العبقري

الرياضيات العلمي

التكامل وتطبيقاته

الفرع العلمي والصناعي

إعداد

حمدالله الطوباسي

0797662728 - 0779358752

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

الدرس الأول :
التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل عكس التفاضل

توضيح :

تكامل (٦س) دس = ٣س^{٢} + جـ

حيث جـ ثابت التكامل

لاحظ أن مشتقة ٣س^{٢} + جـ = ٦س

مشتقة ٣س^{٢} + ٢٠ = ٦س

مشتقة ٣س^{٢} - ١٠ = ٦س

ناتج التكامل هو الاقتران الذي مشتقته ما داخل التكامل

① $\int$ ق(س) دس

$\int$: رمز التكامل غير المحدود

ق(س) : الاقتران المراد تكامله

دس : تكامل الاقتران بالنسبة لـ س

$\int$ ق(س) دس يقرأ تكامل ق(س) دس

و يعني تكامل ق(س) بالنسبة إلى س

② $\int$ قَ(س) دس = ق(س) + جـ

الجزء الأول :
قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة (١)

$\int$ أ دس = أس + جـ

مثال (١)

جد التكاملات التالية

① $\int$ -٥ دس — الحل: -٥س + جـ

② $\int$ $\frac{١}{٤}$ دس — الحل: $\frac{١}{٤}$ س + جـ

③ $\int$ π دع — الحل: πع + جـ

④ $\int$ دس — الحل: س + جـ

⑤ $\int$ $\frac{-\text{دس}}{٣}$ — الحل: $-\frac{١}{٣}$ س + جـ

⑥ $\int$ $\frac{٢\text{دع}}{٥}$ — الحل: $\frac{٢}{٥}$ ع + جـ

⑦ $\int$ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) دس

الحل = $\int$ دس = س + جـ

قاعدة (٢)

$\int$ س^{ن} دس = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

حيث ن $\neq$ -١

تذكر :

$\sqrt[ن]{\text{س}^{م}}$ = س$^{\frac{م}{ن}}$

مثال (٢) : جد التكاملات التالية

① $\int \text{س}\ \text{دس}$ الحل $\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ج}$

② $\int \text{س}^{٥}\ \text{دس}$ الحل $\frac{\text{س}^{٦}}{٦} + \text{ج}$

③ $\int \text{س}^{-٨}\ \text{دس}$

الحل $\int \text{س}^{-٨}\ \text{دس} = \frac{\text{س}^{-٧}}{-٧} + \text{ج}$

$= \frac{-١}{٧\text{س}^{٧}} + \text{ج}$

④ $\int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\ \text{دس}$

الحل $\int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\ \text{دس} = \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \text{ج}$

$= \frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{ج}$

⑤ $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}}\ \text{دس}$

الحل $\int \frac{١}{\text{س}^{٣}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{-٣}\ \text{دس} = \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{ج}$

$= \frac{-١}{٢\text{س}^{٢}} + \text{ج}$

⑥ $\int \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

الحل $= \int \text{س}^{\frac{٢}{٥}}\ \text{دس} = \frac{٥}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{ج}$

$= \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{\text{س}^{٧}} + \text{ج}$

⑦ $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

الحل $= \int \text{س}^{-\frac{٢}{٣}}\ \text{دس} = ٣\text{س}^{\frac{١}{٣}} + \text{ج}$

$= ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + \text{ج}$

قاعدة (٣)

$\int \text{أ}\ \text{ق(س)}\ \text{دس} = \text{أ}\int \text{ق(س)}\ \text{دس}$

مثال (٣) جد التكاملات التالية

① $\int ٦\text{س}\ \text{دس}$ الحل $٣\text{س}^{٢} + \text{ج}$

② $\int ٥\text{س}^{-٢}\ \text{دس}$ الحل $-٥\text{س}^{-١} + \text{ج} = \frac{-٥}{\text{س}} + \text{ج}$

③ $\int ٢\text{س}^{٥}\ \text{دس}$ الحل $\frac{\text{س}^{٦}}{٣} + \text{ج}$

④ $\int -٤\text{س}^{-٥}\ \text{دس}$

الحل $-٤\frac{\text{س}^{-٤}}{-٤} + \text{ج} = \frac{١}{\text{س}^{٤}} + \text{ج}$

⑤ $\int \frac{-٣}{\text{س}^{٥}}\ \text{دس}$

الحل $\int -٣\text{س}^{-٥}\ \text{دس} = -٣\frac{\text{س}^{-٤}}{-٤} + \text{ج}$

$= \frac{٣}{٤\text{س}^{٤}} + \text{ج}$

⑥ $\int ٥\sqrt[٣]{\text{س}^{-٤}}\ \text{دس}$

الحل $\int ٥\text{س}^{-\frac{٤}{٣}}\ \text{دس} = ٥ \times -٣\ \text{س}^{-\frac{١}{٣}} + \text{ج}$

$= \frac{-١٥}{\sqrt[٣]{\text{س}}} + \text{ج}$

قاعدة (٤)

$\int \text{ق(س)} \pm \text{هـ(س)}\ \text{دس}$

$= \int \text{ق(س)}\ \text{دس} \pm \int \text{هـ(س)}\ \text{دس}$

يوزع التكامل على الجمع و الطرح فقط

تعمم القاعدة لأكثر من اقترانين

مثال (٤) جد التكاملات التالية

① $\int (٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٤)\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $٣\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٥\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٤\text{س} + \text{ج}$

$= \text{س}^{٣} + \frac{٥}{٢}\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \text{ج}$

② $\int \left(س^{6} + \frac{3}{س^{5}} - \sqrt[5]{س^{2}}\right) دس$ (كتاب)

الحل $\int \left(س^{6} + 3س^{-5} - س^{\frac{2}{5}}\right) دس$

$= \frac{س^{7}}{7} + 3\frac{س^{-4}}{-4} - \frac{5}{7}س^{\frac{7}{5}} + جـ$

$= \frac{س^{7}}{7} - \frac{3}{4س^{4}} - \frac{5}{7}\sqrt[5]{س^{7}} + جـ$

③ $\int \frac{س^{3}\sqrt{س}}{س} دس$

الحل $= \int س^{2}\sqrt{س}\, دس = \int س^{2} \times س^{\frac{1}{2}} دس$

$= \int س^{\frac{5}{2}} دس = \frac{2}{7}س^{\frac{7}{2}} + جـ = \frac{2}{7}\sqrt{س^{7}} + جـ$

④ $\int \frac{س^{3} + 5س^{2} - 4}{س^{2}} دس$

الحل $\int \left(س + 5 - 4س^{-2}\right) دس$

$= \frac{س^{2}}{2} + 5س - 4\frac{س^{-1}}{-1} + جـ$

$= \frac{س^{2}}{2} + 5س + \frac{4}{س} + جـ$

⑤ $\int \frac{2س^{2} - 3س}{\sqrt{س}} دس$

الحل $= \int \frac{2س^{2} - 3س}{س^{\frac{1}{2}}} دس$

$= \int \left(2س^{\frac{3}{2}} - 3س^{\frac{1}{2}}\right) دس$

$= 2 \times \frac{2}{5}س^{\frac{5}{2}} - 3 \times \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} + جـ$

$= \frac{4}{5}\sqrt{س^{5}} - 2\sqrt{س^{3}} + جـ$

⑥ $\int \sqrt[3]{س}\left(\sqrt[3]{س} + \frac{5}{\sqrt[3]{س}}\right) دس$ (كتاب)

الحل $= \int (\sqrt[3]{س})^{2} + 5\, دس$

$= \int \left(س^{\frac{2}{3}} + 5\right) دس$

$= \frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} + 5س + جـ = \frac{3}{5}\sqrt[3]{س^{5}} + 5س + جـ$

⑦ $\int (5س + 2)(س - 1)\, دس$

الحل $= \int \left(5س^{2} - 3س - 2\right) دس$

$= \frac{5}{3}س^{3} - \frac{3}{2}س^{2} - 2س + جـ$

⑧ $\int \frac{س^{2} + 2س - 15}{س - 3} دس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{(س+5)(س-3)}{س-3} دس$

$= \int (س + 5)\, دس = \frac{س^{2}}{2} + 5س + جـ$

⑨ $\int \frac{س - 5}{\sqrt[3]{س}} دس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{س - 5}{س^{\frac{1}{3}}} دس = \int \left(س^{\frac{2}{3}} - 5س^{-\frac{1}{3}}\right) دس$

$= \frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}} - 5 \times \frac{3}{2}س^{\frac{2}{3}} + جـ$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{س^{5}} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{س^{2}} + جـ$

⑩ $\int \frac{س^{3} - 27}{س - 3} دس$

الحل $= \int \frac{(س-3)(س^{2} + 3س + 9)}{س - 3} دس$

$= \int \left(س^{2} + 3س + 9\right) دس$

$= \frac{س^{3}}{3} + \frac{3}{2}س^{2} + 9س + جـ$

⑪ $\int \frac{س^{2} - 9س}{\sqrt{س} - 3} دس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{س(س - 9)}{\sqrt{س} - 3} دس$

$= \int \frac{س\cancel{(\sqrt{س} - 3)}(\sqrt{س} + 3)}{\cancel{\sqrt{س} - 3}} دس$

$= \int س\left(س^{\frac{1}{2}} + 3\right) دس = \int \left(س^{\frac{3}{2}} + 3س\right) دس$

$= \frac{2}{5}س^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}س^{2} + جـ = \frac{2}{5}\sqrt{س^{5}} + \frac{3}{2}س^{2} + جـ$

⑫ $\int \frac{(2 - س)^{3}}{س\sqrt{س}} دس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{8 - 12س + 6س^{2} - س^{3}}{س^{\frac{3}{2}}} دس$

$= \int \left(8س^{-\frac{3}{2}} - 12س^{-\frac{1}{2}} + 6س^{\frac{1}{2}} - س^{\frac{3}{2}}\right) دس$

$= 8 \times -2س^{-\frac{1}{2}} - 12 \times 2س^{\frac{1}{2}} + 6 \times \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}س^{\frac{5}{2}} + جـ$

$= \frac{-16}{\sqrt{س}} - 24\sqrt{س} + 4\sqrt{س^{3}} - \frac{2}{5}\sqrt{س^{5}} + جـ$

⑬ $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 1} دس$ (كتاب)

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

الحل $= \int \frac{س - س^{\frac{3}{2}}}{س^{\frac{1}{2}} - 1}\, دس$

$= \int \frac{س\,(1 - س^{\frac{1}{2}})}{س^{\frac{1}{2}} - 1}\, دس$

$= \int س \times \frac{\cancel{1 - س^{\frac{1}{2}}}}{س^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\cancel{1 - س^{\frac{1}{2}}}}\, دس$

$= \int \frac{س}{س^{\frac{1}{2}}}\, دس = \int س^{\frac{1}{2}}\, دس$

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ج = \frac{2}{3}\sqrt{س^{3}} + ج$

$\boxed{ط٢}$ ← إخراج √س عامل مشترك من البسط

قاعدة (٥)

$\int (أس + ب)^{ن}\, دس$ ، أ ≠ صفر ، ن ≠ −١

$= \frac{(أس + ب)^{ن+1}}{أ \times (ن + 1)} + ج$

مثال (٥) جد التكاملات التالية

① $\int (٥ + ٣س)^{٤}\, دس$ (كتاب)

الحل $= \frac{(٥ + ٣س)^{٥}}{١٥} + ج$

② $\int \frac{٥\, دس}{(١ - ٤س)^{٣}}$

الحل $= \int ٥\,(١ - ٤س)^{-٣}\, دس$

$= \frac{٥ \times (١ - ٤س)^{-٢}}{٨} + ج = \frac{٥}{٨\,(١ - ٤س)^{٢}} + ج$

③ $\int \sqrt[٣]{٢س - ١}\, دس$

الحل $= \int (٢س - ١)^{\frac{1}{3}}\, دس$

$= \frac{٣}{٤}\, \frac{(٢س - ١)^{\frac{4}{3}}}{٢} + ج$

$= \frac{٣}{٨} \sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}}$

④ $\int \frac{1}{س^{٢} + ٦س + ٩}\, دس$

الحل $= \int \frac{1}{(س + ٣)^{٢}}\, دس$

$= \int (س + ٣)^{-٢}\, دس$

$= \frac{(س + ٣)^{-1}}{-1} + ج = \frac{-1}{س + ٣} + ج$

⑤ $\int \frac{س - ١}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٣}}\, دس$

الحل $= \int \frac{س - ١}{(س - ١)^{٦}}\, دس$

$= \int (س - ١)^{-٥}\, دس = \frac{(س - ١)^{-٤}}{-٤} + ج$

$= \frac{-1}{٤\,(س - ١)^{٤}} + ج$

⑥ $\int (٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥)^{٥}\, دس$ (كتاب)

الحل $= \int \left((٢س + ٥)^{٢}\right)^{٥}\, دس$

$= \int (٢س + ٥)^{١٠}\, دس = \frac{(٢س + ٥)^{١١}}{٢٢} + ج$

⑦ $\int س^{٨} \left(\frac{٢}{س} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٤}\, دس$

الحل $= \int س^{٨} \left(\frac{٢س - ١}{س^{٢}}\right)^{٤}\, دس$

$= \int \cancel{س^{٨}} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{\cancel{س^{٨}}}\, دس$

$= \int (٢س - ١)^{٤}\, دس = \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} + ج$

⑧ $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}\, دس$ (كتاب)

الحل $= \int س \sqrt[٣]{\frac{٥ - س}{س^{٣}}}\, دس$

$= \int \cancel{س} \times \frac{\sqrt[٣]{٥ - س}}{\cancel{س}}\, دس = \int (٥ - س)^{\frac{1}{3}}\, دس$

$= \frac{-٣}{٤} (٥ - س)^{\frac{4}{3}} = \frac{-٣}{٤} \sqrt[٣]{(٥ - س)^{٤}} + ج$

⑨ $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}\, دس$ (كتاب)

الحل

$\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}} \times \frac{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}\, دس$

$= \int \frac{\cancel{\text{٥س}}\left(\sqrt{\text{٧س+٣}} - \sqrt{\text{٢س+٣}}\right)}{\cancel{\text{٥س}}}\ \text{دس}$

$= \int \left((\text{٧س+٣})^{\frac{1}{2}} - (\text{٢س+٣})^{\frac{1}{2}}\right) \text{دس}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{(\text{٧س+٣})^{\frac{3}{2}}}{7} - \frac{2}{3} \times \frac{(\text{٢س+٣})^{\frac{3}{2}}}{2} + \text{ج}$

$= \frac{2}{21}\sqrt{(\text{٧س+٣})^{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{(\text{٢س+٣})^{3}} + \text{ج}$

قاعدة (٦)
تكامل الاقترانات الدائرية

ق(س)	$\int$ ق(س) دس
جاس	− جتاس + ج
جتاس	جاس + ج
قا²س	ظاس + ج
قتا²س	− ظتاس + ج
قاس ظاس	قاس + ج
قتاس ظتاس	− قتاس + ج

ملاحظة :
إذا كانت الزاوية خطية (أس + ب) يتم قسمة ناتج التكامل على معامل الزاوية (أ)
توضيح :
$\int$ جتا(٣س − ٥) دس = $\frac{1}{3}$ جا(٣س − ٥) + ج

متطابقات هامة جداً

(١) ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

(٢) ظتاس = $\frac{1}{\text{ظاس}}$ = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

(٣) قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$

(٤) قتاس = $\frac{1}{\text{جاس}}$

(٥) جا²س = $\frac{1}{2}$(١ − جتا٢س)

(٦) جتا²س = $\frac{1}{2}$(١ + جتا٢س)

(٧) جا²س + جتا²س = ١

(٨) ظا²س = قا²س − ١

(٩) ظتا²س = قتا²س − ١

(١٠) قا²س = ١ + ظا²س

(١١) قتا²س = ١ + ظتا²س

(١٢) جا٢س = ٢جاس جتاس

(١٣) جتا٢س = جتا²س − جا²س
= ١ − ٢جا²س
= ٢جتا²س − ١

(١٤) جتاس جتاص = $\frac{1}{2}$(جتا(س+ص) + جتا(س−ص))

(١٥) جاس جاص = $\frac{1}{2}$(جتا(س+ص) − جتا(س−ص))

(١٦) جاس جتاص = $\frac{1}{2}$(جا(س+ص) + جا(س−ص))

(١٧) جاس جتاس = $\frac{1}{2}$ جا٢س

مثال (٦١) : جد التكاملات التالية

(١) $\int$(جاس − ٤جتاس + ٥قتا²س) دس (كتاب)

الحل = − جتاس − ٤جاس − ٥ظتاس + ج

(٢) $\int$(قا٣س ظا٣س + قا²٥س) دس (كتاب)

الحل = $\frac{1}{3}$ قا٣س + $\frac{1}{5}$ ظا٥س + ج

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

③ ∫ (جتا٤س ظا٤س + ١/جتا²٦س) دس (كتاب)

الحل = ∫ جتا٤س × جا٤س/جتا٤س + ١/جتا²٦س دس

= ∫ جا٤س + قا²٦س دس

= -١/٤ جتا٤س + ١/٦ ظا٦س + ج

④ ∫ ٣/(١ - جا²(١-٣س)) دس

الحل = ∫ ٣/جتا²(١-٣س) دس

= ∫ ٣ قا²(١-٣س) دس

= ٣ × ١/-٣ ظا(١-٣س) + ج = - ظا(١-٣س) + ج

⑤ ∫ قاس (ظاس + جتاس) دس كتاب

الحل = ∫ (قاس ظاس + ١) دس

= قاس + س + ج

⑥ ∫ ظا²س دس (كتاب)

الحل = ∫ (قا²س - ١) دس

= ظاس - س + ج

⑦ ∫ ظتا²س دس

الحل = ∫ (قتا²س - ١) دس

= - ظتاس - س + ج

⑨ ∫ (قا²س - ظا²س) دس

الحل

= ∫ دس = س + ج

⑩ ∫ (جتا³س - ٥)/(١ - جا²س) دس (كتاب)

الحل = ∫ (جتا³س - ٥)/جتا²س دس

= ∫ (جتاس - ٥ قا²س) دس

= جاس - ٥ ظاس + ج

⑪ ∫ جتا٢س/(جا²س جتا²س) دس (كتاب)

الحل = ∫ (جتا²س - جا²س)/(جا²س جتا²س) دس

= ∫ جتا²س/(جا²س جتا²س) - جا²س/(جا²س جتا²س) دس

= ∫ (قتا²س - قا²س) دس

= - ظتاس - ظاس + ج

⑫ ∫ (١ - جا²س)/(جا²(س/٢) جتا²(س/٢)) دس (كتاب)

الحل = ∫ جتا²س/(١/٢ جاس)² دس = ∫ ٤ جتا²س/جا²س دس

= ∫ ٤ ظتا²س دس = ٤ ∫ (قتا²س - ١) دس

= ٤ (- ظتاس - س) + ج

⑬ ∫ جا²(س/٢) دس

الحل = ∫ ١/٢ (١ - جتاس) دس

= ١/٢ (س - جاس) + ج

⑭ ∫ جتا²٢س دس

الحل = ∫ ١/٢ (١ + جتا٤س) دس

= ١/٢ (س + ١/٤ جا٤س) + ج

⑮ ∫ جا٤س جتا٨س دس

الحل = ∫ ١/٢ (جا١٢س + جا-٤س) دس

= ١/٢ (-١/١٢ جتا١٢س + ١/٤ جتا-٤س) + ج

= -١/٢٤ جتا١٢س + ١/٨ جتا٤س + ج

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

(١٦) ∫ جا٦س جا٤س دس

الحل = ∫ $\frac{1}{2}$ (جتا١٠س − جتا٢س) دس

= $-\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{10}$ جا١٠س − $\frac{1}{2}$ جا٢س) + جـ

= $-\frac{1}{20}$ جا١٠س + $\frac{1}{4}$ جا٢س + جـ

(١٧) ∫ جتا٣س جتا٧س دس (كتاب)

الحل = ∫ $\frac{1}{2}$ (جتا١٠س + جتا−٤س) دس

= ∫ $\frac{1}{2}$ (جتا١٠س + جتا٤س) دس

= $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{10}$ جا١٠س + $\frac{1}{4}$ جا٤س) + جـ

= $\frac{1}{20}$ جا١٠س + $\frac{1}{8}$ جا٤س + جـ

(١٨) ∫ $\frac{3}{1 - \text{جتا٢س}}$ دس (كتاب)

الحل ∫ $\frac{3}{1-(1-2\,\text{جا}^2\text{س})}$ دس

= ∫ $\frac{3}{2\,\text{جا}^2\text{س}}$ دس = ∫ $\frac{3}{2}$ قتا²س دس

= $-\frac{3}{2}$ ظتاس + جـ

(١٩) ∫ (جتاس − جاس)² دس (كتاب)

الحل ∫ (جتا²س − ٢ جاس جتاس + جا²س) دس

= ∫ (١ − جا٢س) دس

= س + $\frac{1}{2}$ جتا٢س + جـ

(٢٠) ∫ (ظتاس − قتاس)² دس (كتاب)

الحل = ∫ (ظتا²س − ٢ ظتاس قتاس + قتا²س) دس

= ∫ (قتا²س − ١ − ٢ ظتاس قتاس + قتا²س) دس

= ∫ (٢قتا²س − ١ − ٢ ظتاس قتاس) دس

= −٢ ظتاس − س + ٢ قتاس + جـ

(٢١) ∫ ($\frac{5}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{3}{\text{جتا}^2\text{س}}$) دس (كتاب)

الحل = ∫ (٥ قتا²س − ٣ قا²س) دس

= −٥ ظتاس − ٣ ظاس + جـ

(٢٢) ∫ $\frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}$ دس (كتاب) + وزارة ٢٠١٠ ص

الحل = ∫ $\frac{\text{جتا(٢س+س)}}{\text{جتاس}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جتا٢س جتاس} - \text{جا٢س جاس}}{\text{جتاس}}$ دس

= ∫ ($\frac{\text{جتا٢س جتاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جا٢س جاس}}{\text{جتاس}}$) دس

= ∫ (جتا٢س − $\frac{\text{٢جاس}\ \cancel{\text{جتاس}}\ \text{جاس}}{\cancel{\text{جتاس}}}$) دس

= ∫ (جتا٢س − ٢جا²س) دس

= ∫ (جتا٢س − (١ − جتا٢س)) دس

= ∫ (٢جتا٢س − ١) دس

= جا٢س − س + جـ

(٢٣) ∫ $\frac{1 - \text{جا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ دس (كتاب)

الحل = ∫ $\frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} - \text{٢جاس جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جا}^2\text{س} - \text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س} - \text{جاس جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جاس (جاس − جتاس)} - \text{جتاس (جاس − جتاس)}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

= ∫ $\frac{\text{(جاس − جتاس)}\ \cancel{\text{(جاس − جتاس)}}}{\cancel{\text{جاس − جتاس}}}$ دس

= ∫ (جاس − جتاس) دس = − جتاس − جاس + جـ

حـ٢ ∫ $\frac{\text{جا}^2\text{س} - \text{٢جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

تحلل عبارة تربيعية بمتغيرين

(24) $\int \frac{\text{جا س} + \text{جتا}^2\text{س}}{1 - \text{جا}^2\text{س}}\, \text{د س}$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{\text{جا س} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{س}} + 1\, \text{د س}$

$= \int (\text{ظا س قا س} + 1)\, \text{د س} = \text{قا س} + \text{س} + \text{جـ}$

(25) $\int (\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س})\, \text{د س}$ (كتاب)

الحل $= \int (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})\, \text{د س}$

$= \int \text{جتا 2س د س} = \frac{1}{2}\,\text{جا 2س} + \text{جـ}$

ملاحظة :

في حال وجود 1±جا ، 1±جتا ، 1±قا ، 1±قتا في المقام نضرب بالمرافق

مثال (7) : جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{1}{1 + \text{جتا س}}\, \text{د س}$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{1}{1 + \text{جتا س}} \times \frac{1 - \text{جتا س}}{1 - \text{جتا س}}\, \text{د س}$

$= \int \frac{1 - \text{جتا س}}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\, \text{د س} = \int \frac{1 - \text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

$= \int (\text{قتا}^2\text{س} - \text{ظتا س قتا س})\, \text{د س}$

$= -\,\text{ظتا س} + \text{قتا س} + \text{جـ}$

③ $\int \frac{1}{\text{قا س} - 1}\, \text{د س}$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{1}{\text{قا س} - 1} \times \frac{\text{قا س} + 1}{\text{قا س} + 1}\, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{قا س} + 1}{\text{قا}^2\text{س} - 1}\, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{قا س} + 1}{\text{ظا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

$= \int \left(\frac{\text{قا س}}{\text{ظا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{ظا}^2\text{س}}\right) \text{د س}$

$= \int (\text{قا س ظتا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س})\, \text{د س}$

$= \int (\text{ظتا س قتا س} + \text{قتا}^2\text{س} - 1)\, \text{د س}$

$= -\,\text{قتا س} - \text{ظتا س} - \text{س} + \text{جـ}$

(26) $\int \frac{\text{جا س}}{1 - \text{جا س}}\, \text{د س}$ (كتاب)

الحل $\int \frac{\text{جا س}}{1 - \text{جا س}} \times \frac{1 + \text{جا س}}{1 + \text{جا س}}\, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جا س}(1 + \text{جا س})}{1 - \text{جا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جا س}(1 + \text{جا س})}{\text{جتا}^2\text{س}}\, \text{د س}$

$= \int \text{ظا س} \times \frac{1 + \text{جا س}}{\text{جتا س}}\, \text{د س}$

$= \int \text{ظا س}(\text{قا س} + \text{ظا س})\, \text{د س}$

$= \int (\text{ظا س قا س} + \text{ظا}^2\text{س})\, \text{د س}$

$= \int (\text{ظا س قا س} + \text{قا}^2\text{س} - 1)\, \text{د س}$

$= \text{قا س} + \text{ظا س} - \text{س} + \text{جـ}$

الجزء الثاني : مشتقة التكامل غير المحدود

① ص = $\int$ ق(س) دس

$\frac{دص}{دس}$ = ق(س)

مشتقة التكامل غير المحدود تساوي ما داخل رمز التكامل

② للتخلص من رمز التكاملا غير المحدود نتبع احدى مايلي

أ) نكامل حسب قواعد التكامل

ب) نشتق طرفي العلاقة

مثال (٨)

إذا كان ص = $\int \sqrt[3]{س^٢+٣س+٥}$ دس

أوجد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١}$

الحل نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس} = \sqrt[3]{س^٢+٣س+٥}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١} = \sqrt[3]{٣}$

مثال (٩) إذا كان $\int$ ق(س) دس = س^٤ + س − ١

فإن قَ(١) تساوي

أ) ١٢ ب) −١٢ جـ) −٥ د) ٥

الحل نشتق الطرفين

ق(س) = ٤س^٣ + ١

قَ(س) = ١٢س^٢ ، قَ(١) = ١٢

مثال (١٠)

إذا كان $\int$ ق(س) دس = جا^{٢}٢س + ظاس + جـ

أوجد قَ($\frac{\pi}{٤}$)

الحل نشتق الطرفين

ق(س) = ٢جا٢س × ٢ جتا٢س + قا^{٢}س

ق(س) = ٢ جا٤س + قا^{٢}س

قَ(س) = ٨ جتا٤س + ٢قا^{٢}س ظاس

قَ($\frac{\pi}{٤}$) = −٤

مثال (١١) ٢٠٠٩ ش

إذا كان ق(س) اقتران متصل على مجاله وكان $\int$(ظا^{٢}س − قا^{٢}س) ق(س) دس = ٣ − س^٢ ، جد قاعدة ق(س)

الحل نشتق الطرفين

(ظا^{٢}س − قا^{٢}س) ق(س) = −٢س

− ق(س) = −٢س

$\boxed{ق(س) = ٢س}$

مثال (١٢) (٢٠١٢ ش) + كتاب

إذا كان $\int$(ق(س) + ٢) دس = س^٣ + ب س^٢ + ٩

وكان ق(١) = ٧ جد قيمة الثابت ب

الحل نشتق الطرفين

ق(س) + ٢ = ٣س^٢ + ٢ب س

ق(١) + ٢ = ٣ + ٢ب

٩ = ٣ + ٢ب $\boxed{ب = ٣}$

كتاب إذا كان $\int$ قَ(س) دس = جا^{٢}س − أ جتاس + ١
قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ ، جد قيمة (أ) $\boxed{-٢}$

مثال (١٣) (كتاب)

إذا كان $\int$ ق(س) دس = جاس − جتاس + ٣

أثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

الحل نشتق الطرفين

$ق(س) = جتاس + جاس$

$ق'(س) = -جاس + جتاس$

$ق(\frac{\pi}{2}) - ق'(\frac{\pi}{2}) = ١ - -١ = ٢$

الجزء الثالث :
العلاقة بين التكامل والإشتقاق

① $\int ق'(س)\, دس = ق(س) + جـ$

② $\int ق''(س)\, دس = ق'(س) + جـ$

③ تطبيقات هندسية

* ميل المماس = المشتقة الأولى
* $\int$(ميل المماس) دس = ق(س) + جـ

مثال (١٤)

إذا كان $\int ق'(س)\, دس = س^٢ + ٣س + ٣$ ، $ق(١) = ٢$ ، أوجد $ق(٤)$

الحل $\int ق'(س)\, دس = ق(س) + جـ$

$ق(س) + جـ = س^٢ + ٣س + ٣$

$ق(١) + جـ = ١ + ٣ + ٣$

$٢ + جـ = ٧ \leftarrow \boxed{جـ = ٥}$

$ق(س) = س^٢ + ٣س - ٢$

$ق(٤) = ٢٦$

مثال (١٥)

إذا كان $ق'(س) = ٢س - جتاس$ ،
أوجد $ق(س)$ ، حيث $ق(\frac{\pi}{٢}) = ٤$

الحل $ق(س) = \int ق'(س)\, دس$

$ق(س) = \int (٢س - جتاس)\, دس$

$ق(س) = س^٢ - جاس + جـ$

$ق(\frac{\pi}{٢}) = ٤$

$٤ = \frac{\pi^٢}{٤} - جا\frac{\pi}{٢} + جـ \leftarrow جـ = ٥ - \frac{\pi^٢}{٤}$

$ق(س) = س^٢ - جاس + ٥ - \frac{\pi^٢}{٤}$

مثال (١٦) ٢٠١٤ ش

إذا كان $ق''(س) = جاس$ ، $ق'(\pi) = -١$ ،
$ق(\pi) = $ صفر ، جد قاعدة الاقتران $ق(س)$

الحل $ق'(س) = \int ق''(س)\, دس$

$ق'(س) = \int جاس\, دس$

$ق'(س) = -جتاس + جـ$

$ق'(\pi) = -١ \leftarrow ١ + جـ = -١ \quad \boxed{جـ = -٢}$

$ق'(س) = -جتاس - ٢$

$ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int (-جتاس - ٢)\, دس$

$ق(س) = -جاس - ٢س + جـ^*$

$ق(\pi) = ٠ \leftarrow ٠ - ٢\pi + جـ^* = ٠$

$جـ^* = ٢\pi$

$ق(س) = -جاس - ٢س + ٢\pi$

مثال (١٧) (كتاب)

إذا كان $\int (ق'(س) + ٢س)\, دس = س^٣ + أس^٢ + ١$
وكان $ق'(١) = ٥$ ، $ق(٢) = ٧$ ، جد $ق(-٢)$

الحل $ق(س) + س^٢ + جـ = س^٣ + أس^٢ + ١$

$ق'(س) + ٢س = ٣س^٢ + ٢أس$

$ق'(١) = ٥ \leftarrow ٥ + ٢ = ٣ + ٢أ$

$\boxed{أ = ٢}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

ق(٢) = ٧ ← ٧ + ٤ + جـ = ٨ + ٤ + ٤ + ١

١١ + جـ = ١٧ ← $\boxed{\text{جـ} = ٦}$

ق(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٥

ق(−٢) = −٨ + ٤ − ٥ = −٩

مثال (١٨) كتاب

إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة ، حيث أن قَ(س) = ٣س^{٢} − ٢ ، وكانت النقطة (١،٠) تقع على منحناه ، جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل ق(س) = ∫ قَ(س) د س

ق(س) = ∫(٣س^{٢} − ٢) د س

ق(س) = س^{٣} − ٢س + جـ

ق(١) = ١ ← جـ = ١

ق(س) = س^{٣} − ٢س + ١

مثال (١٩) (كتاب)

إذا كان قً(س) = $\frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}$ ، ومنحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٤،٠) ، وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١) ، جد قاعدة ق(س)

الحل ق(٤) = ٠ ، قَ(٤) = ١

قَ(س) = ∫ قً(س) دس = ∫ $\frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}$ د س

قَ(س) = ∫ ٦ س$^{-\frac{١}{٢}}$ د س = ١٢ س$^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

قَ(س) = ١٢$\sqrt{\text{س}}$ + جـ

قَ(٤) = ١ ← ٢٤ + جـ = ١ $\boxed{\text{جـ} = −٢٣}$

قَ(س) = ١٢$\sqrt{\text{س}}$ − ٢٣

ق(س) = ∫ قَ(س) د س = ∫(١٢$\sqrt{\text{س}}$ − ٢٣) د س

ق(س) = ∫(١٢ س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٢٣) د س

ق(س) = ٨ $\sqrt{\text{س}^{٣}}$ − ٢٣س + جـ*

ق(٤) = ٠ ← ٦٤ − ٩٢ + جـ* = ٠

جـ* = ٢٨

ق(س) = ٨ $\sqrt{\text{س}^{٣}}$ − ٢٣س + ٢٨

مثال (٢٠) (كتاب)

إذا كان قً(س) = −٤ جتا٢س ، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (−٢) عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ، جد قاعدة الاقتران ق.

الحل قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ ، ق($\frac{\pi}{٢}$) = −٢

قَ(س) = ∫ قً(س) د س = ∫ −٤ جتا٢س د س

قَ(س) = −٢جا٢س + جـ

قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٠ ← ٠ + جـ = ٠ $\boxed{\text{جـ} = ٠}$

قَ(س) = −٢جا٢س

ق(س) = ∫ قَ(س) د س = ∫ −٢ جا٢س د س

ق(س) = جتا٢س + جـ*

ق($\frac{\pi}{٢}$) = −٢ ← −١ + جـ* = −٢ $\boxed{\text{جـ*} = −١}$

ق(س) = جتا٢س − ١

مثال (٢١)

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي ٥س^{٤} + ٢س + ٣ ، جد قاعدة الاقتران ق(س) ، حيث ق(٢) = ٣

الحل ميل المماس = قَ(س) = ٥س^{٤} + ٢س + ٣

ق(س) = ∫ قَ(س) د س = ∫(٥س^{٤} + ٢س + ٣) د س

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س + جـ

ق(٢) = ٣ ← جـ = −٣٩

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س − ٣٩

الجزء الرابع: تطبيقات فيزيائية

اشتقاق ←

ف ع ت

→ تكامل

ف(ن) = ∫ ع(ن) د ن

ع(ن) = ∫ ت(ن) د ن

ملاحظات

① السرعة الابتدائية = ع(٠)

② عند تحرك جسم من السكون ع(٠) = ٠

③ أقصى ارتفاع عندما ع = ٠

④ إذا قذف جسم من ارتفاع معين (م) نحو الأعلى فإن

* ف(٠) عن سطح الأرض = م
* عند الارتطام في الأرض ف(ن) = ٠

⑤ جسم ساكن ← ع(ن) = ٠ ، ف(٠) = ٠

مثال (٢٢)

إذا كان تسارع جسم بعد (ن) من الثواني ت = ٦ن + ٤ ، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد (٣) ثوان من بدء الحركة علماً أن السرعة الابتدائية للجسم ٢م/ث وأنه قطع ٢١م في أول ثانيتين من بدء حركته

الحل ت(ن) = ٦ن + ٤ ، ع(٠) = ٢ ، ف(٢) = ٢١

ع(ن) = ∫ ت(ن) د ن = ∫(٦ن + ٤) د ن

ع(ن) = ٣ن^2 + ٤ن + جـ

ع(٠) = ٢ ← جـ = ٢

ع(ن) = ٣ن^2 + ٤ن + ٢

ف(ن) = ∫ ع(ن) د ن = ∫(٣ن^2 + ٤ن + ٢) د ن

ف(ن) = ن^3 + ٢ن^2 + ٢ن + جـ*

ف(٢) = ٢١ ← جـ* = ١

ف(ن) = ن^3 + ٢ن^2 + ٢ن + ١

ف(٣) = ٥٢ م

مثال (٢٣)

قذف جسم رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ث ، وتسارع مقداره -١٠م/ث^2 ، إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي (٨٠م) ، جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض

الحل ت(ن) = -١٠ ، ع(٠) = ٤٠ ، ف(١) = ٨٠

ع(ن) = ∫ ت(ن) د ن = ∫ -١٠ د ن = -١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ← جـ = ٤٠ ، ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن

ف(ن) = ∫ ع(ن) د ن = ∫(٤٠ - ١٠ن) د ن

ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^2 + جـ*

ف(١) = ٨٠ ← جـ* = ٤٥

ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^2 + ٤٥

المطلوب ف|ع=٠

ع(ن) = ٠
٤٠ - ١٠ن = ٠
ن = ٤

ف(٤) = ١٢٥ م

مثال (24)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته عند أي لحظة تساوي ع جتا2ن ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما يسكن لحظياً لأول مرة .

الحل ع(ن) = 4 جتا2ن ، جسم ساكن ← ع = 0
ف(0) = 0

ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن = $\int$ 4 جتا2ن دن

ف(ن) = 2جا2ن + جـ

ف(0) = 0 ← جـ = 0 ، ف(ن) = 2جا2ن

المطلوب ف(ن$_1$)

ع = 0 ← 4 جتا2ن = 0 ← جتا2ن = 0

2ن = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

ن = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$

ن = $\frac{\pi}{4}$ نأخذ الزمن الأقل (يسكن لأول مرة)

ف($\frac{\pi}{4}$) = 2جا$\frac{\pi}{2}$ = 2 وحدة مسافة

مثال (25) (2001)

قذف جسيم رأسياً للأعلى من قمة برج يرتفع 30م عن سطح الأرض ، فكانت سرعته بعد (ن) ثانية ع = 40 - 10ن ، أوجد ارتفاع هذا الجسيم عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

الحل ع(ن) = 40 - 10ن ، ف(0) = 30

ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن = $\int$ (40 - 10ن) دن

ف(ن) = 40ن - 5ن^2 + جـ

ف(0) = 30 ← جـ = 30

ف(ن) = 40ن - 5ن^2 + 30

ف(1) = 65 م

مثال (26) (كتاب + 2013 ص)

قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه 45 متر عن سطح الأرض للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 40م/ث وبتسارع ثابت -10م/ث^2 ، جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود إلى سطح الأرض

الحل المطلوب ن عندما ف = 0

ف(0) = 45م ، ع(0) = 40م/ث

ت(ن) = -10

ع(ن) = $\int$ ت(ن) دن = $\int$ -10 دن = -10ن + جـ

ع(0) = 40 ← جـ = 40 ع(ن) = 40 - 10ن

ف(ن) = $\int$ ع(ن) دن = $\int$ (40 - 10ن) دن

ف(ن) = 40ن - 5ن^2 + جـ*

ف(0) = 45 ← جـ* = 45

ف(ن) = 40ن - 5ن^2 + 45

ف(ن) = 0

40ن - 5ن^2 + 45 = 0

ن^2 - 8ن - 9 = 0

(ن - 9)(ن + 1) = 0

ن = 9 ن = -1 تهمل

ن = 9 ثواني

مثال (27) 2016 ش

إذا كان تسارع جسيم يعطى بالعلاقة ت(ن) = 3ن + 2 وكانت سرعته الابتدائية 6م/ث وإزاحته التي يقطعها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة = 12م
جد إزاحته التي يقطعها بعد (3) ثوانٍ من بدء الحركة

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

ورقة عمل (١)

السؤال الأول :

أوجد التكاملات التالية

① $\int$ س^2 (س $-\frac{1}{س}$)^2 دس

الجواب $\frac{1}{5}$س^5 $-\frac{2}{3}$س^3 + س + جـ

② $\int \frac{س^2 - ٣س - ٢٨}{٧ - س}$ دس

الإجابة $-\frac{1}{2}$س^2 − ٤ س + جـ

③ $\int$ جا $\frac{\pi}{3}$ دس $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} س + جـ}$

٢٠١٠ ص

④ $\int \frac{دس}{جا^2 س - ١}$ $\boxed{- ظاس + جـ}$

٢٠٠٠

⑤ $\int$ (جتاس + جاس)^2 دس

الجواب س $-\frac{1}{2}$ جتا٢س + جـ

٢٠١٤ ش

⑥ $\int$ (ظاس + قاس)^2 دس

الجواب: ٢ظاس + ٢قاس − س + جـ

⑦ $\int \frac{جتا^2 س}{(جتاس ظاس)^2}$ دس

الجواب : − ظتاس − ظاس + جـ

⑧ $\int \frac{دس}{جتا٢س + جا^2 س}$ $\boxed{ظاس + جـ}$

⑨ $\int \frac{(س^2 - ٣)^2}{س^2}$ دس

الجواب : $\frac{1}{3}$ س^3 − ٦س $-\frac{9}{س}$ + جـ

⑩ $\int \frac{1}{1 + جاس}$ دس

الجواب : ظاس − قاس + جـ

⑪ $\int \frac{دس}{\sqrt{س+1} - \sqrt{س}}$

الجواب : $\frac{2}{3}\sqrt{(س+1)^3}$ + $\frac{2}{3}\sqrt{س^3}$ + جـ

كتاب

⑫ $\int \frac{س^3 - ٤س^2}{\sqrt{س} - ٢}$ دس

الجواب $\frac{2}{7}\sqrt{س^7}$ + $\frac{2}{3}$س^3 + جـ

كتاب

⑬ $\int$ س^4 (٥ $-\frac{3}{س}$)^4 دس

الجواب $\frac{(٥س - ٣)^5}{25}$ + جـ

كتاب

⑭ $\int$ (١ − س) (س − ١)^5 دس

الجواب $-\frac{1}{7}$ (س − ١)^7 + جـ

السؤال الثاني :

ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، قَ(س) = ٣ − ٦س ، جد قاعدة ق(س) علماً أن قً(−١) = ٢ ، ق(٣) = ٣

الجواب : ق(س) = $\frac{3}{2}$س^2 − س^3 + ٨ س − ١١

١٩٩٨

السؤال الثالث :

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، جد قاعدة ق(س) علماً أن قً(س) = ٣س + ١ ، النقطة (٠ ، ١) نقطة حرجة للإقتران ق(س) .

الجواب ق(س) = $\frac{1}{2}$س^3 + $\frac{1}{2}$س^2 + ١

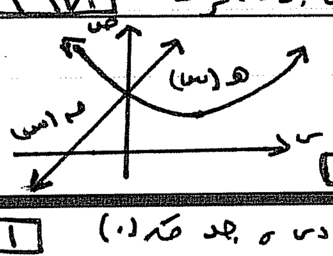
٢٠١٤ ش

السؤال الرابع :

تتحرك كرة على خط مستقيم بتسارع مقداره $\frac{2}{\sqrt{ن}}$ + ن م/ث^2 حيث (ن) الزمن بالثواني إذا كانت سرعتها ٣٠ م/ث عندما ن = ٩ ثوان ، وأن الكرة قطعت مسافة مقدارها (٢٣٣ م) بعد (٤) ثوان من بدء الحركة ، جد المسافة التي قطعتها الكرة بعد (٩) ثوان من بدء الحركة $\boxed{١٧١ م}$

٢٠٠٠

السؤال الخامس



م(س) = ٣ س + ٤

هـَ(س) = ٢س − ٣

جد هـ(٥) . $\boxed{١٤}$

السؤال السادس

٢٠١٦ ص $\int$ ق(س) دس = ٢س + جاس − $\int$ جتاس قً(س) دس ، جد قَ(٠) $\boxed{١}$

الدرس الثاني : معكوس المشتقة

تعريف :

إذا كان ق(س) اقتران متصل على الفترة [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوساً للمشتقة للاقتران ق(س) إذا كان

$\boxed{م'(س) = ق(س)}$ لكل س ∈ (أ ، ب)

توضيح :

① معكوس المشتقة للاقتران ق(س) هو التكامل غير المحدود للاقتران ق

م(س) = $\int$ ق(س) دس

$\frac{د}{دس}$ (م(س) + جـ) = م'(س) = ق(س)

② مشتقة معكوس مشتقة ق(س) تساوي ق(س)

$\boxed{م'(س) = ق(س)}$

③ يوجد عدد لا نهائي من اقترانات معكوسة المشتقة للاقتران ق(س) و الفرق بين كل منها مقدار ثابت

④ الصورة العامة لمعكوس المشتقة

$\boxed{م(س) + جـ}$

مثال (١) جد معكوس المشتقة للاقتران ق(س) في كل من الآتي

① ق(س) = ٤س^{٢} + قا^{٢}س

الحل م(س) = $\int$ ق(س) دس

م(س) = $\int$ (٤س^{٢} + قا^{٢}س) دس

م(س) = ٤ $\frac{س^{٣}}{٣}$ + ظاس + جـ

② ق(س) = $\frac{س^{٣} - ٥س^{٢}}{س}$

الحل م(س) = $\int$ ق(س) دس = $\int$ $\frac{س^{٣} - ٥س^{٢}}{س}$ دس

م(س) = $\int$ (س^{٢} − ٥س) دس = $\frac{س^{٣}}{٣}$ − $\frac{٥س^{٢}}{٢}$ + جـ

كتاب
③ ق(س) = ٣س^{٢} ، م(٢) = ٥

الحل م(س) = $\int$ ق(س) دس

م(س) = $\int$ ٣س^{٢} دس ← م(س) = س^{٣} + جـ

م(٢) = ٥ ← ٨ + جـ = ٥ جـ = −٣

م(س) = س^{٣} − ٣

مثال (٢) كتاب

بين أن م(س) هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) في كل من الآتي

① م(س) = س^{٤} − جاس − $\frac{١}{٣}$ ، ق(س) = ٤س^{٣} − جتاس

الحل ق(س) = ٤س^{٣} − جتاس متصل على ح

م'(س) = ٤س^{٣} − جتاس = ق(س)

∴ م(س) معكوس مشتقة ق(س)

② م(س) = $\frac{س}{س+١}$ ، ق(س) = (س+١)$^{-٢}$ ، س ≠ −١

الحل ق(س) = (س+١)$^{-٢}$ متصل على مجاله ح − {−١}

م'(س) = $\frac{س+١ - س}{(س+١)^{٢}}$ = $\frac{١}{(س+١)^{٢}}$

م'(س) = (س+١)$^{-٢}$ = ق(س)

∴ م(س) معكوس مشتقة ق(س)

المعلم : حمد الله الطوباسي
0797662728 - 0779358752

مثال (2)

إذا كان ق(س) اقتران متصل على ح ، حيث ق(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} ، وكان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) ، أوجد م$'$(١)

الحل م$'$(س) = ق(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢}

م$'$(١) = ٤ + ٣ = ٧

مثال (3) ١٩٩٧

إذا كان ق(س) متصل على [٠ ، ٣] ، وكان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) ، حيث م(س) = ٤س^{٣} − ٢س ، جد ∫(٢ − ق(س)) دس

الحل ∫(٢ − ق(س)) دس = ∫٢ دس − ∫ق(س) دس

= ٢س − (م(س) + جـ)

= ٢س − (٤س^{٣} − ٢س + جـ) = ٤س − ٤س^{٣} − جـ

مثال (4) كتاب

إذا كان م(س) = ٢س^{٤} + $\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$ معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) ، جد ق(١)

الحل ق(س) = م$'$(س)

ق(س) = ٨س^{٣} + $\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}}$

ق(١) = ٨ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١٧}{٢}$

مثال (5) كتاب

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة ق(س) حيث ق(س) = ظتا س + ١ ، جد م$''$($\frac{\pi}{٤}$)

الحل م$'$(س) = ق(س)

م$''$(س) = ق$'$(س)

م$''$(س) = − قتا^{٢}س

م$''$($\frac{\pi}{٤}$) = −٢

مثال (6)

إذا كان ق(س) = أس + ب ، وكان م(س) هو معكوس مشتقة ق(س) ، جد قاعدة ق(س) علماً أن م$'$(−٢) = ٣ ، م$''$(−٢) = ٥

الحل م$'$(س) = ق(س) = أس + ب

م$'$(−٢) = ٣ ← −٢أ + ب = ٣

م$''$(س) = ق$'$(س) = أ

م$''$(−٢) = ٥ ← $\boxed{\text{أ} = ٥}$

−٢أ + ب = ٣ ← −١٠ + ب = ٣ $\boxed{\text{ب} = ١٣}$

ق(س) = ٥س + ١٣

مثال (7) كتاب

إذا كان الاقترانان م$_{١}$(س) ، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق ، وكان م$_{١}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س + ٥ ، م$_{٢}$(٢) = ٤ ، جد قاعدة م$_{٢}$(س)

الحل م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س + جـ

م$_{٢}$(٢) = ٤ ← ١٢ − ٤ + جـ = ٤ ← $\boxed{\text{جـ} = -٤}$

م$_{٢}$(س) = ٣س^{٢} − ٢س − ٤

مثال (8) ٢٠١١ ش

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل أوجد (٣م − هـ)$'$(س)

الحل (٣م − هـ)$'$(س) = ٢م$'$(س) − هـ$'$(س)

= ٢ق(س) − ق(س) = ق(س)

مثال (9) (كتاب)

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق وكان ل(س) = ٣م(س) − ٥هـ(س) جد ل$'$(س)

الحل ل(س) = ٣م(س) − ٥هـ(س)

ل'(س) = ٣م'(س) − ٥هـ'(س)

ل'(س) = ٣ ص(س) − ٥ ص(س) = −٢ ص(س)

مثال (١٠) (كتاب)

اذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ص(س)، وكان ل(س) = م(س) − هـ(س)، جد ل'(٤)

الحل ل'(س) = م'(س) − هـ'(س)

ل'(س) = ص(س) − ص(س) = صفر

ل'(٤) = صفر

مثال (١١)

اكتب ٣ اقترانات معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ص(س) = ٣س^2 + ١

الحل م(س) = ∫ ص(س) دس = ∫ (٣س^2 + ١) دس

م(س) = س^3 + س + جـ

م$_1$(س) = س^3 + س + ٩

م$_2$(س) = س^3 + س − ١٤

يمكن كتابة عدد لا نهائي من الاقترانات و الفرق بينهما الثابت (جـ)

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

الرياضيات

التكامل و تطبيقاته
توجيهي الفرع العلمي و الصناعي

ورقة عمل (٢)

السؤال الأول : كتاب

جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الآتية

① ق(س) = قاس جتاس

الجواب م(س) = س + جـ

② ق(س) = ٥ + ٥ظا^{٢}س

الجواب م(س) = ٥ظاس + جـ

السؤال الثاني :

إذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران المتصل ق(س)، حيث

∫ م(س) دس = جا^{٢}س + جـ ، جد ق($\frac{\pi}{٢}$)

$\boxed{-٢}$

السؤال الثالث :

إذا كان م(س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} − س^{٣} + ٧ ، هو

معكوساً لمشتقة ق(س) المتصل ع ح

جد ق″(١)

$\boxed{٦}$

السؤال الرابع :

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س)

معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل

ق(س) ، وكان ع(س) = ٣هـ(س) − م(س) + ٦

جد عَ(س)

$\boxed{٢ق(س)}$

السؤال الخامس : ١٣ ٢٠ ش

إذا كان م(س) معكوساً للمشتقة

الاقتران المتصل ق(س) ، حيث

م(س) = ظتاس + ١ ، فإن ق($\frac{\pi}{٤}$) تساوي

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) −٢ د) ٢

السؤال السادس :

إذا كان الاقترانان م١(س) ، م٢(س)

معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س)

حيث م١(س) = س^{٣} − ٥س + ٣ ، أوجد

قاعدة م٢(س) علماً أن م٢(١) = −٤ .

