المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين
الأدبي، والفندقي والسياحي

الرياضيات
الصف الثاني عشر
للفرعين الأدبي، والفندقي والسياحي
١٤٤٠هـ / ٢٠١٩م

ISBN:978-9957-84-782-1
9 789957 847821

المطبعة الوطنية

إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين
الأدبي، والفندقي والسياحي

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملاحظاتكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية:
هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب: ١٩٣٠ الرمز البريدي: ١١١١٨
أو على البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٧/٣، تاريخ ١٧/١/٢٠١٧م، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٧م/ ٢٠١٨م.

عمان / الأردن – ص . ب: ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(١٥٨٠/٣/٢٠١٧)

ISBN: 978 – 9957 – 84 –782 – 1

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:
أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:
جهاد حسين أبو الركب
د. أحمد جميل المساعفة
إسماعيل علي صالح
روان يوسف علي
ربى غسان المدني

التحرير العلمي: نفين أحمد جوهر
التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى
التصميم: هاني سلطي مقطش
التحرير الفني: نداء فؤاد أبوشنب
الرسم: فايزة فايز حداد
الإنتاج: سليمان أحمد الخلايلة

دقّق الطباعة وراجعها: نفين أحمد جوهر

الطبعة الأولى ١٤٣٨هـ / ٢٠١٧م
أعيدت طباعته ٢٠١٨-٢٠١٩م

قائمة المحتويات

الموضوع الصفحة

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال ١٠

الفصل الأول: النهايات ١٢
أولًا : مفهوم النهاية ١٢
ثانيًا: نظريات النهايات ٢١
ثالثًا: نهاية خارج قسمة اقترانين ٣٣
رابعًا: نهاية اقتران الجذر النوني ٤١
الفصل الثاني: الاتصال ٤٦
أولًا : الاتصال عند نقطة ٤٦
ثانيًا: نظريات الاتصال ٥٥
أسئلة الوحدة ٦٣

الوحدة الثانية : التفاضل ٦٦

الفصل الأول: المشتقة ٦٨
أولًا : معدل التغير ٦٨
ثانيًا: المشتقة الأولى ٧٩
الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا ٨٧
أولًا : قواعد الاشتقاق ٨٧
ثانيًا: قاعدة السلسلة ٩٦
ثالثًا: مشتقات الاقترانات المثلثية ١٠٢
رابعًا: المشتقات العليا ١٠٨
أسئلة الوحدة ١١٢

الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل ١١٦

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة **١١٨**
أولًا : التفسير الهندسي ١١٨
ثانيًا: التفسير الفيزيائي ١٢٢
الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق **١٢٦**
أولًا : التزايد والتناقص ١٢٦
ثانيًا: القيم القصوى ١٣٣
الفصل الثالث: تطبيقات **١٤٢**
أولًا : تطبيقات على القيم القصوى ١٤٢
ثانيًا: تطبيقات اقتصادية على التفاضل ١٤٩
أسئلة الوحدة **١٥٤**

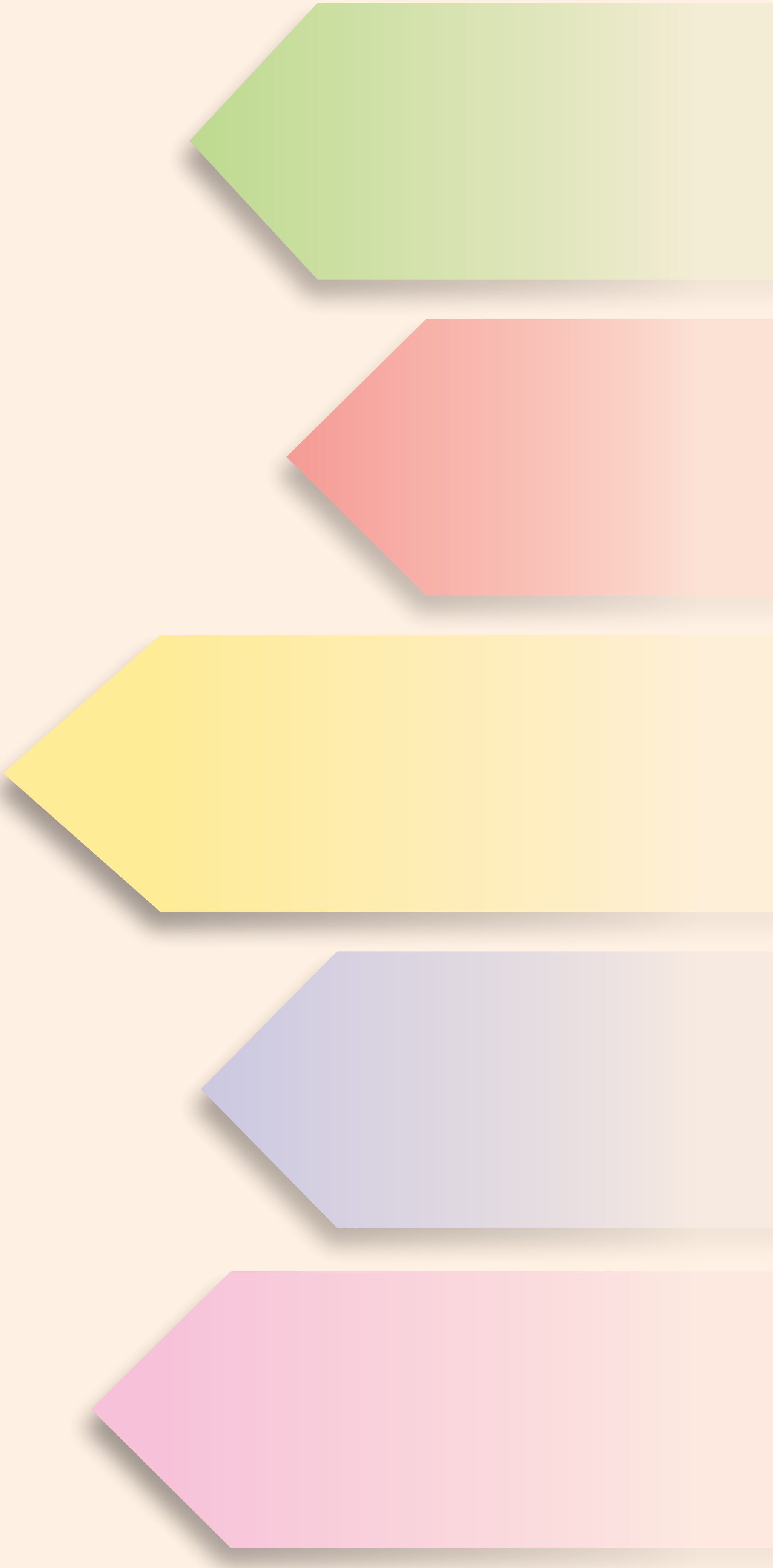
الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته ١٥٨

الفصل الأول: التكامل **١٦٠**
أولًا : التكامل غير المحدود ١٦٠
ثانيًا: التكامل المحدود ١٦٨
ثالثًا: خصائص التكامل المحدود ١٧٢
رابعًا: التكامل بالتعويض ١٧٨
الفصل الثاني: تطبيقات التكامل **١٨٥**
أولًا : تطبيقات هندسية ١٨٥
ثانيًا: تطبيقات فيزيائية ١٨٩
ثالثًا: المساحة ١٩٣
الفصل الثالث: الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما **٢٠١**
أولًا : الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي ٢٠١
ثانيًا: النمو والاضمحلال ٢١٠
أسئلة الوحدة **٢١٥**

الوحدة الخامسة : الإحصاء والاحتمالات ٢١٨

الفصل الأول: طرائق العد **٢٢٠**
أولًا : مبدأ العد ٢٢٠
ثانيًا: التباديل ٢٢٩
ثالثًا: التوافيق ٢٣٤
الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة **٢٣٩**
أولًا : المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين ٢٣٩
ثانيًا: العلامة المعيارية ٢٤٦
ثالثًا: التوزيع الطبيعي ٢٥٢
الفصل الثالث: الارتباط والانحدار **٢٦٠**
أولًا : الارتباط ٢٦٠
ثانيًا: خط الانحدار ٢٧٠
أسئلة الوحدة **٢٧٦**
ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري **٢٧٨**
قائمة المراجع **٢٧٩**



بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

نضع بين أيدي أبنائنا الطلبة وزملائنا المعلمين كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر للفرعين الأدبي، والفندقي والسياحي، انسجامًا مع النتاجات العامة والخاصة للمبحث، ومراعاةً لمبادئ ومعايير العمليات والمحتوى العالمية في إعداد المحتوى، مثل: حل المسألة، والتبرير والبرهان، والربط، والتواصل، والتمثيل، والنمذجة، وذلك باستخدام أساليب متنوعة تشمل أسئلة تحدَّث، وفكِّر وناقش، وحل أسئلة عدة بأكثر من طريقة، لتنمية مهارات التواصل الرياضي، والتفكير الناقد لدى الطلبة، وإكسابهم مرونة التفكير.

روعي في إعداد هذا الكتاب التركيز على عرض المفهوم باستخدام الرسوم التوضيحية، والألوان، والأشكال المختلفة، مثل: تفسير الاتصال عند نقطة هندسيًا.

يتكون الكتاب من خمس وحدات موزعة على فصلين دراسيين، حيث يضم الفصل الأول ثلاث وحدات، هي: النهايات والاتصال، والتفاضل، وتطبيقات التفاضل.

أما الفصل الدراسي الثاني فيضم وحدتي التكامل وتطبيقاته، و الإحصاء والاحتمالات.

ونسأل الله العلي العظيم أن نكون قد وفّقنا في تقديم هذا الكتاب ليكون نافعًا ومفيدًا.

الفصل الدراسي الأول

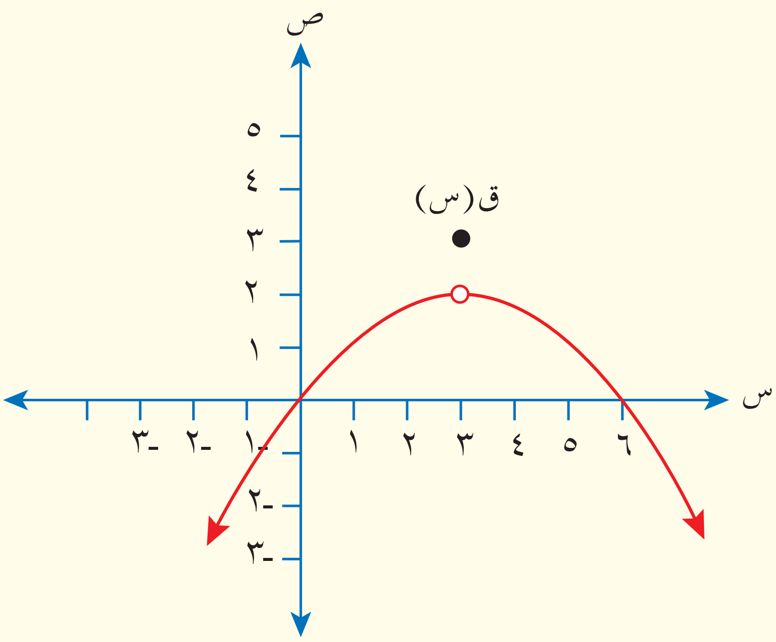
١

الوحدة الأولى

١

النهايات والاتصال

يعد التفاضل والتكامل أحد أهم محاور الرياضيات الرئيسة التي تعنى بحل المسائل التطبيقية المتنوعة في المجالات الهندسية والفيزيائية والاقتصادية. أما اللبنة الأساسية لفهم هذا المحور فتتمثل في موضوع النهايات الذي يبحث في سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير س من عدد محدد، وموضوع الاتصال الذي يصف منحنى الاقتران، والذي يبين إذا كان يوجد اتصال عند نقطة محددة أم لا، واصفًا شكل عدم الاتصال هندسيًّا.



Limits and Continuity

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تفسير مفهوم النهاية والصيغة المستخدمة في التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة.
- حساب نهاية اقتران (كثير حدود، نسبي، متشعب) بيانيًّا وجبريًّا.
- تمييز نهاية اقتران عند نقطة، وقيمته عند هذه النقطة.
- دراسة الاتصال عند نقطة للاقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات المتشعبة، والاقترانات النسبية.

الفصل الأول

النهايات Limits

النتاجات

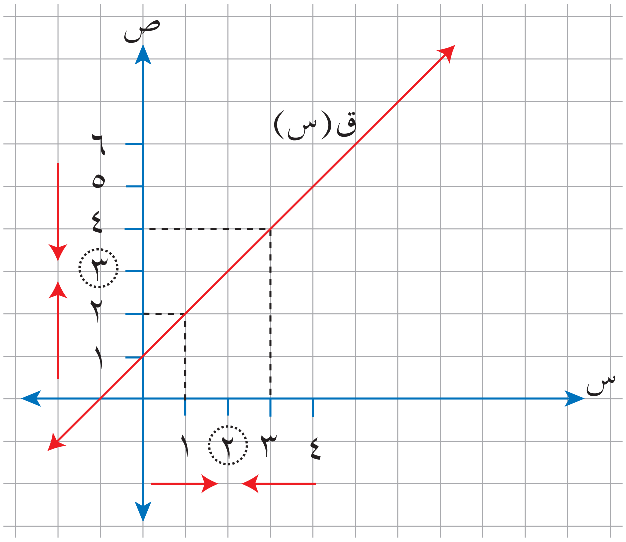
- تفسر مفهوم النهاية.
- تستخدم الرموز في التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة.
- تحسب نهاية اقتران (كثير حدود، نسبي، متشعب) بيانيًّا وجبريًّا.
- تميز نهاية اقتران عند نقطة، وقيمته عند هذه النقطة.

أولًا مفهوم النهاية Concept of Limit

اعتمادًا على الشكل (١-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = س +١، أجب عن السؤالين الآتيين:

١) ما القيمة التي يقترب منها الاقتران ق عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين؟

٢) ما القيمة التي يقترب منها الاقتران ق عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار؟



الشكل (١-١).

تعرفت في صفوف سابقة كيف تجد صورة عدد تحت تأثير اقتران معين، وستتعرف في هذا الفصل سلوك الاقتران عندما يقترب متغيره من عدد ما ، حتى لو لم يكن الاقتران معرفًا عند هذا العدد.

إذا أردت دراسة سلوك الاقتران ق(س) = س + ١ عندما تقترب س من العدد ٢، فأنشئ جدولًا تحدد فيه قيمًا للمتغير س حول العدد ٢، بحيث يكون بعضها أكبر من ٢، وبعضها الآخر أقل من ٢، ثم احسب قيم ق(س) المناظرة لها كما يأتي:

← ٢ →

س	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩	١,٥	١,١	١
ق(س)	٤	٣,٥	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩	٢,٥	٢,١	٢

← ٣ →

لاحِظ من الجدول أنه عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (أكبر من ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣، وأنه عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار (أقل من ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣، انظر الشكل (١–١).

عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (س> ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣ ، وبالرموز:

$$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = ٣$$

وتُقرَأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢ من جهة اليمين تساوي ٣.

وعندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار(س<٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد٣،وبالرموز:

$$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = ٣$$

وتُقرَأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢ من جهة اليسار تساوي ٣.

لاحِظ في هذا المثال أن:

$$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = ٣$$

إي إن ق(س) تقترب من العدد ٣ كلما اقتربت س من العدد ٢ من كلا الاتجاهين (اليسار، واليمين)، وبالرموز:

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ \text{ق (س)} = ٣$$

تعريف

ليكن ق اقترانًا معرفًا على فترة مفتوحة حول العدد أ. فإذا اقتربت قيم الاقتران ق من العدد ل عندما يقترب المتغير س من العدد أ، فإن ل هي نهاية الاقتران ق عندما تقترب س من العدد أ، وبالرموز:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$$

مثال (١)

اعتمادًا على الشكل (١-٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\dfrac{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$ ،

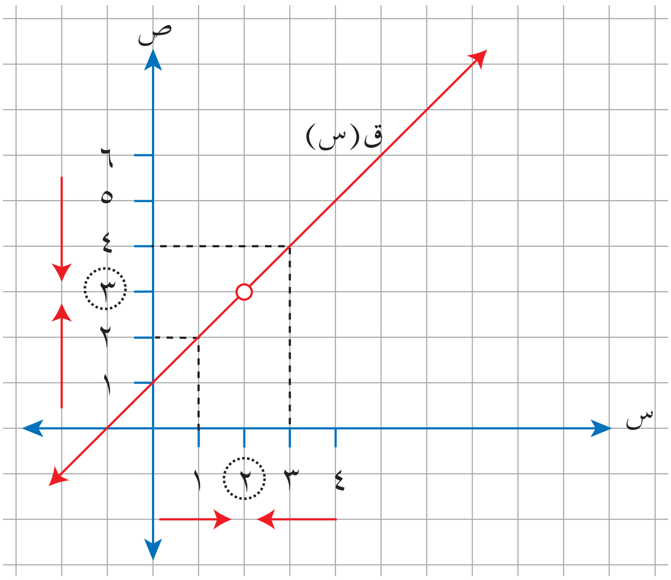
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) ق (٢)

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س)



الشكل (١-٢).

الحل

١) لاحِظ أن مجال الاقتران ق هو ح - {٢} (لماذا؟).

لذا فإن ق(س) غير معرف عندما س = ٢، وقد أشير إلى ذلك برسم دائرة صغيرة ضمن منحنى الاقتران ق عندما س = ٢

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

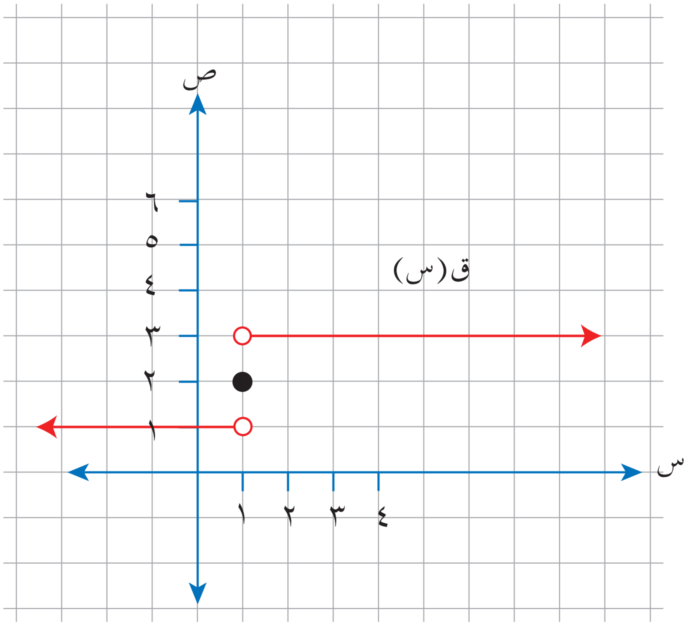
٤) لاحِظ في هذا المثال أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣؛ أي إن قيم ق(س) تقترب من العدد ٣ كلما اقتربت قيم س من العدد ٢ من كلا الاتجاهين (اليسار، واليمين)، وبالرموز:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ ق(س)} = ٣$$

مثال (٢)

اعتمادًا على الشكل (١–٣) الذي يمثل منحنى الاقتران المتشعب

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ & \text{، س} < ١ \\ ٢ & \text{، س} = ١ \\ ٣ & \text{، س} > ١ \end{cases}$$



الشكل (١–٣).

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) ق (١)

٢) $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٤) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

الحل

لاحِظ أن ق اقتران متشعب عندما س = ١ ، ومن الشكل تجد أن:

١) ق(١) = ٢

٢) $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ١

٣) $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٣

٤) بما أن $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س)، فإننا نصف سلوك منحنى الاقتران ق

عندما تقترب قيم س من العدد ١ بالقول إن **النهاية غير موجودة**،

وبالرموز: $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

وهذا يعني أنه لتكون $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة، لا بد من وجود $\underset{س\leftarrow أ^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) و $\underset{س\leftarrow أ^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق(س)،

وأن تكون $\underset{س\leftarrow أ^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) $=$ $\underset{س\leftarrow أ^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

$\underset{س\leftarrow أ^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) $=$ $\underset{س\leftarrow أ^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) $=$ ل إذا وفقط إذا كانت $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق (س) $=$ ل

أما إذا كانت $\underset{س\leftarrow أ^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س\leftarrow أ^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) فإن $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) غير موجودة.

تحدث وناقش

وضح لزميلك بالكلمات شرط وجود نهاية اقتران عند عدد محدد.

تدريب ١

اعتمادًا على الشكل (١–٤) الذي يمثل منحنى الاقتران

$$ق\,(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$$

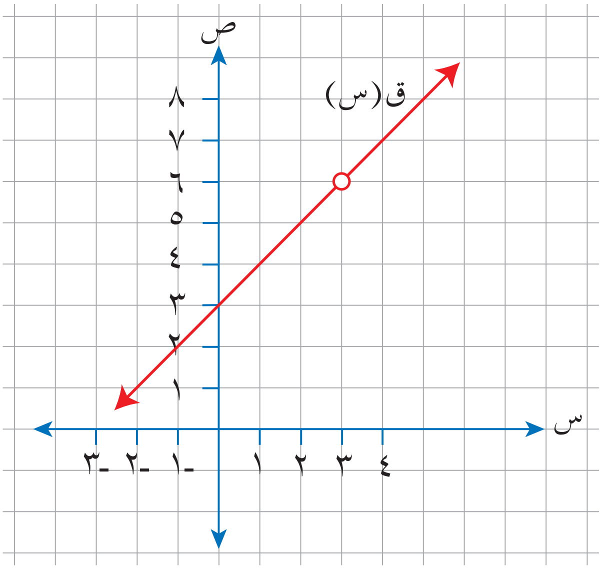
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) ق (٣)

٢) $\underset{س\leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

٣) $\underset{س\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

٤) $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ق(س)

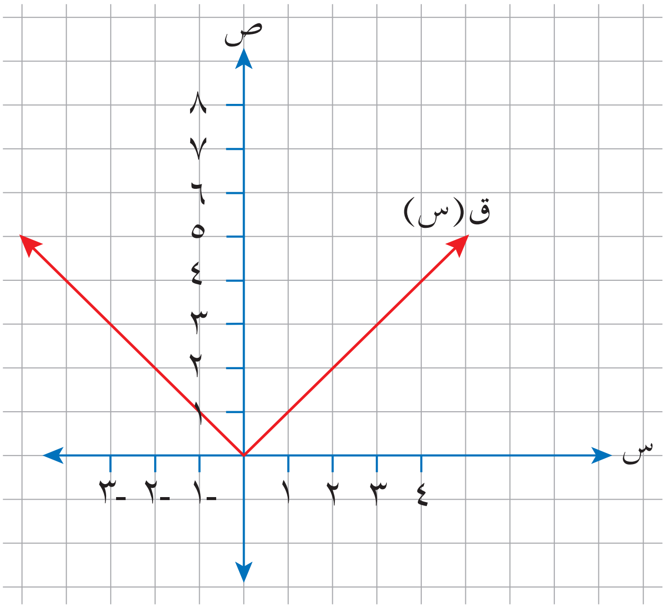


الشكل (١–٤).

مثال (٣)

اعتمادًا على الشكل (١–٥) الذي يمثل منحنى الاقتران

ق(س) = { ـس ، س < ٠
س ، س ≥ ٠ }



الشكل (١–٥).

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) ق (٠)

٢) نهـا ق(س)
س←٢

٣) نهـا ق(س)
س←٠

الحل

نلاحظ من الشكل (١–٥) أن:

١) ق (٠) = ٠

٢) نهـا ق(س) = ٢ ، نهـا ق(س) = ٢ ،
س←٢^- ، س←٢^+

∴ نهـا ق(س) = ٢
س←٢

٣) نهـا ق(س) = ٠ ، نهـا ق(س) = ٠ ،
س←٠^- ، س←٠^+

∴ نهـا ق(س) = ٠
س←٠

تدريب ٢

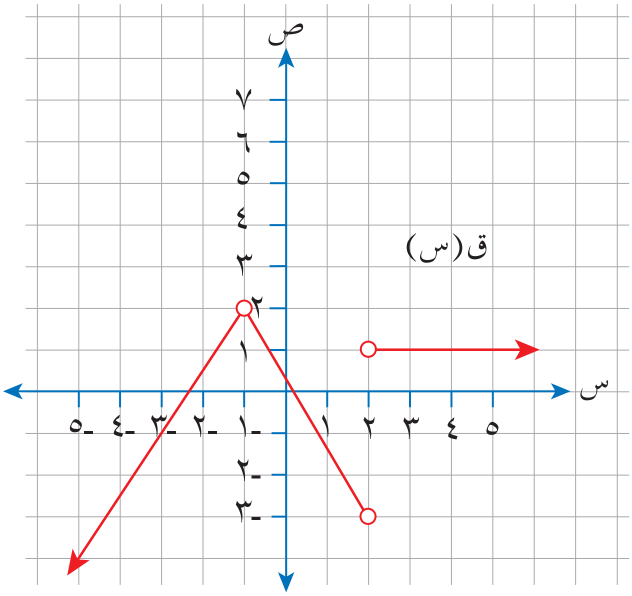
اعتمادًا على الشكل (١–٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق،

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) نهــــا ق(س)
س ← -١

٢) نهــــا ق(س)
س ← ٢

٣) نهــــا ق(س)
س ← ٣



الشكل (١–٦).

مثال (٤)

اعتمادًا على الشكل (١–٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلًّا مما يأتي:

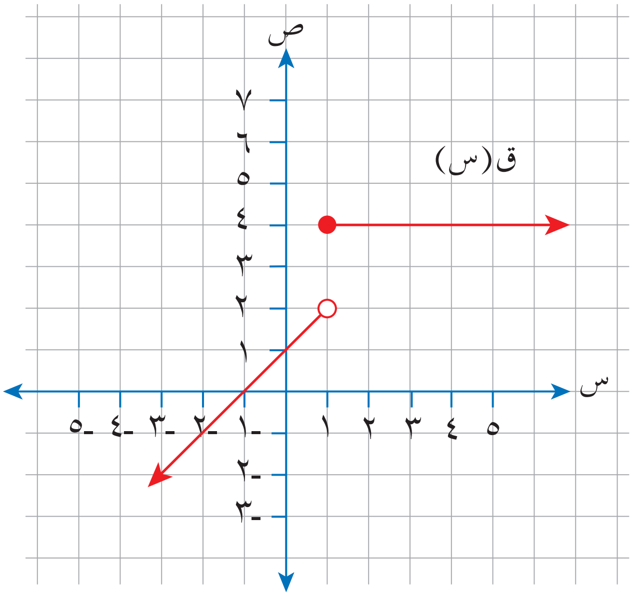
١) قيمة الثابت أ، حيث نهــــا ق(س) = -١
س ← أ

٢) قيمة الثابت ب، حيث

نهــــا ق(س) = ٠
س ← ب

٣) قيمة الثابت جـ، حيث

نهــــا ق(س) غير موجودة.
س ← جـ



الشكل (١–٧).

الحل

١) بما أن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = −١ ، فإن $\underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = −١

يتبين من الشكل (١–٧) أنه عندما تكون ق(س) ⟵ −١ فإن قيمة س تكون قد اقتربت من العدد −٢ ، إذن: أ = −٢

٢) $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهــا}}$ ق (س) = ٠

يتبين من الشكل (١–٧) أن ق(س) ⟵ ٠ عندما س ⟵ −١، ومنه فإن ب = −١

٣) $\underset{س \leftarrow جـ}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة، إذن: $\underset{س \leftarrow جـ^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow جـ^+}{\text{نهــا}}$ ق(س)

وهذا يتحقق عندما س ⟵ ١ ، إذن: جـ = ١

تدريب ٣

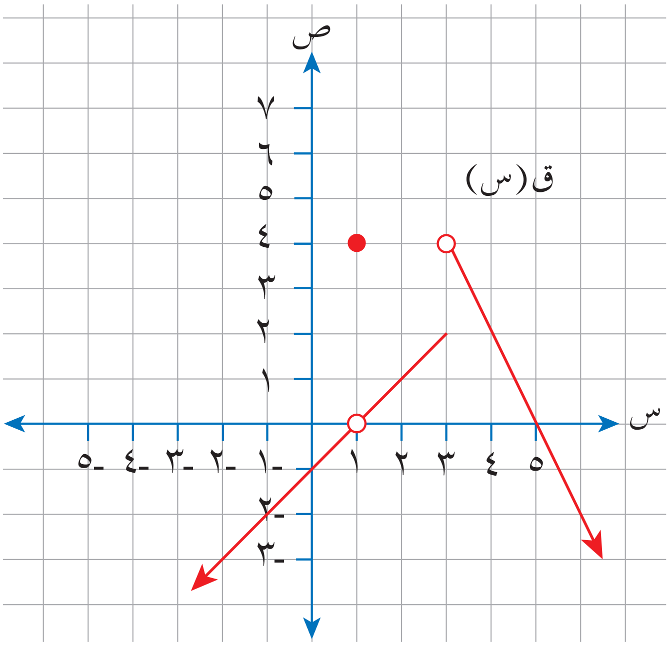
اعتمادًا على الشكل (١–٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق،

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٢) الثابت أ ، حيث $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٠

٣) الثابت ب، حيث $\underset{س \leftarrow ب}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.



الشكل (١–٨).

الأسئلة

١) اعتمادًا على الشكل (١–٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ ،

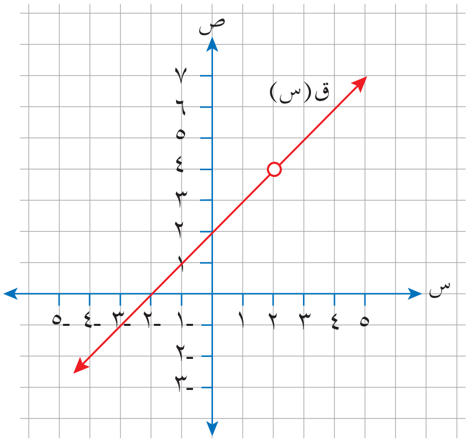
جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

جـ) ق(٣)

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س)



الشكل (١–٩).

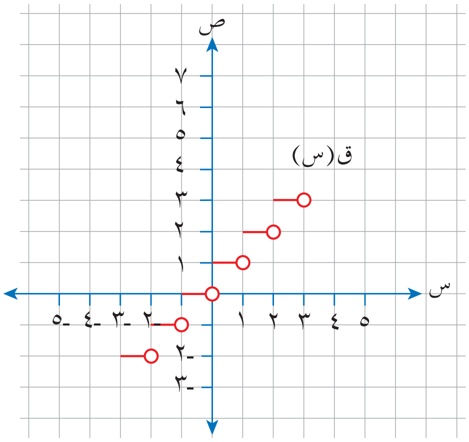
٢) اعتمادًا على الشكل (١–١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠,٥}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ^{+}٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ^{-}٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

د) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)



الشكل (١–١٠).

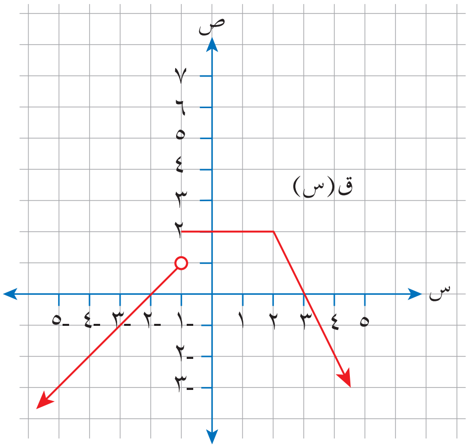
٣) اعتمادًا على الشكل (١–١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

جـ) قيمة أ، حيث $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

د) قيم ب، حيث $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ب}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = صفرًا.



