س)}{ل(س)}$

تذكر أن :

1) $\ln_{هـ} س^{ن} = ن \ln_{هـ} س$

2) $\ln_{هـ} هـ^{ل(س)} = ل(س)$

3) $\ln_{هـ}(س \times ص) = \ln_{هـ} س + \ln_{هـ} ص$

4) $\ln_{هـ} \frac{س}{ص} = \ln_{هـ} س - \ln_{هـ} ص$

1) جد $\frac{د ص}{د س}$:

1) $ص = \ln_{هـ}(7 - 3س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-3}{7 - 3س}$

2) $ص = \ln_{هـ}(س^{4} + 5)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{4س^{3}}{س^{4} + 5}$

3) $ص = \ln_{هـ} جا 3س$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{3 جتا 3س}{جا 3س} = 3 ظا 3س$

4) $ص = \ln_{هـ}(2س - 1)^{4}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{8}{4س - 2} = \frac{1}{2س - 1}$

5) $ص = ظا(\ln_{هـ} س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س} ق^{2}(\ln_{هـ} س)$

6) $ص = \ln_{هـ}(\ln_{هـ} س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{\frac{1}{س}}{\ln_{هـ} س} = \frac{1}{س \ln_{هـ} س}$

7) $ص = \ln_{هـ}(س + \sqrt{س^{2} - 5})$

عند $س = 3$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1 + \frac{2س}{2\sqrt{س^{2} - 5}}}{س + \sqrt{س^{2} - 5}}$

$= \frac{1 + \frac{3}{2}}{3 + 2} = \frac{1}{2}$

8) $ص = س^{3} \ln_{هـ} س$

$\frac{د ص}{د س} = 3س^{2} \ln_{هـ} س + س^{3} \times \frac{1}{س}$

$= 3س^{2} \ln_{هـ} س + س^{2}$

9) $ص = \frac{3}{2 + \ln_{هـ} س}$ عندما $س = هـ$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-3 \times \frac{1}{س}}{(2 + \ln_{هـ} س)^{2}}$

$= \frac{-3 \times \frac{1}{هـ}}{(2 + 1)^{2}} = \frac{-1}{هـ^{3}}$

١٠) $ص = \sqrt{٤س^{٢} + \log_{٥} ٢س}$

عندما $س = \frac{١}{٢}$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٨س + \frac{٢}{٢س \ln ٥}}{٢\sqrt{٤س^{٢} + \log_{٥} ٢س}}$$

$$= \frac{٤ + ٢}{٢\sqrt{١ + ٠}} = ٣$$

١١) $ص = \log_{٥} جا^{٣} س$

الحل:

$ص = ٣ \log_{٥} جاس$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣ \times ٥ \ln جاس \cdot تاس}{جاس} = ١٥ تاس$$

١٢) $ص = \log_{٥} س \cdot ظاس$

الحل:

$ص = \log_{٥} س^{٢} + \log_{٥} ظاس$

$= ٢ \log_{٥} س + \log_{٥} ظاس$

$$\frac{دص}{دس} = ٢ \times \frac{١}{س \ln ٥} + \frac{قاس}{ظاس}$$

١٣) $ص = \log_{٥} \frac{\sqrt[٣]{٦س + ١}}{(٥ - ٢س)^{٤}}$

الحل:

$ص = \log_{٥} (٦س + ١)^{\frac{١}{٣}} - \log_{٥} (٥ - ٢س)^{٤}$

$ص = \frac{١}{٣} \log_{٥} (٦س + ١) - ٤ \log_{٥} (٥ - ٢س)$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣} \times \frac{٦}{(٦س + ١) \ln ٥} - ٤ \times \frac{-٢}{(٥ - ٢س) \ln ٥}$$

$$= \frac{٢}{(٦س + ١) \ln ٥} - \frac{٨}{(٥ - ٢س) \ln ٥}$$

١٤) $\log_{٥} ص = س^{٢} + ٣س$

$$\frac{صَ}{ص} = ٢س + ٣$$

$\therefore صَ = ص(٢س + ٣)$

١٥) $\log_{٥} (٢ص - ٥س) = س^{٤} - ١$

الحل: عندما $س = ١$

$$صَ = \frac{٢صَ - ٥}{٢ص - ٥س}$$

$$-٢ = \frac{٢صَ - ٥}{-٤ + ٥}$$

$٢صَ = ٣ \leftarrow صَ = \frac{٣}{٢}$

عندما $س = ١$

$\log_{٥} (٢ص + ٥) = ٠$

$٢ص + ٥ = ١$

$ص = -٢$

[١] اذا كان:

$ق(س) = \log_{٥} (س + \sqrt{س^{٢} - ١})$ فأثبت

أن: $قَ(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$

$$قَ(س) = \frac{١ + \frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ١}}}{س + \sqrt{س^{٢} - ١}}$$

$$= \frac{\sqrt{س^{٢} - ١} + س}{(س + \sqrt{س^{٢} - ١}) \sqrt{س^{٢} - ١}} = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$$

[٢] اذا كان:

$\log_{٥} (قَ(س) - س) = \log_{٥} قاس + \log_{٥} ظاس + ٣س$

فأثبت أن:

$قَ(س) = ٣س + قاس$

الحل: نشتق الطرفين

$$قَ(س) - ١ = \frac{قاس ظاس + قاس}{قاس + ظاس} + ٣$$

$$قَ(س) - ١ = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{قاس + ظاس} + ٣$$

$\therefore قَ(س) = قاس + ٣$

٤ جد $\frac{د ص}{د س}$:

١) $ص = هـ^{س^٤ + ١}$

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{س^٤+١} \times ٤س^٣$

$= ٤س^٣ هـ^{س^٤+١}$

٢) $ص = هـ^{٥-٢س} + لو_{هـ}(س^٣ + ٢)$

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{٥-٢س} \times -٢ + \frac{٣س^٢}{س^٣+٢}$

$= -٢هـ^{٥-٢س} + \frac{٣س^٢}{س^٣+٢}$

٣) $ص = هـ^{٣} + هـ^{جاس}$

$\frac{د ص}{د س} = صفر + هـ^{جاس} \times جتاس$

$= جتاس\ هـ^{جاس}$

٤) $ص = هـ^{\sqrt{٢س}} - س هـ$

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{\sqrt{٢س}} \times \frac{٢}{٢\sqrt{٢س}} - هـ س هـ^{-١}$

$= \frac{هـ^{\sqrt{٢س}}}{\sqrt{٢س}} - هـ س هـ^{-١}$

٥) $ص = هـ^{٣لو_{هـ}(١+جاس)}$

الحل :