الجواب م٢(س) = س^{٣} − ٥س + ٤

الدرس الثالث: التكامل المحدود

تعريف:

التكامل المحدود للاقتران ق'(س) في الفترة [أ، ب] هو الفرق بين قيمتي التكامل غير المحدود للاقتران ق'(س) عند القيمتين أ، ب

$$\int_{أ}^{ب} ق'(س)\, دس = ق(س) \Big|_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$$

حيث أ: الحد السفلي للتكامل

ب: الحد العلوي للتكامل

ملاحظات:

(1) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = م(س) \Big|_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ)$

(2) $\int_{أ}^{ب} ق'(س)\, دس = ق(س) \Big|_{أ}^{ب} = ق(ب) - ق(أ)$

(3) $\int_{أ}^{ب} ق''(س)\, دس = ق'(س) \Big|_{أ}^{ب} = ق'(ب) - ق'(أ)$

(4) عند اجراء التكامل المحدود لا تكتب ثابت التكامل (جـ)

(5) قيمة التكامل المحدود مقدار ثابت

(6) إذا أمكن ايجاد قيمة التكامل في الفترة [أ، ب] $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ يكون ق(س) قابل للتكامل في الفترة [أ، ب]

(7) $\boxed{\int_{أ}^{ب} جـ\, دس = جـ(ب - أ)}$

مثال (1)

إذا كانت ق'(س) مشتقة الاقتران ق(س) المعرف في [1، 6]، أوجد $\int_{1}^{6} ق'(س)\, دس$ علماً أن ق(1) = 8، ق(6) = -5

الحل: $\int_{1}^{6} ق'(س)\, دس = ق(س) \Big|_{1}^{6}$

$= ق(6) - ق(1) = -5 - 8 = -13$

مثال (2) كتاب

إذا كان ق(س) اقتران متصل، حيث ق(1) = 4، ق(2) = 12، $\int_{1}^{2} أ\, ق'(س)\, دس = 16$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل: $أ \int_{1}^{2} ق'(س)\, دس = 16$

$أ\ ق(س) \Big|_{1}^{2} = 16$

$أ\ (ق(2) - ق(1)) = 16$

$أ(12 - 4) = 16 \leftarrow 8أ = 16$ $\boxed{أ = 2}$

مثال (3)

إذا كان ق'(س) = $3س^2$ هي مشتقة ق(س) المعرف في [-3، 2]، أوجد قيمة ق(2) - ق(-3)

الحل: $ق(س) = \int ق'(س)\, دس = \int 3س^2\, دس$

$ق(س) = س^3 + جـ$

$ق(2) - ق(-3) = 8 + جـ - (-27 + جـ)$

$= 35$

مثال (٤)

جد قيمة كل من التكاملات الآتية

① $\int_{-١}^{٣} ٥\, د س = ٥(٣ - -١) = ٢٠$

② $\int_{٢}^{٦} -٣\, د س = -٣(٦-٢) = -١٢$

③ $\int_{٠}^{٢} \pi\, د س = \pi(٢-٠) = ٢\pi$

④ $\int_{٣}^{٦} \left(\frac{١}{٢}س - ٦\right) د س$

الحل $\frac{١}{٤}س^{٢} - ٦س \Big|_{٣}^{٦}$

$= \left(\frac{٣٦}{٤} - ٣٦\right) - \left(\frac{٩}{٤} + ١٨\right) = \frac{-١٨٩}{٤}$

⑤ $\int_{٠}^{١} (س^{٢} + ٣س)\, د س$

الحل $\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} \Big|_{٠}^{١}$

$= \left(\frac{١}{٣} + \frac{٣}{٢}\right) - (٠) = \frac{١١}{٦}$

⑥ $\int_{١}^{٢} (س^{٢} - س^{٣})\, د س$

الحل $\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤} \Big|_{١}^{٢}$

$= \left(\frac{٨}{٣} - \frac{١٦}{٤}\right) - \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right) = \frac{-١٧}{١٢}$

⑦ $\int_{١}^{١٦} \sqrt{س}\, د س$

الحل $= \int_{١}^{١٦} س^{\frac{١}{٢}}\, د س = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{١٦}$

$= \frac{٢}{٣} (\sqrt{س})^{٣} \Big|_{١}^{١٦} = \frac{٢}{٣}(٦٤-١) = ٤٢$

⑧ $\int_{١}^{٢} \sqrt[٣]{٢س - ٣}\, د س$

الحل $= \int_{١}^{٢} (٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}}\, د س$

$= \frac{٣}{٨} (٢س - ٣)^{\frac{٤}{٣}} \Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{٣}{٨} \left(\sqrt[٣]{٢س - ٣}\right)^{٤} \Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{٣}{٨} (١ - ١) =$ صفر

⑨ $\int_{-٢}^{٠} \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}\, د س$

الحل $= \int_{-٢}^{٠} \frac{(س - ٣)\cancel{(س + ٣)}}{\cancel{س + ٣}}\, د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - ٣س \Big|_{-٢}^{٠} = ٠ - ٨ = -٨$

⑩ $\int_{١}^{٣} \frac{٧}{س^{٢} + ٤س + ٤}\, د س$

الحل $= \int_{١}^{٣} \frac{٧\, د س}{(س + ٢)^{٢}} = \int_{١}^{٣} ٧(س + ٢)^{-٢}\, د س$

$= \frac{٧(س + ٢)^{-١}}{-١} \Big|_{١}^{٣} = \frac{-٧}{س + ٢} \Big|_{١}^{٣}$

$= \frac{-٧}{٥} - \frac{-٧}{٣} = \frac{١٤}{١٥}$

⑪ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتا س - جا س)\, د س$

الحل $= (جا س + جتا س) \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (١ + ٠) - (٠ + ١) =$ صفر

⑫ $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ظتا س}{جا س}\, د س$

الحل $= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} ظتا س\ قتا س\ د س$

$= -قتا س \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = \sqrt{٢} - ١$

⑬ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا^{٢} س\, د س$

الحل $= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} جتا ٢س\right) د س$

$= \left(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٤} جا ٢س\right) \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= \left(\frac{\pi}{٤} - ٠\right) - (٠) = \frac{\pi}{٤}$

(١٤) ٢٠١٠ ص $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{دس}}{1-\text{جتاس}}$

الحل $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\text{جتاس}} \times \frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\text{جتاس}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\text{قتا}^2\text{س} + \text{ظتاس قتاس})\ \text{دس}$

$= (-\text{ظتاس} - \text{قتاس}) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - (-1-\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(١٥) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{دس}$

الحل $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جاس}+\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\text{جتاس} - \text{جاس})\cancel{(\text{جتاس}+\text{جاس})}}{\cancel{\text{جاس}+\text{جتاس}}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\ \text{دس}$

$= \text{جاس} + \text{جتاس} \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (1+0) - (0+1) = \text{صفر}$

(١٦) ٢٠١١ ص $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \text{جا}^2\text{س جتا}^2\text{س دس}$

الحل $= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{1}{2}\text{جا٢س}\right)^2 \text{دس} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{4}\text{جا}^2\text{٢س دس}$

$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{1}{8}(1 - \text{جتا٤س})\ \text{دس}$

$= \frac{1}{8}\left(\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا٤س}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$

$= \frac{1}{8}\left((0) - \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\text{جا}\frac{-4\pi}{3}\right)\right)$

$= \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{64}$

مثال (٥) ٢٠١٧ ش

اذا كان $\text{م(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}$ معكوساً لمشتقة الاقتران $\text{ق(س)} = \text{س هـ}^{\text{س}}$ وكان $\int_{1}^{2} (\text{٤ق(س)} + \text{هـ}^2)\ \text{دس} + \int_{4}^{\text{هـ}^2} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-2}\ \text{دس}$ يساوي (٢٨)، جد قيمة الثابت (أ)

الحل $\int_{1}^{2} (\text{٤ق(س)} + \text{هـ}^2)\ \text{دس} + \int_{4}^{\text{هـ}^2} \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-2}\ \text{دس} = ٢٨$

$\text{٤م(س)} + \text{هـ}^2\text{س} \Big|_{1}^{2} + \frac{\text{أ}}{\text{هـ}-2}(\text{هـ}^2 - 4) = ٢٨$

$\text{٤م(٢)} + \text{٢هـ}^2 - \text{٤م(١)} - \text{هـ}^2 + \frac{\text{أ}}{\cancel{\text{هـ}-2}} \times \cancel{(\text{هـ}-2)}(\text{هـ}+2)$

$4(\text{٢هـ}^2 - \text{هـ}^2) + \text{٢هـ}^2 - 4(-1) + \text{أ}(\text{هـ}+2) = ٢٨$

$\text{٦هـ}^2 + 4 + \text{أ}(\text{هـ}+2) = ٢٨$

$\text{أ}(\text{هـ}+2) = ٢٤ - \text{٦هـ}^2$

$\text{أ} = \frac{6(4-\text{هـ}^2)}{\text{هـ}+2} = \frac{6(2-\text{هـ})\cancel{(2+\text{هـ})}}{\cancel{\text{هـ}+2}}$

$\text{أ} = 6(2-\text{هـ})$

مثال (٦)

اذا كان $\int_{1}^{\text{٢أ}} 3\ \text{دس} = 6$ ، فإن قيمة أ

أ) $\frac{3}{2}$ ب) $-\frac{3}{2}$ جـ) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{3}{4}$

الحل $3(\text{٢أ} - 1) = 6 \leftarrow \text{٢أ} - 1 = 2$

$\text{٢أ} = 3 \leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{3}{2}}$

مثال (٧) كتاب

اذا كان $\int_{\text{أ}}^{2} \text{٢أ دس} = -٣٠$ جد قيم (أ)

الحل $\text{٢أ}(2 - \text{أ}) = -٣٠ \leftarrow \text{٢أ} - \text{أ}^2 = -١٥$

$\text{أ}^2 - \text{٢أ} - ١٥ = 0 \leftarrow (\text{أ}-5)(\text{أ}+3) = 0$

$\text{أ} = 5$ ، $\text{أ} = -3$ ، $\text{أ} = \{-3 ، 5\}$

مثال (٨) كتاب

اذا كان $\int_{\text{أ}+1}^{\text{٢}+\text{٣أ}} 5\ \text{دس} = ٤٠$ ، جد قيمة (أ)

الحل $5(2 + \text{٣أ} - 1 - \text{أ}) = ٤٠$

$1 + \text{٢أ} = 8 \leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{7}{2}}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

مثال (٩)

إذا كان $\int_{1}^{2}$ (٢س - م) = ١٥ ، جد قيمة (م)

الحل س² - م س $\Big|_{1}^{2}$ = ١٥

(٤ - ٢م) - (١ - م) = ١٥ ← $\boxed{\text{م} = -١٢}$

مثال (١٠)

إذا كان $\int^{3}$ (م س² - ٩) د س = -١٠ ،

جد قيمة الثابت (م)

الحل م س³/٣ - ٩س $\Big|^{3}$ = -١٠

٩م - ٢٧ = -١٠ ← ٩م = ١٢ ← $\boxed{\text{م} = \frac{٤}{٣}}$

مثال (١١)

إذا كان $\int_{1}^{\text{م}}$ (٢س² + ٦س) د س = ٠

أوجد قيم (م)

الحل ٢/٣ س³ + ٣س² $\Big|_{1}^{\text{م}}$ = ٠

٢/٣ م³ + ٣م² - (٢/٣ + ٣) = ٠

٢/٣ م³ + ٣م² - ١١/٣ = ٠

٢م³ + ٩م² - ١١ = ٠

م = ١

م³	م²	م	ثابت
٢	٩	٠	-١١
	٢	١١	١١
٢	١١	١١	٠

١

(م - ١)(٢م² + ١١م + ١١) = ٠

م = $\frac{-١١ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

م = (١ ، $\frac{-١١ + \sqrt{٣٣}}{٤}$ ، $\frac{-١١ - \sqrt{٣٣}}{٤}$)

مثال (١٢) كتاب

جد كثير الحدود ق(س) من الدرجة الأولى حيث

$\int_{-1}^{1}$ ق(س) د س = ٤ ، $\int_{1}^{3}$ ق(س) د س = ٢

الحل ق(س) = م س + ب

$\int_{-1}^{1}$ (م س + ب) د س = م س²/٢ + ب س $\Big|_{-1}^{1}$ = ٤

(م/٢ + ب) - (م/٢ - ب) = ٤

٢ب = ٤ $\boxed{\text{ب} = ٢}$

$\int_{1}^{3}$ (م س + ٢) د س = م س²/٢ + ٢س $\Big|_{1}^{3}$ = ٢

(٩م/٢ + ٦) - (م/٢ + ٢) = ٢

٤م = -٢ ← $\boxed{\text{م} = -\frac{١}{٢}}$

ق(س) = -١/٢ س + ٢

مثال (١٣) كتاب + ٢٠١٣ ص

إذا كان $\int_{-1}^{3}$ (٣س² - ٢$\int_{0}^{\text{جـ}}$ ٣م دم) دس = -٢٠

أوجد قيم جـ

الحل $\int_{0}^{\text{جـ}}$ ٣م دم = ٣م²/٢ $\Big|_{0}^{\text{جـ}}$ = ٣جـ²/٢

$\int_{-1}^{3}$ (٣س² - ٣جـ²) دس = -٢٠

س³ - ٣جـ² س $\Big|_{-1}^{3}$ = -٢٠

(٢٧ - ٩جـ²) - (-١ + ٣جـ²) = -٢٠

٢٨ - ١٢جـ² = -٢٠ ← ١٢جـ² = ٤٨

جـ = ٢ ، -٢

مثال (١٤) كتاب + ٢٠١١ ش

إذا كان ق(س) كثير حدود وكان

ق(٠) = ٥ ، ق″(س) = ٤ ، $\int_{0}^{1}$ ق′(س) دس = ٣

أوجد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل ق′(س) = ∫ ق″(س) دس = ∫ ٤ دس

ق′(س) = ٤س + جـ

$\int_{0}^{1}$ ق′(س) دس = $\int_{0}^{1}$ (٤س + جـ) دس = ٣

٢س² + جـ س $\Big|_{0}^{1}$ = ٣ ← ٢ + جـ = ٣ ← $\boxed{\text{جـ} = ١}$

ق′(س) = ٤س + ١

ق(س) = ∫ ق′(س) دس = ∫ (٤س + ١) دس

ق(س) = ٢س² + س + جـ*

ق(٠) = ٥ ← جـ* = ٥

ق(س) = ٢س² + س + ٥

مثال (١٥) ٢٠٠٠

أوجد قيم العدد الصحيح الموجب (ن)

علماً أن $\int_{-1}^{1} س^{ن} \, دس = ٢ \times \int_{0}^{1} س^{ن} \, دس$

الحل $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big|_{-١}^{١} = ٢ \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\Big|_{٠}^{١}$

$\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١} - \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} = ٢\left(\frac{(١)^{ن+١}}{ن+١} - ٠\right)$

$\frac{١}{ن+١} - \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} = \frac{٢}{ن+١}$

$١ - (-١)^{ن+١} = ٢$

$(-١)^{ن+١} = -١$

نفرض م = ن + ١

$(-١)^{م}$ = ١ ← م زوجي
= -١ ← م فردي

∴ ن + ١ = عدد فردي

ن = عدد فردي - ١   ن = الأعداد الزوجية

ن = الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة

ن = ٢، ٤، ٦، ... م

الجزء الثاني : خواص التكامل المحدود

الخاصية الأولى :

الخاصية الخطية

① $\int_{أ}^{ب} جـ \, م(س) \, دس = جـ \times \int_{أ}^{ب} م(س) \, دس$

② $\int_{أ}^{ب} \left(م(س) \pm هـ(س)\right) دس$

$= \int_{أ}^{ب} م(س) \, دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, دس$

وتعمم لأكثر من اقترانين

مثال (١٦)

إذا كان $\int_{١}^{٢} ٢ \, م(س) \, دس = ١٠$ ، أوجد

$\int_{١}^{٢} \left(م(س) + ٦\right) دس$

الحل $\int_{١}^{٢} ٢ \, م(س) \, دس = ٢ \int_{١}^{٢} م(س) \, دس = ١٠$

$\int_{١}^{٢} م(س) \, دس = ٥$

$\int_{١}^{٢} \left(م(س) + ٦\right) دس = \int_{١}^{٢} م(س) \, دس + \int_{١}^{٢} ٦ \, دس$

$٥ + ٦(٢ - ١) = \boxed{١١}$

مثال (١٧)

إذا كان $\int_{٠}^{٢} \left(م(س) - ٢س\right) دس = ٢٠$

أوجد $\int_{٠}^{٢} ٣ \, م(س) \, دس$

الحل $\int_{٠}^{٢} \left(م(س) - ٢س\right) دس = \int_{٠}^{٢} م(س) \, دس - \int_{٠}^{٢} ٢س \, دس$

$\int_{٠}^{٢} م(س) \, دس - س^{٢}\Big|_{٠}^{٢} = ٢٠$

$\int_{٠}^{٢} م(س) \, دس - ٤ = ٢٠ \leftarrow \int_{٠}^{٢} م(س) \, دس = ٢٤$

$\int_{٠}^{٢} ٣ \, م(س) \, دس = ٣ \times \int_{٠}^{٢} م(س) \, دس$

$= ٣ \times ٢٤ = ٧٢$

مثال (١٨)

إذا كان $\int_{-٣}^{٢} \left(٢ \, م(س) + ٢س - ٣\right) دس = ٨$

أوجد $\int_{-٣}^{٢} \left(٤ \, م(س) - ٣س^{٢}\right) دس$

الحل $\int_{-٣}^{٢} \left(٢ \, م(س) + ٢س - ٣\right) دس = ٢\int_{-٣}^{٢} م(س) \, دس + \int_{-٣}^{٢} (٢س - ٣) \, دس$

$٢\int_{-٣}^{٢} م(س) \, دس + س^{٢} - ٣س\Big|_{-٣}^{٢} = ٨$

$٢\int_{-٣}^{٢} م(س) \, دس - ٢٠ = ٨$

$\int_{-٣}^{٢} م(س) \, دس = ١٤$

$\int_{-٣}^{٢} \left(٤ \, م(س) - ٣س^{٢}\right) دس = ٤\int_{-٣}^{٢} م(س) \, دس - \int_{-٣}^{٢} ٣س^{٢} \, دس$

$= ٤ \times ١٤ - س^{٣}\Big|_{-٣}^{٢}$

$= ٥٦ - ٣٥ = ٢١$

مثال (١٩) كتاب

إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢ \, م(س) + \frac{١}{س^{٢}} - ٦\right) دس = ١٢$

جد $\int_{١}^{٣} \left(\frac{م(س)}{٢} - س^{٢}\right) دس$

الحل $٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{١}^{٣} (\text{س}^{-٢} - ٦)\,\text{دس} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} - ٦\text{س}\Big|_{١}^{٣} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \left(\frac{١}{\text{س}} + ٦\text{س}\right)\Big|_{١}^{٣} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \frac{٣٤}{٣} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{٧٠}{٣}$

$\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{٣٥}{٣}$

$\int_{١}^{٣} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - \text{س}^{٢}\right)\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big|_{١}^{٣}$

$= \frac{٣٥}{٦} - \frac{٢٦}{٣} = \frac{٣٥}{٦} - \frac{٥٢}{٦} = -\frac{١٧}{٦}$

مثال (٢٠) ٢٠١٠ ص

إذا كان $\int_{١}^{أ} \sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = ١$ ، حيث (أ) ثابت، أوجد $\int_{١}^{أ} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$ ، أ > ٠

الحل $\int_{١}^{أ} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} = \int_{١}^{أ} \frac{٢\text{س}}{\sqrt{\text{س}}} \times \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int_{١}^{أ} \frac{٢\text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}\,\text{دس} = ٢\int_{١}^{أ} \sqrt{\text{س}}\,\text{دس} = \boxed{٢}$

مثال (٢١)

إذا كان أ $= \int_{٠}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$ ، ب $= \int_{٠}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

أوجد ① أ + ب ② ب − أ

الحل ① أ + ب $= \int_{٠}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} + \int_{٠}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{\pi} (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{دس} = \int_{٠}^{\pi} ١\,\text{دس}$

$= \pi - ٠ = \pi$

② ب − أ $= \int_{٠}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} - \int_{٠}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

ب − أ $= \int_{٠}^{\pi} (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{\pi} \text{جتا}٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س}\Big|_{٠}^{\pi}$

$= \frac{١}{٢}(٠ - ٠) = \text{صفر}$

الخاصية الثانية:
خاصية الحدود

① $\int_{أ}^{أ} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{صفر}$

إذا تساوت حدود التكامل فإن قيمة التكامل تساوي صفر

② $\int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -\int_{ب}^{أ} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

إذا عكست حدود التكامل تعكس إشارة قيمة التكامل

مثال (٢١)

أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{٥}^{٥} \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}\,\text{دس} = \text{صفر}$

② $\int_{\pi}^{\pi} \text{جاس قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} = \text{صفر}$

③ $\int_{-١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -٤$ ، جد $\int_{٣}^{-١} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل $\int_{٣}^{-١} \text{ق(س)}\,\text{دس} = -\int_{-١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٤$

مثال (٢٢) ٢٠١١ ش

$\int_{٠}^{٣} \left(٣\text{س}^{٢} - \int_{٢}^{٢} \text{هـ(س)}\,\text{دس}\right)\text{دس}$ يساوي

أ) ١٦ ب) −١٦ جـ) −٢٧ د) ٢٧

الحل $\int_{٠}^{٣} ٣\text{س}^{٢} - ٠\,\text{دس} = \text{س}^{٣}\Big|_{٠}^{٣} = ٢٧$

مثال (٢٣)

إذا كان $\int_{-٢أ}^{٣أ+١٠} ٢\,\text{ق(س)} = \text{صفر}$ ، جد قيمة (أ)

الحل الحدود متساوية

$-٢أ = ٣أ + ١٠$

$-٥أ = ١٠$ $\boxed{أ = -٢}$

مثال (٢٤)

إذا كان $\int_{٨}^{٤س} ق(س)\,دس = م س^{٢} + ٥ س + ٢$

أوجد قيمة (م) علماً أن $\int_{٨}^{٤س} ق(س)\,دس = صفر$

الحل $\int_{٨}^{٤س} ق(س) = ٠ \leftarrow ٨ = ٤س \leftarrow س = ٢$

$٤م + ١٠ + ٢ = ٠ \quad ، \quad م = -٣$

مثال (٢٥)

إذا كان $\int_{٠}^{٢} (ق(س) + ٤)\,دس = ١٨$

أوجد $\int_{٢}^{٠} (٥ ق(س) + ٢س)\,دس$

الحل $\int_{٠}^{٢} (ق(س) + ٤)\,دس = \int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٠}^{٢} ٤\,دس = ١٨$

$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس + ٨ = ١٨$

$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس = ١٠$

$\int_{٢}^{٠} (٥ ق(س) + ٢س)\,دس$

$= ٥\int_{٢}^{٠} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٠} ٢س\,دس$

$= ٥ \times -١٠ + س^{٢}\Big|_{٢}^{٠}$

$= -٥٠ - ٤ = -٥٤$

مثال (٢٦) كتاب

إذا كان $\int_{١}^{٣} (٤ ق(س) + ٧ هـ(س))\,دس = ١٩$

$\int_{١}^{٣} ٣ ق(س)\,دس = ٩$ ، جد $\int_{٣}^{١} ٥ هـ(س)\,دس$

الحل $٣\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٩$

$\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٣$

$٤\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١٩$

$١٢ + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١٩$

$٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ٧ \leftarrow \int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١$

$\int_{٣}^{١} ٥ هـ(س)\,دس = -٥\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس$

$= -٥ \times ١ = -٥$

مثال (٢٧)

إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{١}^{٣} ٢ هـ(س)\,دس = ١٠$

أوجد $\int_{٣}^{١} (هـ(س) - ٢ ق(س) + ٢س - ٤)\,دس$

الحل $٢\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١٠ \leftarrow \int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ٥$

المطلوب

$\int_{٣}^{١} هـ(س)\,دس - ٢\int_{٣}^{١} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{١} (٢س - ٤)\,دس$

$= -٥ - ٢ \times -٦ + س^{٢} - ٤س\Big|_{٣}^{١}$

$= -٥ + ١٢ + (١ - ٤) - (٩ - ١٢) = ٧$

مثال (٢٨) ٢٠٠٧ ش + كتاب

إذا كان $م = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس$ ، $ب = \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$

أوجد م + ب

الحل $م + ب = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس - \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} (قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س)\,دس$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} دس$

$= \frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٢}$

مثال (٢٨) كتاب + ٢٠١٥ ص

إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) ، وكان $\int_{-١}^{٣} (م(س) - هـ(س))\,دس =$ (١٢) ، جد $\int^{٤} ٢س\,م(س)\,دس + \int_{٤} ٢س\,هـ(س)\,دس$

الحل م(س) − هـ(س) = جـ ثابت التكامل

$\int_{-١}^{٣} (م(س) - هـ(س))\,دس = \int_{-١}^{٣} جـ\,دس = ١٢$

$٤جـ = ١٢ \leftarrow \boxed{جـ = ٣}$

$\int^{٤} ٢س\,م(س)\,دس - \int^{٤} ٢س\,هـ(س)\,دس$

$= \int_{2}^{4} (3س\, م(س) - 3س\, هـ(س))\, دس$

$= \int_{2}^{4} 3س\, (م(س) - هـ(س))\, دس$

$= \int_{2}^{4} 3 \cdot 2س\, دس = \int_{2}^{4} 6س\, دس$

$= 3س^2 \Big|_{2}^{4} = 192$

الخاصية الثالثة :

خاصية الإضافة

إذا كان م قابل للتكامل على فترة تحتوي على الأعداد أ، ب، جـ فإن

$\int_{أ}^{جـ} م(س)\, دس = \int_{أ}^{ب} م(س)\, دس + \int_{ب}^{جـ} م(س)\, دس$

* ليس شرط أن تقع ب في المنتصف لكن شرط أن تقع في الفترة (أ ، جـ)

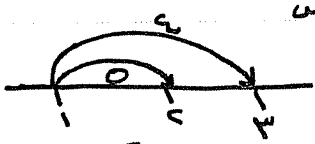
* تستخدم هذه الخاصية لإيجاد تكاملات الاقتران المتشعب واقترانات القيمة المطلقة واقترانات أكبر عدد صحيح

مثال (٢٩)

إذا كان $\int_{1}^{2} م(س)\, دس = 5$ ، $\int_{1}^{3} م(س)\, دس = 4$

أوجد $\int_{2}^{3} م(س)\, دس$

الحل



$\int_{2}^{3} م(س)\, دس = \int_{1}^{3} م(س)\, دس - \int_{1}^{2} م(س)\, دس$

$= 4 - 5 = -1$

مثال (٣٠) كتاب + ٢٠١٥ ش

إذا كان $\int_{9}^{2} (2\, م(س) + 3)\, دس = -17$ ، $\int_{2}^{5} \frac{م(س)}{3}\, دس = -2$ ، جد $\int_{5}^{9} (4\, م(س) - 1)\, دس$

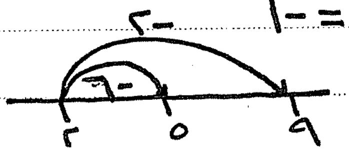
الحل $\int_{9}^{2} (2\, م(س) + 3)\, دس = -1$

$2\int_{2}^{9} م(س)\, دس + \int_{2}^{9} 3\, دس = 17$

$2\int_{2}^{9} م(س)\, دس + 21 = 17 \leftarrow \int_{2}^{9} م(س)\, دس = -2$

$\int_{2}^{5} \frac{م(س)}{3}\, دس = -3 \leftarrow \frac{1}{3}\int_{2}^{5} م(س)\, دس = -2$

$\int_{2}^{5} م(س)\, دس = -6$



$\int_{5}^{9} (4\, م(س) - 1)\, دس = 4\int_{5}^{9} م(س)\, دس - \int_{5}^{9} 1\, دس$

$4(-2+6) - (9-5) = 16 - 4 = 12$

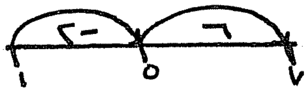
مثال (٣٠ب) ٢٠١٣ ص

إذا كان $\int_{5}^{1} م(س)\, دس = 2$ ، $\int_{5}^{7} م(س)\, دس = -6$

فإن $\int_{1}^{7} \frac{م(س)}{2}\, دس$ يساوي

أ) -3 ب) 3 جـ) 4 د) -4

الحل



$\int_{1}^{7} \frac{م(س)}{2}\, دس = \frac{1}{2} \int_{1}^{7} م(س)\, دس$

$= \frac{1}{2}(-2+6) = 2$

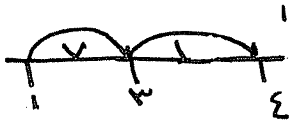
مثال (٣١) ٢٠١١ ص

إذا كان $\int_{1}^{3} (2\, م(س) - 4)\, دس = 6$

وكان $\int_{3}^{4} م(س)\, دس = -1$ ، أوجد $\int_{1}^{4} (م(س) - 2س)\, دس$

الحل $\int_{1}^{3} (2\, م(س) - 4)\, دس = 2\int_{1}^{3} م(س)\, دس - \int_{1}^{3} 4\, دس$

$2\int_{1}^{3} م(س)\, دس - 8 = 6 \leftarrow \int_{1}^{3} م(س)\, دس = 7$



المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

$$\int_{١}^{٤} (ق(س) - ٣س^2)\, دس = \int_{١}^{٤} ق(س)\, دس - \int_{١}^{٤} ٣س^2\, دس$$

$$= \int_{١}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\, دس - س^3 \Big|_{١}^{٤}$$

$$= ٧ + ١ - (١٦ - ١) = -٧$$

مثال (٣٢) ٢٠٠١

إذا كان ق(س) اقتران متصل على ح

وكان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس - \int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{٣}^{١} ق(س)\, دس$

أوجد قيمة كل من أ ، ب على الترتيب

الحل $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \int_{٣}^{١} ق(س)\, دس + \int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس$

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -\left(\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس\right)$$

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = -\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$$

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \int_{٥}^{١} ق(س)\, دس$$

أ = ٥ ، ب = ١

مثال (٣٣)

$$ق(س) = \begin{cases} -س & ، س \leq ٠ \\ ٣س^2 + ١ & ، س > ٠ \end{cases}$$

أوجد $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس$

الحل $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{-٢}^{٠} ق(س)\, دس + \int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس$

$$= \int_{-٢}^{٠} -س\, دس + \int_{٠}^{٣} (٣س^2 + ١)\, دس$$

$$= \frac{-س^2}{٢} \Big|_{-٢}^{٠} + س^3 + س \Big|_{٠}^{٣}$$

$$= (٠ - -٢) + (٢٧ + ٣) - ٠ = ٣٢$$

مثال (٣٤)

$$ق(س) = \begin{cases} ٦ - ٤س & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٣س^2 & ، ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

أوجد ما يلي

① $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, دس$ ② $\int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس$

③ $\int_{٠}^{٥} ق(س)\, دس$ ④ $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس$

الحل ① $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{٠}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\, دس$

$$= \int_{٠}^{٣} (٦ - ٤س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ٣س^2\, دس$$

$$= ٦س - ٢س^2 \Big|_{٠}^{٣} + س^3 \Big|_{٣}^{٤}$$

$$= ٠ + ٣٧ = ٣٧$$

② $\int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{٣}^{٥} ٣س^2\, دس = س^3 \Big|_{٣}^{٥} = ٩٨$

③ $\int_{٠}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{٠}^{٣} (٦ - ٤س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ٣س^2\, دس$

$$= ٦س - ٢س^2 \Big|_{٠}^{٣} + س^3 \Big|_{٣}^{٥} = ٩٨$$

④ $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ق(س)\, دس$

$$= \int_{٢}^{٣} (٦ - ٤س)\, دس + \int_{٣}^{٥} ٣س^2\, دس$$

$$= ٦س - ٢س^2 \Big|_{٢}^{٣} + س^3 \Big|_{٣}^{٥}$$

$$= ٠ - (١٢ - ٨) + ٩٨ = ٩٤$$

مثال (٣٥)

أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{١}^{٤} |س^2 - ٩|\, دس$

الحل $س^2 - ٩ = ٠$ ، $س = \pm ٣$

$س^2 - ٩$	$٩ - س^2$	$س^2 - ٩$
+	−	+

(−٣ ، ٣ ؛ ① ، ④)

$$\int_{١}^{٤} |س^2 - ٩|\, دس = \int_{١}^{٣} (٩ - س^2)\, دس + \int_{٣}^{٤} (س^2 - ٩)\, دس$$

$$= ٩س - \frac{س^3}{٣} \Big|_{١}^{٣} + \frac{س^3}{٣} - ٩س \Big|_{٣}^{٤}$$

$$= (٢٧ - ٩) - (٩ - \frac{١}{٣}) + (\frac{٦٤}{٣} - ٣٦) - (٩ - ٢٧)$$

$$= \frac{٣٨}{٣}$$

② كتاب + ٢٠١٤ ش

$$\int_{٠}^{٣} س^2 - |س - ١|\, دس$$

الحل $\text{س} - ١ = ٠ \leftarrow \text{س} = ١$

$\text{س}^٢ - (١ - \text{س}) \qquad \text{س}^٢ - (\text{س} - ١)$

$- \; - \; | \; + \; +$ (١)

$= \int_{٠}^{١} (\text{س}^٢ + \text{س} - ١) \, \text{دس} + \int_{١}^{٣} (\text{س}^٢ - \text{س} + ١) \, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^٣}{٣} + \frac{\text{س}^٢}{٢} - \text{س} \Big|_{٠}^{١} + \frac{\text{س}^٣}{٣} - \frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{س} \Big|_{١}^{٣}$

$= (\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١) - ٠ + (\frac{٢٧}{٣} - \frac{٩}{٢} + ٣) - (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ١)$

$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١ + \frac{٢٧}{٣} - \frac{٩}{٢} + ٣ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١$

$= ١ - ٢ + ٣ + ٣ - \frac{٩}{٢} = \frac{١}{٢}$

③ $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٤} \, \text{دس}$ كتاب

الحل $= \int_{٢}^{٣} \sqrt{(٣\text{س} - ٢)^٢} \, \text{دس} = \int_{٢}^{٣} |٣\text{س} - ٢| \, \text{دس}$

$٣\text{س} - ٢ = ٠ \leftarrow \text{س} = \frac{٢}{٣}$

$٢ - ٣\text{س} \qquad ٣\text{س} - ٢$

$- \; \frac{٢}{٣} \quad ٢ \; + \; ٣$

$\int_{٢}^{٣} |٣\text{س} - ٢| \, \text{دس} = \int_{٢}^{٣} (٣\text{س} - ٢) \, \text{دس}$

$= \frac{٣\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س} \Big|_{٢}^{٣}$

$= (\frac{٢٧}{٢} - ٦) - (\frac{١٢}{٢} - ٤)$

$= \frac{٢٧}{٢} - ٨ = \frac{٢٧}{٢} - \frac{١٦}{٢} = \frac{١١}{٢}$

④ $\int_{٠}^{٣} \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤} \, \text{دس}$ كتاب

الحل $= \int_{٠}^{٣} \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢} \, \text{دس} = \int_{٠}^{٣} |\text{س} - ٢| \, \text{دس}$

$\text{س} - ٢ = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢$

$٢ - \text{س} \qquad \text{س} - ٢$

$٠ \; - \; ٢ \; + \; ٣$

$= \int_{٠}^{٢} (٢ - \text{س}) \, \text{دس} + \int_{٢}^{٣} (\text{س} - ٢) \, \text{دس}$

$= ٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \Big|_{٠}^{٢} + \frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س} \Big|_{٢}^{٣} = \frac{٥}{٢}$

⑤ ٢٠٠١ $\int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} |\text{جاس}| \, \text{دس}$

الحل $\text{جاس} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٠ ، \pi ، ٢\pi$

$\text{جاس} \qquad -\text{جاس}$

$٠ \; + \; + \; + \; \pi \; - \; - \; - \; \frac{٣\pi}{٢} \; - \; ٢\pi$

$= \int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} -\text{جاس} \, \text{دس} = \text{جتاس} \Big|_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} = \boxed{١}$

⑥ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + \text{جا}٢\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{دس}$ كتاب

الحل $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{\text{جا}^٢\text{س} + ٢\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^٢\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{(\text{جاس} + \text{جتاس})^٢}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|\text{جاس} + \text{جتاس}|}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$\text{جاس} + \text{جتاس} = ٠ \leftarrow \text{س} = \frac{٣\pi}{٤} ، \frac{٧\pi}{٤}$

$\text{جاس} + \text{جتاس}$

$٠ \; + \; + \; + \; \frac{\pi}{٢} \quad \frac{٣\pi}{٤} \quad \frac{٧\pi}{٤}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{دس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{دس} = \frac{\pi}{٢}$

مثال (٣٦): أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{-١}^{٣} [\frac{\text{س}}{٢} - ١] \, \text{دس}$

الحل $\frac{\text{س}}{٢} - ١ = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢ ، \text{ل} = ٢$

$-٢ \quad ٠ \quad ٢ \quad ٤$: $(-٢) \quad (-١) \quad (٠)$

$\int_{-١}^{٣} [\frac{\text{س}}{٢} - ١] \, \text{دس} = \int_{-١}^{٠} -٢ \, \text{دس} + \int_{٠}^{٢} -١ \, \text{دس} + \int_{٢}^{٣} ٠ \, \text{دس}$

$= -٢(٠ + ١) + -١(٢ - ٠) + ٠(٣ - ٢) = \boxed{-٤}$

② $\int_{٠}^{٣} [٢ - \text{س}] \, \text{دس}$

الحل $٢ - \text{س} = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢ ، \text{ل} = ١$

$٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣$: $(١) \quad ٠ \quad (-١)$

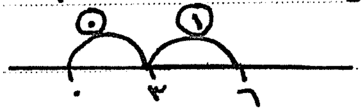
$\int_{٠}^{٣} [٢ - \text{س}] \, \text{دس} = \int_{٠}^{١} ١ \, \text{دس} + \int_{١}^{٢} ٠ \, \text{دس} + \int_{٢}^{٣} -١ \, \text{دس}$

$= ١(١ - ٠) + ٠ - ١(٣ - ٢) = \text{صفر}$

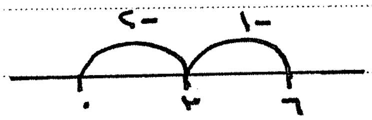
(٣) $\int_{٢}^{٦} ([\frac{١}{٣}س] - ٢)\, ءس$ ٢٠١٧ ص

الحل $\frac{١}{٣}س = ٠ \leftarrow س = ٠$ ، ل = ٣

$[\frac{١}{٣}س]$



$[\frac{١}{٣}س] - ٢$



$\int_{٢}^{٦} ([\frac{١}{٣}س] - ٢)\, ءس = \int_{٢}^{٣} -٢\, ءس + \int_{٣}^{٦} -١\, ءس$

$= -٢(٣-٢) - ١(٦-٣) = -٢ - ٣ = -٥$

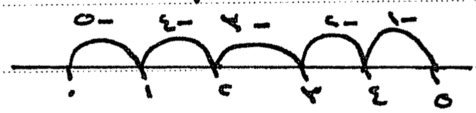
(٤) ٢٠١٧ ش

$ق(س) = \begin{cases} [س-٥]\,|س-١| & ، ٠ \le س < ٢ \\ \frac{٣}{\sqrt{س+١}} & ، ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$

جد $\int_{٠}^{٤} ق(س)\, ءس$

الحل

$[س-٥]$ س = ٥ ، ل = ١



$|س-١|$ س − ١ = ٠ ← س = ١

١ − س	س − ١
− − −	+ +

$ق(س) = \begin{cases} -٥(١-س) & ، ٠ \le س < ١ \\ -٤(س-١) & ، ١ \le س < ٢ \\ ٣(س+١)^{-\frac{١}{٢}} & ، ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$

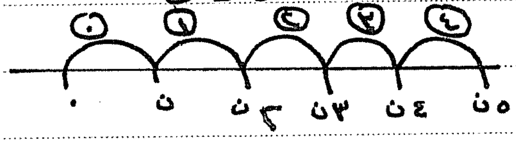
$\int_{٠}^{٤} ق(س)\, ءس = \int_{٠}^{١} -٥(١-س)\, ءس + \int_{١}^{٢} -٤(س-١)\, ءس + \int_{٢}^{٤} ٣(س+١)^{-\frac{١}{٢}}\, ءس$

$= -٥(س - \frac{س^٢}{٢})\Big|_{٠}^{١} + -٤(\frac{س^٢}{٢} - س)\Big|_{١}^{٢} + ٦(س+١)^{\frac{١}{٢}}\Big|_{٢}^{٤}$

$= -\frac{٥}{٢} - ٢ + ٦(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$

(٥) $\int_{٠}^{٥ن} [\frac{س}{ن}]\, ءس$ ، ن ≠ ٠   ٢٠٠١ ص

الحل $\frac{س}{ن} = ٠ \leftarrow س = ٠$ ، ل = ن



$\int_{٠}^{٥ن} [\frac{س}{ن}]\, ءس =$

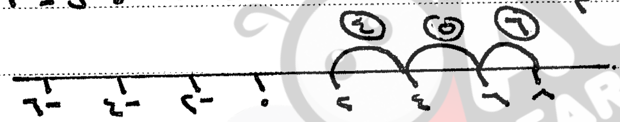
$\int_{٠}^{ن} ٠\, ءس + \int_{ن}^{٢ن} ١\, ءس + \int_{٢ن}^{٣ن} ٢\, ءس + \int_{٣ن}^{٤ن} ٣\, ءس + \int_{٤ن}^{٥ن} ٤\, ءس$

$= ٠ + ن + ٢ن + ٣ن + ٤ن = ١٠ن$

مثال (٣٧)   ٢٠١٤ ص

إذا كان $\int_{٢}^{ب} [\frac{١}{٢}س + ٣]\, ءس = ٢٤$ ، ب > ٢ ،
جد قيمة (ب)

الحل $\frac{١}{٢}س + ٣ = ٠ \leftarrow س = -٦$ ، ل = ٢



$\int_{٢}^{ب} [\frac{١}{٢}س + ٣]\, ءس = ٢٤$

$\int_{٢}^{٤} ٤\, ءس + \int_{٤}^{٦} ٥\, ءس + \int_{٦}^{ب} ٦\, ءس = ٢٤$

$٨ + ١٠ + ٦(ب - ٦) = ٢٤$

$٦(ب-٦) = ٦ \leftarrow ب - ٦ = ١$ $\boxed{ب = ٧}$

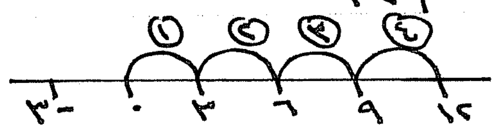
مثال (٣٨)

إذا كان $\int_{١}^{أ} [\frac{١}{٣}س + ١]\, ءس = ١١$ ، أوجد قيمة الثابت أ ، أ ∈ ح

الحل يوجد حالتين أ > ١ ، أ < ١

$\frac{١}{٣}س + ١ = ٠ \leftarrow س = -٣$ ، ل = ٣

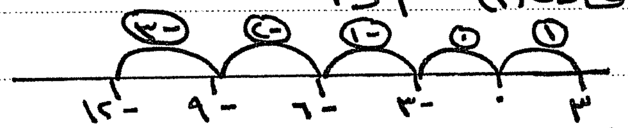
حالة (١) أ > ١



$\int_1^{م} [\frac{1}{3} س + 1] ءس = \int_1^{3} 1 ءس + \int_3^{6} 2 ءس + \int_6^{م} 3 ءس$

$2 + 6 + 3(م - 6) = 11 \leftarrow م = 7$

حالة (2) م < 1



$\int_1^{م} [\frac{1}{3} س + 1] ءس = -\int_{م}^{1} [\frac{1}{3} س + 1] ءس$

$\int_{م}^{1} [\frac{1}{3} س + 1] ءس = -11$

$\int_0^1 1 ءس + \int_{-3}^{0} 0 ءس + \int_{-6}^{-3} -1 ءس + \int_{-9}^{-6} -2 ءس + \int_{م}^{-9} -3 ءس$

$1 + 0 - 3 - 6 - 3(-9 - م) = -11$

$-9 - م = 1$ $\boxed{م = -10}$

<u>حل آخر</u>

$\int_1^{م} [\frac{1}{3} س + 1] = 11$

$\int_1^{0} 1 ءس + \int_0^{-3} 0 ءس + \int_{-3}^{-6} -1 ءس + \int_{-6}^{-9} -2 ءس + \int_{-9}^{م} -3 ءس$

$-1 + 0 + 3 + 6 - 3(م + 9) = 11$

$-3(م + 9) = 3 \leftarrow \boxed{م = -10}$

الخاصية الرابعة : خاصية المقارنة

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانات قابلة للتكامل على [م ، ب]

① إذا كان ق(س) $\geq$ صفر لكل س $\in$ [م ، ب] فإن $\int_{م}^{ب}$ ق(س) ءس $\geq$ صفر (موجب)

② إذا كان ق(س) $\leq$ صفر لكل س $\in$ [م ، ب] فإن $\int_{م}^{ب}$ ق(س) ءس $\leq$ صفر (سالب)

منا ① منحنى ق(س) في [م ، ب] فوق محور (س)

من ② منحنى ق(س) في [م ، ب] تحت محور (س)

③ إذا كان ق(س) $\geq$ هـ(س) لكل س $\in$ [م ، ب] فإن $\int_{م}^{ب}$ ق(س) ءس $\geq \int_{م}^{ب}$ هـ(س) ءس

منحنى ق(س) فوق هـ(س) في [م ، ب]

④ ل $\leq$ ق(س) $\leq$ ك لكل س $\in$ [م ، ب] فإن $\int_{م}^{ب}$ ل ءس $\leq \int_{م}^{ب}$ ق(س) ءس $\leq \int_{م}^{ب}$ ك ءس

<u>مثال (39)</u>

دون حساب قيمة التكامل ، ما إشارة التكاملات الآتية

① $\int_1^2 س^3$ ءس

<u>الحل</u> ق(س) = $س^3$ ، س $\in$ [1 ، 2]

ندرس إشارة ق(س) على الفترة [1 ، 2]

$س^3 = 0 \leftarrow س = 0$

- - - - 0 + + +

ق(س) > 0 عندما س $\in$ [1 ، 2]

$\int_1^2$ ق(س) ءس > 0 موجب

② $\int_5^2 (7س - س^2)$ ءس

<u>الحل</u> = $\int_2^5 (س^2 - 7س)$ ءس

ق(س) = $س^2 - 7س$ ، س $\in$ [2 ، 5]

ندرس إشارة ق(س) = $س^2 - 7س$ في [2 ، 5]

$س^2 - 7س = 0 \leftarrow س(س - 7) = 0$

س = 0 ، س = 7

+ + 0 - - - - 7 + +

$\int_2^5 (س^2 - 7س)$ ءس < 0 سالب

حسب خاصية المقارنة

③ $\int_2^5 \frac{1 - س}{1 + س}$ ءس

<u>الحل</u> ق(س) = $\frac{1 - س}{1 + س}$ ، س $\in$ [2 ، 5]

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

نحدد إشارة ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]

١ - س = ٠ ← س = ١

س + ١ = ٠ ← س = -١

$\int_{2}^{5} \frac{1-س}{س+1} \, دس < 0$ سالب

④ بين أن $\int_{0}^{2\pi} (1+جاس)\, دس \geq 0$ (كتاب)

الحل: نحدد إشارة ق(س) = ١+جاس في [٠ ، ٢π]

-١ ≤ جاس ≤ ١

٠ ≤ ١+جاس ≤ ٢

ق(س) = ١ + جاس ≥ ٠ ، س ∈ [٠ ، ٢π]

$\int^{2\pi} (1+جاس)\, دس \geq 0$ موجب

حل ٢

١ + جاس = ٠ ← جاس = -١ ← س = $\frac{3\pi}{2}$

ق(س) ≥ ٠ ، س ∈ [٠ ، ٢π]

$\int_{0}^{2\pi} (1+جاس)\, دس \geq 0$

⑤ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{جاس}{-س^2-4} \, دس$

الحل: نحدد إشارة ق(س) = $\frac{جاس}{-س^2-4}$ في $[\frac{\pi}{6} ، \frac{3\pi}{4}]$

جاس

$-س^2 - 4$

ق(س) < ٠ ، س ∈ $[\frac{\pi}{6} ، \frac{3\pi}{4}]$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{جاس}{-س^2-4} \, دس < 0$ سالب

⑥ $\int_{0}^{3} (س^2-1)\, دس$

الحل: ق(س) = س² - ١ ، س ∈ [٠ ، ٣]

نحدد إشارة ق(س)

س² - ١ = ٠ ← س = ±١

ق(س) ≤ ٠ ، س ∈ [٠ ، ١]

ق(س) ≥ ٠ ، س ∈ [١ ، ٣]

$\int_{0}^{1} (س^2-1)\, دس \leq 0$ ، $\int_{1}^{3} (س^2-1)\, دس \geq 0$

مثال (٤٠)

دون حساب قيمة التكامل بين أن

$\int_{1}^{2} س^3 \, دس \geq \int_{1}^{2} س^2 \, دس$

الحل: ق(س) = س³ ، هـ(س) = س²

ل(س) = ق(س) - هـ(س) = س³ - س²

نحدد إشارة ل(س) = س³ - س² في [١ ، ٢]

س³ - س² = ٠ ← س²(س - ١) = ٠ ، س = ٠ ، س = ١

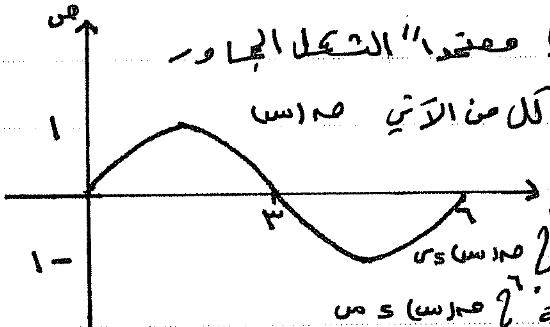
ل(س) ≥ ٠ ، س ∈ [١ ، ٢]

$\int_{1}^{2} (س^3 - س^2)\, دس \geq 0$

$\int_{1}^{2} س^3 \, دس - \int_{1}^{2} س^2 \, دس \geq 0$

$\int_{1}^{2} س^3 \, دس \geq \int_{1}^{2} س^2 \, دس$

مثال (٤١) كتاب معتمداً الشكل المجاور



أجب عن كل من الآتي: ق(س)

① إشارة $\int_{0}^{3} ق(س)\, دس$

② إشارة $\int_{3}^{6} ق(س)\, دس$

المعلم : حمد الله الطوباسي
0779358752 - 0797662728

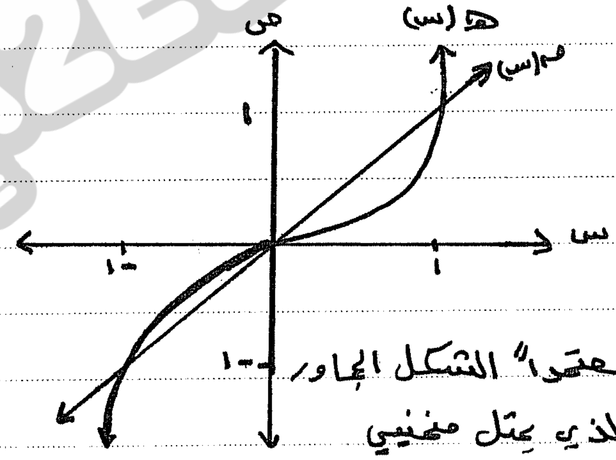
الحل ① $\int_{0}^{3} ق(س)\,دس \geq 0$ موجب

السبب في ذلك منحنى ق(س) عندما س ∈ [0 ، 3] فوق محور السينات أي أن ق(س) ≥ 0.

② $\int_{3}^{6} ق(س)\,دس \leq 0$ سالب

السبب في ذلك منحنى ق(س) عندما س ∈ [3 ، 6] تحت محور السينات ق(س) ≤ 0.