الشكل (١–١١).

ثانيًا نظريات النهايات Limit Theorems

إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، وكان ل، م عددين حقيقيين، حيث:

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ (س)} = \text{م}$،

جد $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـــا}}\ \big(\text{ق(س)} + \text{هـ (س)}\big)$.

للإجابة عن هذا السؤال، يتعين الاستعانة بنظريات خاصة بالنهايات تسهل إيجاد نهاية اقتران عند نقطة، أو نهاية مجموع اقترانين، أو حاصل ضربهما، أو ناتج قسمتهما عند نقطة، من دون الحاجة إلى تمثيلها بيانيًّا.

نشاط

١) اعتمادًا على الشكل (١-١٢) الذي يمثل منحنى كثير الحدود ق(س) = ٣، أجب عما يأتي:

أ) ما درجة الاقتران ق؟ ما نوعه؟

ب) جد قيمة كل من:

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)}$

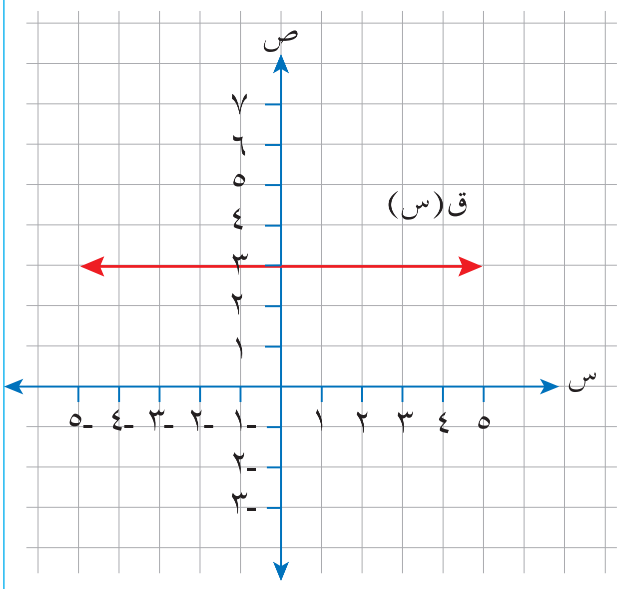
$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{\text{س}\leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)}$

جـ) جد مجموعة قيم الثابت أ، حيث

$\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق(س)} = ٣$

د) ماذا تلاحظ؟



الشكل (١-١٢).

٢) اعتمادًا على الشكل (١-١٣) الذي يمثل منحنى الاقتران هـ(س) = س، أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) ما درجة الاقتران هـ ؟ ما نوعه؟

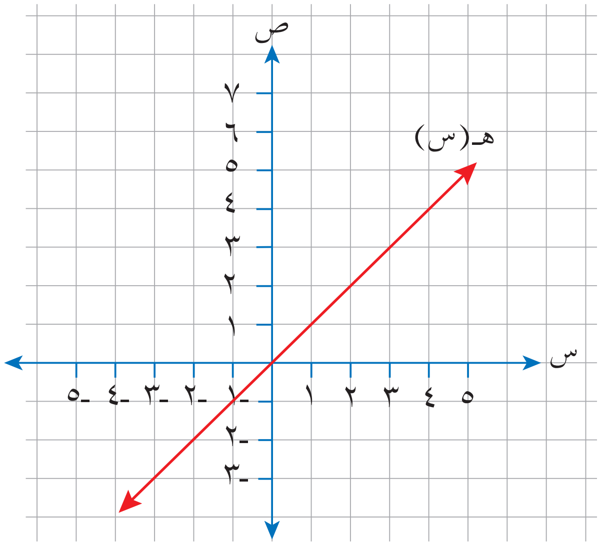
ب) جد قيمة كل من:

نهـــا هـ (س)
س←٢

نهـــا هـ (س)
س←٠

نهـــا هـ (س)
س←-٢

جـ) ماذا تلاحظ؟



الشكل (١-١٣).

نظرية (١)

إذا كان أ، جـ عددين حقيقيين، وكان:

١) ق(س) = جـ لقيم س جميعها، فإن نهـــا ق(س) = جـ
س←أ

أي إن نهـــا جـ = جـ
س←أ

٢) ق(س) = س ، فإن نهـــا ق(س) = أ
س←أ

أي إن نهـــا س = أ
س←أ

تحدث وناقش

عبِّر بالكلمات عن النظرية (١).

تساعدك النظرية السابقة على إيجاد نهاية الاقتران الثابت أو الاقتران كثير الحدود من الدرجة الأولى عند عدد معين. ولكن، كيف تجد نهاية مجموع اقترانين، أو نهاية حاصل ضربهما عند عدد ما؟

نظرية (٢)

إذا كانت أ، ل، ك، أعدادًا حقيقيةً، وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ك، فإن:

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} + \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{هـ(س)} = \text{ل} + \text{ك}$

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right) = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} - \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{هـ(س)} = \text{ل} - \text{ك}$

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}\right) = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{هـ(س)} = \text{ل} \times \text{ك}$

مثال (١)

إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٩، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = −٣، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right)$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} \times \text{هـ(س)}\right)$

الحل

١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}\right) = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} + \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{هـ(س)}$

$= ٩ + −٣ = ٦$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \text{هـ(س)} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \text{هـ(س)}$

$= ٩ \times −٣ = −٢٧$

مثال (٢)

إذا علمت أن $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} - ١) = ١$، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} + ١) = ٣$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س}^{٢} - ١)$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٢\text{س}$

الحل

١) لاحِظ أن $\text{س}^{٢} - ١ = (\text{س} - ١)(\text{س} + ١)$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س}^{٢} - ١) = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} - ١) \times \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} + ١) = ١ \times ٣ = ٣$$

٢) لاحِظ أن $٢\text{س} = (\text{س} - ١) + (\text{س} + ١)$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٢\text{س} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\big((\text{س} - ١) + (\text{س} + ١)\big)$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} - ١) + \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}(\text{س} + ١) = ١ + ٣ = ٤$$

تعلمت أن نهاية الاقتران الثابت عند عدد ما تساوي قيمة هذا الثابت، وأن نهاية حاصل ضرب اقترانين عند عدد ما تساوي حاصل ضرب نهايتي الاقترانين عند هذا العدد، فكيف تجد نهاية حاصل ضرب ثابت في اقتران عند عدد ما؟

نتيجة ١

إذا كانت أ، جـ، ل أعدادًا حقيقيةً، وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} = \text{ل}$، فإن:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{جـ ق(س)} = \text{جـ} \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} = \text{جـ} \times \text{ل}$$

يمكن تعميم الجزأين الأول والثالث من النظرية (٢) على أي عدد من الاقترانات وفق النتيجة الآتية:

نتيجة ٢

إذا كانت نهاية كل من $\text{ق}_{١}\text{(س)}$ ، $\text{ق}_{٢}\text{(س)}$، ... ، $\text{ق}_{ن}\text{(س)}$ موجودة عند س = أ، فإن:

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \left(\text{ق}_{١}\text{(س)} + \text{ق}_{٢}\text{(س)} + \ldots + \text{ق}_{ن}\text{(س)}\right)$

$$= \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق}_{١}\text{(س)} + \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق}_{٢}\text{(س)} + \ldots + \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق}_{ن}\text{(س)}$$

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \left(\text{ق}_{١}\text{(س)} \times \text{ق}_{٢}\text{(س)} \times \ldots \times \text{ق}_{ن}\text{(س)}\right)$

$$= \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق}_{١}\text{(س)} \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق}_{٢}\text{(س)} \times \ldots \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق}_{ن}\text{(س)}$$

لاحِظ من الفرع (٢) للنتيجة (٢) أن:

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \left(\text{ق(س)}\right)^{ن} = \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \underbrace{\text{ق(س)} \times \text{ق(س)} \times \ldots \times \text{ق(س)}}_{\text{ن من المرات}}$$

، حيث ن عدد طبيعي.

$$= \underbrace{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)} \times \ldots \times \underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)}}_{\text{ن من المرات}}$$

$$= \left(\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \text{ق(س)}\right)^{ن}$$

مثال (٣)

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ س^٣$ ٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (س^٣ + ٤س^٢ - ٥س - ٧)$

الحل

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ س^٣ = (\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ س)^٣ = (٣)^٣ = ٢٧$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ (س^٣ + ٤س^٢ - ٥س - ٧) = \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ س^٣ + \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤س^٢ - \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٥س - \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٧$

$= (\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ س)^٣ + ٤(\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ س)^٢ - ٥\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ س - \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٧$

$= ٨ + ١٦ - ١٠ - ٧ = ٧$

الاقتران الوارد في المثال السابق هو اقتران كثير حدود. ومن النتائج السابقة يمكن صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة ٣

إذا كان الاقتران ق كثير حدود، فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(أ)$

أي إن نهاية اقتران كثير الحدود عند عدد ما تساوي قيمته عند هذا العدد، وتحسب بالتعويض المباشر.

مثال (٤)

جد قيمة $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ (٣س^٣ + ٥س + ٧)$

الحل

بما أن ق(س) = $٣س^٣ + ٥س + ٧$ اقتران كثير حدود، فإن:

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(١) = ٣(١)^٣ + ٥(١) + ٧ = ١٥$

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س^{٦} - ٥س^{٢} + ٤س + ٩)$

٢) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (٧س^{٢} + ٥س)(س^{٢} + س - ١٠)$

٣) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٥س)^{٣}$

مثال (٥)

إذا علمت أن $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \big(ق(س) + س + ١\big) = ٩$، فجد قيمة $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \big(ق(س)\big)^{٢}$

الحل

نجد $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) أولًا.

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \big(ق(س) + س + ١\big) = ٩$$

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ق(س) + \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} س + \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ١ = ٩$$

$$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ق(س) + ٢ + ١ = ٩$$

$$\therefore \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ق(س) = ٩ - ٣ = ٦$$

لذا فإن: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \big(ق(س)\big)^{٢} = \big(\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} ق(س)\big)^{٢} = (٦)^{٢} = ٣٦$

تدريب ٢

إذا كانت $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \big(ق(س) + س^{٣} - ٣\big) = ٥$ ، فجد قيمة $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} ٣\big(ق(س)\big)^{٢}$

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥\text{س} + ١ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) ق(٢)

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

الحل

لاحِظ أن ق اقتران متشعب، ومنه:

١) ق(٢) = $(٢)^{٢}$ = ٤ (لماذا؟).

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ (٥س + ١) = ٥ × ١ + ١ = ٦

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ $\text{س}^{٢}$ = $(٣)^{٢}$ = ٩

٤) لاحِظ أن س = ٢ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران.

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ (٥س + ١) = ٥×٢ + ١ = ١١

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ $\text{س}^{٢}$ = $(٢)^{٢}$ = ٤

بما أن $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) ≠ $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)، فإن $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

نتيجة ٤

إذا كان ق اقترانًا متشعبًا، وكان الاقتران ق يتشعب عند س = أ، فإن

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) تكون موجودة إذا كانت $\underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}}$ ق(س)

تدريب ٣

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ٣ \\ ٤س - ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

جـ) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س)

د) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س + ٦ & ، س \in ص \\ ٤س + ١ & ، س \notin ص \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة،

فجد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) (إن وجدت).

مثال (٧)

إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^٣ + ١ & ، س < ٣ \\ ٢٠ & ، س = ٣ \\ أس + ١ & ، س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ هـ(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

بما أن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ هـ (س) موجودة، فإن $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهـــا}}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـــا}}$ هـ (س)

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهـــا}}$ $(س^٣ + ١)$ = $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـــا}}$ (أس + ١)

ومنه: $(٣)^٣ + ١ = ٣$أ $+ ١$

$٢٨ = ٣$أ $+ ١$

$٢٧ = ٣$أ

$\therefore$ أ $= ٩$

تدريب ٤

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥س - \text{أ} & ، س < ١ \\ \text{ب}\,س^٢ + ٧ & ، س \geq ١ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ١٦، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة، فما قيمة كل من الثابتين: أ، ب؟

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥س^٣ & ، س < \text{أ} \\ ٤٠ & ، س \geq \text{أ} \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ؟

الأسئلة

١) إذا علمت أن $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٨، $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = −٢، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \left(٤\text{ق}(س) + ٢\text{هـ}(س)\right)$

ب) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \left(\text{ق}(س) - ٢\text{هـ}(س)\right)$

جـ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \left(\text{ق}(س) \times \text{هـ}(س)\right)$

د) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}}$ ٥ق(س)

هـ) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \left(٢\text{ق}(س) + ١\right)$

و) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \left((\text{هـ}(س))^{٣} + ٣س - ٧\right)$

ز) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \left(٢\text{ق}(س) + ٣\text{هـ}(س) + ٢س + ٤\right)$

٢) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} (٣س^{٤} - ٥س^{٣} + ٦س - ٧)$

ب) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}} (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٥س - ٢)$

جـ) $\underset{س \to -١}{\text{نهــا}} (س^{٣} + ٢)^{٥}$

٣) إذا كانت $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \left(٣\text{ق}(س) + ٢س + ١\right) = ٢٧$، فجد $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}} \left(\text{ق}(س)\right)^{٣}$

٤) إذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} (م\,س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥$، فما قيمة الثابت م؟

٥) إذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & ،\ س < ٠ \\ ٥ - س^{٢} & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\underset{س \to ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

ب) $\underset{س \to -٢}{\text{نهــا}}$ ق(س)

جـ) $\underset{س \to ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٦) إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ،\ س \neq ٣ \\ ٨ & ،\ س = ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـــا}\ هـ(س)$ ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا}\ هـ(س)$ جـ) $هـ(٣)$

٧) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ\,س + ٤ & ،\ س < ٢ \\ ٥س^{٢} + أ & ،\ س \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}\ ق(س)$ موجودة، فما قيمة الثابت أ ؟

٨) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ،\ س < ٢ \\ ٥س & ،\ ٢ \leq س \leq ٦ \\ س^{٢} - ٦ & ،\ س > ٦ \end{cases}$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـــا}\ ق(س)$ ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}\ ق(س)$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٤}{نهـــا}\ ق(س)$ د) $\underset{س \leftarrow ٦}{نهـــا}\ ق(س)$

٩) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س - أ & ،\ س < ٢ \\ ١٠ & ،\ س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا}\ ق(س)$ موجودة، فجد قيمة الثابت أ ؟

ثالثًا نهاية خارج قسمة اقترانين Limit of Quotient of Two Functions

إذا كان $ق(س) = \frac{٢س + ١}{س^{٢} + ١}$ ، فما قيمة $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} ق(س)$؟

لاحِظ أن ق هو اقتران نسبي لأنه خارج قسمة اقتراني كثيري حدود، هما: $٢س + ١$، $س^{٢} + ١$، والنظريات التي درستها سابقًا لم تناقش هذه الحالة؛ لذا فإن نهاية هذا النوع من الاقترانات يمكن إيجادها باستخدام النظرية الآتية:

نظرية

إذا كانت أ، ل، ك أعدادًا حقيقيةً، وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} ق(س) = ل$، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} هـ(س) = ك$، فإن:

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} ق(س)}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ حيث $ك \neq$ صفرًا.

٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ غير موجودة ، إذا كان $ل \neq$ صفرًا ، $ك =$ صفرًا.

مثال (١)

إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} ق(س) = ٦$، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} هـ(س) = -٢$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س) + ٣س}{هـ(س) + ٢}$

الحل

١) $$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س)}{\text{هـ}(س)} = \frac{\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)}{\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)} = \frac{٦}{-٢} = -٣$$

٢) $$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(س) + ٣س}{\text{هـ}(س) + ٢} = \frac{\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) + ٣س}{\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) + ٢} = \frac{\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) + \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ ٣س}{\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) + \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ ٢}$$

$$= \frac{٦ + ٣}{-٢ + ٢} = \frac{٩}{٠}$$

∴ النهاية غير موجودة.

مثال (٢)

جد قيمة النهاية في كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{س+٣}$$

٢) $$\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{س-٥}{س+١٥}$$

٣) $$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٥}{س-١}$$

الحل

١) $$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+١}{س+٣} = \frac{\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (س^{٢}+١)}{\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (س+٣)} = \frac{٥}{٥} = ١$$

٢) $$\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{س-٥}{س+١٥} = \frac{٥-٥}{٥+١٥} = \frac{٠}{٢٠} = ٠$$

٣) عند تعويض س = ١، يتبين أن المقام يصبح مساويًا للصفر، وأن البسط = ٥؛ لذا فإن النهاية غير موجودة.

تدريب ١

جد قيمة النهاية لكل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س + ٥}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢س - ٤}{س + ٣}$

٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س + ٣}{س^{٢} - ٤}$

٤) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \dfrac{س^{٢} - ١}{س + ٣}$

في بعض الأحيان يكون ناتج التعويض المباشر بقيمة س في الاقتران النسبي صفرًا لكل من البسط والمقام، ولا تعد هذه القيمة معينة لأنها لا تساوي عددًا بعينه؛ لذا يُكتب الاقتران على صورة مكافئة باستخدام إحدى الطرائق الآتية:

التحليل إلى العوامل، الضرب في مرافق الجذر التربيعي، توحيد المقامات، ثم تُستخدم نظريات النهايات كما في الأمثلة الآتية:

مثال (٣)

جد $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥س^{٢} - ١٠س}{س - ٢}$

الحل

ناتج التعويض المباشر لكل من البسط والمقام صفر، وكل منهما كثير حدود؛ لذا نحلل البسط بإخراج ٥س عاملًا مشتركًا.

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥س^{٢} - ١٠س}{س - ٢} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٥س\,\cancelto{١}{(س - ٢)}}{\cancelto{١}{س - ٢}} = \underset{س \to ٢}{\text{نها}}\ ٥\,س = ١٠$$

لاحِظ أنه يمكن اختصار (س−٢)؛ لأنه عندما س تقترب من ٢، س−٢ ≠ صفرًا.

مثال (٤)

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ٩}$ ٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}$

الحل

١) لاحِظ أنه لا يمكن استخدام نظريات النهايات في إيجاد قيمة النهاية في الفرعين (لماذا؟).

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ٩} = \lim_{س \to -٣} \frac{\cancelto{١}{(س+٣)}(س+٢)}{\cancelto{١}{(س+٣)}(س-٣)} = \lim_{س \to -٣} \frac{(س+٢)}{(س-٣)}$$

$$= \frac{-١}{-٦} = \frac{١}{٦}$$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{س - ٢}$ (لماذا؟).

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\cancelto{١}{(س-٢)}(س^٢+٢س + ٤)}{\cancelto{١}{س-٢}} = ١٢$$

تدريب ٢

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣س}{س + ٣}$ ٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{٥س - ١٠}$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٤ + ٢٧س}{س + ٣}$ ٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٩}$

مثال (٥)

جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

الحل

بما أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \sqrt{س} - ١ = ٠$، $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} س - ١ = ٠$، فإنه لا يمكن استخدام نظريات النهايات.

ولأن مرافق $(\sqrt{س} - ١)$ هو $(\sqrt{س} + ١)$؛

فإنه يُضرب في المقدار: $\frac{(\sqrt{س} + ١)}{(\sqrt{س} + ١)}$ (لماذا؟).

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س} - ١}{س - ١} \times \frac{(\sqrt{س} + ١)}{(\sqrt{س} + ١)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\overset{١}{\cancel{س - ١}}}{\underset{١}{\cancel{(س - ١)}}\,(\sqrt{س} + ١)} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{١}{(\sqrt{س} + ١)} = \frac{١}{٢}$$

فكر وناقش

حُلَّ مثال (٥) بطريقة أخرى مستخدمًا تحليل المقدار (س − ١) فرقًا بين مربعين.

تدريب ٣

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$

٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$

مثال (٦)

جد $$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٤}$$

الحل

لا يمكن استخدام نظريات النهايات (لماذا؟).

لاحِظ أن البسط يمثل عملية طرح كسور؛ لذا يجب توحيد المقامات في البسط:

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٤} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\frac{٢ - \text{س}}{٢\text{س}}}{٢\text{س} - ٤}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{٢ - \text{س}}{٢\text{س}(٢\text{س} - ٤)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\overset{-١}{\cancel{٢ - \text{س}}}}{٤\text{س}\underset{١}{\cancel{(\text{س} - ٢)}}}$$ (لماذا (−١)؟).

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{-١}{٤\text{س}} = \frac{-١}{٨}$$

تدريب ٤

جد $$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\frac{١}{\text{س}+١} - \frac{١}{٣}}{\text{س} - ٢}$$

الأسئلة

١) إذا كانت $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٣$، $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ٩$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

ب) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{هـ(س) + ١}{ق(س) + س - ٥}$

٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

أ) $ق(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س + ٨}$ ، $س \leftarrow \text{صفر}$

ب) $هـ(س) = \frac{س^{٢} + ٥س}{س - ١}$ ، $س \leftarrow ١$

جـ) $ل(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$ ، $س \leftarrow ٤$

د) $م(س) = \frac{س^{٣} - ٢٧}{٣س^{٢} - ٩س}$ ، $س \leftarrow ٣$

هـ) $ك(س) = \frac{\frac{١}{س - ٢} - \frac{١}{٥}}{٢س - ١٤}$ ، $س \leftarrow ٧$

و) $د(س) = \frac{\sqrt{س + ١} - ٣}{س - ٨}$ ، $س \leftarrow ٨$

ز) $و(س) = \frac{س - ٧}{٣ - \sqrt{س + ٢}}$ ، $س \leftarrow ٧$

٣) إذا كان ق(س) = س، فجد $\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \text{ق}(٩)}{\text{س} + ٣}$

٤) إذا علمت أن $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −٧، $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ٢، فبيِّن أن:

$$\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{هـ}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س}) + \text{س} + ٧} = -٤$$

٥) إذا كان ق(س) = $\dfrac{١}{\text{س} - ٢}$ ، فجد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

٦)* جد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

رابعًا نهاية اقتران الجذر النوني Limit of nth Root Function

إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = -٨$ ، فجد $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\text{ق(س)}} + \text{س} + ٢$

يمكن الإجابة عن السؤال السابق باستخدام النظرية الآتية:

نظرية

إذا كان أ ، ل عددين حقيقيين، وكان ن عددًا طبيعيًّا، وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$، فإن:

$$\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ل}}$$

وإذا كان ن عددًا زوجيًّا فإنه يُشترط أن تكون $\text{ل} > \text{صفر}$.

يمكن القول إن نهاية الجذر النوني لاقتران عند عدد ما تساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران عند هذا العدد، وإنه إذا كان ن عددًا زوجيًّا وجب أن تكون نهاية الاقتران موجبة.

مثال (١)

إذا كان $\text{ق(س)} = \sqrt[٣]{\text{س} + ٣}$ ، $\text{هـ(س)} = \sqrt{\text{س} + ٣}$ ، فما قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow -١١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}$

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow -٨}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)}$

الحل

١) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\text{س} + ٣} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

٢) $\underset{\text{س}\to -١١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to -١١}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\text{س} + ٣} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{س} + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

٤) لاحِظ أن ن = ٢ (عدد زوجي)، $\underset{\text{س}\to -٨}{\text{نهـا}}\ (\text{س} + ٣) = -٥$ (قيمة سالبة)

$\therefore$ $\underset{\text{س}\to -٨}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = \underset{\text{س}\to -٨}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{س} + ٣}$ غير موجودة؛ نظرًا إلى عدم وجود جذر تربيعي حقيقي للعدد السالب.

مثال (٢)

إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٦٤$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{ق(س)}}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\text{ق(س)}}$

الحل

١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \sqrt{\text{ق(س)}} = \sqrt{\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}} = \sqrt{٦٤} = ٨$

٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\text{ق(س)}} = \sqrt[٣]{\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}} = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

تدريب ١

إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٢٤$، $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = ٨$، فجد قيمة ما يأتي (إن وجدت):

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \left(\sqrt{\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}} + \text{س هـ(س)}\right)$

تنص النظرية على أنه إذا كان ن عددًا زوجيًّا، و $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) > صفر، فإن:

$\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}} \sqrt[ن]{\text{ق(س)}}$ تكون موجودة. ولكن، ماذا لو كانت $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٠؟

إذا كان ق (س) = س − ٥، فإن $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ٠

لاحِظ أن $\underset{س\leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٥} = ٠$ (لماذا؟).

في حين $\underset{س\leftarrow ٥^{-}}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٥}$ غير موجودة (لماذا؟).

وبما أن $\underset{س\leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٥} \neq \underset{س\leftarrow ٥^{-}}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٥}$ ، فإن $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٥}$ غير موجودة.

وبوجه عام:

إذا كانت $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = صفرًا، وكان ن عددًا زوجيًّا، فإن:

$\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـــا}} \sqrt[ن]{\text{ق(س)}} = ٠$ إذا كان ق(س) > ٠ من جهتي اليمين واليسار عند (س = أ)،

وتكون غير موجودة إذا كان ق(س) < ٠ على إحدى جهتي (س = أ)، أو كلتيهما.

مثال (٣)

جد قيمة كل نهاية من النهايات الآتية (إن وجدت):

١) $\underset{س\leftarrow ٩^{+}}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٩}$

٢) $\underset{س\leftarrow ٩^{-}}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٩}$

٣) $\underset{س\leftarrow ٩}{\text{نهـــا}} \sqrt{\text{س} - ٩}$

٤) $\underset{س\leftarrow ٩}{\text{نهـــا}} \sqrt[٤]{(\text{س} - ٩)^{٢}}$

الحل

١) إذا كان $س \to ٩^+$، فإن س − ٩ > ٠، ومنه: $\underset{س \to ٩^+}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ٩} = ٠$

٢) إذا كان $س \to ٩^-$، فإن س − ٩ < ٠، ومنه: $\underset{س \to ٩^-}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ٩}$ غير موجودة.

٣) بما أن $\underset{س \to ٩^-}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ٩}$ غير موجودة، فإن $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ٩}$ غير موجودة.

٤) لاحِظ أن $(س - ٩)^٢ > ٠$ عندما تكون س > ٩، وعندما تكون س < ٩

ومنه: $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{(س - ٩)^٢} = ٠$

تدريب ٢

جد نهاية كل اقتران من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{٢س + ١}$

٢) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \sqrt{س^٢}$

٣) $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{س - ١}$

٤) $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}} \sqrt{س - ١}$

٥) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{س - ١}$

٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \sqrt{٢س}$

فكر وناقش

ادَّعى خالد أنه إذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = صفرًا، فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \sqrt[ن]{ق(س)}$ تكون دائمًا غير موجودة. ناقِش صحة ادّعائه معززًا إجابتك بالأمثلة.

الأسئلة

١) إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −٦٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{ق(س)}$

ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{ق(س)}$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{ق(س)} + س^{٢} + ٥س − ٣ \right)$

د) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٥]{\frac{ق(س)}{٢}} + س − ٥ \right)$

٢) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{س − ٣}$

ب) $\underset{س \leftarrow −٥}{\text{نهـا}} \left(\sqrt[٣]{٣ − س} + س^{٢} − ٤ \right)$

جـ) $\underset{س \leftarrow −٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٤ − س^{٢}}$

د) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{٤ − س^{٢}}$

الفصل الثاني

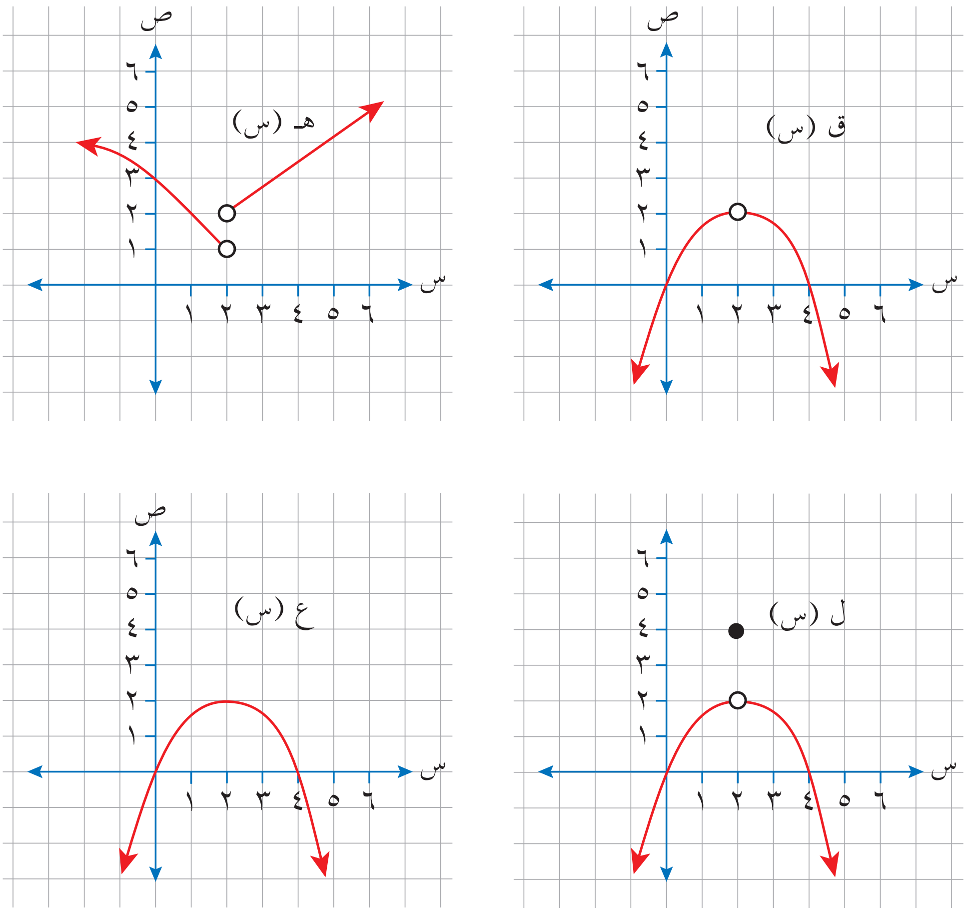
الاتصال Continuity

النتاجات

- تفسر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا.
- تبحث اتصال اقتران كثير حدود، ومتشعبًا، ونسبيًّا عند نقطة.
- تطبق نظريات الاتصال في بحث الاتصال عند نقطة لمجموع اقترانين، أو الفرق بينهما، أو حاصل ضربهما.
- تحدد نقاط عدم الاتصال لاقترانات نسبية.

أولًا الاتصال عند نقطة Continuity at a Point

تأمَّل الشكل (١-١٤)، ثم أجب عن السؤال الذي يليه:



الشكل (١-١٤).

ماذا تلاحظ على منحنيات الاقترانات: ق، هـ، ل، م؟

يتبين من الشكل (١–١٤) أن:

- الاقتران ق غير معرف عندما س = ٢، فظهر انقطاع على صورة **ثقب** في منحنى الاقتران ق عندما س = ٢
- $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ هـ (س) غير موجودة؛ لأن $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^-}{\text{نهــــا}}$ هـ (س) ≠ $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^+}{\text{نهــــا}}$ هـ (س)، فظهرت **قفزة** في منحنى الاقتران هـ عندما س = ٢
- $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ ل(س) ≠ ل(٢)؛ لذا ظهرت **فجوة** في منحنى الاقتران ل عندما س = ٢
- ع(٢) = ٢، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ ع (س) موجودة، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــــا}}$ ع (س) = ع (٢)، ولم يظهر انقطاع في منحنى الاقتران ع؛ لذا يوصف الاقتران ع بأنه **متصل** عندما س = ٢

وَصْف عدم الاتصال في منحنى الاقتران بأنه ثقب، أو قفزة، أو فجوة يمثل التفسير الهندسي لعدم الاتصال في المنحنى عند قيمة س المحددة.

تعريف

يكون الاقتران ق **متصلًا** عندما س = أ، إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

١) الاقتران ق معرف عندما س = أ ؛ أي إن ق(أ) عدد حقيقي.