$ص = هـ^{لو_{هـ}(١+جاس)^٣}$

$ص = (١+جاس)^٣$

$\frac{د ص}{د س} = ٣(١+جاس)^٢ \times جتاس$

$= ٣جتاس(١+جاس)^٢$

٦) $ص = س لو_{هـ} س - جا هـ^{٣س}$

الحل :

$ص = س(س-٢) - جا هـ^{٣س}$

$ص = س^٢ - ٢س - جا هـ^{٣س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س - ٢ - ٣هـ^{٣س} جتا هـ^{٣س}$

٧) $ص = \frac{١ - هـ^{س}}{١ + هـ^{س}}$ عندما $س = ٠$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-هـ^{س}(١+هـ^{س}) - (١-هـ^{س})هـ^{س}}{(١+هـ^{س})^٢}$

$= \frac{-١ \times ٢ - ٠}{(٢)^٢} = -\frac{١}{٢}$

٨) $ص = س هـ^{جاس}$ عندما $س = \frac{\pi}{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = ١ \times هـ^{جاس} + س \times جتاس\ هـ^{جاس}$

$= هـ^{\frac{\pi}{٢}} \times ١ \times هـ^{\frac{\pi}{٢}}$

$= ١ - \frac{\pi}{٢}$

٩) $ص = (٢هـ^{١-س} + لو_{هـ} س)^٣$ عند $س = ١$

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = ٣(٢هـ^{١-س} + لو_{هـ} س)^٢ (-٢هـ^{١-س} + \frac{١}{س})$

$= ٣(٢+٠)^٢ (-٢+١)$

$= -١٢$

٥ جد الثابت $ب$:

① $د(س) = هـ^{١-س} + \sqrt{ب - لو_{هـ} س}$

$د'(١) = -\frac{٥}{٤}$

الحل :

$د'(س) = هـ^{١-س} \times -١ + \frac{-\frac{١}{س}}{٢\sqrt{ب - لو_{هـ} س}}$

$د'(١) = -١ - \frac{١}{٢\sqrt{ب-٠}} = -\frac{٥}{٤}$

$\frac{١}{٢\sqrt{ب}} = \frac{١}{٤} \leftarrow ٢\sqrt{ب} = ٢ \leftarrow ب = ٤$

⑤ $ص = هـ^{ظاس} + ٢ لو_{هـ} جاس + \int_{\frac{\pi}{٣}}^{س} \frac{دس}{١+ظا^{٢}س}$

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}} = ٢هـ + ١$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{ظاس} \times قا^{٢}س + ٢ \times \frac{-جاس}{جتاس}$

$= قا^{٢}س \, هـ^{ظاس} - ٢ظاس$

$٢هـ + ١ = ٢هـ - ٢ \times ١$

$\therefore ٢ = -١$

⑥ اذا كان: $ص = هـ^{٣-٢س} + ١$

أجد $\frac{دص}{دس}$ عندما $س = \frac{١}{٢}$

الحل:

$هـ^{ص} \times صـ = ٤-س^{٢}$

$صـ = \frac{٤-س^{٢}}{هـ^{ص}}$ لكن $هـ^{ص} = ٣س^{٢}+١$

$= \frac{٤-س^{٢}}{٣س^{٢}+١} = \frac{\frac{١}{٤} \times ٤}{١+\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}$

⑦ اذا كان:

$هـ^{س ص} = س - ص$ فاثبت أن:

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{٢}-ص س+١}{س^{٢}-س ص+١}$

الحل:

$هـ^{س ص} \times (١ \times ص + س صـ) = ١ - صـ$

لكن $هـ^{س ص} = س - ص$

$\therefore (س-ص)(ص+س صـ) = ١-صـ$

$س ص + س^{٢}صـ - ص^{٢} - ص س صـ = ١ - صـ$

$س^{٢}صـ - ص س صـ + صـ = ١ - س ص + ص^{٢}$

$صـ(س^{٢} - ص س + ١) = ص^{٢} - س ص + ١$

$صـ = \frac{ص^{٢}-س ص+١}{س^{٢}-ص س+١}$

⑧ اذا كان $ق(س) = P^{ل(س)}$ فاثبت أن:

$ق'(س) = P^{ل(س)} \times ل'(س) \times لو_{هـ} P$

البرهان:

نأخذ لوغاريتم للطرفين

$لو_{هـ} ق(س) = ل(س) \, لو_{هـ} P$

$لو_{هـ} ق(س) = ل(س) \times لو_{هـ} P$ ← ثابت

$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = ل'(س) \times لو_{هـ} P$

$\therefore ق'(س) = ق(س) \times ل'(س) \times لو_{هـ} P$

$= P^{ل(س)} \times ل'(س) \times لو_{هـ} P$

⑨ جد $\frac{دص}{دس}$:

١) $ص = ٣^{س^{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = ٣^{س^{٢}} \times ٢س \times لو_{هـ} ٣$

٢) $ص = ٥^{جاس}$

$\frac{دص}{دس} = ٥^{جاس} \times جتاس \times لو_{هـ} ٥$

٣) $ص = ٢^{لو_{هـ} س}$

$\frac{دص}{دس} = ٢^{لو_{هـ} س} \times \frac{١}{س} \times لو_{هـ} ٢$

٤) $ص = ٥^{س^{٣}-١} \times لو_{هـ}(٣س+١)$

عند $س = ١$

$\frac{دص}{دس} = ٥^{س^{٣}-١} \times ٣س^{٢} \times لو_{هـ} ٥ \times لو_{هـ}(٣س+١) + ٥^{س^{٣}-١} \times \frac{٣}{٣س+١}$

$= ٥ \times ٣ \times لو_{هـ} ٥ \times لو_{هـ} ٥ + ٣ \times \frac{٣}{٤}$

$= ٣ + (لو_{هـ} ٥)^{٢} \times ١٠$

١٠ اذا كان :

$\int_{ا}^{س} ق(ع)\,دع = هـ^{س} + ٤هـ$

$ق(ب) = -٢ب$ ، $ب \neq ٠$

الحل: نجد قيمة (قيم) الثابت ب بتطبيق النظرية

$ق(س) = هـ^{س} \times -٢س + ٠$

$ق(ب) = هـ^{ب} \times -٢ب$

$-٢ب = هـ^{ب} \times -٢ب$

$هـ^{ب} = ١ \leftarrow ١ - ب = ٠$

$\therefore ب = \pm ١ \leftarrow ب^{٢} = ١$

١١ اذا كان

$ص = هـ^{م س}$ نجد قيمة (قيم) الثابت م

اذا كان : $ص'' - ٥ص' + ٦ص = ٠$

الحل:

$ص' = م هـ^{م س}$ ، $ص'' = م^{٢} هـ^{م س}$

$\therefore م^{٢} هـ^{م س} - ٥م هـ^{م س} + ٦ هـ^{م س} = ٠$

$هـ^{م س}(م^{٢} - ٥م + ٦) = ٠$

لكن $هـ^{م س} \neq ٠$

$\therefore م^{٢} - ٥م + ٦ = ٠$

$(م - ٣)(م - ٢) = ٠ \leftarrow م = ٣ ، ٢$

١٢ اذا كان $ق(س)$ معكوس المشتقة لاقتران ما المار بالنقطة $(١ ، ٣)$ وكان :

$ق'(س) = ٢س + ٢ = م - س^{٢}$ نجد الثابت م

الحل:

$ق'(١) = ٢ + ٢ = م - ١$	من الاصلية
$م = ٥$	$ق(١) = ٣$
$م - ٤ = ٢م \leftarrow م = ٤$	$ق(١) = م - ٢$

تمرين ٥

١ جد $\frac{دص}{دس}$:

١) $ص = س (لو_{هـ} س)^{٢}$ عندما $س = هـ$

٢) $ص = \sqrt{س - هـ^{س}}$

٣) $ص = \sqrt[٣]{لو_{هـ} س^{٣}}$

٤) $ص = (١ + هـ^{س})^{٣}$ عندما $س = لو_{هـ} ٢$

٥) $ص = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(٥س + ١)^{٢}$ عند $س = ٠$

٦) $ص = هـ^{لو_{هـ}(١ + جاس)}$ عند $س = \frac{\pi}{٣}$

٧) $ص = لو_{هـ} ٢ هـ^{جاس}$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$

٨) $ص = هـ^{٣س} + هـ^{٥}$ عند $س = لو_{هـ} ٣$

٩) $ص = هـ^{١ + ٢ لو_{هـ} س}$ عند $س = \frac{١}{هـ}$

١٠) $ص = لو_{هـ} \sqrt{س جاس}$ عند $س = ١$

١١) $ص = \frac{هـ}{س لو_{هـ} س}$ عندما $س = هـ$

١٢) $ص = لو_{هـ} ٣س هـ^{-س}$ عندما $س = ج$

١٣) $هـ^{ص} = لو_{هـ}(س - ص)$ عندما $ص = ٠$

١٤) $ص^{٢} = لو_{هـ}(س ص) - هـ^{س}$

١٥) $هـ^{ص} = س لو_{هـ} س$ عندما $س = هـ$

١٦) $ص = هـ^{س لو_{هـ} س} - ٣هـ$ عندما $س = ١$

١٧) $ص^{٢} = ٤س - لو_{هـ} \frac{١}{ص} + ٥$

١٨) $ص^{س} = هـ$ عندما $س = \frac{١}{٢}$

٢ اذا كان
$ص = أ هـ^{جـس} + جا(لو_هـ س)$
وكان $\left|\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = هـ^{٣} + ١$
فجد الثابت أ

٣ اذا كان :
$\int_{١}^{هـ} ق(س) دس = هـ^{١-س^{٢}} + \frac{٢}{٣} لو_{هـ}(س+١)^{٣}$
فجد $\int_{١}^{هـ} ق(س) دس$.

٤ اذا كان :
م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران
ق(س) المار بالنقطة (٠،٢)
وكان $لو_{هـ} م(س) = أ س - ١$
فجد الثابت أ .

٥ اذا كان :
$ق'(س) = جا س + هـ^{جـس}$
$ق(٠) = \frac{١}{٤}$ ، $ق'(٠) = \frac{١}{٢}$
فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

٦ اذا كان :
$ق(س) = هـ^{أ جتا س} + \int_{١}^{٣} \frac{س}{س^{٢}+٣} دس$
وكان $ق''(\frac{\pi}{٢}) = ٨$
فجد الثابت أ

٧ اذا كان :
$هـ^{\frac{س}{ص}} = ص$ فاثبت أن :
$\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{س+ص}$.

٨ اذا كان :
$هـ^{س+ص} = هـ^{س} + هـ^{ص}$
فاثبت أن :
$\frac{دص}{دس} = -هـ^{ص-س}$

٩ اذا كان :
$\int_{هـ}^{س} (ق'(س) + هـ^{٣س}) دس = لو_{هـ}(٣س+١)^{٥} + أ س$
وكان : $ق'(٠) = ٤$ ، $ق(٠) = \frac{٥}{٣}$
فجد ،
١) الثابت أ
٢) قاعدة ق(س) .

حل التمارين

حل تمرين 1

1) $\int_1^{\ln 3} \frac{1}{e^x}\left(e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

$= \int_1^{\ln 3} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+e^{2x}}\right)dx$

$= \left[-3e^{-\frac{1}{3}x} - \frac{1}{2}\ln|1+e^{2x}|\right]_1^{\ln 3}$

$= (-3e^{-\frac{1}{3}\ln 3} - \frac{1}{2}\ln|1+e^{2\ln 3}|) - (-3e^{0} - \frac{1}{2}\ln|1+e^{0}|)$

$= -3e^{-\ln 3^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\ln 10 + 3 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= -3e^{\ln 3^{-\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\ln 10 + 3 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= -3\times\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 10 + 3 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= -1 - \frac{1}{2}\ln 10 + 3 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= 2 - \frac{1}{2}\ln 10 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2$

$= 2 - \frac{1}{2}\ln 5$

2) $\int \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)}dx$

$= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{4}{x}\right)dx$

$= \int \left(x^2 + 2x + 4\frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4\ln|x| + c$

3) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} 3e^{-3x}dx$

$= 3\times\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$= -\left[e^{-3x}\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$= -\left[e^{-3\ln 3} - e^{-3\ln 2}\right]$

$= -\left[e^{\ln 3^{-1}} - e^{\ln 2^{-3}}\right]$

$= -\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right] = -\frac{5}{24}$

4) $\int \frac{\tan x(1+\tan^2 x)}{\tan x}dx$

$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = \ln|\tan x| + c$

$\leftarrow \tan x$

5) $\int_0^1 \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)dx$

$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}})dx$

$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3} - 0 = \frac{76}{15}$

6) $\int \frac{3x-2}{((x-3)(x-2))^3}dx$

$= \int (3x-2)\times(x-3)^{-3}(x-2)^{-3}dx$

$= \int (x-3)^{-3}(x-2)^{-3}dx$

$= \frac{(x-3)^{-2}}{-12} + c$

7) $\int e^x\sqrt{(e^x+2)(e^x+7)}dx$

$= \int e^x\sqrt{(e^x+2)^2}dx$

$= \int e^x|e^x+2|dx$ لكل $e^x > 0$

$= \int e^x(e^x+2)dx$

$= \int (e^{2x}+2e^x)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + c$

8) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{2}dx \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}$