مثال(42) (الكتاب)



معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق ، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كل مما يأتي مبرراً اجابتك

① $\int_{0}^{1} ق(س)\,دس$ ، $\int_{0}^{1} هـ(س)\,دس$

② $\int_{-1}^{0} ق(س)\,دس$ ، $\int_{-1}^{0} هـ(س)\,دس$

الحل ① $\int_{0}^{1} ق(س)\,دس \geq \int_{0}^{1} هـ(س)\,دس$

منحنى ق(س) فوق منحنى هـ(س)

ق(س) ≥ هـ(س) ، س ∈ [0 ، 1]

② $\int_{-1}^{0} هـ(س)\,دس \geq \int_{-1}^{0} ق(س)\,دس$

منحنى هـ(س) فوق منحنى ق(س) ، س ∈ [-1 ، 0]

هـ(س) ≥ ق(س) ، س ∈ [-1 ، 0]

ملاحظة

لإيجاد أكبر قيمة و أصغر قيمة لقيمة التكامل لابد من معرفة القيم العظمى و الصغرى المطلقة للاقتران الموجود داخل التكامل

مثال(43) 2012 ص

إذا كان ق(س) ≤ 4 لجميع قيم (س) في الفترة [1 ، 3] ، فإن أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{3} (2\,ق(س)+1)\,دس$ هي

أ) 14 ب) 7 جـ) 9 د) 18

الحل ق(س) ≤ 6

$\int_{1}^{3} (2\,ق(س)+1)\,دس \leq \int_{1}^{3} (2(4)+1)\,دس$

$\int_{1}^{3} (2\,ق(س)+1)\,دس \leq \int_{1}^{3} 9\,دس$

$\int_{1}^{3} (2\,ق(س)+1)\,دس \leq 18$

أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{3} (2\,ق(س)+1)\,دس = 18$

مثال(44)

إذا كان ق(س) قابل للتكامل على الفترة [-1 ، 3] وكان ق(س) ≥ 2 ، فإن أصغر قيمة للمقدار $\int_{-1}^{3} (4\,ق(س)-2)\,دس$ تساوي

أ) -24 ب) 24 جـ) 12 د) -12

الحل ق(س) ≥ 2

$\int_{-1}^{3} (4\,ق(س)-2)\,دس \geq \int_{-1}^{3} (4(2)-2)\,دس$

$\int_{-1}^{3} (4\,ق(س)-2)\,دس \geq \int_{-1}^{3} 6\,دس$

$\int_{-1}^{3} (4\,ق(س)-2)\,دس \geq 24$

أقل قيمة للمقدار $\int_{-1}^{3} (4\,ق(س)-2)\,دس = 24$

مثال (٤٥)

إذا كان $2 \le ق(س) \le 5$ لكل $س \in [1، 4]$

أوجد قيم م ، ن حيث أن

$$م \le \int_{1}^{4} \left(3 + 2ق(س)\right)\,دس \le ن$$

الحل م : أقل قيمة للمقدار

ن : أكبر قيمة للمقدار

$$2 \le ق(س) \le 5$$

$$\int_{1}^{4} 7\,دس \le \int_{1}^{4} \left(3 + 2ق(س)\right)\,دس \le \int_{1}^{4} 13\,دس$$

$$21 \le \int_{1}^{4} \left(3 + 2ق(س)\right)\,دس \le 39$$

$م = 21$ ، $ن = 39$

ملاحظة

في حال عدم توفر أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران في السؤال ، يجب أولاً إيجادها عن طريق الوحدة الثالثة أو عن طريق خواص الاقتران ثم نكمل الحل

مثال (٤٦) ٢٠١١ ش

أوجد أقل قيمة للمقدار $\int_{-4}^{-1} (س^2+1)\,دس$

ط١ الحل نجد أكبر قيمة وأقل قيمة للاقتران

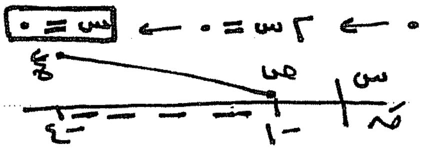
$ق(س) = س^2 + 1$ ، $س \in [-4، -1]$

القيم الحرجة $\longrightarrow$ $\acute{ق}$ غ م ، -4 ، -1

$\acute{ق} = 0$

$\acute{ق}(س) = 2س$

$\acute{ق}(س) = 0 \longrightarrow 2س = 0 \longrightarrow \boxed{س = 0}$ تهمل



أقل قيمة للاقتران ق(س) هي $ق(-1) = 2$

$$ق(س) \ge 2$$

$$\int_{-4}^{-1} (س^2+1)\,دس \ge \int_{-4}^{-1} 2\,دس$$

$$\int_{-4}^{-1} (س^2+1)\,دس \ge 6$$

ط٢

$ق(س) = س^2 + 1$ ، $س \in [-4، -1]$

$$-4 \le س \le -1$$

$$1 \le س^2 \le 16$$

$$2 \le س^2 + 1 \le 17$$

$$\int_{-4}^{-1} (س^2+1)\,دس \ge \int_{-4}^{-1} 2\,دس$$

$$\int_{-4}^{-1} (س^2+1)\,دس \ge 6$$

ط٣ يمكن الحل مستخدماً "الرسم"

مثال (٤٧) كتاب

إذا علمت أن $م \le \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2}\,دس \le ن$

جد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، ن

وأصغر قيمة ممكنة له لتحقيق المتباينة

دون حساب قيمة $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2}\,دس$

الحل ط١ $ق(س) = \sqrt{9 - س^2}$ ، $س \in [-3، 3]$

نجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران

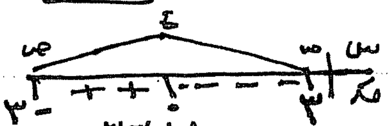
القيم الحرجة $\longrightarrow$ $\acute{ق}$ غ م ، $س = 3$ ، -3

$\acute{ق} = 0$

المجال $\underset{-3 \quad + \quad + \quad 3}{\overline{\qquad\qquad}}$ $س \in [-3، 3]$

$$\acute{ق}(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{9 - س^2}} = \frac{-س}{\sqrt{9 - س^2}}$$

$\acute{ق}(س) = 0 \longrightarrow -س = 0 \longrightarrow \boxed{س = 0}$



$ق(-3) = 0$ $\qquad$ $ق(0) = 3$ $\qquad$ $ق(3) = 0$

$٠ \le ق(س) \le ٣$

$٠ \le \sqrt{٩ - س^٢} \le ٣$

$\int_{-٣}^{٣} ٠ \, دس \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^٢} \, دس \le \int_{-٣}^{٣} ٣ \, دس$

$٠ \le \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^٢} \le ٢٧$

م = ٠ ، ن = ٢٧

حل ٢ يمكن الحل باستخدام الرسم

مثال (٤٨) ٢٠١٦ ص

إذا علمت أن $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٤ + ٩} \, دس \le ك$

جد قيمة كل من الثابتين م، ك

دون حساب قيمة تكامل المقدار $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٤+٩} \, دس$

الحل حل ١ $ق(س) = \sqrt{س^٤ + ٩}$ س ∈ [٠، ٢]

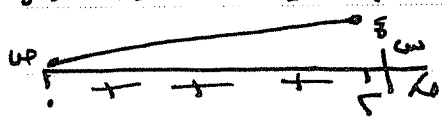
القيم الحرجة ← ق′ غ م

س = ٠ ، ٢

ق′ = ٠

$ق′(س) = \frac{٤ س^٣}{٢\sqrt{س^٤+٩}} = \frac{٢ س^٣}{\sqrt{س^٤+٩}}$

ق′(س) = ٠ ← $٢ س^٣ = ٠$ ، س = ٠ ، ق′ غ م



ق(٠) = ٣ ق(٢) = ٥

$٣ \le \sqrt{س^٤ + ٩} \le ٥$

$\int_{٠}^{٢} ٣ \, دس \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٤+٩} \, دس \le \int_{٠}^{٢} ٥ \, دس$

$٦ \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٤+٩} \, دس \le ١٠$

م = ٦ ، ك = ١٠

حل ٢ س ∈ [٠، ٢]

$٠ \le س \le ٢$

$٠ \le س^٤ \le ١٦$

$٩ \le س^٤ + ٩ \le ٢٥$

$٣ \le \sqrt{س^٤ + ٩} \le ٥$

$\int_{٠}^{٢} ٣ \, دس \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٤+٩} \, دس \le \int_{٠}^{٢} ٥ \, دس$

$٦ \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{س^٤+٩} \, دس \le ١٠$

م = ٦ ، ك = ١٠

مثال (٤٩) كتاب

إذا علمت أن $م \le \int_{٠}^{١} \frac{س}{١ + س^٢} \le ك$، جد أكبر قيمة ممكنة للثابت م، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دون حساب قيمة $\int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^٢} \, دس$

الحل حل ١ $ق(س) = \frac{س}{١ + س^٢}$ ، س ∈ [٠، ١]

القيم الحرجة ← ق′ غ م

س = ٠ ، ١

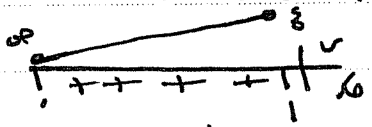
ق′ = ٠

$ق′(س) = \frac{(١ + س^٢) - س \times ٢ س}{(١ + س^٢)^٢}$

$ق′(س) = \frac{١ - س^٢}{(١ + س^٢)^٢}$

ق′ غ م تهمل

ق′(س) = ٠ ← $١ - س^٢ = ٠$ ← س = ١ ، س = −١



ق(١) = $\frac{١}{٢}$ ق(٠) = ٠

$٠ \le \frac{س}{١ + س^٢} \le \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{١} ٠ \, دس \le \int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^٢} \, دس \le \int_{٠}^{١} \frac{١}{٢} \, دس$

$٠ \le \int_{٠}^{١} \frac{س}{١+س^٢} \, دس \le \frac{١}{٢}$

م = ٠ ، ك = $\frac{١}{٢}$

حل ٢ ق(س) = س ، س ∈ [٠، ١]

$هـ(س) = ١ + س^٢$ ، س ∈ [٠، ١]

* هـ(س) ← ٠ ≤ س ≤ ١

* هـ(س) ← $٠ \le س \le ١$

$٠ \le س^٢ \le ١$

$١ \le س^٢+١ \le ٢$

$\frac{هـ(س)}{ه(س)}$ ← $٠ \le \frac{س}{١+س^٢} \le \frac{١}{٢}$

$\int_٠^١ ٠ \, دس \le \int_٠^١ \frac{س}{١+س^٢} دس \le \int_٠^١ \frac{١}{٢} دس$

$٠ \le \int_٠^١ \frac{س}{١+س^٢} دس \le \frac{١}{٢}$

$م = ٠ \;،\; ك = \frac{١}{٢}$

مثال (٥٠) كتاب

بين أن $\int_٠^{٢\pi} (٣+جتا^٢س) دس$ ينحصر بين ٦π ، ٨π

الحل ط١ $م(س) = ٣ + جتا^٢س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

القيم الحرجة ← مَ غ م ، $س = ٠ ، ٢\pi$

مَ = ٠

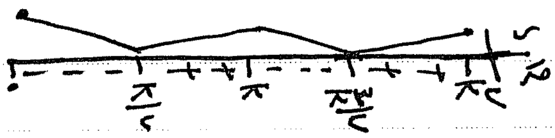
$مَ(س) = -٢جتا س جا س = ٠$

$جتا س جا س = ٠$

$جتا س = ٠ \leftarrow \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}$

$جا س = ٠ \leftarrow ٠ ، \pi ، ٢\pi$

تهمل تهمل



$م(٢\pi) = ٤$ ، $م(\frac{٣\pi}{٢}) = ٣$ ، $م(\pi) = ٤$

$م(\frac{\pi}{٢}) = ٣$ ، $م(٠) = ٤$

$٣ \le ٣ + جتا^٢س \le ٤$

$\int_٠^{٢\pi} ٣ \, دس \le \int_٠^{٢\pi} (٣+جتا^٢س) دس \le \int_٠^{٢\pi} ٤ \, دس$

$٦\pi \le \int_٠^{٢\pi} (٣+جتا^٢س) دس \le ٨\pi$

ط٢

$م(س) = جتا^٢س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

$٠ \le جتا^٢س \le ١$

$٣ \le ٣+جتا^٢س \le ٤$

$\int_٠^{٢\pi} ٣ \, دس \le \int_٠^{٢\pi} ٣+جتا^٢س \, دس \le \int_٠^{٢\pi} ٤ \, دس$

$٦\pi \le \int_٠^{٢\pi} (٣+جتا^٢س) دس \le ٨\pi$

مثال (٥١)

دون حساب قيمة التكامل بين أن $\int_٠^{\frac{\pi}{٤}} جتا\sqrt{س} \ge ٠$

الحل ط١ $م(س) = جتا\sqrt{س}$ ، $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ ربع أول

$جتا\sqrt{س} \ge ٠$

$\int_٠^{\frac{\pi}{٤}} جتا\sqrt{س} \, دس \ge \int_٠^{\frac{\pi}{٤}} ٠ \, دس$

$\int_٠^{\frac{\pi}{٤}} جتا\sqrt{س} \, دس \ge ٠$

ط٢ يمكن حله ع الوحدة الثالثة

مثال (٥٢)

دون إجراء عملية التكامل جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار $\int_٠^{\pi} (٢جا^٣س+٥) دس$

الحل $م(س) = ٢جا^٣س + ٥$ ، $س \in [٠ ، \pi]$

ربع ① + ②

$٠ \le جا س \le ١$

$٠ \le جا^٣س \le ١$

$٠ \le ٢جا^٣س \le ٢$

$٥ \le ٢جا^٣س + ٥ \le ٧$

$\int_٠^{\pi} ٥ \, دس \le \int_٠^{\pi} (٢جا^٣س+٥) دس \le \int_٠^{\pi} ٧ \, دس$

$٥\pi \le \int_٠^{\pi} (٢جا^٣س+٥) دس \le ٧\pi$

ط٢ الحل ع الوحدة الثالثة

مثال (53)

دون حساب علية التكامل بين أن

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\text{س} + \text{جتاس})\, \text{ءس} > 0$

الحل

طـ1

$\text{ق(س)} = 2\text{س} + \text{جتاس} \text{ ، س} \in [\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{3}]$

$2\text{س} > 0 \text{ ، س} \in [\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{3}]$

$\text{جتاس} > 0 \text{ ، س} \in [\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{3}]$

$\therefore 2\text{س} + \text{جتاس} > 0$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\text{س} + \text{جتاس})\, \text{ءس} > \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 0\, \text{ءس}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2\text{س} + \text{جتاس})\, \text{ءس} > 0$

طـ2 الحل ع الوحده الثالثه

مثال (54) كتاب + 2015 ص

دون حساب تكامل المقدار

$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2\text{س}+2}\, \text{ءس}$ ، بين أن

$\frac{\pi}{5} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2\text{س}+2}\, \text{ءس} \le \frac{\pi}{2}$

الحل **طـ1**

$\text{ق(س)} = \frac{1}{3\text{جتا}^2\text{س}+2} \text{ ، س} \in [\frac{\pi}{5} ، \frac{\pi}{2}]$

$0 \le \text{جتا}^2\text{س} \le 1$

$0 \le 3\text{جتا}^2\text{س} \le 3$

$2 \le 3\text{جتا}^2\text{س} + 2 \le 5$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3\text{جتا}^2\text{س}+2} \le \frac{1}{2}$

$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{5}\, \text{ءس} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2\text{س}+2}\, \text{ءس} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\, \text{ءس}$

$\frac{\pi}{5} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^2\text{س}+2}\, \text{ءس} \le \frac{\pi}{2}$

طـ2 الحل ع الوحده الثالثه

الجزء الرابع: مشتقة التكامل المحدود

ناتج التكامل المحدود دائماً يساوي مقدار ثابت ، و مشتقة الثابت تساوي صفراً

$\text{ص} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر

مثال (55) أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل من الآتي

1) $\text{ص} = \int_{2}^{1} (3\text{س}^2 - \text{س})\, \text{ءس}$

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{صفر}$

2) $\text{ص} = \int_{0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\text{جتاس}}{2}}\, \text{ءس} + \int \text{س}\, \text{ءس}$

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0 + \text{س} = \text{س}$

3) $\text{ق(س)} = \int_{0}^{1} (\frac{1}{\text{س}} + 3\sqrt{\text{س}})\, \text{ءس}$ ، جد قَ(3)

الحل $\text{قَ(س)} = 0 \longrightarrow \text{قَ(3)} = \text{صفر}$

4) $\text{ق(س)} = \text{س}^2 - \int (3\text{س}^2 - \int_{0}^{1} 2\text{ص}\, \text{ءص})\, \text{ءس}$

جد قَ(س)

الحل $\text{قَ(س)} = 2\text{س} - (3\text{س}^2 - \int_{0}^{1} 2\text{ص}\, \text{ءص})$

$\text{قَ(س)} = 2\text{س} - (3\text{س}^2 - \text{ص}^2 |_{0}^{1})$

$\text{قَ(س)} = 2\text{س} - 3\text{س}^2 + 1$

ورقة عمل (٣)

السؤال الأول :

أوجد قيمة التكاملات الآتية

① $\int_{١}^{٤} \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}}\, دس$ $\boxed{٥}$

② $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٢س+١}}\, دس$ $\boxed{٢}$

③ $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{(جاس + جتاس)^{٢}}\, دس$ $\boxed{١}$

④ $\int_{٠}^{٤} (٢س + |س-٢|)\, دس$ $\boxed{٢٠}$

⑤ $\int_{٠}^{٢} \left(٣س^{٢} + \int_{١}^{٢} ٤س\, دس\right) دس$ $\boxed{٢٠}$

⑥ كتاب $\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١-جتا٢س}{٢}}\, دس$ $\boxed{٢}$

السؤال الثاني :

جد قيمة (قيم) (م) في كل من الآتي

① $\int_{م}^{٢} (٤س-١)\, دس = -٣م$ $\qquad$ م = {-١ ، ٣}

② $ق(س) = \begin{cases} م-٣ & ، س < ١ \\ مس & ، س \geq ١ \end{cases}$

$\int_{م}^{٥} ق(س)\, دس = ١٥$ $\boxed{م = ٢}$

③ $\int_{١}^{م} \left[\frac{س}{٣}+١\right] دس = ١٢$ ، $\boxed{م = \frac{٢٢}{٣} ، \frac{-٣١}{٣}}$

④ كتاب $\int_{٠}^{م} س(١-س)\, دس = ٠$ ، م ∈ ح

$\boxed{م = ٠ ، \frac{٣}{٢}}$

السؤال الثالث : كتاب

إذا كان $\int_{٣}^{١} \left(٢ق(س) + \int_{١}^{٢} ٣م^{٢}\, دم\right) دس = ١٤$

جد $\int_{١}^{٣} ٣\, ق(س)\, دس$ $\boxed{-٣٣}$

السؤال الرابع : كتاب

إذا كان $\int_{-١}^{١} (٤ق(س) + ٣)\, دس = ١٨$ ،

$\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\, دس = ٢٠$ ، جد $\int_{٤}^{-١} (٢س - ق(س))\, دس$

$\boxed{٣٤}$

السؤال الخامس : ٢٠١١ ص

إذا كان $ق(س) = \int \left(\int_{٠}^{-٢} ٤س\, دس - ٣س^{٢} \right) دس$

جد $قَ(-١)$ $\boxed{-١١}$

السؤال السادس :

إذا كان $\int_{-١}^{٤} (٢ق(س) - ٢)\, دس = ٨$ ، $\int_{٤}^{٢} ق(س)\, دس = ١٢$

أوجد $\int_{٤}^{-١} \left(\frac{ق(س)}{٢} + ٣س^{٢}\right) دس$ $\boxed{-٦٨}$

السؤال السابع : ٢٠١٢ ص

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية

وكان ق(٠) = ق(١) = ٠ ، وكان $\int_{٠}^{١} ق(س)\, دس = ١$

أوجد قاعدة الاقتران ق(س)

$\boxed{ق(س) = ٦س - س^{٢}}$

السؤال الثامن

① كتاب: بيّن أن $\int_{٢}^{٥} (س^{٢}+٤)\, دس \geq \int_{٢}^{٥} ٣س\, دس$

دون حساب قيمة كل من التكاملين

② أوجد قيم م، ن بحيث أن $م \leq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^{٤}}\, دس \leq ن$

$\boxed{م = ٠ ، ن = ٢}$

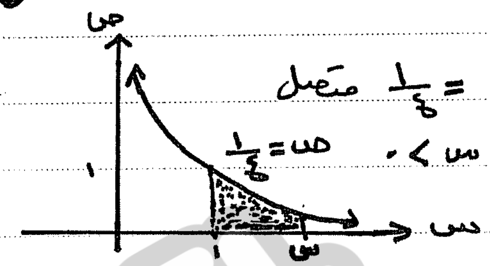
٢٠١٦ ش

③ إذا علمت أن $م \leq \int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢}+٧}}\, دس \leq ل$

جد قيمة م، ل دون حساب قيمة التكامل

$\boxed{م = \frac{٢}{٥} ، ل = \frac{٢}{٣}}$

الدرس الرابع: اقتران اللوغاريتم الطبيعي مشتقته وتكامله



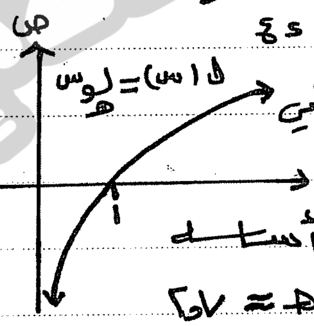
إذا كان $ص = \frac{1}{ع}$ متصل

$ع \in (0, \infty)$ ، $س > 0$

فإن مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$ل(س) = \int_1^{س} \frac{1}{ع}\, دع = لو_{هـ} س$$

توضيح $لو_{هـ} 3 = \int_1^{3} \frac{1}{ع}\, دع$



* الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي هو اقتران لوغاريتم أساسه العدد النيبيري $هـ \approx 2.7$

* $ل(س) = لو_{هـ} س$ ، $س > 0$

قوانين اللوغاريتمات

1. $لو_{هـ} 1 = صفر$
2. $لو_{هـ} هـ = 1$
3. $لو_{هـ} أ^{ن} = ن\, لو_{هـ} أ$
4. $لو_{هـ} (أ \times ب) = لو_{هـ} أ + لو_{هـ} ب$
5. $لو_{هـ} \frac{أ}{ب} = لو_{هـ} أ - لو_{هـ} ب$
6. $لو_{ب} أ \times لو_{جـ} ب = لو_{جـ} أ$
7. $هـ^{(لو_{هـ} أ)} = أ$
8. $لو_{ب} أ = \frac{1}{لو_{أ} ب}$
9. $لو_{ب} أ = \frac{لو_{هـ} أ}{لو_{هـ} ب}$
10. $لو_{ب} أ = جـ \leftarrow ب^{جـ} = أ$

الجزء الأول: مشتقة اقتران اللوغاريتم

$ص = لو_{هـ} س$ ، $س > 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

نتائج

1. $ص = لو_{هـ} |ق(س)|$ ، $ق(س) > 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{قَ(س)}{ق(س)}$

2. $ص = لو_{هـ} |ق(س)|$ ، ق(س) قابل للاشتقاق $ق(س) \neq 0$

$\frac{دص}{دس} = \frac{قَ(س)}{ق(س)}$

مثال (1)

إذا كان $ص = لو_{هـ} س$ ، $س > 0$

أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

الحل نفرض أن ق(ع) هو معكوس مشتقة الاقتران المتصل $قَ(ع) = \frac{1}{ع}$

$لو_{هـ} س = \int_1^{س} \frac{1}{ع}\, دع$

$لو_{هـ}(س) = \int_1^{س} قَ(ع)\, دع = ق(ع) \Big|_1^{س}$

$لو_{هـ}(س) = ق(س) - ق(1)$

نشتق الطرفين

$(لو_{هـ} س)' = قَ(س) - 0$

$(لو_{هـ} س)' = قَ(س)$

$(لو_{هـ} س)' = \frac{1}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س}$

$\boxed{قَ(ع) = \frac{1}{ع}}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
0797662728 - 0779358752

مثال (1)

جد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $ق(س) = لو_{هـ}(س^2+7س+9)$

الحل $ق'(س) = \frac{2س+7}{س^2+7س+9}$

② $ص = لو_{هـ} س^3$

الحل حل 1: $ص = 3 لو_{هـ} س \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{3}{س}$

حل 2: $\frac{دص}{دس} = \frac{3س^2}{س^3} = \frac{3}{س}$

③ $ص = لو_{هـ}(س^5+4س+1)^7$

الحل $ص = 7 لو_{هـ}(س^5+4س+1)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{7(5س^4+4)}{س^5+4س+1}$

④ $ق(س) = لو_{هـ}\sqrt{س^2+7}$ (الكتاب)

الحل $ق(س) = لو_{هـ}(س^2+7)^{\frac{1}{2}}$

$ق(س) = \frac{1}{2} لو_{هـ}(س^2+7)$

$ق'(س) = \frac{س}{س^2+7}$

⑤ $ص = لو_{هـ}\frac{1}{س}$

الحل $ص = لو_{هـ}1 - لو_{هـ}س \leftarrow ص = 0 - لو_{هـ}س$

$ص = - لو_{هـ}س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{س}$

⑥ $ق(س) = لو_{هـ}\frac{(س+3)^7}{(س^2+4)^5}$

الحل $ق(س) = لو_{هـ}(س+3)^7 - لو_{هـ}(س^2+4)^5$

$ق(س) = 7 لو_{هـ}(س+3) - 5 لو_{هـ}(س^2+4)$

$ق'(س) = \frac{7}{س+3} - \frac{10س}{س^2+4}$

⑦ $ص = لو_{هـ}\frac{جتاس}{\sqrt{4-3س^2}}$ (الكتاب)

الحل $ص = لو_{هـ}جتاس - لو_{هـ}\sqrt{4-3س^2}$

$ص = لو_{هـ}جتاس - \frac{1}{2}لو_{هـ}(4-3س^2)$

$ص' = \frac{-جاس}{جتاس} - \frac{1}{2} \times \frac{-6س}{4-3س^2}$

$ص' = -ظاس + \frac{3س}{4-3س^2}$

⑧ $ق(س) = س لو_{هـ}(س^2+9)$

الحل $ق'(س) = س \times \frac{2س}{س^2+9} + لو_{هـ}(س^2+9)$

$ق'(س) = \frac{2س^2}{س^2+9} + لو_{هـ}(س^2+9)$

⑨ $ص = لو_{هـ}جا^2س$

الحل $ص = 2 لو_{هـ}جاس$

$\frac{دص}{دس} = 2\frac{جتاس}{جاس} = 2 ظتاس$

⑩ $ص = لو_{هـ}جا^3 5س$ (الكتاب)

الحل $ص = 3 لو_{هـ}جا5س$

$\frac{دص}{دس} = 3 \times \frac{5 جتا5س}{جا5س} = 15 ظتا5س$

⑪ $ص = لو_{هـ}ظاس$

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{قا^2س}{ظاس} = \frac{1}{جتا^2س} \times \frac{جتاس}{جاس}$

$= \frac{1}{جاس جتاس} = \frac{2}{جا2س}$

⑫ $ص = س^2 لو_{هـ}(س^3+1)^5$

الحل $ص = 5س^2 لو_{هـ}(س^3+1)$

$\frac{دص}{دس} = 5س^2 \times \frac{3س^2}{س^3+1} + لو_{هـ}(س^3+1) \times 10س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{15س^4}{س^3+1} + 10س لو_{هـ}(س^3+1)$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

(١٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^2 + 3\text{هـ} + 2)$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

---

(١٤) ٢٠١٢ ش

$\text{ق(س)} = \text{هـ}^2 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

الحل $\text{ق}'\text{(س)} = 0 + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس}$

---

(١٥) $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt[3]{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

الحل $\text{ق(س)} = \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس} + \text{جتاس})$

$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{1}{3} \; \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

---

(١٦) $\text{ص} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^3$ (كتاب)

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \times \frac{1}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3}{\text{س}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2$

---

(١٧) $\text{ق(س)} = \text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ (كتاب)

الحل $\text{ق}'\text{(س)} = \frac{1}{\text{س}}\;\text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

---

(١٨) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{س}}\text{هـ}$

الحل $\text{ص} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1 \times \frac{1}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2} = \frac{-1}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}$

---

(١٩) $\text{ص} = \text{لو}_{3}\text{س}$

الحل $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}3}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}3 \;\; \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

---

(٢٠) ٢٠٠٤ ص

$\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}^5}{\text{س}^2+1}\right)$ ، $\text{ق}'(1)$

الحل $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^5 - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1)$

$\text{ق(س)} = 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+1)$

$\text{ق}'\text{(س)} = \frac{5}{\text{س}} - \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1}$

$\text{ق}'(1) = 5 - 1 = 4$

---

(٢١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2 - 5\text{س}|$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س} - 5}{\text{س}^2 - 5\text{س}}$

---

(٢٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}|$

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

مثال (٣) ٢٠٠٧ ص

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، أوجد $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{ق}'\text{(س)}\,\text{دس}$

الحل $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{ق}'\text{(س)}\,\text{دس} = \text{ق(س)}\Big|_{1}^{\text{هـ}}$

$\text{ق}'\text{(س)} = \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times 1$

$\text{ق}'\text{(س)} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق(س)}\Big|_{1}^{\text{هـ}} = \text{ق(هـ)} - \text{ق}(1)$

$= 2 - 1 = \boxed{1}$

مثال (٤) ٢٠١٧ ص

إذا كان $\int \text{أ}\;\text{ق}'\text{(س)}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|2 - 4\text{س}| - \int 2\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ق}'\text{(س)}\,\text{دس}$

وكان $\text{ق}'(0) = 2$ ، جد قيمة الثابت (أ)

الحل نشتق الطرفين

$\text{أ}\;\text{ق}'\text{(س)} = \frac{-4}{2 - 4\text{س}} - 2\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ق}'\text{(س)}$

$\text{ق}'(0) = 2 \Leftarrow 2\text{أ} = -2 - 2\text{هـ}^0 \times 2$

$2\text{أ} = -2 - 4 \Leftarrow 2\text{أ} = -6$

$\boxed{\text{أ} = -3}$

مثال (٥) (كتاب)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س} + \sqrt{\text{س}^2 - 1}\right)$

أثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}^2-1}}$

الحل $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{1 + \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2-1}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2-1}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\sqrt{\text{س}^2-1} + \text{س}}}{\sqrt{\text{س}^2-1}} \times \dfrac{1}{\cancel{\text{س} + \sqrt{\text{س}^2-1}}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}^2-1}}$

مثال (٦) (كتاب)

إذا كان $\int (\text{ق}(\text{س}) - \text{س})\, د\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{س}^2$

أثبت أن $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س} + \text{قاس}$

الحل نشتق الطرفين

$\text{ق}(\text{س}) - \text{س} = \dfrac{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2\text{س}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} + ٢\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) - \text{س} = \dfrac{\text{قاس}\,\cancel{(\text{قاس} + \text{ظاس})}}{\cancel{\text{قاس} + \text{ظاس}}} + ٢\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) - \text{س} = \text{قاس} + ٢\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{قاس} + ٣\text{س}$

الجزء الثاني:
تكامل اقترانات اللوغاريتم

يستخدم تكامل اللوغاريتم الطبيعي لحل تكامل $\text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} = -1$

قاعدة:

$$\boxed{\int \frac{1}{\text{س}}\, د\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}}$$

لنتائج:

① $\int \dfrac{\text{أ}}{\text{س}}\, د\text{س} = \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

② $\int \dfrac{٤}{\text{أس} + \text{ب}}\, د\text{س} = \dfrac{٤}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{أس} + \text{ب}| + \text{جـ}$

بشكل عام

$\int \dfrac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\, د\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

$\int \dfrac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}}\, د\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{المقام}| + \text{جـ}$

مثال (٧):

أثبت أن $\int \dfrac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\, د\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

الحل $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) \leftarrow \dfrac{د\text{ص}}{د\text{س}} = \text{ق}'(\text{س})$

$د\text{س} = \dfrac{د\text{ص}}{\text{ق}'(\text{س})}$

$\int \dfrac{\cancel{\text{ق}'(\text{س})}}{\text{ص}} \cdot \dfrac{د\text{ص}}{\cancel{\text{ق}'(\text{س})}} = \int \dfrac{1}{\text{ص}}\, د\text{ص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

مثال (٨): جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int \dfrac{1}{\text{س}}\, د\text{س}$

الحل $\int \dfrac{1}{\text{س}}\, د\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

② $\int \dfrac{-٢}{\text{س}}\, د\text{س}$

الحل $\int \dfrac{-٢}{\text{س}}\, د\text{س} = -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

③ $\int_1^{\text{هـ}} \dfrac{٥}{\text{س}}\, د\text{س}$

الحل $= ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_1^{\text{هـ}} = ٥(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}1) = ٥$

④ $\int \text{هـ}^{(٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\, د\text{س}$

الحل $= \int \text{هـ}^{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2)}\, د\text{س} = \int \text{س}^2\, د\text{س}$

$= \dfrac{\text{س}^3}{٣} + \text{جـ}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

⑤ $\int \frac{-٣}{\text{٢س} - ٥}\,\text{ءس}$

الحل $= \frac{-٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢س} - ٥| + \text{جـ}$

⑥ $\int ٣(\text{٢س} - ١)^{-١}\,\text{ءس}$

الحل $= \int \frac{٣}{\text{٢س} - ١}\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢س} - ١| + \text{جـ}$

⑦ $\int \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل $\int \left(\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}}\right)\text{ءس} = \int \left(١ + \frac{٥}{\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

⑧ $\int_{١}^{٣} \frac{\text{٦س}}{\text{٣س}^٢ - ٥}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = ٦ س

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٣س}^٢ - ٥|\Big|_{١}^{٣}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٢٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢ = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٢٢}{٢} = \text{لو}_{\text{هـ}}١١$

⑨ $\int \frac{\text{٣س}}{\text{س}^٢ + ٥}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = ٢س

$= \frac{٣}{٢}\int \frac{\text{٢س}}{\text{س}^٢ + ٥}\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢ + ٥| + \text{جـ}$

⑩ $\int \frac{٨ - \text{٦س}^٢}{\text{س}^٣ - \text{٤س} + ١}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = ٣س² - ٤

$= -٢\int \frac{\text{٣س}^٢ - ٤}{\text{س}^٣ - \text{٤س} + ١}\,\text{ءس} = -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣ - \text{٤س} + ١| + \text{جـ}$

⑪ $\int \frac{١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{٥ + \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = $١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|٥ + \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{\text{جا٥س}}{٣ - \text{جتا٥س}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = ٥جا٥س

$= \frac{١}{٥}\int \frac{\text{٥جا٥س}}{٣ - \text{جتا٥س}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣ - \text{جتا٥س}| + \text{جـ}$

⑬ $\int \frac{\text{جا٢س}}{١ + \text{جا}^٢\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = ٢جاس جتاس = جا٢س

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|١ + \text{جا}^٢\text{س}| + \text{جـ}$

⑭ $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{٥ - \text{قاس}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = ٠ - قاس ظاس

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|٥ - \text{قاس}| + \text{جـ}$

⑮ $\int \frac{١ + \text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس}$

الحل مشتقة المقام = قا²س

$\int \frac{١ + \text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}| + \text{جـ}$

⑯ $\int \frac{٥ + ٥\,\text{ظتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$ (كتاب)

الحل مشتقة المقام = - قتا²س

$\int \frac{٥ + ٥\,\text{ظتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{٥(١ + \text{ظتا}^٢\text{س})}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{٥\,\text{قتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{ءس} = -٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}| + \text{جـ}$

⑰ ٢٠٠٢ $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس جتاس}}\,\text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{جتا٢س}}{\frac{١}{٢}\text{جا٢س}}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{٢جتا٢س}}{\text{جا٢س}}\,\text{ءس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا٢س}| + \text{جـ}$

(١٨) $\int \text{ظاس}\ \text{دس}$

الحل $= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{دس} = - \int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| + \text{جـ}$

(١٩) $\int \text{ظتاس}\ \text{دس}$

الحل $= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{جـ}$

(٢٠) $\int \text{ظا٥س}\ \text{دس}$

الحل $= \int \frac{\text{جا٥س}}{\text{جتا٥س}}\ \text{دس}$ ، مشتقة المقام $= -٥\text{جا٥س}$

$= \frac{-1}{5} \int \frac{-5\text{جا٥س}}{\text{جتا٥س}}\ \text{دس} = \frac{-1}{5} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا٥س}| + \text{جـ}$

(٢١) $\int \text{قاس}\ \text{دس}$

الحل $\int \text{قاس} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{جـ}$

(٢٢) $\int \text{قتاس}\ \text{دس}$

الحل $= \int \text{قتاس} \times \frac{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قتا}^2\text{س} + \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{دس}$

$= - \int \frac{-\text{قتا}^2\text{س} - \text{قتاس ظتاس}}{\text{قتاس} + \text{ظتاس}}\ \text{دس}$

$= - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{قتاس} + \text{ظتاس}| + \text{جـ}$

(٢٣) $\int_{-1}^{2} \frac{|2\text{س}|}{\text{س}^2 + 1}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $|2\text{س}|$

$$\begin{array}{ccc} -2\text{س} & & 2\text{س} \\ - \ - & 0 & + \ + \end{array}$$

$= \int_{-1}^{0} \frac{-2\text{س}}{\text{س}^2 + 1}\ \text{دس} + \int_{0}^{2} \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 1}\ \text{دس}$

$= - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^2 + 1| \Big|_{-1}^{0} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^2 + 1| \Big|_{0}^{2}$

$= -(\text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}2) + \text{لو}_{\text{هـ}}5 - \text{لو}_{\text{هـ}}1$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}2 + \text{لو}_{\text{هـ}}5 = \text{لو}_{\text{هـ}}10$

مثال (٩)

جد "معكوساً" لمشتقات كل من الاقترانات الآتية

(١) $\text{م}(\text{س}) = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 4}$

الحل $\text{م}(\text{س}) = \int \text{م}(\text{س})\ \text{دس} = \int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 4}\ \text{دس}$

$\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^2 + 4| + \text{جـ}$

(٢) $\text{م}(\text{س}) = \frac{3\text{جتا٣س}}{5 + \text{جا٣س}}\ \text{دس}$

الحل $\text{م}(\text{س}) = \int \text{م}(\text{س})\ \text{دس}$

$\text{م}(\text{س}) = \int \frac{3\text{جتا٣س}}{5 + \text{جا٣س}}\ \text{دس}$

مشتقة المقام $= 3\text{جتا٣س}$

$\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} |5 + \text{جا٣س}| + \text{جـ}$

ورقة عمل (٤)

السؤال الأول :

أوجد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $ق(س) = هـ^{٢} لو_{هـ} جاس$ (٢٠١٢ ش)

$\boxed{هـ^{٢} ظتا س}$

② $ص = لو_{هـ} \frac{س^{٥}}{س^{٢}+١}$ ، $\frac{دص}{دس}|_{س=١}$ $\boxed{٤}$

③ $ق(س) = لو_{هـ} |س^{٢}+٤س-٥|$ (كتاب)

الجواب $\frac{٢س+٤}{س^{٢}+٤س-٥}$

④ $ص = لو_{هـ} جا^{٣} ٥س$ (كتاب)

$\boxed{١٥ ظتا ٥س}$

⑤ $ص = لو_{هـ} (٢+\sqrt{س})$ (كتاب)

الجواب $\frac{١}{٤\sqrt{س}+٢س}$

⑥ $(لو_{هـ} س)^{٣}$ (كتاب)

الجواب $\frac{٣}{س}(لو_{هـ} س)^{٢}$

⑦ $ق(س) = لو_{هـ} \frac{(٤س^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢س)^{٥}}$ (كتاب)

الجواب $\frac{٤٨س}{٤س^{٢}+٥} + \frac{١٠}{٧-٢س}$

⑧ $ق(س) = لو_{هـ} \sqrt[٣]{٥س^{٣}+٤س}$ (كتاب)

الجواب $\frac{١٥س^{٢}+٤}{٣(٥س^{٣}+٤س)}$

⑨ $ق(س) = س^{٣} لو_{هـ} س$ (كتاب)

الجواب $س^{٢} + ٣س^{٢} لو_{هـ} س$

السؤال الثاني :

① إذا كان $\int ق(س) دس = لو_{هـ} |جاس - جتاس|$

أوجد $ق(\frac{\pi}{٢})$ $\boxed{٢}$

② إذا كان $ص = جا لو_{هـ} س$ ، أثبت أن

$س^{٢} ص'' + س ص' + ص = صفر$

السؤال الثالث : أوجد التكاملات الآتية

① $\int_{هـ}^{هـ^{٣}} \frac{١}{س-١} دس$ (٢٠١٣ ص)

الجواب $لو_{هـ} (هـ^{٢}+هـ+١)$

② $\int \frac{٢س-١}{س(س-١)} دس$ (كتاب)

الجواب $لو_{هـ} |س^{٢}-س| + جـ$

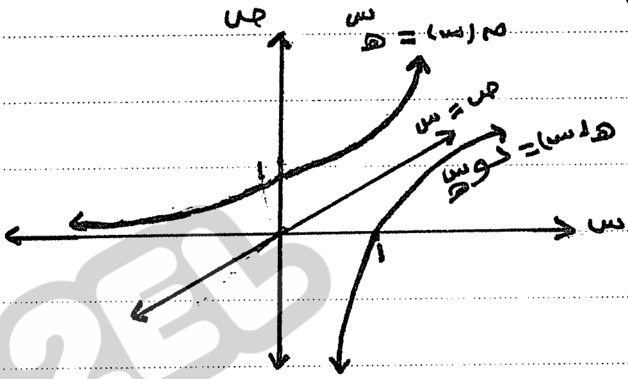
③ $\int \frac{جا٣س}{١+جتا٣س} دس$ (كتاب)

الجواب $\frac{-١}{٣} لو_{هـ} |١+جتا٣س| + جـ$

④ $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{قا^{٢}س}{٢+ظاس} دس$ (كتاب)

الجواب $\boxed{لو_{هـ} ٣}$

الدرس الخامس :
مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي



الاقتران الأسي الطبيعي $ق(س) = هـ^{س}$

حيث هـ هو العدد النيبيري ، هو الاقتران العكسي لاقتران اللوغاريتم الطبيعي

قواعد الأسس

1) $هـ^{0} = 1$
2) $\frac{1}{هـ^{س}} = هـ^{-س}$
3) $هـ^{أ} \times هـ^{ب} = هـ^{(أ+ب)}$
4) $\frac{هـ^{أ}}{هـ^{ب}} = هـ^{(أ-ب)}$
5) $(هـ^{أ})^{ب} = هـ^{(أ\times ب)}$
6) $لو_{هـ} هـ^{ق(س)} = ق(س)$
7) $هـ^{(لو_{هـ} ق(س))} = ق(س)$

الجزء الأول : مشتقة الاقتران الأسي

$ص = هـ^{س} \leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

نتائج

1) $ص = هـ^{ق(س)}$

$\frac{دص}{دس} = قَ(س) \times هـ^{ق(س)}$

2) $ص = أ^{ق(س)}$

$\frac{دص}{دس} = قَ(س) \times أ^{ق(س)} \times لو_{هـ} أ$

مثال (1) : كتاب

إذا كان $ص = هـ^{س}$ ، أثبت أن $\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

الحل $ص = هـ^{س} \leftarrow لو_{هـ} ص = س$

$\frac{صَ}{ص} = 1 \leftarrow صَ = ص$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

مثال (2) كتاب

إذا كان $ص = أ^{ق(س)}$ ، أثبت أن $\frac{دص}{دس} = قَ(س) \times أ^{ق(س)} \times لو_{هـ} أ$

الحل $ص = أ^{ق(س)} \leftarrow لو_{هـ} ص = لو_{هـ} أ^{ق(س)}$

$لو_{هـ} ص = ق(س) \, لو_{هـ} أ$

$\frac{1}{ص} \frac{دص}{دس} = لو_{هـ} أ \; قَ(س)$

$\frac{دص}{دس} = ص \, لو_{هـ} أ \; قَ(س)$

$\frac{دص}{دس} = قَ(س) \; أ^{ق(س)} \, لو_{هـ} أ$

مثال (3) : جد المشتقة الأولى في كل من الآتي

1) $ص = هـ^{(3س^{2}+1)}$

الحل $\frac{دص}{دس} = 6س \times هـ^{(3س^{2}+1)}$

② $ص = س^٢ - ٥ هـ^{س}$

الحل $\frac{دص}{دس} = ٢س - ٥ هـ^{س}$

---

③ $ص = هـ^{(س^٣ + جاس)}$

الحل $\frac{دص}{دس} = (٣س^٢ + جتاس) \, هـ^{(س^٣ + جاس)}$

---

④ $ص = هـ^{\frac{١}{س}}$

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س^٢} \times هـ^{\frac{١}{س}}$

---

⑤ $ص = هـ^٢ \leftarrow \frac{دص}{دس} = صفر$

---

⑥ $ص = هـ^{جتا٣س}$

الحل $\frac{دص}{دس} = -٣جا٣س \times هـ^{جتا٣س}$

---

⑦ $ص = ظا^٣(هـ^{٢س})$

الحل $\frac{دص}{دس} = ٣ظا^٢(هـ^{٢س}) \times قا^٢(هـ^{٢س}) \times ٢هـ^{٢س}$

$\frac{دص}{دس} = ٦هـ^{٢س} \, ظا^٢(هـ^{٢س}) \, قا^٢(هـ^{٢س})$

---

⑧ $ص = (هـ^{س^٢})^٦$

الحل $ص = هـ^{٦س^٢}$

$\frac{دص}{دس} = ١٢س \, هـ^{٦س^٢}$

---

⑨ $ص = \sqrt{هـ^{٣س} + ٥س}$

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{٣هـ^{٣س} + ٥}{٢\sqrt{هـ^{٣س} + ٥س}}$

---

⑩ $ص = \frac{١}{\sqrt{هـ^{٢س^٥}}}$

الحل $ص = \frac{١}{(هـ^{٢س^٥})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{هـ^{س^٥}} = هـ^{-س^٥}$

$\frac{دص}{دس} = -٥س^٤ \, هـ^{-س^٥}$

---

⑪ $ص = \frac{هـ^{س} - ١}{هـ^{س}}$

الحل $ص = ١ - \frac{١}{هـ^{س}} = ١ - هـ^{-س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{-س}$

---

⑫ $ص = هـ^{س} + لو_{هـ}(س^٣ - ٢س)$

الحل $\frac{دص}{دس} = هـ^{س} + \frac{٣س^٢ - ٢}{س^٣ - ٢س}$

---

⑬ ٢٠٠٥ ش

$ق(س) = هـ^{جاس} + لو_{هـ}(٥س+١)^٢$ ، $ق'(٠)$

الحل $ق(س) = هـ^{جاس} + ٢لو_{هـ}(٥س+١)$

$ق'(س) = جتاس \times هـ^{جاس} + \frac{١٠}{٥س+١}$

$ق'(٠) = ١ \times ١ + ١٠ = \boxed{١١}$

---

⑭ $ص = هـ^{جاس} \times هـ^{جتاس}$

الحل $ص = هـ^{(جاس + جتاس)}$

$\frac{دص}{دس} = (جتاس - جاس) \times هـ^{(جاس + جتاس)}$

---

⑮ $ص = هـ^{س} لو_{هـ}س$

الحل $\frac{دص}{دس} = هـ^{س} \times \frac{١}{س} + لو_{هـ}س \times هـ^{س}$

---

⑯ $ص = هـ^{(لو_{هـ}(س^٢+٥))}$

الحل $ص = س^٢ + ٥ \leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س$

---

⑰ $ص = هـ^{(-لو_{هـ}جاس)}$

الحل $ص = هـ^{(لو_{هـ}جاس^{-١})} = جاس^{-١} = \frac{١}{جاس}$

$ص = قتاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = -قتاس \, ظتاس$

(١٨) $ص = ٣س \, لو_{هـ} هـ^{س}$

الحل $ص = ٣س^{٢} \leftarrow \frac{دص}{دس} = ٦س$

(١٩) ٢٠١٧ ش $ص = \sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س+١)}$ ،

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٠.

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{٢هـ^{٢س} + \frac{١}{س+١}}{٢\sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ} س+١}}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٠} = \frac{٢هـ^{٠} + ١}{٢\sqrt{١+٠}} = \frac{٣}{٢}$

(٢٠) $ص = ٣^{(س^{٢}+٥)}$

الحل $\frac{دص}{دس} = ٢س \, لو_{هـ} ٣ \times ٣^{(س^{٢}+٥)}$

(٢١) $ص = ٥^{جاس}$

الحل $\frac{دص}{دس} = جتاس \, ٥^{جاس} \, لو_{هـ} ٥$

(٢٢) $هـ^{ص} = ٢س$

الحل $\frac{دص}{دس} هـ^{ص} = ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{هـ^{ص}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٢س} = \frac{١}{س}$

(٢٣) $هـ^{ص} = جتاس$

الحل $\frac{دص}{دس} هـ^{ص} = -جاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-جاس}{هـ^{ص}} = \frac{-جاس}{جتاس} = -ظاس$

حل ٢

$هـ^{ص} = جتاس \leftarrow لو_{هـ} هـ^{ص} = لو_{هـ} جتاس$

$ص = لو_{هـ} جتاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-جاس}{جتاس} = -ظاس$

(٢٤) $ص = (س)^{س}$ ، جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$

الحل $ص = (س)^{س} \leftarrow لو_{هـ} ص = لو_{هـ} (س)^{س}$

$لو_{هـ} ص = س \, لو_{هـ} س$

$\frac{دص}{دس} \times \frac{١}{ص} = س \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س$

$\frac{دص}{دس} = (١ + لو_{هـ} ص) \times ص$

$\frac{دص}{دس} = (١ + لو_{هـ} ص) \times (س)^{س}$

(٢٥) هـ ٢٠٠٠ ش $ق(س) = هـ^{٤س} + لو_{هـ} ظاس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{4}} \frac{دس}{١+جتا^{٢}س}$

أوجد $قَ(\frac{\pi}{4})$

الحل $قَ(س) = ٤هـ^{٤س} + \frac{قا^{٢}س}{ظاس} + ٠$

$قَ(\frac{\pi}{4}) = ٤هـ^{\pi} + ٢$

مثال (٤) كتاب + ٢٠٠٩ ص

إذا كان $ص = هـ^{ظاس} + أ \, لو_{هـ} جتاس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{١+ظا^{٢}س}$

وكان $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = ٢هـ + ١$ ، جد قيمة (أ)

الحل $\frac{دص}{دس} = قا^{٢}س \, هـ^{ظاس} - أ \, ظاس + ٠$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = ٢هـ - أ = ٢هـ + ١$

$\boxed{أ = -١}$

مثال (٥) كتاب

إذا كان $ص = هـ^{أس}$ ، أوجد قيمة الثابت (أ) التي تحقق المعادلة $صً - ٥صَ + ٦ص = ٠$

الحل $صَ = أ هـ^{أس}$ ، $صً = أ^{٢} هـ^{أس}$

$صً - ٥صَ + ٦ص = أ^{٢}هـ^{أس} - ٥أهـ^{أس} + ٦هـ^{أس} = ٠$

$هـ^{أس} (أ^{٢} - ٥أ + ٦) = ٠$

$هـ^{أس} (أ - ٢)(أ - ٣) = ٠$

$هـ^{أس} = ٠$ تهمل $هـ^{أس} > ٠$

$أ - ٢ = ٠ \leftarrow أ = ٢$ ، $أ - ٣ = ٠ \leftarrow أ = ٣$

$أ = ٢ ، ٣$

مثال (٦) ص ٢٠٠٨

إذا كان $ص = م\,هـ^{٢س} + جا(لو_{هـ} س)$

وكان $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = هـ^{٣} + ١$ ، جد قيمة (م)

الحل $\frac{دص}{دس} = ٢م\,هـ^{٢س} + \frac{١}{س}\,جتا(لو_{هـ} س)$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} = ٢م\,هـ^{٢} + ١$

$٢م\,هـ^{٢} + ١ = هـ^{٣} + ١$

$٢م\,هـ^{٢} = هـ^{٣} \leftarrow م = \frac{هـ}{٢}$

مثال (٧)

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ص = (س-١)\,هـ^{س} + ٣\,لو_{هـ} س + ٢$

عند النقطة (١ ، ٢)

الحل $\frac{دص}{دس} = (س-١)\,هـ^{س} + هـ^{س} + \frac{٣}{س}$

$م = \frac{دص}{دس}\Big|_{س=١} \leftarrow م = ٠ + هـ + ٣ = ٣ + هـ$

معادلة المماس $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٢ = (٣ + هـ)(س - ١)$

مثال (٨) ص ٢٠١٥

إذا كان $ق(س) = \int \frac{هـ^{س}}{لو_{هـ}\sqrt{س+٢}}\,دس$

جد $ق''(٠)$

الحل $ق'(س) = \frac{هـ^{س}}{لو_{هـ}\sqrt{س+٢}}$

$$ق''(س) = \frac{لو_{هـ}\sqrt{س+٢} \times هـ^{س} - هـ^{س} \times \frac{١}{٢(س+٢)}}{\left(لو_{هـ}\sqrt{س+٢}\right)^{٢}}$$

$$ق''(٠) = \frac{لو_{هـ}\sqrt{٢} - \frac{١}{٤}}{\left(لو_{هـ}\sqrt{٢}\right)^{٢}}$$

مثال (٩) : إذا كان $ص = هـ^{س} جاس$ ، أثبت أن

$ص'' - ٢ص' + ٢ص = صفر$

الحل $ص' = هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس$

$ص'' = هـ^{س} \times -جاس + هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جتاس + هـ^{س} جاس$

$ص'' = ٢هـ^{س} جتاس$

$ص'' - ٢ص' + ٢ص$

$= ٢هـ^{س} جتاس - ٢هـ^{س} جتاس - ٢هـ^{س} جاس + ٢هـ^{س} جاس = صفر$

مثال (١٠) كتاب

إذا كان $هـ^{ص س} = س - ص$ ، أثبت أن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{٢} - ص س + ١}{س^{٢} - س ص + ١}$$

الحل

$(ص + س ص')\,هـ^{ص س} = ١ - ص'$

$ص\,هـ^{ص س} + س\,هـ^{ص س}\,ص' = ١ - ص'$

$س\,هـ^{ص س}\,ص' + ص' = ١ - ص\,هـ^{ص س}$

$ص'(س\,هـ^{ص س} + ١) = ١ - ص\,هـ^{ص س}$

$$ص' = \frac{١ - ص\,هـ^{ص س}}{س\,هـ^{ص س} + ١}$$

$$ص' = \frac{١ - ص(س - ص)}{س(س - ص) + ١}$$

$$ص' = \frac{١ - س ص + ص^{٢}}{س^{٢} - س ص + ١}$$

مثال (١١) كتاب

إذا كان $\int ق(س)\,دس = هـ^{١-س^{٢}} + ٤هـ$ ، $ق(ب) = -٢ب$ ،

$ب \neq صفر$ ، جد قيمة (قيم) الثابت (ب)

الحل $ق(س) = -٢س\,هـ^{١-س^{٢}}$

$ق(ب) = -٢ب\,هـ^{١-ب^{٢}}$

$-٢ب\,هـ^{١-ب^{٢}} = -٢ب$

$هـ^{١-ب^{٢}} = ١ \leftarrow هـ^{٠} = ١ \leftarrow هـ^{٠} = هـ^{١-ب^{٢}}$

$١ - ب^{٢} = ٠ \leftarrow ب = \pm ١$ ، $١ ، -١$

الجزء الثاني: تكامل الاقتران الأسي الطبيعي

① $\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + جـ$

② $\int هـ^{(أس+ب)} \, دس = \frac{1}{أ} \times هـ^{(أس+ب)} + جـ$

مثال (١٢) كتاب

أثبت أن $\int هـ^{(أس+ب)} \, دس = \frac{1}{أ} \times هـ^{(أس+ب)} + جـ$

الحل: $ص = أس + ب \leftarrow \frac{دص}{دس} = أ$

$دس = \frac{دص}{أ}$

$= \frac{1}{أ}\int هـ^{ص} \, دص = \frac{1}{أ} هـ^{ص} + جـ = \frac{1}{أ} هـ^{(أس+ب)} + جـ$

مثال (١٣): أوجد التكاملات الآتية

① $\int هـ^{(3س-5)} \, دس$

الحل $= \frac{1}{3} هـ^{(3س-5)} + جـ$

② $\int_{1}^{3} هـ^{4} \, دس$ (كتاب)

الحل $= هـ^{4}(3-1) = 2هـ^{4}$

③ $\int_{1}^{هـ^{2}} \frac{1}{هـ-1} \, دس$ (كتاب)

الحل $= \frac{1}{هـ-1}(هـ^{2}-1)$

$= \frac{(هـ+1)\cancel{(هـ-1)}}{\cancel{هـ-1}} = هـ + 1$

④ $\int (هـ^{س})^{-2} \, دس$

الحل $= \int هـ^{-2س} \, دس = \frac{-1}{2} هـ^{-2س} + جـ$

⑤ $\int \sqrt[3]{هـ^{2س}} \, دس$

الحل $= \int (هـ^{2س})^{\frac{1}{3}} \, دس$

$= \int هـ^{\frac{2}{3}س} \, دس = \frac{3}{2} هـ^{\frac{2}{3}س} + جـ$

⑥ $\int \frac{2}{هـ^{1-3س}} \, دس$

الحل $= \int 2 \, هـ^{(3س-1)} \, دس = \frac{2}{3} هـ^{(3س-1)} + جـ$

⑦ $\int هـ^{3س}(1 + هـ^{2س}) \, دس$ كتاب

الحل $= \int (هـ^{3س} + هـ^{5س}) \, دس$

$= \frac{1}{3} هـ^{3س} + \frac{1}{5} هـ^{5س} + جـ$

⑧ $\int (جاس + \frac{1}{هـ^{-2س}}) \, دس$

الحل $= \int (جاس + هـ^{2س}) \, دس$

$= -جتاس + \frac{1}{2} هـ^{2س} + جـ$

⑨ $\int (هـ^{س} - 3هـ^{2س})^{2} \, دس$

$= \int ((هـ^{س})^{2} - 6هـ^{3س} + 9(هـ^{2س})^{2}) \, دس$

$= \int (هـ^{2س} - 6هـ^{3س} + 9هـ^{4س}) \, دس$

$= \frac{1}{2} هـ^{2س} - 2هـ^{3س} + \frac{9}{4} هـ^{4س} + جـ$

⑩ $\int \frac{4هـ^{4س} - 3}{هـ^{4س} - 3س} \, دس$ كتاب

الحل

مشتقة المقام $= 4هـ^{4س} - 3$

$\int \frac{4هـ^{4س} - 3}{هـ^{4س} - 3س} \, دس = لو|هـ^{4س} - 3س| + جـ$

⑪ $\int \frac{4هـ^{2س} - 8هـ^{5س}}{2هـ^{س}} \, دس$

الحل $= \int \frac{\cancel{2هـ^{س}}(2هـ^{س} - 4هـ^{4س})}{\cancel{2هـ^{س}}} \, دس$

$= 2هـ^{س} - هـ^{4س} + جـ$

(١٢) $\int \frac{هـ^{2س} - 9}{هـ^{س} + 3} \, ءس$

الحل $= \int \frac{(هـ^{س})^{2} - 9}{هـ^{س} + 3} \, ءس = \int \frac{\cancel{(هـ^{س} + 3)}(هـ^{س} - 3)}{\cancel{هـ^{س} + 3}} \, ءس$

$= \int (هـ^{س} - 3) \, ءس = هـ^{س} - 3س + جـ$

(١٣) $\int \frac{هـ^{3س} - 27}{هـ^{س} - 3} \, ءس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{(هـ^{س})^{3} - 27}{هـ^{س} - 3} \, ءس$

$= \int \frac{\cancel{(هـ^{س} - 3)}(هـ^{2س} + 6هـ^{س} + 9)}{\cancel{هـ^{س} - 3}} \, ءس$

$= \frac{1}{2}هـ^{2س} + 6هـ^{س} + 9س + جـ$

(١٤) $\int \frac{1}{هـ^{س} + 1} \, ءس$ (٢٠١٤ ش)

الحل $\int \frac{1}{هـ^{س}(1 + هـ^{-س})} \, ءس = \int \frac{هـ^{-س}}{1 + هـ^{-س}} \, ءس$

$= - \int \frac{-هـ^{-س}}{1 + هـ^{-س}} \, ءس = - لو_{هـ} |1 + هـ^{-س}| + جـ$

(١٥) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}} \, ءس$ (٢٠١٤ ص)

الحل

$= \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}}} \, ءس = \int \frac{هـ^{س}}{\frac{هـ^{2س} + 1}{هـ^{س}}} \, ءس$

$= \int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 1} \, ءس = 2 \int \frac{\frac{1}{2} هـ^{2س}}{هـ^{2س} + 1} \, ءس$

$= 2 \, لو_{هـ} |هـ^{2س} + 1| + جـ$

(١٦) $\int هـ^{5س} \sqrt{هـ^{2س} + 4هـ^{س} + 4} \, ءس$ (كتاب)

$= \int هـ^{5س} \sqrt{(هـ^{س} + 2)^{2}} \, ءس$

$= \int هـ^{5س} (هـ^{س} + 2) \, ءس$

$= \int (هـ^{6س} + 2هـ^{5س}) \, ءس$

$= \frac{1}{6} هـ^{6س} + \frac{2}{5} هـ^{5س} + جـ$

(١٧) $\int 3س \, هـ^{(2 + لو_{هـ} س^{2})} \, ءس$ (كتاب)

الحل $= \int 3س (هـ^{2} + هـ^{لو_{هـ} س^{2}}) \, ءس$

$= \int 3س (هـ^{2} + س^{2}) \, ءس$

$= \int 3هـ^{2} س + 3س^{3} \, ءس$

$= \frac{3}{2} هـ^{2} س^{2} + \frac{3س^{4}}{4} + جـ$

(١٨) $\int_{0}^{2} |هـ^{2س-1} - هـ| \, ءس$ (٢٠١٧ ص)

الحل $|هـ^{2س-1} - هـ|$

$هـ^{2س-1} - هـ = 0 \leftarrow هـ^{2س-1} = هـ \leftarrow هـ^{2س-1} = هـ^{1}$

$2س - 1 = 1 \leftarrow \boxed{س = 1}$

$-(هـ^{2س-1} - هـ)$ ، $هـ^{2س-1} - هـ$
0 — 1 + 2

$= \int_{0}^{1} -(هـ^{2س-1} - هـ) \, ءس + \int_{1}^{2} (هـ^{2س-1} - هـ) \, ءس$

$= \left[هـس - \frac{1}{2}هـ^{2س-1} \right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{2}هـ^{2س-1} - هـس \right]_{1}^{2}$

$= \frac{هـ}{2} + \frac{هـ^{-1}}{2} + \frac{هـ^{3}}{2} - \frac{هـ}{2}$

$= \frac{-2هـ + هـ^{-1} + هـ^{3}}{2}$

مثال (١٤) (كتاب) + (٢٠١٤ ص)

إذا كان $ق''(س) = جاس + هـ^{2س}$ ، $ق(0) = \frac{1}{4}$ ، $ق'(0) = \frac{1}{2}$ ، جد قاعدة الاقتران $ق(س)$.