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نهــــا}}$ ق(س) موجودة.

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نهــــا}}$ ق(س) = ق (أ).

أما إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من هذه الشروط، فإن الاقتران ق يكون **غير متصل** عندما س = أ .

فكر وناقش

هل الاقتران كثير الحدود متصل دائمًا عندما س = أ، حيث أ عدد حقيقي؟ برِّر إجابتك.

مثال (١)

إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٢ \\ ٥\,\text{س} - ٥ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل

الاقتران ق اقتران متشعب عندما س = ٢

١) ق معرف عندما س = ٢ ، $\text{ق}(٢) = ٥ \times ٢ - ٥ = ٥$

٢) $\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٢} + ١) = (٢)^{٢} + ١ = ٥$

$\underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ (٥\text{س} - ٥) = ٥ \times ٢ - ٥ = ٥$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٥$

٣) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢) = ٥$

بما أن الاقتران ق حقق شروط الاتصال جميعها عندما س = ٢، فإن الاقتران ق متصل عندما س = ٢

تدريب ١

إذا كان ق(س) =
- $س^{٢} + ٢$ ، س < ١
- ٣س ، ١ ≤ س < ٣
- $س^{٣} - ١٨$ ، س > ٣

فابحث اتصال الاقتران ق عند كل مما يأتي:

١) س = ٠　　　　٢) س = ١　　　　٣) س = ٣

مثال (٢)

إذا كان هـ (س) =
- س + ٣ ، س ≠ −١
- ٤ ، س = −١

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = −١

الحل

١) هـ معرف عندما س = −١ ، هـ (−١) = ٤

٢) $\underset{س \leftarrow -١}{نهــا}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow -١}{نهــا}$ (س + ٣) = −١ + ٣ = ٢

٣) $\underset{س \leftarrow -١}{نهــا}$ هـ (س) ≠ هـ (−١)

∴ الاقتران هـ غير متصل عندما س = −١

تدريب ٢

إذا كان ق(س) =
- $\frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢
- ٤ ، س = ٢

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

مثال (٣)

$$\text{إذا كان ق (س)} = \begin{cases} \text{أ س} + ٧ & ، \text{س} \le ٣ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

وكان ق متصلًا عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

بما أن ق متصل عندما س = ٣ (القيمة التي يتشعب عندها الاقتران)، فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$

موجودة؛ أي إن:

$$\lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق(س)}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^-} (\text{أ س} + ٧) = \lim_{\text{س} \to ٣^+} (\text{س} + ١)$$

$$٣\text{أ} + ٧ = ٣ + ١$$

$$٣\text{أ} + ٧ = ٤$$

$$٣\text{أ} = -٣$$

$$\therefore \text{أ} = -١$$

مثال (٤)

$$\text{إذا كان ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^٣ + ١٠ & ، \text{س} \ne ٢ \\ \text{أ س}^٢ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$$

وكان ق متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

بما أن ق متصل عندما س = ٢ (القيمة التي يتشعب عندها الاقتران)، فإن

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق (٢).

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (س^{٣} + ١٠) = ٢أ^{٢}

٢^{٣} + ١٠ = ٢أ^{٢}

١٨ = ٢أ^{٢}

٩ = أ^{٢}

∴ أ = ٣، −٣

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٢أس + ب} & \text{، س < ٢} \\ \text{٨} & \text{، س = ٢} \\ \text{أس}^{٢} \text{ + ٣ب س} & \text{، س > ٢} \end{cases}$

وكان ق متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ ، ب.

الحل

بما أن الاقتران ق متصل عندما س = ٢، فإن $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(٢)

∴ $\underset{س\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(٢)، ومنه: $\underset{س\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ (٢أس + ب) = ق(٢)

أي إن: ٤أ + ب = ٨ .... (١)

وأيضًا $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(٢)، ومنه: $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ (أس^{٢} + ٣ب س) = ق(٢)،

أي إن: ٤أ + ٦ب = ٨ .... (٢)

ولإيجاد قيمة كل من: أ، ب، يمكن استخدام طريقة الحذف والتعويض لحل النظام المكون من المعادلتين: (١) و (٢) الخطيتين بمتغيرين.

٤أ + ب = ٨
− (٤أ + ٦ب = ٨)
−٥ ب = ٠

بالتعويض في المعادلة (١):

∴ ب = ٠
٤ أ + ٠ = ٨
∴ أ = ٢

تدريب ٣

١) إذا كان ق (س) = {
٢س^{٣} + ٤ ، س < −٢
أ س + ٦ ، س ≥ −٢

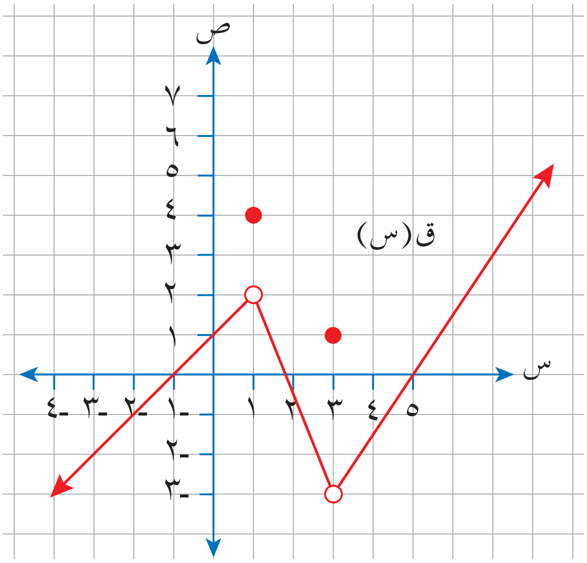
وكان الاقتران ق متصلاً عندما س = −٢، فجد قيمة الثابت أ.

٢) إذا كان ق(س) = {
أس + ٣ ، س < ١
٧ ، س = ١
س − ب ، س > ١

وكان ق متصلاً عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

الأسئلة

١) اعتمادًا على الشكل (١–١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل.



الشكل (١–١٥).

٢) إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س < ١ \\ ٢س & ، س \geq ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

٣) إذا كان هـ (س) =
$$\begin{cases} \frac{٥}{س + ١} & ، س \neq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

٤) إذا علمت أن ق (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، س < -١ \\ ٥ - س & ، -١ \leq س < ١ \\ س^{٣} + ٣ & ، س \geq ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما:

أ) س = ١ ب) س = −١

٥) إذا كان ق (س) =
$$\begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ م س + ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت م.

٦) إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \text{س} + \text{أ} & ، \quad \text{س} < ٢ \\ ٨ & ، \quad \text{س} = ٢ \\ \text{ب س} + ٦ & ، \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$

وكان الاقتران هـ متصلًا عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ ، ب.

٧) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \text{أ س} - \text{ب} & ، \quad \text{س} < ١ \\ ٤ & ، \quad \text{س} = ١ \\ \text{أ س}^{٣} + \text{ب} + ٢ & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ل متصلا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

٨) إذا كان الاقتران ق متصلًا عندما س = ٢، وكانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}$ ٢ق(س) + س = ٦ ، فجد قيمة ق(٢).

ثانيًا نظريات الاتصال Continuity Theorems

إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين عندما س = أ :

١) هل (ق + هـ) (س) متصل عندما س = أ ؟

٢) هل (ق× هـ) (س) متصل عندما س = أ ؟

٣) هل ($\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$) (س) متصل عندما س = أ، حيث هـ (أ) ≠ ٠؟

للإجابة عن هذه الأسئلة، يمكنك الاستعانة بالنظرية الآتية:

نظرية

إذا كان الاقترانان ق، هـ متصلين عندما س = أ، فإن:

١) ق + هـ متصل عندما س = أ

٢) ق − هـ متصل عندما س = أ

٣) ق × هـ متصل عندما س = أ

٤) $\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}$ متصل عندما س = أ ، إذا كان هـ (أ) ≠ ٠ .

مثال (١)

إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٥س ، هـ (س) =

$$\begin{cases} ٥\text{س} ، & \text{س} \leq ٠ \\ \text{س}^{٢} ، & \text{س} > ٠ \end{cases}$$

وكان ل(س) = (ق × هـ) (س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠ .

الحل

نستخدم نظريات الاتصال:

١) نبحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٠ .

ق اقتران كثير حدود متصل لكل قيم س؛ لذا فهو متصل عندما س = ٠ .

٢) نبحث اتصال الاقتران هـ عندما $\text{س} = ٠$

$$\text{هـ}(٠) = ٥ \times ٠ = ٠$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـــا}}\ (٥\text{س}) = ٥ \times ٠ = ٠$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـــا}}\ \text{س}^٢ = (٠)^٢ = ٠$$

بما أن $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س})$، فإن $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س}) =$ صفرًا.

وأيضًا $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{هـ}(٠) = ٠$

∴ هـ(س) اقتران متصل عندما $\text{س} = ٠$

٣) الاقتران ل متصل عندما $\text{س} = ٠$ ؛ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين عندما $\text{س} = ٠$

فكر وناقش

حُلَّ المثال (١) بطريقة أخرى.

تدريب ١

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٢$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & ،\ \text{س} \leq ٣ \\ ٥ - \text{س} & ،\ \text{س} > ٣ \end{cases}$

فابحث اتصال (ق + هـ) عندما $\text{س} = ٣$

لاحِظ أن نظريات الاتصال تشترط أن يكون كل من الاقترانين متصلًا عند النقطة. فماذا لو كان أحد الاقترانين أو كلاهما غير متصل عند هذه النقطة؟

للإجابة عن هذا السؤال، نفذ النشاط الآتي:

نشاط

١) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} -٣ \text{ ، } & \text{س} \le ٢ \\ ٣ \text{ ، } & \text{س} > ٢ \end{cases}$

أ) ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

ب) ابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٢

جـ) جد حاصل ضرب الاقترانين ق، هـ مفترضًا أن م(س) = ق(س) × هـ (س)

د) ابحث اتصال الاقتران م عندما س = ٢

٢) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٥\text{ س} + ٣$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٨ \text{ ، } & \text{س} \le ٣ \\ \text{س} \text{ ، } & \text{س} > ٣ \end{cases}$

أ) ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣

ب) ابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ٣

جـ) جد ناتج جمع الاقترانين ق، هـ مفترضًا أن ل(س) = ق(س) + هـ (س)

د) ابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٣

يتبين من النشاط السابق أنه لا يمكن استخدام نظريات الاتصال إذا كان أحد الاقترانين –على الأقل– غير متصل عندما س = أ؛ لذا نجري العملية المطلوبة على الاقترانين أولًا، ثم نبحث في شروط الاتصال عندما س = أ للاقتران الناتج.

مثال (٢)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١٥$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} \text{ ، } & \text{س} < ٥ \\ ٣\text{س} \text{ ، } & \text{س} \ge ٥ \end{cases}$

م(س) = (ق – هـ) (س)، فابحث اتصال الاقتران م عندما س = ٥

الحل

نستخدم نظريات الاتصال، فنبحث اتصال كل من الاقترانين ق، هـ عندما س = ٥:

١) ق(س) اقتران كثير حدود متصل لكل قيم س؛ لذا فهو متصل عندما س = ٥

٢) هـ(٥) = ٢٥

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{س}^{٢} = ٢٥$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهــا}}\ ٣\text{س} = ١٥$$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س) غير موجودة عندما س} = ٥$$

وهذا يعني أن هـ غير متصل عندما س = ٥؛ لذا لا يمكن استخدام نظريات الاتصال، ويتعين إيجاد م(س) = (ق − هـ) (س):

$$\text{(ق − هـ) (س)} = \begin{cases} (\text{س}^{٢} + ١٥) - \text{س}^{٢} & \text{، س} < ٥ \\ (\text{س}^{٢} + ١٥) - ٣\text{س} & \text{، س} \geq ٥ \end{cases}$$

$$\therefore \quad \text{م(س)} = \begin{cases} ١٥ & \text{، س} < ٥ \\ \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١٥ & \text{، س} \geq ٥ \end{cases}$$

والآن، يجب بحث اتصال الاقتران م عندما س = ٥:

$$\text{م(٥)} = (٥)^{٢} - ٣ \times ٥ + ١٥ = ٢٥$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{م(س)} = ١٥ \text{ ، } \underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{م(س)} = ٢٥$$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهــا}}\ \text{م(س) غير موجودة؛ لهذا فإن م غير متصل عندما س} = ٥$$

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥ ، هـ(س) =

$$\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٦ & \text{، س} \le -١ \\ ٣٥ - \text{س} & \text{، س} > -١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س) عندما س = −١

تعرفت أن الاقتران النسبي هو ناتج قسمة اقتراني كثيري حدود. وباستخدام الجزء الرابع من نظريات الاتصال يمكن التوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة

الاقتران النسبي هو اقتران متصل لقيم س جميعها باستثناء أصفار مقامه.

مثال (٣)

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

١) ق(س) = س^{٢} + ٥س + ١

٢) هـ(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ٣}$

٣) ل(س) = $\dfrac{٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحل

١) ق اقتران كثير حدود متصل لقيم س جميعها؛ لذا لا يوجد له نقاط عدم اتصال.

٢) هـ اقتران نسبي متصل لقيم س جميعها باستثناء أصفار مقامه؛ لذا نجد أصفار مقامه:

س − ٣ = ٠ ← س = ٣

∴ هـ غير متصل عندما س = ٣

٣) ل اقتران نسبي:

$\text{س}^{٢} - ١ = ٠$

$\text{س}^{٢} = ١ \leftarrow \text{س} = ١، -١$

$\therefore$ ل غير متصل عندما س = ١ ، س = −١

تدريب ٣

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ٨$

٢) $\text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦}$

٣) $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{٥ - \text{س}}{\text{س}^{٣} - ١}$

الأسئلة

١) إذا كان $ق(س) = ٥س^٢ + ٥س - ١$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س + ٩ & ،\ س \leq ٢ \\ ٥س + ١ & ،\ س > ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س)$، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $س = ٢$

٢) إذا كان $ق(س) = ٥س^٢ + ٤$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س + ٤ & ،\ س < ٠ \\ ٤ - س^٣ & ،\ س \geq ٠ \end{cases}$

وكان $ل(س) = (ق \times هـ)(س)$، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $س = ٠$

٣) إذا كان $ق(س) = س^٢ - ٩$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س & ،\ س < ٣ \\ ٠ & ،\ س = ٣ \\ -س & ،\ س > ٣ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$، فبين أن ل(س) متصل عندما $س = ٣$

٤) إذا كان (ق + هـ) (س) متصلًا عندما س = أ، فهل نستنتج أن كلًّا من ق، هـ متصل عندما س = أ ؟ برِّر إجابتك.

٥) جد قيم س (إن وجدت) التي **لا** يكون عندها كل اقتران **مما** يأتي متصلًا:

أ) $ق(س) = س^{٣} + ١$

ب) $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

جـ) $ل(س) = \frac{س + ٢}{س^{٢} - ١} + \frac{٥}{س}$

د) $$م(س) = \begin{cases} س^{٣} + ٣ & ، \quad س < ٢ \\ ٦ - س & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$$

أسئلة الوحدة

١) اعتمادًا على الشكل (١-١٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي:

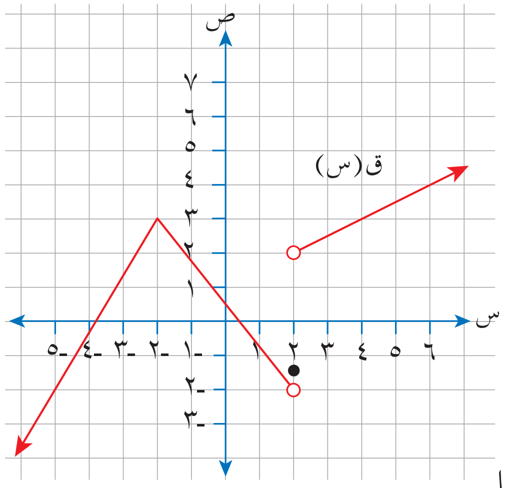
أ) $\text{ق}(٢)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س})$

د) قيم س التي يكون عندها منحنى الاقتران ق غير متصل

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left((\text{ق}(\text{س}))^{٢} - \text{س} + ٢ \right)$



الشكل (١-١٦).

٢) إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س}))^{٣} + ٢ = ٢٩$، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{س}) = -٣$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{هـ}(\text{س}) + \text{س} \right)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) \right)$

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب} & ، \text{س} < ١ \\ ٧ & ، \text{س} = ١ \\ \text{س}^{٢} - ٤\text{ب} - ٦ & ، \text{س} > ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٣ - \text{س}} + \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} + ١}$ ، $\text{س} \leftarrow -١$

ب) $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{٢\text{س} - ١٠}$ ، $\text{س} \leftarrow ٥$

جـ) $ل(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ١}{١٢ - ٣س}$ ، $س \to ١$

د) $م(س) = \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ، $س \to ٣$

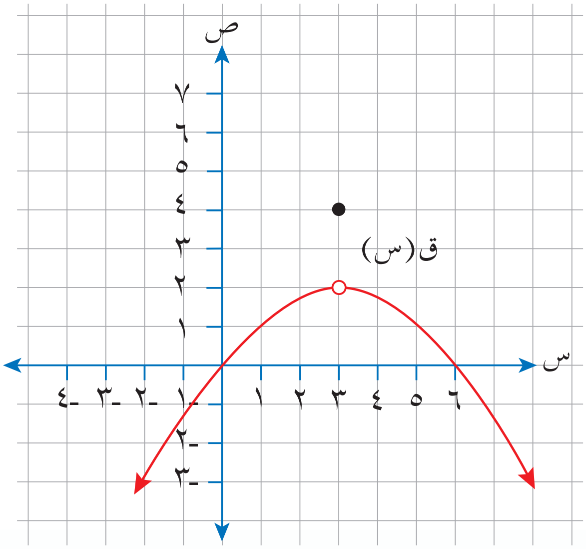
هـ) $ك(س) = \frac{\frac{١}{س - ٢} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٨}$ ، $س \to ٤$

و) $د(س) = \frac{\sqrt{٣س + ٤} - ٥}{س^{٢} - ٤٩}$ ، $س \to ٧$

٥) إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٥س$ ، $هـ(س) = \begin{cases} ٥س + ٤ & ، س \leq ١ \\ ٨ + س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$

وكان $ل(س) = (ق + هـ)(س)$ ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $س = ١$

٦) اعتمادًا على الشكل (١–١٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ابحث اتصال الاقتران ق عندما $س = ٣$



الشكل (١–١٧).

٧) إذا كان كل من الاقترانين: ق ، هـ متصلا عندما $س = ٥$، وكان $هـ(٥) = ٤$،

$\lim_{س \to ٥} \frac{ق(س) + س}{٣ هـ(س)} = ١$، فجد ق(٥).

٨) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} + \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ ، فما قيم س التي **لا** يكون عندها الاقتران ق متصلًا؟

٩) يتكون هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان م عددًا ثابتًا، وكان $\lim\limits_{\text{س} \to ١} (\text{م}\,\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥) = ٥$ ، فإن قيمة م هي:

أ) ١ ب) -١ جـ) ٤ د) -٤

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} (\text{س}^{٢} - ٤)^{٣}$ تساوي :

أ) -١٢٥ ب) -٢٧ جـ) ١٢٥ د) ٢٧

(٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$، فإن قيم س التي **لا يكون** عندها الاقتران ق متصلًا هي:

أ) $\{٥، ٠\}$ ب) $\{-٥، ٠\}$ جـ) $\{١، ٢\}$ د) $\{-١، -٢\}$

(٤) إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & ،\ \text{س} < ٢ \\ ٣ & ،\ \text{س} = ٢ \\ \text{س}^{٢} & ،\ \text{س} > ٢ \end{cases}$ ، فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{هـ}(\text{س}) =$

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ١ د) غير موجودة

(٥) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (٣\,\text{ق}(\text{س})) = ٩$، فإن قيمة $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} (\text{ق}(\text{س}))^{٢}$:

أ) ٩ ب) ٨١ جـ) ٢٧ د) ٢

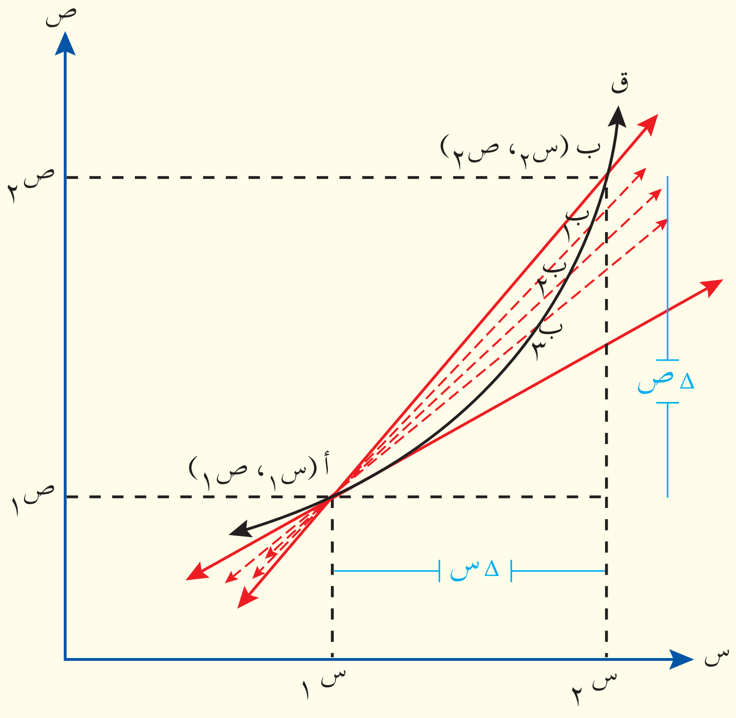
الوحدة الثانية

٢

التفاضل

نلاحظ في حياتنا وجود مقادير ثابتة وأخرى متغيرة، وقد تعرفت ظواهر متغيرة يؤدي التغير فيها إلى تغير في ظاهرة أخرى تعتمد عليها.

تتناول هذه الوحدة مفهوم معدل التغير هندسيًّا وفيزيائيًّا، وربطه بمشتقة الاقتران، فضلًا عن قواعد متنوعة في الاشتقاق لإيجاد مشتقات اقترانات مختلفة.



Differentiation

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تفسير مفهوم معدل التغير هندسيًّا وفيزيائيًّا.
- تعريف المشتقة الأولى للاقتران.
- إيجاد مشتقة الاقتران باستخدام التعريف وقواعد الاشتقاق.
- استخدام قاعدة السلسلة في إيجاد المشتقة.
- إيجاد مشتقات الاقترانات: $س^{ن}$ ، جاس، جتاس، ظاس.
- إيجاد المشتقات العليا لاقترانات حتى المشتقة الثانية.

الفصل الأول

المشتقة The Derivative

النتاجات

- تتعرف معدل التغير.
- تحسب معدل التغير، وتطبقه عند حل المسائل.
- تفسر معدل التغير هندسيًا وفيزيائيًا.
- تحسب السرعة المتوسطة.
- تجد قيمة مشتقة الاقتران الأولى عند نقطة باستخدام تعريف المشتقة.
- تجد مشتقة الاقتران الأولى باستخدام تعريف المشتقة.

أولًا معدل التغير Rate of Change

في عام ٢٠٠٥ م بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية (٢٠٠٠٠) دينارٍ، وفي عام ٢٠١٢م حققت الشركة أرباحًا قدرها (٣٤٠٠٠) دينار. ما قيمة التغير في ربح الشركة في أثناء هذه المدة؟ وما معدل التغير السنوي في أرباحها؟

نتعامل في حياتنا اليومية مع ظواهر عدة، منها الثابت مثل: درجة غليان الماء في ظروف معينة، وعدد أيام الأسبوع، ومنها المتغير مثل: درجات الحرارة خلال ساعات النهار، والمسافة المقطوعة، والسرعة والزمن. وتمتاز الظواهر المتغيرة بالزيادة أو بالنقصان.

يُعرف **مقدار التغير في س** بأنه الفرق بين قيمتي س عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ ويُرمَز إليها بالرمز Δس ، وتُقرَأ : (دلتا س)؛ أي إن:

$$\Delta س = س_٢ - س_١$$

ومنه فإن : $س_٢ = س_١ + \Delta س$

مثال (١)

جد Δس في ما يأتي:

١) س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٣

٢) س$_{١}$ = ٤,٨ ، س$_{٢}$ = ١,٧

الحل

١) Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$

= ٣ − ١ = ٢

٢) Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$

= ١,٧ − ٤,٨ = −٣,١

فكر وناقش

ما دلالة الإشارة في مقدار التغير في س؟

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = ٢س + ٥، وتغيرت س من صفر إلى ٣، فما مقدار التغير في س؟

الحل

Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$

= ٣ − ٠ = ٣

يتبين من المثال السابق أنه:

إذا كانت س$_{١}$ = صفرًا، فإن ق(س$_{١}$) = ق(٠) = ٢(٠) + ٥ = ٥،

وإذا كانت س$_{٢}$ = ٣، فإن ق(س$_{٢}$) = ق(٣) = ٢(٣) + ٥ = ٦ + ٥ = ١١

لاحِظ أن التغير في س يرافقه تغير في ق(س)، وأنه يُرمَز إلى التغير في ق(س) بالرمز Δق(س)، ويساوي ق(س$_{٢}$) − ق(س$_{١}$)؛ أي إن:

$$\Delta ق(س) = ق(س_{٢}) - ق(س_{١})$$

إذا رمزنا إلى ق(س) بالرمز ص، وإلى المقدار ق(س$_{١}$) بالرمز ص$_{١}$، وإلى المقدار ق(س$_{٢}$) بالرمز ص$_{٢}$ فإن:

$$\Delta ق(س\ ) = ق(س_{٢}) - ق(س_{١})$$

$$\Delta ص = ص_{٢} - ص_{١}$$

$\therefore$ مقدار التغير في قيمة الاقتران ق هو:

$$\Delta ق(س) = ق(٣) - ق(٠)$$

$$= (٢(٣) + ٥) - (٢(٠) + ٥)$$

$$= ١١ - ٥ = ٦$$

مثال (٣)

إذا كان ص = ق(س) = س^{٢} − ٣، وتغيرت س من س$_{١}$ = ٣ إلى س$_{٢}$ = ٢، فجد:

١) مقدار التغير في س.

٢) مقدار التغير في قيمة الاقتران ق(س).

٣) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$.

الحل

١) $\Delta س = س_{٢} - س_{١}$

$$= ٢ - ٣ = -١$$

٢) بما أن ق(س$_{٢}$) = ص$_{٢}$ ، ق(س$_{١}$) = ص$_{١}$، فإن:

$$\Delta ص = ص_{٢} - ص_{١}$$

$$= ق(س_٢) - ق(س_١)$$

$$= ق(٢) - ق(٣)$$

$$= \left((٢)^٢ - ٣\right) - \left((٣)^٢ - ٣\right) = ١ - ٦ = -٥$$

٣) $\dfrac{\Delta ص}{\Delta س} = \dfrac{-٥}{-١} = ٥$

تُسمّى $\dfrac{\Delta ص}{\Delta س}$ **معدل تغير الاقتران** ص = ق(س).

تعريف

معدل تغير الاقتران ص= ق(س) حين تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$، $(س_١ \neq س_٢)$ هو:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_١ + \Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س}.$$

مثال (٤)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س &، س < ٠ \\ ٤ &، س \geq ٠ \end{cases}$ ، فجد قيمة معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س = −١ إلى س = ٥

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(٥) - ق(-١)}{٥ - (-١)}$$

$$= \frac{٤ - (-٢)}{٥ - (-١)} = ١$$

تدريب ١

جد قيمة معدل التغير في الاقتران ق لكل مما يأتي:

١) $ق(س) = \sqrt{س}$ عندما تتغير س من ٨١ إلى ٣٦

٢) $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٥ ، & ١ \le س \le ٣ \\ ٦س + ٤ ، & ٣ < س \le ٧ \end{cases}$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤

٣) $ق(س) = -٢$ عندما تتغير س من ١ إلى ٦، ماذا تلاحظ؟

٤) $ق(س) = ٢س + ١$ عندما تتغير س من $س = ٠$ إلى $س = ٣$، ماذا تلاحظ؟

التفسير الهندسي لمعدل التغير

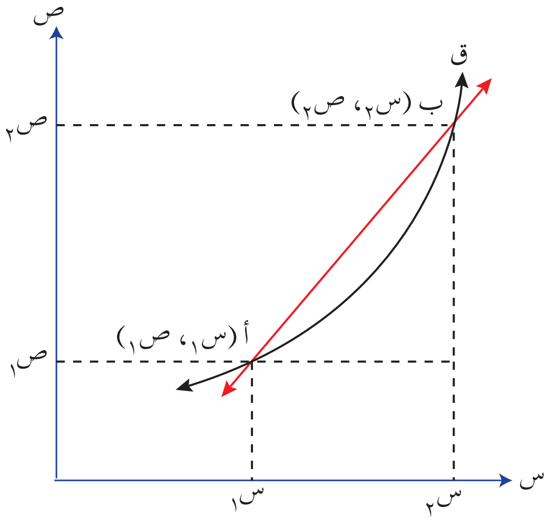
نشاط

اعتمادًا على الشكل (٢-١):

١) جد معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$.

٢) احسب ميل المستقيم أ ب.

٣) ماذا تلاحظ؟



الشكل (٢-١).

المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يُسمّى قاطعًا لمنحنى الاقتران ق، ومنه:

$$ميل\ القاطع = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

ميل القاطع المار بالنقطتين: أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ يساوي معدل تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$.

مثال (٥)

إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين: أ (−١، −٣)، ب (٢، ١٨)، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: أ ، ب.

الحل

$$ميل\ القاطع = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١٨ - (-٣)}{٢ - (-١)} = ٧$$

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٨$س^٢$، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: (٠، ق(٠))، (٣، ق(٣)).

مثال (٦)

إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين: أ (٣، ٧)، ب (−١، ل)، وكان ميل القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ يساوي (−٣)، فجد قيمة ل.

الحل

$$ميل\ القاطع = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$-٣ = \frac{ل - ٧}{-١ - ٣}$$

$$١٢ = ل - ٧$$

إذن: ل = ١٩

التفسير الفيزيائي لمعدل التغير

إذا تحرك جسيم على خط مستقيم بحيث كان موقعه في اللحظة ن مُعرَّفًا بالقاعدة ل = ف(ن)، وتغيرت ن من $ن_١$ إلى $ن_٢$ ، فإن موقع الجسيم يتغير من الموقع $ل_١ = ف(ن_١)$ إلى الموقع $ل_٢ = ف(ن_٢)$، ويكون تغير المسافة هو Δ ل، انظر الشكل (٢–٢).

الشكل (٢–٢).

إذا قسمنا التغير في المسافة (Δ ل) على مقدار التغير في الزمن (Δ ن)، فإننا نحصل على **السرعة المتوسطة** $\bar{ع}$ للجسيم في الفترة الزمنية $[ن_١، ن_٢]$، ومنه:

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$$

مثال (٧)

يتحرك جسيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^٢ + ٣$، حيث ن الزمن بالثواني، ف(ن) المسافة بالأمتار. احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٢] ثانية.

الحل

$ن_١ = ١$ ثانية ، $ن_٢ = ٢$ ثانية.

السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٢] ثانية تساوي:

$$\bar{ع} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$$

$$= \frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١}$$

$$= \frac{\left((٢)^{٢}+٣\right)-\left((١)^{٢}+٣\right)}{٢-١}$$

$$= \frac{٧-٤}{١} = ٣ \text{ م/ث.}$$

مثال (٨)

إذا كان معدل تغير الاقتران ق في الفترة [−٣، ١] يساوي ٢، وكان هـ (س) = ق(س) − $\text{س}^{٢}$، فجد معدل تغير الاقتران هـ في الفترة [−٣، ١].