$= \int \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}{x-(x-2)}dx$

$= \int \frac{2(\sqrt{x}-\sqrt{x-2})}{2}dx$

$= \int x^{\frac{1}{2}} - (x-2)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + c$

٩) $\int_{٤}^{٩} \frac{\sqrt{س}\,(\sqrt{س}-١)}{١-\sqrt{س}}\,د س$

$= \int_{٤}^{٩} -س^{\frac{١}{٢}}\,د س$

$= -\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{٤}^{٩}$

$= -\frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}}\Big]_{٤}^{٩}$

$= -\frac{٢}{٣}(٢٧-٨) = \frac{-٣٨}{٣}$

١٠) $\int_{-١}^{١} \frac{هـ^{٣س}+٢هـ^{س}+١}{هـ^{س}}\,د س$

$= \int_{-١}^{١}(\frac{هـ^{٣س}}{هـ^{س}} + \frac{٢هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{١}{هـ^{س}})\,د س$

$= \int_{-١}^{١}(هـ^{٢س}+٢+هـ^{-س})\,د س$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢س}+٢س-هـ^{-س}\Big]_{-١}^{١}$

$= (\frac{١}{٢}هـ^{٢}+٢-هـ^{-١}) - (\frac{١}{٢}هـ^{-٢}-٢+هـ)$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢}+٤+٢هـ$

٣) $ق(س) = ١٨جتاس + ٤س - ٨جاس$

$\int_{٠}^{ط} (ق'(س) - ٣ق(س))\,د س$

$= [ق(س) - ٣ق(س)]_{٠}^{ط}$

$= [جتاس - س جاس - ٣س جتاس]_{٠}^{ط}$

$= (-١ - ٠ + ٣ط) - (١ - ٠ - ٠) = ٣ط - ٢$

٤) $ق'(س) = س^{٢} + هـ^{-س}$

$\int ق(س)\,د س = \int (س^{٢} + هـ^{-س})\,د س$

$ق(س) = -س^{-١} - هـ^{-س} + ج$

لكن $ق(١) = ٢$

$٢ = -١ - ١ + ج \longrightarrow ج = ٤$

$\therefore ق(س) = -س^{-١} - هـ^{-س} + ٤$

$\int ق(س)\,د س = \int (\frac{-١}{س} - هـ^{-س} + ٤)\,د س$

$ك(س) = -لو|س| + هـ^{-س} + ٤س + ج$

لكن $ك(-١) = ٠$

$٠ = ٠ + هـ - ٤ + ج \longrightarrow ج = ٤ - هـ$

$\therefore ك(س) = -لو|س| + هـ^{-س} + ٤س + ٤ - هـ$

٥) $\int_{-٣}^{-٤} د س = -٣ \longrightarrow ج - ٥ = -٣$

$\therefore ج = ٢ \longrightarrow ك(س) - ك(-٣) = ٢$

$\int_{-٣}^{-٤} \frac{-٢}{\sqrt{٣س+٧}}\,د س = -٢\int_{-٣}^{-٤} (٣س+٧)^{-\frac{١}{٢}}\,د س$

$= -٢ \times \frac{٢}{١} \times \frac{١}{٣}(٣س+٧)^{\frac{١}{٢}}\Big]_{-٣}^{-٤}$

$= -٤\sqrt{٣س+٧}\Big]_{-٣}^{-٤}$

$= -٤(٣-١) = -١٢$

٦) $\int ق'(س)\,د س = \int ٦س\,د س$

$ق(س) = ٣س^{٢} + ج$ لكن $ق(١) = ٥$

$٥ = ٣ + ج \longrightarrow ج = ٢$

$ق(س) = ٣س^{٢} + ٢$

$\int ق(س)\,د س = \int (٣س^{٢}+٢)\,د س$

$ك(س) = س^{٣} + ٢س + ج$

$\therefore ك(٢) = ٨ + ٤ + ٦ = ١٨$

$\int_{-٣}^{-٤} = [س^{٣} + ٢س + ج]_{-٣}^{-٤}$

$= (-٤+٣-٢ج) - (-٣+٦+ج) = ٤ \longrightarrow ج = ٦$

$\therefore ك(س) = س^{٣} + ٢س + ٦$

حل تمرين ٢

١) $\int (2 \times \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}٢س) - 5 \text{ظا}س)$ دس

$= \int (1 - \text{جتا}٢س - 5 \text{ظا}س)$ دس

$= س - \frac{\text{جا}٢س}{2} + \frac{5}{7}$ لو|جتا٧س| + جـ

٢) $\int \frac{\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س}{\text{جا}^2 س}$ دس

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2 س}$ دس $= \int \text{قا}^2 س$ دس

$= -\frac{1}{5} \text{ظتا}س + جـ$

٣) $\int \text{قا}^2 س (1 - \text{جتا}^2 س)$ دس

$= \int (\text{قا}^2 س - 1)$ دس

$= \text{ظا}س - س + جـ$.

٤) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}س \times$ ~~لو~~ قتا س دس

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}س \times \frac{1}{\text{جا}س}$ دس

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظتا}س \text{قتا}س$ دس.

$= [-\text{قتا}س]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(1 - 2) = 1$

٥) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{ظا}^2 س (1 + \text{ظا}^2 س)}$ دس

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{ظا}^2 س \text{قا}^2 س}$ دس.

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |\text{ظا}س \text{قا}س|$ دس.

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{ظا}س \text{قا}س$ دس

$= [\text{قا}س]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2 - 1 = 1$

٦) $\int \frac{\text{جتا}^3 س - 5}{\text{جتا}^2 س}$ دس

$= \int (\frac{\text{جتا}^3 س}{\text{جتا}^2 س} - \frac{5}{\text{جتا}^2 س})$ دس.

$= \int (\text{جتا}س - 5 \text{قا}^2 س)$ دس.

$= \text{جا}س - 5 \text{ظا}س + جـ$

٧) $\int (\frac{3}{\text{جتا}^2 س} + \frac{3 \text{ظتا}^2 س}{\text{جا}^2 س})$ دس

$= \int (2 \text{قا}^2 س + 3 \times \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا}^2 س} \times \frac{1}{\text{جتا}^2 س})$ دس

$= \int (2 \text{قا}^2 س + 3 \text{قتا}^2 س)$ دس

$= 2 \text{ظا}س - 3 \text{ظتا}س + جـ$.