الحل $ق'(س) = \int ق''(س) \, ءس = \int (جاس + هـ^{2س}) \, ءس$

$ق'(س) = - جتاس + \frac{1}{2} هـ^{2س} + جـ$

$ق'(0) = \frac{1}{2} \leftarrow -1 + \frac{1}{2} + جـ = \frac{1}{2}$

$\leftarrow جـ = 1$ ، $ق'(س) = - جتاس + \frac{1}{2} هـ^{2س} + 1$

$ق(س) = \int ق'(س) \, ءس = \int (- جتاس + \frac{1}{2} هـ^{2س} + 1) \, ءس$

$ق(س) = - جاس + \frac{1}{4} هـ^{2س} + س + جـ^{*}$

$ق(0) = \frac{1}{4} \leftarrow 0 + \frac{1}{4} + 0 + جـ^{*} = \frac{1}{4} \leftarrow \boxed{جـ^{*} = 0}$

$ق(س) = - جاس + \frac{1}{4} هـ^{2س} + س$

ورقة عمل (٥)

السؤال الأول:

أوجد المشتقة الأولى في كل من الآتي

① $ص = \sqrt{هـ^{(٢س^٣)}}$

الجواب $٣س^٢ هـ^{س^٣}$

② $ص = \frac{هـ^س + ١}{هـ^س}$

الجواب $-هـ^{-س}$

③ ١٩٩٧ $ص = هـ^{س^٢} \times لو_{هـ} س^٣$

الجواب $\frac{٣هـ^{س^٢}}{س} + ٦س هـ^{س^٢} لو_{هـ} س$

④ $ص = هـ^{٤س} + لو_{هـ} ظاس + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{دس}{١ + جتا^٢ س}$ ، $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٤}}$

الجواب $٤هـ^{\pi} + ٢$

⑤ $\int ق(س) دس = هـ^{س^٢} + لو_{هـ} جاس + جـ$ ، $ق(س)$

الجواب: $ق(س) = ٤س هـ^{س^٢} + ٢هـ^{س^٢} - قتا^٢ س$

⑥ ٢٠١٣ ص $ق(س) = هـ^{جا^٢ \frac{\pi}{٤}} + لو_{هـ}(١ - جتا^٢ س)$ ، $ق'(\frac{\pi}{٤})$

$\boxed{٢}$

السؤال الثاني (٢٠١٦ ش)

إذا كان $ق(س) = \int (هـ^{جتا ٢س} + جا ٢س) دس$

جد $ق'(\frac{\pi}{٤})$ ، $\boxed{-٢}$

السؤال الثالث

① إذا كان $ص^٢ = لو_{هـ} س ص - هـ^{س^٢}$

أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص - ٢س^٢ ص هـ^{س^٢}}{٢س ص^٢ - س}$

② إذا كان $هـ^{س ص} = س + ص$ ، أثبت أن

$\frac{دص}{دس} = \frac{١ - س ص - ص^٢}{س^٢ + س ص - ١}$

③ (كتاب) + (٢٠١٣ ص)

$ص = (٤)^{ق(س)}$ ، أثبت أن

$\frac{دص}{دس} = (٤)^{ق(س)} \times ق'(س) \times لو_{هـ} ٤$

السؤال الرابع: (كتاب)

جد المشتقة الأولى لكل من الآتي

① $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ} \sqrt{س}$

الجواب $\frac{-١}{س^٢ هـ^{-\frac{١}{س}}} + \frac{١}{٢س}$

② $ص = \sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

الجواب: $\frac{هـ^{٢س}}{\sqrt{١ + هـ^{٢س}}}$

③ $ص = هـ^٢ + س^٣ هـ^{جاس}$

الجواب $س^٣ جتاس هـ^{جاس} + ٣س^٢ هـ^{جاس}$

④ $ص = (هـ^{٤س+٥})^٦$

الجواب: $٢٤ هـ^{(٢٤س+٣٠)}$

السؤال الخامس: جد التكاملات الآتية

① $\int هـ^س (هـ^{٣س} - ٢هـ^{٥س}) دس$

الجواب $\frac{١}{٤}هـ^{٤س} - \frac{١}{٣}هـ^{٦س} + جـ$

② $\int \frac{هـ^س + هـ^{-س}}{هـ^س} دس$ ، الجواب $س - \frac{١}{٢}هـ^{-٢س} + جـ$

③ $\int_{٠}^{١} (١ + هـ^س)^٢ دس$ (كتاب)

④ ٢٠٠٨ ش $\int_{٠}^{لو_{هـ} ٢} هـ^س (٩ - ٤هـ^س) دس$ ، $\boxed{٣}$

⑤ $\int_{٠}^{لو_{هـ} ٣} \frac{هـ^س}{٤ + هـ^س} دس$ ، $\boxed{لو_{هـ} \frac{٧}{٥}}$

الدرس السادس : التكامل بالتعويض

تعلمت سابقاً أن التكامل لا يوزع على عمليتي الضرب والقسمة ويصعب حله باستخدام قواعد التكامل في هذه الحالة نلجأ لطرق أخرى تسمى طرائق التكامل وهي

① التكامل بالتعويض
② التكامل بالأجزاء
③ التكامل بالكسور الجزئية

التكامل بالتعويض

يستخدم التكامل بالتعويض عند تكامل حاصل ضرب أو قسمة اقترانين أحداهما مشتقة الآخر أو جزء منها

خطوات استخدام التعويض لإجراء التكامل

$\int$ م(هـ(س)) × هـَ(س) ء س

① نفرض ص = هـ(س)

② نشتق $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = هـَ(س)

③ نجد ءس = $\frac{\text{ءص}}{\text{المشتقة}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{هـَ(س)}}$

④ نستبدل : نجعل التكامل بدلالة (ص)

⑤ نختصر إن أمكن

⑥ نجد التكامل مستخدماً قواعد التكامل

الجزء الأول : التكامل بالتعويض بشكل مباشر

① $\int$ مَ(س) × (م(س))^{ن} ءس

$\int \frac{\text{مَ(س)}}{(\text{م(س)})^{ن}}$ ءس

نفرض ص = م(س) ما داخل القوس

② $\int$ مَ(س) = $\sqrt[ن]{\text{م(س)}}$ ءس

$\int \frac{\text{مَ(س)}}{\sqrt[ن]{\text{م(س)}}}$ ءس

ص = م(س) ما داخل الجذر

أو ص = $\sqrt[ن]{\text{م(س)}}$ الجذر نفسه

③ $\int$ مَ(س) × هـ$^{\text{م(س)}}$ ءس

م(س) ≠ أس + ب

دائماً إذا كان الأس غير خطي

نفرض ص = الأس = م(س)

④ $\int$ مَ(س) × دائري (زاوية ليست خطية)$^{\text{م(س)}}$

دائماً إذا كانت الزاوية ليست خطية

نفرض ص = الزاوية = م(س)

⑤ $\int$ دائري × دائري ءس

$\int \frac{\text{دائري}}{\text{دائري}}$ ءس

أحداهما مشتقة الآخر

ص = الاقتران الذي مشتقته متوفرة

مثال (١) أوجد التكاملات الآتية

① $\int ٢س\,(س^{٢}+١)^{٧}\,ءس$

الحل: $ص = س^{٢}+١$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$ ، $ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$= \int ٢س\,ص^{٧}\,\frac{ءص}{٢س} = \int ص^{٧}\,ءص$

$= \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ = \frac{(س^{٢}+١)^{٨}}{٨} + جـ$

② $\int_{٠}^{١} س\,(١+س^{٢})^{٤}\,ءس$ (٢٠٠٥)

الحل: $= \int_{١}^{٢} س\,ص^{٤}\,\frac{ءص}{٢س}$

$ص = ١+س^{٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$ءس = \frac{ءص}{٢س}$

$س = ٠ \leftarrow ص = ١$

$س = ١ \leftarrow ص = ٢$

$= \frac{١}{٢}\int_{١}^{٢} ص^{٤}\,ءص$

$= \frac{١}{١٠}\,ص^{٥}\Big|_{١}^{٢}$

$= \frac{٣١}{١٠}$

③ $\int \frac{١٠س - ٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢}-س+١)^{٢}}}\,ءس$ (كتاب)

الحل: $\int \frac{١٠س-٥}{\sqrt[٣]{ص^{٢}}}\,\frac{ءص}{٢س-١}$

$ص = س^{٢}-س+١$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س-١$

$ءس = \frac{ءص}{٢س-١}$

$= \int \frac{٥(٢س-١)}{\sqrt[٣]{ص^{٢}}}\,\frac{ءص}{٢س-١}$

$= \int ٥\,ص^{-\frac{٢}{٣}}\,ءص$

$= ٥ \times ٣ص^{\frac{١}{٣}} + جـ = ١٥\sqrt[٣]{س^{٢}-س+١} + جـ$

④ $\int \frac{(٥+\sqrt{س})^{٧}}{\sqrt{س}}\,ءس$ (كتاب)

الحل: $= \int \frac{(٥+ص)^{٧}}{ص} \times ٢ص\,ءص$

$ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} = س$

$٢ص\frac{ءص}{ءس} = ١$

$ءس = ٢ص\,ءص$

$= \int ٢(٥+ص)^{٧}\,ءص$

$= ٢\,\frac{(٥+ص)^{٨}}{٨} + جـ$

$= \frac{١}{٤}(٥+\sqrt{س})^{٨} + جـ$

⑤ $\int \frac{ءس}{س\sqrt{لو_{هـ}س+١}}$ (كتاب)

الحل: $= \int \frac{٢س\,ص}{س\,ص}\,ءص$

$ص = \sqrt{لو_{هـ}س+١}$

$ص^{٢} = لو_{هـ}س+١$

$٢ص\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$

$ءس = ٢س\,ص\,ءص$

$= \int ٢\,ءص$

$= ٢ص + جـ$

$= ٢\sqrt{لو_{هـ}س+١} + جـ$

⑥ $\int_{٠}^{٤} س\sqrt{س^{٢}+٩}\,ءس$ (ص ٢٠٠٦)

الحل: $\int_{٣}^{٥} س\,ص \times \frac{ص}{س}\,ءص$

$ص = \sqrt{س^{٢}+٩}$

$ص^{٢} = س^{٢}+٩$

$٢ص\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$ءس = \frac{ص}{س}\,ءص$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٣$

$س = ٤ \leftarrow ص = ٥$

$= \int_{٣}^{٥} ص^{٢}\,ءص$

$= \frac{ص^{٣}}{٣}\Big|_{٣}^{٥} = \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٢٧}{٣}$

$= \frac{٩٨}{٣}$

⑦ $\int جاس\,(١+جتا٢س)^{٥}\,ءس$ (كتاب)

الحل: $= \int جاس\,(١+٢جتا^{٢}س-١)^{٥}\,ءس$

$= \int جاس\,(٢جتا^{٢}س)^{٥}\,ءس$

$= \int ٣٢\,جاس\,جتا^{١٠}س\,ءس$

$ص = جتاس$

$\frac{ءص}{ءس} = -جاس$

$ءس = \frac{-ءص}{جاس}$

$= \int -٣٢\,\cancel{جاس}\,ص^{١٠}\,\frac{ءص}{\cancel{جاس}}$

$= \int -٣٢\,ص^{١٠}\,ءص$

$= -٣٢\,\frac{ص^{١١}}{١١} + جـ = \frac{-٣٢}{١١}\,جتا^{١١}س + جـ$

⑧ $\int ظتا^{٥}س\,قتا^{٢}س\,ءس$

الحل

$ص = ظتاس$

$\frac{ءص}{ءس} = -قتا^{٢}س$

$ءس = \frac{-ءص}{قتا^{٢}س}$

$\int ص^{٥}\,\cancel{قتا^{٢}س} \times \frac{-ءص}{\cancel{قتا^{٢}س}}$

$= \int -ص^{٥}\,ءص$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ = \frac{-١}{٦}\,ظتا^{٦}س + جـ$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

(٩) $\int (٣ + \text{قتا}^2\text{س})\,\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

الحل $= \int (٣\,\text{ظتا}^2\text{س} + \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س})\ \text{ءس}$

$= \int ٣\,\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس} + \int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

* $\int ٣\,\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس} = ٣\int (\text{قتا}^2\text{س} - ١)\ \text{ءس}$

$= ٣(-\text{ظتاس} - \text{س})$

* $\int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$

$= \int \text{ص}^2\,\cancel{\text{قتا}^2\text{س}}\ \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{قتا}^2\text{س}}}$

$= \int -\text{ص}^2\ \text{ءص} = -\frac{\text{ص}^3}{٣} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{ظتا}^3\text{س} + \text{جـ}$

* $\int (٣ + \text{قتا}^2\text{س})\,\text{ظتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$= -٣\,\text{ظتاس} - ٣\text{س} - \frac{١}{٣}\,\text{ظتا}^3\text{س} + \text{جـ}$

(١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}\,٢\text{س}}{\sqrt{١ + \text{جتا}^2\text{س}}}\ \text{ءس}$ (الكتاب)

الحل

$\text{ص} = \sqrt{١ + \text{جتا}^2\text{س}}$

$\text{ص}^2 = ١ + \text{جتا}^2\text{س}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}\ \text{ءص}}{-\text{جاس}\ \text{جتاس}}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = \sqrt{٢}$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \leftarrow \text{ص} = ١$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}}{\sqrt{١ + \text{جتا}^2\text{س}}}$

$= \int_{\sqrt{٢}}^{١} \frac{٢\,\cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}}\ \text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}}$

$= \int_{\sqrt{٢}}^{١} -٢\ \text{ءص}$

$= -٢(١ - \sqrt{٢})$

(١١) $\int \frac{\text{جاس}\sqrt{\text{جا}^2\text{س} + ٤}}{\text{قاس}}\ \text{ءس}$ (الكتاب)

الحل

$= \int \text{جاس}\ \text{جتاس}\sqrt{\text{جا}^2\text{س} + ٤}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{جا}^2\text{س} + ٤}$

$\text{ص}^2 = \text{جا}^2\text{س} + ٤$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}\ \text{ءص}}{\text{جاس}\ \text{جتاس}}$

$= \int \cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}\ \text{ص} \times \frac{\text{ص}\ \text{ءص}}{\cancel{\text{جاس}\ \text{جتاس}}}$

$= \int \text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{٣} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\left(\sqrt{\text{جا}^2\text{س} + ٤}\right)^3 + \text{جـ}$

(١٢) $\int (\text{س}^2 - ٢)\,\text{جتا}(\text{س}^3 - ٦\text{س})\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3 - ٦\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^2 - ٦$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٣\text{س}^2 - ٦}$

$= \int \cancel{(\text{س}^2 - ٢)}\ \text{جتاص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{٣\text{س}^2 - ٦}_{٣}}$

$= \int \frac{١}{٣}\,\text{جتاص}\ \text{ءص} = \frac{١}{٣}\,\text{جاص} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{جا}(\text{س}^3 - ٦\text{س}) + \text{جـ}$

(١٣) $\int \frac{\text{قتا}^2\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{\text{قتا}^2\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}}\ ٢\cancel{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= \int ٢\,\text{قتا}^2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -٢\,\text{ظتاص} + \text{جـ}$

$= -٢\,\text{ظتا}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

(١٤) $\int \text{جتاس}\ \text{قتا}^2(\text{جاس})\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

الحل $= \int \cancel{\text{جتاس}}\ \text{قتا}^2\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \text{قتا}^2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= -\text{ظتاص} + \text{جـ}$

$= -\text{ظتا}(\text{جاس}) + \text{جـ}$

(١٥) $\int \frac{\text{س}\ \text{ظا}^2\sqrt{\text{س}^2 + ١}}{\sqrt{\text{س}^2 + ١}}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 + ١}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^2 + ١$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{ظا}^2\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}}\ \frac{\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}}}\ \text{ءص}$

$= \int \text{ظا}^2\text{ص}\ \text{ءص}$

$= \int (\text{قا}^2\text{ص} - ١)\ \text{ءص}$

$= \text{ظاص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \text{ظا}\sqrt{\text{س}^2 + ١} - \sqrt{\text{س}^2 + ١} + \text{جـ}$

(١٦) (٢٠١٦ ش)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{جا}٢\text{س}\ \text{جتاس}}\ \text{ءس}$$

الحل

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جاس جتاس جتاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س جاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}\,(١+\text{جاس})}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^2\text{س}}\ \sqrt{١+\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\text{جتاس}|\ \sqrt{١+\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

$|\text{جتاس}|$: جتاس على $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، $-$جتاس على $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\sqrt{١+\text{جاس}}\ \text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتاس}\sqrt{١+\text{جاس}}\ \text{ءس}$$

$\text{ص} = \sqrt{١+\text{جاس}}$

$\text{ص}^2 = ١+\text{جاس}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{٢\text{ص}\ \text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = \sqrt{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = \sqrt{٢}$

$\text{س} = \pi \leftarrow \text{ص} = ١$

$$= \int_{\sqrt{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}}^{\sqrt{٢}} \cancel{\text{جتاس}}\ \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ءص} + \int_{\sqrt{٢}}^{١} -\cancel{\text{جتاس}}\ \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ءص}$$

$$= \int_{\sqrt{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}}^{\sqrt{٢}} ٢\text{ص}^2\ \text{ءص} + \int_{\sqrt{٢}}^{١} -٢\text{ص}^2\ \text{ءص}$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{ص}^3 \Big|_{\sqrt{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}}^{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{٣}\text{ص}^3 \Big|_{\sqrt{٢}}^{١}$$

$$\frac{٢}{٣}(\sqrt{٢})^3 - \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}\right)^3 - \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣}(\sqrt{٢})^3$$

$$= \frac{٤}{٣}(\sqrt{٢})^3 - \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{١+\frac{١}{\sqrt{٢}}}\right)^3 - \frac{٢}{٣}$$

(١٧)

$$\int_{0}^{٢} \text{س}\ [\text{س}^2 - ٣]\ \text{ءس}$$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^2 - ٣$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = -٣$

$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = ١$

$$= \int_{-٣}^{١} \cancel{\text{س}}\ [\text{ص}]\ \frac{\text{ءص}}{٢\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٢}\int_{-٣}^{١} [\text{ص}]\ \text{ءص}$$

$\text{ص} = ٠$ ، $١ = ١$

$-٣, -٢, -١, ٠, ١$

$$= \int_{-٣}^{-٢} \frac{-٣}{٢}\ \text{ءص} + \int_{-٢}^{-١} -١\ \text{ءص} + \int_{-١}^{٠} \frac{-١}{٢}\ \text{ءص} + \int_{٠}^{١} ٠\ \text{ءص}$$

$$= -٣$$

(١٨)

$$\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س}}\ \text{ءس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

$$\int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص} + ٢\text{ص}^2}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}(١ + ٢\text{ص})}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{٢}{١ + ٢\text{ص}}\ \text{ءص}$$

$$= \text{لوهـ}|٢\text{ص} + ١| + \text{ج}$$

$$= \text{لوهـ}|٢\sqrt{\text{س}} + ١| + \text{ج}$$

(١٩)

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١}\ \text{ءس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}$

$٢\text{ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ءس} = ٢\text{ص}\ \text{ءص}$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2 \times \text{ص} + ١} \times ٢\text{ص}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}^2}{\text{ص}^3 + ١}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{٢}{٣}\int \frac{٣\text{ص}^2}{\text{ص}^3 + ١}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{٢}{٣}\ \text{لوهـ}|\text{ص}^3 + ١| + \text{ج}$$

$$= \frac{٢}{٣}\ \text{لوهـ}|(\sqrt{\text{س}})^3 + ١| + \text{ج}$$

(٢٠) (كتاب)

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}\ \text{ءس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$

$\text{ص}^3 = \text{س}$

$٣\text{ص}^2\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\text{ءس} = ٣\text{ص}^2\ \text{ءص}$

$$= \int \frac{٣\text{ص}^3}{٥ - \text{ص}^4}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\int \frac{-٤\text{ص}^3}{٥ - \text{ص}^4}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\ \text{لوهـ}|٥ - \text{ص}^4| + \text{ج}$$

$$= \frac{-٣}{٤}\ \text{لوهـ}|٥ - (\sqrt[3]{\text{س}})^4| + \text{ج}$$

(٢١) $\int \frac{1}{\text{س}} \text{جا}^2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ءس} = \text{س ءص}$

$= \int \frac{1}{\text{س}} \text{جا}^2\text{ص}\ \text{س ءص}$

$= \int \text{جا}^2\text{ص ءص}$

$= \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{ص})\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{2}(\text{ص} - \frac{1}{2}\text{جا}2\text{ص}) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2}\text{جا}(2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\right) + \text{جـ}$

(٢٢) $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس ءس}$ (٢٠١٤ش معدل)

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{ظتاس}}$

$= \int \cancel{\text{ظتاس}} \times \text{ص} \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ظتاس}}}$

$= \int \text{ص ءص}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = \frac{1}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})^2 + \text{جـ}$

(٢٣) $\int \frac{1}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ءس} = \text{س ءص}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}\ \text{ص}}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

(٢٤) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+1}}{\text{س}+1}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}}{\text{س}+1}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{2} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)}{\text{س}+1}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1)$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}+1}$ ، $\text{ءس} = (\text{س}+1)\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{2} \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+1}} \cancel{(\text{س}+1)}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{2}\text{ص ءص} = \frac{\text{ص}^2}{4} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4}(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+1))^2 + \text{جـ}$

(٢٥) $\int \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}{\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{ءس} = \text{س ءص}$

$= \int \frac{\text{ص}^2}{\text{س}} \times \text{س ءص}$

$= \int \text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{جـ} = \frac{1}{3}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^3 + \text{جـ}$

(٢٦) $\int_0^1 \text{س}^2\ \text{هـ}^{\text{س}^3+1}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3+1$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 1$ ، $\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2$

$= \int_1^2 \cancel{\text{س}^2}\ \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$= \int_1^2 \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}}\Big|_1^2$

$= \frac{1}{3}(\text{هـ}^2 - \text{هـ})$

(٢٧) $\int \text{جا}2\text{س}\ \text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{جتا}^2\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\text{جتاس جاس} = -\text{جا}2\text{س}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جا}2\text{س}}$

$= \int \cancel{\text{جا}2\text{س}}\ \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جا}2\text{س}}}$

$= \int -\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$

$= -\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = -\text{هـ}^{\text{جتا}^2\text{س}} + \text{جـ}$

(٢٨) $\int \text{هـ}^{2\text{س}}\ \text{جتا}^2(\text{هـ}^{2\text{س}})\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{هـ}^{2\text{س}}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\text{هـ}^{2\text{س}}}$

$= \int \cancel{\text{هـ}^{2\text{س}}}\ \text{جتا}^2\text{ص} \frac{\text{ءص}}{2\cancel{\text{هـ}^{2\text{س}}}}$

$= \int \frac{1}{2}\text{جتا}^2\text{ص ءص}$

$= \int \frac{1}{4}(1 + \text{جتا}2\text{ص})\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{4}(\text{ص} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{ص}) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4}(\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{هـ}^{2\text{س}}) + \text{جـ}$

(٢٩) $\int_1^2 \frac{هـ^{\frac{3}{س}}}{س^2} \, دس$ (كتاب)

الحل

$ص = \frac{3}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-3}{س^2}$

$دس = \frac{-س^2}{3} \, دص$

$س = 1 \leftarrow ص = 3$ ، $س = 2 \leftarrow ص = \frac{3}{2}$

$= \int_{3}^{\frac{3}{2}} \frac{هـ^{ص}}{\cancel{س^2}} \times \frac{-\cancel{س^2}}{3} \, دص$

$= \frac{-1}{3} \int_{3}^{\frac{3}{2}} هـ^{ص} \, دص$

$= \frac{-1}{3} هـ^{ص} \Big|_{3}^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{-1}{3} \left(هـ^{\frac{3}{2}} - هـ^{3} \right)$

(٣٠) $\int \frac{س هـ^{س^2}}{1 + هـ^{س^2}} \, دس$

الحل

$ص = هـ^{س^2}$

$\frac{دص}{دس} = 2س هـ^{س^2}$

$دس = \frac{دص}{2س هـ^{س^2}}$

$= \int \frac{\cancel{س هـ^{س^2}}}{1 + ص} \cdot \frac{دص}{2\cancel{س هـ^{س^2}}}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{ص + 1} \, دص$

$= \frac{1}{2} لو|1 + ص| + ج = \frac{1}{2} لو|1 + هـ^{س^2}| + ج$

الجزء الثاني:
التكامل بالتعويض ثم الرجوع للفرض مرة أخرى

تستخدم هذه الحالة بعد الفرض والاختصار لكن يتبقى وجود من المتغير بعد الاختصار نرجع للفرض لاستبداله

مثال (٣) جد التكاملات الآتية

(١) $\int س^7 \sqrt{س^4 - 3} \, دس$ (كتاب)

الحل

$ص = \sqrt{س^4 - 3}$

$ص^2 = س^4 - 3$

$2ص \frac{دص}{دس} = 4س^3$

$دس = \frac{2ص \, دص}{4س^3}$

$= \int س^7 ص \times \frac{ص}{2س^3} \, دص$

$= \int \frac{1}{2} س^4 ص^2 \, دص$ | $س^4 = ص^2 + 3$

$= \int \frac{1}{2} ص^2 (ص^2 + 3) \, دص$

$= \int \left(\frac{1}{2} ص^4 + \frac{3}{2} ص^2 \right) دص$

$= \frac{1}{10} ص^5 + \frac{1}{2} ص^3 + ج$

$= \frac{1}{10} \left(\sqrt{س^4 - 3} \right)^5 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{س^4 - 3} \right)^3 + ج$

(٢) $\int س^2 \sqrt[3]{س - 1} \, دس$

الحل

$ص = \sqrt[3]{س - 1}$

$ص^3 = س - 1$

$3ص^2 \frac{دص}{دس} = 1$

$دس = 3ص^2 \, دص$

$\boxed{س = ص^3 + 1}$

$= \int س^2 ص \times 3ص^2 \, دص$

$= \int (ص^3 + 1)^2 \times 3ص^3 \, دص$

$= \int 3ص^3 (ص^6 + 2ص^3 + 1) \, دص$

$= \int (3ص^9 + 6ص^6 + 3ص^3) \, دص$

$= \frac{3ص^{10}}{10} + \frac{6ص^7}{7} + \frac{3ص^4}{4} + ج$

$= \frac{3}{10} \left(\sqrt[3]{س - 1} \right)^{10} + \frac{6}{7} \left(\sqrt[3]{س - 1} \right)^{7} + \frac{3}{4} \left(\sqrt[3]{س - 1} \right)^{4} + ج$

(٣) $\int 2س^5 (س^3 + 5)^4 \, دس$ (كتاب)

الحل

$ص = س^3 + 5$

$\frac{دص}{دس} = 3س^2$

$دس = \frac{دص}{3س^2}$

$= \int 2س^5 ص^4 \frac{دص}{3س^2}$

$= \int \frac{2}{3} س^3 ص^4 \, دص$ $\boxed{س^3 = ص - 5}$

$= \frac{2}{3} \int (ص - 5) ص^4 \, دص$

$= \frac{2}{3} \int (ص^5 - 5ص^4) \, دص$

$= \frac{2}{3} \left(\frac{ص^6}{6} - ص^5 \right) + ج$

$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} (س^3 + 5)^6 - (س^3 + 5)^5 \right) + ج$

④ $\int \frac{\text{ء}س}{\sqrt{1-\sqrt{س}}}$

الحل

$= \int \frac{-4\,\cancel{ص}\sqrt{س}\,\text{ء}ص}{\cancel{ص}}$

$= \int -4\sqrt{س}\,\text{ء}ص$

$= \int -4(1-ص^2)\,\text{ء}ص$

$= -4\left(ص-\frac{ص^3}{3}\right)+ج$

$ص = \sqrt{1-\sqrt{س}}$

$ص^2 = 1-\sqrt{س}$

$2ص\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = \frac{-1}{2\sqrt{س}}$

$\text{ء}س = -4ص\sqrt{س}\,\text{ء}ص$

* $\sqrt{س} = 1-ص^2$

$= -4\left(\sqrt{1-\sqrt{س}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-\sqrt{س}}\right)^3\right)+ج$

* يمكن فرض $ص = 1-\sqrt{س}$

⑤ $\int_0^4 \frac{س^3}{\sqrt{(س^2+9)^3}}\,\text{ء}س$ (كتاب ب) ٢٠١٥ ص

الحل

$= \int_9^{25} \frac{س^3}{\sqrt{ص^3}}\cdot\frac{\text{ء}ص}{2س}$

$= \int_9^{25} \frac{س^2}{2\sqrt{ص^3}}\,\text{ء}ص$

$= \int_9^{25} \frac{ص-9}{2ص^{\frac{3}{2}}}\,\text{ء}ص$

$ص = س^2+9$

$\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = 2س$

$\text{ء}س = \frac{\text{ء}ص}{2س}$

$س^2 = ص-9$

$س = 0 \leftarrow ص = 9$

$س = 4 \leftarrow ص = 25$

$= \frac{1}{2}\int_9^{25}\left(ص^{-\frac{1}{2}} - 9ص^{-\frac{3}{2}}\right)\text{ء}ص$

$= \frac{1}{2}\left(2ص^{\frac{1}{2}} - 9\times -2ص^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_9^{25}$

$= \sqrt{ص} + \frac{9}{\sqrt{ص}}\Big|_9^{25} = \frac{4}{5}$

⑥ $\int س^{14}(س^5+1)^7\,\text{ء}س$

الحل $ص = س^5+1$ ، $\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = 5س^4$

$\text{ء}س = \frac{\text{ء}ص}{5س^4}$ ، $س^5 = ص-1$

$\int س^{14}\,ص^7\,\frac{\text{ء}ص}{5س^4} = \frac{1}{5}\int س^{10}ص^7\,\text{ء}ص$

$= \frac{1}{5}\int (س^5)^2 ص^7\,\text{ء}ص$

$= \frac{1}{5}\int ص^7(ص-1)^2\,\text{ء}ص$

$= \frac{1}{5}\int ص^7(ص^2-2ص+1)\,\text{ء}ص$

$= \frac{1}{5}\int (ص^9 - 2ص^8 + ص^7)\,\text{ء}ص$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{ص^{10}}{10} - \frac{2ص^9}{9} + \frac{ص^8}{8}\right)+ج$

$= \frac{1}{5}\left(\frac{(س^5+1)^{10}}{10} - \frac{2(س^5+1)^9}{9} + \frac{(س^5+1)^8}{8}\right)+ج$

⑦ $\int قاس\,(قاس+ظاس)^4\,\text{ء}س$

الحل

$= \int \frac{\cancel{قاس}\,ص^{\cancel{4}}\,\text{ء}ص}{\cancel{ص}\,\cancel{قاس}}$

$= \int ص^3\,\text{ء}ص$

$= \frac{ص^4}{4}+ج$

$ص = قاس + ظاس$

$\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = قاس\,ظاس + قا^2س$

$\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = قاس\,(قاس+ظاس)$

$\text{ء}س = \frac{\text{ء}ص}{قاس\,(قاس+ظاس)}$

$= \frac{1}{4}(قاس+ظاس)^4+ج$

⑧ $\int \frac{\sqrt{ظتاس}}{جا2س}\,\text{ء}س$

$= \int \frac{ص}{2جاس\,جتاس}\times\frac{-2ص}{قتا^2س}\,\text{ء}ص$

$= \int \frac{-ص^2}{جتاس\,قتاس}\,\text{ء}ص$

$= \int \frac{-ص^2}{ظتاس}\,\text{ء}ص$

$= \int \frac{-ص^2}{ص^2}\,\text{ء}ص$

$ص = \sqrt{ظتاس}$

$ص^2 = ظتاس$

$2ص\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = -قتا^2س$

$\text{ء}س = \frac{-2ص}{قتا^2س}\,\text{ء}ص$

$= \int -\text{ء}ص = -ص+ج = -\sqrt{ظتاس}+ج$

⑨ $\int \frac{\sqrt[3]{ظتاس+3}}{2-2جتا^2س}\,\text{ء}س$ (كتاب ب)

الحل

$= \int \frac{ص}{2جا^2س}\times\frac{-3ص^2}{قتا^2س}\,\text{ء}ص$

$= \int -\frac{3}{2}ص^3\,\text{ء}ص$

$= -\frac{3}{2}\frac{ص^4}{4}+ج$

$ص = \sqrt[3]{ظتاس+3}$

$ص^3 = ظتاس+3$

$3ص^2\frac{\text{ء}ص}{\text{ء}س} = -قتا^2س$

$\text{ء}س = \frac{-3ص^2}{قتا^2س}\,\text{ء}ص$

$= -\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{ظتاس+3}\right)^4+ج$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

⑥ $\int \frac{\text{لوهـ ظاس}}{\text{جا}٢\text{س}}\,\text{دس}$ (٢٠١٦ ص)

الحل طـ١

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$

$= \int \frac{\text{لوهـ ص}}{٢\text{جاس جتاس}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{قا}^٢\text{س}}$

$= \int \frac{\text{لوهـ ص}}{٢\text{جاس جتاس}}\, \text{جتا}^٢\text{س}\, \text{دص}$

$= \int \frac{\text{لوهـ ص}}{٢\,\text{ظاس}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{لوهـ ص}}{٢\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{ع} = \text{لوهـ ص}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = \frac{١}{\text{ص}}$

$\text{دص} = \text{ص دع}$

$= \int \frac{\text{ع}}{٢\text{ص}}\,\text{ص دع}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{ع دع}$

$= \frac{١}{٤}\text{ع}^٢ + \text{جـ} = \frac{١}{٤}(\text{لوهـ ص})^٢ + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤}(\text{لوهـ ظاس})^٢ + \text{جـ}$

حل ٢

$= \int \frac{\text{ص}}{٢\text{جاس جتاس}} \cdot \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^٢\text{س}}\,\text{دص}$

$\text{ص} = \text{لوهـ ظاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}$

$\text{دس} = \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^٢\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{ص دص}$

$= \frac{١}{٤}\text{ص}^٢ + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤}(\text{لوهـ ظاس})^٢ + \text{جـ}$

الجزء الثالث :

توحيد مقامات، تحليل، تحليل أسس

اخراج عامل مشترك، ثم تعويض

ملاحظة

في حالة اخراج العامل المشترك يجب الانتباه إلى الاقتران الآخر المجاور للقوس أو الجذر

① كثير حدود (العامل المشترك القوة الأصغر)

② نسبي (العامل المشترك القوة الأكبر)

مثال (٣) : جد التكاملات الآتية

① $\int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٣}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}^٢}\right)^٥ \text{دس}$

الحل $= \int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٣\text{س} - ٥}{\text{س}^٢}\right)^٥ \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}^{١٠}}\, \frac{(٣\text{س} - ٥)^٥}{\cancel{\text{س}^{١٠}}}\,\text{دس}$

$= \int (٣\text{س} - ٥)^٥\,\text{دس} = \frac{(٣\text{س} - ٥)^٦}{١٨} + \text{جـ}$

② $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\;\text{دس}$ (كتاب)

الحل $\int \sqrt[٣]{\frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}} + ١}\;\text{دس} = \int \sqrt[٣]{\frac{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}}\;\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}}{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}$

$\text{ص}^٣ = \text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١$

$٣\text{ص}^٢ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣}{٤}\text{س}^{-\frac{١}{٤}}$

$\text{دس} = ٤\text{ص}^٢\,\text{س}^{\frac{١}{٤}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{٤\text{ص}^٣\,\text{س}^{\frac{١}{٤}}}{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}\,\text{دص}$

$= \int ٤\text{ص}^٣\,\text{دص}$

$= \text{ص}^٤ + \text{جـ} = \left(\sqrt[٣]{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}\right)^٤ + \text{جـ}$

③ $\int (٧\text{س}^٥ - ٢\text{س})^٣\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل $= \int (\text{س}(٧\text{س}^٤ - ٢))^٣\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^٣(٧\text{س}^٤ - ٢)^٣\,\text{دس}$

$\text{ص} = ٧\text{س}^٤ - ٢$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢٨\text{س}^٣$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢٨\text{س}^٣}$

$= \int \text{س}^٣\,\text{ص}^٣\,\frac{\text{دص}}{٢٨\text{س}^٣}$

$= \int \frac{١}{٢٨}\,\text{ص}^٣\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٢٨}\,\frac{\text{ص}^٤}{٤} + \text{جـ} = \frac{١}{١١٢}(٧\text{س}^٤ - ٢)^٤ + \text{جـ}$

④ $\int \sqrt[٣]{٤\text{س}^٥ + ٢\text{س}^٣}\;\text{دس}$ (كتاب)

الحل $\int \sqrt[٣]{\text{س}^٣(٤\text{س}^٢ + ٢)}\;\text{دس}$

$= \int \text{س}\,\sqrt[٣]{٤\text{س}^٢ + ٢}\;\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{٤\text{س}^٢ + ٢}$

$\text{ص}^٣ = ٤\text{س}^٢ + ٢$

$٣\text{ص}^٢\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٨\text{س}$

$\text{دس} = \frac{٣\text{ص}^٢}{٨\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int \text{س} \times \text{ص} \times \frac{٣\text{ص}^٢}{٨\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{٣}{٨}\,\text{ص}^٣\,\text{دص} = \frac{٣}{٣٢}\,\text{ص}^٤ + \text{جـ}$

$= \frac{٣}{٣٢}\left(\sqrt[٣]{٤\text{س}^٢ + ٢}\right)^٤ + \text{جـ}$

⑤ $\int س\,(س^2 - 4س + 4)^5\, دس$

الحل $= \int س\left((س-2)^2\right)^5 دس$

$= \int س\,(س-2)^{10}\, دس$ | $ص = س - 2$ ، $\frac{دص}{دس} = 1$ ، $دس = دص$ ، $س = ص + 2$

$= \int (ص+2)\,ص^{10}\, دص$

$= \int (ص^{11} + 2ص^{10})\, دص$

$= \frac{ص^{12}}{12} + \frac{2ص^{11}}{11} + جـ$

$= \frac{1}{12}(س-2)^{12} + \frac{2}{11}(س-2)^{11} + جـ$

⑥ $\int س^2 \sqrt[3]{س^7 - 5س^3}\, دس$ (كتاب)

الحل $= \int س^2 \sqrt[3]{س^3(س^4 - 5)}\, دس$

$= \int س^3 \sqrt[3]{س^4 - 5}\, دس$ | $ص = \sqrt[3]{س^4 - 5}$ ، $ص^3 = س^4 - 5$ ، $3ص^2 \frac{دص}{دس} = 4س^3$ ، $دس = \frac{3ص^2}{4س^3} دص$

$= \int س^3\, ص\, \frac{3ص^2}{4س^3}\, دص$

$= \int \frac{3}{4} ص^3\, دص$

$= \frac{3}{16} ص^4 + جـ$

$= \frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{س^4 - 5}\right)^4 + جـ$

⑦ $\int \frac{س^3}{(س+1)^5}\, دس$ كتاب

الحل $= \int \frac{س^3}{س^5 (1 + \frac{1}{س})^5}\, دس$

$= \int \frac{1}{س^2 (1 + \frac{1}{س})^5}\, دس$ | $ص = 1 + \frac{1}{س}$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{-1}{س^2}$ ، $دس = -س^2\, دص$

$= \int \frac{-س^2}{س^2\, ص^5}\, دص$

$= \int -ص^{-5}\, دص$

$= -\frac{ص^{-4}}{-4} + جـ = \frac{1}{4ص^4} + جـ$

$= \frac{1}{4(1 + \frac{1}{س})^4} + جـ$

⑧ $\int \frac{1}{س^{10} + س}\, دس$

الحل $= \int \frac{1}{س^{10}(1 + س^{-9})}\, دس$

$= \int \frac{-س^{10}}{9س^{10}\, ص}\, دص$ | $ص = 1 + س^{-9}$ ، $\frac{دص}{دس} = -9س^{-10}$ ، $دس = \frac{-س^{10}}{9} دص$

$= \int \frac{-1}{9ص}\, دص$

$= \frac{-1}{9} لوهـ|ص| + جـ$

$= \frac{-1}{9} لوهـ|1 + س^{-9}| + جـ$

⑨ $\int_1^2 س^4 \sqrt{\left(\frac{2 - س}{س^2}\right)^3}\, دس$ (كتاب) (٢٠١٧ ش)

الحل $\int_1^2 س^4 \sqrt{\frac{(2-س)^3}{س^6}}\, دس$

$= \int_1^2 \frac{س^4}{|س^3|}(2 - س)^{\frac{3}{2}}\, دس$

$|س^3| = \boxed{س^3}$

$= \int_1^2 س\,(2 - س)^{\frac{3}{2}}\, دس$ (٢٠١٧ ش)

$= -\int_1^0 (2 - ص)\, ص^{\frac{3}{2}}\, دص$ | $ص = 2 - س$ ، $\frac{دص}{دس} = -1$ ، $دس = -دص$ ، $س = 1 \leftarrow ص = 1$ ، $س = 2 \leftarrow ص = 0$ ، $س = 2 - ص$

$= \int_0^1 (2ص^{\frac{3}{2}} - ص^{\frac{5}{2}})\, دص$

$= \frac{4}{5} ص^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} ص^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1$

$= \frac{4}{5}\sqrt{ص^5} - \frac{2}{7}\sqrt{ص^7} \Big|_0^1 = \frac{18}{35}$

⑩ $\int \frac{\sqrt{س^2 - س^4}}{س^5}\, دس$

الحل $\int \frac{\sqrt{س^4(س^{-2} - 1)}}{س^5}\, دس$

$= \int \frac{س^2 \sqrt{س^{-2} - 1}}{س^5}\, دس$

$= \int \frac{\sqrt{س^{-2} - 1}}{س^3}\, دس$ | $ص = \sqrt{س^{-2} - 1}$ ، $ص^2 = س^{-2} - 1$ ، $2ص \frac{دص}{دس} = -2س^{-3}$ ، $دس = -ص\, س^3\, دص$

$= \int \frac{-ص^2 س^3}{س^3}\, دص$

$= -\int ص^2\, دص$

$= -\frac{1}{3} ص^3 + جـ$

$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{س^{-2} - 1}\right)^3 + جـ$

(11) $\int_1^2 \frac{(س+1)^5}{س^7} ءس$ (الكتاب)

الحل $= \int_1^2 \frac{س^5(1+\frac{1}{س})^5}{س^7} ءس$

$= \int_1^2 \frac{(1+\frac{1}{س})^5}{س^2} ءس$

$ص = 1 + \frac{1}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-1}{س^2}$

$ءس = -س^2 ءص$

$س = 1 \leftarrow ص = 2$

$س = 2 \leftarrow ص = \frac{3}{2}$

$= \int_2^{\frac32} \frac{ص^5}{س^2} \cdot -س^2 ءص$

$= -\int_2^{\frac32} ص^5 ءص$

$= -\frac{ص^6}{6}\Big|_2^{\frac32}$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{729}{64} - 64\right)$

$= \frac{64}{6} - \frac{243}{128} = \frac{3367}{256}$

(12) $\int_1^3 \frac{(س^2 - 6س + 9)^{\frac72}}{س^9} ءس$ (ص ٢٠١٧)

الحل $= \int_1^3 \frac{\sqrt{((س-3)^2)^7}}{س^9} ءس$

$= \int_1^3 \frac{(\sqrt{(س-3)^2})^7}{س^9} ءس = \int_1^3 \frac{(|3-س|)^7}{س^9} ءس$

$= \int_1^3 \frac{-(س-3)^7}{س^9} ءس = \int_1^3 \frac{-س^7(1-\frac{3}{س})^7}{س^9} ءس$

$= -\int_1^3 \frac{(1-\frac{3}{س})^7}{س^2} ءس$

$ص = 1 - \frac{3}{س}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{3}{س^2}$

$ءس = \frac{س^2}{3} ءص$

$س = 1 \leftarrow ص = -2$

$س = 3 \leftarrow ص = 0$

$= -\int_{-2}^{0} \frac{ص^7}{س^2} \cdot \frac{س^2}{3} ءص$

$= -\frac{1}{3}\int_{-2}^{0} ص^7 ءص$

$= -\frac{1}{24} ص^8 \Big|_{-2}^{0} = \frac{32}{3}$

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس - جتا^3س}\, ءس$ (الكتاب)

الحل $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس(1 - جتا^2س)}\, ءس$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |جاس| \sqrt{جتاس}\, ءس$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} جاس \sqrt{جتاس}\, ءس$

$ص = \sqrt{جتاس}$

$ص^2 = جتاس$

$2ص \frac{ءص}{ءس} = -جاس$

$ءس = \frac{-2ص}{جاس} ءص$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = 0$

$= \int_1^0 -جاس \cdot ص \cdot \frac{2ص}{جاس} ءص$

$= \int_0^1 2ص^2 ءص$

$= \frac{2}{3} ص^3 \Big|_0^1$

$= \frac{2}{3}$

(14) $\int هـ^{(س + 3هـ^س)}$ (٢٠٠٧ ش)

الحل $= \int هـ^س \times هـ^{3هـ^س} ءس$

$= \int هـ^س هـ^ص \frac{ءص}{3هـ^س}$

$ص = 3هـ^س$

$\frac{ءص}{ءس} = 3هـ^س$

$ءس = \frac{ءص}{3هـ^س}$

$= \int \frac{1}{3} هـ^ص ءص$

$= \frac{1}{3} هـ^ص + ج$

$= \frac{1}{3} هـ^{(3هـ^س)} + ج$

الجزء الرابع: تكامل الاقترانات المثلثية بالتعويض

الرياضيات أم العلوم

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

النوع الأول :

① $\int$ جا^{ن} س دس ② $\int$ جتا^{ن} س دس

حيث (ن) عدد صحيح فردي موجب

① $\int$ جا^{ن} س دس

* نبقي جاس ← $\int$ جاس جا$^{(ن-١)}$س ← زوجي $\left(\frac{ن-١}{٢}\right)$
* استخرج جا^{٢}س من جا$^{(ن-١)}$س ← (جا^{٢}س)
* استبدل جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س
* ص = جتاس

② $\int$ جتا^{ن} س دس

* نبقي جتاس ← $\int$ جتاس جتا$^{(ن-١)}$س ← زوجي $\left(\frac{ن-١}{٢}\right)$
* استخرج جتا^{٢}س من جتا$^{(ن-١)}$س ← (جتا^{٢}س)
* استبدل جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س
* ص = جاس

النوع الثاني

يحل دون فرض

① $\int$ جا^{ن} س دس ② $\int$ جتا^{ن} س دس

حيث (ن) عدد صحيح زوجي موجب

① $\int$ جا^{ن} س دس $\left(\frac{ن}{٢}\right)$

* استخرج جا^{٢}س من جا^{ن}س ← (جا^{٢}س)
* استبدل جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا٢س)

② $\int$ جتا^{ن} س دس $\frac{ن}{٢}$

* استخرج جتا^{٢}س من جتا^{ن}س ← (جتا^{٢}س)
* استبدل جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س)

النوع الثالث

$\int$ جا^{م}س جتا^{ن}س دس

يوجد (٣) حالات

حالة (١)

م عدد فردي موجب

* نفرض ص = جاس أو ص = جتاس

$\boxed{ص = جاس}$ مشتقة جاس = جتاس

* بعد اختصار جتاس تصبح جتاس$^{(ن-١)}$ ← زوجي $\left(\frac{ن-١}{٢}\right)$
* نستخرج جتا^{٢}س من جتاس$^{(ن-١)}$ ← (جتا^{٢}س)

نستبدل جتا^{٢}س = (١ - جا^{٢}س)

* نستبدل جاس = ص

في حال فرض $\boxed{ص = جتاس}$ من البداية

مشتقة جتاس = - جاس

* بعد اختصار جاس تصبح جاس$^{(ن-١)}$ ← زوجي $\left(\frac{ن-١}{٢}\right)$
* نستخرج جا^{٢}س من جاس$^{(ن-١)}$ ← (جا^{٢}س)
* نستبدل جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س
* نستبدل جتاس = ص

حالة (٢)

م ، ن احداهما زوجي والآخر فردي

نفرض ص = صاحب الأس الزوجي

أ $\int$ جا^{م}س جتا^{ن}س دس م (زوجي) ، ن (فردي)

* ص = جاس
* بعد الاختصار تصبح جتاس$^{(ن-١)}$ ← زوجي
* أكمل مثل حالة ① $\boxed{ص = جاس}$

ب $\int$ جا^{م}س جتا^{ن}س دس م (فردي) ، ن (زوجي)

* ص = جتاس
* بعد الاختصار يصبح جاس$^{(م-١)}$ ← زوجي
* أكمل مثل حالة (١) $\boxed{ص = جتاس}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

حالة (٣)

م ، ن عدد زوجي موجب

أ) في حالة م = ن

* $\int (\text{جا س جتا س})^{م}\, ءس = \int (\tfrac{1}{2}\,\text{جا ٢س})^{م}$
* نستخرج جا² س من جا^م س ← $(\text{جا}^2 \text{س})^{\frac{م}{2}}$
* نستبدل $\text{جا}^2\text{س} = \tfrac{1}{2}(1 - \text{جتا ٢س})$

ب) في حالة م ≠ ن

* نبقي جا² س جتا² س $(\text{جا س جتا س})^2$
* استبدل $\text{جا س جتا س} = \tfrac{1}{2}\,\text{جا ٢س}$
* استبدل من الباقي ← $\text{جا}^2\text{س} = \tfrac{1}{2}(1 - \text{جتا ٢س})$

$\text{جتا}^2\text{س} = \tfrac{1}{2}(1 + \text{جتا ٢س})$

* نقوم بعملية الضرب ثم نفصل التكامل
* اجراء كل تكامل بشكل منفرد

النوع الرابع

① $\int \text{قا}^{ن}\text{س}\, ءس$ ، ② $\int \text{قتا}^{ن}\text{س}\, ءس$

حيث ن عدد زوجي موجب

① $\int \text{قا}^{ن}\text{س}\, ءس$

* نبقي قا² س من قا^ن س ← $\text{قا}^{ن-2}\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}$
* استخرج قا² س من قا^{ن-٢} س ← $(\text{قا}^2\text{س})^{\frac{ن-2}{2}}$
* استبدل $\text{قا}^2\text{س} = 1 + \text{ظا}^2\text{س}$
* ص = ظا س