الحل

$\text{س}_{١} = -٣$، $\text{س}_{٢} = ١$

$$\text{معدل تغير الاقتران ق(س)} = \frac{\text{ق(س}_{٢}\text{)} - \text{ق(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$٢ = \frac{\text{ق(١)} - \text{ق(}-٣\text{)}}{(١)-(-٣)}$$

$$٢ = \frac{\text{ق(١)} - \text{ق(}-٣\text{)}}{٤}$$

$$\text{معدل تغير الاقتران هـ (س)} = \frac{\text{هـ (س}_{٢}\text{)} - \text{هـ (س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

$$= \frac{\text{هـ (١)} - \text{هـ (}-٣\text{)}}{(١)-(-٣)}$$

$$= \frac{\left(\text{ق(١)} - (١)^{٢}\right) - \left(\text{ق(}-٣\text{)} - (-٣)^{٢}\right)}{٤}$$

$$= \frac{\text{ق(١)} - ١ - \text{ق(}-٣\text{)} + ٩}{٤}$$

$$= \frac{\text{ق}(١) - \text{ق}(-٣)}{٤} + \frac{-١ + ٩}{٤}$$

$$= ٢ + \frac{٨}{٤}$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

تدريب ٣

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [–١، ٢] يساوي –٣ ، وكان هـ (س) = ٢ق(س) + ٥س ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [–١، ٢].

تدريب ٤

حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) إذا كان $ق(س) = ٣س - س^٢$، وتغيرت س من -١ إلى ٤، فجد:

أ) مقدار التغير في س.

ب) معدل تغير الاقتران ق(س).

٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢ & ، \quad ٠ \le س \le ٣ \\ ٢س + ١ & ، \quad ٣ < س \le ٧ \end{cases}$

فجد معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٥.

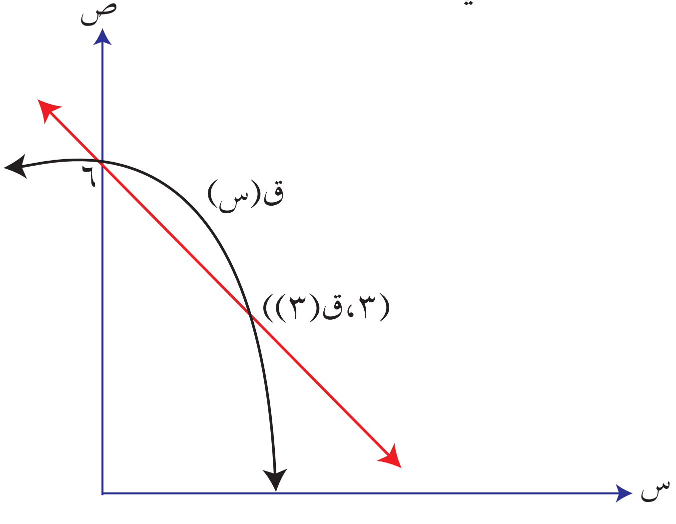
٣) ما قيمة تغير الاقتران $ص = ٣ س^٣$ عندما تتغير س من $س_١ = ٢$ بمقدار $\Delta س = -١$؟

٤) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad ١ \le س \le ٣ \\ أ س & ، \quad ٣ < س \le ٥ \end{cases}$

وكان معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ يساوي ٤، فجد قيمة الثابت أ.

٥) إذا كان معدل التغير للاقتران ق في الفترة [١، ٣] يساوي ٤، وكان $هـ(س) = ق(س) - س$، فجد معدل التغير للاقتران هـ في الفترة [١، ٣].

٦) إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق في الشكل (٢-٣) يساوي (−١)، فجد قيمة ق(٣).



الشكل (٢-٣).

٧) إذا كان $ق(س) = ٣س^{٢}$، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: (٠، ق(٠)) ، (٢، ق(٢)).

٨) مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم إلى (٣) سم. جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب.

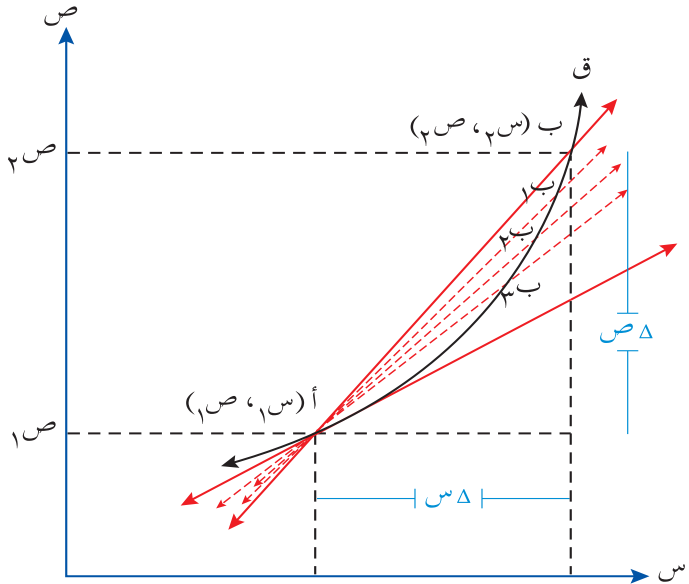
٩) إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه رأسيًّا إلى أسفل تعطى بالعلاقة $ف(ن) = ١٠ن - ٥ن^{٢}$، حيث ف المسافة المقطوعة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فاحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٣].

ثانيًا المشتقة الأولى The First Derivative

تعرفت سابقًا معدل تغير الاقتران ق، وستتعرف الآن أن نهاية معدل تغير الاقتران ق المعرف على الفترة [أ، ب] تُسمّى **المشتقة الأولى للاقتران**: ص = ق(س)، ويُرمَز إليها بـالرمز $\text{قَ}(\text{س}_{١})$.

الشكل (٢–٤) يمثل منحنى الاقتران ق، والنقطتان: أ $(\text{س}_{١}،\text{ص}_{١})$، ب$(\text{س}_{٢}،\text{ص}_{٢})$ واقعتان على منحنى ق(س).

إذا حُرِّكت النقطة ب على منحنى الاقتران ق مقتربة من النقطة أ لتأخذ الأوضاع $\text{ب}_{١}،\text{ب}_{٢}،\ldots$ فإن القاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يأخذ الأوضاع $\overleftrightarrow{\text{أب}_{١}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}_{٢}}$ ، ... مقتربًا من وضع المماس للمنحنى عند النقطة أ.



الشكل (٢–٤).

أي إن ميل المماس عند النقطة أ $(\text{س}_{١}،\text{ص}_{١})$ $= \lim\limits_{\text{ب}\to\text{أ}}$ ميل القاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{قَ}(\text{س}_{١})$$

تعلمت سابقًا أن السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من $\text{ن}_{١}$ إلى $\text{ن}_{١}+\Delta\text{ن}$ لجسيم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة ل = ف(ن) هي $\bar{\text{ع}}$ ، وتساوي:

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\Delta\text{ل}}{\Delta\text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_{١}+\Delta\text{ن}) - \text{ف}(\text{ن}_{١})}{\Delta\text{ن}}$$

وأنه عندما Δن ← ٠، فإن $\underset{\Delta \text{ن} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{ن}}$ (في حال وجودها) تُسمّى السرعة اللحظية للجسيم، وهي المشتقة الأولى لاقتران المسافة بالنسبة إلى الزمن (ع = فَ(ن)).

تعريف

المشتقة الأولى للاقتران ق:

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) المعرف على الفترة [أ، ب] هي اقتران آخر نرمز إليه بالرمز قَ(س)، ويُقْرأ (ق فتحة لـ س) ، حيث:

$$\text{قَ(س)} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س} + \Delta \text{س)} - \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}}$$

؛ شريطة وجود النهاية.

أما إذا رمزنا إلى المقدار Δ س بالرمز هـ فإن تعريف المشتقة الأولى هو:

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س} + \text{هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} \text{ ،}$$

من رموز المشتقة الأولى قَ(س) ، $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ، صَ.

مثال (١)

جد المشتقة الأولى للاقتران ق، حيث ق(س) = ٢س + ١ باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{قَ(س)} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س} + \Delta \text{س)} - \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\big(٢(\text{س} + \Delta \text{س}) + ١\big) - \big(٢\text{س} + ١\big)}{\Delta \text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س} + ٢\Delta\text{س} + ١ - ٢\text{س} - ١}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\Delta\text{س}}{\Delta\text{س}} = ٢$$

تعريف

المشتقة الأولى للاقتران ق عندما س = $\text{س}_١$ ، حيث $\text{س}_١$ ∈ مجال ق، هي:

$$\text{قَ}(\text{س}_١) = \underset{\Delta\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{هـ}} .$$

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = ٦ − ٥س، فجد قَ(٢) باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{قَ}(٢) = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\left(٦ - ٥(٢ + \text{هـ})\right) - \left(٦ - ٥ \times ٢\right)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٦ - ١٠ - ٥\text{هـ} - ٦ + ١٠}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٥\text{هـ}}{\text{هـ}} = -٥$$

تدريب ١

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣ + ٤\text{س}$ ، فجد $\text{قَ}(٢)$ باستخدام التعريف.

بوضع $\text{ع} = \text{س} + \text{هـ}$ ، يمكن التعبير عن المشتقة الأولى باستخدام التعريف حسب العلاقة الآتية:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} \,.$$

مثال (٣)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$ ، فجد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\overset{١}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}(\text{ع} + \text{س})}{\underset{١}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \text{ع} + \text{س}$$

$\therefore$ $\text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س}$.

تدريب ٢

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} - ٣$، فجد $\text{قَ}(٣)$ باستخدام التعريف.

تدريب ٣

إذا كان ق(س) = $\text{س}^{٣}$ ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف.

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف.

الحل

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}} \text{ ، لماذا؟}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\overset{١}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}}{\underset{١}{(\cancel{\text{ع} - \text{س}})}(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

يمكن حل المثال (٤) بطريقة أخرى، وذلك بتحليل ع – س بوصفها فرقًا بين مربعين:

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{\overset{١}{\cancel{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}}}{(\underset{١}{\cancel{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}})(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{١}{(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = $\sqrt{٢\text{س}-٣}$ ، فجد قَ(٤) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$\text{قَ}(\text{س}_{١}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}_{١} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$$

$$\text{قَ}(٤) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٢(٤+\text{هـ})-٣} - \sqrt{٢\times٤-٣}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٥+٢\text{هـ}} - \sqrt{٥}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{٥+٢\text{هـ}} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٥+٢\text{هـ}} + \sqrt{٥}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{٥ + ٢\text{هـ} - ٥}{\text{هـ}(\sqrt{٥+٢\text{هـ}} + \sqrt{٥})}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نها}} \frac{\overset{٢}{\cancel{٢\text{هـ}}}}{\underset{١}{\cancel{\text{هـ}}}(\sqrt{٥+٢\text{هـ}} + \sqrt{٥})} = \frac{٢}{٢\sqrt{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}} .$$

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{٢س}}$ ، س > ٠ ، فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم جد قَ(٨).

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س}}$ ، س ≠ صفرًا، فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم جد قَ(٣).

الحل

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{٣}}{\text{ع}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣س} - \text{٣ع}}{\text{ع س}} \times \frac{\text{١}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣}\overset{-\text{١}}{\cancel{(\text{س} - \text{ع})}}}{\text{ع س}} \times \frac{\text{١}}{\underset{\text{١}}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}}$$

$$= \underset{\text{ع}\leftarrow\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{٣}}{\text{ع س}} = \frac{-\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

ومنه: $\text{قَ(٣)} = -\frac{\text{٣}}{\text{٩}} = -\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

تدريب ٥

إذا كان ق(س) = $\frac{\text{١}}{\text{١} - \text{٣س}}$ ، س ≠ $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف، ثم جد قَ($\frac{\text{١}}{\text{٢}}$).

الأسئلة

١) إذا كان $ص = ق(س)$، وكان مقدار تغير الاقتران $ق(س)$ هو $س^٢ هـ - ٢س هـ^٢$ ، فجد $قَ(س)$.

٢) إذا كان $ص = ق(س)$، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١ + هـ$ هو $\Delta ص = ٤س هـ + ٢هـ^٢$، فجد قيمة $قَ(س)$.

٣) باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $ق(س) = ٦$ ب) $ق(س) = ٤ - ٥س$

جـ) $ص = س^٢ - ٢س$ د) $ق(س) = \sqrt{٤س + ٣}$

هـ) $ق(س) = -\frac{١}{٢س}$ و) $ص = \frac{٢}{٢س + ٣}$

٤) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

أ) $ق(س) = ٣س + ٦$ ، $س = -٢$

ب) $ص = ١ - س^٢$ ، $س = ٤$

جـ) $ص = ٢س^٣ - ٥س + ٤$ ، $س = ٠$

د) $ص = \sqrt{٢ - ٣س}$ ، $س = -٢$

هـ) $ص = \frac{٢}{س - ١}$ ، $س = ٤$

و) $ق(س) = \frac{٥}{٤ + ٣س}$ ، $س = ١$

الفصل الثاني

قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا

Differentiation Rules & Higher Order Derivatives

النتاجات

- تطبق قواعد الاشتقاق عند إيجاد مشتقات اقترانات معطاة.
- تستخدم قاعدة السلسلة في إيجاد المشتقة.
- تحسب مشتقة الاقترانات الآتية: جاس، جتاس، ظاس.
- تجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الثانية.

أولًا قواعد الاشتقاق Differentiation Rules

إذا كان ق(س) = س^{٢} (٢س − ٣) ، فجد قَ(س).

إن إيجاد مشتقة هذا الاقتران باستخدام تعريف المشتقة يجعل التعامل مع الأسس الكبيرة أمرًا صعبًا؛ لذا ستتعرف في هذا الدرس بعض القواعد التي تسهل عملية الاشتقاق.

نشاط

املأ الفراغ في الجدول الآتي اعتمادًا على تعريف المشتقة:

الاقتران	مشتقة الاقتران	الاقتران	مشتقة الاقتران
ق(س) = ٥	− − − − − − − −	هـ (س) = س	− − − − − − − −
ق(س) = −٤	− − − − − − − −	هـ (س) = س^{٢}	− − − − − − − −
ق(س) = ٠,٥	− − − − − − − −	هـ (س) = س^{٣}	− − − − − − − −
ماذا تلاحظ؟		ماذا تلاحظ؟	

القاعدة (١)

١) إذا كان $ق(س) = جـ$ ، حيث جـ عدد ثابت، فإن $قَ(س) = $ صفرًا.

٢) إذا كان $ق(س) = س^{ن}$، فإن $قَ(س) = ن\,س^{ن-١}$، $ن \in ح$.

٣) إذا كان $ق(س) = أ \times م(س)$، حيث م اقتران قابل للاشتقاق، أ عدد ثابت، فإن:

$قَ(س) = أ \times مَ(س)$.

مثال (١)

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $ق(س) = -٣$ ٢) $ص = س^{٣}$ ٣) $هـ(س) = ٢س^{-٥}$

٤) $ص = \sqrt[٣]{س}$ ٥) $ل(س) = \sqrt{س^{٣}}$ ٦) $ص = \frac{١}{س^{٢}}$

الحل

١) $قَ(س) = $ صفرًا.

٢) $$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٣-١} = ٣س^{٢}$$

٣) $$هـَ(س) = ٢(-٥)\,س^{-٥-١} = -١٠\ س^{-٦} = \frac{-١٠}{س^{٦}}$$

٤) $ص = س^{\frac{١}{٣}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}س^{\frac{١}{٣}-١} = \frac{١}{٣}س^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$$

٥) $ل(س) = س^{\frac{٣}{٢}}$

$$لَ(س) = \frac{٣}{٢}س^{\frac{٣}{٢}-١} = \frac{٣}{٢}س^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{س}$$

٦) $\text{ص} = \text{س}^{-٢}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\text{س}^{-٢-١} = -٢\ \text{س}^{-٣} = \frac{-٢}{\text{س}^{٣}}$$

تدريب ١

جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية:

١) $\text{ق(س)} = \text{س}^{-\frac{٢}{٣}}$

٢) $\text{ص} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$

٣) $\text{ص} = \frac{٥}{٣}\ \text{س}^{-٦}$

٤) $\text{ص} = \text{س}$

القاعدة (٢): مشتقة مجموع اقترانين، والفرق بين اقترانين.

إذا كان كل من: ق، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان:

١) $\text{ل(س)} = \text{ق(س)} + \text{هـ(س)}$، فإن $\text{لَ(س)} = \text{قَ(س)} + \text{هـَ(س)}$.

٢) $\text{ع(س)} = \text{ق(س)} - \text{هـ(س)}$، فإن $\text{عَ(س)} = \text{قَ(س)} - \text{هـَ(س)}$.

مثال (٢)

جد المشتقة الأولى لكل من يأتي:

١) $\text{ق(س)} = ٥\text{س}^{٤} - ٢\text{س}^{٣} - \text{س} + ٢$

٢) $\text{ص} = \text{س}^{-٣} - ٢\text{س}$

٣) $\text{هـ(س)} = \sqrt{\text{س}} + \text{س}^{٢}$

الحل

١) $\text{قَ(س)} = ٢٠\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} - ١$

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\ \text{س}^{-٤} - ٢ = \frac{-٣}{\text{س}^{٤}} - ٢$

٣) $\text{هـ(س)} = \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{٢}$

$$\text{هـَ(س)} = \frac{١}{٢}\ \text{س}^{\frac{-١}{٢}} + ٢\text{س} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + ٢\text{س}$$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٥س^{٣} − ٤س^{٢} − ١، فجد قَ(−٢).

الحل

الاشتقاق أولًا، ثم التعويض في القاعدة، ثم تطبيق أولويات العمليات الحسابية:

قَ(س) = ١٥ س^{٢} − ٨ س

قَ(−٢) = ١٥(−٢)^{٢} − ٨(−٢)

= ١٥ × ٤ + ١٦ = ٦٠ + ١٦ = ٧٦

تدريب ٢

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) ص = ٢س − $\frac{٢}{س}$

٢) ق(س) = ٤س^{٣} − ٥ + $\frac{١}{س}$

القاعدة (٣): مشتقة حاصل ضرب اقترانين.

إذا كان كل من: ق، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان ص = ق (س) × هـ (س)، فإن:

$\frac{ءص}{ءس}$ = ق(س) × هـَ(س) + هـ (س) × قَ(س)؛ أي إن:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين =

الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

بالرجوع إلى المسألة الواردة في بداية الدرس، حيث:

ق(س) = س^{٢} (٢س − ٣)، فإن:

قَ(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

= س^{٢} × ٢ + (٢س − ٣) × ٢ س

= ٢س^{٢} + ٤س^{٢} − ٦س = ٦س^{٢} − ٦س.

فكر وناقش

حُلَّ المسألة السابقة بطريقة أخرى.

مثال (٤)

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) ص = (٢س – ٣) (س^{٣} + ٥) عندما س = صفرًا.

٢) ص = س$^{-٣}$ (س^{٣} – ٥).

الحل

١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

= (٢س – ٣) × ٣س^{٢} + (س^{٣} + ٥) × ٢

$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=٠}$ = –٣×٠ + ٥×٢ = ٠ + ١٠ = ١٠

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{-٣}$ × ٣س^{٢} + (س^{٣} – ٥) × –٣ س$^{-٤}$

= ٣ س$^{-١}$ + (–٣ س$^{-١}$) + ١٥ س$^{-٤}$ = $\frac{١٥}{\text{س}^{٤}}$

فكر وناقش

١) حُلَّ المثال (٤) من دون استخدام قاعدة مشتقة ضرب اقترانين.

٢) ادَّعت نور أن المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = س^{٢} (٣س^{٣} + ٥) هي:
قَ(س) = ٢س (٩س^{٢}). ناقِش صحة ادِّعائها.

تدريب ٣

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $\text{ص} = (\text{٣س}^{٢} + ٧) \times (\text{س}^{-٥} + ٣)$

٢) $\text{ق(س)} = (٥ - \text{٣س})(\text{٤س}^{٣} + ١)$ عندما $\text{س} = ١$

٣) $\text{ص} = (\text{٣س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٢} - ١)$

القاعدة (٤): مشتقة خارج قسمة اقترانين.

إذا كان كل من: ق، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان $\text{ص} = \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، $\text{هـ(س)} \neq ٠$،

فإن $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\text{هـ(س)} \times \text{قَ(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـَ(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$ ؛ أي إن

$$\text{مشتقة قسمة اقترانين} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}.$$

مثال (٥)

إذا كانت $\text{ص} = \dfrac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{٢س} + ٦}$ ، فجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{٢س} + ٦) \times \text{٣س}^{٢} - (\text{س}^{٣} - ١) \times ٢}{(\text{٢س} + ٦)^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٦س}^{٣} + \text{١٨س}^{٢} - \text{٢س}^{٣} + ٢}{(\text{٢س} + ٦)^{٢}} = \frac{\text{٤س}^{٣} + \text{١٨س}^{٢} + ٢}{(\text{٢س} + ٦)^{٢}}.$$

نشاط

أكمل الفراغ في الجدول الآتي باستخدام قاعدة قسمة اقترانين:

الاقتران	مشتقة الاقتران
ق(س) = $\frac{٣}{س}$	__________
ق(س) = $\frac{-٢}{٢س + ١}$	__________
ق(س) = $\frac{١}{١ - ٥س}$	__________

ماذا تلاحظ؟

نتيجة

إذا كان ق(س) = $\frac{جـ}{هـ(س)}$، حيث هـ (س) ≠ ٠ ، جـ عدد ثابت، وكان هـ (س) قابلًا للاشتقاق، فإن قَ(س) = $\frac{-جـ \times هـَ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$.

مثال (٦)

جد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي:

١) ص = $\frac{-٥}{٢س + ٣}$

٢) ص = $\frac{٣س^{٢} + ٧}{٢}$

الحل

١) $\frac{دص}{دس} = \frac{-(-٥)\times٢}{(٢س + ٣)^{٢}} = \frac{١٠}{(٢س + ٣)^{٢}}$

٢) $\frac{دص}{دس} = \frac{٦س}{٢} = ٣س$

تدريب ٤

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ في كل مما يأتي:

١) $\text{ص} = \frac{٢\text{س} + ٥}{٣ - \text{س}}$

٢) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}$

٣) $\text{ص} = \frac{١ - ٣\text{س}}{٢}$

٤) $\text{ص} = \frac{١١}{\text{س}^{٣} + ٦}$

فكر وناقش

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للاقتران في الفرع (٢) من التدريب (٤) السابق بأكثر من طريقة.

تدريب ٥

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $ق(س) = ٦ - ٢س^{٣}$

ب) $ق(س) = -\frac{٣}{س}$

جـ) $هـ(س) = ٢س^{-٠,٥} + \sqrt[٣]{س^{٥}} + س$

د) $ص = (س^{٣} - ٢س)(٣ - ٥س^{٤})$

هـ) $ص = \frac{س^{٢} + ١}{٢س - ٣}$

و) $ق(س) = \frac{س}{٤ - س^{٢}}$

ز) $ق(س) = (س^{٣} + ٣س)(٢ - ٥س)$

٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) $ص = ٥س^{٣} - ٢س^{٢} + ١$ ، عندما $س = -٣$

ب) $ص = س^{٣} + \sqrt[٣]{س}$ ، عندما $س = ١$

جـ) $ص = \frac{-٣}{٢ - س}$ ، عندما $س = -٢$

د) $ق(س) = \frac{٢س}{٥ - ٤س}$ ، عندما $س = ١$

هـ) $ق(س) = (٤ - ٦س^{٢})(٢س + ١)$ ، عندما $س = -٢$

و) $ق(س) = ٢س \times (٣ - س^{٢}) + \frac{٢}{س}$ ، عندما $س = ١$

٣) إذا علمت أن $ق(س) = \sqrt{س}$ ، فجد قيمة $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$.

٤) إذا كان $ق(١) = ٤$، $قَ(١) = -٢$، $هـ(١) = -٢$، $هـَ(١) = ١$ فجد:

أ) $(ق \times هـ)'(١)$

ب) $\left((ق \times هـ)(١)\right)'$

جـ) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(١)$

د) $\left(\frac{٣}{هـ}\right)'(١)$

هـ) $(ق + هـ)'(١)$

و) $(٣ق - ٢هـ)'(١)$

ثانيًا قاعدة السلسلة Chain Rule

إذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} + ٥)^{-٥}$ ، فجد $قَ(س)$.

لا يمكن إيجاد مشتقة الاقتران $ق(س) = (٣س^{٢} + ٥)^{-٥}$ باستخدام قواعد الاشتقاق التي تعلمتها في هذا الفصل ؛ لذا يجب استعمال **قاعدة السلسلة** لإيجاد مشتقة هذا الاقتران.

مثال (١)

إذا كان $ص = ٢ع^{٢} + ٣$ ، $ع = س^{٣} - ١$، فجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل

$ع = س^{٣} - ١$، ومنه: $ص = ٢(س^{٣} - ١)^{٢} + ٣$

$ص = ٢(س^{٦} - ٢س^{٣} + ١) + ٣$ (لماذا)؟

$ص = ٢س^{٦} - ٤س^{٣} + ٥$

$$\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^{٥} - ١٢س^{٢}$$

لاحِظ أن الاقتران ص مكتوب بدلالة المتغير ع، وأن المتغير ع مكتوب بدلالة المتغير س.

يمكن إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ باتباع الخطوات الآتية:

١) إيجاد $\frac{ءص}{ءع}$.

٢) إيجاد $\frac{ءع}{ءس}$.

٣) إيجاد $\frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$.

٤) تعويض قيمة ع بدلالة س.

القاعدة (١): قاعدة السلسلة.

إذا كان ص = ق(ع)، ع = هـ (س)، ص قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى ع، ع قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى س، فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} .$$

مثال (٢)

١) إذا كان $\text{ص} = \text{م}^{٣} + ٣\text{م}^{٢} - ٥$، $\text{م} = ٣\text{س} + ٧$، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

٢) إذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٣} + ١$، $\text{ع} = ٥\text{س} - ٢$، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما $\text{س} = ١$.

الحل

١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءم}} = ٣\text{م}^{٢} + ٦\text{م}$

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = ٣$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءم}} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$

$= (٣\text{م}^{٢} + ٦\text{م}) \times ٣$

$= ٩\text{م}^{٢} + ١٨\text{م}$

$= ٩\,(٣\text{س} + ٧)^{٢} + ١٨(٣\text{س} + ٧)$.

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٣\text{ع}^{٢}$.

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٥$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$$= ٣ع^{٢} \times ٥$$

$$= ١٥ع^{٢}$$

$$= ١٥(٥س - ٢)^{٢}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١} = ١٥(٥ - ٢)^{٢} = ١٥ \times ٩ = ١٣٥$$

تدريب ١

إذا كان $ص = ع^{٢} + ٣ع$ ، $ع = ٣ - ٢س^{٢}$ ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١}$.

مثال (٣)

إذا كان $ص = (٥ - س^{٢})^{٣}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$.

الحل

افرض أن $ع = ٥ - س^{٢}$ ، ومنه: $ص = ع^{٣}$.

$$\therefore \quad \frac{ءص}{ءع} = ٣ع^{٢} \quad ، \quad \frac{ءع}{ءس} = -٢س$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

$$= ٣ع^{٢} \times -٢س$$

$$= -٦س ع^{٢}$$

$$= -٦س (٥ - س^{٢})^{٢} .$$

القاعدة (٢)

إذا كان $ص = \left(هـ(س)\right)^{ن}$ ، ن عددًا حقيقيًا، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن:

$$\frac{ءص}{ءس} = ن \left(هـ(س)\right)^{ن-١} \times هـَ(س) .$$

مثال (٤)

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

١) $ص = (٥ - س^{٢})^{٣}$

٢) $ص = (٢س - ٧)^{٣}$ عندما $س = -١$

الحل

١) $\frac{ءص}{ءس} = ٣(٥ - س^{٢})^{٢} \times -٢\ س$

$= -٦\ س\ (٥ - س^{٢})^{٢}$

٢) $\frac{ءص}{ءس} = ٣(٢س - ٧)^{٢} \times ٢$

$= ٦(٢س - ٧)^{٢}$

$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = -١} = ٦(-٢ - ٧)^{٢}$

$= ٦ \times (-٩)^{٢} = ٤٨٦$

تدريب ٢

إذا كان $ص = (س^{٢} + ٤س + ٥)^{-٢}$، فجد $\frac{ءص}{ءس}$.

مثال (٥)

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

١) $ص = \sqrt{س^{٣} + ١}$ ، $س > -١$

٢) $ص = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٣}$

الحل

١) $ص = (س^{٣} + ١)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(س^{٣} + ١)^{\frac{-١}{٢}} \times ٣س^{٢}$

$$= \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢(\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{١}{٢}}}$$

٢) $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٣}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٣}(\text{س}^{٢} + ٣)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٢\text{س}$$

$$= \frac{٢\text{س}}{٣(\text{س}^{٢} + ٣)^{\frac{٢}{٣}}}$$

القاعدة (٣): مشتقة اقتران الجذر التربيعي.

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) > ٠$ ، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{هـَ}(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}} = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}.$$

تدريب ٣

١) إذا كان $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣}$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

٢) إذا كان $\text{ص} = \sqrt[٣]{٢ - \text{س}}$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $ص = \sqrt{ع + ١}$ ، $ع = ٤س^{٣} - ٩$

ب) $ص = ل^{٣}$ ، $ل = ٨س$ عندما $س = \frac{١}{٤}$

٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $ص = \sqrt{٢س^{٢} + ١}$

ب) $ق(س) = (٣ + س^{٢})^{-٣}$

جـ) $م(س) = (٤س + ١)^{٣}$

د) $ق(س) = س^{-٤}(٥ - ٥س^{٣})^{٢}$

هـ) $ص = (س + ٧س^{-٢})(٩ - ٥س)^{٤}$

٣) جد صَ لكل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

أ) $ص = \sqrt{٥ + ٣س^{٢}}$ ، $س = ٠$

ب) $ص = -٥(١ - ٣س^{٣})^{-٢}$ ، $س = -١$

جـ) $ص = (س^{٢} - ٣)(٢ - ٤س^{٣})^{٢}$ ، $س = ١$

د) $ص = م^{٢} + ٣م - ٢$ ، $م = ٤س^{٢}$ ، $س = ٢$

ثالثًا مشتقات الاقترانات المثلثية Derivatives of Trigonometric Functions

إذا كان ق(س) = ظا(س^{٢} + ٥)، فجد قَ(س).

لإيجاد مشتقة اقتران مثل الاقتران ق(س) = جا(س^{٢} + ٥)، يجب استخدام قواعد خاصة بمشتقة الاقترانات المثلثية؛ لذا ستتعرف في هذا الدرس بعض هذه القواعد.

القاعدة (١): مشتقة الاقترانات المثلثية.

١) إذا كان ق(س) = جاس ، فإن قَ(س) = جتاس.

٢) إذا كان ق(س) = جتاس ، فإن قَ(س) = − جاس.

٣) إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن قَ(س) = قا^{٢}س.

تعلمت سابقًا أن: ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$.

مثال (١)

إذا كان ص = ٢ظاس − جتاس، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\ \text{قا}^{٢}\text{س} - (-\ \text{جاس})$$

$$= ٢\ \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جاس}.$$

مثال (٢)

جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتي:

١) $\text{ص} = \text{٢س} + \frac{\text{ظاس}}{\text{٢}} - \text{٤ جاس}$.

٢) $\text{ص} = \text{٣جاس} + \text{٥جتاس} - \text{٢ظاس}$.

الحل

١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٤ جتاس}$.

٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣جتاس} + \text{٥(− جاس)} - \text{٢قا}^{\text{٢}}\text{س}$.

$= \text{٣جتاس} - \text{٥جاس} - \text{٢قا}^{\text{٢}}\text{س}$.