٨) $\int \frac{1}{2 \text{جتا}^2 س}$ دس

$= \int \frac{1}{2} \text{قا}^2 س$ دس

$= \frac{1}{2} \text{ظا}٢س + جـ$.

٩) $\int \frac{1}{1 + \text{قتا}س} \times \frac{1 - \text{قتا}س}{1 - \text{قتا}س}$ دس

$= \int \frac{1 - \text{قتا}س}{1 - \text{قتا}^2 س}$ دس.

$= \int \frac{1 - \text{قتا}س}{-\text{ظتا}^2 س}$ دس

$= \int (\frac{-1}{\text{ظتا}^2 س} + \frac{\text{قتا}س}{\text{ظتا}^2 س})$ دس

$= \int (-\text{ظا}^2 س + \frac{1}{\text{جا}س} \times \frac{\text{جتا}س}{\text{جتا}^2 س})$ دس

$= \int (1 - \text{قا}^2 س + \text{ظا}س \text{قا}س)$ دس

$= س - \text{ظا}س + \text{قا}س + جـ$.

١٠) $\int جا^3 س (1 - جا^2 س)\, دس$

$= \int (جا^3 س - جا^3 س جا^2 س)\, دس$

$= \int (جا^3 س + \frac{1}{2}(جتا 3س - جتا س))\, دس$

$= -\frac{1}{3} جتا^3 س + \frac{1}{2}(\frac{جا 3س}{3} - جا س) + ث$

١١) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - جا س}{س + جتا س}\, دس$

$\leftarrow 1 - جا س$

$= [لو_e |س + جتا س|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= لو_e(\frac{\pi}{2} - 1) - لو_e 1 = لو_e(\frac{\pi}{2} - 1)$

١٢) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(جا س + جتا س)^2}}{جا س + جتا س}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جا س + جتا س}{جا س + جتا س}\, دس = \frac{\pi}{2}$

١٣) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2جا^2 س}{2}}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |جا س|\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جا س\, دس = -جتا س\ ]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

١٤) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{2جتا^2 س}}{جا^2 س}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} \times \frac{جتا س}{جا^2 س}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2} ظتا س قتا س\, دس$

$= -\sqrt{2} قتا س\ ]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= -\sqrt{2}(1 - 2) = \sqrt{2}$

١٥) $\int جا س \times \frac{1}{2}(جا 5س + جا(-س))\, دس$

$= \int \frac{1}{2}(جا س جا 5س - جا^2 س)\, دس$

$= \int \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(جتا 4س - جتا 6س) - \frac{1}{2}(1 - جتا 2س))\, دس$

$= -\frac{1}{4}(\frac{جا 6س}{6} - \frac{جا 4س}{4}) - \frac{1}{4}(س - \frac{جا 2س}{2}) + ث$

١٦) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + جتا 2س}{1 - جتا 2س}}\, دس$

$= \int \sqrt{\frac{2جتا^2 س}{2جا^2 س}}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{ظا^2 س}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} |ظا س|\, دس = -لو_e |قتا س|\ ]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(لو_e \frac{1}{2} - لو_e 1) = لو_e 2$

١٧) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(2جا س جتا س)^2}{2جتا^2 س}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4جا^2 س جتا^2 س}{2جتا^2 س}\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \times \frac{1}{2}(1 - جتا 2س)\, دس$

$= س - \frac{جا 2س}{2}\ ]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= (\frac{\pi}{3} - 0) - (\frac{\pi}{6} - 0) = \frac{\pi}{6}$

حل تمرين ٣

١ $\int_{ب}^{٢} ٢ب\, دس = -٣٠$

$٢ب(٢-ب) = -٣٠$ /٢

$ب(٢-ب) = -١٥$

$٢ب - ب^{٢} = -١٥$

$ب^{٢} - ٢ب - ١٥ = ٠$

$(ب-٥)(ب+٣) = ٠$

$\therefore ب = ٥ ، -٣$

---

٢ $\int_{١}^{٣} (٢ه(س) + س^{٢} - ٦)\, دس = -٩$

$\int_{١}^{٣} ه(س)\, دس + \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٦س\right]_{١}^{٣} = -٩$

$\int_{١}^{٣} ه(س)\, دس - (\frac{١}{٣} - ١) = ٣$

$\therefore \int_{١}^{٣} ه(س)\, دس = \frac{٧}{٣}$

$\therefore \int_{١}^{٣} (\frac{١}{٤}ه(س) - س^{٣})\, دس$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٧}{٣} - \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٧}{١٢} - (٩ - \frac{١}{٤}) = \frac{-٩٧}{١٢}$

---

٣ $\int_{١}^{٤} ه(س)\, دس = \frac{١٢}{٣} = ٤$

$\int_{١}^{٤} ه(س)\, دس = ٥$

$\int_{١}^{٤} (٢ه(س) - ٣جا(س) - ٤س)\, دس$

$= \left[٢ه(س) - ٣جتا(س) - ٢س^{٢}\right]_{١}^{٤}$

$= ٢ \times ٤ - ٣ \times ٥ - ٢س^{٢}]_{١}^{٤}$

$= -٨ + ١٥ - ٢(١٦-١)$

$= ٧ + ٣٠ = ٣٧$.

---

١ $\int ه(س)\, دس = \int -٤جا٢س\, دس$

$ه(س) = -٢جا٢س + جـ$

لكن $ه(\frac{\pi}{٢}) = ٠$

$٠ = -٢ \times ٠ + جـ \longleftarrow جـ = ٠$

$\therefore ه(س) = -٢جا٢س$.