② $\int \text{قتا}^{ن}\text{س}\, ءس$

اتبع خطوات $\int \text{قا}^{ن}\text{س}\, ءس$

مع مراعاة قتا² س ، ظتا² س

ومتطابقة $\text{قتا}^2\text{س} = 1 + \text{ظتا}^2\text{س}$

ص = ظتا س

النوع الخامس

$\int \text{قا}^{م}\text{س}\ \text{ظا}^{ن}\text{س}\, ءس$

حالة (١)

م ، ن عدد فردي موجب

* نبقي قا س ظا س
* اجعل الباقي بدلالة قا س

مستخدماً $\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$ اذا لزم الأمر

* نفرض ص = قا س

حالة (٢)

م ، ن ، احداهما زوجي والآخر فردي

① نفس حالة (١)

② في حال قا^م زوجي يمكن جعل قا² س مع ظا^ن س

ونستبدل $\text{قا}^2\text{س} = \text{ظا}^2\text{س} + 1$

ثم نفرض ص = ظا س

حالة (٣)

م ، ن ، حيث م ، ن عدد زوجي موجب

* من قا^م س استخرج قا² س
* استبدل $\text{قا}^2\text{س} = \text{ظا}^2\text{س} + 1$
* نفرض ص = ظا س

النوع السادس :

$\int \text{قتا}^{م}\text{س}\ \text{ظتا}^{ن}\text{س}\, ءس$

نفس النوع الخامس مع مراعاة

متطابقة $\text{قتا}^2\text{س} = \text{ظتا}^2\text{س} + 1$

$\text{ظتا}^2\text{س} = \text{قتا}^2\text{س} - 1$

مثال (٤) جد التكاملات الآتية

① $\int$ جتا^2 س د س

الحل = $\int \frac{1}{2}$ (١ + جتا ٢س) د س

= $\frac{1}{2}$ (س + $\frac{1}{2}$ جا ٢س) + جـ

② $\int$ جا^4 س د س

الحل = $\int$ (جا^2 س)^2 د س

= $\int$ ($\frac{1}{2}$ (١ − جتا ٢س))^2 د س

= $\int \frac{1}{4}$ (١ − ٢ جتا ٢س + جتا^2 ٢س) د س

= $\int \frac{1}{4}$ (١ − ٢ جتا ٢س + $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ٤س)) د س

= $\frac{1}{4}$ (س − جا ٢س + $\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{8}$ جا ٤س) + جـ

= $\frac{3}{8}$ س − $\frac{1}{4}$ جا ٢س + $\frac{1}{32}$ جا ٤س + جـ

③ $\int$ جا^3 س د س (كتاب)

الحل $\int$ جا س جا^2 س د س

= $\int$ جا س (١ − جتا^2 س) د س

= $\int$ جا س (١ − ص^2) × $\frac{\text{د ص}}{-\text{جا س}}$ | ص = جتا س ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = − جا س ، د س = $\frac{\text{د ص}}{-\text{جا س}}$

= $\int$ (ص^2 − ١) د ص

= $\frac{\text{ص}^3}{3}$ − ص + جـ

= $\frac{1}{3}$ جتا^3 س − جتا س + جـ

④ $\int$ جتا^3 س د س

الحل = $\int$ جتا س جتا^2 س د س

= $\int$ جتا س (١ − جا^2 س) د س

= $\int$ جتا س (١ − ص^2) $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$ | ص = جا س ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س ، د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

= $\int$ (١ − ص^2) د ص

= ص − $\frac{\text{ص}^3}{3}$ + جـ

= جا س − $\frac{1}{3}$ جا^3 س + جـ

⑤ $\int$ جتا^5 س د س

الحل = $\int$ جتا س جتا^4 س د س

= $\int$ جتا س (جتا^2 س)^2 د س = $\int$ جتا س (١ − جا^2 س)^2 د س

= $\int$ جتا س (١ − ص^2)^2 $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$ | ص = جا س ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س ، د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

= $\int$ (١ − ٢ص^2 + ص^4) د ص

= ص − $\frac{2\text{ص}^3}{3}$ + $\frac{\text{ص}^5}{5}$ + جـ

= جا س − $\frac{2}{3}$ جا^3 س + $\frac{1}{5}$ جا^5 س + جـ

⑥ $\int$ جا^3 س جتا^3 س د س (٢٠٠٤ ش)

الحل $\int$ ص^3 جتا^3 س $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$ | ص = جا س ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا س ، د س = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

= $\int$ ص^3 جتا^2 س د ص

= $\int$ ص^3 (١ − جا^2 س) د ص

= $\int$ ص^3 (١ − ص^2) د ص

= $\int$ (ص^3 − ص^5) د ص = $\frac{\text{ص}^4}{4}$ − $\frac{\text{ص}^6}{6}$ + جـ

= $\frac{1}{4}$ جا^4 س − $\frac{1}{6}$ جا^6 س + جـ

حل٢ نفرض ص = جتا س

⑦ $\int$ جا^3 ٢س جتا^5 ٢س د س (كتاب)

الحل $\int$ جا^3 ٢س ص^5 $\frac{\text{د ص}}{-2\text{جا ٢س}}$ | ص = جتا ٢س ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = −٢جا ٢س ، د س = $\frac{\text{د ص}}{-2\text{جا ٢س}}$

= $\int \frac{-1}{2}$ ص^5 جا^2 ٢س د ص

= $\int \frac{-1}{2}$ ص^5 (١ − جتا^2 ٢س) د ص

= $\int \frac{-1}{2}$ ص^5 (١ − ص^2) د ص

= $\int \frac{-1}{2}$ ص^5 + $\frac{1}{2}$ ص^7 د ص

= $\frac{-1}{12}$ ص^6 + $\frac{1}{16}$ ص^8 + جـ

= $\frac{-1}{12}$ جتا^6 ٢س + $\frac{1}{16}$ جتا^8 ٢س + جـ

⑧ $\int \text{جا}^3\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

الحل:

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$= \int \text{جا}^3\text{س}\ \text{ص}^2\ \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -\text{ص}^2\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{ءص}$

$= \int -\text{ص}^2\ (1-\text{جتا}^2\text{س})\ \text{ءص}$

$= \int -\text{ص}^2\ (1-\text{ص}^2)\ \text{ءص}$

$= \int -\text{ص}^2 + \text{ص}^4\ \text{ءص}$

$= \frac{-1}{3}\text{ص}^3 + \frac{1}{5}\text{ص}^5 + \text{ج}$

$= \frac{-1}{3}\text{جتا}^3\text{س} + \frac{1}{5}\text{جتا}^5\text{س} + \text{ج}$

⑨ $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{قتا}^5\text{٢س}}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{جتا٢س}\ \text{جا}^5\text{٢س}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جتا٢س}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢جتا٢س}}$

$= \int \cancel{\text{جتا٢س}}\ \text{ص}^5\ \frac{\text{ءص}}{2\cancel{\text{جتا٢س}}}$

$= \int \frac{1}{2}\text{ص}^5\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{12}\text{ص}^6 + \text{ج}$

$= \frac{1}{12}\text{جا}^6\text{٢س} + \text{ج}$

⑩ $\int \frac{\text{ءس}}{\text{قا}^3\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}}$

الحل $= \int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{ص}^2\ \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{جتا}^2\text{س}\ \text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \int (1-\text{جا}^2\text{س})\ \text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \int (1-\text{ص}^2)\ \text{ص}^2\ \text{ءص}$

$= \int (\text{ص}^2-\text{ص}^4)\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{3}\text{ص}^3 - \frac{1}{5}\text{ص}^5 + \text{ج}$

$= \frac{1}{3}\text{جا}^3\text{س} - \frac{1}{5}\text{جا}^5\text{س} + \text{ج}$

⑪ $\int \text{جا}^4\text{س}\ \text{جتا}^3\text{س}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل

$\text{ص} = \text{جا٥س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٥جتا٥س}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٥جتا٥س}}$

$\int \text{ص}^4\ \text{جتا}^3\text{٥س}\ \frac{\text{ءص}}{\text{٥جتا٥س}}$

$= \int \frac{1}{5}\text{ص}^4\ \text{جتا}^2\text{٥س}\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{5}\text{ص}^4\ (1-\text{جا}^2\text{٥س})\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{5}\text{ص}^4\ (1-\text{ص}^2)\ \text{ءص}$

$= \int \frac{1}{5}\text{ص}^4 - \frac{1}{5}\text{ص}^6\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{25}\text{ص}^5 - \frac{1}{35}\text{ص}^7 + \text{ج}$

$= \frac{1}{25}\text{جا}^5\text{٥س} - \frac{1}{35}\text{جا}^7\text{٥س} + \text{ج}$

⑫ $\int \frac{\text{جا}^5\text{س}}{\sqrt{\text{جتاس}}}\ \text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{جتاس}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{٢ص ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{٢ص ءص}}{-\text{جاس}}$

$\int \frac{\text{جا}^5\text{س}}{\cancel{\text{ص}}} \cdot \frac{2\cancel{\text{ص}}\ \text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -2\ \text{جا}^4\text{س}\ \text{ءص}$

$= \int -2\ (\text{جا}^2\text{س})^2\ \text{ءص}$

$= \int -2\ (1-\text{جتا}^2\text{س})^2\ \text{ءص}$

$= \int -2\ (1-\text{ص}^4)^2\ \text{ءص}$

$= \int -2\ (1-2\text{ص}^4+\text{ص}^8)\ \text{ءص}$

$= -2\left(\text{ص} - \frac{2}{5}\text{ص}^5 + \frac{1}{9}\text{ص}^9\right) + \text{ج}$

$= -2\left(\sqrt{\text{جتاس}} - \frac{2}{5}\sqrt{\text{جتا}^5\text{س}} + \frac{1}{9}\sqrt{\text{جتا}^9\text{س}}\right) + \text{ج}$

⑬ $\int \text{جا}^4\text{س}\ \text{جتا}^4\text{س}\ \text{ءس}$

الحل $\int (\text{جاس جتاس})^4\ \text{ءس} = \int \left(\frac{1}{2}\text{جا٢س}\right)^4\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{16}\text{جا}^4\text{٢س}\ \text{ءس} = \int \frac{1}{16}(\text{جا}^2\text{٢س})^2\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}(1-\text{جتا٤س})\right)^2\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{64}\left(1-2\text{جتا٤س}+\text{جتا}^2\text{٤س}\right)\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{64}\left(1-2\text{جتا٤س}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{جتا٨س}\right)\ \text{ءس}$

$= \frac{1}{64}\left(\text{س} - \frac{1}{2}\text{جا٤س} + \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{16}\text{جا٨س}\right) + \text{ج}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

⑭ $\int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{جا}^{4}\text{س}\ \text{ءس}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{جتاس جاس})^{2}\ \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{4}\text{جا}^{2}\text{٢س}\ \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{4}\text{جا}^{2}\text{٢س} \times \frac{1}{2}(1 - \text{جتا٢س})\ \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{8}\text{جا}^{2}\text{٢س} - \frac{1}{8}\text{جا}^{2}\text{٢س جتا٢س}\ \text{ءس}$

$= \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}\text{٢س ءس} - \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}\text{٢س جتا٢س ءس}$

$\boxed{\text{أ}}$ $\boxed{\text{ب}}$

$\text{أ} = \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}\text{٢س ءس} = \frac{1}{16}\int (1 - \text{جتا٤س})\ \text{ءس}$

$= \frac{1}{16}(\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا٤س}) + \text{جـ}$

$\text{ب} = \frac{1}{8}\int \text{جا}^{2}\text{٢س جتا٢س ءس}$

$= \frac{1}{8}\int \text{ص}^{2}\ \cancel{\text{جتا٢س}}\ \frac{\text{ءص}}{2\,\cancel{\text{جتا٢س}}}$ | $\text{ص} = \text{جا٢س}$

$= \frac{1}{16}\int \text{ص}^{2}\ \text{ءص}$ | $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جتا٢س}$

$= \frac{1}{48}\text{ص}^{3} + \text{جـ}$ | $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٢جتا٢س}}$

$= \frac{1}{48}\text{جا}^{3}\text{٢س} + \text{جـ}$

$\text{أ} - \text{ب} = \frac{1}{16}(\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا٤س}) - \frac{1}{48}\text{جا}^{3}\text{٢س} + \text{جـ}$

⑮ $\int \text{ظا}^{4}\text{س ءس}$

الحل $= \int \text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{ظا}^{2}\text{س ءس}$

$= \int \text{ظا}^{2}\text{س}\ (\text{قا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{ءس}$

$= \int (\text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س} - \text{ظا}^{2}\text{س})\ \text{ءس}$

$= \int \text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س ءس} - \int \text{ظا}^{2}\text{س ءس}$

$\boxed{\text{أ}}$ $\boxed{\text{ب}}$

$\text{أ} = \int \text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س ءس}$ | $\text{ص} = \text{ظاس}$

$= \int \text{ص}^{2}\ \cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$ | $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{2}\text{س}$

$= \int \text{ص}^{2}\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{جـ}$ | $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$= \frac{1}{3}\text{ظا}^{3}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ب} = \int \text{ظا}^{2}\text{س ءس} = \int (\text{قا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{ءس}$

$= \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{أ} - \text{ب} = \frac{1}{3}\text{ظا}^{3}\text{س} - \text{ظاس} + \text{س} + \text{جـ}$

⑯ $\int \text{قا}^{3}\text{س}\ \text{ظا}^{3}\text{س ءس}$

الحل $\int \text{قاس ظاس}\ \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ظا}^{2}\text{س ءس}$

$= \int \text{قاس ظاس}\ (\text{قا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{قا}^{2}\text{س ءس}$

$= \int \cancel{\text{قاس ظاس}}\ \text{ص}(\text{ص}^{2} - 1)\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قاس ظاس}}}$ | $\text{ص} = \text{قاس}$

$= \int \text{ص}^{3} - \text{ص}\ \text{ءص}$ | $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قاس ظاس}$

$= \frac{\text{ص}^{4}}{4} - \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ}$ | $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قاس ظاس}}$

$= \frac{1}{4}\text{قا}^{4}\text{س} - \frac{1}{2}\text{قا}^{2}\text{س} + \text{جـ}$

⑰ $\int \text{ظا}^{5}\text{٣س}\ \text{قا}^{2}\text{٣س}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{قا٣س ظا٣س}\ \text{ظا}^{4}\text{٣س}\ \text{قا٣س ءس}$

$= \int \text{قا٣س ظا٣س}\ (\text{ظا}^{2}\text{٣س})^{2}\ \text{قا٣س ءس}$

$= \int \text{قا٣س ظا٣س}\ (\text{قا}^{2}\text{٣س} - 1)^{2}\ \text{قا٣س ءس}$

$= \int \cancel{\text{قا٣س ظا٣س}}\ \text{ص}(\text{ص}^{2} - 1)^{2}\ \frac{\text{ءص}}{3\,\cancel{\text{قا٣س ظا٣س}}}$ | $\text{ص} = \text{قا٣س}$

| $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣قا٣س ظا٣س}$

$= \frac{1}{3}\int \text{ص}(\text{ص}^{4} - 2\text{ص}^{2} + 1)\ \text{ءص}$ | $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٣قا٣س ظا٣س}}$

$= \int (\frac{1}{3}\text{ص}^{5} - \frac{2}{3}\text{ص}^{3} + \frac{1}{3}\text{ص})\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{18}\text{ص}^{6} - \frac{2}{12}\text{ص}^{4} + \frac{1}{6}\text{ص}^{2} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{18}\text{قا}^{6}\text{٣س} - \frac{1}{6}\text{قا}^{4}\text{٣س} + \frac{1}{6}\text{قا}^{2}\text{٣س} + \text{جـ}$

⑱ $\int \text{قا}^{4}\text{س ءس}$ (كتاب)

الحل $\int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س ءس}$ | $\text{ص} = \text{ظاس}$

$= \int \text{قا}^{2}\text{س}\ (\text{ظا}^{2}\text{س} + 1)\ \text{ءس}$ | $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{2}\text{س}$

$= \int \cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}\ (\text{ص}^{2} + 1)\ \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$ | $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$= \int \text{ص}^{2} + 1\ \text{ءص} = \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ظا}^{3}\text{س}}{3} + \text{ظاس} + \text{جـ}$

(١٩) $\int \frac{\text{جا}^4 س}{\text{جتا}^6 س} \, دس$

الحل

$= \int \text{ظا}^2 س \ \text{قا}^2 س \ دس$

ص = ظاس

$\frac{دص}{دس} = \text{قا}^2 س$

$دس = \frac{دص}{\text{قا}^2 س}$

$= \int ص^2 \cancel{\text{قا}^2 س} \frac{دص}{\cancel{\text{قا}^2 س}}$

$= \int ص^2 \, دص$

$= \frac{ص^3}{3} + جـ = \frac{1}{3} \text{ظا}^3 س + جـ$

(٢٠) $\int \text{ظتا}^5 س \ \text{قتا} س \ دس$

الحل $= \int \text{ظتا}س \ \text{قتا}س \ \text{ظتا}^4 س \ دس$

$= \int \text{ظتا}س \ \text{قتا}س \ (\text{ظتا}^2 س)^2 \ دس$

$= \int \text{ظتا}س \ \text{قتا}س \ (\text{قتا}^2 س - 1)^2 \ دس$

ص = قتاس

$\frac{دص}{دس} = -\text{قتا}س \ \text{ظتا}س$

$دس = \frac{دص}{-\text{قتا}س \ \text{ظتا}س}$

$= \int \text{ظتا}س \ \cancel{\text{قتا}س} \ (ص^2 - 1)^2 \frac{دص}{-\cancel{\text{قتا}س \ \text{ظتا}س}}$

$= -\int (ص^2 - 1)^2 \, دص$

$= \int (-ص^4 + 2ص^2 - 1) \, دص$

$= -\frac{ص^5}{5} + \frac{2ص^3}{3} - ص + جـ$

$= -\frac{1}{5} \text{قتا}^5 س + \frac{2}{3} \text{قتا}^3 س - \text{قتا}س + جـ$

الجزء الخامس :
تكامل تركيب اقترانين

مثال (٥) (١٩٩٩)

إذا كان ق(س) قابل للاشتقاق على ح وكان ق(٩) = ٨ ، ق(٤) = ٣ ، جد

$\int_2^3 2س \ \text{ق}'(س^2) \, دس$

الحل $= \int_4^9 \cancel{2س} \ \text{ق}'(ص) \frac{دص}{\cancel{2س}}$

ص = $س^2$

$\frac{دص}{دس} = 2س$

$دس = \frac{دص}{2س}$

س = ٢ ← ص = ٤

س = ٣ ← ص = ٩

$= \int_4^9 \text{ق}'(ص) \, دص$

$= \text{ق}(ص) \Big|_4^9$

$= \text{ق}(9) - \text{ق}(4)$

$= 8 - 3 = 5$

مثال (٦)

إذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل على [١، ٢] ، وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤

فإن $\int_1^2 3 \ \text{ق}'(س) \sqrt{\text{ق}(س)} \, دس$ يساوي

أ) ١٤ ب) −١٤ جـ) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{3}$

الحل

$ص = \sqrt{\text{ق}(س)}$

$ص^2 = \text{ق}(س)$

$2ص \frac{دص}{دس} = \text{ق}'(س)$

$دس = \frac{دص}{2ص \ \text{ق}'(س)}$

س = ١ ← ص = ١

س = ٢ ← ص = ٢

$= \int_1^2 3 \ \cancel{\text{ق}'(س)} \ ص \times 2ص \frac{دص}{\cancel{\text{ق}'(س)}}$

$= \int_1^2 6ص^2 \, دص$

$= 2ص^3 \Big|_1^2$

$= 16 - 2 = \boxed{14}$

مثال (٧) (كتاب)

إذا كان $\int_1^8 \text{ق}(س) \, دس = 18$ ، جد قيمة

$\int_1^2 س^2 \ \text{ق}(س^3) \, دس$

الحل $= \int_1^8 \cancel{س^2} \ \text{ق}(ص) \frac{دص}{3\cancel{س^2}}$

ص = $س^3$

$\frac{دص}{دس} = 3س^2$

$دس = \frac{دص}{3س^2}$

س = ١ ← ص = ١

س = ٢ ← ص = ٨

$= \frac{1}{3} \int_1^8 \text{ق}(ص) \, دص$

$= \frac{1}{3} \times 18 = \boxed{6}$

مثال (٨) (كتاب)

إذا كان $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$ ، جد قيمة

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3\,\text{جتا}(2\text{س})\,\text{ق}(\text{جا}2\text{س})\,\text{دس}$

الحل $= \int_{0}^{1} 3\,\text{جتا}2\text{س}\;\text{ق}(\text{ص})\,\frac{\text{دص}}{2\,\text{جتا}2\text{س}}$

$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \frac{3}{2} \times 8 = 12$

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{جتا}2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{جتا}2\text{س}}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = 1$

مثال (٩) (٢٠١٦ ص)

إذا كان $\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 4$ ،

$\int_{0}^{3} \left(\text{أ}\,\text{ق}(3-\text{س}) + 6\text{س} + 1\right)\text{دس} = 42$

جد قيمة الثابت (أ)

الحل $\text{أ}\int_{0}^{3} \text{ق}(3-\text{س})\,\text{دس} + \int_{0}^{3}(6\text{س}+1)\,\text{دس} = 48$

$\text{أ}\int_{3}^{0} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + 3\text{س}^2 + \text{س}\Big|_{0}^{3} = 48$

$\text{أ}\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + 36 = 48$

$4\text{أ} = 12$

$\text{أ} = 3$

$\text{ص} = 3 - \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1$

$\text{دس} = -\text{دص}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 0$

مثال (١٠) (٢٠١٢ ص)

إذا كان ق(س) اقتران متصل ، م(س) معكوس مشتقة الاقتران ق(س) ، وكان أ ، جـ ثوابت حيث أ $\neq$ ٠ ، أوجد $\int \text{ق}(\text{أس})\,\text{دس}$

الحل $\int \text{ق}(\text{أس})\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\int \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{م}(\text{ص}) + \text{جـ} = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{م}(\text{أس}) + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{أس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

مثال (١١) (٢٠٠١)

إذا كان ق(س) متصل على ح ، وكان (أ) عدد ثابت ، أثبت أن

$\int_{\text{أ}}^{2\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(2\text{أ}-\text{س})\,\text{دس}$

الحل $\int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(2\text{أ}-\text{س})\,\text{دس}$

$= \int_{2\text{أ}}^{\text{أ}} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \int_{\text{أ}}^{2\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$\text{ص} = 2\text{أ} - \text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1$

$\text{دس} = -\text{دص}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 2\text{أ}$

$\text{س} = 2\text{أ} \leftarrow \text{ص} = 0$

$\int_{\text{أ}}^{2\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(2\text{أ}-\text{س})\,\text{دس}$

مثال (١٣) (كتاب) فكره حلوه

أثبت $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+2}}\,\text{دس} = \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن}+1} & \text{، ن عدد فردي} \\ \frac{1}{\text{ن}+1} & \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

الحل $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{2} \times \text{س}^{\text{ن}}}\,\text{دس} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\text{س}^2}\left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}\text{دس}$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\text{س}^2}\left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}}\text{دس}$

$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}}\,\text{ص}^{\text{ن}} \times \cancel{\text{س}^2}\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}}\,\text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\Big|_{-1}^{0}$

$\text{ص} = 1 - \frac{1}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}^2}$

$\text{دس} = \text{س}^2\,\text{دص}$

$\text{س} = \frac{1}{2} \leftarrow \text{ص} = -1$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 0$

$= 0 - \left(\frac{(-1)^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right) = -\left(\frac{(-1)^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\right)$

$* \; (-1)^{\text{ن}+1}$

$= -1 \leftarrow$ (ن+1) عدد فردي $\leftarrow$ ن عدد زوجي

$\times -1 = \boxed{1}$

$= 1 \leftarrow$ (ن+1) عدد زوجي $\leftarrow$ ن عدد فردي

$\times -1 = \boxed{-1}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+2}}\,\text{دس} = \begin{cases} \frac{-1}{\text{ن}+1} & \text{، ن عدد فردي} \\ \frac{1}{\text{ن}+1} & \text{، ن عدد زوجي} \end{cases}$

ورقة عمل (٦)

السؤال الأول: جد التكاملات الآتية

① $\int س^{5}\left(1+\frac{1}{س}\right)^{5} دس$

الجواب $\frac{1}{6}(س+1)^{6}+ج$

② $\int \frac{دس}{\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^{4}}$

الجواب $\frac{-2}{3(1+\sqrt{س})^{3}}+ج$

③ $\int س^{5}\sqrt{س^{3}+2}\; دس$

الجواب $\frac{2}{15}\sqrt{(س^{3}+2)^{5}}-\frac{4}{9}\sqrt{(س^{3}+2)^{3}}+ج$

④ $\int جاس\, جتا^{2}(جتاس)\, دس$ (٢٠٠٤ ش)

الجواب $-\frac{1}{2}جتاس-\frac{1}{4}جا(2جتاس)+ج$

⑤ $\int \sqrt{س^{2}+2س^{4}}\; دس$

الجواب $\frac{1}{6}\left(\sqrt{1+2س^{2}}\right)^{3}+ج$

⑥ $\int \frac{(1+س)^{7}}{س^{9}} دس$

الجواب $-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{س}\right)^{8}+ج$

⑦ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جا2س\, جتاس\, دس$ (٢٠١٢ ص)

الجواب $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

⑧ $\int قا^{6}س\, دس$

الجواب $ظاس+\frac{2}{3}ظا^{3}س+\frac{1}{5}ظا^{5}س+ج$

⑨ $\int قا^{4}س\, ظا^{2}س\, دس$

الجواب $\frac{1}{5}ظا^{5}س+\frac{1}{3}ظا^{3}س+ج$

⑩ $\int \frac{1}{ظا^{5}س\, جا^{2}س} دس$

الجواب $-\frac{1}{6}ظتا^{6}س+ج$

⑪ $\int قا^{4}3س\, ظا^{3}3س\, دس$ (٢٠١٣ ص)

الجواب $\frac{1}{12}ظا^{4}(3س)+\frac{1}{18}ظا^{6}(3س)+ج$

⑫ $\int \sqrt[3]{2س^{5}-س^{3}}\; دس$ (١٩٩٨)

الجواب $\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{2س^{2}-1}\right)^{4}+ج$

⑬ $\int \frac{\sqrt{س^{2}+1}}{س^{4}} دس$

الجواب $-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{س^{2}}}\right)^{3}+ج$

⑭ $\int \frac{3+\sqrt{س}}{\sqrt{س}} دس$

الجواب $\frac{4}{3}\sqrt{(3+\sqrt{س})^{3}}+ج$

⑮ $\int جاس\, جتا^{3}س\, دس$

الجواب $\frac{1}{4}جتا^{4}س+ج$

⑯ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جاس\, جتاس}{\sqrt{1+جا^{2}س}} دس$

الجواب $(\sqrt{2}-1)$

⑰ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جا2س\, جتاس\, دس$

الجواب $\frac{2}{3(\sqrt{2})^{3}}$

(١٨) $\int_{1}^{4} \frac{س}{\sqrt{س+5}}$ ءس (٢٠١٢ ص)

الجواب $\frac{8}{3}$

(١٩) $\int س^6 \left(\frac{5}{س} + \frac{4}{س^2}\right)^3$ ءس

الجواب $\frac{1}{20}(5س + 4)^4 + ج$

(٢٠) $\int (س^5 - 3س)^3$ ءس (٢٠١١)

الجواب $\frac{1}{16}(س^4 - 3)^4 + ج$

(٢١) $\int \sqrt[3]{3س^3 - س^5}$ ءس ٢٠١٣ ش

الجواب $\frac{-3}{8}\sqrt[3]{(3 - س^2)^4} + ج$

(٢٢) $\int جا^4س\ جتا^3س$ ءس

الجواب $\frac{1}{5} جا^5س - \frac{1}{7} جا^7س + ج$

(٢٣) $\int \frac{جاس}{قا^5س}$ ءس

الجواب $\frac{-1}{6} جتا^6س + ج$

(٢٤) $\int قتا^4س$ ءس

الجواب $ظتاس - \frac{1}{3} ظتا^3س + ج$

(٢٥) $\int \frac{1}{س} لو_{هـ} س$ ءس

الجواب $\frac{1}{2}(لو_{هـ} س)^2 + ج$

(٢٦) $\int \sqrt{س}\ لو_{هـ} س$ ءس

الجواب $\frac{2}{3}\sqrt{س^3}\ لو_{هـ} س - \frac{4}{9}\sqrt{س^3} + ج$

(٢٧) $\int قا^2س\ هـ^{(1 - ظاس)}$ ءس

الجواب $-هـ^{(1 - ظاس)} + ج$

(٢٨) $\int \frac{هـ^{\frac{5}{س}}}{س^2}$ ءس

الجواب $\frac{-1}{5} هـ^{\frac{5}{س}} + ج$

(٢٩) $\int \frac{6س - 9}{(س^2 - 3س + 1)^3}$ ءس (كتاب)

الجواب $\frac{-3}{2(س^2 - 3س + 1)^2} + ج$

(٣٠) $\int س^3 (س^2 + 4)^6$ ءس (كتاب)

الجواب $\frac{1}{16}(س^2 + 4)^8 - \frac{2}{7}(س^2 + 4)^7 + ج$

(٣١) $\int 2س^5 (س^2 + 5)^4$ ءس (كتاب)

الحل $\frac{(س^2 + 5)^7}{7} - \frac{5(س^2 + 5)^6}{3} + 5(س^2 + 5)^5 + ج$

(٣٢) $\int \frac{ظتا^2 \frac{1}{س}}{س^2}$ ءس (كتاب)

الجواب $\frac{1}{س} + ظتا(\frac{1}{س}) + ج$

(٣٣) $\int هـ^{(س^3 + 2لو_{هـ} س)}$ (كتاب)

الجواب $\frac{1}{3} هـ^{س^3} + ج$

(٣٤) $\int جا2س\ هـ^{جتا^2س}$ ءس (كتاب)

الجواب $-هـ^{جتا^2س} + ج$

(٣٥) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}(1 + \sqrt{س})}$ (كتاب)

الجواب $2 لو_{هـ} |1 + \sqrt{س}| + ج$

المعلم : حمد الله الطوباسي
0797662728 - 0779358752

(36) $\int$ قتا²س (جاس − قتاس) ءس (كتاب)

الجواب $\frac{1}{2}$(جاس − قتاس)² + ج

السؤال الثاني : (2001)

إذا كان ق(س) متصل ع(ح) وكان (أ) عدد ثابت أثبت أن

$\int_{أ}^{2أ}$ ق(س) ءس = $\int^{أ}$ ق(3أ − س) ءس

السؤال الثالث :

إذا كان $\int_{3}^{أ-1}$ ق(س) ءس = 2 $\int_{2}^{3}$ ق(2س − 1) ءس

جد قيمة الثابت (أ) $\boxed{6}$

السؤال الرابع : (كتاب)

إذا كان $\int_{1}^{هـ}$ س ق(س) ءس = 4

فما قيمة $\int_{0}^{2}$ هـ^س ق($\sqrt{هـ^س}$) ءس

أ) 1 ب) 8 جـ) 2 د) 4

السؤال الخامس (2016 ش)

إذا كان $\int_{1}^{4}$ (3ق(س) + 2س − 4) ءس = 3 ،

$\int_{1}^{3}$ (ق(س + 1) − 3س²) ءس = 27 ،

جد $\int_{1}^{4}$ ق(س) ءس

الجواب $\boxed{3}$

(37) $\int_{2}^{5}$ هـ^(1 + $\sqrt{س-1}$) ءس (2015 ش)

الجواب 2هـ³

(38) $\int \frac{2س + 3ظاس}{قتا^2س}$ ءس 2015 ص

الجواب

س ظاس + 2 لو_هـ|قتاس| + $\frac{3}{2}$ظا²س + ج

(39) $\int \frac{\sqrt{1+س} - \sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س} + \sqrt{1-س}}$ ءس 2016 ش

الدرس السابع : التكامل بالأجزاء

يستخدم التكامل بالأجزاء لإجراء تكامل حاصل ضرب اقترانين لا يوجد بينهما علاقة بالاشتقاق، لكن أحدهما يسهل اشتقاقه والآخر يسهل تكامله

الطريقة

$\int \text{ق} \; \text{ءهـ}$

ق ← نشتق ، ءهـ ← نكامل

$\text{ءق} \xrightarrow{\int} \text{هـ}$

$$\int \text{ق} \; \text{ءهـ} = \text{ق هـ} - \int \text{هـ} \; \text{ءق}$$

مثال (١) (كتاب)

أثبت أن $\int \text{ق} \; \text{ءهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \times \text{ءق}$

الحل

نفرض أن ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة للمتغير (س)

$(\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق(س)} \, \text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ(س)} \, \text{ق}'(\text{س})$

$\text{ق(س)} \, \text{هـ}'(\text{س}) = (\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{س}) - \text{هـ(س)} \, \text{ق}'(\text{س})$

$\int \text{ق(س)} \, \text{هـ}'(\text{س}) \, \text{ءس} = \int (\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{س}) \, \text{ءس} - \int \text{هـ(س)} \, \text{ق}'(\text{س}) \, \text{ءس}$

$\int \text{ق(س)} \, \text{هـ}'(\text{س}) \, \text{ءس} = (\text{ق} \times \text{هـ})(\text{س}) - \int \text{هـ(س)} \, \text{ق}'(\text{س}) \, \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{هـ}'(\text{س}) \, \text{ءس}$ ، $\text{ءق} = \text{ق}'(\text{س}) \, \text{ءس}$

$$\int \text{ق} \; \text{ءهـ} = \text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \; \text{ءق}$$

الجزء الأول : التكامل بالأجزاء بشكل مباشر

① $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ق}} \times \underbrace{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ، $\text{ن} \neq -1$

② $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ق}} \times \underbrace{\text{دالة زاوية خطية} \; \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

③ $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ق}} \times \underbrace{\sqrt[\text{ن}]{\text{أس} + \text{ب}} \; \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

④ $\int \underbrace{\text{كثير حدود}}_{\text{ق}} \times \underbrace{\text{هـ}^{(\text{أس} + \text{ب})} \, \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

ملاحظة

أ] إذا كان كثير الحدود من الدرجة الأولى يحل أجزاء مرة واحدة

ب] كثير الحدود من الدرجة الثانية يحل أجزاء مرتين

⑤ $\int \underbrace{\text{هـ}^{(\text{أس} + \text{ب})}}_{\text{ق}} \underbrace{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ، $\text{ن} \neq -1$

⑥ $\int \underbrace{(\text{لوهـ}(\text{أس} + \text{ب}))^{\text{ن}}}_{\text{ق}} \times \underbrace{\text{س}^{\text{م}} \, \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ، $\text{ن} = 1، 2$ ، $\text{م} \neq -1$

⑦ $\int \underbrace{(\text{لوهـ}(\text{أس} + \text{ب}))^{\text{ن}}}_{\text{ق}} \; \underbrace{\text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$ ، $\text{ن} = 1، 2$

⑧ $\int \underbrace{\text{ق(س)}}_{\text{ق}} \times \underbrace{\text{هـ(س)} \; \text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

يسهل الاشتقاق ، يسهل التكامل

ملاحظة : الاقتران الذي يشتق إذا كان مرفوع لقوة (٣) يحل أجزاء مرتين

مثال (٢) جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int (\text{٢س}+1)\,\text{جتا٣س}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل: $\text{م} = \text{٢س}+1$ ، $\text{دهـ} = \text{جتا٣س دس}$

$\text{دم} = \text{٢دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{1}{3}\,\text{جا٣س}$

$= \frac{\text{٢س}+1}{3}\,\text{جا٣س} - \int \frac{2}{3}\,\text{جا٣س دس}$

$= \frac{\text{٢س}+1}{3}\,\text{جا٣س} + \frac{2}{9}\,\text{جتا٣س} + \text{جـ}$

② $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{٣س جاس دس}$ (كتاب)

الحل: $\text{م} = \text{٣س}$ ، $\text{دهـ} = \text{جاس دس}$

$\text{دم} = \text{٣دس}$ ، $\text{هـ} = -\text{جتاس}$

$= -\text{٣س جتاس}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{٣جتاس دس}$

$= 0 + \text{٣جتاس}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = -3$

③ $\int \text{س قا}^2\text{س دس}$ (كتاب)

الحل: $\text{م} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{قا}^2\text{س دس}$

$\text{دم} = \text{دس}$ ، $\text{هـ} = \text{ظاس}$

$= \text{س ظاس} - \int \text{ظاس دس}$

$= \text{س ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

④ $\int_{-2}^{1} \text{٥س}\sqrt{\text{س}+3}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل: $= \int_{-2}^{1} \text{٥س}\,(\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\text{م} = \text{٥س}$ ، $\text{دهـ} = (\text{س}+3)^{\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

$\text{دم} = \text{٥دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{2}{3}(\text{س}+3)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{10}{3}\,\text{س}\sqrt{(\text{س}+3)^3}\Big|_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} \frac{10}{3}(\text{س}+3)^{\frac{3}{2}}\,\text{دس}$

$= \frac{10}{3} - \frac{4}{3}(\text{س}+3)^{\frac{5}{2}}\Big|_{-2}^{1} = -8$

⑤ $\int \frac{\text{٣س}}{\sqrt[3]{\text{٢س}+1}}\,\text{دس}$

الحل: $= \int \text{٣س}\,(\text{٢س}+1)^{-\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$\text{م} = \text{٣س}$ ، $\text{دهـ} = (\text{٢س}+1)^{-\frac{1}{3}}\,\text{دس}$

$\text{دم} = \text{٣دس}$ ، $\text{هـ} = \frac{3}{4}(\text{٢س}+1)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{9}{4}\,\text{س}\sqrt[3]{(\text{٢س}+1)^2} - \int \frac{9}{4}(\text{٢س}+1)^{\frac{2}{3}}\,\text{دس}$

$= \frac{9}{4}\,\text{س}\sqrt[3]{(\text{٢س}+1)^2} - \frac{27}{40}\sqrt[3]{(\text{٢س}+1)^5} + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}}\,\text{دس}$

الحل: $= \int \text{س جاس جتاس دس}$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{س جا٢س دس}$

$\text{م} = \frac{1}{2}\,\text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{جا٢س}$

$\text{دم} = \frac{1}{2}\,\text{دس}$ ، $\text{هـ} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا٢س}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{س جتا٢س} + \int \frac{1}{4}\,\text{جتا٢س دس}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{س جتا٢س} + \frac{1}{8}\,\text{جا٢س} + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{س}\,(\text{جاس}+\text{جتاس})^2\,\text{دس}$ (كتاب + ش٢٠٠٧)

الحل: $= \int \text{س}\,(\text{جا}^2\text{س} + \text{٢جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \text{س}\,(1+\text{جا٢س})\,\text{دس}$

$\text{م} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = (1+\text{جا٢س})\,\text{دس}$

$\text{دم} = \text{دس}$ ، $\text{هـ} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا٢س}$

$= -\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا٢س} + \int \frac{1}{2}\,\text{جتا٢س دس}$

$= -\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\,\text{جا٢س} + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{\text{س}}{\text{قتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ (كتاب + ٢٠٠٨ ص)

الحل: $\int \text{س جتا}^2\text{س دس}$

$م = س \quad\quad دهـ = جتا^2 س \, دس$

$دم = دس \quad\quad هـ = \int جتا^2 س \, دس$

* أولاً نجد تكامل $جتا^2 س \, دس$

$هـ = \int جتا^2 س \, دس = \int \frac{1}{2}(1 + جتا 2س) \, دس$

$هـ = \frac{1}{2}(س + \frac{1}{2} جا 2س)$

$م = س \quad\quad دهـ = جتا^2 س \, دس$

$دم = دس \quad\quad هـ = \frac{1}{2}(س + \frac{1}{2} جا 2س)$

$= \frac{1}{2} س (س + \frac{1}{2} جا 2س) - \frac{1}{2} \int (س + \frac{1}{2} جا 2س) \, دس$

$= \frac{1}{2} س (س + \frac{1}{2} جا 2س) - \frac{1}{2}(\frac{س^2}{2} - \frac{1}{4} جتا 2س) + ج$

⑨ $\int \frac{س}{1 - جتا 2س} \, دس$ (كتاب)

الحل $= \int \frac{س}{1 - 1 + 2 جا^2 س} \, دس$

$= \int \frac{1}{2} س \, قتا^2 س \, دس$

$م = \frac{1}{2} س \quad\quad دهـ = قتا^2 س \, دس$

$دم = \frac{1}{2} دس \quad\quad هـ = - ظتا س$

$= -\frac{1}{2} س \, ظتا س + \int \frac{1}{2} ظتا س \, دس$

$= -\frac{1}{2} س \, ظتا س + \frac{1}{2} لو |جا س| + ج$

⑩ $\int س \, لو_{هـ} س^3 \, دس$ (كتاب)

الحل $= \int 3 س \, لو_{هـ} س \, دس$

$م = لو_{هـ} س \quad\quad دهـ = 3 س \, دس$

$دم = \frac{1}{س} دس \quad\quad هـ = \frac{3 س^2}{2}$

$= \frac{3}{2} س^2 لو_{هـ} س - \int \frac{3}{2} س \, دس$

$= \frac{3}{2} س^2 لو_{هـ} س - \frac{3}{4} س^2 + ج$

⑪ $\int س^2 لو_{هـ} س \, دس$ (٢٠١٣ ص)

الحل $م = لو_{هـ} س \quad\quad دهـ = س^2 \, دس$

$دم = \frac{1}{س} دس \quad\quad هـ = \frac{س^3}{3}$

$= \frac{س^3}{3} لو_{هـ} س - \int \frac{س^2}{3} \, دس$

$= \frac{س^3}{3} لو_{هـ} س - \frac{س^3}{9} + ج$

⑫ $\int \frac{س^2}{لو_{س^3} هـ} \, دس$

الحل $= \int س^2 لو_{هـ} س^3 \, دس$

$= \int 3 س^2 لو_{هـ} س \, دس$

أكمل مثل السؤال السابق

$= س^3 لو_{هـ} س - \frac{س^3}{3} + ج$

⑬ $\int \frac{لو_{هـ}(س+3)}{\sqrt{س+3}} \, دس$ (كتاب)

الحل

$= \int لو_{هـ}(س+3) \, (س+3)^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$م = لو_{هـ}(س+3) \quad\quad دهـ = (س+3)^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$دم = \frac{1}{س+3} دس \quad\quad هـ = 2(س+3)^{\frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{س+3} \, لو_{هـ}(س+3) - 2\int (س+3)^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$= 2\sqrt{س+3} \, لو_{هـ}(س+3) - 4(س+3)^{\frac{1}{2}} + ج$

$= 2\sqrt{س+3} \, لو_{هـ}(س+3) - 4\sqrt{س+3} + ج$

⑭ $\int_{1}^{هـ} لو_{هـ} س \, دس$

الحل $م = لو_{هـ} س \quad\quad دهـ = دس$

$دم = \frac{1}{س} دس \quad\quad هـ = س$

$= س \, لو_{هـ} س \Big|_{1}^{هـ} - \int_{1}^{هـ} دس$

$= س \, لو_{هـ} س \Big|_{1}^{هـ} - س \Big|_{1}^{هـ} = \boxed{1}$

⑮ $\int \frac{س}{3 - 3 جا^2 س} \, دس$ (٢٠١٢ ص)

الحل $= \int \frac{س}{3 \, جتا^2 س} \, دس$

$= \int \frac{1}{3} س \, قا^2 س \, دس$

ص = ½ س   ءهـ = قا²س ءس

ءص = ½ ءس ← ∫ ← هـ = ظاس

= ½ س ظاس − ∫ ½ ظاس ءس

= ½ س ظاس + ½ لوهـ|جتاس| + جـ

---

(16) ∫ س ظا²س ءس (2006 ش)

الحل ص = س   ءهـ = ظا²س ءس

ءص = ءس   هـ = ∫ ظا²س ءس

* هـ = ∫ ظا²س ءس = ∫ (قا²س − 1) ءس

هـ = ظاس − س

* ص = س   ءهـ = ظا²س

ءص = ءس ← ∫ ← هـ = ظاس − س

= س ظاس − س² − ∫ (ظاس − س) ءس

= س ظاس − س² + لوهـ|جتاس| + س²/2 + جـ

---

(17) ∫ قا²س لوهـ ظاس ءس (كتاب)

الحل ص = لوهـ ظاس   ءهـ = قا²س ءس

ءص = (قا²س / ظاس) ءس ← ∫ ← هـ = ظاس

= ظاس لوهـ ظاس − ∫ قا²س ءس

= ظاس لوهـ ظاس − ظاس + جـ

---

(18) ∫ جتاس لوهـ جاس ءس (كتاب)

الحل ص = لوهـ جاس   ءهـ = جتاس ءس

ءص = (جتاس / جاس) ءس ← ∫ ← هـ = − جاس

= − جاس لوهـ جاس + ∫ جتاس ءس

= − جاس لوهـ جاس + جاس + جـ

---

(19) ∫ (2س − 1) هـ^س ءس (كتاب)

الحل ص = 2س − 1   ءهـ = هـ^س

ءص = 2 ءس ← ∫ ← هـ = هـ^س

= (2س − 1) هـ^س − ∫ 2 هـ^س ءس

= (2س − 1) هـ^س − 2 هـ^س + جـ

---

(20) ∫ (س / هـ^{2س}) ءس (كتاب)

الحل = ∫ س هـ^{−2س} ءس

ص = س   ءهـ = هـ^{−2س}

ءص = ءس ← ∫ ← هـ = −½ هـ^{−2س}

= −½ س هـ^{−2س} + ∫ ½ هـ^{−2س} ءس

= −½ س هـ^{−2س} − ¼ هـ^{−2س} + جـ

---

(21) ∫ (س هـ^س / (س + 1)²) ءس (كتاب + 2006 ص)

الحل

= ∫ س هـ^س (س + 1)^{−2} ءس

ص = س هـ^س   ءهـ = (س + 1)^{−2} ءس

ءص = س هـ^س + هـ^س ءس ← ∫ ← هـ = −1 / (س + 1)

= −س هـ^س / (س + 1) + ∫ هـ^س ءس

= −س هـ^س / (س + 1) + هـ^س + جـ

الجزء الثاني :
استخدام التكامل بالأجزاء مرتين

مثال (3) جد كلاً من التكاملات الآتية

① ∫ س^2 جا س د س (الكتاب)

الحل: م = س^2 ، د هـ = جا س د س
د م = ٢س د س ، هـ = −جتا س

= −س^2 جتا س + ∫ ٢س جتا س د س

* ∫ ٢س جتا س د س
م = ٢س ، د هـ = جتا س د س
د م = ٢ د س ، هـ = جا س

= ٢س جا س − ∫ ٢ جا س د س
= ٢س جا س + ٢ جتا س

* ∫ س^2 جا س د س =
−س^2 جتا س + ٢س جا س + ٢ جتا س + جـ

② ∫ ٣س^2 جتا س د س

الحل: م = ٣س^2 ، د هـ = جتا س
د م = ٦س د س ، هـ = جا س

= ٣س^2 جا س − ∫ ٦س جا س د س

* ∫ ٦س جا س د س =
م = ٦س ، د هـ = جا س د س
د م = ٦ د س ، هـ = − جتا س

= −٦س جتا س + ∫ ٦ جتا س د س
= −٦س جتا س + ٦ جا س

* ∫ ٣س^2 جتا س د س =
٣س^2 جا س + ٦س جتا س − ٦ جا س + جـ

③ ∫ $\frac{\text{د س}}{\text{س}^{-2}\text{ قا(٤س−١)}}$

الحل = ∫ س^2 جتا(٤س−١) د س
م = س^2 ، د هـ = جتا(٤س−١) د س
د م = ٢س د س ، هـ = $\frac{1}{4}$ جا(٤س−١)

= $\frac{1}{4}$ س^2 جا(٤س−١) − ∫ $\frac{1}{2}$ س جا(٤س−١) د س

* ∫ $\frac{1}{2}$ س جا(٤س−١) د س
م = $\frac{1}{2}$ س ، د هـ = جا(٤س−١) د س
د م = $\frac{1}{2}$ د س ، هـ = $\frac{-1}{4}$ جتا(٤س−١)

= $\frac{-1}{8}$ س جتا(٤س−١) + ∫ $\frac{1}{8}$ جتا(٤س−١) د س
= $\frac{-1}{8}$ س جتا(٤س−١) + $\frac{1}{32}$ جا(٤س−١) د س

* ∫ س^2 جتا(٤س−١) د س =
$\frac{1}{4}$ س^2 جا(٤س−١) + $\frac{1}{8}$ س جتا(٤س−١) − $\frac{1}{32}$ جا(٤س−١) + جـ

④ ∫ س (لو$_{هـ}$ س)^2 د س (الكتاب + ٢٠٠٤ ص)

الحل: م = (لو$_{هـ}$ س)^2 ، د هـ = س د س
د م = $\frac{2}{\text{س}}$ لو$_{هـ}$ س د س ، هـ = $\frac{\text{س}^2}{2}$

= $\frac{\text{س}^2}{2}$ (لو$_{هـ}$ س)^2 − ∫ س لو$_{هـ}$ س د س

* ∫ س لو$_{هـ}$ س د س
م = لو$_{هـ}$ س ، د هـ = س د س
د م = $\frac{1}{\text{س}}$ د س ، هـ = $\frac{\text{س}^2}{2}$

= $\frac{\text{س}^2}{2}$ لو$_{هـ}$ س − ∫ $\frac{1}{2}$ س د س
= $\frac{\text{س}^2}{2}$ لو$_{هـ}$ س − $\frac{1}{4}$ س^2

* ∫ س (لو$_{هـ}$ س)^2 د س =
$\frac{\text{س}^2}{2}$ (لو$_{هـ}$ س)^2 − $\frac{\text{س}^2}{2}$ لو$_{هـ}$ س + $\frac{1}{4}$ س^2 + جـ

⑤ ∫ (لو$_{هـ}$ س)^2 د س

الحل: م = (لو$_{هـ}$ س)^2 ، د هـ = د س
د م = $\frac{2}{\text{س}}$ لو$_{هـ}$ س د س ، هـ = س

= س (لو$_{هـ}$ س)^2 − ∫ ٢ لو$_{هـ}$ س د س

* ∫ ٢ لو$_{هـ}$ س د س
م = لو$_{هـ}$ س ، د هـ = ٢ د س
د م = $\frac{1}{\text{س}}$ د س ، هـ = ٢س

$= ٢س \text{ لو}_{هـ}س - \int ٢ \, ءس$

$= ٢س \text{ لو}_{هـ}س - ٢س$

$* \int (\text{لو}_{هـ}س)^٢ =$

$س(\text{لو}_{هـ}س)^٢ - ٢س \text{ لو}_{هـ}س + ٢س + جـ$

---

(٦) $\int_{٠}^{٢} س^٢ هـ^س \, ءس$ (الكتاب)

الحل: $ص = س^٢$ ، $ءهـ = هـ^س ءس$

$ءص = ٢س \, ءس$ ، $هـ = هـ^س$

$= س^٢ هـ^س \Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢س هـ^س \, ءس$

$* \int_{٠}^{٢} ٢س هـ^س \, ءس$

$ص = ٢س$ ، $ءهـ = هـ^س ءس$

$ءص = ٢ \, ءس$ ، $هـ = هـ^س$

$= ٢س هـ^س \Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢ هـ^س \, ءس$

$= ٢س هـ^س \Big|_{٠}^{٢} - ٢ هـ^س \Big|_{٠}^{٢}$

$* \int_{٠}^{٢} س^٢ هـ^س \, ءس =$

$(س^٢ هـ^س - ٢س هـ^س + ٢هـ^س) \Big|_{٠}^{٢}$

$= (٤هـ^٢ - ٤هـ^٢ + ٢هـ^٢) - (٠ - ٠ + ٢)$

$= ٢هـ^٢ - ٢ = ٢(هـ^٢ - ١)$

الجزء الثالث :
طريقة السلم (الجدول) لإجراء التكامل بالأجزاء

استخدامات طريقة الجدول :

تكامل حاصل ضرب اقترانين أحدهما كثير حدود والآخر على إحدى الصور الآتية

(١) $جا(أس+ب)$ ، $أ \neq ٠$

(٢) $جتا(أس+ب)$ ، $أ \neq ٠$

(٣) $هـ^{أس+ب}$ ، $أ \neq ٠$

(٤) $(أس+ب)^ن$ ، $ن \neq -١$ ، $أ \neq ٠$

يتم شرح طريقة الجدول من خلال المثال الآتي

مثال (٤) جد كلاً من التكاملات الآتية

(١) $\int س^٢ جاس \, ءس$ (الكتاب)

الحل:

ص (نشتق)		ءهـ (نكامل)
$س^٢$	+	$جاس$
$٢س$	−	$-جتاس$
٢	+	$-جاس$
٠		$جتاس$

$\int س^٢ جاس \, ءس =$

$-س^٢ جتاس + ٢س جاس + ٢ جتاس + جـ$

---

(٢) $\int س^٣ هـ^س \, ءس$ (الكتاب)

الحل:

ص (نشتق)		ءهـ (نكامل)
$س^٣$	+	$هـ^س$
$٣س^٢$	−	$هـ^س$
$٦س$	+	$هـ^س$
٦	−	$هـ^س$
٠		$هـ^س$

$\int س^٣ هـ^س \, ءس =$

$س^٣هـ^س - ٣س^٢هـ^س + ٦س هـ^س - ٦هـ^س + جـ$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

③ ∫ س² جتا٤س د س (كتاب)

الحل

م (نشتق)		دهـ (نكامل)
س²	+	جتا٤س
٢س	−	$\frac{1}{4}$ جا٤س
٢	+	$\frac{-1}{16}$ جتا٤س
٠		$\frac{-1}{64}$ جا٤س

∫ س² جتا٤س د س =

$\frac{1}{4}$ س² جا٤س + $\frac{1}{8}$ س جتا٤س − $\frac{1}{32}$ جا٤س + ج

⑥ ∫ (س³ + ٢س) هـ^س د س

الحل

م (نشتق)		دهـ (نكامل)
س³ + ٢س	+	هـ^س
٣س² + ٢	−	هـ^س
٦س	+	هـ^س
٦	−	هـ^س
٠		هـ^س

= (س³ + ٢س) هـ^س − هـ^س (٣س² + ٢) + ٦س هـ^س − ٦هـ^س + ج

④ ∫ (س² − س) جا٢س د س

الحل

م (نشتق)		دهـ (نكامل)
س² − س	+	جا٢س
٢س − ١	−	$\frac{-1}{2}$ جتا٢س
٢	+	$\frac{-1}{4}$ جا٢س
٠		$\frac{1}{8}$ جتا٢س