تدريب ١

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $\text{ص} = \frac{\text{٢}}{\text{جتاس}} + \text{ظاس} + \text{٢س}$.

٢) $\text{ص} = \text{جتاس ظاس}$.

٣) $\text{ص} = \text{جاس جتاس}$.

٤) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}}\,\text{ظاس}$.

تعلمت سابقًا قاعدة السلسلة التي تُستخدم في إيجاد مشتقة بعض الاقترانات. ولكن، إذا كانت الزاوية في الاقتران المثلثي تمثل اقترانًا كما في المثال (٣)، فكيف يمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إيجاد مشتقة هذا الاقتران؟

مثال (٣)

إذا كان $\text{ص} = \text{جا}(\text{٥س}^{٢} + ١)$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل

افرض أن $\text{ع} = \text{٥س}^{٢} + ١$ ، ومنه: $\text{ص} = \text{جا ع}$.

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{جتا ع} \text{ ، } \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{١٠س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

$$= \text{جتا ع} \times \text{١٠س}$$

$$= \text{١٠س جتا } (\text{٥س}^{٢} + ١).$$

يمكن حل المثال السابق باتباع القاعدة الآتية:

القاعدة (٢).

١) إذا كان $\text{ص} = \text{جا}(\text{هـ}(\text{س}))$، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـَ}(\text{س}) \text{ جتا}(\text{هـ}(\text{س})).$$

٢) إذا كان $\text{ص} = \text{جتا}(\text{هـ}(\text{س}))$، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = - \text{هـَ}(\text{س}) \text{ جا}(\text{هـ}(\text{س})).$$

٣) إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}(\text{هـ}(\text{س}))$، هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـَ}(\text{س}) \text{ قا}^{٢}(\text{هـ}(\text{س})).$$

مثال (٤)

جد قَ(س) لكل مما يأتي:

١) ق(س) = ظا(س^{٢} + ٥س + ١).

٢) ق(س) = جا^{٤} ٢س.

الحل

١) قَ(س) = قا^{٢}(س^{٢} + ٥س + ١) × (٢س + ٥)

= (٢س + ٥) قا^{٢}(س^{٢} + ٥س + ١).

٢) ق(س) = (جا٢س)^{٤}

قَ(س) = ٤(جا٢س)^{٣} × ٢ جتا٢س

= ٨جتا٢س جا^{٣} ٢س.

تدريب ٢

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتي:

١) ص = ظا^{٣} س.

٢) ص = ٢جتا٤س + جا^{٢} س − ظا(٥س + ١).

مثال (٥)

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتي:

١) ص = س ظا(س^{٢} + ١).

٢) ص = س^{٢} جا(٣ − س^{٢}).

الحل

تُطبّق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين:

١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \text{قا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ١) \times ٢\text{س} + \text{ظا}(\text{س}^{٢} + ١) \times ١$

$= ٢\text{س}^{٢}\ \text{قا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ١) + \text{ظا}(\text{س}^{٢} + ١).$

٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{٢} \times \text{جتا}(٣ - \text{س}^{٢}) \times -٢\text{س} + \text{جا}(٣ - \text{س}^{٢}) \times ٢\text{س}$ (لماذا)؟

$= -٢\text{س}^{٣}\ \text{جتا}\ (٣ - \text{س}^{٢}) + ٢\text{س}\ \text{جا}(٣ - \text{س}^{٢}).$

تدريب ٣

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

فكر وناقش

اشتقَّتْ ربى الاقتران $\text{ق(س)} = \text{ظا}^{٣}(٥ + \text{س}^{٢})$ على النحو الآتي:

$\text{قَ(س)} = ٣\ \text{ظا}^{٣}(٥ + \text{س}^{٢})\ \text{قا}^{٢}(٥ + \text{س}^{٢})$. ناقِش صحة إجابة ربى.

الأسئلة

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = $س^{٢}$جاس.

ب) ص = $\frac{جاس}{جتاس + ١}$.

جـ) ص = ٥$س^{٢}$ جتاس − ظاس.

د) ص = س ظاس + $(س^{٢} + ١)^{٢}$.

هـ) هـ(س) = $ظا^{٢}$ ٣س + جتاس.

و) ص = $(جتا٢س)^{٦}$.

ز) ص = جا(٣س + ٥).

ح) ص = ٣جا٤س − $جتا^{٣}$س − ظا٢$س^{٢}$.

ط) ص = $(جاس − جتاس)^{-٢}$.

ي) ص = $جا^{٢}$س (١ − جتاس).

ك) ص = $(س جاس)^{٣}$ ظاس.

رابعًا المشتقات العليا Higher Order Derivatives

إذا كان ق(س) = س^{٢} جاس ، فجد قً(س).

إذا كان ص = ق(س) قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى س، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صَ = قَ(س) تُسمّى **المشتقة الأولى للاقتران** ق بالنسبة إلى س.

لاحِظ أن قَ(س) هو اقتران يعتمد على المتغير س؛ لذا فقد يكون قابلًا للاشتقاق في س، وعندئذٍ فإن مشتقة المشتقة الأولى للاقتران صَ = قَ(س) تُسمّى **المشتقة الثانية للاقتران** ق(س)، ويُرمَز إليها بالرمز: $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ ، أو: صً ، أو: قً (س).

ويُرمَز إلى قيمة المشتقة الثانية عندما س = أ بالرمز: $\left.\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right|_{\text{س} = \text{أ}}$ = $\left.\text{صً}\right|_{\text{س} = \text{أ}}$ = قً (أ).

وبصورة مشابهة، نرمز إلى **المشتقة الثالثة** بالرمز: ($\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = ص‴ = ق‴ (س)).

وكذا المشتقة الرابعة، وحتى المشتقة النونية، وسنُركِّز في هذا الفصل فقط على إيجاد المشتقة الثانية.

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٣ − س + ٥س^{٢} − ٧س^{٣} ، فجد قً (س).

الحل

قَ(س) = −١ + ١٠س − ٢١س^{٢}.

قً(س) = ١٠ − ٤٢س.

مثال (٢)

جد المشتقة الثانية لكل مما يأتي:

١) ق(س) = ٦س^{٤} − ٢س + ١ عندما س = −٢

٢) ص = س جاس + ٢ جتاس

الحل

١) قَ(س) = ٢٤س^{٣} − ٢

قً(س) = ٧٢س^{٢}

قً(−٢) = ٧٢(−٢)^{٢} = ٧٢ × ٤ = ٢٨٨

٢) صَ = (س × جتاس + جاس) + ٢(− جاس)

= س جتاس + جاس − ٢ جاس

= س جتاس − جاس

صً = (س × (− جاس) + جتاس) − جتاس

= − س جاس + جتاس − جتاس

= − س جاس.

تدريب ١

جد $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ لكل مما يأتي:

١) ص = س^{٢} + جتاس ٢) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، حيث س > ٠ ٣) ص = $\frac{٥}{\text{س}}$ ، عندما س = −٥

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ − ٢س + ٧ ، فجد:

١) أصفار المشتقة الأولى. ٢) أصفار المشتقة الثانية.

الحل

١) قَ(س) = س^{٢} + س − ٢

قَ(س) = ٠

س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س + ٢) (س − ١) = ٠ ← س = −٢ ، س = ١

∴ أصفار المشتقة الأولى {−٢، ١}.

٢) قً(س) = ٢س + ١

قً(س) = ٠

٢س + ١ = ٠

٢س = −١ ، ومنه: س = $\frac{-١}{٢}$

∴ أصفار المشتقة الثانية {$\frac{-١}{٢}$}.

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = أس^{٢} − ب س^{٣} + ٣، وكان قَ(١) = ٧، قً(٠) = ١٠، فجد قيم الثابتين: أ ، ب.

الحل

قَ(س) = ٢أس −٣ب س^{٢}

قَ(١) = ٧

٢أ − ٣ب = ٧ .... (١)

قً(س) = ٢أ − ٦ب س

قً (٠) = ١٠

٢أ = ١٠، ومنه: أ = ٥

بالرجوع إلى المعادلة (١): ٢×٥ − ٣ب = ٧

١٠ − ٣ب = ٧

− ٣ب = −٣ ، ومنه: ب = ١

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = أ^{٢}س^{٣} − ١٢س^{٢} ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل قً (١) = صفرًا.

الأسئلة

١) جد المشتقة الثانية للاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = (٢س^{٤} − ٥) (٨ − ٥س)

ب) ص = س^{٣} (١ − ٢س)، عندما س = ١

جـ) هـ (س) = ٢ جتاس

د) ق(س) = س^{٢} (س − ١) ، عندما س = −٢

هـ) ق(س) = جا٢س جتاس.

و) ق(س) = $\frac{٢}{١ - ٤س}$ ، عندما س = ٠

ز) ق(س) = جا(٢س − ١)

٢) إذا كان ق(س) = ٣أس^{٣} − ٢ب س + ١، وكان قَ(٠) = ٤، قً(١) = ٣٦، فجد قيم أ، ب.

٣) إذا كان ق(س) = أس^{٣} − ب س^{٢} − ٣، وكان قَ(١) = ٢١، قً(٢) = ١٠٢، فجد قيم أ، ب.

٤) إذا كان ق(س) = جتا٢س، فجد قً(س) + ٦ ق(س).

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

١) إذا كان ق(س) $= \frac{١}{س^{٢}}$، وتغيرت س من $س_{١} = ١$ إلى $س_{٢} = ٢$، فجد:

أ) مقدار التغير في الاقتران ق.

ب) معدل التغير في الاقتران ق.

٢) إذا كان ق(س) $= \frac{أ}{س + ٢}$ ، وكان معدل تغير الاقتران ق يساوي (–١) عندما تتغير س من صفر إلى ٣ ، فجد قيمة الثابت أ.

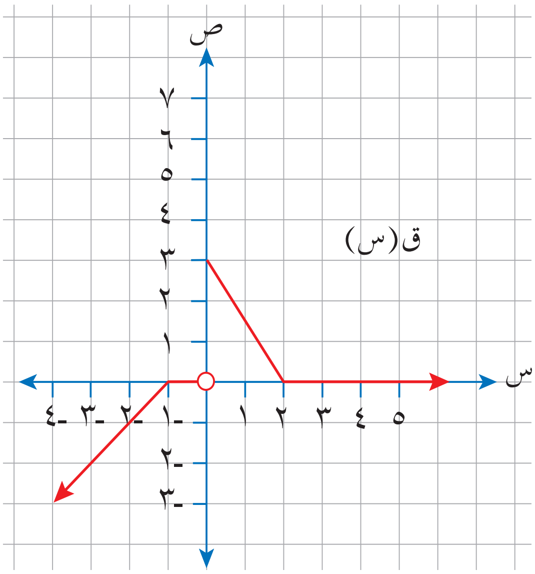
٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) $=$ ن^{٢} $+$ ٤ن. احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٥].

٤) إذا كان ص = ق(س)، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من (س) إلى (س + هـ) هو: Δ ص $=$ ٥س^{٢} هـ $+$ ٨س هـ^{٢} $+ \frac{٥}{٣}$ هـ^{٣}، فجد قَ(٢).

٥)* اعتمادًا على الشكل (٢–٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س التي تجعل الاقتران ق غير متصل.

ب) معدل التغير للاقتران ق في الفترة [٢، ٤].



الشكل (٢–٥).

٦) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي باستخدام تعريف المشتقة:

أ) ق(س) = ٣ – ٥س

ب) هـ(س) = ٢س^{٢} + ١

جـ) ل(س) $= \frac{١}{س + ٢}$ ، حيث س $\neq$ –٢

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

د) م(س) = $\sqrt{٢س + ٤}$ ، حيث س ≥ −٢

هـ) ق(س) = س^{٢} − ٤س ، عندما س = ٣

و) ق(س) = $\sqrt{٢س − ٣}$ ، حيث س ≥ $\frac{٣}{٢}$ ، عندما س = ٢

٧) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = $\sqrt{س^{٣} + ٥س^{٢}}$

ب) ص = $\sqrt{ع + ١}$ ، ع = ١ − ٢س ، حيث ع ≥ −١

جـ) ص = س^{٢} جا٣س

د) ص = $\frac{٨}{٢س − ٣}$ − جا^{٥}٢س

هـ) ص = ٣م^{٢} − ٢م + ١ ، م = ٢س + ٣ ، عندما س = ٠

و) ص = $\sqrt{٤ + ٣جتاس}$

٨) جد قَ(س) لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = (س^{٢} + ٢) (٣ − ٤س)

ب) ق(س) = (٢س − ١)^{٥}

جـ) ق(س) = س^{٢}جتاس + س$^{-٣}$ − ٥

٩) إذا كان ق(س) = (٥س − ١)^{٣}، فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(هـ+١) − ق(١)}{هـ}$.

١٠) إذا كان ق(س) = س^{٤} − أس^{٢} + س، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل قَ(−١) = صفرًا.

١١) إذا كان ق(س) = (أس−١)^{٤}، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تجعل قَ(٠) = ٤٨

١٢) إذا كان ق(س) = $(٢س - ١)^{٣}$ ، وكان قَ($س_{١}$) = ٤، فجد قيمة $س_{١}$

١٣) إذا كان هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق عندما س = –٢، هـ (–٢) = ١ ، هـَ (–٢) = ٢، فجد قَ(–٢) في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = $\sqrt{س+٦}$ × هـ (س).

ب) ق(س) = هـ (س) – $\frac{هـ(س)}{س}$.

١٤) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا علمت أن ق(س) = ٤ – ٣س، وتغيرت قيمة س من ٣ إلى ٥، فإن Δس هي:

أ) –٦ ب) –٢ جـ) ٢ د) ٣

(٢) إذا كان ص = ق(س) = $س^{٢}$، وتغيرت قيمة س من $س_{١}$ = ٢ إلى $س_{٢}$ = ٤، فإن مقدار التغير في ص يساوي:

أ) –١٢ ب) ٢ جـ) ٦ د) ١٢

(٣) إذا كان ق(س) = جا٣س، فإن $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ تساوي:

أ) – جتا٣س ب) ٣جتا٣س جـ) ٣جا٣س د) جتا٣س

(٤) إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ ، فإن قَ(٣) تساوي:

أ) –١ ب) $\frac{-١}{٣}$ جـ) $\frac{-١}{٩}$ د) ١

(٥) إذا كان ق (س) = س^{٣} + ٨، فإن $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$ تساوي:

أ) ١٢ ب) ٨ جـ) ١٦ د) ٢٠

(٦) إذا كان ق (س) = جـ^{٢}س، وكان جـ عددًا ثابتًا، فإن قَ(س) تساوي:

أ) ٢جـ س ب) ٢جـ جـ) جـ^{٢} د) ٢س

(٧) إذا كان ق (س) = ٣س^{٢}، فإن ميل القاطع المار بالنقطتين: (−١،٣) ، (٢،١٢) يساوي:

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) ٣ جـ) −٣ د) $\frac{١}{٣}$

(٨) إذا كان ق(١) = ٢، هـ (١) = ٣، قَ(١) = −٢، هـَ (١) = ١، فإن (ق × هـ)َ(١) يساوي:

أ) ٨ ب) ٤ جـ) −٨ د) −٤

(٩) إذا كان هـ (س) = س^{٢} × ق(س)، ق(٣) = ٦ ، قَ(٣) = ٥، فإن هـَ(٣) تساوي:

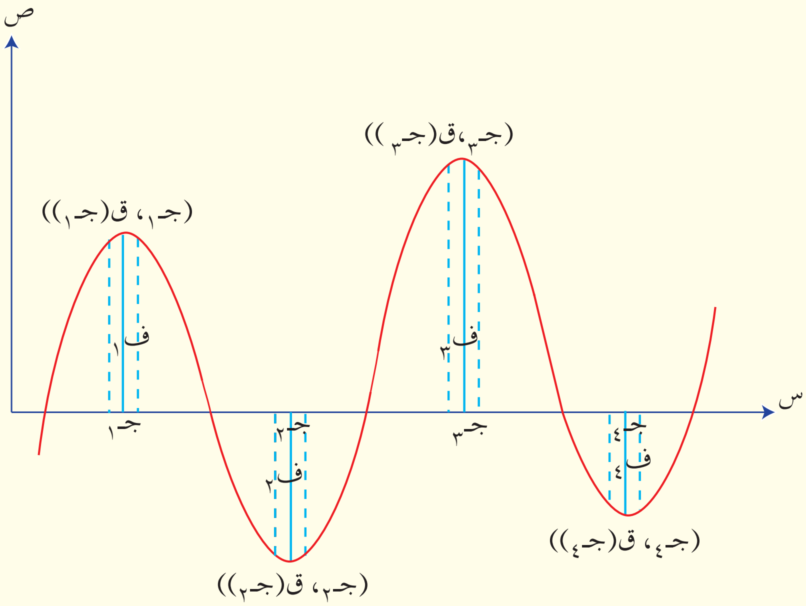
أ) ٨١ ب) ١١ جـ) ٤٥ د) ٣٦

الوحدة الثالثة

٣

تطبيقات التفاضل

بعد أن تعرفت الـمشتقة وقواعد الاشتقاق في الوحدة السابقة، ستتعرف الآن كيف تستخدم المشتقة في حل مسائل متنوعة تتعلق ببعض التطبيقات الفيزيائية، والهندسية، والاقتصادية. وستتعرف أيضًا كيف يمكن إيجاد تزايد منحنى الاقتران وتناقصه اعتمادًا على مشتقة الاقتران الأولى، وتحديد قيم الاقتران القصوى (العظمى، الصغرى)، وحل مسائل عملية تتعلق بالقيم القصوى.



Applications of Differentiation

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- اكتساب مهارة إيجاد الميل ومعادلة المماس لمنحنى الاقتران.
- حل مسائل تطبيقية على المسافة ، والسرعة ، والتسارع، مُبرِّرًا الحل.
- تحديد فترات التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى.
- تحديد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى، واختبار المشتقة الثانية.
- حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.

الفصل الأول

التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة

Geometric and Physical Interpretation of the Derivative

النتاجات

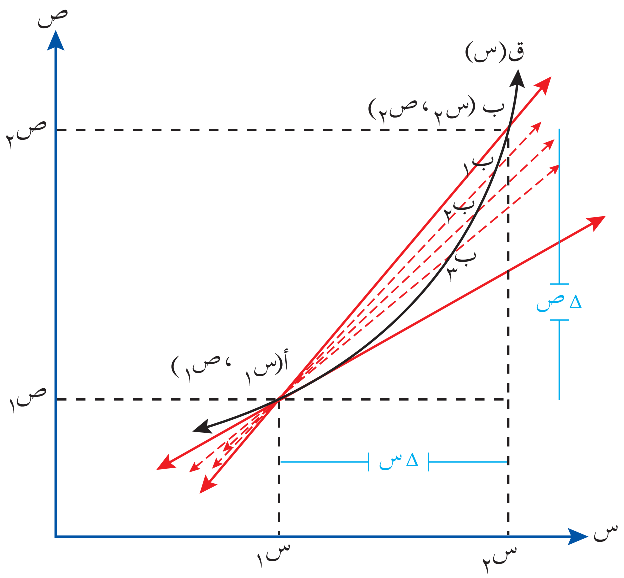
- تفسر المشتقة الأولى هندسيًا.
- توظف تفسير المشتقة الهندسي في حل مسائل تتضمن إيجاد معادلة المماس.
- تفسر المشتقتين: الأولى والثانية فيزيائيًا.
- توظف تفسير المشتقة الفيزيائي في حل مسائل عملية.

أولًا التفسير الهندسي Geometric Interpretation

يمثل الشكل (٣–١) منحنى الاقتران ق، والنقطتين: أ($س_١$، $ص_١$)، ب($س_٢$، $ص_٢$) الواقعتين على منحنى ق. اعتمد ذلك في الإجابة عما يأتي:

١) ما ميل القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ ؟

٢) ابدأ بتحريك النقطة ب باتجاه أ. ماذا تلاحظ على القاطع الناتج؟



الشكل (٣–١).

إن تحريك النقطة ب على منحنى الاقتران ق(س) مقتربةً من النقطة أ لتأخذ الأوضاع $ب_١$، $ب_٢$، .... يجعل القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ يأخذ الأوضاع $\overleftrightarrow{أب_١}$ ، $\overleftrightarrow{أب_٢}$ ،... مقتربًا من وضع المماس للمنحنى عند النقطة (أ)، وما إن تنطبق (ب) على (أ) حتى ينطبق القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ على مماس المنحنى عند النقطة أ.

أي إن **ميل المماس** عند النقطة أ(س$_{١}$، ص$_{١}$) = نهاية ميل القاطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عندما تقترب النقطة ب من النقطة أ.

∴ **ميل المماس** عند النقطة أ(س$_{١}$، ص$_{١}$) = نهاية معدل التغير للمنحنى عند هذه النقطة، ويساوي قَ(س$_{١}$)، ويُسمّى أيضًا **ميل المنحنى** عند النقطة أ.

مثال (١)

إذا كان ص = ق(س) = س^{٣} ــ ٦س+٥، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ــ٢

الحل

قَ(س) = ٣س^{٢} ــ ٦

ميل المماس عندما س = ــ٢ يساوي قَ(ــ٢)

∴ قَ(ــ٢) = ٣(ــ٢)^{٢} ــ٦ = ٦

تدريب ١

إذا كان ق(س) = س^{٢} ــ ٣س، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢، ــ٢).

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = (٢س + ١) (٣س ــ ٤)، فجد معادلة المماس عندما س = ٢

الحل

ميل المماس = قَ(٢)

قَ(س) = (٢س + ١) (٣) + (٣س ــ ٤) (٢)

قَ(٢) = (٥) (٣) + (٢) (٢)

∴ ميل المماس = ١٩

لإيجاد معادلة المماس، يجب إيجاد النقطة (٢، ق(٢)).

ق(٢) = (٥) (٢) = ١٠

∴ نقطة التماس (٢،١٠).

معادلة المماس هي: $ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$، حيث النقطة $(س_{١}، ص_{١})$ هي نقطة التماس، $م = قَ(س_{١})$.

ومنه، معادلة المماس هي: ص − ١٠ = ١٩(س −٢).

∴ ص = ١٩س − ٢٨

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = $(س^{٢} + ١)^{٢}$، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $أس^{٢}$+ ٢س + ٥، حيث أ عدد ثابت، وكان ميل المماس عندما س = ٢ يساوي ١٨، فما قيمة الثابت أ؟

الحل

ميل المماس = قَ(٢)

قَ(س) = ٢أس + ٢

قَ(٢) = ٢أ(٢) + ٢

١٨ = ٤أ + ٢

ومنه: أ = ٤

الأسئلة

١) جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) $ق(س) = ٣س + ٥$ ، $س = ٢$

ب) $ق(س) = س^{٢} + ٣س - ١$ ، $س = ١$

جـ) $ق(س) = (٢س - ٤)(س^{٢} + ١)$ ، س = صفرًا

٢) إذا كان $ق(س) = \frac{٢س+٢}{س^{٢}+١}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما $س = ١$

٣) إذا كان $ق(س) = أس^{٢} + ٤س - ٣$، حيث أ عدد ثابت، وكان ميل المنحنى عندما $س = ٣$ يساوي ٢٢، فجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان $ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٢}$، فجد ميل المنحنى للاقتران ق عندما $س = ١$

٥) إذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} - ٢)^{٤}$، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة $(-١، ق(-١))$.

ثانيًا التفسير الفيزيائي Physical Interpretation

إذا تحركت سيارة، وكان موقعها في اللحظة ن مُعرَّفًا بالاقتران: $ف(ن) = ٣٠ن^{٢} - ٤ن + ٦$، حيث ف المسافة التي تقطعها السيارة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فجد سرعة السيارة بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

تعلمت في الوحدة الثانية كيف تجد السرعة المتوسطة لجسيم في فترة زمنية، مثل: $[ن_{١}، ن_{٢}]$. ولكن، كيف يمكنك حساب سرعة هذا الجسيم عند لحظة ما خلال هذه الفترة؟

تُعرف هذه السرعة باسم **السرعة اللحظية (السرعة)**.

تعريف

إذا تحرك جسيم، وتحدد موقعه في اللحظة ن بالعلاقة $ل = ف(ن)$، فإن السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة ن هي $ع(ن)$، حيث $ع(ن) = ف'(ن)$.

مثال (١)

إذا تحرك جسيم بحيث كان بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته معطى بالعلاقة: $ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٥$، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ٣ ثوانٍ.

الحل

المسافة $ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٥$

∴ السرعة $ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن$

ولهذا فإن السرعة بعد مرور (٣) ثوانٍ = $ع(٣) = ٣(٣)^{٢} + ٦(٣) = ٢٧ + ١٨ = ٤٥$ م/ث.

تدريب ١

إذا تحرك جسيم بحيث كان بُعْده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة:

ف(ن) = ٣ن^{٢} − ٣ن + ٢، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

من التطبيقات الفيزيائية على المشتقة الثانية **التسارع اللحظي**.

تعريف

إذا تحرك جسيم وفق العلاقة: ل = ف(ن)، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم، فإن التسارع اللحظي للجسيم (التسارع) في اللحظة ن هو ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن).

مثال (٢)

يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = (٢ن^{٢} + ١)^{٢}، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

الحل

المسافة ف(ن) = (٢ن^{٢} + ١)^{٢}

السرعة ع(ن) = فَ(ن) = ٢(٢ن^{٢} + ١)(٤ن)

ع(ن) = ٨ن(٢ن^{٢} + ١)

التسارع = ت(ن) = عَ(ن) = (٨ن)(٤ن) + (٢ن^{٢} + ١)(٨)

ولهذا فإن التسارع بعد مرور ثانية واحدة يساوي:

ت(١) = (٨)(٤) + (٣)(٨) = ٣٢ + ٢٤ = ٥٦م/ث^{٢}.

تدريب ٢

يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٣} + ٤ن^{٢} + ٦، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

مثال (٣)

إذا كانت $ف(ن) = ن^{٣} - ٩ن^{٢} + ١٥ن$ هي المسافة التي يقطعها جسيم، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

الحل

بما أن المسافة $ف(ن) = ن^{٣} - ٩ن^{٢} + ١٥ن$ ، فإن السرعة تساوي:

$ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} - ١٨ن + ١٥$

عندما تنعدم السرعة، فإن: $ع(ن) = ٠$

$٣ن^{٢} - ١٨ن + ١٥ = ٠$

$ن^{٢} - ٦ن + ٥ = ٠$

$(ن - ٥)(ن - ١) = ٠$

ومنه: $ن = ٥$ ، $ن = ١$

التسارع $ت(ن) = عَ(ن) = ٦ن - ١٨$، حيث نجد قيمة التسارع عندما $ن = ٥$:

$ت(٥) = ٦(٥) - ١٨ = ٣٠ - ١٨ = ١٢$ م/ث^{٢}.

ونجد قيمة التسارع عندما $ن = ١$:

$ت(١) = ٦(١) - ١٨ = -١٢$ م/ث^{٢}.

فكر وناقش

ما دلالة إشارة التسارع السالبة في المثال (٣)؟

تدريب ٣

يتحرك جسيم وفقًا للعلاقة: $ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢$. احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

الأسئلة

١) إذا كانت ف(ن) = $ن^{٣} + ٣ن^{٢}$ هي المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية، فجد:

أ) السرعة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

ب) التسارع عندما تكون السرعة ٩م/ث.

٢) تحرك جسيم بحيث كان بُعْده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة: ف(ن) = $٢ن^{٢}$. إذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، أ] تساوي سرعته اللحظية بعد مرور ٣ ثوانٍ، فجد قيمة أ.

٣) إذا كان ف(ن) = $(٢ن - ٢)^{٣} + ٤$ يمثل المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية، فجد السرعة المقطوعة بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

٤) إذا مثَّل الاقتران ف(ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته، وكان ف(ن) = $ن^{٣} - ن^{٢} + ٥$، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤م/$ث^{٢}$؟

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الفصل الثاني

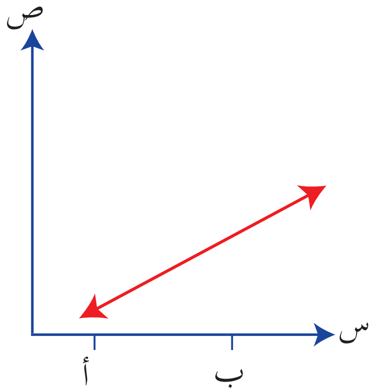
تطبيقات الاشتقاق

Applications on Derivatives

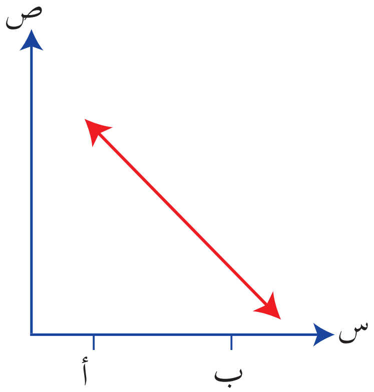
النتاجات

- تجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران باستخدام المشتقة الأولى.
- تستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد القيم القصوى.
- تستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى.

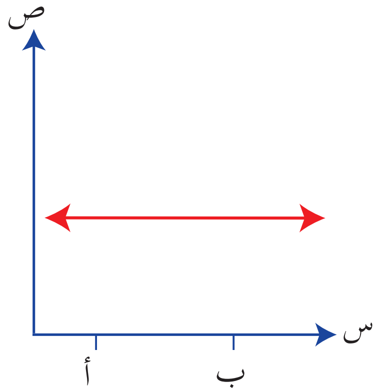
أولاً التزايد والتناقص Increasing and Decreasing



الشكل (٣–٢).



الشكل (٣–٣).



الشكل (٣–٤).

ما طبيعة علاقة المتغير ص بالمتغير س في كل من الأشكال السابقة؟

لاحِظ من الشكل (٣–٢) أنه كلما زادت قيمة س زادت قيمة ص، وكان الاقتران **متزايدًا** في الفترة [أ، ب].

أما في الشكل (٣–٣) فكلما زادت قيمة س قلت قيمة ص، وكان الاقتران **متناقصًا** في الفترة [أ، ب].

وأما في الشكل (٣–٤) فمهما تغيرت قيمة س فإن قيمة ص تبقى ثابتة، ويكون الاقتران في هذه الحالة **ثابتًا** في الفترة [أ، ب].

تعريف

إذا كان الاقتران ق مُعرَّفًا على الفترة [أ، ب] ، وكان $س_١$، $س_٢ \in$ [أ، ب] ، فإن:

١) الاقتران ق يكون متزايدًا في الفترة [أ، ب] إذا كان ق($س_٢$) > ق($س_١$) عندما $س_٢ > س_١$.

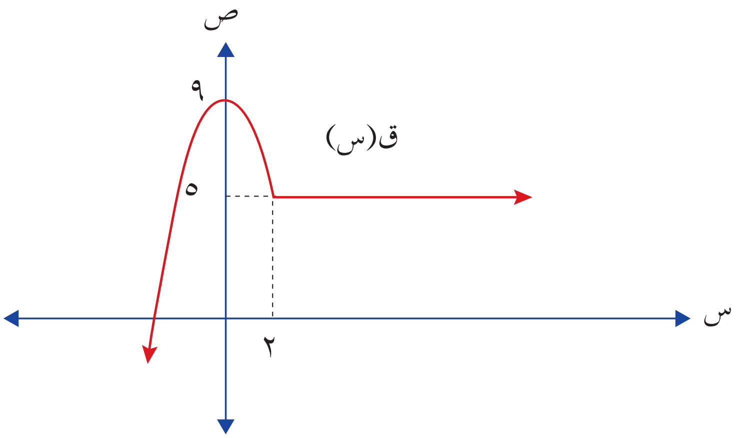
٢) الاقتران ق يكون متناقصًا في الفترة [أ، ب] إذا كان ق($س_٢$) < ق($س_١$) عندما $س_٢ > س_١$.