$\int ه(س)\, دس = \int -٢جا٢س\, دس$

$ه(س) = جتا٢س + جـ$

لكن $ه(\frac{\pi}{٢}) = -٢$

$-٢ = -١ + جـ \longleftarrow جـ = -١$

$\therefore ه(س) = جتا٢س - ١$

---

٣ $ه(س) = ٣(س) - ٥(س) = جـ$

$\int_{١}^{٤} (٣(س) + \underbrace{٣(س) - ٥(س)}_{جـ})\, دس = ٣٤+٢$

$\int_{١}^{٤} (جا س + جتا س - ٢ + جـ)\, دس = ٣٤+٢$

$\left[-جتا س + جا س - ٢س + جـس\right]_{١}^{٤} = ٣٤+٢$

$(١ - ٢٤ + ٤جـ) - (-١) = ٣٤+٢$

$-٢٤ + ٤جـ = ٣٤ + ٢$

$٤(جـ - ٢) = ٣٤ \longleftarrow جـ = ٥$

$\therefore ٣(س) - ٥(س) = ٥$

$جا س + جتا س - ٢ - ٥(س) = ٥$

$\therefore ٥(س) = جا س + جتا س - ٨$

٤) $م(س) - ه(س) = جـ$

$\int_{-١}^{٤} جـ\,د س = ١٢ \longrightarrow ٣جـ = ١٢ \longleftarrow جـ = ٤$

$= \int_{-١}^{٤} ٢س\,م(س)\,د س - \int_{-١}^{٤} ٢س\,ه(س)\,د س$

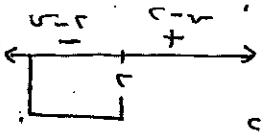
$= \int_{-١}^{٤} ٢س\,(م(س) - ه(س))\,د س$

$= \int_{٠}^{٤} ٨ - س٢ \times ٤\,د س = ٨س - س^{٢}]_{٠}^{٤}$

$= ٣٢ - ١٦ = ١٦$

٥) $\int_{٠}^{٥} ه(س)\,د س$

$= \int_{٠}^{٢} |س - ١|\,د س + \int_{٢}^{٥} (٣س - ٨)^{-\frac{١}{٣}}\,د س$



$= \int_{٠}^{٢} (٢ - س)\,د س + \int_{٢}^{٥} (٣س - ٨)^{-\frac{١}{٣}}\,د س$

$= ٢س - \frac{س^{٢}}{٢}]_{٠}^{٢} + \frac{(٣س - ٨)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}}]_{٢}^{٥}$

$= (٤ - ٠) + \frac{١}{٢}(٤ - ١) = \frac{٧}{٢}$

٦) $\int_{-١}^{٤} ه(س)\,د س = ٦ + ١٨ = ٢٤$

$\int_{-١}^{٢} ه(س)\,د س = ٣$

$\int_{١}^{٤} ه(س)\,د س = \frac{٧٠}{٧} = ١٠$

$\int_{-١}^{٤} (٢س - ه(س))\,د س$

$= س^{٢}]_{-١}^{٤} - \int_{-١}^{٤} ه(س)\,د س$

$= (١٦ - ١) - (\int_{-١}^{١} ه(س)\,د س + \int_{١}^{٤} ه(س)\,د س)$

$= ١٥ - (١٠ - ٣)$

$= ١٥ - ٧ = ٨$

٧) ه) $ه(س) = \frac{١}{س^{٢}+١}$ ، $س \in [-١، ٢]$

$ه'(س) = \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = ٠ \longrightarrow س = ٠$

$ه(-١) = \frac{١}{٢}$ ، $ه(٠) = ١$ ، $ه(٢) = \frac{١}{٥}$

$\frac{١}{٥} \leq ه(س) \leq ١$

$\int_{-١}^{٢} \frac{١}{٥}\,د س \leq \int_{-١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}+١}\,د س \leq \int_{-١}^{٢} ١\,د س$

$٣ \leq \int_{-١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}+١}\,د س \leq ٦$

٨) $م(س) = ٣جا^{٣}س + ١$ ، $س \in [\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}]$

$م'(س) = ٩جا^{٢}س جتا س = ٠$

$جا س = ٠$ أو $جتا س = ٠$

$س = -\pi، ٠، \frac{\pi}{٢}، \pi$

$م(-\pi) = ١ = م(\pi)$ ، $م(\frac{-\pi}{٢}) = -٢$

$-٢ \leq م(س) \leq ١$

$-٢\pi \leq \int_{-\pi}^{\pi} (٣جا^{٣}س + ١)\,د س \leq \pi$

٩) $\int_{-\pi}^{\pi} (٣جا^{٣}س + ١)\,د س$

$= \int_{-\pi}^{\pi} ٣جا^{٣}س\,د س + \int_{-\pi}^{\pi} ١\,د س$

$= \int_{-\pi}^{\pi} ٣جا^{٣}س\,د س + ٢\pi$

$= \int_{-\pi}^{\pi} ٣جا^{٢}س \times جا س\,د س + ٢\pi$

$= \int_{-\pi}^{\pi} ٣(١ - جتا^{٢}س) \times جا س\,د س + ٢\pi$

$= \int_{-\pi}^{\pi} ٣جا س\,د س - \int_{-\pi}^{\pi} ٣جتا^{٢}س \times جا س\,د س + ٢\pi$

$= -٣جتا س]_{-\pi}^{\pi} + ٣\int_{-\pi}^{\pi} جتا^{٢}س \times -جا س\,د س + ٢\pi$

$= -٣(-١ - ١) + ٣\int_{-\pi}^{\pi} جتا^{٢}س \times -جا س\,د س + ٢\pi$

$= ٦ + ٣\int_{-\pi}^{\pi} جتا^{٢}س \times -جا س\,د س + ٢\pi$

$= ٦ + ٣\int_{١}^{-١} ص^{٢}\,د ص + ٢\pi$

$= ٦ + ٣ص^{٣}]_{١}^{-١} + ٢\pi$

$= ٦ + ٣(-١ - ١) + ٢\pi$

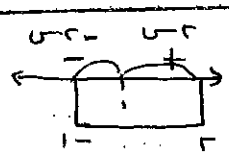
$= ٢\pi$

١٠) $\int_{-\pi}^{\pi} ه(س)\,د س = ٢\pi$

$\int_{-\pi}^{\pi} ه(س)\,د س + \int_{\pi}^{٢\pi} ه(س)\,د س = ٢\pi$

$\int_{\pi}^{٢\pi} ه(س)\,د س = ٢\pi - ٢\pi = ٠$

٩ $٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$



$= \int_{-١}^{٠} \frac{-٢س}{س^٢+١} دس + \int_{٠}^{٢} \frac{٢س}{س^٢+١} دس$

$= -[\ لو_ه (س^٢+١)\ ]_{-١}^{٠} + [\ لو_ه (س^٢+١)\ ]_{٠}^{٢}$

$= ٠ + لو_ه ٥ - لو_ه ٢ = لو_ه ١٠$

حل تمرين ٤

١ $\frac{دص}{دس} = -٣جاس - جاس + صفر$

$= -٤جاس$

$= -٤ \times جا\frac{\pi}{٦} = -٤ \times \frac{١}{٢} = -٢$

٢ $ق'(س) = ١٠س - (٢س + ق'(س))$

$ق''(س) = ٨س - ق'(س)$

$٢ق'(س) = ٨س$

$ق'(س) = ٤س$

$ق'(-٢) = -٨$

٣ $ق'(س) = ٢س - (٣س^٢ - \int ٢جاس دس)$

$\int ٢جاس دس = صفر]_{١}^{} = ١$

$ق'(س) = ٢س - ٣س^٢ + ١$

$ق'(-١) = -٢ - ٣ + ١ = -٤$

٤ نثبت المطلوب

$ق''(س) = ٢جاس جتاس + جاس$

$ق''(س) = جا٢س + جاس$

نثبت عكس أركس .