= $\frac{-1}{2}$ (س² − س) جتا٢س + $\frac{1}{4}$ (٢س − ١) جا٢س + $\frac{1}{4}$ جتا٢س + ج

⑦ $\int_{0}^{\pi}$ (٢س + ١) جتا٣س د س

الحل

م (نشتق)		دهـ (نكامل)
٢س + ١	+	$\frac{1}{3}$ جا٣س
٢	−	$\frac{-1}{9}$ جتا٣س
٠		$\frac{-1}{27}$ جا٣س

= $\frac{2}{9}$ جتا٣س (٢س + ١) + $\frac{2}{27}$ جا٣س $\Big|_{0}^{\pi}$

= $\frac{1}{9}$ (٢π + ١) − ($\frac{-1}{9}$)

= $\frac{2\pi}{9}$ + $\frac{1}{9}$ + $\frac{1}{9}$ = $\frac{2\pi}{9}$ + $\frac{2}{9}$

⑤ ∫ س² (٢س + ١)⁵ د س (كتاب)

الحل

م (نشتق)		دهـ (نكامل)
س²	+	(٢س + ١)^٥
٢س	−	$\frac{(٢س + ١)^6}{12}$
٢	+	$\frac{(٢س + ١)^7}{168}$
٠		$\frac{(٢س + ١)^8}{2688}$

= $\frac{س^2 (٢س + ١)^6}{12}$ − $\frac{س (٢س + ١)^7}{84}$ + $\frac{(٢س + ١)^8}{1344}$ + ج

⑧ ∫ (س² − ٢س) $\sqrt{س + ٣}$ د س (كتاب)

الحل = ∫ (س² − ٢س) (س + ٣)^{$\frac{1}{2}$} د س

=

م نشتق		دهـ نكامل
س² − ٢س	+	(س + ٣)^{$\frac{1}{2}$}
٢س − ٢	−	$\frac{2}{3}$ (س + ٣)^{$\frac{3}{2}$}
٢	+	$\frac{4}{15}$ (س + ٣)^{$\frac{5}{2}$}
٠		$\frac{8}{105}$ (س + ٣)^{$\frac{7}{2}$}

= $\frac{2}{3}$ (س² − ٢س) $\sqrt{(س + ٣)^3}$ − $\frac{4}{15}$ (٢س − ٢) $\sqrt{(س + ٣)^5}$

+ $\frac{8}{105}$ $\sqrt{(س + ٣)^7}$ + ج

الجزء الرابع :
استخدام طريقة التعويض والأجزاء لإجراء التكامل

مثال (١) : جد كلاً من التكاملات الآتية

① ∫ جتا √(٢س+١) ءس (كتاب)

الحل

ص = √(٢س+١)
ص² = ٢س+١
٢ص ءص/ءس = ٢
ءس = ص ءص

= ∫ ص جتاص ءص

م = ص ، ءهـ = جتاص ءص
ءم = ءص ، هـ = جاص

= ص جاص − ∫ جاص ءص
= ص جاص + جتاص + جـ
= √(٢س+١) جا√(٢س+١) + جتا√(٢س+١) + جـ

② ∫ س جتا √(١+س²) ءس (٢٠١٤ ش)

الحل

ص² = ١+س²
٢ص ءص/ءس = ٢س
ءس = (ص/س) ءص

= ∫ س جتاص (ص/س) ءص
= ∫ ص جتاص ءص

م = ص ، ءهـ = جتاص ءص
ءم = ءص ، هـ = جاص

= ص جاص − ∫ جاص ءص
= ص جاص + جتاص + جـ
= √(١+س²) جا√(١+س²) + جتا√(١+س²) + جـ

③ ∫ س⁵ جتا س³ ءس (٢٠٠١ + كتاب)

الحل ∫ س⁵ جتاص ءص/(٣س²)

ص = س³
ءص/ءس = ٣س²
ءس = ءص/(٣س²)

= ∫ (١/٣) س³ جتاص ءص
= ∫ (١/٣) ص جتاص ءص

م = (١/٣) ص ، ءهـ = جتاص ءص
ءم = (١/٣) ءص ، هـ = جاص

= (١/٣) ص جاص − ∫ (١/٣) جاص ءص
= (١/٣) ص جاص + (١/٣) جتاص + جـ
= (١/٣) س³ جا س³ + (١/٣) جتا س³ + جـ

④ ∫ جا√س جتا√س ءس

الحل ∫ (١/٢) جا ٢√س ءس

ص = √س
ص² = س
٢ص ءص/ءس = ١
ءس = ٢ص ءص

= ∫ (١/٢) جا٢ص ٢ص ءص
= ∫ ص جا٢ص ءص

م = ص ، ءهـ = جا٢ص ءص
ءم = ءص ، هـ = −(١/٢) جتا٢ص

= −(١/٢) ص جتا٢ص + ∫ (١/٢) جتا٢ص ءص
= −(١/٢) ص جتا٢ص + (١/٤) جا٢ص + جـ
= −(١/٢) √س جتا٢√س + (١/٤) جا٢√س + جـ

⑤ ∫ ءس / قا²√س

الحل = ∫ جتا²√س ءس

ص = √س
ص² = س
٢ص ءص/ءس = ١
ءس = ٢ص ءص

= ∫ ٢ص جتا²ص ءص

م = ٢ص ، ءهـ = جتا²ص ءص
ءم = ٢ءص ، هـ = (١/٢)(ص + جا٢ص/٢)

هـ = ∫ (١/٢)(١ + جتا٢ص) ءص
هـ = (١/٢)(ص + (١/٢) جا٢ص)

= ص(ص + جا٢ص/٢) + ∫ ص + جا٢ص/٢ ءص
= ص(ص + جا٢ص/٢) +
ص²/٢ − (١/٤) جتا٢ص + جـ
= س + (√س/٢) جا٢√س + س/٢ − (١/٤) جتا٢√س + جـ

⑥ $\int \text{قا}^2\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}\ \text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$ ، $\text{دس} = 2\text{ص دص}$

$= \int \text{قا}^2\text{ص ظاص} \times 2\text{ص دص}$

$\text{م} = 2\text{ص}$ ، $\text{دهـ} = \text{قا}^2\text{ص ظاص دص}$

$\text{دم} = 2\text{دص}$ ، $\text{هـ} = \int \text{قا}^2\text{ص ظاص دص}$

* $\int \text{قا}^2\text{ص ظاص دص}$

$\text{ع} = \text{ظاص}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = \text{قا}^2\text{ص}$ ، $\text{دص} = \frac{\text{دع}}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$= \int \text{قا}^2\text{ص}\ \text{ع}\ \frac{\text{دع}}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$= \int \text{ع دع} = \frac{\text{ع}^2}{2}$

$\text{هـ} = \frac{1}{2}\text{ظا}^2\text{ص}$

* $\text{م} = 2\text{ص}$ ، $\text{دهـ} = \text{قا}^2\text{ص ظاص دص}$

$\text{دم} = 2\text{دص} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{1}{2}\text{ظا}^2\text{ص}$

$= \text{ص ظا}^2\text{ص} - \int \text{ظا}^2\text{ص دص}$

$= \text{ص ظا}^2\text{ص} - \int(\text{قا}^2\text{ص} - 1)\ \text{دص}$

$= \text{ص ظا}^2\text{ص} - \text{ظاص} + \text{ص} + \text{ج}$

$= \sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}^2\sqrt{\text{س}} - \text{ظا}\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

⑦ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $= \int \text{س ظاس قا}^2\text{س دس}$

$\text{م} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{ظاس قا}^2\text{س دس}$

$\text{هـ} = \int \text{ظاس قا}^2\text{س دس}$

$= \int \text{ص قا}^2\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{ص دص} = \frac{\text{ص}^2}{2}$

$\text{دم} = \text{دس} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{1}{2}\text{ظا}^2\text{س}$

$= \frac{1}{2}\text{س ظا}^2\text{س} - \int \frac{1}{2}\text{ظا}^2\text{س دس}$

$= \frac{1}{2}\text{س ظا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\int(\text{قا}^2\text{س} - 1)\ \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\text{س ظا}^2\text{س} - \frac{1}{2}(\text{ظاس} - \text{س}) + \text{ج}$

⑧ $\int \text{جا}^3\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(1 + \text{جتاس})$ (٢٠١٧ ش)

الحل

$\text{ص} = 1 + \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= \int \text{جا}^3\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -\text{جا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$= \int (\text{جتا}^2\text{س} - 1)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$= \int ((\text{ص} - 1)^2 - 1)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$= \int (\text{ص}^2 - 2\text{ص})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ ، $\text{دهـ} = \text{ص}^2 - 2\text{ص دص}$

$\text{دم} = \frac{1}{\text{ص}}\text{دص} \xrightarrow{\int} \text{هـ} = \frac{\text{ص}^3}{3} - \text{ص}^2$

$= (\frac{\text{ص}^3}{3} - \text{ص}^2)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int (\frac{\text{ص}^2}{3} - \text{ص})\ \text{دص}$

$= (\frac{\text{ص}^3}{3} - \text{ص}^2)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - (\frac{\text{ص}^3}{9} - \frac{\text{ص}^2}{2})$

$= (\frac{1}{3}(1 + \text{جتاس})^3 - (1 + \text{جتاس})^2)\ \text{لو}_{\text{هـ}}(1 + \text{جتاس})$

$- \frac{1}{9}(1 + \text{جتاس})^3 + \frac{1}{2}(1 + \text{جتاس})^2 + \text{ج}$

⑨ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3\ \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس}$ (٢٠١٦ ش)

الحل

$\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = \frac{\pi}{3} \leftarrow \text{ص} = \sqrt{3}$

$= \int_1^{\sqrt{3}} 3\ \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int_1^{\sqrt{3}} 3\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$= \int_1^{\sqrt{3}} 3(\text{ظا}^2\text{س} + 1)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$= \int_1^{\sqrt{3}} (3\text{ص}^2 + 3)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ ، $\text{دهـ} = (3\text{ص}^2 + 3)\ \text{دص}$

$\text{دم} = \frac{1}{\text{ص}}\text{دص}$ ، $\text{هـ} = \text{ص}^3 + 3\text{ص}$

$= (\text{ص}^3 + 3\text{ص})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} (\text{ص}^2+3)\,\text{دص}$

$= (\text{ص}^3 + 3\text{ص})\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3} - 3\text{ص}\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$= 6\sqrt{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \frac{10}{3}$

(10) $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1$ ، $\text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$= \int 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{م} = 2\text{ص}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دم} = 2\,\text{دص}$ ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int 2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - 2\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

(11) $\int \text{س}^5\,\text{هـ}^{\text{س}^3}\,\text{دس}$ (ش ٢٠١٣)

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \int \text{س}^5\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \int \frac{1}{3}\text{س}^3\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \int \frac{1}{3}\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{م} = \frac{1}{3}\text{ص}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دم} = \frac{1}{3}\,\text{دص}$ ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= \frac{1}{3}\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{3}\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3\,\text{هـ}^{\text{س}^3} - \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{جـ}$

(12) $\int \text{جا}2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}}\,\text{دس}$ (ص ٢٠٠٣)

الحل

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= \int 2\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= \int -2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{م} = -2\text{ص}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دم} = -2\,\text{دص}$ ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= -2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \int 2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= -2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + 2\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= -2\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}} + 2\,\text{هـ}^{\text{جتاس}} + \text{جـ}$

(13) $\int \text{قا}^2\text{س}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\,\text{دس}$ (كتاب)

الحل

$\text{ص}^2 = \text{ظاس}$ ، $2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$ ، $\text{دس} = \frac{2\text{ص}}{\text{قا}^2\text{س}}\,\text{دص}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{م} = 2\text{ص}$ ، $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\text{دم} = 2\,\text{دص}$ ، $\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int 2\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{ظاس}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} - 2\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} + \text{جـ}$

(14) $\int \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\text{س}^2}$ ، $\text{دس} = -\text{س}^2\,\text{دص}$

$= \int \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \times -\text{س}^2\,\text{دص}$

$= \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ ، $\text{دع} = \text{دص}$

$\text{دم} = \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص}$ ، $\text{ع} = \text{ص}$

$= \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{دص}$

$= \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}} + \text{جـ}$

(١٥) ∫ قا^{3}س ءس

الحل = ∫ قاس قا^{2}س ءس

ص = قاس ، ءهـ = قا^{2}س ءس

ءص = قاس ظاس ءس ، هـ = ظاس

= قاس ظاس − ∫ قاس ظا^{2}س ءس

= قاس ظاس − ∫ قاس (قا^{2}س − ١) ءس

= قاس ظاس − ∫ (قا^{3}س − قاس) ءس

∫ قا^{3}س ءس = قاس ظاس − ∫ قا^{3}س ءس + ∫ قاس ءس

٢ ∫ قا^{3}س ءس = قاس ظاس + ∫ قاس ءس

∫ قا^{3}س ءس = $\frac{1}{2}$ قاس ظاس + $\frac{1}{2}$ لو|قاس + ظاس| + ج

الجزء الخامس : تكاملات دورية

تسمى التكاملات التي ينتج منها أثناء الحل نفس التكامل تكاملات دورية
يجب أن يكون نفس التكامل المطلوب وعكس في الإشارة

مثال (٦١) جد كلاً من التكاملات الآتية

① ∫ هـ^{س} جتا٣س ءس (كتاب)

الحل ص = جتا٣س ، ءهـ = هـ^{س} ءس

ءص = −٣جا٣س ءس ، هـ = هـ^{س}

= هـ^{س} جتا٣س + ∫ ٣هـ^{س} جا٣س ءس

* ∫ ٣هـ^{س} جا٣س ءس

ص = جا٣س ، ءهـ = ٣هـ^{س} ءس

ءص = ٣جتا٣س ءس ، هـ = ٣هـ^{س}

∫ هـ^{س} جتا٣س ءس = هـ^{س} جتا٣س + ٣هـ^{س} جا٣س − ∫ ٩هـ^{س} جتا٣س ءس

١٠ ∫ هـ^{س} جتا٣س ءس = هـ^{س} (جتا٣س + ٣جا٣س)

∫ هـ^{س} جتا٣س ءس = $\frac{هـ^{س}}{١٠}$ (جتا٣س + ٣جا٣س) + ج

② ∫ هـ^{٢س} جاس ءس (كتاب)

الحل ص = جاس ، ءهـ = هـ^{٢س}

ءص = جتاس ءس ، هـ = $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س}

= $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} جاس − ∫ $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} جتاس ءس

* ∫ $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} جتاس ءس

ص = جتاس ، ءهـ = $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} ءس

ءص = −جاس ءس ، هـ = $\frac{1}{4}$ هـ^{٢س}

∫ هـ^{٢س} جاس ءس = $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} جاس − $\frac{1}{4}$ هـ^{٢س} جتاس − ∫ $\frac{1}{4}$ هـ^{٢س} جاس ءس

$\frac{5}{4}$ ∫ هـ^{٢س} جاس ءس = $\frac{1}{2}$ هـ^{٢س} (جاس − $\frac{1}{2}$ جتاس)

∫ هـ^{٢س} جاس ءس = $\frac{2}{5}$ هـ^{٢س} (جاس − $\frac{1}{2}$ جتاس) + ج

③ ∫ ٢هـ^{س} جاس جتاس ءس (كتاب)

الحل = ∫ هـ^{س} جا٢س ءس

ص = جا٢س ، ءهـ = هـ^{س} ءس

ءص = ٢جتا٢س ءس ، هـ = هـ^{س}

= هـ^{س} جا٢س − ∫ ٢هـ^{س} جتا٢س ءس

* ∫ ٢هـ^{س} جتا٢س ءس =

ص = جتا٢س ، ءهـ = ٢هـ^{س}

ءص = −٢جا٢س ، هـ = ٢هـ^{س}

∫ هـ^{س} جا٢س ءس = هـ^{س} جا٢س − ٢هـ^{س} جتا٢س − ∫ ٤هـ^{س} جا٢س ءس

٥ ∫ هـ^{س} جا٢س ءس = هـ^{س} (جا٢س − ٢جتا٢س)

∫ هـ^{س} جا٢س ءس = $\frac{هـ^{س}}{٥}$ (جا٢س − ٢جتا٢س) + ج

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

④ $\int$ جا لو$_{هـ}$ س ءس

الحل ص = لو$_{هـ}$ س ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{س}$

ءس = س ءص ، س = هـ^{ص}

$\int$ هـ^{ص} جا ص ءص

أكمل الحل مثل السابق (دوري)

$\int$ جا لو$_{هـ}$ س ءس = $\frac{1}{2}$ س (جا لو$_{هـ}$ س − جتا لو$_{هـ}$ س) + جـ

الجزء السادس :
أفكار محيلة

مثال (7) جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{س \text{ جتا } س - \text{جا } س}{س^2}$ ءس

الحل = $\int \frac{\text{جتا } س}{س}$ ءس − $\int \frac{\text{جا } س}{س^2}$ ءس

* $\int \frac{\text{جا } س}{س^2}$ ءس = $\int$ س$^{-2}$ جا س ءس

م = جا س   ءهـ = س$^{-2}$ ءس

ءم = جتا س ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = $\frac{-1}{س}$

$\int \frac{\text{جا } س}{س^2}$ ءس = $\frac{-\text{جا } س}{س}$ + $\int \frac{\text{جتا } س}{س}$ ءس

* $\int \frac{س \text{ جتا } س - \text{جا } س}{س^2}$ ءس = $\int \frac{\text{جتا } س}{س}$ ءس + $\frac{\text{جا } س}{س}$ − $\int \frac{\text{جتا } س}{س}$ ءس

$\int \frac{س \text{ جتا } س - \text{جا } س}{س^2}$ ءس = $\frac{\text{جا } س}{س}$ + جـ

② $\int$ (س^9 قا^2 س + 9 س^8 ظا س) ءس

الحل = $\int$ س^9 قا^2 س ءس + $\int$ 9 س^8 ظا س ءس

* $\int$ س^9 قا^2 س ءس =

م = س^9 ءهـ = قا^2 س ءس

ءم = 9 س^8 ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = ظا س

= س^9 ظا س − $\int$ 9 س^8 ظا س ءس

$\int$ (س^9 قا^2 س + 9 س^8 ظا س) ءس =

س^9 ظا س − $\int$ 9 س^8 ظا س ءس + $\int$ 9 س^8 ظا س ءس

= س^9 ظا س + جـ

مثال (8) (2016 ص)

إذا علمت أن $\int_1^{هـ}$ س^4 لو$_{هـ}$ س ءس = $\frac{4 هـ^5 + 1}{25}$ ،

جد $\int_1^{هـ}$ س^4 (لو$_{هـ}$ س)^2 ءس

الحل

م = (لو$_{هـ}$ س)^2 ءهـ = س^4 ءس

ءم = $\frac{2}{س}$ لو$_{هـ}$ س ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = $\frac{س^5}{5}$

= $\frac{س^5}{5}$ (لو$_{هـ}$ س)^2 $\Big|_1^{هـ}$ − $\frac{2}{5}\int_1^{هـ}$ س^4 لو$_{هـ}$ س ءس

= $\frac{س^5}{5}$ (لو$_{هـ}$ س)^2 $\Big|_1^{هـ}$ − $\frac{2}{5}\int_1^{هـ}$ س^4 لو$_{هـ}$ س ءس

= $\frac{هـ^5}{5}$ (لو$_{هـ}$ هـ)^2 − $\frac{1}{5}$ (لو$_{هـ}$ 1)^2 − $\frac{2}{5}$ ($\frac{4 هـ^5 + 1}{25}$)

= $\frac{هـ^5}{5}$ − $\frac{8 هـ^5 + 2}{125}$ = $\frac{17 هـ^5 - 2}{125}$

مثال (9) (2017 ص)

إذا كان $\int_0^{\pi} \frac{\text{جتا } س}{(س+2)^2}$ ءس = أ ، أ ثابت

جد بدلالة أ قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا } 2س}{س+1}$ ءس

الحل م = $\frac{1}{س+1}$ ءهـ = جا 2س

ءم = $\frac{-1}{(س+1)^2}$ ءس $\xrightarrow{-2}$ هـ = $\frac{-1}{2}$ جتا 2س

= $\frac{-\text{جتا } 2س}{2(س+1)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ − $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا } 2س}{2(س+1)^2}$ ءس

= $\frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{2}$ − $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا } 2س}{2(س+1)^2}$ ءس

* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا } 2س}{(س+1)^2}$ ءس =

←

$\text{ص} = ٢\text{س}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow \text{ص} = \pi$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{٢(\text{س}+١)^٢} \frac{\text{دص}}{٢}$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{٤(\frac{\text{ص}}{٢}+١)^٢} \text{دص}$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{\frac{٤(\text{ص}+٢)^٢}{٤}} \text{دص}$

$= \int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتا ص}}{(\text{ص}+٢)^٢} \text{دص} = \text{أ}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}+١} \text{دس} = \frac{١}{\pi+٢} + \frac{١}{٢} - \text{أ}$

مثال (١٠)

إذا كان $\text{ق}(٢) = ٧$ ، $\text{هـ}(٢) = ٥$ ، $\text{ق}(٤) = ٦$ ، $\text{هـ}(٤) = ١٠$ ، $\int_{٢}^{٤} \text{هـ دق} = ١٣$

أوجد $\int_{٢}^{٤} \text{ق . دهـ}$

الحل

$\int_{٢}^{٤} \text{ق . دهـ}$

$\text{ق} \qquad \text{دهـ}$

$\text{دق} \xrightarrow{-2} \text{هـ}$

$= \text{ق . هـ} \Big|_{٢}^{٤} - \int_{٢}^{٤} \text{هـ دق}$

$= \text{ق}(٤) \times \text{هـ}(٤) - \text{ق}(٢) \times \text{هـ}(٢) - ١٣$

$= ٦ \times ١٠ - ٧ \times ٥ - ١٣ = ١٢$

مثال (١١)

إذا كان $\text{ق}(٣) = ٧$ ، $\text{قَ}(٣) = ٢$

$\text{ق}(-١) = ٥$ ، $\text{قَ}(-١) = ٤$ ، أوجد

$\int_{-١}^{٣} \text{س قً(س) دس}$

الحل

$\int_{-١}^{٣} \text{س قً(س) دس}$

$\text{ل} = \text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{قً(س) دس}$

$\text{دل} = \text{دس} \xrightarrow{-2} \text{هـ} = \text{قَ(س)}$

$= \text{س قَ(س)} \Big|_{-١}^{٣} - \int_{-١}^{٣} \text{قَ(س) دس}$

$= \text{س قَ(س)} - \text{ق(س)} \Big|_{-١}^{٣}$

$= (٣\text{قَ}(٣) - \text{ق}(٣)) - (-١\text{قَ}(-١) - \text{ق}(-١))$

$= ١٠ - ٢ = ٨$

مثال (١٢)

إذا كان $\int_{-١}^{٥} \text{ق(س) دس} = ٤$

$\text{ق}(٥) = ٣$ ، $\text{ق}(-١) = ٤$ ، أوجد

$\int_{٢}^{-١} \text{س قَ}(٣-٢\text{س}) \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = ٣ - ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٢}$

$\text{س} = -١ \Leftarrow \text{ص} = ٥$

$\text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = -١$

$= \int_{-١}^{٥} \text{س قَ(ص)} \frac{\text{دص}}{-٢}$

$= \int_{-١}^{٥} \frac{-١}{٢} \text{س قَ(ص) دص}$

$= \int_{-١}^{٥} \frac{\text{ص}-٣}{٤} \text{قَ(ص) دص}$

$\text{ل} = \frac{\text{ص}-٣}{٤}$ ، $\text{دهـ} = \text{قَ(ص) دص}$

$\text{دل} = \frac{١}{٤}\text{دص} \xrightarrow{-2} \text{هـ} = \text{ق(ص)}$

$= \frac{\text{ص}-٣}{٤} \text{ق(ص)} \Big|_{-١}^{٥} - \int_{-١}^{٥} \frac{١}{٤} \text{ق(ص)}$

$= \frac{١}{٢} \text{ق}(٥) + \text{ق}(-١) - \frac{١}{٤} \times ٤$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ + ٤ - ١ = \frac{٩}{٢}$

مثال (١٣) (كتاب + ٢٠٩ ص)

إذا كان ق(س) اقتران قابل للاشتقاق على ح وكان $\int_{1}^{2} ق(س)\, دس = 10$ ، $ق(2) = 3$

$ق(1) = -1$ ، جد $\int_{0}^{1} س^{5}\, قَ(س^{3}+1)\, دس$

الحل $\int_{0}^{1} س^{5}\, قَ(س^{3}+1)\, دس$

$ص = س^{3} + 1$	$س = 0 \leftarrow ص = 1$
$\frac{دص}{دس} = 3س^{2}$	$س = 1 \leftarrow ص = 2$
$دس = \frac{دص}{3س^{2}}$	

$= \int_{1}^{2} س^{5}\, قَ(ص)\, \frac{دص}{3س^{2}}$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{3} س^{3}\, قَ(ص)\, دص$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{3}(ص-1)\, قَ(ص)\, دص$

$ل = \frac{1}{3}(ص-1)$ ، $دهـ = قَ(ص)\, دص$

$دل = \frac{1}{3}\, دص$ ، $هـ = ق(ص)$

$= \frac{1}{3}(ص-1)\, ق(ص) \Big|_{1}^{2} - \frac{1}{3}\int_{1}^{2} ق(ص)\, دص$

$= \frac{1}{3} ق(2) - 0 - \frac{1}{3} \times 10$

$= 1 - \frac{10}{3} = \frac{-7}{3}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

ورقة عمل (٧)

السؤال الأول :

أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{س}}{\text{قا}^2\text{س}}\, \text{ء س}$ (٢٠٠٨ ص)

الجواب $\frac{1}{4}\text{س}^2 + \frac{1}{4}\text{س جا}2\text{س} + \frac{1}{8}\text{جتا}2\text{س} + \text{جـ}$

② $\int \text{س}^2\, \text{جتاس ء س}$

الجواب $\text{س}^2\text{جاس} + 2\text{س جتاس} - 2\text{جاس} + \text{جـ}$

③ $\int \text{س}^3\, \text{جتاس}^2\, \text{ء س}$

الجواب $\frac{1}{2}\text{س}^2\text{جاس}^2 + \frac{1}{2}\text{جتاس}^2 + \text{جـ}$

④ $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\, \text{ء س}$

الجواب $-2\sqrt{\text{س}}\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}} + 2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

⑤ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\, \text{ء س}$ (١٩٩٧)

الجواب $\frac{1}{2}\text{س قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظاس} + \text{جـ}$

⑥ $\int (\text{س جتا}^2\text{س} - \text{س جا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

الجواب $\frac{1}{2}\text{س جا}2\text{س} + \frac{1}{4}\text{جتا}2\text{س} + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{ء س}$

الجواب $\frac{\text{س}^2}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^2 + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+9}\, \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+9)\, \text{ء س}$

الجواب $\frac{1}{2}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+9)\right)^2 + \text{جـ}$

⑨ $\int \text{قا}^2\sqrt{\text{س}}\, \text{ء س}$ (٢٠١١ ص)

الجواب $2\sqrt{\text{س}}\,\text{ظا}\sqrt{\text{س}} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

⑩ $\int \text{هـ}^{(\text{س}+3\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}\, \text{ء س}$

الجواب

$\text{س}^3\text{هـ}^{\text{س}} - 3\text{س}^2\text{هـ}^{\text{س}} + 6\text{س هـ}^{\text{س}} - 6\text{هـ}^{\text{س}}$

⑪ $\int \text{س}^2\, \text{هـ}^{3\text{س}}\, \text{ء س}$

الجواب : $\frac{1}{3}\text{س}^2\text{هـ}^{3\text{س}} - \left(\frac{2}{9}\text{س هـ}^{3\text{س}} - \frac{2}{27}\text{هـ}^{3\text{س}}\right) + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{2\text{س}+1}}\, \text{ء س}$

الجواب $\text{س}\sqrt{2\text{س}+1} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2\text{س}+1}\right)^3 + \text{جـ}$

⑬ $\int (2\text{س}-1)\, \text{جا}2\text{س}\, \text{ء س}$ (٢٠١١ ش)

الجواب : $\frac{-1}{2}(2\text{س}-1)\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س} + \text{جـ}$

⑭ $\int \text{س}^2\, \text{جتا}2\text{س}\, \text{ء س}$

الجواب : $\frac{\text{س}^2}{2}\text{جا}2\text{س} + \frac{\text{س}}{2}\text{جتا}2\text{س} - \frac{\text{جا}2\text{س}}{4} + \text{جـ}$

⑮ $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^3\text{س}}\, \text{ء س}$ (٢٠١٢ ص)

الجواب : $\frac{-\text{س}}{2}\text{ظتا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظتاس} - \frac{\text{س}}{2} + \text{جـ}$

⑯ $\int \sqrt{\text{س}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{ء س}$

الجواب $\frac{2}{3}(\sqrt{\text{س}})^3\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{4}{9}(\sqrt{\text{س}})^3 + \text{جـ}$

⑰ $\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{ء س}$

الجواب : $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{(\text{ن}+1)^2}\text{س}^{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

(١٨) $\int \frac{هـ^{س}}{قتا\,س}\, دس$ (٢٠٠٩) شتوي

الجواب: $\frac{١}{٢} هـ^{س} (جاس - جتاس) + جـ$

(١٩) $\int هـ^{س}\, جتاس\, دس$

الجواب: $\frac{١}{٢} هـ^{س} (جتاس + جاس) + جـ$

السؤال الثاني:

إذا كان $\int_{١}^{هـ} س\, ق(س) = ٤$ ، أوجد

$\int^{٢} هـ^{س}\, ق'(\frac{١}{هـ^{س}})\, دس$ $\boxed{٨}$

السؤال الثالث:

إذا علمت أن ق(١) = ٣ ، ق(٠) = -١

وكان $\int_{٠}^{١} ق(س)\, دس = ٥$ ، أوجد $\int_{٠}^{١} (س+١)\, ق'(س)\, دس$

$\boxed{٢}$

السؤال الرابع

إذا كان $\int_{٢}^{١} ق(س)\, دس = ٢$

وكان ق(٢) = ٤ ، ق'(٢) = ١ ، ق(١) = ٥

ق'(١) = ٥ ، أوجد $\int_{١}^{٢} س^{٢}\, ق''(س)\, دس$ $\boxed{-١١}$

السؤال الخامس (١٩٩٨)

إذا كان ق(س) معكوس مشتقة الاقتران م(س)

حيث م(١) = ٣ ، م(٣) = ٥ ، ق(١) = ١ ،

ق'(٣) = ٢ ، جد $\int_{١}^{٣} ٢س\, ق'(س)\, دس$ $\boxed{٦}$

الدرس الثامن
التكامل بالكسور الجزئية

يسمى الاقتران $ل(س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ اقتران نسبي حيث يمكن كتابته على صورة $\frac{بسط}{مقام}$ ، $ق(س)$، $هـ(س)$ كثيرتي حدود

تذكر

لبعض طرق إجراء تكامل الاقتران النسبي

(1) التحليل

مثال $\int \frac{س^2 - 9}{س+3} دس = \int (س-3) دس$

$= \frac{س^2}{2} - 3س + جـ$

(2) إذا وجد علاقة بين مشتقة المقام والبسط يمكن أن يحسب التكامل باستخدام التعويض أو اللوغاريتم

مثال (1) $\int \frac{س-2}{س^2-5س+6} دس = \int \frac{س-2}{(س-2)(س-3)} دس$

$= \int \frac{1}{س-3} دس = لو_هـ|س-3| + جـ$

(2) $\int \frac{س}{س^2-9} دس = \frac{1}{2} لو_هـ|س^2-9|$

ويحل أيضاً تعويض

(3) إذا كان الاقتران نسبي وفشلت الطرق السابقة في حساب التكامل في هذه الحالة نستخدم الكسور الجزئية

طريقة تجزئة الكسر

مثال $ق(س) = \frac{2س+7}{س^2+س-2}$

الحل $\frac{3س+7}{س^2+س-2} = \frac{2س+7}{(س+2)(س-1)}$

$\frac{2س+7}{(س+2)(س-1)} = \frac{أ}{س+2} + \frac{ب}{س-1}$

$\frac{2س+7}{(س+2)(س-1)} = \frac{أ(س-1)}{(س+2)(س-1)} + \frac{ب(س+2)}{(س+2)(س-1)}$

$2س+7 = أ(س-1) + ب(س+2)$

$س=1 \leftarrow 9 = 0 + 3ب \leftarrow \boxed{ب=3}$

$س=-2 \leftarrow 3 = -3أ + 0 \leftarrow \boxed{أ=-1}$

$\frac{2س+7}{س^2+س-2} = \frac{-1}{س+2} + \frac{3}{س-1}$

الجزء الأول
درجة البسط أقل من درجة المقام

يتم تجزئة الكسر ثم تكامل

مثال أوجد التكاملات الآتية

(1) $\int \frac{2}{س^2-1} دس$

الحل $\frac{2}{س^2-1} = \frac{2}{(س-1)(س+1)} = \frac{أ}{س-1} + \frac{ب}{س+1}$

$2 = أ(س+1) + ب(س-1)$

$س=1 \leftarrow 2 = 2أ \leftarrow \boxed{أ=1}$

$س=-1 \leftarrow 2 = -2ب \leftarrow \boxed{ب=-1}$

$\int \frac{2}{س^2-1} دس = \int \left(\frac{1}{س-1} - \frac{1}{س+1}\right) دس$

$= لو_هـ|س-1| - لو_هـ|س+1| + جـ$

٢٠١٤ ش

(٢) $\int \frac{دس}{س^2-5س+6}$

الحل: $\frac{1}{س^2-5س+6} = \frac{1}{(س-2)(س-3)}$

$\frac{1}{(س-2)(س-3)} = \frac{أ}{س-2} + \frac{ب}{س-3}$

$1 = أ(س-3) + ب(س-2)$

$س=2 \leftarrow 1 = -أ \leftarrow \boxed{أ=-1}$

$س=3 \leftarrow 1 = ب \leftarrow \boxed{ب=1}$

$\int \frac{دس}{س^2-5س+6} = \int \left(\frac{1}{س-3} - \frac{1}{س-2}\right) دس$

$= لو_هـ|س-3| - لو_هـ|س-2| + جـ$

٢٠١٠ ص

(٣) $\int \frac{س-13}{2س^2-7س+3}$ (كتاب)

الحل: $\frac{س-13}{2س^2-7س+3} = \frac{س-13}{(2س-1)(س-3)}$

$\frac{س-13}{(2س-1)(س-3)} = \frac{أ}{2س-1} + \frac{ب}{س-3}$

$س-13 = أ(س-3) + ب(2س-1)$

$س=\frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{2}-13 = أ(\frac{1}{2}-3) \leftarrow \boxed{أ=5}$

$س=3 \leftarrow -10 = 5ب \leftarrow \boxed{ب=-2}$

$\int \frac{س-13}{2س^2-7س+3} = \int \left(\frac{5}{2س-1} - \frac{2}{س-3}\right) دس$

$= \frac{5}{2} لو_هـ|2س-1| - 2لو_هـ|س-3| + جـ$

---

(٤) $\int_0^1 \frac{6س+7}{س^2-س-6} دس$

الحل: $\frac{6س+7}{س^2-س-6} = \frac{6س+7}{(س-3)(س+2)} = \frac{أ}{س-3} + \frac{ب}{س+2}$

$\int_0^1 \frac{6س+7}{س^2-س-6} دس = \int_0^1 \left(\frac{أ}{س-3} + \frac{ب}{س+2}\right) دس$

$6س+7 = أ(س+2) + ب(س-3)$

$س=3 \leftarrow 25 = 5أ \leftarrow \boxed{أ=5}$

$س=-2 \leftarrow -5 = -5ب \leftarrow \boxed{ب=1}$

$= \int_0^1 \left(\frac{5}{س-3} + \frac{1}{س+2}\right) دس$

$= 5لو_هـ|س-3| + لو_هـ|س+2| \Big|_0^1$

$= (5لو_هـ2 + لو_هـ3) - (5لو_هـ3 + لو_هـ2) = لو_هـ\frac{16}{81}$

---

(٥) $\int_1^3 \frac{4س+1}{س^2-س-2} دس$

الحل: $\frac{4س+1}{س^2-س-2} = \frac{4س+1}{(س-2)(س+1)}$

$\frac{4س+1}{(س-2)(س+1)} = \frac{أ}{س-2} + \frac{ب}{س+1}$

$4س+1 = أ(س+1) + ب(س-2)$

$س=2 \leftarrow 9 = 3أ \leftarrow \boxed{أ=3}$

$س=-1 \leftarrow -3 = -3ب \leftarrow \boxed{ب=1}$

$\int_1^3 \frac{4س+1}{س^2-س-2} دس = \int_1^3 \left(\frac{3}{س-2} + \frac{1}{س+1}\right) دس$

$= 3لو_هـ|س-2| + لو_هـ|س+1| \Big|_1^3$

$= 3لو_هـ1 + لو_هـ4 - (3لو_هـ1 + لو_هـ2)$

$= لو_هـ4 - لو_هـ2 = لو_هـ2$

---

(٦) ٢٠١٤ ص

$\int_1^4 \frac{|س-1|}{س^2-5س+6} دس$ (كتاب)

الحل: $|س-1| \leftarrow س=1$

$1-س \quad | \quad س-1$

$- - \quad 1 \quad + +$

$= \int_1^4 \frac{س-1}{س^2-5س+6} دس$

$\frac{س-1}{س^2-5س+6} = \frac{س-1}{(س-2)(س-3)} = \frac{أ}{س-2} + \frac{ب}{س-3}$

$س-1 = أ(س-3) + ب(س-2)$

$س=2 \leftarrow 1 = -أ \leftarrow \boxed{أ=-1}$

$س=3 \leftarrow 2 = ب \leftarrow \boxed{ب=2}$

$\int_1^4 \frac{س-1}{س^2-5س+6} دس = \int_1^4 \left(\frac{2}{س-3} - \frac{1}{س-2}\right) دس$

$= 2لو_هـ|س-3| - لو_هـ|س-2| \Big|_1^4$

$= 2لو_هـ1 - لو_هـ2 - (2لو_هـ2 - لو_هـ1)$

$= -لو_هـ2 - 2لو_هـ2 = -3لو_هـ2$

---

(٧) $\int \frac{دس}{س(س-2)(س+3)}$

الحل: $\frac{1}{س(س-2)(س+3)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-2} + \frac{جـ}{س+3}$

$1 = أ(س-2)(س+3) + ب س(س+3) + جـ س(س-2)$

$س=0 \leftarrow 1 = -6أ \leftarrow أ = \frac{-1}{6}$

$س=2 \leftarrow 1 = 10ب \leftarrow ب = \frac{1}{10}$

$\text{س} = -3 \leftarrow 15 = 1 \text{جـ} \leftarrow \text{جـ} = \frac{1}{15}$

$\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{س}-2)(\text{س}+3)} = \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{\text{س}} + \frac{\frac{1}{10}}{\text{س}-2} + \frac{\frac{1}{15}}{\text{س}+3} \right) \text{دس}$

$= \frac{-1}{6} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{1}{10} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \frac{1}{15} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{جـ}$

الجزء الثاني
درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام

خطوات الحل

① نقسم قسمة طويلة

② نكتب الاقتران بصورة

$\text{ق}(\text{س}) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

③ $\int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = \int \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} \, \text{دس}$

$\int \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ له حالتين

أ) المقسوم عليه خطي لوغاريتم مباشرة

ب) المقسوم عليه درجة ثانية

يحل بتجزئة الكسور (الجزء الأول)

مثال أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{2\text{س}^2 + 3}{\text{س}^2 - \text{س}} \, \text{دس}$ (كتاب)

الحل

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 2\text{س}^2 + 3 & \text{س}^2 - \text{س} \\ -(2\text{س}^2 - 2\text{س}) & \\ \hline 2\text{س} + 3 & \end{array}$$

$\frac{2\text{س}^2 + 3}{\text{س}^2 - \text{س}} = 2 + \frac{2\text{س} + 3}{\text{س}^2 - \text{س}}$

$\frac{2\text{س} + 3}{\text{س}^2 - \text{س}} = \frac{2\text{س} + 3}{\text{س}(\text{س} - 1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - 1}$

$2\text{س} + 3 = \text{أ}(\text{س} - 1) + \text{ب} \text{س}$

$\text{س} = 0 \leftarrow 3 = -\text{أ} \leftarrow \boxed{\text{أ} = -3}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \boxed{\text{ب} = 5}$

$\int \frac{2\text{س}^2 + 3}{\text{س}^2 - \text{س}} \, \text{دس} = \int \left(2 - \frac{3}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س} - 1} \right) \text{دس}$

$= 2\text{س} - 3 \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + 5 \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 1| + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 11}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15} \, \text{دس}$

الحل

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline \text{س}^2 + 3\text{س} - 11 & \text{س}^2 + 2\text{س} - 15 \\ -(\text{س}^2 + 2\text{س} - 15) & \\ \hline \text{س} + 4 & \end{array}$$

$\frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 11}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15} = 1 + \frac{\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}$

$\frac{\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15} = \frac{\text{س} + 4}{(\text{س} + 5)(\text{س} - 3)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + 5} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - 3}$

$\text{س} + 4 = \text{أ}(\text{س} - 3) + \text{ب}(\text{س} + 5)$

$\text{س} = -5 \leftarrow -1 = -8\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{8}$

$\text{س} = 3 \leftarrow 7 = 8\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{7}{8}$

$\int \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 11}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15} \, \text{دس} = \int \left(1 + \frac{\frac{1}{8}}{\text{س} + 5} + \frac{\frac{7}{8}}{\text{س} - 3} \right) \text{دس}$

$= \text{س} + \frac{1}{8} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + 5| + \frac{7}{8} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 3| + \text{جـ}$

③ $\int \frac{\text{س}^5 + 2}{\text{س}^2 - 1} \, \text{دس}$ ٢٠١٣ ص

الحل

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^3 + \text{س} & \\ \hline \text{س}^5 + 2 & \text{س}^2 - 1 \\ -(\text{س}^5 - \text{س}^3) & \\ \hline \text{س}^3 + 2 & \\ -(\text{س}^3 - \text{س}) & \\ \hline \text{س} + 2 & \end{array}$$

$\frac{\text{س}^5 + 2}{\text{س}^2 - 1} = \text{س}^3 + \text{س} + \frac{\text{س} + 2}{\text{س}^2 - 1}$

$\frac{\text{س} + 2}{\text{س}^2 - 1} = \frac{\text{س} + 2}{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - 1} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + 1}$

$\text{س} + 2 = \text{أ}(\text{س} + 1) + \text{ب}(\text{س} - 1)$

$\text{س} = 1 \leftarrow 3 = 2\text{أ} \leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{3}{2}}$

$\text{س} = -1 \leftarrow 1 = -2\text{ب} \leftarrow \boxed{\text{ب} = \frac{-1}{2}}$

$\int \frac{\text{س}^5 + 2}{\text{س}^2 - 1} \, \text{دس} = \int \left(\text{س}^3 + \text{س} + \frac{-\frac{1}{2}}{\text{س} + 1} + \frac{\frac{3}{2}}{\text{س} - 1} \right) \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^4}{4} + \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + 1| + \frac{3}{2} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - 1| + \text{جـ}$

④ $\int \frac{س^3+س}{س-1}\,دس$

الحل

$$\begin{array}{r|l} س^2+س+2 & \\ \hline س^3+س & س-1 \\ -(س^3-س^2) & \\ \hline س^2+س & \\ -(س^2-س) & \\ \hline 2س & \\ -(2س-2) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$\frac{س^3+س}{س-1} = س^2+س+2+\frac{2}{س-1}$

$\int \frac{س^3+س}{س-1}\,دس = \int \left(س^2+س+2+\frac{2}{س-1}\right) دس$

$= \frac{س^3}{3}+\frac{س^2}{2}+2س+2\,لو_{هـ}|س-1|+جـ$

ملاحظة

① إذا كان المقام من الدرجة الثانية وله جذر واحد فقط نحل أجزاء

② المطالب في منهاج الوزارة أن يكون المقسوم عليه من الدرجة الثانية وإذا ورد أكبر من الدرجة الثانية نحل أجزاء بشرط له جذور مرفقة

⑤ $\int \frac{5س^2-7س-8}{س^2-2س+1}\,دس$

الحل

$$\begin{array}{r|l} 5 & \\ \hline 5س^2-7س-8 & س^2-2س+1 \\ -(5س^2-10س+5) & \\ \hline 3س-13 & \end{array}$$

$\frac{5س^2-7س-8}{س^2-2س+1} = 5 + \frac{3س-13}{س^2-2س+1}$

$\frac{3س-13}{س^2-2س+1} = \frac{3س-13}{(س-1)^2}$

$\int \frac{5س^2-7س-8}{س^2-2س+1}\,دس = \int 5\,دس + \int \frac{3س-13}{(س-1)^2}\,دس$

$\int (3س-13)(س-1)^{-2}\,دس$

م $= 3س-13$ ، دهـ $= (س-1)^{-2}\,دس$

دم $= 3\,دس$ ، هـ $= \frac{-1}{س-1}$

$= \frac{13-3س}{س-1} + \int \frac{3}{س-1}\,دس$

$= \frac{13-3س}{س-1} + 3\,لو_{هـ}|س-1|$

$\int \frac{5س^2-7س-8}{س^2-2س+1}\,دس = 5س + \frac{13-3س}{س-1} + 3\,لو_{هـ}|س-1| + جـ$

---

⑥ $\int \frac{2س+1}{(س-2)^3}\,دس$

الحل $= \int (2س+1)(س-2)^{-3}\,دس$

م $= 2س+1$ ، دهـ $= (س-2)^{-3}\,دس$

دم $= 2\,دس$ ، هـ $= \frac{(س-2)^{-2}}{-2}$

$= \frac{-2س-1}{2(س-2)^2} + \int (س-2)^{-2}\,دس$

$= \frac{-2س-1}{2(س-2)^2} - \frac{1}{س-2} + جـ$

الجزء الثالث
استخدام التكامل بالتعويض والأجزاء ثم كسور جزئية

مثال أوجد التكاملات الآتية

① $\int_9^{16} \frac{\sqrt{س}}{س-4}\,دس$ (كتاب)

الحل ص $= \sqrt{س}$ ، س $= 9$ ← ص $= 3$ ، س $= 16$ ← ص $= 4$

ص^2 = س ← 2ص $\frac{دص}{دس} = 1$ ← دس = 2ص دص

$= \int_3^4 \frac{ص}{ص^2-4} \times 2ص\,دص = \int_3^4 \frac{2ص^2}{ص^2-4}\,دص$

أكمل قسمة طويلة ← تجزئة كسور (جاهز)

$2 + 2\,لو_{هـ}\frac{5}{3}$

---

② $\int \frac{\sqrt{س+1}+1}{\sqrt{س+1}-1}\,دس$ (كتاب)

الحل ص $= \sqrt{س+1}$ ← ص^2 = س + 1

2ص $\frac{دص}{دس} = 1$ ← دس = 2ص دص

$\int \frac{ص+1}{ص-1}\,2ص\,دص = \int \frac{2ص^2+2ص}{ص-1}\,دص$

أكمل قسمة طويلة ← لوغاريتم

$(\sqrt{س+1})^2 + 4\sqrt{س+1} + 4\,لو_{هـ}|\sqrt{س+1}-1| + جـ$

③ $\int \frac{1}{\text{س} - 2\sqrt{\text{س}} - 3}\, \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 2\text{ص}\,\text{دص}$

$\int \frac{2\text{ص}}{\text{ص}^2 - 2\text{ص} - 3}\, \text{دص}$

أكمل بتجزئة الكسور حالة (1)

$\frac{3}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} - 3| + \frac{1}{2} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} + 1| + \text{جـ}$

---

④ ٢٠٠٥ $\int \frac{1}{2\text{س} - 1 + \sqrt{2\text{س} + 1}}\, \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \sqrt{2\text{س} + 1} \leftarrow \text{ص}^2 = 2\text{س} + 1$

$2\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 \leftarrow \text{دس} = \text{ص}\,\text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2 + \text{ص} - 2}\, \text{دص}$

أكمل بتجزئة الكسور حالة (1)

$\frac{2}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{2\text{س}+1} + 2| + \frac{1}{3} \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{2\text{س}+1} - 1| + \text{جـ}$

---

⑤ $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\sqrt[3]{\text{س}^2} - 4}\, \text{دس}$ (الكتاب)

الحل $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2 \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 3\text{ص}^2\,\text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص} - 1}{\text{ص}^2 - 4} \times 3\text{ص}^2\, \text{دص}$

$= \int \frac{3\text{ص}^3 - 3\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 4}\, \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← بتجزئة كسور (حالة 1)

$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{\text{س}})^2 - 3\sqrt[3]{\text{س}} + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt[3]{\text{س}} - 2| + 9\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt[3]{\text{س}} + 2| + \text{جـ}$

---

⑥ ٢٠١٠ شتوي $\int_1^8 \frac{2\, \text{دس}}{\sqrt[3]{\text{س}^4} + 4\text{س} + 3\sqrt[3]{\text{س}^2}}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1$ ، $\text{س} = 8 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2 \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 3\text{ص}^2\,\text{دص}$

$= \int_1^2 \frac{6\text{ص}^2}{\text{ص}^4 + 4\text{ص}^3 + 3\text{ص}^2}\, \text{دص}$

$= \int_1^2 \frac{6\text{ص}^2}{\text{ص}^2(\text{ص}^2 + 4\text{ص} + 3)}\, \text{دص}$

$= \int_1^2 \frac{6}{\text{ص}^2 + 4\text{ص} + 3}\, \text{دص}$

أكمل بتجزئة الكسور (حالة 1)

$3\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{6}{5}$

---

⑦ ٢٠٠٦ صيفي $\int \frac{1}{\text{س} + 2\text{س}\sqrt[3]{\text{س}}}\, \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2 \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 3\text{ص}^2\,\text{دص}$

$= \int \frac{3\text{ص}^2}{\text{ص}^3 + 2\text{ص}^4}\, \text{دص} = \int \frac{3\text{ص}^2}{\text{ص}^3(1 + 2\text{ص})}\, \text{دص}$

$= \int \frac{3}{2\text{ص}^2 + \text{ص}}\, \text{دص}$

أكمل بتجزئة الكسور حالة (1)

$3\,\text{لو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{2\sqrt[3]{\text{س}} + 1} \right| + \text{جـ}$

---

⑧ $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{س}}}\, \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \sqrt[6]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^6 = \text{س}$

$6\text{ص}^5 \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \leftarrow \text{دس} = 6\text{ص}^5\,\text{دص}$

$= \int \frac{6\text{ص}^5}{\sqrt{\text{ص}^6} + \sqrt[3]{\text{ص}^6}}\, \text{دص} = \int \frac{6\text{ص}^5}{\text{ص}^3 + \text{ص}^2}\, \text{دص}$

$= \int \frac{6\text{ص}^5}{\text{ص}^2(\text{ص} + 1)}\, \text{دص} = \int \frac{6\text{ص}^3}{\text{ص} + 1}\, \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← لوغاريتم

$2(\sqrt[6]{\text{س}})^3 - 3(\sqrt[6]{\text{س}})^2 + 6\sqrt[6]{\text{س}} - 6\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt[6]{\text{س}} + 1| + \text{جـ}$

---

⑨ ٢٠٠١ $\int \frac{1}{1 + \text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{دس}$ (الكتاب)

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \frac{1}{1 + \text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \frac{1}{\text{ص}(1 + \text{ص})}\, \text{دص}$

أكمل بتجزئة حالة (1)

$= \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + 1} \right| + \text{جـ}$

---

⑩ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} - 2}\, \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2 - \text{ص} - 2} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \frac{1}{\text{ص}^2 - \text{ص} - 2}\, \text{دص}$

أكمل تجزئة كسور حالة (١)

$= \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-2| - \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \text{جـ}$

---

(11) $\int \sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دس}$ (كتاب)

الحل $\text{ص} = \sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}} \leftarrow \text{ص}^2 = 1+\text{هـ}^{\text{س}}$

$2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{2\text{ص دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^2 - 1$

$= \int \text{ص} \times \frac{2\text{ص}}{\text{ص}^2-1}\ \text{دص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2-1}\ \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حالة ٢)

$2\sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}}-1| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{1+\text{هـ}^{\text{س}}}+1| + \text{جـ}$

---

(12) $\int \sqrt{1-\frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}}\ \text{دس}$

الحل $= \int \sqrt{1-\text{هـ}^{-\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\text{هـ}^{-\text{س}}} \leftarrow \text{ص}^2 = 1-\text{هـ}^{-\text{س}}$

$2\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{-\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \frac{2\text{ص دص}}{\text{هـ}^{-\text{س}}}$

$\text{هـ}^{-\text{س}} = 1-\text{ص}^2$

$= \int \text{ص}\ \frac{2\text{ص}}{1-\text{ص}^2}\ \text{دص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2}{1-\text{ص}^2}\ \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حالة ٢)

---

(13) ٢٠٠٨ ص

$\int_1^{\text{هـ}} \frac{2}{\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-2)(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-3)}\ \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$= \int_1^{\text{هـ}} \frac{2}{\text{س}(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}\ \text{س دص} = \int_0^1 \frac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}\ \text{دص}$

أكمل تجزئة كسور حالة (١)

$\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{16}{9}$

---

(14) ٢٠٠٨ ش

$\int \frac{3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-2)^2}\ \text{دس}$

الحل $\int 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ (\text{س}-2)^{-2}\ \text{دس}$

$\text{م} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دهـ} = (\text{س}-2)^{-2}\ \text{دس}$

$\text{دم} = \frac{3}{\text{س}}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{-1}{\text{س}-2}$

$= \frac{-3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + \int \frac{3}{\text{س}(\text{س}-2)}\ \text{دس}$

* $\int \frac{2}{\text{س}(\text{س}-2)}\ \text{دس}$ تجزئة كسور حالة (١)

$\int \frac{3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-2)^2}\ \text{دس}$

$= \frac{-3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-2} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

---

(15) ٢٠١٠ ص

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1)\ \text{دس}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1)$ $\qquad$ $\text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دم} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2-1}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{س}$

$\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1) - \int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\ \text{دس}$