٣) الاقتران ق يكون ثابتًا في الفترة [أ، ب] إذا كان ق($س_٢$) = ق($س_١$) لقيم $س_٢$، $س_١$ جميعها.

مثال (١)

الشكل (٣–٥) يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح. جد فترات التزايد والتناقص والثبات لمنحنى الاقتران ق.

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ - س^٢ & ،\ س \leq ٢ \\ ٥ & ،\ س > ٢ \end{cases}$$



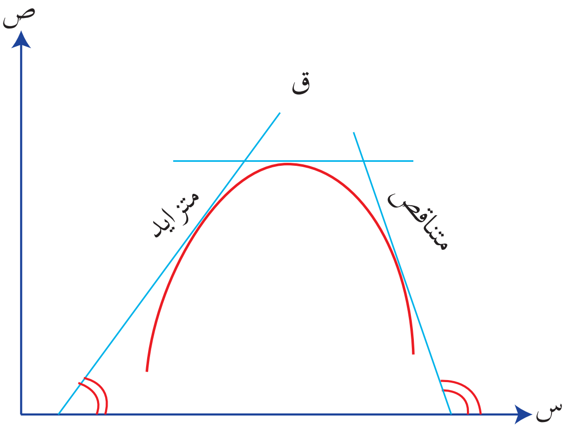
الشكل (٣–٥).

الحل

يتبين من الشكل (٣–٥) أن قيم ص تزداد كلما زادت قيم س على الفترة (–∞، ٠]، وهذا يعني أن منحنى الاقتران ق يكون متزايدًا في الفترة (–∞، ٠]. يتبين من الشكل أيضًا أنه كلما زادت قيم س تناقصت قيم ص ضمن الفترة [٠، ٢]، وهذا يعني أن الاقتران ق يكون اقترانًا متناقصًا في الفترة [٠، ٢].

يشير الشكل نفسه إلى أنه كلما زادت قيم س في الفترة [٢، ∞) بقيت قيم ص كما هي، فيكون الاقتران ق ثابتًا في الفترة [٢، ∞).

لمعرفة علاقة فترات التزايد والتناقص بإشارة المشتقة الأولى، انظر الشكل (٣–٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق.



الشكل (٣ – ٦).

يبين الشكل (٣–٦) أنه إذا كان الاقتران ق متزايدًا فإن مشتقته تكون موجبة؛ لأن المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. وبما أن ميل المماس يساوي ظل هذه الزاوية، وظل الزاوية الحادة أكبر من صفر، ومشتقة الاقتران تساوي ميل المماس، فإن هذه المشتقة تكون موجبة.

أما إذا كان الاقتران ق متناقصًا فإن مشتقته تكون سالبة؛ لأن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. وبما أن ميل المماس يساوي ظل الزاوية المنفرجة وهو أقل من صفر (سالب)، ومشتقة الاقتران تساوي ميل المماس، فإن هذه المشتقة تكون سالبة.

وأما إذا كان المماس موازيًا لمحور السينات فإن ميل المماس يساوي صفرًا.

بناءً على ذلك، يمكن استنتاج النظرية الآتية:

نظرية

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على الفترة [أ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ، ب)، فإن:

١) ق يكون متزايدًا في الفترة [أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر لجميع قيم س ∋ (أ، ب).

٢) ق يكون متناقصًا في الفترة [أ، ب] إذا كان قَ(س) < صفر لجميع قيم س ∋ (أ، ب).

٣) ق يكون ثابتًا في الفترة [أ، ب] إذا كان قَ(س) = صفرًا لجميع قيم س ∋ (أ، ب).

لإيجاد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الأولى، يجب عمل الآتي:

١) إيجاد المشتقة الأولى قَ(س) للاقتران ق.

٢) إيجاد أصفار المشتقة الأولى بوضع قَ(س) = صفرًا، وإيجاد قيم س.

٣) البحث في إشارة المشتقة الأولى حول أصفار هذه المشتقة.

٤) تحديد الفترات التي تكون عندها المشتقة الأولى قَ(س) > صفر (أي موجبة)، فتكون هي فترات التزايد، وكذا تحديد الفترات التي تكون عندها قَ(س) < صفر (أي سالبة)، فتكون هي فترات التناقص.

لاحِظ أنه لمعرفة إشارة قَ(س) على فترة معينة، فإننا نختار أي قيمة داخل الفترة، ونجد إشارة المشتقة عند هذه القيمة، فتكون الإشارة هي إشارة المشتقة على هذه الفترة.

مثال (٢)

جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ٤س + ٣

الحل

قَ(س) = ٢س + ٤

٢س + ٤ = صفرًا.

ومنه: س = −٢

ابحث في إشارة قَ(س).

عندما تكون س< −٢ اختر أي قيمة داخل الفترة مثل س = −٣،

فتكون قَ(−٣) = ٢(−٣) + ٤ = −٢ > صفر . الإشارة سالبة

وعندما تكون س> −٢ اختر قيمة مثل الصفر:

فتكون قَ(٠) = ٢(٠) + ٤ = ٤ < صفر . الإشارة موجبة

ق(س)	↗ ↘
إشارة قَ(س)	+ + + + + + صفر − − − − − −
س	∞ −٢ −∞

اعتمادًا على جدول الإشارات، واختبار المشتقة الأولى، فإن الاقتران ق يكون متناقصًا في الفترة (−∞، −٢] ، ومتزايدًا في الفترة [−٢، ∞).

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٤٨س − س^{٣}، فجد فترات التزايد والتناقص لهذا الاقتران.

الحل

قَ(س) = ٤٨ − ٣س^{٢}

٤٨ − ٣س^{٢} = ٠

ومنه س^{٢} = ١٦

س = ٤، −٤

ابحث في إشارة قَ(س).

عندما تكون س < −٤ اختر قيمة مثل س = −٥

إذن: قَ(−٥) = ٤٨ − ٣(−٥)^{٢} = ٤٨ − ٧٥ = −٢٧ الإشارة سالبة

وعندما تكون −٤ < س < ٤ اختر قيمة مثل س = ١:

فتكون قَ(١) = ٤٨ − ٣(١)^{٢} = ٤٨ − ٣ = ٤٥ الإشارة موجبة

وعندما تكون س > ٤ اختر قيمة مثل س = ٥:

فتكون قَ(٥) = ٤٨ − ٣(٥)^{٢} = ٤٨ − ٧٥ = −٢٧ الإشارة سالبة

ق(س)	↘ ↗ ↘
قَ(س)	− − − − − − − صفر + + + + + + صفر − − − − − −
س	−∞ −٤ ٤ ∞

وبذلك يكون الاقتران ق متناقصًا في الفترتين: (−∞، −٤]، [٤، ∞)، ومتزايدًا في الفترة [−٤، ٤].

تدريب ١

جد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران مما يأتي:

١) هـ(س) = ٧ + س.   ٢) ق(س) = (٢س − ٤)^{٢}.

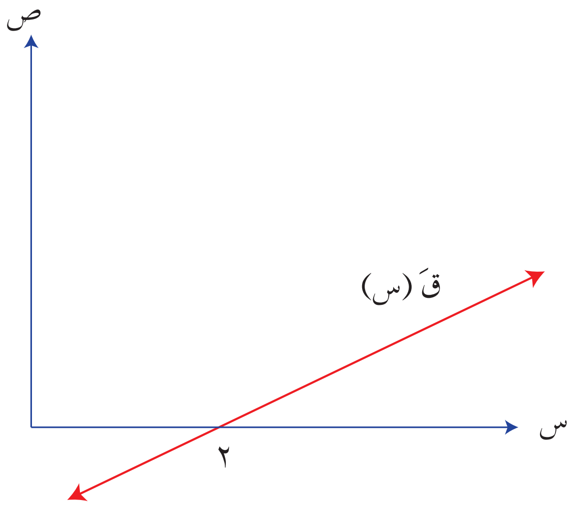
مثال (٤)

اعتمادًا على الشكل (٣−٧) الذي يمثل منحنى قَ(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

الحل

لإيجاد فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق:

١) يجب البحث في إشارة المشتقة الأولى، ما يعني تحديد أصفار المشتقة الأولى (أي نقاط التقاطع مع محور السينات)، وهي في هذا المثال (س = ٢).



الشكل (٣−٧).

٢) يجب البحث في إشارة اقتران المشتقة الأولى قَ(س) قبل العدد (٢) وبعده.

ق(س)	↗ ↘
إشارة قَ(س)	+ + + + + + صفر − − − − − −
قيم س	∞ ٢ −∞

وعليه، يكون الاقتران ق متناقصًا على الفترة (−∞، ٢] ، ومتزايدًا على الفترة [٢، ∞).

فكر وناقش

فسِّر كيف حصلت على جدول الإشارات من الرسم البياني في المثال (٣)، مناقشًا إجابتك مع زملائك. ما قيمة قَ(٢)؟

الأسئلة

١) جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي:

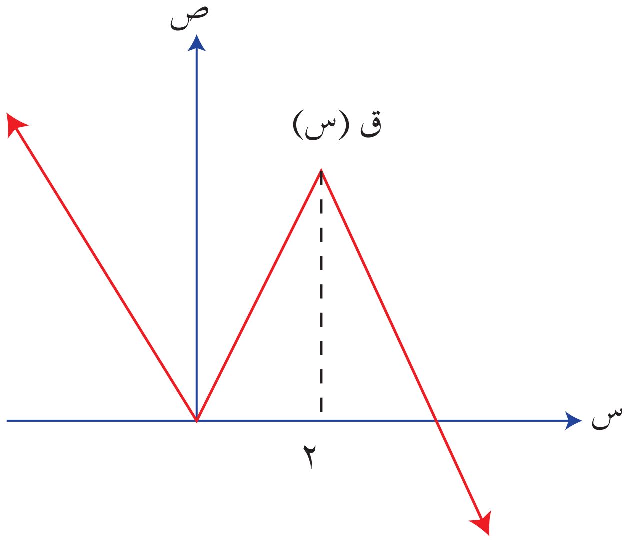
أ) $ق(س) = ٣ - ٤س$

ب) $ق(س) = ٨س - س^{٢}$

جـ) $ق(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$

د) $ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)$

٢) اعتمادًا على الشكل (٣-٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-٨).

٣) بيِّن أن الاقتران $ق(س) = س^{٣} + ٢س + ٥$ يكون متزايدًا لقيم س جميعها.

ثانيًا القيم القصوى Extreme Values

١) ما المقصود بالقيمة القصوى؟

٢) ما سلوك الاقتران حول القيمة القصوى؟

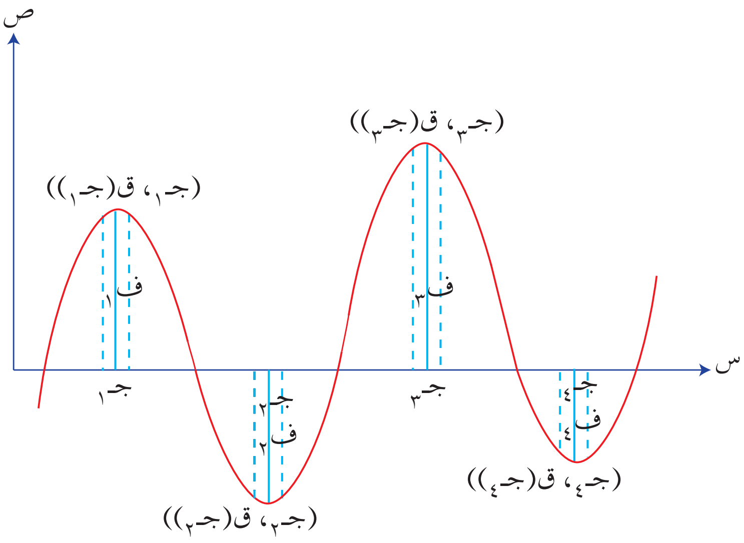
٣) ما سلوك المشتقة حول القيمة القصوى؟

٤) ما قيمة المشتقة عند القيم القصوى؟

ستتعرف في هذا الدرس مفهوم **القيم القصوى**؛ سواء أكانت **عظمى محلية**، أم **صغرى محلية**. وستتعرف أيضًا كيفية إيجاد هذه القيم، وإذا كان يمكن استخدام المشتقات في إيجادها.

يمثل الشكل (٣–٩) منحنى الاقتران ص = ق(س)، وتُسمّى النقط (جـ$_{١}$، ق (جـ$_{١}$))، (جـ$_{٢}$، ق (جـ$_{٢}$))، (جـ$_{٣}$، ق(جـ$_{٣}$))، (جـ$_{٤}$، ق (جـ$_{٤}$))، التي يتغير عندها الاقتران من حالة التزايد إلى التناقص أو العكس **النقط الحرجة**، ويكون عندها المماس أفقيًّا؛ أي قَ(س) = صفرًا.

لاحِظ أن قيمة الاقتران عند القيمة الحرجة س = جـ$_{١}$، والقيمة س = جـ$_{٣}$ هي أكبر من أي قيمة له عند النقط التي تسبق هذه النقطة أو تليها في الفترة ف$_{١}$ (فترة جزئية صغيرة جدًّا تحوي جـ$_{١}$)، والفترة ف$_{٣}$ (فترة جزئية صغيرة جدًّا تحوي جـ$_{٣}$)، وتُسمّى القيم ق(جـ$_{١}$)، ق(جـ$_{٣}$) **قيم الاقتران العظمى المحلية**.



الشكل (٣–٩).

أما عند القيمة الحرجة س = جـ$_{٢}$، والقيمة س = جـ$_{٤}$ فتكون قيمة الاقتران أصغر من أي قيمة له عند النقط التي تسبق هذه النقطة أو تليها في الفترة ف$_{٢}$ (فترة جزئية صغيرة جدًّا تحوي جـ$_{٢}$)، والفترة ف$_{٤}$(فترة جزئية صغيرة جدًّا تحوي جـ$_{٤}$)، وتُسمّى القيم ق(جـ$_{٢}$)، ق(جـ$_{٤}$) **قيم الاقتران الصغرى المحلية**.

تعريف

يُطلق على الأعداد جـ الواقعة في مجال الاقتران ق، التي يكون عندها قَ(جـ) = صفرًا أو قَ(جـ) غير موجودة، اسم **الأعداد الحرجة** للاقتران ق، وتُسمّى النقط (جـ، ق(جـ)) الواقعة على منحنى الاقتران ق **نقطًا حرجةً**.

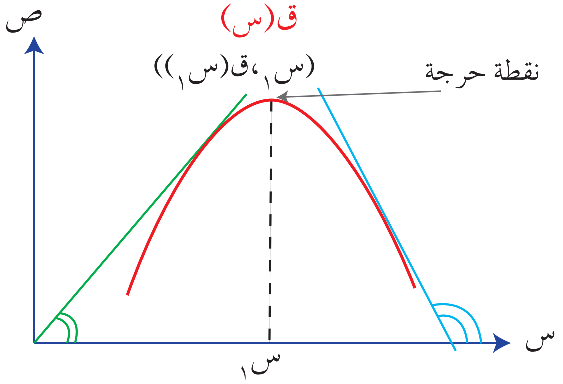
يقتصر الحديث في هذا الفصل على الأعداد الحرجة جـ التي يكون عندها قَ(جـ) = صفرًا.

تعريف

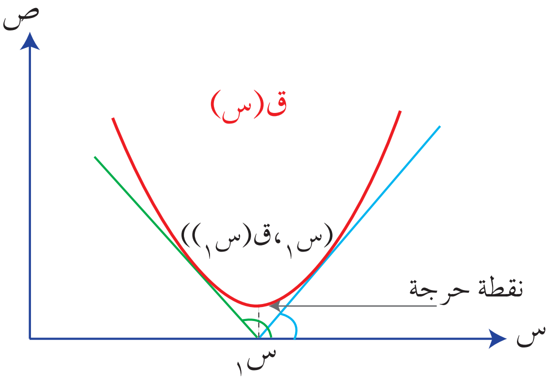
١) يكون للاقتران ص = ق(س) **قيمة عظمى محلية** عندما س = جـ من مجاله إذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة ف (فترة جزئية صغيرة جدًّا تحوي العدد جـ) ،حيث إن ق(جـ) > ق(س) لقيم س جميعها في الفترة ف.

٢) يكون للاقتران ص = ق(س) **قيمة صغرى محلية** عندما س = جـ من مجاله إذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة ف (فترة جزئية صغيرة جدًّا تحوي العدد جـ)، حيث ق(جـ) < ق(س) لقيم س جميعها في الفترة ف.

لاحِظ أنه حتى يكون لمنحنى الاقتران ق قيمة عظمى محلية عند نقطة ما، فإن قيمة ق(س) تزداد حتى تصل س إلى **قيمة حرجة**، ثم تنقص بعدها مباشرة؛ أي تكون قَ(س) > صفر قبل القيمة الحرجة، ثم تصبح قَ(س) < صفر بعد النقطة الحرجة، وهذا يعني أن ميل المماس قبل النقطة الحرجة التي عندها قيمة عظمى محلية يكون موجبًا ، ثم يصبح سالبًا بعد هذه النقطة، انظر الشكل (٣-١٠).



الشكل (٣-١٠).



الشكل (٣-١١).

أما إذا كان لمنحنى الاقتران قيمة صغرى محلية عند نقطة ما فإن قيمة ق (س) تتناقص حتى تصل إلى قيمة حرجة، ثم تتزايد بعدها مباشرة؛ أي تكون قَ(س) <٠ قبل القيمة الحرجة، ثم تصبح قَ(س) >٠ بعد القيمة الحرجة، وهذا يعني أن ميل المماس قبل القيمة الحرجة التي عندها قيمة صغرى محلية يكون سالبًا، ثم يصبح موجبًا بعد هذه القيمة ، انظر الشكل (٣–١١).

يُذكر أن النقطة التي تتغير حولها إشارة المشتقة الأولى قَ(س) تُسمّى **نقطةً حرجةً** للاقتران ق، وأن القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للاقتران تُسمّى **قيمًا قصوى**. وبوجه عام، يمكن اعتماد النظرية الآتية لإيجاد القيم القصوى باستخدام المشتقة الأولى:

اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى

افرض أن (جـ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق المتصل عند جـ، إذا وجد العدد الموجب د، بحيث إذا كانت:

١) قَ(س) > ٠ لكل س ∋ (جـ ــ د ، جـ)، قَ(س) < ٠ لكل س ∋ (جـ، جـ + د)، فإن ق(جـ) تكون قيمة عظمى محلية للاقتران ق.

٢) قَ(س) < ٠ لكل س ∋ (جـ ــ د ، جـ)، قَ(س) > ٠ لكل س ∋ (جـ، جـ + د)، فإن ق(جـ) تكون قيمة صغرى محلية للاقتران ق.

٣) إشارة قَ لا تتغير حول النقطة (جـ ، ق(جـ))، فإن ق(جـ) لا تمثل قيمة قصوى للاقتران.

لإيجاد القيم القصوى للاقتران ص = ق(س)، يجب عمل الآتي:

١) إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق.

٢) مساواة المشتقة الأولى بالصفر، ثم حل المعادلة الناتجة.

٣) دراسة إشارة المشتقة الأولى قَ(س) حول أصفارها.

فإذا تغيرت إشارة المشتقة الأولى من موجبة إلى سالبة حول نقطة معينة فإن هذه النقطة تمثل قيمة عظمى محلية للاقتران ق. أما إذا تغيرت إشارة المشتقة الأولى من سالبة إلى موجبة حول نقطة معينة فإن هذه النقطة تمثل قيمة صغرى محلية للاقتران ق.

مثال (١)

جد النقط الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = س^{٢} − ٤س + ٣

الحل

قَ(س) = ٢س − ٤

قَ(س) = ٠

ومنه: ٢ س − ٤ = ٠

∴ س = ٢، وعليه توجد قيمة حرجة عندما س = ٢

ق(س)	↘ ↗
إشارة قَ(س)	− − − − − − − صفر + + + + + +
قيم س	−∞ ٢ ∞

يتبين من جدول الإشارات أن للاقتران قيمة صغرى محلية عندما س = ٢، وأن قيمتها

ق(٢) = (٢)^{٢} − ٤(٢) + ٣ = ٤ − ٨ + ٣ = −١

∴ النقطة الحرجة هي (٢، −١)، والقيمة الصغرى المحلية = ق(٢) = −١

فكر وناقش

حُلَّ المثال السابق بطريقة أخرى.

تدريب ١

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = س^{٢} − ٢س + ١

مثال (٢)

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ٥

الحل

قَ(س) = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

قَ(س) = ٠، ومنه:

٦س^{٢} − ٦س − ١٢ = ٠

س^{٢} − س − ٢ = ٠

(س − ٢) (س + ١) = ٠، ومنه:

س − ٢ = صفر ، س = ٢

أو: س + ١ = صفر ، س = − ١

∴ توجد أعداد حرجة عندما س = ٢، س = −١

أما النقط الحرجة فهي: (٢، ق(٢)) = (٢، −١٥) ، (−١، ق (−١)) = (−١، ١٢).

↗ ↘ ↗	ق(س)
+ + + + + + صفر − − − − − − صفر + + + + + +	إشارة قَ(س)
∞ ٢ ١− ∞−	قيم س

يتبين من جدول الإشارات أن للاقتران ق قيمة عظمى محلية عندما س = −١ (لماذا؟)، هي

ق(−١) = ١٢

يوجد أيضًا قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما س = ٢ (لماذا؟)، هي ق(٢) = −١٥

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٢س (١٢ − س^{٢})، فجد كلًّا مما يأتي:

١) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

٢) قيم س الحرجة للاقتران ق.

٣) القيم القصوى للاقتران ق، مُحدِّدًا نوعها.

يمكن تحديد القيم القصوى للاقتران عن طريق اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب]، وكان قَ(س)، قً(س) معرفين على الفترة (أ، ب)، وكان جـ ∈ (أ، ب)، حيث قَ(جـ) = صفرًا (أي إن (جـ، ق(جـ)) نقطة حرجة)، وكان:

١) قً(جـ) > صفرًا، فإن ق(جـ) هي قيمة صغرى محلية للاقتران ق.

٢) قً(جـ) < صفرًا، فإن ق(جـ) هي قيمة عظمى محلية للاقتران ق.

٣) قً(جـ) = صفرًا، فإن الاختبار يفشل، فيُستخدم اختبار المشتقة الأولى.

لاحِظ أن اختبار المشتقة الأولى استُخدِم في إيجاد القيم القصوى للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ٥ الوارد ذكره في المثال (٢)، وأنه يمكن إيجاد هذه القيم أيضًا باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ٥

قَ(س) = ٦س^{٢} − ٦س − ١٢

٦س^{٢} − ٦س − ١٢ = ٠

س^{٢} − س − ٢ = ٠

(س − ٢) (س + ١) = ٠

س − ٢ = ٠، ومنه: س = ٢

س + ١ = ٠ ومنه: س = −١

∴ يوجد أعداد حرجة للاقتران ق عندما $س = ٢$، $س = -١$

$ق''(س) = ١٢س - ٦$

$ق''(٢) = ١٢(٢) - ٦ = ١٨ > ٠$

∴ توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما $س = ٢$، هي $ق(٢) = ١٥$

$ق''(-١) = ١٢(-١) - ٦ = -١٨ < ٠$

∴ توجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق عندما $س = -١$، هي $ق(-١) = ١٢$

مثال (٣)

باستخدام اختبار المشتقة الثانية، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق، حيث

$ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٢٤س + ٢$

الحل

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٦س - ٢٤$

$ق'(س) = \text{صفرًا}$، ومنه:

$٣س^{٢} - ٦س - ٢٤ = \text{صفرًا}$.

$س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$

$س - ٤ = ٠$ ، ومنه: $س = ٤$

$س + ٢ = ٠$ ، ومنه: $س = -٢$

∴ يوجد أعداد حرجة للاقتران ق عندما $س = ٤$ ، $س = -٢$

$ق''(س) = ٦س - ٦$

$ق''(٤) = ٦(٤) - ٦ = ١٨ > \text{صفر}$.

∴ توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق عندما $س = ٤$، هي $ق(٤) = -٧٨$

$ق''(-٢) = ٦(-٢) - ٦ = -١٨ < \text{صفر}$.

∴ توجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق عندما $س = -٢$، هي $ق(-٢) = ٣٠$

تدريب ٣

باستخدام اختبار المشتقة الثانية، جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٢

مثال (٤)

جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = (س − ١)^{٤} .

الحل

لإيجاد القيم القصوى المحلية لهذا الاقتران، استخدم اختبار المشتقة الثانية:

قَ(س) = ٤(س − ١)^{٣}

٤(س − ١)^{٣} = ٠

∴ س = ١

قً(س) = ١٢(س − ١)^{٢}

عوِّض قيمة س = ١ في قاعدة الاقتران قً:

قً(١) = ١٢(١−١)^{٢} = ٠

فشل الاختبار، وهذا يُحتِّم استخدام اختبار المشتقة الأولى.

ق(س)	↘ ↗
إشارة قَ(س)	− − − − − − − صفر + + + + + +
س	١

∴ توجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س) عندما س = ١، هي ق(١) = ٠

الأسئلة

١) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

أ) $ق(س) = س^{٣} - ٣س + ١$

ب) $ل(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$

جـ) $هـ(س) = س^{٣} + ٤$

د) $ك(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٤س + ٨$

٢) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) $ق(س) = ٨ - س^{٢}$

ب) $ق(س) = س^{٢} + ٤$

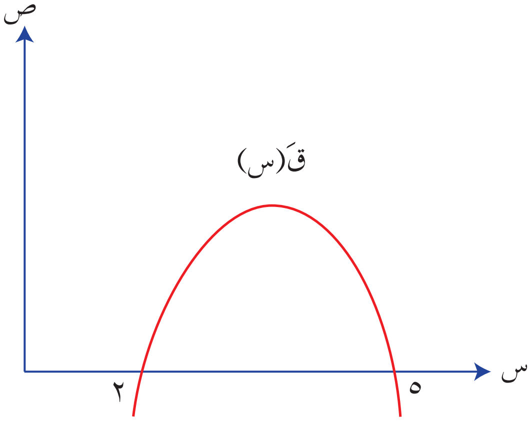
جـ) $ق(س) = ٢س^{٣} - ٦س$

٣) اعتمادًا على الشكل (٣–١٢) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق، حيث $قَ(٢) = قَ(٥) =$ صفرًا ، جد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق مُحدِّدًا نوعها.



الشكل (٣–١٢).

٤) إذا كان للاقتران $ق(س) = ٣س^{٢} - أس + ٤$ قيمة حرجة عندما $س = ٢$، فجد قيمة الثابت أ.

الفصل الثالث

تطبيقات Applications

النتاجات

- تحل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.
- تحل مسائل اقتصادية تتعلق بالقيم القصوى.

أولًا تطبيقات على القيم القصوى Applications of Extreme Values

ناقش أيمن زميله سعيدًا في طريقة حل المسألة الآتية:

ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٢٠)، ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن؟

كيف يمكن حل هذه المسألة؟ وهل للقيم القصوى أثر في ذلك؟ للإجابة، انظر المثال (١).

مثال (١)

ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما (٦٤)، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

الحل

مجموع العددين الموجبين = ٦٤

افرض أن العدد الأول هو س.

افرض أن العدد الثاني هو ص.

س + ص = ٦٤، ومنه:

ص = ٦٤ − س.

إذا كان حاصل ضربهما ح، فإن:

ح = س × ص .

بما أن المطلوب هو إيجاد أكبر قيمة لحاصل ضرب العددين س، ص، فإن ذلك يكافئ إيجاد القيمة العظمى للاقتران ح . ولعمل ذلك، يجب جعل الاقتران ح بدلالة متغير واحد:

$\text{ح}(\text{س}) = \text{س} \times (\text{٦٤} - \text{س})$

$\text{ح}(\text{س}) = \text{٦٤س} - \text{س}^{٢}$

$\text{ح}'(\text{س}) = \text{٦٤} - \text{٢ س}$

$\text{ح}'(\text{س}) = \text{٠}$ ، ومنه:

$\text{٦٤} - \text{٢ س} = \text{٠}$

$\therefore \text{س} = \text{٣٢}$

للتحقق من أن س = ٣٢ تجعل حاصل الضرب قيمة عظمى، يجب إيجاد $\text{ح}''(\text{٣٢})$، ومنه:

$\text{ح}''(\text{س}) = -\text{٢}$

$\text{ح}''(\text{٣٢}) = -\text{٢} < \text{٠}$

أي إن للاقتران ح قيمة عظمى عندما تكون س = ٣٢، ويكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن عندما يكون العدد الأول = ٣٢، و العدد الثاني = ٦٤ – ٣٢ = ٣٢

استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع القيم القصوى.

تحدث وناقش

اقترح طريقة أخرى لحل المثال السابق.

تدريب ١

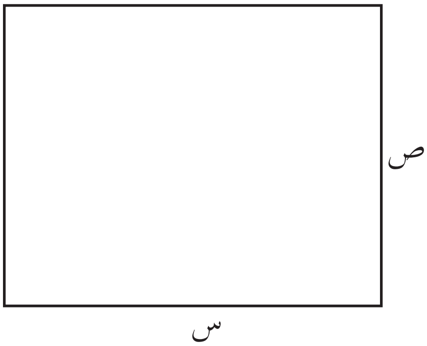
حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٢)

قطعة أرض مستطيلة الشكل، محيطها ٦٠٠م . ما بُعْدا قطعة الأرض اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن؟

الحل

افرض أن بُعْدي قطعة الأرض هما س، ص، انظر الشكل (٣–١٣).



الشكل (٣–١٣).

محيط قطعة الأرض = ٦٠٠م

المساحة (م) = الطول × العرض

م = س × ص

المحيط = ٢ × الطول + ٢ × العرض

٦٠٠ = ٢س + ٢ص

ص = ٣٠٠ – س

م = س × ص، ومنه:

م = س × (٣٠٠ – س)

م = ٣٠٠س – $س^{٢}$

مَ = ٣٠٠ – ٢س

مَ = صفرًا ، ومنه:

٣٠٠ – ٢س = ٠

∴ س = ١٥٠

للتحقق من وجود قيمة عظمى للاقتران م عند س = ١٥٠، استخدم اختبار المشتقة الثانية:

مً(س) = –٢

∴ مً(١٥٠) = –٢ < صفر.

∴ المساحة أكبر ما يمكن (قيمة عظمى) عندما س = ١٥٠ مترًا.

ص = ٣٠٠ – س، ص = ١٥٠ مترًا.

تدريب ٢

يملك مُزارع قطعة أرض تقع على ضفة نهر مستقيم. فإذا اشترى الـمُزارع ٣٠٠ متر من الأسلاك الشائكة، فما أبعاد أكبر مساحة مستطيلة من قطعة الأرض يمكن تسييجها بها من دون تسييج البُعْد الواقع على ضفة النهر؟

مثال (٣)

صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربعة الشكل، ومجموع أبعاده الثلاثة ١٢٠سم. جد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

الحل

افرض أن أبعاد الصندوق هي: س ، س ، ص (لماذا؟) ، انظر الشكل (٣–١٤).