$٢ق''(س) ق'(س) = ٢جتا٢س + جتاس$

٥ تكامل الطرفين .

$ق(س) = س^٤ + ٣س + ٢ + جـ$

لكن $م(١) = ق(١) = ٣$

$٣ = ١ + ٣ + ٢ + جـ \leftarrow جـ = -٣$

$ق(س) = س^٤ + ٣س - ١$

$\therefore ق(١) = ١ + ٣ - ١ = ٣$.

٦ نثبت الطرفين :

$م + ق(س) = ٦س^٢ - ٢بس$

لكن $ق(١) = ٨$

$م + ٨ = ٦ - ٢ب \leftarrow \boxed{م + ٢ب = -٢}$

نثبت عكس أركس .

$ق'(س) = ١٢س - ٢ب$

لكن $ق'(١) = ٦$

$٦ = ١٢ - ٢ب \leftarrow ب = ٣$

$\therefore م + ٢ \times ٣ = -٢ \leftarrow م = -٨$

٧ نثبت الطرفين

١) $ق''(س) - ٢س = ٣م س^٢ + ٢س$.

$-٢٠ - ٤ = ١٢م + ٤ \leftarrow م = ١$

٢) تكامل الطرفين :

$م(س) - ص = س^٣ + س^٢ - ٣س + جـ$

لكن $م(-١) = ٥$

$٥ - ١ = ١ + ١ - ٣ + جـ \leftarrow جـ = ٧$

$\therefore م(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ٤$

$م(-٢) = -٨ + ٨ + ٤ = ٤$

٣) $ق''(س) = ٣س^٢ + ٤س$

$ق''(٣) = ٢٧ + ١٢ = ٣٩$

٤ : تحقق الطرفية

$$\text{ط}(س) = 3 - س^2$$

$$\int_{-1}^{ب} \text{ط}(س)\, د س = 9$$

$$\int_{-1}^{ب} (3 - س^2)\, د س = 9$$

$$[3س - \frac{1}{3}س^3]_{-1}^{ب} = 9 \leftarrow 3ب - \frac{1}{3}ب^3 + 3 - \frac{1}{3} = 9$$

$$\frac{2}{3}ب^3 = 8 \leftarrow ب = 2$$

حل تمارين ٥

١ ١) $\frac{د ص}{د س} = 1 \times (\log_{هـ} س)^2 + 2 \times \frac{1}{س} \times \log_{هـ} س$

$= (\log_{هـ} س)^2 + 2 \log_{هـ} س$

$= (1)^2 + 2 \times 1 = 3$

٢) $\frac{د ص}{د س} = \frac{1 - 2هـ^{س}}{\sqrt{س - هـ^{2س}}}$

٣) $ص = (3 \log_{هـ} س)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2}(3 \log_{هـ} س)^{-\frac{1}{2}} \times 3 \times \frac{1}{س}$

$= \frac{1}{2س}(3 \log_{هـ} س)^{-\frac{1}{2}}$

٤) $\frac{د ص}{د س} = 3(1 + هـ^{-س})^2 \times -هـ^{-س}$

$= -3(1 + هـ^{-س})^2 \times هـ^{-س}$

$= -3(1 + \frac{1}{هـ^{س}})^2 \times \frac{1}{هـ^{س}}$

$= -3 \times (\frac{3}{2})^2 \times \frac{1}{2} = -\frac{27}{8}$

٥) $ص = هـ^{جاس} + 2 \log_{هـ}(5س + 1)$

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{جاس} \times جتاس + 2 \times \frac{5}{5س + 1}$

$= هـ^{0} \times 1 + 2 \times \frac{5}{11}$

$= 1 + 10 = 11$

٦) $ص = 1 + جا^2 س$

$\frac{د ص}{د س} = 2جاس جتاس = جا2س$

$= جا2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

٧) $ص = \log_{هـ} 2 + \log_{هـ} هـ^{جتاس}$

$ص = \log_{هـ} 2 + جتاس$

$\frac{د ص}{د س} = صفر - جاس = -جا\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

٨) $\frac{د ص}{د س} = 2هـ^{2س} + صفر$

$= 2هـ^{2\log_{هـ} 3} = 3هـ^{\log_{هـ} 9} = 2 \times 9 = 18$

٩) $ص = هـ^{\log_{هـ} س^2}$

$\frac{د ص}{د س} = 2هـ^{س}$

$= 2 \not{هـ} \times \frac{1}{\not{هـ}} = 2$

١٠) $ص = \frac{1}{2} \log_{هـ} س جتا\pi س$

$= \frac{1}{2}(\log_{هـ} س + \log_{هـ} جتا\pi س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2}(\frac{1}{س} - \frac{-\pi جا\pi س}{جتا\pi س})$

$= \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$

١١) $\frac{د ص}{د س} = \frac{-هـ(1 \times \log_{هـ} س + س \times \frac{1}{س})}{(س \log_{هـ} س)^2}$

$= \frac{-هـ(1 + 1)}{(هـ \times 1)^2} = \frac{-2هـ}{هـ^2} = -\frac{2}{هـ}$

١٢) $ص = \log_{هـ} 3س + \log_{هـ} هـ^{-س}$

$ص = \log_{هـ} 3س - س$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{3}{3س} - 1$

$= \frac{1}{س} - 1 = -\frac{1}{2}$

١٣) $e^{ص} \times ص' = \frac{1-ص}{س-ص}$ | عندما $ص = 0$ ، $هـ = لو_{هـ} س$، $لو_{هـ} 1 = س = هـ$