* $\int \frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2-1}\ \text{دس}$ قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حالة ٢)

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2-1)\ \text{دس}$

$= \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2-1| - 2\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+1| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}$

---

(16) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}+2}\ \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}+2}}}{\sqrt{\text{س}+2}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2(\text{س}+2)} \leftarrow \text{دس} = 2(\text{س}+2)\ \text{دص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+2}} \times 2\cancel{(\text{س}+2)}\ \text{دص}$

$= \int 2\text{ص}\ \text{دص} = \text{ص}^2 + \text{جـ}$

$= \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+2}\right)^2 + \text{جـ}$

---

(17) $\int \frac{\text{قا}^4\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س} - \text{ظاس} - 2}\ \text{دس}$

الحل $\text{ص} = \text{ظاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \frac{\text{قا}^4\text{س}}{\text{ص}^2-\text{ص}-2}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ص}^2-\text{ص}-2}\ \text{دص}$

$= \int \frac{1+\text{ظا}^2\text{س}}{\text{ص}^2-\text{ص}-2}\ \text{دص} = \int \frac{1+\text{ص}^2}{\text{ص}^2-\text{ص}-2}\ \text{دص}$

أكمل قسمة طويلة ← تجزئة كسور (حالة ٢)

$\text{ظاس} + \frac{5}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}-2| - \frac{2}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}+1| + \text{جـ}$

(١٨) $\int \frac{قاس\ ظاس}{قا^2س - ٢قاس - ٣}\ دس$

الحل: $ص = قاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = قاس\ ظاس$

$دس = \frac{دص}{قاس\ ظاس}$

$= \int \frac{\cancel{قاس\ ظاس}}{ص^2 - ٢ص - ٣} \cdot \frac{دص}{\cancel{قاس\ ظاس}}$

$= \int \frac{١}{ص^2 - ٢ص - ٣}\ دص$

بتجزئة صاب (١١)

$\frac{١}{٤} لو_هـ|قاس - ٣| - \frac{١}{٤} لو_هـ|قاس + ١| + جـ$

---

(١٩) $\int \frac{٦\ جتاس}{(٢جاس - ١)(جاس + ١)}\ دس$ ٢٠٠٦ ص

الحل: $ص = جاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = جتاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{٦\ \cancel{جتاس}}{(٢ص - ١)(ص + ١)} \cdot \frac{دص}{\cancel{جتاس}} = \int \frac{٦}{(٢ص - ١)(ص + ١)}\ دص$

أكمل بتجزئة صاب (١١)

$٢\left(لو_هـ|٢جاس - ١| - لو_هـ|جاس + ١|\right) + جـ$

---

(٢٠) $\int \frac{جتاس}{١ + ٣جاس - جتا^2س}\ دس$ الكتاب ٢٠٠٨ ش

الحل

$= \int \frac{جتاس}{١ + ٣جاس - ١ + جا^2س}\ دس$

$= \int \frac{جتاس}{٣جاس + جا^2س}\ دس$

$ص = جاس \leftarrow \frac{دص}{دس} = جتاس \leftarrow دس = \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{\cancel{جتاس}}{٣ص + ص^2} \cdot \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$= \int \frac{١}{٣ص + ص^2}\ دص$

أكمل بتجزئة الكسور صاب (١١)

$\frac{١}{٣} لو_هـ|جاس| - \frac{١}{٣} لو_هـ|جاس + ٣| + جـ$

---

(٢١) $\int \frac{س}{س^4 + س^2}\ دس$ (الكتاب)

الحل $= \int \frac{س}{س(س^3 + س)}\ دس$

$= \int \frac{١}{س^3 + س}\ دس$

يمكن الحل بالكسور الجزئية لكن نؤيد حل السؤال بما يسمى أكبر قوة

$= \int \frac{١}{س^3(١ + س^{-2})}\ دس$

$ص = ١ + س^{-2} \leftarrow \frac{دص}{دس} = -٢س^{-3} = \frac{-٢}{س^3}$

$دس = \frac{-س^3}{٢}\ دص$

$= \int \frac{١}{\cancel{س^3}(ص)} \times \frac{-\cancel{س^3}}{٢}\ دص$

$= \int \frac{-١}{٢ص}\ دص = \frac{-١}{٢} لو_هـ|ص| + جـ$

$= \frac{-١}{٢} لو_هـ|١ + س^{-2}| + جـ$

---

(٢٢) $\int \frac{جتاس}{١ + ٣جاس - جتا^2س}\ دس$ (الكتاب)

(٢٣) $\int \frac{\sqrt{س - ٢} + ١}{\sqrt{٤س - ٨} - ٢}\ دس$ (الكتاب)

(٢٤) $\int \frac{قا^2س}{٥ - قا^2س}\ دس$ (الكتاب)

(٢٥) $\int \frac{دس}{س(لو_هـ س)^2 - ٤س}$ (الكتاب)

(٢٦) $\int_{٩}^{١٦} \frac{دس}{س - ٣\sqrt{س} + ٢}$ (الكتاب)

(٢٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٨ + جتا^2س}\ دس$ الكتاب

(٢٨) $\int \frac{٢ - \sqrt[3]{س}}{٩ - \sqrt[3]{س^2}}\ دس$ (٢٠١٥ ش)

(٢٩) $\int \frac{دس}{س - \sqrt{س + ٢}}$ (٢٠١٧ ش)

(٣٠) $\int \frac{قاس\ ظاس}{٨ - ظا^2س}\ دس$ (٢٠١٧ ص)

ورقة عمل الدرس الثامن

سؤال: أوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{3\text{س}+1}{\text{س}^2+\text{س}-6}\,\text{د س}$

$$\boxed{\frac{8}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \frac{7}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-2| + \text{جـ}}$$

② $\int_{4}^{5} \frac{3}{\text{س}^2-4\text{س}+3}\,\text{د س}$

$$\boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{3}{2}}$$

③ $\int \frac{2\text{س}^2+3}{\text{س}^2-\text{س}}\,\text{د س}$

$$\boxed{2\text{س} - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-1| + \text{جـ}}$$

④ $\int \frac{\text{س}^3+4\text{س}-8}{\text{س}^2-9}\,\text{د س}$ (الكتاب)

$$\boxed{\frac{\text{س}^2}{2} + \frac{31}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-3| + \frac{47}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+3| + \text{جـ}}$$

⑤ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}-\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$

⑥ $\int \frac{\sqrt{9\text{س}+9}-1}{\sqrt{\text{س}+1}+1}\,\text{د س}$

$$\boxed{3(\text{س}+1) - 8\sqrt{\text{س}+1} + 8\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}+1}+1| + \text{جـ}}$$

⑦ $\int \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{\sqrt{\text{س}-2}-1}$

$$\boxed{(\text{س}-2) + 4\sqrt{\text{س}-2} + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}-2}-1| + \text{جـ}}$$

⑧ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-9}\,\text{د س}$

$$\boxed{\frac{1}{6}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-3| - \frac{1}{6}\text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}}+3| + \text{جـ}}$$

⑨ $\int \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-3\text{هـ}^{\text{س}}-4}\,\text{د س}$ (الكتاب)

$$\boxed{\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{16}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}-4| - \frac{1}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \text{جـ}}$$

⑩ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+2\text{س})\,\text{د س}$

$$\boxed{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2+2\text{س}) - 2\text{س} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}}$$

⑪ ٢٠١٤ ص

$\int_{0}^{1} \frac{\text{س}}{(\text{س}+1)-\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{د س}$

$$\boxed{2\sqrt{2}-1}$$

⑫ $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5\,\text{ظا}^2\text{س}-3\,\text{ظا}\text{س}-2}\,\text{د س}$ (الكتاب)

$$\boxed{\frac{1}{7}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظا}\text{س}-1| - \frac{1}{7}\text{لو}_{\text{هـ}}|5\,\text{ظا}\text{س}+2| + \text{جـ}}$$

⑬ $\int \frac{\text{س}^3+4\text{س}-8}{\text{س}^2-9}\,\text{د س}$ (الكتاب)

⑭ $\int \frac{2}{\text{س}-3\sqrt{\text{س}}-4}\,\text{د س}$

الجواب $\frac{16}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}-4| + \frac{4}{5}\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}}+1| + \text{جـ}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢ - ٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨

تكاملات متنوعة

جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{لو_هـ \sqrt{س+٢}}{\sqrt{س+٢}}\, د س$ (٥ ، ٠ ، ٠ ص)

الجواب : $٤\sqrt{س+٢} + ٢ لو_هـ \sqrt{س+٢} - ٤\sqrt{س+٢} + ج$

② $\int س^٢ هـ^{٣س}\, د س$

③ $\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٣}\, د س$

④ $\int لو_هـ(س^٢ - ٩)\, د س$

⑤ $\int \frac{٣س}{س^٢ - ٤س - ١٢}$

⑥ $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٤س + ١}\, د ص$

⑦ $\int \sqrt{\frac{س^٢ - س^٤}{س^٥}}\, د س$

⑧ $\int (س^٨ - ٤س)^٦\, د س$

⑨ $\int \sqrt[٣]{٣س^٥ - س^٢}\, د س$

⑩ $\int جا(لو_هـ س)\, د س$

⑪ $\int \frac{\sqrt{٤س + ١٢} - ٣}{\sqrt{س+٣} + ٣}\, د س$

⑫ $\int \frac{س قا^٢س - س ظا^٢س}{\sqrt[٣]{س}}\, د س$

⑬ $\int ظتاس\, لو_هـ جاس\, د س$

⑭ $\int قا^٤س\, لو_هـ ظاس\, د س$

⑮ $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^س}{هـ^{٢س} + ٢هـ^س + ١}\, د س$

⑯ $\int \frac{س^٣}{٢س^٤ + س^٨}\, د س$

⑰ $\int لو_هـ(س^٢ + ٢س)\, د س$

⑱ $\int جا\sqrt{س}\, جتا^٣\sqrt{س}\, د س$

⑲ $\int س \sqrt[٣]{س^٢ + ١}\, د س$

⑳ $\int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} \frac{قا^٤س}{ظا^٢س - ٣ظاس + ٢}\, د س$

㉑ $\int \frac{ظتاس\, قتاس}{٩ - ٤قتا^٢س}\, د س$

㉒ $\int_{١}^{٢} س^٤ هـ^{(س^٣ + لو_هـ س)}\, د س$

㉓ $\int جا٣س\, جتاس\, د س$

㉔ $\int \frac{٢جا٣س\, جتاس}{جتا٢س}\, د س$

㉕ $\int \frac{س + جتاس}{١ + جتاس}\, د س$

㉖ $\int \frac{٤ لو س}{س - ١}\, د س$

㉗ $\int (ظاس + قاس)^{١٠}\, قاس\, د س$

الدرس التاسع
المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات وتفاضلات ($ص'$ ، $ص''$ ، $\frac{دص}{دس}$ ، دص ، دس ....)

والمقصود من حل المعادلة التفاضلية إيجاد علاقة تربط بين المتغيرين س ، ص بحيث تحقق المعادلة

خطوات الحل

① وضع الصادات مع (دص) في طرف ووضع السينات مع دس في الطرف الآخر

② إجراء التكامل للطرفين

الجزء الأول
أسئلة مباشرة

مثال: حل المعادلات التفاضلية الآتية

① $\frac{دص}{دس} = \frac{3س^2}{ص}$

الحل $ص\,دص = 3س^2\,دس$

$\int ص\,دص = \int 3س^2\,دس$

$\frac{ص^2}{2} = س^3 + جـ \leftarrow ص = \sqrt{2س^3+2جـ}$

$ص^2 = 2س^3 + جـ^*$

② $\frac{3\,دص}{1-س} = (2س+1)\,دس$ (كتاب)

الحل $3\,دص = (1-س)(2س+1)\,دس$

$\int 3\,دص = \int (-2س^2 + س + 1)\,دس$

$3ص = \frac{-2س^3}{3} + \frac{س^2}{2} + س + جـ$

$ص = \frac{-س^3}{3} + \frac{س^2}{6} + \frac{س}{3} + جـ$

③ $س^3\,دص = ص^2\,دس$ عند (1، 1)

الحل $\frac{س^3\,دص}{س^3\,ص^2} = \frac{ص^2\,دس}{س^3\,ص^2}$

$\frac{دص}{ص^2} = \frac{دس}{س^3}$

$\int ص^{-2}\,دص = \int س^{-3}\,دس$

$\frac{ص^{-1}}{-1} = \frac{س^{-2}}{-2} + جـ$

$\frac{-1}{ص} = \frac{-1}{2س^2} + جـ$

النقطة (1، 1) لإيجاد (جـ)

$-1 = \frac{-1}{2} + جـ$ $\boxed{جـ = \frac{-1}{2}}$

$\frac{-1}{ص} = \frac{-1}{2س^2} - \frac{1}{2}$

④ $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - 4\frac{دص}{دس} = -4$

الحل $\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 - 4\frac{دص}{دس} + 4 = 0$

تحلل عبارة تربيعية

$ص'^2 - 4ص' + 4 = 0$

$(ص'-2)(ص'-2) = 0 \leftarrow (ص'-2)^2 = 0$

$\left(\frac{دص}{دس} - 2\right)^2 = 0 \leftarrow \frac{دص}{دس} = 2$

$دص = 2\,دس$

$\int دص = \int 2\,دس \leftarrow ص = 2س + جـ$

⑤ $2ص\frac{دص}{دس} + 12س - 4 = 0$

الحل $2ص\frac{دص}{دس} = 4 - 12س$

$2ص\,دص = (4 - 12س)\,دس$

$\int 2ص\,دص = \int (4 - 12س)\,دس$

$ص^2 = 4س - 6س^2 + جـ$

⑥ $(\frac{دص}{دس})^{3} - 8س = 0$

الحل $(\frac{دص}{دس})^3 = 8س$

$\frac{دص}{دس} = 2\sqrt[3]{س} \leftarrow دص = 2\sqrt[3]{س}\ دس$

$\int دص = \int 2 س^{\frac{1}{3}} دس$

$ص = 2 \times \frac{3}{4} س^{\frac{4}{3}} + ج$

$ص = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{س})^4 + ج$

⑦ $\frac{دص}{دس} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، س > 0 ، ص > 0

الحل $\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{ص}}$

$\sqrt{ص}\ دص = \sqrt{س}\ دس$

$\int ص^{\frac{1}{2}} دص = \int س^{\frac{1}{2}} دس$

$\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ج$ ، $ج^* = \frac{3}{2}ج$

$\sqrt{ص^3} = \sqrt{س^3} + ج^*$

⑧ $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{4س^2ص - 5س^2 - 12ص + 15}$

الحل $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{4س^2ص - 12ص - 5س^2 + 15}$

$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{4ص(س^2-3) - 5(س^2-3)}$

$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{(س^2-3)(4ص-5)}$

$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^2-3}\ \sqrt{4ص-5}$

$\frac{دص}{\sqrt{4ص-5}} = س\sqrt{س^2-3}\ دس$

$\int (4ص-5)^{-\frac{1}{2}} دص = \int س\sqrt{س^2-3}\ دس$

$\frac{1}{2}(4ص-5)^{\frac{1}{2}}$

* $\int س\sqrt{س^2-3}\ دس$ تعويض

$ع = \sqrt{س^2-3} \leftarrow ع^2 = س^2-3$

$2ع \times \frac{دع}{دس} = 2س \leftarrow دس = \frac{ع\ دع}{س}$

$= \int س\ ع\ \frac{ع\ دع}{س} = \int ع^2 دع$

$= \frac{ع^3}{3} + ج = \frac{1}{3}(\sqrt{س^2-3})^3 + ج$

$\sqrt{4ص-5} = \frac{2}{3}(\sqrt{س^2-3})^3 + ج^*$

⑨ $(\frac{دص}{دس})^2 - 10\frac{دص}{دس} + 25 = 0$

الحل $(\frac{دص}{دس} - 5)(\frac{دص}{دس} - 5) = 0$

$(\frac{دص}{دس} - 5)^2 = 0$

$\frac{دص}{دس} = 5 \leftarrow دص = 5\ دس$

$\int دص = \int 5\ دس$

$ص = 5س + ج$

⑩ $\frac{دص}{دس} = 2سص + 3ص$

الحل $دص = (2سص + 3ص)\ دس$

$دص = ص(2س+3)\ دس$

$\frac{دص}{ص} = (2س+3)\ دس$

$\int \frac{دص}{ص} = \int (2س+3)\ دس$

$لو_هـ|ص| = س^2 + 3س + ج$

$هـ^{لو_هـ|ص|} = هـ^{س^2+3س+ج}$

$ص = هـ^{س^2+3س} \times هـ^{ج}$

$ص = هـ^{س^2+3س} \times ج^*$ ، $ج^* = هـ^{ج}$

⑪ $\frac{س}{س^2-1}\ \frac{دص}{دس} = هـ^{-ص}(س+2)$ ، س ≠ ٠ ، ±١

الحل $\frac{س}{س^2-1}\ \frac{دص}{دس} = \frac{س+2}{هـ^{ص}}$

$هـ^{ص}\ \frac{دص}{دس} = \frac{(س+2)(س^2-1)}{س}$

$هـ^{ص}\ دص = \frac{(س^2-1)(س+2)}{س}\ دس$

$\int هـ^{ص}\ دص = \int \frac{(س^2-1)(س+2)}{س}\ دس$

$هـ^{ص} = \int \frac{س^3 + 2س^2 - س - 2}{س}\ دس$

$هـ^{ص} = \int (س^2 + 2س - 1 - \frac{2}{س})\ دس$

$هـ^{ص} = \frac{س^3}{3} + س^2 - س - 2لو_هـ|س| + ج$

$ص = لو_هـ(\frac{س^3}{3} + س^2 - س - 2لو_هـ|س| + ج)$

١٢) $\text{٢ جا}^2\text{س دص} + \text{ص}^2\text{ دس} = \text{٢ دص}$

الحل $\text{ص}^2\text{ دس} = \text{٢ دص} - \text{٢ جا}^2\text{ دص}$

$\text{ص}^2\text{ دس} = ٢(١ - \text{جا}^2\text{س})\text{ دص}$

$\text{ص}^2\text{ دس} = \text{٢ جتا}^2\text{ دص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{ص}^2} = \frac{\text{دس}}{\text{٢ جتا}^2\text{س}}$

$\int \text{ص}^{-2}\text{ دص} = \int \frac{1}{2}\text{ قا}^2\text{س دس}$

$\frac{\text{ص}^{-1}}{-1} = \frac{1}{2}\text{ ظاس} + \text{ج}$

$\frac{-1}{\text{ص}} = \frac{1}{2}\text{ ظاس} + \text{ج}$

$\frac{1}{\text{ص}} = -\frac{1}{2}\text{ ظاس} - \text{ج}$

$\text{ص} = \frac{-1}{\frac{1}{2}\text{ ظاس} + \text{ج}}$

---

١٣) $\text{قا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دص} - \text{جا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دس} = ٠$ (كتاب)

الحل $\text{قا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دص} = \text{جا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دس}$

$\text{دص} = \frac{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دس}}{\text{قا}^2\frac{\text{س}}{4}}$

$\text{دص} = \text{جا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ جتا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دس}$

$\int \text{دص} = \int \text{جا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ جتا}^2\frac{\text{س}}{4}\text{ دس}$

$\text{ص} = \int (\frac{1}{2}\text{ جا}\frac{\text{س}}{2})^2\text{ دس} = \int \frac{1}{4}\text{ جا}^2\frac{\text{س}}{2}\text{ دس}$

$\text{ص} = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}(١ - \text{جتاس})\text{ دس}$

$\text{ص} = \int (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\text{ جتاس})\text{ دس}$

$\text{ص} = \frac{1}{8}\text{س} - \frac{1}{8}\text{ جاس} + \text{ج}$

---

١٤) $\text{دس} + \text{٣ دص} = \text{جتاس دس}$

الحل $\text{٣ دص} = \text{جتاس دس} - \text{دس}$

$\text{٣ دص} = (\text{جتاس} - ١)\text{ دس}$

$\int \text{٣ دص} = \int (\text{جتاس} - ١)\text{ دس}$

$\text{٣ص} = \text{جاس} - \text{س} + \text{ج}$

$\text{ص} = \frac{1}{3}\text{ جاس} - \frac{\text{س}}{3} + \frac{\text{ج}}{3}$

$\text{ص} = \frac{1}{3}\text{ جاس} - \frac{\text{س}}{3} + \text{ج}^*$

الجزء الثاني
تطبيقات هندسيه وفيزيائيه

أمثله

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س}}{\text{٣ص}^2}$ أوجد قاعدة العلاقة علماً أن النقطة $(\frac{\pi}{4}, ٤)$ تقع على منحناها

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س}}{\text{٣ص}^2}$

$\text{٣ص}^2\text{ دص} = (\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س})\text{ دس}$

$\int \text{٣ص}^2\text{ دص} = \int (\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س})\text{ دس}$

$\text{ص}^3 = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{ج}$

$(\frac{\pi}{4}, ٤)$ تقع على منحنى العلاقة

$٦٤ = -\text{جتا}\frac{\pi}{4} - \text{ظا}\frac{\pi}{4} + \text{ج}$

$٦٤ = -\frac{1}{\sqrt{2}} - ١ + \text{ج}$ $\boxed{\text{ج} = ٦٥ + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\text{ص}^3 = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{-\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{1}{\sqrt{2}}}$

---

٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}+٤)(\text{س}-٣)}{\text{س}^2 - \text{٣س}}$ أوجد قاعدة هذه العلاقة علماً أن منحناها يمر بالنقطة (١، ٠)

الحل ميل المماس $= \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}+٤)(\text{س}-٣)}{\text{س}^2 - \text{٣س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+٤)\cancel{(\text{س}-٣)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٣)}\text{ هـ}^{\text{ص}}}$

$\text{هـ}^{\text{ص}}\text{ دص} = \frac{\text{س}+٤}{\text{س}}\text{ دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ دص} = \int \frac{\text{س}+٤}{\text{س}}\text{ دس} \leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}}\text{ دص} = \int (١ + \frac{4}{\text{س}})\text{ دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + \text{٤ لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{ج}$

(١ ، ٠) س = ١ ، ص = ٠

$هـ^{٠} = ١ + ٤ لوهـ ١ + جـ$ $\boxed{جـ = ٠}$

$هـ^{ص} = س + ٤ لوهـ |س|$

$ص = لوهـ (س + ٤ لوهـ |س|)$

③ ٢٠١٠ ش إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{-ص(س^{٢}-١)}{س^{٢}}$ جد قاعدة هذه العلاقة علماً أن منحناها يمر بالنقطة (١، -١)

الحل ميل المماس = $\frac{دص}{دس} = \frac{-ص(س^{٢}-١)}{س^{٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{ص(١-س^{٢})}{س^{٢}}$

$\frac{دص}{ص} = \frac{١-س^{٢}}{س^{٢}} دس$

$\int \frac{دص}{ص} = \int (\frac{١}{س^{٢}} - ١) دس$

$لوهـ|ص| = \int (س^{-٢} - ١) دس = \frac{س^{-١}}{-١} - س + جـ$

$لوهـ|ص| = \frac{-١}{س} - س + جـ$

س = ١ ، ص = -١

$لوهـ ١ = -١ - ١ + جـ$ $\boxed{جـ = ٢}$

$لوهـ|ص| = \frac{-١}{س} - س + ٢$

$|ص| = هـ^{(\frac{-١}{س} - س + ٢)}$

④ ٢٠١٣ ش إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) يساوي $\frac{١}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}}$ ، س > ٠ ، جد قاعدة العلاقة علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٤)

الحل ميل المماس = $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}}$

$دص = \frac{١}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}} دس$

$\int دص = \int \frac{١}{س\sqrt{٣ + لوهـ س}} دس$

$ع = \sqrt{٣ + لوهـ س} \leftarrow ع^{٢} = ٣ + لوهـ س$

$٢ع دع = \frac{١}{س} دس \leftarrow دس = س × ٢ع دع$

$\int دص = \int \frac{س × ٢ع}{س × ع} دع = \int ٢ دع$

$ص = ٢ع + جـ \leftarrow ص = ٢\sqrt{٣ + لوهـ س} + جـ$

س = هـ ، ص = ٤

$٤ = ٢ × ٢ + جـ$ $\boxed{جـ = ٠}$

$ص = ٢\sqrt{٣ + لوهـ س}$

⑤ ٢٠١٢ ص إذا كان ميل المماس عند النقطة (س، ص) لمنحنى علاقة يساوي ٢س ص ، أوجد قيمة (قيم) ص عندما س = ٣ ، علماً أن منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٢، ١)

الحل ميل المماس = $\frac{دص}{دس} = ٢س ص$

$\frac{دص}{ص} = ٢س دس \leftarrow \int \frac{دص}{ص} = \int ٢س دس$

$لوهـ|ص| = س^{٢} + جـ$

يمر بالنقطة (٢، ١)

$لوهـ ١ = ٤ + جـ$ $\boxed{جـ = -٤}$

$لوهـ|ص| = س^{٢} - ٤$

عندما س = ٣ $\leftarrow لوهـ|ص| = ٥$

$|ص| = هـ^{٥} \leftarrow ص = \pm هـ^{٥}$

⑥ يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = \frac{١}{ع}$ ، ع > ٠ ، حيث ت (تسارع الجسيم) ع (سرعة الجسيم)

إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ م بعد (٤) ثوان من حركته جد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته

الحل تحرك من السكون $\text{ع}(0) = 0$

$\text{ف}(4) = 10\sqrt{2}$ م المطلوب $\text{ف}(1)$

$\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{1}{\text{ع}} \leftarrow \text{ع دع} = \text{دن}$

$\int \text{ع دع} = \int \text{دن} \leftarrow \frac{\text{ع}^2}{2} = \text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ع}(0) = 0 \leftarrow \text{ع} = 0 \,،\, \text{ن} = 0$

$0 = 0 + \text{جـ}$ $\boxed{\text{جـ} = 0}$

$\frac{\text{ع}^2}{2} = \text{ن} \leftarrow \text{ع} = \pm\sqrt{2\text{ن}}$

$\text{ع} > 0 \leftarrow \text{ع} = \sqrt{2\text{ن}}$

السرعة معطاه بدلالة (ن)

نجد المسافة $\text{ف} = \int \text{ع}(\text{ن})\,\text{دن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \int \sqrt{2\text{ن}}\,\text{دن} = \int (2\text{ن})^{\frac{1}{2}}\,\text{دن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = (2\text{ن})^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \text{جـ}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{1}{3}(\sqrt{2\text{ن}})^3 + \text{جـ}$

$\text{ف}(4) = 10\sqrt{2}$

$10\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times 8 + \text{جـ}$ $\boxed{\text{جـ} = \frac{14\sqrt{2}}{3}}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{1}{3}(\sqrt{2\text{ن}})^3 + \frac{14\sqrt{2}}{3}$

$\text{ف}(1) = \frac{1}{3}(\sqrt{2})^3 + \frac{14\sqrt{2}}{3}$

---

(٧) ٢٠٠٩ ص (كتاب)

يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة

$\text{ت} = 2\sqrt{\text{ع}}$ حيث ع > ٠ ، حيث

ت (تسارع الجسيم) ، ع (سرعة الجسيم)

فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته

٩ م/ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم

بعد (٣) ثوان من بدء حركته علماً أنه

قطع مسافة قدرها $(\frac{64}{3})$ م في أول

ثانية من حركته

الحل $\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 2\sqrt{\text{ع}}$ ، $\text{ع}(0) = 9$ ، $\text{ف}(1) = \frac{64}{3}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = 2\sqrt{\text{ع}} \leftarrow \frac{\text{دع}}{\sqrt{\text{ع}}} = 2\,\text{دن}$

$\int \frac{\text{دع}}{\sqrt{\text{ع}}} = \int 2\,\text{دن} \leftarrow \int \text{ع}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دع} = \int 2\,\text{دن}$

$2\,\text{ع}^{\frac{1}{2}} = 2\text{ن} + \text{جـ} \leftarrow 2\sqrt{\text{ع}} = 2\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ع}(0) = 9 \leftarrow 6 = \text{جـ}$ $\boxed{\text{جـ} = 6}$

$2\sqrt{\text{ع}} = 2\text{ن} + 6 \leftarrow \text{ع} = (\text{ن} + 3)^2$

$\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\,\text{دن} = \int (\text{ن} + 3)^2\,\text{دن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{1}{3}(\text{ن} + 3)^3 + \text{جـ}$

$\text{ف}(1) = \frac{64}{3} \leftarrow \frac{64}{3} = \frac{64}{3} + \text{جـ}$

$\boxed{\text{جـ} = 0}$ $\text{ف}(\text{ن}) = \frac{1}{3}(\text{ن} + 3)^3$

$\text{ف}(3) = \frac{(6)^3}{3} = 72$ م

٢٠١٢ ش (كتاب)

(٨) يسير جسيم على خط مستقيم حسب

العلاقة $\text{ت} = \text{أ} \times \text{ع}^{\frac{1}{3}}$ ، ع > ٠ ، حيث

ت (تسارع الجسيم) ، ع (سرعة الجسيم)

إذا تحرك الجسيم من السكون أوجد قيمة

الثابت (أ) التي تجعل سرعته ٨ م/ث

بعد (٣) ثوان من بدء الحركة

الحل $\text{ت} = \text{أ}\,\text{ع}^{\frac{1}{3}}$ ، $\text{ع}(0) = 0$ ، $\text{ع}(3) = 8$

$\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{أ}\,\text{ع}^{\frac{1}{3}} \leftarrow \text{ع}^{-\frac{1}{3}}\,\text{دع} = \text{أ}\,\text{دن}$

$\int \text{ع}^{-\frac{1}{3}}\,\text{دع} = \int \text{أ}\,\text{دن}$

$\frac{3}{2}\,\text{ع}^{\frac{2}{3}} = \text{أ}\,\text{ن} + \text{جـ} \leftarrow \frac{3}{2}\sqrt[3]{\text{ع}^2} = \text{أ}\,\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ع}(0) = 0 \leftarrow 0 = \text{جـ}$ $\boxed{\text{جـ} = 0}$

$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{\text{ع}})^2 = \text{أ}\,\text{ن}$

$\text{ع}(3) = 8 \leftarrow \text{ن} = 3 \,،\, \text{ع} = 8$

$6 = 3\,\text{أ}$ $\boxed{\text{أ} = 2}$

الجزء الثالث
أسئلة غير مباشرة

أمثلة

① تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة

$\frac{دت}{دن} = ٥ن^{٤} + ٢٠ن$ ، حيث

ت (عدد البكتيريا) ، ن (الزمن بالثواني)

إذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي (٣٠) أوجد عددها بعد (٣) ثوان

الحل ت(١) = ٣٠ ، المطلوب ت(٣)

$\frac{دت}{دن} = ٥ن^{٤} + ٢٠ن$

$دت = (٥ن^{٤} + ٢٠ن)\, دن$

$\int دت = \int (٥ن^{٤} + ٢٠ن)\, دن$

$ت = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + جـ$

$ت(١) = ٣٠ \leftarrow ت = ٣٠ ، ن = ١$

$٣٠ = ١ + ١٠ + جـ \qquad \boxed{جـ = ١٩}$

$ت(ن) = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + ١٩$

$ت(٣) = (٣)^{٥} + ٩٠ + ١٩ = \boxed{٣٥٢}$

② إذا كان معدل نقصان حجم بالون يتسرب منه غاز هو ١٠٪ من حجم البالون لكل دقيقة ، فما حجم البالون بعد (١٠) دقائق إذا كان حجم البالون عند بداية التسرب هو ٥٠ سم³

الحل $\frac{دح}{دن} = -١٠٪\, ح$ ، $ح(٠) = ٥٠$ سم³

$\frac{دح}{ح} = -١٠٪\, دن$

$\int \frac{دح}{ح} = \int -١٠٪\, دن$

$لو_{هـ} |ح| = -١٠٪\, ن + جـ$

$ح(٠) = ٥٠ \leftarrow ح = ٥٠ ، ن = ٠$

$لو_{هـ} ٥٠ = ٠ + جـ \leftarrow \boxed{جـ = لو_{هـ} ٥٠}$

$لو_{هـ} |ح| = -١٠٪\, ن + لو_{هـ} ٥٠$

ح(١٠) ← مطلوب

$لو_{هـ} |ح| = -١ + لو_{هـ} ٥٠$ ، $|ح| = ح$ الحجم موجب

$لو_{هـ} ح - لو_{هـ} ٥٠ = -١ \leftarrow لو_{هـ} \frac{ح}{٥٠} = -١$

$\frac{ح}{٥٠} = هـ^{-١} \leftarrow ح(١٠) = \frac{٥٠}{هـ}$ سم³

③ ١٩٩٩ (كتاب)

آلة صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن حسب العلاقة $\frac{دص}{دن} = -٥٠٠(ن+١)^{-٢}$

حيث ص (قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها) جد قيمة هذه الآلة بعد مرور (٣) سنوات من شرائها

الحل ص(٠) = ٢٥٠٠ ، المطلوب ص(٣)

$\frac{دص}{دن} = -٥٠٠(ن+١)^{-٢} \leftarrow دص = -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\, دن$

$\int دص = \int -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\, دن$

$ص(ن) = -٥٠٠ \times \frac{(ن+١)^{-١}}{-١} + جـ$

$ص(ن) = \frac{٥٠٠}{ن+١} + جـ$

$ص(٠) = ٢٥٠٠ ، ن = ٠ ، ص = ٢٥٠٠$

$٢٥٠٠ = ٥٠٠ + جـ \qquad \boxed{جـ = ٢٠٠٠}$

$ص(ن) = \frac{٥٠٠}{ن+١} + ٢٠٠٠$

$ص(٣) = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار

ورقة عمل الدرس التاسع

السؤال الأول :

حل المعادلات التفاضلية الآتية

① $س^2 \frac{دص}{دس} = ص^2$

$\boxed{\frac{-1}{2ص^2} = \frac{-1}{س} + جـ}$

② $\frac{دص}{دس} = \frac{قا^4 س \, ظا^2 س}{ص}$

$\frac{ص^2}{2} = \frac{ظا^5 س}{5} + \frac{ظا^3 س}{3} + جـ$

$ص^2 = \frac{2}{5} ظا^5 س + \frac{2}{3} ظا^3 س + جـ^*$

③ ٢٠١٠ ص
$قا^2 س \, دص = دص - ص \, دس$
(كتاب)

$\boxed{|ص| = جـ \times هـ^{ظاس}}$

السؤال الثاني

٢٠١١ ص (كتاب)

① إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة (ص) يساوي $\frac{لو_هـ ص}{1 - جتاس}$ ، أوجد قاعدة العلاقة (ص) علماً أن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{2} ، 0)$

$\boxed{ص = -2 لو_هـ (\frac{1}{2} ظتاس + \frac{1}{2})}$

٢٠١٤ ص (كتاب)

② يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = ل\sqrt{ع}$ ، $ع > 0$ ، ت (تسارع الجسيم) ع (سرعة الجسيم) فإذا علمت أن السرعة الابتدائية للجسيم ٩ م/ث وقطع مسافة (٨١) م في (٤) ثوان أوجد المسافة التي قطعها بعد ثانيتين من بدء حركته

$\boxed{\frac{118}{3} م}$

السؤال الثالث

شب حريق في غابة مصيف فإذا دل الرمز (م) على مساحة المنطقة التي يصيبها الحريق مقدراً بالدونمات ، وكان معدل زيادة المساحة هو ٢٪ م دونم/ساعة فإذا علمت أن المساحة التي يصيبها الحريق عند اكتشافه تساوي (٣) دونمات ، أوجد مساحة المحروقة عند وصول الإطفاء بعد ساعتين من اكتشاف الحريق

$\boxed{م = 3 \times هـ^{0.04} دونم}$

السؤال الرابع : (كتاب + ٢٠١٥ ص)

يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{دع}{دن} = 0.025 ع$ ، حيث ع: عدد السكان ، ن: الزمن بالسنوات ، إذا علمت أن عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٠) جد عدد سكانها بعد ٤٠ عام

$\boxed{٥٤٤٠٠ \text{ نسمة}}$

السؤال الخامس (كتاب)

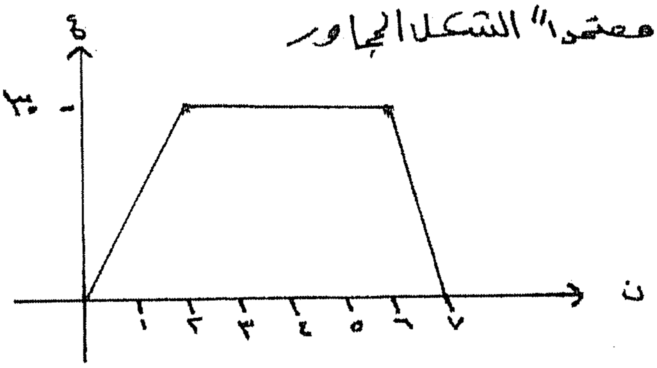
إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{هـ^{س-ص}}{هـ^{س}+1}$ حيث (هـ) العدد النيبيري، جد قاعدة العلاقة (ص) علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (٠، ١)

السؤال السادس : (كتاب + ٢٠١٦ ص)

ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقاً للعلاقة $ت = -٤ ع^{\frac{3}{2}}$ ، ع > ٠ ، ت: تسارع الجسيم ، ع: سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث ، أثبت أن $ف = ٢ن\sqrt{ع}$.

السؤال السابع (كتاب)

معتمداً الشكل المجاور



الذي يمثل العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك في خط مستقيم، جد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠، ٧]

السؤال الثامن (كتاب)

حل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية

① $هـ^{ص} جاس - \frac{دص}{دس} قتاس = ٠$

② $(س^2 + ٣س)\frac{دص}{دس} = هـ^{-٢ص}(س+١)(س^2 - ٩)$

③ $\frac{دص}{دس} = \sqrt[3]{\frac{ص}{س}}$ ، س > ٠ ، ص > ٠

④ $\frac{دص}{دس} = \frac{٣سص - ص - ١٢س + ٤}{ص^2 - ١٦}$ ، ص ≠ ± ٤

⑤ $(س^2 - ٣س) دص = هـ^{-ص}(س^2 + س - ١٢) دس$

المعلم : حمد الله الطوباسي
0797662728 - 0779358752

الدرس العاشر
حساب المساحة باستخدام التكامل

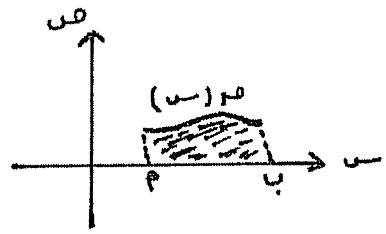
في هذا الدرس يتم حساب

① المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات

② المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين

③ المساحة المحصورة بين أكثر من منحنيين

الجزء الأول
حساب المساحة المحصورة بين منحنى اقتران و محور السينات والمستقيمان س = أ ، س = ب



لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) و محور السينات والمستقيمان س = أ ، س = ب أو في الفترة [أ ، ب]

$$\boxed{م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, دس}$$

خطوات الحل

① نجد أصفار الاقتران ق(س) = ٠

② إذا كانت أصفار الاقتران ∉ (أ ، ب)

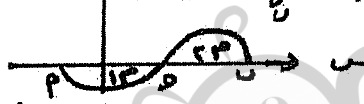
$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ ، ق(س) > ٠ (+)

$م = \left|\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس\right|$ ، ق(س) < ٠ (−)

③ إذا كانت أصفار الاقتران ∈ (أ ، ب)

جـ ∈ (أ ، ب) يوجد منطقتين

$م = \left|\int_{أ}^{جـ} ق(س)\, دس\right| + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\, دس$



④ إذا لم يعطى في السؤال حدود التكامل تعتبر الأصفار هي الحدود

ملاحظات

① المنطقة المحصورة فوق محور السينات إشارة ق(س) (+) ق(س) > ٠

② المنطقة المحصورة تحت محور السينات إشارة ق(س) (−) ق(س) < ٠

③ لمعرفة إشارة ق(س) ندرس إشارة

④ في هذا الجزء لا داعي لتمثيل المنطقة المحصورة بيانياً

أمثلة

① جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣ ومحور السينات في الفترة [-١ ، ٢]

الحل حدود التكامل س = -١ ، س = ٢

ق(س) = ٣ ثابت لا يساوي بالصفر

+ + + +
-١ ٢

المعلم : حمد الله الطوباسي
0797662728 - 0779358752

$م = \int_{-1}^{2} 3\,دس = 3(2 - -1) = 9$ وحدة مربعة

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س − ١ و محور السينات في الفترة [١ ، ٣]

الحل ق(س) = ٠ ← س − ١ = ٠ ، س = ١

١ ∉ (١ ، ٣)

$\frac{\;+ + + +\;}{1 \qquad\qquad 3}$

$م = \int_{1}^{3} |س - 1|\,دس$

$= \frac{س^2}{2} - س \Big|_{1}^{3} = (\frac{9}{2} - 3) - (\frac{1}{2} - 1)$

$= \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 = \boxed{2}$ وحدة مساحة

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\frac{س}{2}$ + ٣ ومحور السينات والمستقيمان س = −٢ ، س = ٤

الحل [−٢ ، ٤]

ق(س) = ٠ ← $\frac{1}{2}$س + ٣ = ٠ ← س = −٦

−٦ ∉ (−٢ ، ٤)

$\frac{\;+ + + +\;}{-2 \qquad\qquad 4}$

$م = \int_{-2}^{4} |\frac{1}{2}س + 3|\,دس$

$م = \int_{-2}^{4} (\frac{1}{2}س + 3)\,دس = \frac{س^2}{4} + 3س \Big|_{-2}^{4}$

$= 16 + 5 = \boxed{21}$ وحدة مربعة

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢س − ٦ ومحور السينات والمستقيمان س = ١ ، س = ٤

الحل [١ ، ٤]

ق(س) = ٠ ← ٢س − ٦ = ٠ ، س = ٣ ∈ (١ ، ٤)

$\frac{\;- - - \;|\; + + +\;}{1 \qquad 3 \qquad 4}$

$م = \int_{1}^{4} |2س - 6|\,دس$

$م = \int_{1}^{3} (6 - 2س)\,دس + \int_{3}^{4} (2س - 6)\,دس$

$= 6س - س^2 \Big|_{1}^{3} + س^2 - 6س \Big|_{3}^{4}$

$= 9 - 5 + -8 + 9 = \boxed{5}$ وحدة مربعة

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س³ − ١ و محور السينات في الفترة [−٢ ، ٢]

الحل ق(س) = ٠ ← س³ − ١ = ٠ ← س = ١ ∈ (−٢ ، ٢)

$\frac{\;- - - \;|\; + + +\;}{-2 \qquad 1 \qquad 2}$

$م = \int_{-2}^{2} |س^3 - 1|\,دس$

$م = \int_{-2}^{1} (1 - س^3)\,دس + \int_{1}^{2} (س^3 - 1)\,دس$

$م = س - \frac{س^4}{4} \Big|_{-2}^{1} + \frac{س^4}{4} - س \Big|_{1}^{2}$

$م = (1 - \frac{1}{4}) - (-2 - 4) + (4 - 2) - (\frac{1}{4} - 1)$

$م = \frac{19}{2}$ وحدة مساحة

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س³ − س ومحور السينات

الحل أصفار الاقتران هي حدود التكامل

ق(س) = ٠ ← س³ − س = ٠ ← س(س² − ١) = ٠

س = ٠ ، س = ١ ، س = −١

$\frac{\;+ + + \;|\; - - -\;}{-1 \qquad 0 \qquad 1}$

$م = \int_{-1}^{1} |س^3 - س|\,دس$

$م = \int_{-1}^{0} (س^3 - س)\,دس + \int_{0}^{1} (س - س^3)\,دس$

$= \frac{س^4}{4} - \frac{س^2}{2} \Big|_{-1}^{0} + \frac{س^2}{2} - \frac{س^4}{4} \Big|_{0}^{1}$

$= 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0$

$= \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

⑦ (كتاب) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ − $\sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات

الحل محور الصادات مستقيم س = ٠

ق(س) = ٠ ← ٢ − $\sqrt{س}$ = ٠ ، س = ٤

$\frac{\;+ + + +\;}{0 \qquad\qquad 4}$

$م = \int_{0}^{4} |2 - \sqrt{س}|\,دس$

$م = \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{س})\,دس = \int_{0}^{4} 2 - س^{\frac{1}{2}}\,دس$

$= 2س - \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{4} = 2س - \frac{2}{3}(\sqrt{س})^3 \Big|_{0}^{4}$

$= \frac{8}{3}$ وحدة مربعة

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
ق(س) = $\sqrt{1-س}$ ومحور السينات ومحور الصادات

الحل س = ١

ق(س) = ٠ ← $\sqrt{1-س}$ = ٠ ، س = ١

م = $\int_{0}^{1} |\sqrt{1-س}|$ دس

م = $\int_{0}^{1} \sqrt{1-س}$ دس = $\int_{0}^{1} (1-س)^{\frac{1}{2}}$ دس

= $\frac{-2}{3} (1-س)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{1}$

م = $\frac{-2}{3} \left(\sqrt{1-س}\right)^{3} \Big|_{0}^{1}$ = $\frac{2}{3}$ وحده مربعه

---

⑨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
ق(س) = س² − ٥س + ٦ ومحور السينات

الحل الأصفار هي الحدود

ق(س) = ٠ ← س² − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠ ، س = ٢ ، س = ٣

م = $\int_{2}^{3} |س^2 - 5س + 6|$ دس

م = $-\int_{2}^{3} (س^2 - 5س + 6)$ دس

= $-\left(\frac{س^3}{3} - \frac{5س^2}{2} + 6س\right)\Big|_{2}^{3}$

= $\frac{-27}{3} + \frac{45}{2} - 18 - \left(\frac{-8}{3} + 10 - 12\right)$

= − ٩ + $\frac{45}{2}$ − ١٨ + $\frac{8}{3}$ − ١٠ + ١٢

م = − ٢٥ + $\frac{45}{2}$ + $\frac{8}{3}$ = $\frac{-150}{6}$ + $\frac{135}{6}$ + $\frac{16}{6}$

م = $\frac{1}{6}$ وحده مساحه

---

⑩ ق(س) = س² + ١ ، أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات في الفترة [−٣ ، ٣]

الحل ق(س) = ٠ ← س² + ١ = ٠ لا يوجد حل

م = $\int_{-3}^{3} |س^2 + 1|$ دس

م = $\int_{-3}^{3} (س^2 + 1)$ دس

م = $\frac{س^3}{3} + س \Big|_{-3}^{3}$ = ٢٤ وحده مساحه

---

⑪ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
ق(س) = هـ^{2س} ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم س = ٢

الحل س = ٠ ، س = ٢ [٠ ، ٢]

ق(س) = ٠ ← هـ^{2س} ≠ ٠

م = $\int_{0}^{2} |هـ^{2س}|$ دس = $\int_{0}^{2}$ هـ^{2س} دس

م = $\frac{1}{2}$ هـ$^{2س} \Big|_{0}^{2}$ = $\frac{1}{2}$(هـ^{4} − ١) وحده مساحه

---

⑫ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = جاس − $\frac{1}{2}$ ومحور السينات في الفترة [$\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$]

الحل ق(س) = ٠ ← جاس − $\frac{1}{2}$ = ٠ ، جاس = $\frac{1}{2}$

س = $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ × تهمل خارج الفترة

م١ : $\frac{-\pi}{2}$ − − − $\frac{\pi}{6}$ + + + $\frac{\pi}{2}$: م٢

م = $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |جاس - \frac{1}{2}|$ دس

م = $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (\frac{1}{2} - جاس)$ دس + $\int_{\pi/6}^{\pi/2} (جاس - \frac{1}{2})$ دس

م = $\frac{1}{2}$س + جتاس $\Big|_{-\pi/2}^{\pi/6}$ + − جتاس − $\frac{1}{2}$س $\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}$

م = $\frac{\pi}{6}$ + $\sqrt{3}$ وحده مربعه

ت١٢ ص + (كتاب)

⑬ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
ق(س) = جتا(πس) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]

الحل ق(س) = ٠ ← πس = $\frac{\pi}{2}$ ← س = $\frac{1}{2}$

πس = $\frac{3\pi}{2}$ ← س = $\frac{3}{2}$

م١ م٢ م٣ : ٠ + + + $\frac{1}{2}$ − − − $\frac{3}{2}$ + + + ٢

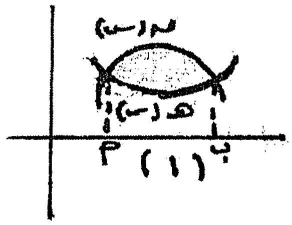
$\text{م} = \int_{٠}^{٢} |\text{جتا}(\pi \text{س})| \, \text{دس}$

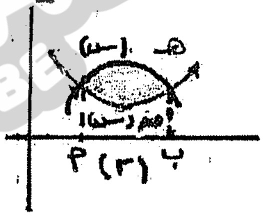
$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{جتا}\,\pi\text{س}\,\text{دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} -\text{جتا}\,\pi\text{س}\,\text{دس} + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} \text{جتا}\,\pi\text{س}\,\text{دس}$

$\text{م} = \frac{١}{\pi}\text{جا}\,\pi\text{س}\Big|_{٠}^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\pi}\text{جا}\,\pi\text{س}\Big|_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{\pi}\text{جا}\,\pi\text{س}\Big|_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

$\text{م} = \frac{٤}{\pi}$ وحدة مساحية

الجزء الثاني
حساب المساحة المحصورة بين منحنيين في الفترة [أ ، ب]





حدود التكامل : نقاط تقاطع المنحنيين

الشكل (١) ق(س) ≥ هـ(س) في الفترة [أ ، ب]

$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\overset{\text{فوق}}{\text{ق(س)}} - \overset{\text{تحت}}{\text{هـ(س)}}) \, \text{دس}$

الشكل (٢) هـ(س) ≥ ق(س) على الفترة [أ ، ب]

$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\overset{\text{فوق}}{\text{هـ(س)}} - \overset{\text{تحت}}{\text{ق(س)}}) \, \text{دس}$

خطوات الحل

① إيجاد نقاط التقاطع (حدود التكامل)

إيجاد قيم س من ق(س) = هـ(س)

② تحديد ق(س) ≥ هـ(س)

أو هـ(س) ≥ ق(س)

③ إيجاد المساحة

* نقطتين تقاطع (حدين)

$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}) \, \text{دس}$ ، ق(س) ≥ هـ(س)

* أكثر من نقطتين تقاطع (أكثر من حدين)

م = مجموع المساحات الناتجة

$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}) \, \text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}) \, \text{دس} + \dots$

حيث ق(س) ≥ هـ(س)

ملاحظة في هذا الجزء لا يوجد داعي للرسم

أمثلة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٩ − س² والمستقيم ص = ٥

الحل نجد نقاط التقاطع ق(س) = ص

٩ − س² = ٥ ← س² = ٤ ← س = ±٢

ق ≥ ص (بين −٢ و ٢)

$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (\text{ق(س)} - \text{ص}) \, \text{دس}$

$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٩ - \text{س}^٢ - ٥) \, \text{دس} = \int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^٢) \, \text{دس}$

$= ٤\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\Big|_{-٢}^{٢} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحية

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س² ، هـ(س) = ٤س

الحل نجد نقاط التقاطع ق(س) = هـ(س)

س² = ٤س ← س² − ٤س = ٠ ← س(س − ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

هـ ≥ ق (بين ٠ و ٤)

$\text{م} = \int_{٠}^{٤} (\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}) \, \text{دس}$

$\text{م} = \int_{٠}^{٤} (٤\text{س} - \text{س}^٢) \, \text{دس} = ٢\text{س}^٢ - \frac{\text{س}^٣}{٣}\Big|_{٠}^{٤}$

م = ٣٦ وحدة مساحية

المعلم : حمد الله الطوباسي
0797662728 - 0779358752

٢٠٠٣ ش

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٦ − س² ، هـ(س) = س

الحل نقاط التقاطع ق(س) = هـ(س)

٦ − س² = س ← س² + س − ٦ = ٠

(س + ٣)(س − ٢) = ٠ ، س = ٢ ، س = −٣

ق ≥ هـ : -٣ ، ٢

$م = \int_{-٣}^{٢} (ق(س) - هـ(س))\, دس$

$م = \int_{-٣}^{٢} (٦ - س^٢ - س)\, دس$

$م = \int_{-٣}^{٢} -س^٢ - س + ٦\, دس$

$م = -\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٦س \Big|_{-٣}^{٢} = \frac{١٢٥}{٦}$ وحدة مربعة

٢٠٠٤ ص

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س و منحنى العلاقة س² = ٤ص

الحل ق(س) = س ، $ص = \frac{س^٢}{٤}$ (هـ(س))

$\frac{س^٢}{٤} = س ← \frac{س^٢}{٤} - س = ٠ ← س(\frac{س}{٤} - ١) = ٠$

س = ٠ ، س = ٤

ق ≥ هـ : ٠ ، ٤

$م = \int_{٠}^{٤} (ق(س) - هـ(س))\, دس = \int_{٠}^{٤} (س - \frac{س^٢}{٤})\, دس$

$\frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{١٢} \Big|_{٠}^{٤} = \frac{١٦}{٢} - \frac{٦٤}{١٢}$

$= \frac{١٦}{٢} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٤٨}{٦} - \frac{٣٢}{٦}$

$م = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س³ + س² ، هـ(س) = س³ + ١

الحل نجد نقاط التقاطع

ق(س) = هـ(س) ← س³ + س² = س³ + ١

س² = ١ ← س = ±١

هـ ≥ ق : -١ ، ١

$م = \int_{-١}^{١} (هـ(س) - ق(س))\, دس$

$م = \int_{-١}^{١} (س^٣ + ١ - س^٣ - س^٢)\, دس$

$م = \int_{-١}^{١} (١ - س^٢)\, دس = س - \frac{س^٣}{٣} \Big|_{-١}^{١}$

$م = \frac{٤}{٣}$ وحدة مساحة

٢٠٠٦ ش (الكتاب)

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٤س³ − ٣س ، هـ(س) = ٥س

الحل نجد نقاط التقاطع ق(س) = هـ(س)

٤س³ − ٣س = ٥س ← ٤س³ − ٨س = ٠

٤س(س² − ٢) = ٠ ، س = ٠ ، $س = \pm\sqrt{٢}$

ق ≥ هـ : $-\sqrt{٢}$ ، ٠ ؛ هـ ≥ ق : ٠ ، $\sqrt{٢}$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (ق(س) - هـ(س))\, دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (هـ(س) - ق(س))\, دس$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (٤س^٣ - ٨س)\, دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (٨س - ٤س^٣)\, دس$