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

ح = س × س × ص

ح = س^{٢}ص

لكن، س + س + ص = ١٢٠ ← ٢س + ص = ١٢٠

ومنه: ص = ١٢٠ – ٢س

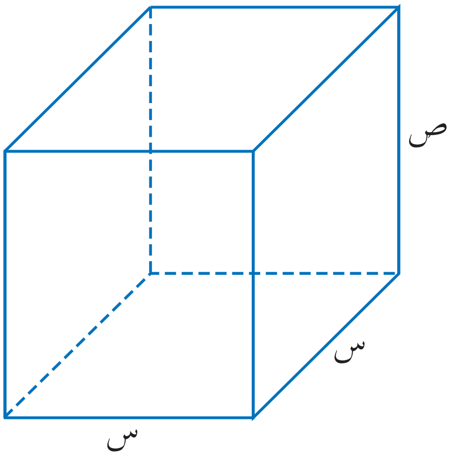
ح (س) = س^{٢} (١٢٠ – ٢س)

ح (س) = ١٢٠س^{٢} – ٢س^{٣}

حَ (س) = ٢٤٠س – ٦س^{٢} = ٠

∴ ٦س(٤٠ – س) = ٠

ومنه: س = ٠، أو: س = ٤٠



الشكل (٣–١٤).

للتحقق من القيمة العظمى، يجب إيجاد:

حً (س) = ٢٤٠ – ١٢س

حً (٠) = ٢٤٠ < ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ٠، لذلك تُرفض (لماذا؟).

حً (٤٠) = ٢٤٠ – ١٢(٤٠)

٢٤٠ – ٤٨٠ = – ٢٤٠ > ٠

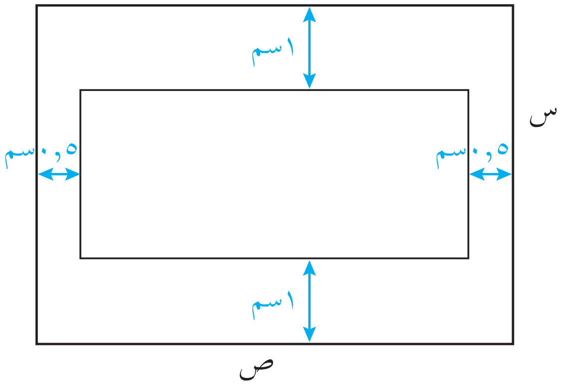
∴ توجد قيمة عظمى عندما س = ٤٠

عندما س = ٤٠، فإن ص = ١٢٠ – ٢ (٤٠) = ٤٠

∴ أبعاد الصندوق هي: الطول = ٤٠سم، العرض = ٤٠سم، الارتفاع = ٤٠سم.

مثال (٤)

صحيفة ورقية مستطيلة الشكل، مساحتها ٥٠سم^{٢}، يراد طباعة إعلان عليها. إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١سم، وفي كل جانب ٠,٥سم، فجد بُعْدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.



الشكل (٣–١٥).

الحل

افرض أن بُعْدي الورقة هما س، ص، والمساحة المطبوعة هي م.

المعطيات: مساحة الصحيفة ٥٠سم^{٢}.

المطلوب: إيجاد بُعْدي الورقة حتى تكون مساحة الطباعة أكبر ما يمكن.

لحساب ذلك، جد مساحة منطقة الطباعة $\text{م} = (\text{س} - ٢)\ (\text{ص} - ١)$، لاحِظ الشكل (٣−١٥)، ولكن:

$٥٠ = \text{س} \times \text{ص}$ ، ومنه: $\text{ص} = \frac{٥٠}{\text{س}}$

$$\text{م(س)} = (\text{س} - ٢)\left(\frac{٥٠}{\text{س}} - ١\right)$$

$$\text{م(س)} = ٥٠ - \text{س} - \frac{١٠٠}{\text{س}} + ٢$$

$$\text{م}'(\text{س}) = -١ + \frac{١٠٠}{\text{س}^٢}$$

$-١ + \frac{١٠٠}{\text{س}^٢} = ٠$ ، ومنه: $\text{س}^٢ = ١٠٠$

∴ $\text{س} = ١٠$، أو: $\text{س} = -١٠$، لذلك تُهمل (لماذا؟).

للتحقق من أن للاقتران قيمة عظمى عندما $\text{س} = ١٠$سم، استخدم اختبار المشتقة الثانية:

$$\text{م}''(\text{س}) = \frac{-٢٠٠}{\text{س}^٣}$$

$$\text{م}''(١٠) = \frac{-٢٠٠}{١٠٠٠} < \text{صفر}$$

∴ توجد قيمة عظمى عندما $\text{س} = ١٠$

لإيجاد قيمة $\text{ص} = \frac{٥٠}{\text{س}}$

$\text{ص} = ٥$

∴ بُعْدا الورقة اللذان يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن هما: ١٠سم ، ٥سم.

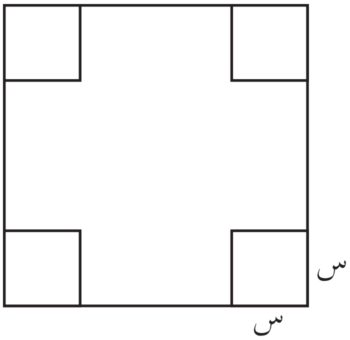
الأسئلة

١) ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما ٦٠، وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن؟

٢) صحيفة ورقية مستطيلة الشكل، مساحتها ٣٢سم^{٢}، يراد طباعة إعلان عليها. إذا كان عرض كل هامش في رأس الورقة وأسفلها ١سم، وفي كل جانب ٠,٥ سم، فجد بُعْدي الورقة اللذين يجعلان المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

٣) أراد إبراهيم أن يفتح نافذة مستطيلة في جدار إحدى غرف منزله، بحيث يكون محيط النافذة ٦م . جد بُعْدي النافذة اللذين يسمحان لأكبر كمية ممكنة من الضوء بدخول الغرفة.

٤) كرتونة مربعة الشكل طول ضلعها ١٢سم، إذا قُصَّ من جوانبها الأربعة (٤) مربعات متساوية طول ضلعها س، ثم رُفِعت الجوانب، وأصبحت على صورة علبة مفتوحة من أعلى، فجد قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن.



٥) إذا كان مجموع ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي ٤٠ سم، فجد أكبر مساحة ممكنة للمثلث.

٦) يراد تصميم بركة قاعدتها مستطيلة الشكل، ومساحتها ٣٦م^{٢}، ثم إحاطتها بممر خارجي منتظم عرضه متران. جد أبعاد البركة المراد تصميمها بحيث تكون المساحة الكلية للبركة والممر أقل ما يمكن.

ثانيًا تطبيقات اقتصادية على التفاضل Economic Applications on Differentiation

ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريًّا. فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + س^{٢}، وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار، فجد عدد الثلاجات التي يجب أن يبيعها المصنع شهريًّا لتحقيق أكبر ربح ممكن.

يُستخدَم علم التفاضل أيضًا في الكثير من المسائل الاقتصادية التي تُحتِّم على الشركات أو المصانع اتخاذ بعض القرارات المتعلقة بإنتاج عدد مناسب من السلع للحصول على أكبر ربح ممكن، أو أقل تكلفة. فمثلًا إذا كانت تكلفة س من وحدات سلعة معينة ينتجها مصنع ما تعطى بالاقتران ك(س) = س^{٢} + ٥س + ١٢٠٠، فإن ك(س) يُسمّى اقتران **التكلفة الكلية**، وهو يعتمد على المقدار الثابت (١٢٠٠)، والمقدار المتغير (س^{٢} + ٥س) الذي يتغير وفق عدد الوحدات المنتجة س. وتُسمّى المشتقة الأولى للاقتران ك(س) **التكلفة الحدية**؛ أي إن كَ(س) = معدل تغير التكلفة بالنسبة إلى عدد الوحدات المنتجة، علمًا بأن التكلفة الحدية لا تتأثر بالمقدار الثابت لأن مشتقته صفر. لحساب التكلفة الحدية لِـ (٢٠) وحدة، يتعين أولًا إيجاد التكلفة الحدية.

كَ(س) = ٢س + ٥

كَ(٢٠) = ٢(٢٠) + ٥ = ٤٥ دينارًا.

وبطريقة مشابهة، إذا كان **الإيراد الكلي** الناتج من بيع س من هذه الوحدات يعطى بالاقتران د(س) فإن دَ(س) تُسمّى **الإيراد الحدي** (معدل التغير في الإيراد) بالنسبة إلى عدد الوحدات المبيعة، وإذا كان **الربح** يعطى بالاقتران ر(س) فإن رَ(س) تُسمّى **الربح الحدي** (معدل التغير في الربح) بالنسبة إلى عدد الوحدات المبيعة.

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

ر(س) = د(س) – ك(س)

∴ رَ(س) = دَ(س) – كَ(س)

أي إن **الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكلفة الحدية**.

لاحِظ أنه إذا كان رَ(س) = ٠ فإن: دَ(س) = كَ(س)، ومن ذلك نجد أن الربح يكون أكبر ما يمكن عندما تكون التكلفة الحدية مساوية للإيراد الحدي.

تعريف

إذا كان س هو عدد الوحدات المنتجة من سلعة معينة ضمن فترة محددة في مصنع ما فإن:

ك(س) = اقتران التكلفة الكلية.

كَ(س) = التكلفة الحدية.

د (س) = اقتران الإيراد الكلي = التكلفة الكلية + الربح

= ك (س) + ر(س).

دَ(س) = الإيراد الحدي.

ر(س) = اقتران الربح = الإيراد الكلي − التكلفة الكلية

= د(س) − ك(س).

رَ(س) = الربح الحدي = الإيراد الحدي − التكلفة الحدية

= دَ(س) − كَ(س).

مثال (١)

لاحظت إحدى الشركات التي تصنع ألعاب الأطفال أن التكلفة الكلية لإنتاج س لعبة هي

ك(س) = ٣٠٠ − ٢,٠س + ٠,٠٠١ س^{٢} دينار، وأن الربح الناتج من بيع س لعبة هو

ر(س) = ٤,٠س دينار. جد كلًّا مما يأتي:

١) اقتران التكلفة الحدية.

٢) عدد اللعب اللازم إنتاجها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن.

٣) الإيراد الحدي الناتج من بيع (١٠٠٠) لعبة.

الحل

١) التكلفة الحدية = كَ(س) = −٠,٢ + ٠,٠٠٢س.

٢) تكون التكلفة أقل ما يمكن عندما كَ(س) = صفرًا.

−٠,٢ + ٠,٠٠٢س = ٠

س = ١٠٠

وبما أن كً(س) = ٠,٠٠٢ > صفر، فإن كً(١٠٠) > ٠

∴ للاقتران ك قيمة صغرى عندما س = ١٠٠؛ لـذا فإن التكلفة تكون أقل ما يـمكن عندما س = ١٠٠ لعبة.

٣) الإيراد الكلي = ك(س) + ر(س)

د(س) = ٣٠٠ − ٠,٢س + ٠,٠٠١س^{٢} + ٠,٤س

د(س) = ٣٠٠ + ٠,٢س + ٠,٠٠١س^{٢}

الإيراد الحدي = دَ(س) = ٠,٢ + ٠,٠٠٢س

دَ(١٠٠٠) = ٠,٢ + ٠,٠٠٢ × ١٠٠٠ = ٠,٢ + ٢ = ٢,٢ دينار.

تدريب ١

إذا كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو د(س) = ٥٠س + ٢س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣٠س + ٤س^{٢} + ٢٠٠ دينار، حيث س عدد الوحدات المبيعة، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

مثال (٢)

وجد مصنع لإنتاج الأجهزة الإلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيًا تعطى بالاقتران ك(س) = ٥٠٠٠ + ٦٠س + ٠,٠٠٢س^{٢}. إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ ٨٠ دينارًا، فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل

عدد الأجهزة = س.

الإيراد الكلي الناتج من بيع الأجهزة = عدد الأجهزة × سعر الجهاز

د (س) = س × ٨٠

د (س) = ٨٠ س

الربح = الإيراد – التكاليف

ر(س) = ٨٠س – (٥٠٠٠ + ٦٠س + ٠,٠٠٢س^{٢})

رَ(س) = ٨٠ – ٦٠ – ٠,٠٠٤س

رَ(س) = ٢٠ – ٠,٠٠٤س

لإيجاد أكبر ربح ممكن:

رَ(س) = ٠ ، ومنه:

٢٠ – ٠,٠٠٤س = ٠

س = ٥٠٠٠ جهاز.

وبما أن رً(س) = – ٠,٠٠٤،

وأن رً(٥٠٠٠) = – ٠,٠٠٤ < صفر

فإن للربح قيمة عظمى عندما س = ٥٠٠٠ جهاز.

تدريب ٢

وجد مصنع لإنتاج أجهزة إلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيًا تعطى بالاقتران ك(س) = ٥٠س + ٣٠٠. إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ – س) دينار، فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن.

الأسئلة

١) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٨٠س + س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٤٠ + ١٦٠س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

٢) ينتج مصنع للحواسيب س جهاز أسبوعيًّا. فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢}، وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ دينارًا ، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

٣) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٦٠س − س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٢٠ + ٨س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

٤) إذا كان د(س) = ١٦س − س^{٢} − ٢٠ دينار، ك(س) = ٢س^{٢} − ٨س + ١٥ دينار، هما إيراد س من وحدات سلعة معينة وتكلفتها، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٦) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ٩٠ دينارًا. فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيًّا تعطى بالعلاقة:

ك(س) = ٠,٢س^{٢} + ٧٠س + ١٠٠ دينار، فجد الربح الحدي.

أسئلة الوحدة

١) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٣} − ١٢ن + ٣، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته ٤٢م/ث.

٢) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = م (ن − ١)^{٢}، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ تساوي ١٢م/ث، فجد قيمة الثابت م.

٣) قطعة أرض يراد تسييج جزء مستطيل منها بحيث تبلغ مساحته ٣٧٥٠م^{٢}. إذا كانت تكلفة المتر الطولي الواحد من جانبين متوازيين ثلاثة دنانير، ومن الجانبين الآخرين دينارين، فجد أبعاد قطعة الأرض التي يمكن تسييجها لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

٤) إذا كان ق(س) = س^{٢}(٦ − س)، فجد:

أ) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق.

ب) القيم العظمى والصغرى للاقتران ق (إن وجدت).

٥) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيًا تعطى بالعلاقة:

ك(س) = ٠,٣ س^{٢} + ٤٠س + ٧٠ دينارًا، فجد الربح الحدي.

٦) لكل من الاقترانين الآتيين، جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

أ) ق(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ٥

ب) ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٧

٧) إذا كان ق(س) = س(٣س − ١)^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

٨) ما العددان الموجبان اللذان مجموعهما ٥٠، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

٩) إذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢} دينار اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما، فجد التكلفة الحدية لإنتاج ٢٠ قطعة من هذه السلعة.

١٠) إذا كان ق(س) = $(٣س - ٤)^{٣}$، فجد قيمة س التي تجعل قَ(س) = ٣٦

١١) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح . ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان للاقتران ق(س) = أ$س^{٢}$ − ١٢س + ١ قيمة حرجة عندما س = ٣، فإن قيمة أ تساوي:

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٢ د) −٢

(٢) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = $(٢ - س)^{٤}$ عند النقطة ($س_{١}$، $ص_{١}$) يساوي (٤) ، فإن قيمة $س_{١}$ تساوي:

أ) −٣ ب) −٢ جـ) ٢ د) ٣

(٣) إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ − ٤س، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عندما س تساوي:

أ) صفرًا ب) ٢ جـ) −٤ د) ٤

(٤) فترة التزايد للاقتران ق(س) = $س^{٢}$ − ٢س − ٢ هي:

أ) [٢، ٣] ب) [٠، ١] جـ) [١، ∞) د) (−∞، ١]

(٥) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٦$ن^{٢}$ − $ن^{٣}$، حيث ف المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم في زمن قدره ن ثانية. المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفرًا هي:

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

(٦) إذا كان للاقتران ق(س) = أ$س^{٣}$ − ٣$س^{٢}$ قيمة صغرى محلية عند س = ١، فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ٢ ب) −٢ جـ) −٣ د) ٣

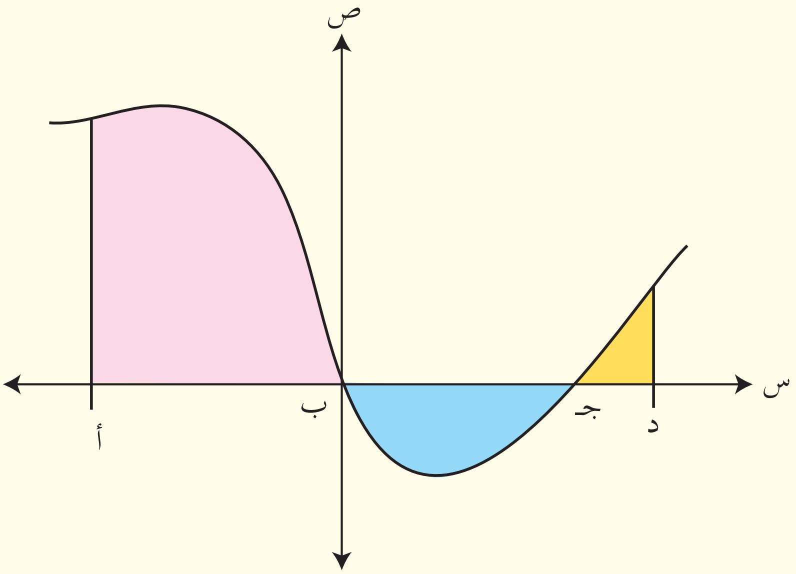
الفصل
الدراسي
الثاني

٢

الوحدة الرابعة

٤

التكامل وتطبيقاته



يُعدُّ التكامل أحد أهم الموضوعات في الرياضيات؛ لما له من أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات العملية، ولا سيما الاقتصادية، والهندسية، والعلمية، والاجتماعية، والإنسانية. وقد بدأ دراسته دراسة عميقة في نهاية القرن السابع عشر الميلادي كوكبة من علماء الرياضيات والفيزياء، مثل الإنجليزي إسحاق نيوتن (١٦٤٢م–١٧٢٧م)، والألماني جوتفرد ليبنتز (١٦٤٦م–١٧١٦م) اللذينِ يُعزى إليهما الفضل في اكتشاف علم التكامل، الذي توالت الدراسات المتعلقة به، واستمر التطور في تطبيقاته في جميع المجالات الحياتية والعلوم المختلفة.

تأتي دراسة التكامل في هذه الوحدة استكمالًا لدراستنا موضوع التفاضل؛ فالتفاضل والتكامل علمان متلازمان يتمم أحدهما الآخر.

Integration and its Applications

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- استخدام قواعد التكامل في حساب تكاملات الاقترانات كثيرات الحدود، والمثلثية (جاس، جتاس، قا^{٢}س)، والأسية الطبيعية.
- استخدام الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي في التكامل.
- تعرف التكامل المحدود، واستخدام خصائصه.
- استخدام طريقة التكامل بالتعويض في حساب تكاملات اقترانات محددة.
- استخدام التكامل في حل مسائل تتعلق بحركة جسيم على خط مستقيم، وتتضمن:
  - حساب المسافة إذا أعطيت نقطة البداية والسرعة بوصفها اقترانًا في الزمن.
  - حساب السرعة والمسافة ضمن معطيات معينة.
- نمذجة مسائل النمو والاضمحلال وحلها.
- استخدام التكامل في إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومحور السينات.
- حساب مشتقة كل من الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي.

الفصل الأول

التكامل Integration

النتاجات

- تتعرف مفهوم التكامل غير المحدود وعلاقته بالتفاضل.
- تجد التكامل غير المحدود لاقترانات معينة.
- تتعرف التكامل المحدود.
- تجد التكامل المحدود لاقترانات معينة.
- تستنتج خصائص التكامل المحدود.
- تجد تكامل اقترانات معينة باستخدام التكامل بالتعويض.

أولًا التكامل غير المحدود Indefinite Integral

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة $ق'(س) = ٣س^٢ - ٦س + ٥$،

علمًا بأن $ق(٠) = ٧$

للإجابة عن هذا السؤال، سنستخدم قواعد الاشتقاق التي درستها في الوحدة الثانية.

تعلم أن $(س^٣)' = ٣س^٢$، وأن $(-٣س^٢)' = -٦س$ ، وأن $(٥س)' = ٥$، ولهذا فإن مشتقة المقدار $(س^٣ - ٣س^٢ + ٥س)$ تعطي القاعدة المطلوبة، وهي $(٣س^٢ - ٦س + ٥)$.

ولكن، هل المقدار $(س^٣ - ٣س^٢ + ٥س)$ هو الوحيد الذي مشتقته $(٣س^٢ - ٦س + ٥)$؟

تعلمت من قواعد الاشتقاق أن مشتقة الثابت تساوي صفرًا، لذلك:

$(س^٣ - ٣س^٢ + ٥س)' = ٣س^٢ - ٦س + ٥$

وكذلك $(س^٣ - ٣س^٢ + ٥س + جـ)' = ٣س^٢ - ٦س + ٥$، حيث جـ ثابت عددي.

أي إنه يوجد عدد لا نهائي من الاقترانات مشتقة كل منها تساوي $(٣س^٢ - ٦س + ٥)$،

ويمكن التعبير عن ذلك بالصيغة العامة الآتية:

$ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٥س + جـ$ ، حيث جـ ثابت.

يُطلق على الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \text{جـ}$ اسم **التكامل غير المحدود** للاقتران

$\text{قَ}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥$

ويُعبَّر عن التكامل غير المحدود للاقتران قَ(س) بالنسبة إلى المتغير س بالصورة:

$\int \text{قَ}(\text{س})\ \text{ءس}$.

يمكن القول إن عملية التكامل هي عملية عكسية للتفاضل (للاقترانات المتصلة).

تعريف

إذا كان ق اقترانًا متصلًا، فإن:

١) $\int \text{قَ}(\text{س})\ \text{ءس} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$ (جـ ثابت التكامل).

٢) مشتقة (التكامل غير المحدود للاقتران ق(س)) = ق(س).

مثال (١)

إذا كان $\text{ص} = \int (٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س})\ \text{ءس}$، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما $\text{س} = ٢$

الحل

$\text{ص} = \int (٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س})\ \text{ءس}$

باشتقاق الطرفين:

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\int (٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س})\ \text{ءس}\right) = ٤\text{س}^{٢} - ٣\text{س}$$

عندما $\text{س} = ٢$، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤(٢)^{٢} - ٣(٢) = ١٠$

تدريب ١

إذا كان $\text{ص} = \int \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{ءس}$، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما $\text{س} = -١$

بناءً على دراستك قواعد الاشتقاق، يمكنك استنتاج قواعد التكامل غير المحدود الآتية:

١) $\int \text{أ}\ \text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$ ، حيث أ ثابت.

٢) $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+\text{١}}}{\text{ن}+\text{١}} + \text{جـ}$ ، حيث $\text{ن} \neq -\text{١}$

٣) $\int \text{جاس}\ \text{ءس} = -\ \text{جتاس} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{جتاس}\ \text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

٥) $\int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\ \text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

(حيث جـ ثابت التكامل).

فكر وناقش

في الفرع (٢) من القواعد الآنف ذكرها، لماذا يشترط أن يكون $\text{ن} \neq -\text{١}$؟

مثال (٢)

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{س}^{\text{٤}}\ \text{ءس}$ ٢) $\int -\text{٢}\ \text{ءس}$ ٣) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\ \text{ءس}$ ، $\text{س} \neq \text{٠}$ ٤) $\int \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\ \text{ءس}$

الحل

١) $\int \text{س}^{\text{٤}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{٥}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$ ٢) $\int -\text{٢}\ \text{ءس} = -\text{٢س} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\ \text{ءس} = \int \text{س}^{-\text{٢}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{-\text{١}}}{-\text{١}} + \text{جـ} = \frac{-\text{١}}{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\int \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}\ \text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$ (برِّر خطوات الحل).

تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ دس   ٢) $\int$ س^{٣} دس

٣) $\int$ س$^{-٥}$ دس ، س ≠ ٠ .   ٤) $\int \sqrt{\text{س}}$ دس ، س ≥ ٠ .

بما أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل، فهذه بعض خصائص التكامل غير المحدود:

١) إذا كان ص = أ ق(س)، حيث أ ثابت، فإن صَ = أ قَ(س)؛ لذا فإن:

$\int$ صَ دس = $\int$ أ قَ(س) دس = أ $\int$ قَ(س) دس = أ ق(س) + جـ

أي إن: $\int$ أ ل(س) دس = أ $\int$ ل(س) دس ، حيث أ ثابت.

٢) إذا كان ص = ق(س) + م(س)، فإن صَ = قَ(س) + مَ(س)؛ لذا فإن:

$\int$ صَ دس = $\int$ (قَ(س) + مَ(س)) دس

ص = ق(س) + م(س) + جـ

أي إن: $\int$ (ل(س) + ع(س)) دس = $\int$ ل(س) دس + $\int$ ع(س) دس.

٣) إذا كان ص = ق(س) ــ م(س)، فإن صَ = قَ(س) ــ مَ(س)؛ لذا فإن:

$\int$ صَ دس = $\int$ (قَ(س) ــ مَ(س)) دس

ص = ق(س) ــ م(س) + جـ

أي إن: $\int$ (ل(س) ـ ع(س)) دس = $\int$ ل(س) دس ـ $\int$ ع(س) دس.

مثال (٣)

جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int (٣س - ٥س^{٢} + ٩)\,ءس$$

الحل

$$\int (٣س - ٥س^{٢} + ٩)\,ءس = \int ٣س\,ءس - \int ٥س^{٢}\,ءس + \int ٩\,ءس$$

$$= ٣\int س\,ءس - ٥\int س^{٢}\,دس + ٩\int ءس$$

$$= (\frac{٣}{٢}س^{٢} + جـ_{١}) - (\frac{٥}{٣}س^{٣} + جـ_{٢}) + (٩س + جـ_{٣})$$

$$= \frac{٣}{٢}س^{٢} - \frac{٥}{٣}س^{٣} + ٩س + جـ \text{ ،}$$

حيث الثابت $جـ = جـ_{١} - جـ_{٢} + جـ_{٣}$

تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملين الآتيين:

١) $\int (٣س^{٢} - \frac{٦}{\sqrt{س}})\,ءس$

٢) $\int (٤س - ٣جاس)\,ءس$

مثال (٤)

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int س(٢س - ١)\,ءس$

٢) $\int \frac{س^{٢} - ٥س}{س}\,ءس \text{ ، } س \neq ٠$

الحل

١) يتعين أولًا إجراء عملية الضرب، ثم إجراء عملية التكامل كما يأتي:

$$\int س(٢س - ١)\,ءس = \int (٢س^{٢} - س)\,ءس$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

٢) يتعين أولًا إجراء عملية القسمة، ثم إجراء عملية التكامل كما يأتي:

$$\int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{٢} - ٥\text{س}) \times \text{س}^{-١}\,\text{ءس}$$

$$= \int (\text{س} - ٥)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + \text{جـ} \,.$$

فكر وناقش

١) حُلَّ الفرع (٢) من المثال (٤) بطريقة أخرى.

٢) أراد أسامة إيجاد التكامل الآتي: $\int ٣\text{س}^{٢}(٢\text{س}-١)\,\text{ءس}$، وذلك بإجراء الخطوات الآتية:

$$\int ٣\text{س}^{٢}(٢\text{س} - ١)\,\text{ءس} = \int ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس} \times \int (٢\text{س} - ١)\,\text{ءس}$$

$$= \text{س}^{٣} \times (\text{س}^{٢} - \text{س}) + \text{جـ}$$

ناقِش حل أسامة.

تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int (٢\text{س} + ٣)^{٢}\,\text{ءس}$

٢) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{ءس}$ ، $\text{س} > ٠$

٣) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣}\,\text{ءس}$ ، $\text{س} \neq ٣$

٤) $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٦٤}{\text{س} + ٤}\,\text{ءس}$ ، $\text{س} \neq -٤$

تدريب ٥

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int \frac{١}{٢}\,\text{دس}$

ب) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}^{٥}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

جـ) $\int (٢ - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

د) $\int ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

هـ) $\int \frac{-٢}{\text{س}^{-٥}}\,\text{دس}$

٢) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int (١٠\text{س}^{٢} - \sqrt[٦]{\text{س}} + ٣\text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

ب) $\int (٢ - \text{س})(٤\text{س} + ١)\,\text{دس}$

جـ) $\int ٣\text{ظاس جتاس}\,\text{دس}$

د) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨}{\text{س} + ٢}\,\text{دس}$ ، $\text{س} \neq -٢$

٣) جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = ٥$، حيث $\text{ص} = \int \frac{٤\text{س}+١}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{س} \neq ٠$

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان $\text{قَ}(\text{س}) = ٦\text{س} - ٨\text{س}^{٣} + ٥$، وكان $\text{ق}(-١) = ٢$، فجد قاعدة الاقتران ق.

٥) إذا كان $\int \text{عَ}(\text{س})\,\text{دس} = ٦\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥$، فجد $\text{عَ}(١)$.

٦) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٢س – ٥ ، وكان ق(٢) = ٤، فجد قيمة ق(١).

٧) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٣س(٦ – ٥س) + ٤$س^٣$ ، وكان ق(٢) = –١، فجد قيمة ق(١).

٨) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = $\frac{س^٢ + ٦س + ٨س^٣}{س}$ ، س ≠ صفرًا، وكان ق(١) = ١٢، فجد قاعدة الاقتران ق.

٩) إذا كان ل اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان لَ(س) = ٦$س^٢$ – ٦$س^٣$ – ٢س، فجد قيمة ل(٣) – ل(١).

ثانيًا التكامل المحدود The Definite Integral

إذا كان ق(−١) = ٣، ق(٢) = ٥، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{\text{١−}}^{\text{٢}}$ ٤ قَ(س) ءس.

تعلمت في الدرس السابق أن التكامل غير المحدود للاقتران ق يعطي عددًا لانهائيًّا من الاقترانات بصيغة (ع(س) + جـ ، حيث جـ ثابت)، وأن الاقترانات تختلف فيما بينها في قيمة الثابت جـ، حيث: (ع(س) + جـ)َ = ق(س).

تعريف

إذا كان $\int$ ق(س) ءس = ع(س) + جـ ، فإن **التكامل المحدود** للاقتران ق على الفترة [أ، ب]

هو: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس = ع(ب) − ع(أ)، حيث يُسمّى العدد:

أ : الحد السفلي للتكامل المحدود.

ب: الحد العلوي للتكامل المحدود.

ويُرمَز إلى المقدار العددي ع(ب) − ع(أ) بالرمز : ع(س) $\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

مثال (١)

جد $\int_{\text{١}}^{\text{٢}}$ ٣س$^{\text{٢}}$ ءس

الحل

$\int_{\text{١}}^{\text{٢}}$ ٣س$^{\text{٢}}$ ءس = (س$^{\text{٣}}$ + جـ) $\Big]_{\text{١}}^{\text{٢}}$ = ((٢)$^{\text{٣}}$ + جـ) − ((١)$^{\text{٣}}$ + جـ)

= ٨ $\cancel{+ \text{جـ}}$ − ١ $\cancel{- \text{جـ}}$ = ٧

لاحِظ أن الناتج النهائي للتكامل المحدود يكون قيمة عددية خالية من ثابت التكامل (جـ) (لماذا؟)، ولهذا يمكن تجاهل ثابت التكامل في التكامل المحدود.

فكر وناقش

هل يمكن تجاهل ثابت التكامل عند إجراء التكامل غير المحدود؟ برِّر إجابتك.

مثال (٢)

جد قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{-١} (٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٥)\, \text{ءس}$

الحل

$$\int_{٢}^{-١} (٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٥)\, \text{ءس} = \Big[(\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢} + ٥\text{س}) \Big]_{٢}^{-١}$$

$$= (-١ - ٦ - ٥) - (٨ - ٢٤ + ١٠)$$

$$= -١٢ - (-٦) = -٦$$

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{٤}^{١} \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

٢) $\int_{٠}^{١} ١٤ (\text{س})^{\frac{٤}{٣}}\, \text{ءس}$

مثال (٣)

إذا كان ص = $\int_{١}^{١} (٤س^{٣} - ٣س^{٥} + ٣)\, ءس$ ، فجد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

$\frac{ءص}{ءس}$ = صفرًا (لماذا؟).