$هـ ص' = \frac{1-ص}{هـ-0}$

$هـ ص' = 1-ص$

$هـ ص' + ص' = 1 \leftarrow ص'(هـ+1) = 1$

$\therefore ص' = \frac{1}{هـ+1}$

١٤) $ص^2 = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص - هـ س^2$

$2ص ص' = \frac{1}{س} + \frac{ص'}{ص} - 2س هـ س^2$

$2ص ص' - \frac{ص'}{ص} = \frac{1}{س} - 2س هـ س^2$

$ص'(2ص - \frac{1}{ص}) = \frac{1}{س} - 2س هـ س^2$

$ص' = \frac{\frac{1}{س} - 2س هـ س^2}{2ص - \frac{1}{ص}}$

١٥) $e^{ص} \times ص' = 1 \times لو_{هـ} س + س \times \frac{1}{س}$

$هـ ص' = لو_{هـ} هـ + 1$

$هـ ص' = 2 \leftarrow ص' = \frac{2}{هـ}$

عندما $س = هـ$، $e^{ص} = هـ \times 1$، $ص = 1$

١٦) $\frac{ص}{س} = هـ^{س لو_{هـ} س} (1 \times لو_{هـ} س + س \times \frac{1}{س})$

$= هـ^{(0+1)} = 1$

١٧) $ص^2 = 3 - س - لو_{هـ} ص + 5$

$ص^2 = 3 - س + لو_{هـ} ص + 5$

$2ص ص' = 3 + \frac{ص'}{ص}$ $\times ص$

$2ص^2 ص' = 3ص + ص'$

$ص'(2ص^2 - 1) = 3ص$

$ص' = \frac{3ص}{2ص^2 - 1}$

١٨) نركب لوغاريتم للطرفين

$لو_{هـ} ص^{س} = لو_{هـ} هـ$

$س لو_{هـ} ص = 1 \leftarrow لو_{هـ} ص = \frac{1}{س}$

$\frac{ص'}{ص} = \frac{-1}{س^2} \leftarrow ص' = \frac{-ص}{س^2}$

وعندما $س = \frac{1}{2} \leftarrow لو_{هـ} ص = 2$

$\therefore ص = هـ^2$

$\therefore ص' = \frac{-هـ^2}{\frac{1}{4}} = -4هـ^2$

٢) $\frac{ص}{س} = 2 هـ^{2س} + جتا(لو_{هـ} س) \times \frac{1}{س}$

$هـ^3 + 1 = 2 هـ^2 + جتا 0 \times 1$

$هـ^3 + 1 = 2 هـ^2 + 1 \leftarrow هـ^3 = 2 هـ^2$

$\therefore هـ = \frac{هـ^3}{هـ^2} = \frac{2}{1} = 2$.

٣) $\int ق'(س) ق(س) س = هـ^{ق(س)} + 2 لو_{هـ}(س+1)$

نشتق الطرفين

$ق(س) = -2س هـ^{1-س^2} + 2 \times \frac{1}{س+1}$

$\int ق'(س) ق(س) س = [ق(س)]^2$

$= [-2س هـ^{1-س^2} + \frac{2}{س+1}]^1$

$= (-2 \times 1 + 1) - (0 + 2)$

$= -1 - 2 = -3$.

٤) $\text{لو}_{هـ} م(س) = ٢س - ١$

تحول للصورة الأسية

$م(س) = هـ^{٢س-١}$

نستعمل

$م'(س) = ٢ هـ^{٢س-١}$

لكن $م'(٠) = ٢$

$٢ = ٢ هـ^{-١} \leftarrow ٢ = ٢هـ$.

٥) $\int ق'(س)\,دس = \int (جاس + هـ^{س})\,دس$

$ق(س) = -جتاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + جـ$

لكن $ق(٠) = \frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢} = -١ + \frac{١}{٢} + جـ \leftarrow جـ = ١$

$ق(س) = -جتاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ١$

$\int ق'(س)\,دس = \int (-جتاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ١)\,دس$

$م(س) = -جاس + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + س + جـ$

لكن $م(٠) = \frac{١}{٤}$

$\frac{١}{٤} = ٠ + \frac{١}{٤} + ٠ + جـ \leftarrow جـ = ٠$

$\therefore م(س) = -جاس + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + س$

٦) $ق'(س) = -٢ جا^{٢}س \, هـ^{جتا^{٢}س} + ظتا\frac{س}{٢} - ضفا$

$ق'(س) = -٢جتاس \times هـ^{جتا^{٢}س} \times -٢جاس$

$\times -٢جاس \, هـ^{جتا^{٢}س} - \frac{١}{٢} قتا^{٢}\frac{س}{٢}$

$ق'(س) = -٢جتاس \, هـ^{جتا^{٢}س} + ٢جاس \, جتاس \, هـ^{جتا^{٢}س} - \frac{١}{٢} قتا^{٢}\frac{س}{٢}$

$ق'(\frac{\pi}{٢}) = ضفا + ٢ \times ١ \times ٠ - \frac{١}{٢} \times ٢$

$٨ = ٩ - ١ \leftarrow ٩ = ٢ب \leftarrow ب = \pm ٣$

٧) $\frac{هـ^{س}}{ص} \times \frac{١ \times ص - س \, ص'}{ص^{٢}} = ص'$

$\frac{ص}{هـ^{س}} \times \frac{ص - س \, ص'}{ص^{٢}} = ص'$

$ص - س \, ص' = ص \, ص' \leftarrow ص = ص'(ص + س)$

$ص = ص \, ص' + س \, ص' \leftarrow \therefore ص' = \frac{ص}{ص + س}$

٨) $هـ^{س+ص}(١ + ص') = هـ^{س} + ص' \, هـ^{ص}$

$(هـ^{س} + هـ^{ص})(١ + ص') = هـ^{س} + ص' \, هـ^{ص}$

$هـ^{س} + ص' \, هـ^{س} + هـ^{ص} + ص' \, هـ^{ص} = هـ^{س} + ص' \, هـ^{ص}$

$ص' \, هـ^{س} = -هـ^{ص}$

$ص' = \frac{-هـ^{ص}}{هـ^{س}} = -هـ^{ص-س}$

٩) $\int (ق'(س) + هـ^{٣س})\,دس = ٢ \, \text{لو}_{هـ}(٣س+١) + ب س$

١) نستعمل الطرفين

$ق'(س) + هـ^{٣س} = ٢ \times \frac{٣}{٣س+١} + ب$

لكن $ق'(٠) = ٤$

$٤ + ١ = ٦ + ب \leftarrow ب = -١$

٢) تكامل الطرف الأيمن .

$م(س) + \frac{هـ^{٣س}}{٣} = ٢ \, \text{لو}_{هـ}(٣س+١) - س + جـ$

لكن $م(٠) = \frac{٥}{٣}$

$\frac{٥}{٣} + \frac{١}{٣} = ٠ - ٠ + جـ$

$جـ = ٢$

$\therefore م(س) = ٢ \, \text{لو}_{هـ}(٣س+١) - \frac{هـ^{٣س}}{٣} - س + ٢$