$م = س^٤ - ٤س^٢ \Big|_{-\sqrt{٢}}^{٠} + ٤س^٢ - س^٤ \Big|_{٠}^{\sqrt{٢}} = ٨$ وحدة مربعة

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق(س) = \sqrt{س}$ ، هـ(س) = س في الفترة [١ ، ٤]

الحل نجد نقاط التقاطع ق(س) = هـ(س)

$\sqrt{س} = س ← س = س^٢ ← س^٢ - س = ٠$

س(س − ١) = ٠ ← س = ٠ ، س = ١ ∉ (١ ، ٤)

ق ≥ هـ : ١ ، ٤

$م = \int_{١}^{٤} (ق(س) - هـ(س))\, دس$

$م = \int_{١}^{٤} (\sqrt{س} + - س)\, دس = \int_{١}^{٤} (س^{\frac{١}{٢}} + - س)\, دس$

$م = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^٢}{٢} \Big|_{١}^{٤}$

$م = \frac{٢}{٣} (\sqrt{س})^٣ + \frac{س^٢}{٢} \Big|_{١}^{٤} = \frac{٧}{٣}$ وحدة مساحة

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين $ق(س) = جاس$ ، $هـ(س) = جتاس$ في الفترة $[٠ ، \pi]$

الحل $ق(س) = هـ(س) \leftarrow جاس = جتاس$

$جاس - جتاس = ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٤} \in [٠ ، \pi]$

م ≥ هـ   هـ ≥ م

$٠ \quad \frac{\pi}{٤} \quad \pi$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (هـ(س) - ق(س))\, دس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (ق(س) - هـ(س))\, دس$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (جتاس - جاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (جاس - جتاس)\, دس$

$م = جاس + جتاس \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + -جتاس - جاس \Big|_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi}$

$م = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

(كتاب) ٢٠٠٢

⑨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = جتاس$ والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(٠ ، ١)$ ، $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

الحل نجد معادلة القطعة المستقيمة

$م = \frac{٠ - ١}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{-٢}{\pi}$

$ص - ص_١ = م(س - س_١) \leftarrow ص - ١ = \frac{-٢}{\pi} س$

$ص = ١ - \frac{٢}{\pi} س$

نجد نقاط التقاطع

لاحظ أن $جتا(٠) = ١$ ، $جتا\frac{\pi}{٢} = ٠$

نقاط التقاطع $(٠ ، ١)$ ، $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

$س = ٠ ، س = \frac{\pi}{٢}$

م ≥ هـ

$٠ \quad \frac{\pi}{٢}$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (ق(س) - ص)\, دس$

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتاس + \frac{٢}{\pi} س - ١)\, دس$

$م = جاس + \frac{١}{\pi} س^٢ - س \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$م = (١ + \frac{\pi^٢}{٤\pi} - \frac{\pi}{٢}) - (٠ + ٠ - ٠)$

$م = ١ + \frac{\pi}{٤} - \frac{\pi}{٢} = ١ - \frac{\pi}{٤}$

$م = \frac{٤ - \pi}{٤}$ وحدة مساحة

⑩ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ + ٣$ ومماس المنحنى عند النقطة $(١ ، ٤)$ ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول

الحل نجد معادلة المماس

$م = ق'(١) \leftarrow ق'(س) = ٣س^٢ \leftarrow م = ٣$

المعادلة $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٤ = ٣(س - ١) \leftarrow ص = ٣س + ١$

نقاط التقاطع $ق(س) = ص$

$س^٣ + ٣ = ٣س + ١ \leftarrow س^٣ - ٣س + ٢ = ٠$

$س^٣ - ٣س + ٢ = ٠$ عوامل (٢) $\pm ١ ، \pm ٢$

(قسمة) $س = ١$

س³	س²	س	ثابت
١	٠	−٣	٢
	١	١	−٢
١	١	−٢	٠

$\boxed{١}$

$(س - ١)(س^٢ + س - ٢) = ٠$

$(س - ١)(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$س = ١$ ، $س = -٢$ × تهمل ربع أول

الحدود $س = ١$ نقطة تماس ، $س = ٠$ محور صادات

م ≥ ص

$٠ \quad ١$

$م = \int_{٠}^{١} (ق(س) - ص)\, دس$

$م = \int_{٠}^{١} (س^٣ + ٣ - ٣س - ١)\, دس$

$م = \int_{٠}^{١} (س^٣ - ٣س + ٢)\, دس$

$م = \frac{س^٤}{٤} - \frac{٣س^٢}{٢} + ٢س \Big|_{٠}^{١}$ $م = \frac{٣}{٤}$ وحدة مساحة

الجزء الثالث
حساب المساحة المحصورة بين أكثر من منحنيين

* اقترانين احدهما متشعب
* ثلاث اقترانات
* اقترانين ومحور السينات

طريقة الحل

* اقترانين
احداهما ل

① رسم منحنى كل اقتران وتظليل المنطقة المطلوبة

② تحديد بداية المنطقة (أقل احداثي سيني لها) وتحديد نهاية المنطقة (أكبر احداثي سيني لها)

③ تحديد نقط التقاطع الواقعة بين أي اقترانين واقعة بين نهاية المنطقة وبدايتها وإقامة أعمدة منها لتجزئة المنطقة إلى مناطق جزئية

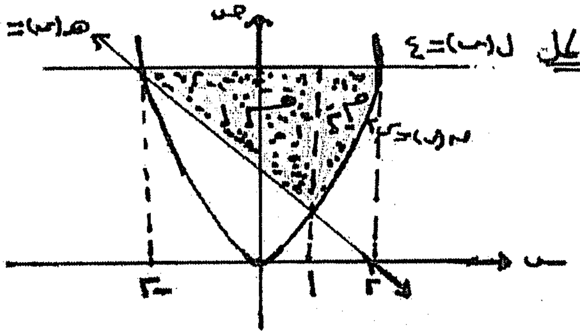
④ ايجاد تلك النقط من خطوة ③

⑤ حساب مساحة كل منطقة جزئية بالرجوع إلى الجزء الأول والثاني ثم نجد المساحة المطلوبة بجمع المساحات الجزئية

أمثلة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = $س^2$ ، هـ(س) = ٢ - س ، ل(س) = ٤

الحل ل(س) = ٤



بداية المنطقة ق(س) = ل(س) ، ل(س) = هـ(س)
ق(س) = هـ(س)

هـ(س) = ل(س) ← ٢ - س = ٤ ← س = -٢

نهاية المنطقة ق(س) = ل(س)

$س^2$ = ٤ ← س = ± ٢ ← س = ٢

نقطة تقاطع ق(س) ، هـ(س)

ق(س) = هـ(س) ← $س^2$ = ٢ - س ← $س^2$ + س - ٢ = ٠

(س + ٢)(س - ١) = ٠ ← س = -٢ ، $\boxed{س = ١}$

م = $\int_{-2}^{1}$ (ل(س) - هـ(س)) + $\int_{1}^{2}$ (ل(س) - ق(س)) دس

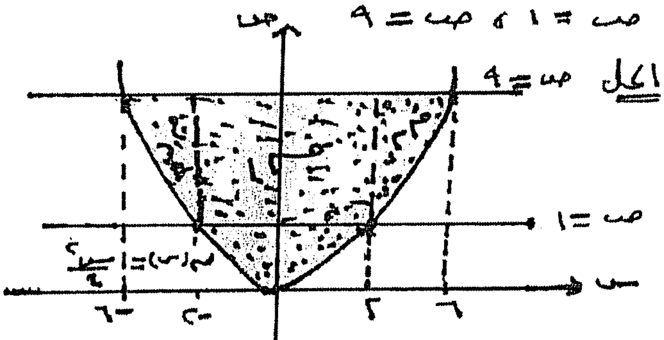
م = $\int_{-2}^{1}$ (س + ٢) دس + $\int_{1}^{2}$ (٤ - $س^2$) دس

م = $\left[\frac{س^2}{2} + ٢س\right]_{-2}^{1} + \left[٤س - \frac{س^3}{3}\right]_{1}^{2}$

م = $\frac{37}{6}$ وحدة مساحة

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^2}{4}$ والمستقيمان ص = ١ ، ص = ٩

الحل ص = ٩



بداية المنطقة ونهايتها ق(س) = ٩

$\frac{س^2}{4}$ = ٩ ← $س^2$ = ٣٦ ← س = -٦ بداية
س = ٦ نهاية

* تقاطع ق(س)، ص = ١

$\frac{س^2}{٤} = ١$ ← $\boxed{س = ٢}$ ، س = -٢

م = $\int_{-٦}^{-٢} (٩ - \frac{س^2}{٤})$ دس + $\int_{-٢}^{٢} (٩ - ١)$ دس + $\int_{٢}^{٦} (٩ - \frac{س^2}{٤})$ دس

م = ٨(٨) + ٩س - $\frac{س^3}{١٢}$ $\Big|$

م = $\frac{٢٠٨}{٣}$ وحدة مساحية

ط٢ لوجود التماثل

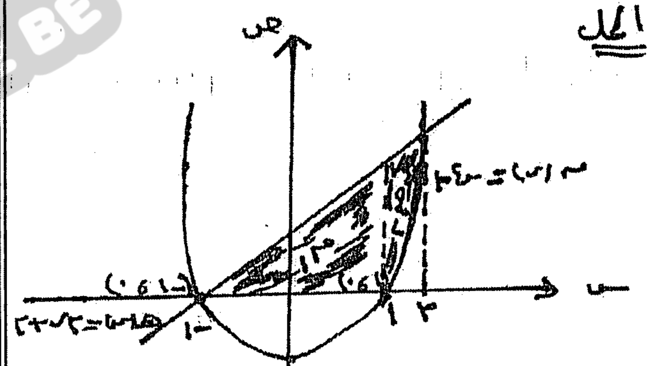
م = ٢ $\left(\int_{٠}^{٢} (٩ - ١) \text{ دس} + \int_{٢}^{٦} (٩ - \frac{س^2}{٤}) \text{ دس} \right)$

= $\frac{٢٠٨}{٣}$ وحدة مساحية

---

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س² - ١، هـ(س) = ٢س + ٢، ومحور السينات

الحل



بداية المنطقة هـ(س) مع محور السينات

٢س + ٢ = ٠ ← س = -١

نهاية المنطقة ق(س) مع هـ(س)

س² - ١ = ٢س + ٢ ← س² - ٢س - ٣ = ٠

(س - ٣)(س + ١) = ٠ ، $\boxed{س = ٣}$ ، س = -١ ×

تقاطع ق(س) مع محور السينات

س² - ١ = ٠ ← س = ١، س = -١

م = $\int_{-١}^{١}$ هـ(س) دس + $\int_{١}^{٣}$ (هـ(س) - ق(س)) دس

م = $\int_{-١}^{١}$ (٢س + ٢) دس + $\int_{١}^{٣}$ (٢س - س² + ٣) دس

م = س² + ٢س $\Big|_{-١}^{١}$ + س² - $\frac{س^3}{٣}$ + ٣س $\Big|_{١}^{٣}$

م = $\frac{٢٨}{٣}$ وحدة مربعة

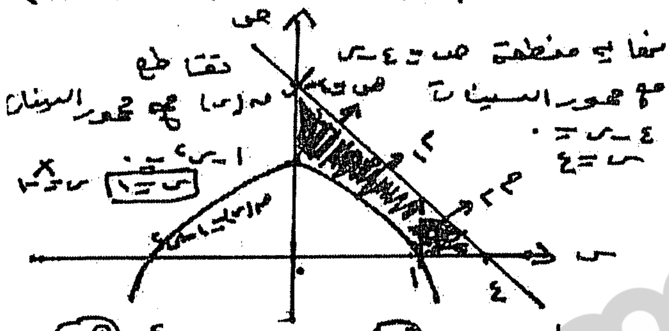
٢٠٠١

٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ - س²، والمستقيم س + ص = ٤، ومحوري السينات والصادات

الحل ق(س) = ١ - س² ، ص = ٤ - س ، ص = ٠

س = ٠ بداية المنطقة (محور الصادات)

نهاية منطقة ص = ٤ - س مع محور السينات ٤ - س = ٠ ، س = ٤



م = $\int_{٠}^{١} ((٤ - س) - (١ - س^2))$ دس + $\int_{١}^{٤} (٤ - س)$ دس

م = $\int_{٠}^{١} (س^2 - س + ٣)$ دس + $\int_{١}^{٤} (٤ - س)$ دس

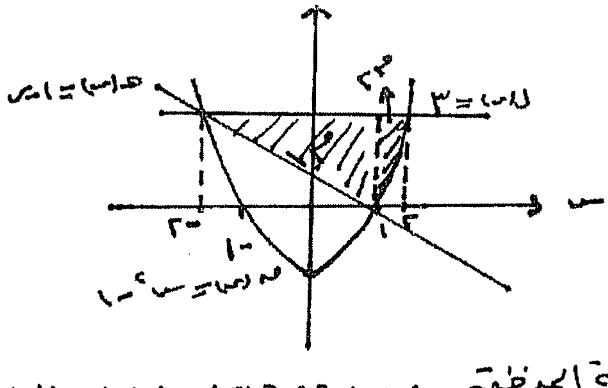
= $\frac{س^3}{٣} - \frac{س^2}{٢} + ٣س \Big|_{٠}^{١} + ٤س - \frac{س^2}{٢} \Big|_{١}^{٤}$

م = $\frac{٢٢}{٣}$ وحدة مساحية

٢٠١٣ ش (الكتاب)، (١٧٠ ص)

٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س² - ١، هـ(س) = ١ - س ، ل(س) = ٣

الحل



بداية المنطقة ق(س) مع هـ(س)، ق(س) مع ل(س)

ل(س) مع هـ(س)

ل(س) = هـ(س) ← ١ - س = ٣ ← س = -٢

نهاية المنطقة ل(س) مع ص(س)

س^{2} − ١ = ٣ ← $\boxed{س = ٢}$ ، س = −٢

م = $\int_{-2}^{1}$ (ل(س) − هـ(س)) دس + $\int_{1}^{2}$ (ل(س) − ص(س)) دس

م = $\int_{-2}^{1}$ (س + ٢) دس + $\int_{1}^{2}$ (٤ − س^{2}) دس

م = $\left[\frac{س^{2}}{٢} + ٢س\right]_{-2}^{1}$ + $\left[٤س - \frac{س^{3}}{٣}\right]_{1}^{2}$

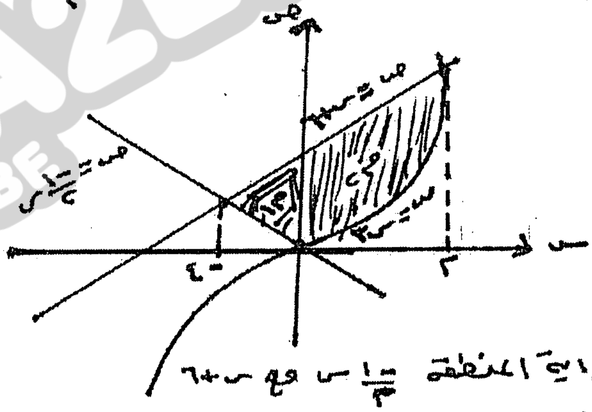
م = $\frac{٣٧}{٦}$ وحده مربعه

---

٦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين

منحنيات ص + س = ٦ ، ص = س^{3} ، ٢ص + س = ٠

الحل ص = س^{3} ، ص = −س + ٦ ، ص = $-\frac{١}{٢}$ س



بداية المنطقة $-\frac{١}{٢}$ س مع −س + ٦

$-\frac{١}{٢}$ س = −س + ٦ س = −٤

نهاية المنطقة −س + ٦ مع س^{3}

س^{3} = −س + ٦ ← س^{3} + س − ٦ = ٠

بعد التحليل س = ٢

تقاطع س^{3} مع $-\frac{١}{٢}$ س ← س^{3} = $-\frac{١}{٢}$ س

س^{3} + $\frac{١}{٢}$ س = ٠ ← س = ٠

م = $\int_{-4}^{0}$ (−س + ٦ + $\frac{١}{٢}$ س) دس + $\int_{0}^{2}$ (−س + ٦ − س^{3}) دس

م = $\left[-\frac{س^{2}}{٤} + ٦س\right]_{-4}^{0}$ + $\left[-\frac{س^{2}}{٢} + ٦س - \frac{س^{4}}{٤}\right]_{0}^{2}$

م = ٢٢ وحده مساحه

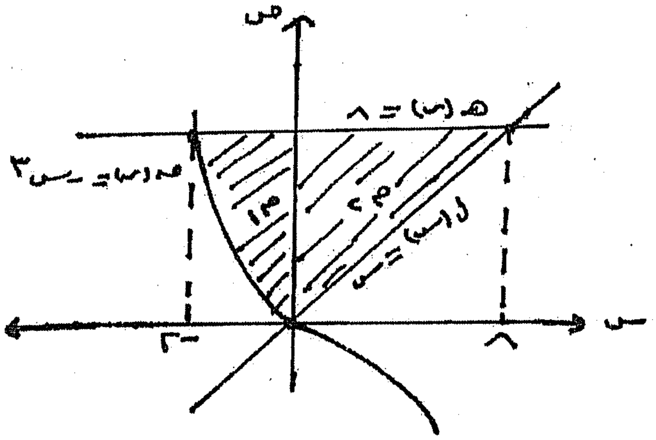
٢٠٠٨ ش (كتاب)

٧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين

منحنيات ص(س) = −س^{3} ، هـ(س) = ٨ ، ل(س) = س

الحل بداية المنطقة هـ(س) مع ص(س)

٨ = −س^{3} ← س = −٢



نهاية المنطقة هـ(س) مع ل(س) ٨ = س

تقاطع ل(س) مع ص(س) س = −س^{3} $\boxed{س = ٠}$

م = $\int_{-2}^{0}$ (هـ(س) − ص(س)) دس + $\int_{0}^{8}$ (هـ(س) − ل(س)) دس

م = $\int_{-2}^{0}$ (٨ + س^{3}) دس + $\int_{0}^{8}$ (٨ − س) دس

= $\left[٨س + \frac{س^{4}}{٤}\right]_{-2}^{0}$ + $\left[٨س - \frac{س^{2}}{٢}\right]_{0}^{8}$

م = ٤٤ وحده مربعه

١٩٩٧

٨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين

منحنيات الاقترانين ص(س) = |س| ،

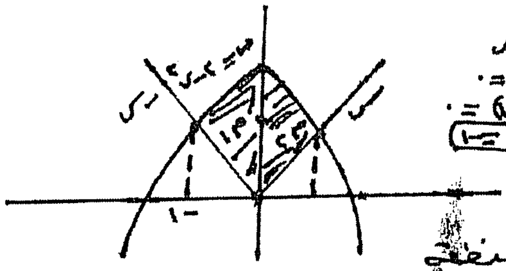
ص = ٢ − س^{2}

الحل |س| ← س = ٠

−س | س
− ٠ +

بداية المنطقة ٢ − س^{2} مع −س

٢ − س^{2} = −س
س^{2} − س − ٢ = ٠
(س − ٢)(س + ١) = ٠
س = ٢ ، $\boxed{س = −١}$



نهاية المنطقة

٢ − س^{2} مع س ← ٢ − س^{2} = س

س^{2} + س − ٢ = ٠ ← (س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ ، $\boxed{س = ١}$

تقاطع س مع −س = $\boxed{٠}$

م = $\int_{-1}^{0}$ (٢ − س^{2} + س) دس + $\int_{0}^{1}$ (٢ − س^{2} − س) دس

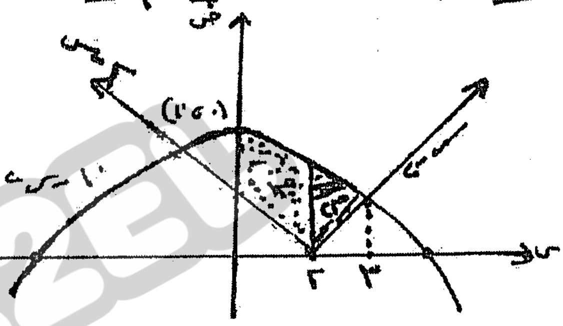
م = $\boxed{\frac{٧}{٣}}$ وحده مساحه

٢٠٠٣ ص

⑨ جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى $\text{ص} = |\text{س} - ٢|$ ومنحنى الاقتران $\text{ص} = ١٠ - \text{س}^٢$

الحل $|\text{س}-٢|$

٢-س	٢	س-٢



بداية المنطقة س = ٠
نهاية المنطقة $١٠-\text{س}^٢$ مع $\text{س}-٢$
$١٠-\text{س}^٢ = \text{س}-٢ \leftarrow \text{س}^٢+\text{س}-١٢=٠$
$(\text{س}+٤)(\text{س}-٣)=٠ \leftarrow \cancel{\text{س}=-٤}$ $\boxed{\text{س}=٣}$ ربع أول
نقطة تقاطع س-٢ ، ٢-س $\boxed{\text{س}=٢}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (١٠-\text{س}^٢-٢+\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} (١٠-\text{س}^٢-\text{س}+٢)\,\text{دس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (٨+\text{س}-\text{س}^٢)\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} (١٢-\text{س}-\text{س}^٢)\,\text{دس}$$

$$\text{م} = ٨\text{س}+\frac{\text{س}^٢}{٢}-\frac{\text{س}^٣}{٣}\Big|_{٠}^{٢} + ١٢\text{س}-\frac{\text{س}^٢}{٢}-\frac{\text{س}^٣}{٣}\Big|_{٢}^{٣}$$

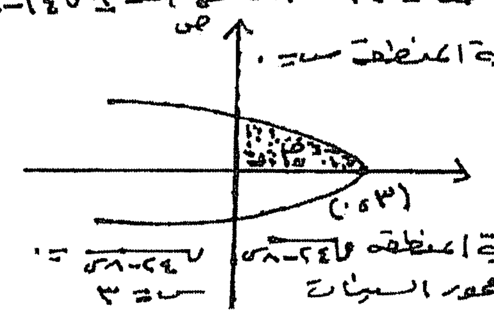
$\text{م} = \frac{٣٧}{٢}$ وحدة مساحية

٢٠٠٦ ص

⑩ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $\text{ص}^٢ = ٢٤ - ٨\text{س}$ ومحور السينات الواقعة في الربع الأول

الحل $\text{ص}^٢ = ٢٤ - ٨\text{س} \leftarrow \text{ص} = \pm\sqrt{٢٤-٨\text{س}}$

بداية المنطقة س = ٠



نهاية المنطقة $\sqrt{٢٤-٨\text{س}}$ مع محور السينات $\sqrt{٢٤-٨\text{س}} = ٠$ ، س = ٣

$$\text{م} = \int_{٠}^{٣} \sqrt{٢٤-٨\text{س}}\,\text{دس} = \int_{٠}^{٣} (٢٤-٨\text{س})^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$$

$$\text{م} = (٢٤-٨\text{س})^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{-٨}\Big|_{٠}^{٣}$$

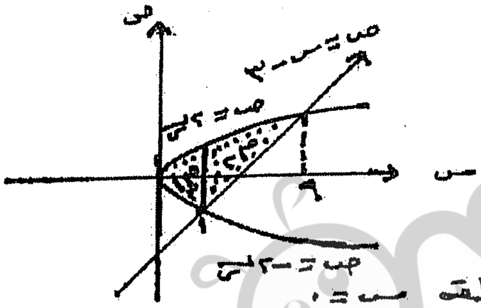
$$\text{م} = \frac{-١}{١٢}\left(\sqrt{٢٤-٨\text{س}}\right)^{٣}\Big|_{٠}^{٣}$$

$\text{م} = ٤\sqrt{٦}$ وحدة مساحية

٢٠٠٥ ص

⑪ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $\text{ص}^٢ = ٤\text{س}$ والمستقيم $\text{س} - \text{ص} = ٣$

الحل $\text{ص} = \pm ٢\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س}-\text{ص}=٣ \leftarrow \text{ص}=\text{س}-٣$



بداية المنطقة س = ٠
نهاية المنطقة تقاطع س-٣ مع ٢√س
$\text{س}-٣ = ٢\sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{س} = ٩$
تقاطع س-٣ مع $-٢\sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{س} = ١$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} (٢\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}})\,\text{دس} + \int_{١}^{٩} (٢\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٣)\,\text{دس}$$

$\text{م} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحية

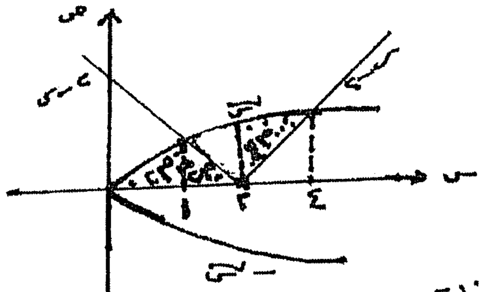
٢٠١٠ ش

⑫ جد مساحة المنطقة المظللة (الكتاب)

حيث $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}-٢|$

$\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$

الحل



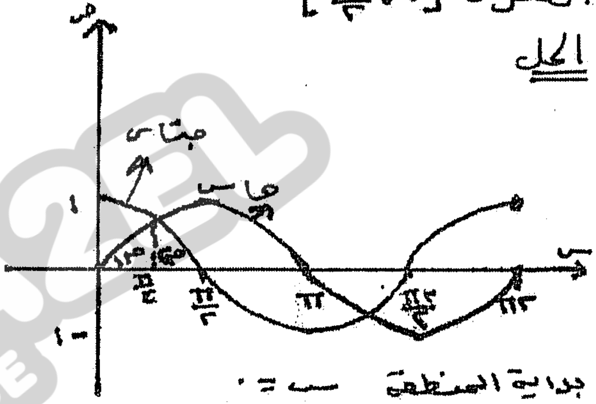
بداية المنطقة س = ٠
نهاية المنطقة تقاطع $\sqrt{\text{س}}$ مع $\text{س}-٢ \leftarrow \text{س}=٤$
تقاطع س-٢ مع ٢-س ← س = ٢
تقاطع ٢-س مع $\sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{س} = ١$

$م = \int_{0}^{1} \sqrt{س}\, دس + \int_{1}^{2} (٣ - س)\, دس + \int_{2}^{4} (\sqrt{س} - س + ٢)\, دس$

$م = \boxed{}$

(١٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ، ومنحنى هـ(س) = جتاس ومحور السينات في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{2}]$

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة $س = \frac{\pi}{2}$

نقطة تقاطع جاس مع جتاس

جاس = جتاس ← $س = \frac{\pi}{4}$

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جاس\, دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\, دس$

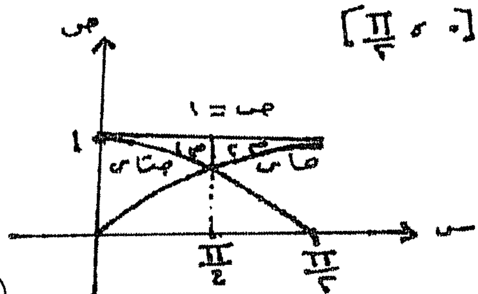
$م = -جتاس \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + جاس \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$م = \frac{-1}{\sqrt{2}} + ١ + (١ - \frac{1}{\sqrt{2}})$

$م = ٢ - \frac{2}{\sqrt{2}}$ وحدة مساحية

(١٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس والمستقيم ص = ١ في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{2}]$

الحل



بداية المنطقة س = ٠

نهاية المنطقة $س = \frac{\pi}{2}$

نقطة تقاطع جاس مع جتاس

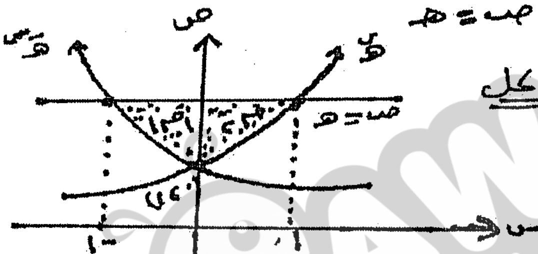
جاس = جتاس ← $س = \frac{\pi}{4}$

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (١ - جتاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (١ - جاس)\, دس$

$م = \boxed{}$

(١٥) جد المساحة المحصورة بين منحنيي $ق(س) = هـ^{س}$ ، $ل(س) = هـ^{-س}$ والمستقيم ص = هـ

الحل



بداية المنطقة تقاطع $هـ^{-س}$ مع ص = هـ

$هـ^{-س} = هـ$ ← س = ١-

نهاية المنطقة $هـ^{س}$ مع ص = هـ

$هـ^{س} = هـ$ س = ١

نقطة تقاطع $هـ^{س}$ مع $هـ^{-س}$ = عند س = ٠

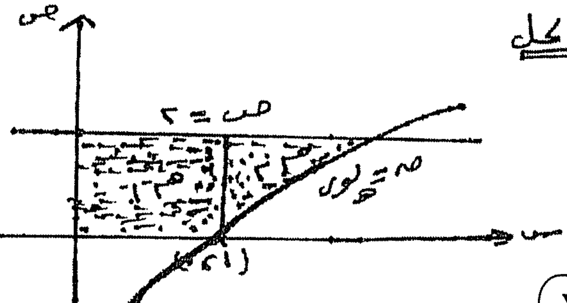
$م = \int_{-1}^{0} (هـ - هـ^{-س})\, دس + \int_{0}^{1} (هـ - هـ^{س})\, دس$

$م = هـس + هـ^{-س} \Big|_{-1}^{0} + هـس - هـ^{س} \Big|_{0}^{1}$

م = ٢ وحدة مربعة

(١٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = لوس والمستقيم ص = ٢ ومحوري السينات والصادات

الحل



بداية المنطقة س = ١

نهاية المنطقة تقاطع لوس مع ص = ٢

لوس = ٢ ← س = $هـ^2$

تقاطع م(س) مع محور السينات

لوس = ٠ ← س = ١

$م = \int_{0}^{1} 2\, دس + \int_{1}^{هـ^2} (2 - لوس)\, دس$

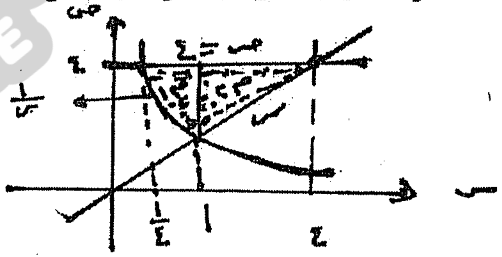
$م = 2 + 2س \Big|_{1}^{هـ^2} - \int_{1}^{هـ^2} لوس\, دس$ بالأجزاء

م = $هـ^2 - 1$ وحدة مساحة

(١٧) جد المساحة المحصورة بين منحنيات

$ق(س) = \frac{1}{س}$ ، ل(س) = س ، ص = ٤

الحل



بداية المنطقة تقاطع $\frac{1}{س}$ مع ص = ٤

$س = \frac{1}{4}$

نهاية المنطقة تقاطع ص مع ص = ٤

س = ٤

تقاطع ق(س) مع ل(س)

$\frac{1}{س} = س \leftarrow س^2 = 1 \leftarrow \boxed{س = 1}$ ، $س = -1$ ✗

$م = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (4 - \frac{1}{س})\, دس + \int_{1}^{4} (4 - س)\, دس$

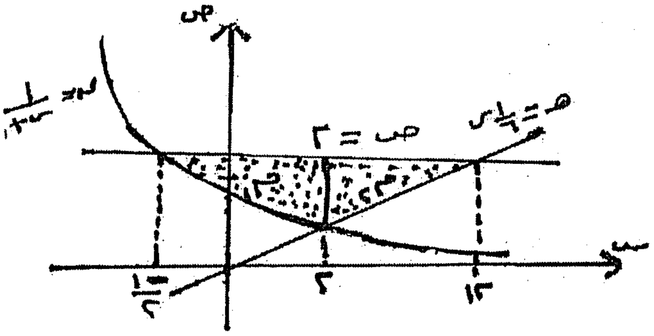
$م = \boxed{\quad}$

(١٨) جد المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ، $ق(س) = \frac{1}{س-1}$

$هـ(س) = \frac{1}{2} س$ ، والمستقيم ص = ٢

الحل بداية المنطقة تقاطع ق(س) مع ص = ٢

$\frac{1}{س-1} = 2 \leftarrow س = \frac{3}{2}$



نهاية المنطقة تقاطع هـ(س) مع ص = ٢

$\frac{1}{2} س = 2 \leftarrow س = 4$

تقاطع ق(س) مع هـ(س)

$\frac{1}{س-1} = \frac{1}{2} س \leftarrow س = 2$

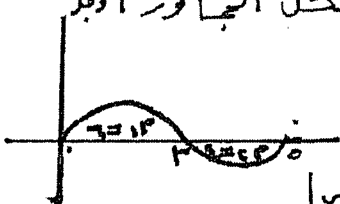
$م = \int_{\frac{3}{2}}^{2} (2 - \frac{1}{س-1})\, دس + \int_{2}^{4} (2 - \frac{1}{2}س)\, دس$

$م = \boxed{\quad}$

الجزء الرابع
حساب التكامل والمساحة من خلال رسم معطى في السؤال

أمثلة

(١) معتمداً الشكل المجاور أوجد



١) $\int_{0}^{5} ق(س)\, دس$

٢) $\int_{0}^{5} |ق(س)|\, دس$

٣) $\left|\int_{0}^{5} ق(س)\, دس\right|$

الحل ١) $\int_{0}^{5} ق(س)\, دس = \int_{0}^{3} ق(س)\, دس + \int_{3}^{5} ق(س)\, دس$

$= 6 - 4 = 2$

٢) $\int_{0}^{5} |ق(س)|\, دس = \int_{0}^{3} |ق(س)|\, دس + \int_{3}^{5} |ق(س)|\, دس$

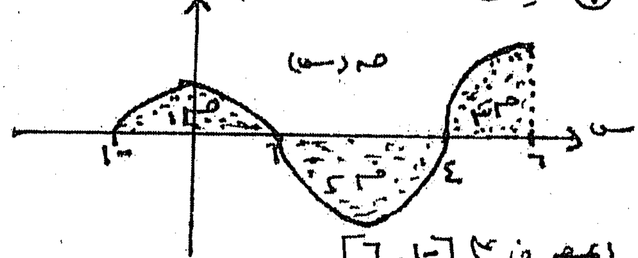
$= 6 + |-4| = 10$ (المساحة)

٣) $\left|\int_{0}^{5} ق(س)\, دس\right| = \left|\quad\right| = \left|\int_{0}^{5} ق(س)\, دس\right|$

$= |6 - 4| = |2| = 2$

٢٠١٠ ش

② يمثل الشكل منحنى ق(س)



المعرف في [-١، ٦]

وكانت م١ = ٣ وحدات مربعة، م٢ = ٤ وحدات مربعة، م٣ = ٢ وحدة مربعة

أوجد ① $\int_{٦}^{-١}$ ق(س) دس

الحل $\int_{٦}^{-١}$ ق(س) دس = − $\int_{-١}^{٦}$ ق(س) دس

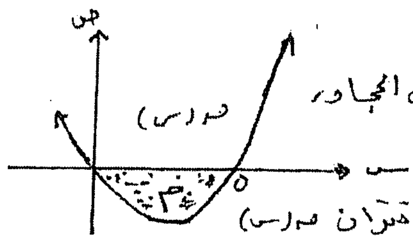
= − ($\int_{-١}^{١}$ ق(س) دس + $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس + $\int_{٤}^{٦}$ ق(س) دس)

= − (٣ − ٤ + ٢) = −١

② المساحة المحصورة في الفترة [-١، ٤] الحل ٣ + ٤ = ٧ وحدة مربعة

٢٠١٣ ش

③ يمثل الشكل المجاور



منحنى الاقتران ق(س)

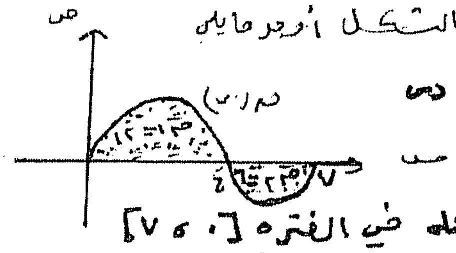
إذا كانت المساحة م = ٨ وحدات مربعة

أوجد $\int_{٠}^{٥}$ (١ − ق(س)) دس

الحل = $\int_{٠}^{٥}$ ١ دس − $\int_{٠}^{٥}$ ق(س) دس

= ٥ − −٨ = ١٣

④ معتمداً الشكل أوجد ما يلي



١) $\int_{٤}^{٠}$ ق(س) دس

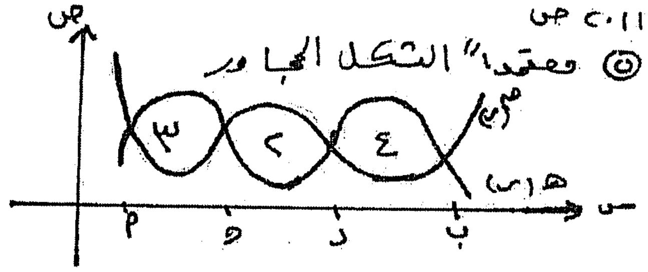
٢) المساحة في الفترة [٠، ٧]

الحل ١) $\int_{٤}^{٠}$ ق(س) دس = − $\int_{٠}^{٤}$ ق(س) دس = −١٢

٢) م = م١ + م٢ = ١٨ وحدة مساحة

٢٠١١ ص

⑤ معتمداً الشكل المجاور



إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين في الفترة [أ، ب] وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين كما في الشكل

أوجد $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) − هـ(س)) دس

الحل $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) − هـ(س)) دس

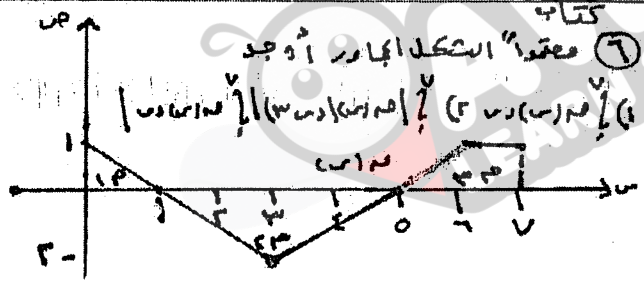
= $\int_{أ}^{جـ}$ (ق(س) − هـ(س)) + $\int_{د}^{ب}$ (ق(س) − هـ(س)) دس

= ٣ + −٤ = −٣

كتاب

⑥ معتمداً الشكل المجاور أوجد

١) $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس ٢) $\int_{٠}^{٧}$ |ق(س)| دس ٣) | $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس |



م١ = م المثلث١ = $\frac{١}{٢}$ × ١ × ١ = $\frac{١}{٢}$

م٢ = م مثلث٢ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢ = ٤

م٣ = م شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (١ + ٢) × ١ = $\frac{٣}{٢}$

١) $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس = $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس + $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس + $\int_{٥}^{٧}$ ق(س) دس

= $\frac{١}{٢}$ − ٤ + $\frac{٣}{٢}$ = −٢

٢) $\int_{٠}^{٧}$ |ق(س)| دس

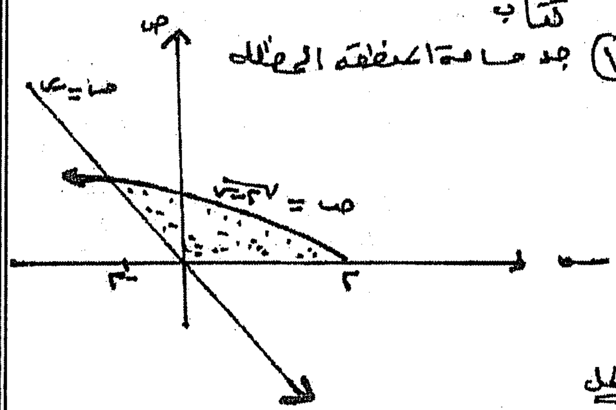
المطلوب المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في الفترة [٠، ٧]

= م١ + م٢ + م٣ = $\frac{١}{٢}$ + ٤ + $\frac{٣}{٢}$ = ٦

٣) | $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) دس | = |−٢| = ٢

كتاب

(7) جد مساحة المنطقة المظللة



الحل

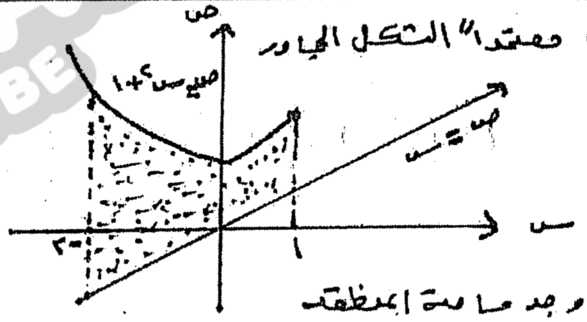
بداية المنطقة س = -2 ، نهاية المنطقة س = 2

نقطة تقاطع س = 0

م = $\int_{-2}^{0} (\sqrt{2-س} + س)$ دس + $\int_{0}^{2} \sqrt{2-س}$ دس

م = $\frac{10}{3}$ وحدة مساحية

(8) معتمداً الشكل المجاور

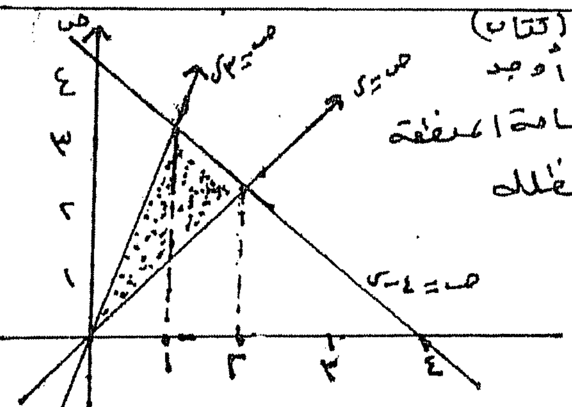


أوجد مساحة المنطقة المظللة

الحل م = $\int_{-2}^{1}$ (س² + 1 − س) دس = $\frac{15}{2}$ وحدة مربعة

(كتاب)

(9) أوجد مساحة المنطقة المظللة

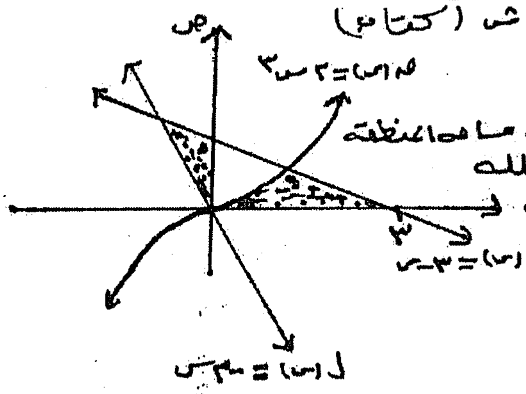


الحل م = $\int_{0}^{1}$ (3س − س) دس + $\int_{1}^{2}$ (4 − 2س) دس

م = 1 + 1 = 2 وحدة مساحية

2009 ش (كتاب)

(2) أوجد مساحة المنطقة المظللة



نجد نقاط التقاطع

الحل ل(س) = هـ(س) ← $\boxed{س = -3}$

ن(س) = هـ(س) ← $\boxed{س = 1}$

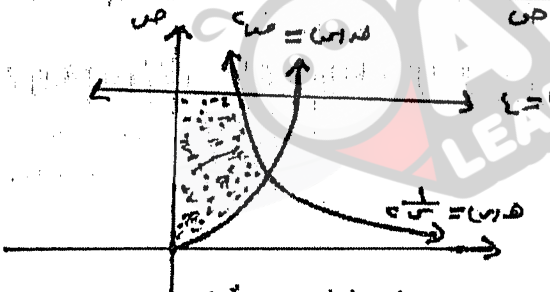
ن(س) = ل(س) ← $\boxed{س = 0}$ من الشكل

م = $\int_{-3}^{0}$ (3 − س + 3س) دس + $\int_{0}^{1}$ 3س³ دس + $\int_{1}^{3}$ (3 − س) دس

م = 7 وحدة مساحية

2011 ص

(11)



أوجد مساحة المنطقة المظللة

الحل نجد نقاط التقاطع

$\frac{1}{س^2}$ = س² ← س = ±1 $\boxed{س = 1}$ نهاية المنطقة

4 = $\frac{1}{س^2}$ ← س = ±$\frac{1}{2}$ $\boxed{س = \frac{1}{2}}$

بداية المنطقة س = 0

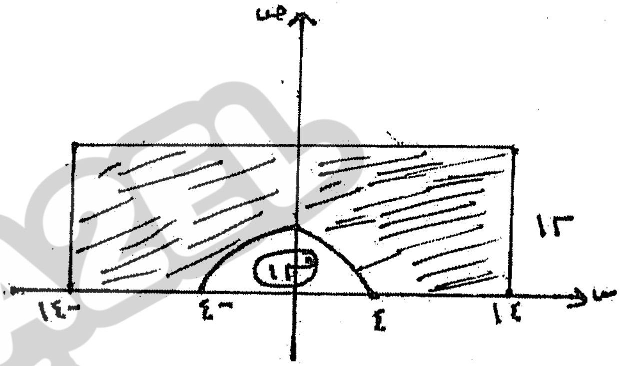
م = $\int_{0}^{\frac{1}{2}}$ (4 − س²) دس + $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ ($\frac{1}{س^2}$ − س²) دس

م = $\frac{8}{3}$ وحدة مساحية

الجزء الخامس
أمثلة جميلة

وزارة تكامل

① يمثل الشكل المجاور الواجهة الأمامية لمبنى ، موضح هذا المبنى يمثل المنحنى $ق(س) = ٨ - \frac{س^2}{٢}$ ، جد التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة ٣٠ قرش .



الحل نجد تقاطع منحنى مع محور السينات

$٨ - \frac{س^2}{٢} = ٠ \leftarrow س = \pm ٤$

بداية المنطقة س = -١٤

نهاية المنطقة س = ١٤

م = م مستطيل − م١٣

$م = ١٣ \times ٢٨ - \int_{-٤}^{٤} (٨ - \frac{س^2}{٢})\, دس$

$م = \frac{٨٨٠}{٣}$ وحدة مساحة مربعة

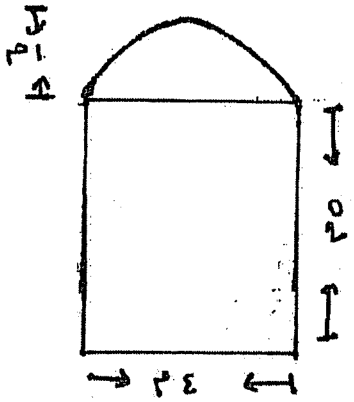
تكلفة الدهان = السعر × المساحة

$= ٣٠ \times \frac{٨٨٠}{٣} = \frac{١٧٦٠٠}{٣}$ قرش

$= \frac{١٧٦}{٣}$ دينار

وزارة

② يمثل الشكل المجاور المدخل الجنوبي لوزارة التربية والتعليم وهو على شكل مستطيل يعلوه قوس على شكل قطع مكافئ ، جد مساحة واجهة هذا المدخل



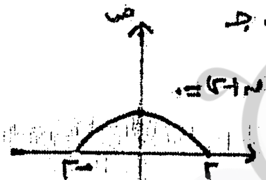
الحل مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= ٤ \times ٥ = ٢٠$ م²

مساحة القوس

$ق(س) = أس^2 + ب س + جـ$

ق(٠) = ١ ، ق(٢) = ٠ ، ق(−٢) = ٠



ق(٠) = ١ ← $\boxed{جـ = ١}$

ق(٢) = ٠ ← ٤أ + ٢ب + ١ = ٠ ← $\boxed{٤أ + ٢ب = -١}$ ①

ق(−٢) = ٠ ← ٤أ − ٢ب + ١ = ٠ ← $\boxed{٤أ - ٢ب = -١}$ ②

بحل المعادلتين $أ = \frac{-١}{٤}$ ، ب = ٠

$ق(س) = \frac{-١}{٤} س^2 + ١$

$م_{القوس} = \int_{-٢}^{٢} (\frac{-١}{٤} س^2 + ١)\, دس = \frac{٨}{٣}$

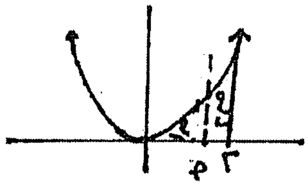
م المدخل = م المستطيل + م القوس

$م = ٢٠ + \frac{٨}{٣} = \frac{٦٨}{٣}$

---

③ ٢٠١١ جد قيمة الثابت (أ) بحيث أن المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى $ص = س^2$ والمستقيم س = ٢ ومحور السينات إلى قسمين متساويين

الحل



بداية المنطقة س = ٠
نهاية المنطقة س = ٢

أ ← يقسم المساحة إلى قسمين متساويين

$\int_{٠}^{٢}$ س² دس = ٢ × $\int_{٠}^{أ}$ س² دس

$\frac{س^٣}{٣}\Big|_{٠}^{٢}$ = ٢ × $\frac{س^٣}{٣}\Big|_{٠}^{أ}$

$\frac{٨}{٣}$ = ٢ × $\frac{أ^٣}{٣}$ ← أ³ = ٤

أ = $\sqrt[٣]{٤}$

ورقة عمل الدرس العاشر

أسئلة متنوعة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س³ − ٦س² + ٨س ومحور السينات

$\boxed{م = ٨ \text{ وحدة مربعة}}$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ١ − $\sqrt{س}$ ومحور السينات ومحور الصادات

$\boxed{م = \frac{١}{٣} \text{ وحدة مربعة}}$

③ جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = هـ^س والمستقيم ص = ٢ و محور الصادات

$\boxed{م = لو_{هـ}٤ − ١}$

٢٠١٣ ش

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س² − ١ ، هـ(س) = ١ − س ، ل(س) = ٣

$\boxed{م = \frac{٣٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}}$

٢٠١٢ ش (كتاب)

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س³ ، هـ(س) = $\frac{١}{٢}$س ، ل(س) = ٦ − س

$\boxed{٢٢ \text{ وحدة مساحة}}$

٢٠١٢ ص (كتاب)

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س³ ، هـ(س) = س² + ٤ ، ل(س) = −٤س

$\boxed{\frac{٢٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}}$

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، ل(س) = س ، ص = ٤

⑧ إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم ص = أ س تساوي $\frac{٤}{٣}$ وحدة مربعة ، جد قيمة أ حيث أ > ٠.

⑨ (كتاب + ٢٠١٦ ش)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ١ + جاس ، هـ(س) = ١ + جتاس في الفترة $[\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}]$

الجواب : $2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

⑩ (كتاب) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين المستقيم ص = ٨ س ، ومنحنى الاقتران ص = ٩ - س^2 ومحور الصادات

⑪ (كتاب)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين هـ(س) = جاس ، هـ(س) = جا٢س الواقعة في الربع الأول

⑫ (كتاب + ٢٠١٥ ش)

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{2}{س}$ ومحور السينات والمستقيم ٢س - ص = ٠ والمستقيم هـ - س = ٠ حيث (هـ) العدد النيبيري .

الجواب : ٣ وحدات مساحة

⑬ (كتاب)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ١ + س^3 ، ل(س) = س^2 + ٥ ، والمستقيمين ص + س - ١ = ٠ ، ٣ - س = ٠

⑭ (٢٠١٥ ص)

جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الثاني والمحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = س^2 ، هـ(س) = س^3 - ٢س ، والمستقيم ص = ٢ - س .

الجواب : $\frac{١٣}{٦}$ وحدة مساحة

⑮ (٢٠١٧ ش)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات :

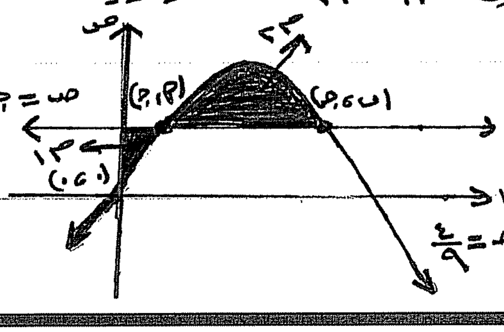
ق(س) = س^2 ، هـ(س) = $\sqrt{٨س}$ ، ل(س) = س + ٦

ومحور الصادات .

الجواب : $\frac{٦٥}{٣}$ وحدة مساحة

⑯ (٢٠١٦ ص)

يقسم المستقيم ص = جـ منحنى الاقتران ق(س) = ٢س - ٣س^3 في النقطتين (أ ، جـ) ، (ب ، جـ) حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية موجبة مكونًا المنطقتين م١ ، م٢ كما في الشكل الآتي ، جد قيمة (جـ) التي تجعل مساحة المنطقتين م١ ، م٢ متساويتين .



الجواب : جـ = $\frac{٤}{٩}$

المعلم : حمد الله الطوباسي
٠٧٩٧٦٦٢٧٢٨ - ٠٧٧٩٣٥٨٧٥٢

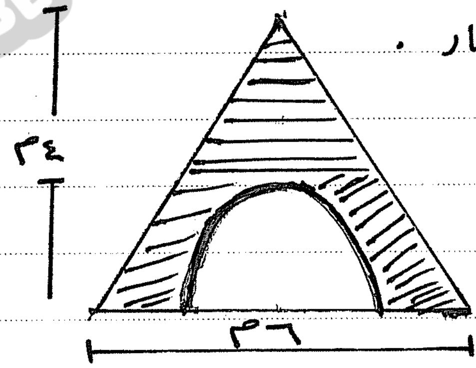
١٧ (كتاب)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

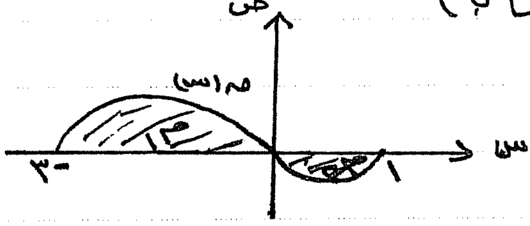
ق(س) = $\frac{٣}{س}$ ، هـ(س) = س - ٢ ، ل(س) = ٣

١٨ (كتاب)

يمثل الشكل الآتي الواجهة الأمامية لأحد المباني، ومدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ س²، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة، إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار.



١٩ (كتاب)



معتمداً الشكل إذا كانت م١ = ١٠ ، م٢ = ٤ ، جد $\int_{٠}^{٢}$ س ق(١-س²) دس