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

تدريب ٣

إذا كان $\int_{١}^{ب} ٦س\, ءس = ٩$، فجد قيمة الثابت ب.

الأسئلة

١) احسب قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{١}^{٦} -٢ \, \text{ءس}$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{٨\sqrt[٣]{\text{س}}} \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{٠}^{٢} (٢\text{س} + ٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٤} + ٧) \, \text{ءس}$

د) $\int_{-٢}^{٢} (٣\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) \, \text{ءس}$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{\text{م}} ٤ \, \text{ءس} = ٢٠$، فجد قيمة الثابت م.

٣) إذا كان الاقتران ق مُعرَّفًا على الفترة [١، ٥]، وكان قَ(س) = ٢س + ١، فجد قيمة ق(٥) − ق(١).

٤) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٢} (٤\text{س} - ٦\text{س}^{٢} + ٣) \, \text{ءس}$

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{١}^{٢} ٣\text{س}(٤ - ٢\text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{-١} (٢\text{س} - ٣)^{٢} \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{٠}^{-٢} \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٧}{\text{س} - ١} \, \text{ءس}$

٦) إذا كان $\int_{٥}^{٢} \text{قَ}(\text{س}) \, \text{ءس} = ١٣$، وكان ق(٥) = −١٧، فجد قيمة ق(٢).

ثالثًا خصائص التكامل المحدود Properties of the Definite Integral

نشاط (ا)

١) أ) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{١}^{٤} ٣\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

ب) احسب قيمة $٣\int_{١}^{٤} \text{س}^{٢}\,\text{دس}$

جـ) ماذا تلاحظ؟ برِّر إجابتك.

٢) أ) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} (٦\text{س} - ٥ + ٦\text{س}^{٢})\,\text{دس}$

ب) احسب قيمة: $\int_{-١}^{٢} ٦\text{س}\,\text{دس} - \int_{-١}^{٢} ٥\,\text{دس} + \int_{-١}^{٢} ٦\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

جـ) ماذا تلاحظ؟ برِّر إجابتك.

الخصائص الخطية

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل}\,\text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{ل} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$، حيث ل ثابت.

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} + \text{ع(س)})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ع(س)}\,\text{دس}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{ع(س)})\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ع(س)}\,\text{دس}$

مثال (١)

إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٦$ ، $\int_{١}^{٣} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = -٢$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{١}^{٣} ٢\text{ق(س)}\,\text{دس}$

٢) $\int_{١}^{٣} (٣\text{هـ(س)} - ٦\text{ق(س)} + ٤)\,\text{دس}$

الحل

١) $\int_{١}^{٣} \text{٢ق(س)}\,\text{ءس} = ٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

$= ٢(٦) = ١٢$

٢) $\int_{١}^{٣} (\text{٣هـ(س)} - \text{٦ق(س)} + ٤)\,\text{ءس} = ٣\int_{١}^{٣} \text{هـ(س)}\,\text{ءس} - ٦\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ءس} + ٤\int_{١}^{٣} \text{ءس}$

$= ٣(-٢) - ٦(٦) + \Big[\text{(٤س)}\Big]_{١}^{٣}$

$= -٦ - ٣٦ + (١٢ - ٤) = -٣٤$

تدريب ①

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \text{٢ل(س)}\,\text{ءس} = -٢$، $\int_{-١}^{٢} \text{ع(س)}\,\text{ءس} = ٥$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{-١}^{٢} \frac{\text{٥ع(س)}}{٢}\,\text{ءس}$

٢) $\int_{-١}^{٢} (\text{٢ع(س)} - \text{٣ل(س)} - \text{٢س})\,\text{ءس}$

نشاط (٢)

١) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{\text{ب}}^{\text{ب}} (\text{٤س} + \text{٣س}^{٢} - ٥)\,\text{ءس}$، ماذا تلاحظ؟ برّر إجابتك.

٢) احسب قيمة كل من التكاملين الآتيين:

أ) $\int_{١}^{٣} \text{٦س}^{٢}\,\text{ءس}$

ب) $\int_{٣}^{١} \text{٦س}^{٢}\,\text{ءس}$

ماذا تلاحظ؟ برّر إجابتك.

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{(٢س − ١) ءس}$ ب) $\int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \text{(٢س − ١) ءس}$

جـ) $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{(٢س − ١) ءس}$

ماذا تلاحظ؟

بناءً على إجاباتك في النشاط (٢)، يمكنك التوصل إلى الخصائص الآتية للتكامل المحدود:

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق(س) ءس} = \text{صفرًا.}$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} = - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س) ءس}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) ءس}$ (خصيصة الإضافة).

(لا يُشترط في خصيصة الإضافة أن تكون قيمة ب بين أ، جـ).

مثال (٢)

إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{٢ق(س) ءس} = \text{٢}$، $\int_{\text{١}}^{\text{٦}} \text{ق(س) ءس} = \text{٤}$، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{ق(س) ءس}$ ٢) $\int_{\text{٥}}^{\text{٦}} \text{ق(س) ءس}$ ٣) $\int_{\text{−٦}}^{\text{−٦}} \text{ق(س) ءس}$

الحل

١) $\int_{١}^{٥} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$

$٢\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$ ، وبقسمة كل من الطرفين على ٢، ينتج:

$\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ١$ ، ومنه: $\int_{٥}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -١$ (لماذا؟).

٢) $\int_{٥}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٥}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{١}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ (لماذا؟).

$= -١ + ٤ = ٣$

٣) $\int_{-٦}^{-٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} =$ صفرًا (لماذا؟).

تدريب ٢

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٣}\,\text{ءس} = ٥$ ، $\int_{-١}^{٦} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{٢}^{-١} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

٢) $\int_{٦}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

تدريب ٣

إذا كان $\int_{٢}^{٥} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٤)\,\text{ءس} = ١٨$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

مثال (٣)

١) إذا كان $\int_{أ+٢}^{أ^{٢}-٤} ق(س)\,ءس = ٠$، فجد قيمة الثابت أ.

٢) إذا كان $\int_{١}^{ب} (٢س - ١)\,ءس = ٠$، فجد قيمة الثابت ب.

الحل

١) بما أن قيمة التكامل المحدود تساوي صفرًا، وقاعدة الاقتران ق غير معلومة، فإن:

الحد العلوي للتكامل = الحد السفلي للتكامل

$أ^{٢} - ٤ = ٢ + أ$

$أ^{٢} - أ - ٦ = ٠$ (لماذا؟).

$(أ - ٣)(أ + ٢) = ٠$

ومنه: أ = ٣، أو: أ = −٢

٢) $\int_{١}^{ب} (٢س - ١)\,ءس = \Big[(س^{٢} - س)\Big]_{١}^{ب}$

$٠ = (ب^{٢} - ب) - ((١)^{٢} - ١)$

$٠ = ب(ب - ١)$

$\therefore$ ب = ٠، أو ب = ١ (لماذا؟).

تدريب ٤

١) إذا كان $\int_{م^{٣}+١}^{-٧} ق(س)\,ءس = ٠$، فجد قيمة الثابت م.

٢) إذا كان $\int_{ن}^{١} (٢س - ٣)\,ءس = ٠$، فجد قيمة الثابت ن.

الأسئلة

١) إذا كان $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\,ءس = ١٢$ ، $\int_{٤}^{٥} ق(س)\,ءس = ٤$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٤}^{١} ٣ق(س)\,ءس$

ب) $\int_{٥}^{١} ق(س)\,ءس$

جـ) $\int_{٥}^{٤} \left(ق(س) + ٢س\right)ءس$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{ل(س)}{٢}\,ءس = ٣$ ، $\int_{٢}^{-١} \left(هـ(س) + ١\right)ءس = ٥$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ءس$

ب) $\int_{-١}^{٢} \left(٣هـ(س) - ٢س + ٣ل(س)\right)ءس$

٣) إذا كان $\int_{أ-١}^{٥أ+٧} ق(س)\,ءس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان $\int_{٣}^{م} \left(٢ - ٤س\right)ءس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت م.

٥) إذا كان $\int_{٤}^{١} \left(٣ق(س) - ٥\right)ءس = ٩$ ، فجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{١}^{٤} \left(٢ق(س) + ١\right)ءس$$

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل} \left(٢س - ١\right)ءس = ٦$ ، فجد قيمة الثابت ل.

رابعًا التكامل بالتعويض Integration by Substitution

جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{٠}^{٤} ٢س\sqrt{س^{٢} + ٩}\; ءس$$

لا يمكن حساب هذا التكامل بالطرائق التي تعلمتها سابقًا؛ لوجود عملية ضرب اقترانات داخل التكامل يصعب تبسيطها، لذلك نستخدم طريقة **التكامل بالتعويض** في حساب هذا التكامل، وهي طريقة تقوم على استعمال تعويض مناسب لكتابة التكامل بدلالة متغير جديد، وبصورة يسهل إجراء عملية التكامل لها.

مثال (١)

جد قيمة التكامل الآتي: $\int ٣س^{٢}\,(س^{٣} + ٥)^{٢}\; ءس$

الحل

يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام طريقة التكامل بالتعويض، وذلك حسب الخطوات الآتية:

١) افرض أن ما في داخل القوس = ص

افرض أن $ص = س^{٣} + ٥$

٢) حوِّل التكامل المطلوب بدلالة المتغير الجديد (ص)، كما يأتي:

$$ص = س^{٣} + ٥$$

بالاشتقاق: $\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}$ ، ومنه: $ءص = ٣س^{٢}\; ءس$

٣) بالعودة إلى التكامل وإجراء التعويضات والاختصارات والتكامل، ينتج:

$$\int ٣س^{٢}\,(س^{٣} + ٥)^{٢}\; ءس = \int (ص)^{٢}\,(٣س^{٢}\; ءس)$$

$$= \int ص^{٢}\; ءص = \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ$$

٤) أَعدِ التعويض بدلالة المتغير (س)، فيكون ناتج التكامل:

$$\int ٣س^{٢} (س^{٣}+٥)^{٢} \, ءس = \frac{(س^{٣}+٥)^{٣}}{٣} + ج$$

فكر وناقش

جد قيمة التكامل في المثال (١) بطريقة أخرى، وتحقق من أن إجابتك صحيحة.

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int ٢١ (٣س^{٢}+٤س)(س^{٣}+٢س^{٢})^{٧} \, ءس$

مثال (٢)

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int (٢س+١)\sqrt{س^{٢}+س+٥} \, ءس$

٢) $\int ٦ جتا(٢س-١) \, ءس$

٣) $\int_{٠}^{٢} \frac{٦س}{\sqrt[٣]{س^{٢}+١}} \, ءس$

٤) $\int_{٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٥س+١}} \, ءس$

الحل

١) $\int (٢س+١)\sqrt{س^{٢}+س+٥} \, ءس$

افرض أن $ص = س^{٢}+س+٥$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س+١$ ، ومنه: $ءص = (٢س+١) \, ءس$

$$\int (٢س+١)\sqrt{س^{٢}+س+٥} \, ءس = \int \sqrt{س^{٢}+س+٥} \, (٢س+١) \, ءس$$

$$= \int \sqrt{ص} \, ءص$$

$$= \int (\text{ص})^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءص} = \frac{٢}{٣} (\text{ص})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{ص}^{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥)^{٣}} + \text{جـ}$$

٢) $\int ٦ \, \text{جتا}(٢\text{س} - ١) \, \text{ءس}$

افرض أن $\text{ص} = ٢\text{س} - ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$، ومنه: $\text{ءص} = ٢ \, \text{ءس}$

$\int ٦ \, \text{جتا}(٢\text{س} - ١) \, \text{ءس} = \int ٣ \, \text{جتاص} \, \text{ءص}$ (لماذا؟).

$= ٣ \, \text{جاص} + \text{جـ}$

$= ٣ \, \text{جا}(٢\text{س} - ١) + \text{جـ}$

٣) جد أولًا التكامل غير المحدود: $\int \frac{٦\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}} \, \text{ءس}$

افرض أن $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$، ومنه: $\text{ءص} = ٢\text{س} \, \text{ءس}$

$\int \frac{٦\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}} \, \text{ءس} = \int \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{ص}}} \, ٣ \, \text{ءص}$ (لماذا؟).

$$= \int ٣ \, (\text{ص})^{\frac{-١}{٣}} \, \text{ءص}$$

$$= ٣ \left(\frac{٣}{٢}\right) (\text{ص})^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٩}{٢} \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}} + \text{جـ}$$

فيكون $\int_{٠}^{٢} \frac{٦\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}} \, \text{ءس} = \left[\frac{٩}{٢} \sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}\right]_{٠}^{٢} = \frac{٩}{٢} \sqrt[٣]{٢٥} - \frac{٩}{٢}$

يمكن التعويض في قيم ص بدلًا من قيم س كما يأتي:

عندما س = ٢ ، ص = $(٢)^{٢}$ + ١ = ٥

عندما س = ٠ ، ص = $(٠)^{٢}$ + ١ = ١

∴ قيمة التكامل المحدود = $\left.\frac{٩}{٢}\sqrt[٣]{\text{ص}^{٢}}\ \right]_{١}^{٥}$

$$= \frac{٩}{٢}\sqrt[٣]{٢٥} - \frac{٩}{٢}$$

٤) $\displaystyle\int \frac{١}{\sqrt{٥\text{س} + ١}}\,\text{ءس}$

افرض أن ص = ٥س + ١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥ ، ومنه: ءص = ٥ ءس

$\displaystyle\int \frac{١}{\sqrt{٥\text{س}+١}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}}\,\frac{١}{٥}\,\text{ءص}$ (لماذا؟).

$$= \int \frac{١}{٥}(\text{ص})^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٥}(٢)(\text{ص})^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢}{٥}\sqrt{٥\text{س} + ١} + \text{جـ}$$

قيمة التكامل $\displaystyle\int_{٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٥\text{س}+١}}\,\text{ءس} = \left.\frac{٢}{٥}\sqrt{٥\text{س} + ١}\ \right]_{٣}^{٠}$

$$= \frac{٢}{٥}\,(١) - \frac{٢}{٥}\,(٤) = \frac{-٦}{٥}$$

تدريب ٢

حُلَّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int ٣\text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{-٥}\,\text{ءس}$

٢) $\int ٢\text{س}\,\text{قا}^{٢}(١-\text{س}^{٢})\,\text{ءس}$

٣) $\int_{١}^{-١}(٤\text{س}-١)\sqrt[٣]{\text{س}-٢\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس}$

٤) $\int_{٠}^{٣}\frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}+١}}\,\text{ءس}$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس}$ ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq ٠$ ، ن $\neq -١$

٢) $\int\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}$ ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq ٠$

بناءً على حل التدريب (٤)، يمكن استنتاج القواعد الآتية:

إذا كان أ، ب ثابتين، أ $\neq ٠$، ن $\neq -١$، فإن:

١) $\int(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس}=\frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)}+\text{جـ}$

٢) $\int\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}=\frac{-\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}}+\text{جـ}$

٣) $\int\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}=\frac{\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}}+\text{جـ}$

٤) $\int\text{قا}^{٢}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}=\frac{\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}}+\text{جـ}$

مثال (٣)

جد قيمة التكامل الآتي: $\int_{٠}^{-١٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢س - ١}} \, دس$

الحل

$$\int_{٠}^{-١٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢س - ١}} \, دس = \int_{٠}^{-١٣} (٢س - ١)^{\frac{-١}{٣}} \, دس$$

$$= \frac{١}{٢} \left(\frac{٣}{٢}\right) (٢س - ١)^{\frac{٢}{٣}} \Big]_{٠}^{-١٣}$$

$$= \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{(-٢٧)^{٢}} - \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{(-١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢٧}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٢٤}{٤} = ٦$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int_{-١}^{٢} ٦(١ - ٢س)^{٥} \, دس$

٢) $\int ١٢ \, جا(١ - ٤س) \, دس$

الأسئلة

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (\text{١} - \text{٢س})(\text{س} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٤}} \, \text{ءس}$

ب) $\int \text{٦س}^{\text{٢}} \sqrt[\text{٥}]{(\text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٢})^{\text{٢}}} \, \text{ءس}$

جـ) $\int (\text{٢س} - \text{٣س}^{\text{٢}}) \, \text{قا}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}}) \, \text{ءس}$

د) $\int \frac{\text{٣س} - \text{٩}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س})^{\text{٢}}} \, \text{ءس}$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[\text{٣}]{(\text{٣س} - \text{٢})^{\text{٢}}} \, \text{ءس}$

ب) $\int (\text{س} - \text{١})(\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{١})^{\text{٥}} \, \text{ءس}$

جـ) $\int \text{٢} \, \text{قا}^{\text{٢}}(\text{٢} - \text{س}) \, \text{ءس}$

د) $\int \text{٢س}^{\text{٣}} \, \text{جا}(\text{س}^{\text{٤}} + \text{١}) \, \text{ءس}$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \sqrt{\text{٤س} + \text{١}} \, \text{ءس}$

ب) $\int_{-\text{١}}^{-\text{١}} \text{٣س}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٣}} - \text{١})^{\text{٣}} \, \text{ءس}$

جـ) $\int_{\text{١}}^{\text{٠}} \text{٢س} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} \, \text{ءس}$

د) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \frac{\text{٣} - \text{٢س}}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س})^{\text{٢}}} \, \text{ءس}$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-\text{٢}}^{\text{٣}} \text{٣س}^{\text{٢}} \, \text{قَ}(\text{س}^{\text{٣}}) \, \text{ءس}$

٥) إذا علمت أن $\int_{\text{٥}}^{\text{٢}} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} = \text{٣}$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-\text{١}}^{\text{٢}} \text{٨س} \, \text{ق}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) \, \text{ءس}$

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الفصل الثاني

تطبيقات التكامل

Integral Applications

النتاجات

- تحل مسائل هندسية باستخدام التكامل.
- تحل مسائل فيزيائية باستخدام التكامل.
- تجد مساحة المنطقة المغلقة بين منحنى اقتران معين ومحور السينات باستخدام التكامل المحدود.

أولًا تطبيقات هندسية Geometric Applications

جد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (−١، ٢)، وأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:

قَ(س) = ٢س − ١

تعلمت سابقًا أن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند أي نقطة على منحناه (أ، ق(أ)) يساوي قَ(أ)، حيث ق اقتران قابل للاشتقاق عندما س = أ.

ولأن التكامل عملية عكسية للتفاضل؛ فإنه يمكننا إيجاد قاعدة الاقتران ق بمعرفة ميله قَ(س) عند أي نقطة على منحناه (س، ص)، وإحداثيي إحدى النقط على منحناه.

مثال (١)

جد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:

قَ(س) = ٣س^{٢} − ٨س، وأن منحناه يمر بالنقطة (−١، ٣).

الحل

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٨س$

بإجراء التكامل بالنسبة إلى المتغير س لكل من الطرفين، ينتج:

$$\int ق'(س)\ دس = \int (٣س^{٢} - ٨س)\ دس$$

$ق(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + جـ$

لكن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (–١، ٣)؛ أي إن ق(–١) = ٣

$ق(-١) = (-١)^{٣} - ٤(-١)^{٢} + جـ$

$٣ = -١ - ٤ + جـ$، ومنه: $جـ = ٨$

∴ قاعدة الاقتران $ق(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} + ٨$

تدريب ١

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٢)

جد قاعدة الاقتران ص = ق(س)، علمًا بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: $\frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^{٢} + ٩}$ ، وأن النقطة (–٤، ١) تقع على منحنى الاقتران ص.

الحل

ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) $= \frac{دص}{دس}$

$$\frac{دص}{دس} = س\sqrt{س^{٢} + ٩}$$

$$\text{دص} = \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}\ \text{دس}$$

$$\int \text{دص} = \int \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{٢} + ٩)^{٣}} + \text{جـ}$$ (وضِّح خطوات إيجاد التكامل).

لكن ص = ١ عندما س = −٤

$$١ = \frac{١}{٣}\sqrt{((-٤)^{٢} + ٩)^{٣}} + \text{جـ}$$

ومنه: $\text{جـ} = \frac{-١٢٢}{٣}$

$\therefore$ قاعدة الاقتران $\text{ص} = \frac{١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{٢} + ٩)^{٣}} - \frac{١٢٢}{٣}$

تدريب ٢

جد قيمة ق(١٤)، علمًا بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة : $\text{قَ(س)} = ٦\sqrt[٣]{٢\text{س} - ١}$ ، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٥).

الأسئلة

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $(٦ - ٢س + ٩س^{٣})$، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن $ق(٠) = ٥$

٢) جد قاعدة الاقتران ق، إذا كان ميل المماس للمنحنى $ص = ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يعطى بالقاعدة: $ق'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة $(٠، ٤)$.

٣) جد قيمة $ق(١)$، علمًا بأن ميل المماس للمنحنى $ص = ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $٢٥(٥س + ٤)^{٤}$، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة $(-١، ٧)$.

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة $(س، ص)$ يعطى بالقاعدة: $ل'(س) = ٢س(٤ - ٣س)$، فجد قاعدة الاقتران ل، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(٠، ٣)$.

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة $هـ'(س) = \frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ ، $س \neq ٠$، فجد $هـ(٢)$، علمًا بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة $(-١، ٥)$.

ثانيًا تطبيقات فيزيائية Physical Applications

يتحرك جسيم على خط مستقيم، وتعطى سرعته بالعلاقة: $ع(ن) = (٢ن + ٥)$ م/ث، حيث ن: الزمن بالثواني. جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي $ف(٠) = ٣$ م.

تعرفت أن سرعة الجسيم الذي يتحرك على خط مستقيم، والذي يكون موقعه ف(ن) يعطى بعلاقة مع الزمن، هي: $ع(ن) = \acute{ف}(ن) = \frac{دف}{دن}$، وأن تسارعه بعد مرور زمن مقداره (ن) هو: $ت(ن) = \acute{ع}(ن) = \frac{دع}{دن}$، ولهذا يمكن معرفة المسافة بمعرفة مقدار السرعة، أو السرعة والتسارع، ويمكن أيضًا معرفة السرعة بمعرفة مقدار التسارع.

مثال (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي $ف(٠) = ٤$ م. إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة: $ع(ن) = (٦ - ٢ن + ٦ن^{٢})$ م/ث، فجد موقعه بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل

$ع(ن) = ٦ - ٢ن + ٦ن^{٢}$، لكن $ع(ن) = \frac{دف}{دن}$

$$\frac{دف}{دن} = ٦ - ٢ن + ٦ن^{٢}$$

$$\int دف = \int (٦ - ٢ن + ٦ن^{٢})\, دن$$

$$ف = ٦ن - ن^{٢} + ٢ن^{٣} + جـ$$

لكن $ف(٠) = ٤$، ومنه: $جـ = ٤$ (لماذا؟).

ومنه: $ف(ن) = ٦ن - ن^{٢} + ٢ن^{٣} + ٤$

$\therefore ف(٣) = ١٨ - ٩ + ٥٤ + ٤ = ٦٧$

$\therefore$ موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة = ٦٧م.

تدريب ١

١) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة: $ع(ن) = \left(٦\,(١ + ٢ن)^{٢}\right)$ م/ث. جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي $ف(٠) = ٥$ م.

مثال (٢)

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن تسارعها بعد مرور ن ثانية من انطلاقها يعطى بالعلاقة: $ت(ن) = (١٢ن - ٢٠)$ م/ث^{٢}. إذا علمت أن موقعها الابتدائي $ف(٠) = ٢$م، وأن سرعتها الابتدائية $ع(٠) = ٣$ م/ث، فجد:

١) سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من انطلاقها.

٢) موقع النقطة المادية بعد مرور ثلاث ثوانٍ من انطلاقها.

الحل

١) $ت(ن) = ١٢ن - ٢٠$

$$\frac{دع}{دن} = ١٢ن - ٢٠$$

$$دع = (١٢ن - ٢٠)\,دن$$

$$\int دع = \int (١٢ن - ٢٠)\,دن$$

$$ع = ٦ن^{٢} - ٢٠ن + جـ_{١}$$

لكن: $ع(٠) = ٣$، ومنه: $جـ_{١} = ٣$

$\therefore$ $ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٢٠ن + ٣$

ومنه: $ع(٢) = ٢٤ - ٤٠ + ٣ = -١٣$ م/ث.

أي إن سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من انطلاقها هي -١٣ م/ث.

٢) $ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٢٠ن + ٣$

$$\frac{دف}{دن} = ٦ن^{٢} - ٢٠ن + ٣$$

$$دف = (٦ن^{٢} - ٢٠ن + ٣)\ دن$$

$$\int دف = \int (٦ن^{٢} - ٢٠ن + ٣)\ دن$$

$$ف = ٢ن^{٣} - ١٠ن^{٢} + ٣ن + جـ_{٢}$$

لكن $ف(٠) = ٢$، ومنه: $جـ_{٢} = ٢$

$\therefore$ $ف(ن) = ٢ن^{٣} - ١٠ن^{٢} + ٣ن + ٢$

ومنه: $ف(٣) = ٥٤ - ٩٠ + ٩ + ٢ = -٢٥$ م موقع النقطة المادية بعد مرور ثلاث ثوانٍ من انطلاقها.

فكر وناقش

ما دلالة الإشارة السالبة في السرعة في الفرع (١) من مثال ٢، والموقع في الفرع (٢)؟

تدريب ٢

يتحرك جسيم على خط مستقيم، وبتسارع ثابت مقداره $ت(ن) = ١٢$ م/ث^{٢}. إذا كانت سرعته الابتدائية $ع(٠) = ٥$ م/ث، وموقعه الابتدائي $ف(٠) = ٣$ م، فجد:

١) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

الأسئلة

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن – ١)) م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها، علمًا بأن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م.

٣) إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة: ت(ن) = ٤٨(١– ٢ن)^{٣} م/ث^{٢}، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

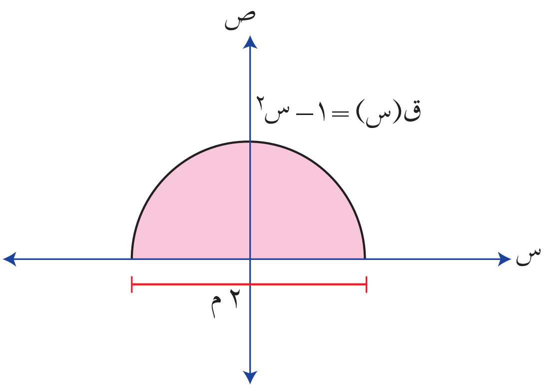
٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: ع(ن) = (٣ن – ١) (٤ن + ١) م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م.

ثالثًا المساحة The Area

يمثل الشكل (٤–١) نافذة طول قاعدتها ٢ م، محصورة بمنحنى الاقتران $ص = ق(س) = ١ - س^{٢}$ إذا أردنا وضع زجاج على النافذة، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة؟



الشكل (٤–١).

إن من أهم تطبيقات التكامل المحدود حساب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات والمستقيمات. وستقتصر دراستنا على حساب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى اقتران معين ومحور السينات.

مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص= ق(س) ومحور السينات على الفترة [أ، ب] تعطى بالقاعدة:

$$المساحة = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, ءس.$$

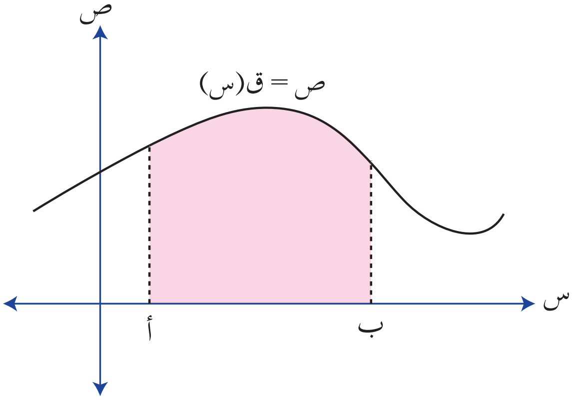
عند تطبيق هذه القاعدة، تظهر الحالات الآتية:

١) إذا كان $ق(س) \geq ٠$ لكل س في الفترة [أ، ب]،

فإن $|ق(س)| = ق(س)$ على الفترة [أ، ب]،

$$والمساحة\ المطلوبة = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس،$$

انظر الشكل (٤–٢).

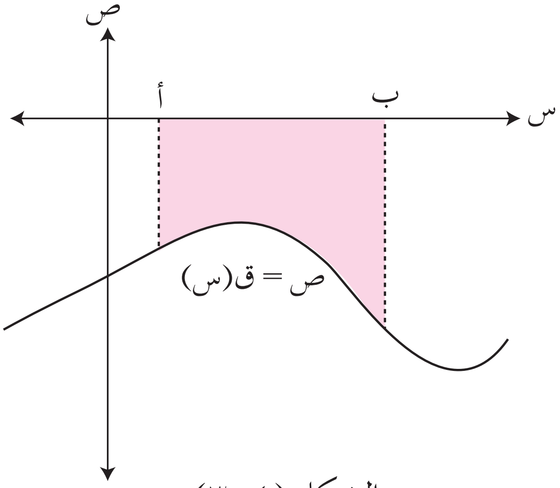


الشكل (٤–٢).

٢) إذا كان ق(س) ≤ ٠ لكل س في الفترة [أ، ب]، فإن| ق(س) | = − ق(س) على الفترة [أ، ب]،

والمساحة المطلوبة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ − ق(س) ءس،

انظر الشكل (٤−٣).



الشكل (٤−٣).

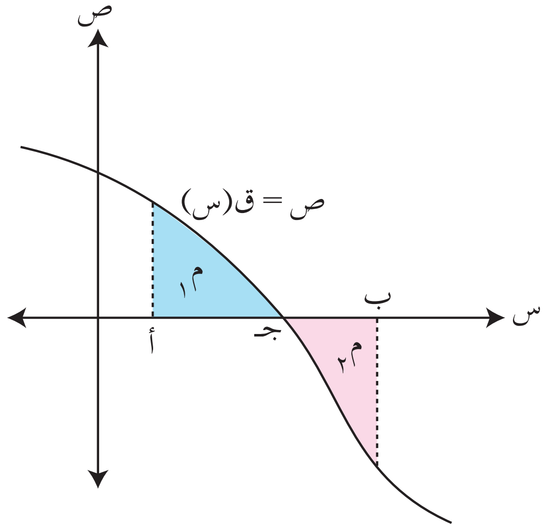
٣) إذا كان ق(س) ≥ ٠ لكل س في الفترة [أ، جـ]، ق(س) ≤ ٠ لكل س في الفترة [جـ، ب]، فإن

المساحة المطلوبة = المساحة م١ + المساحة م٢

المساحة المطلوبة = $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس + $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ − ق(س) ءس

= $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس − $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس،

انظر الشكل (٤−٤).



الشكل (٤−٤).

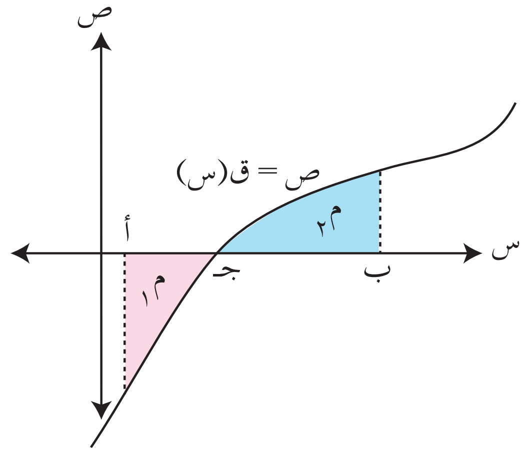
٤) إذا كان ق(س) ≤ ٠ لكل س في الفترة [أ، جـ]، ق(س) ≥ ٠ لكل س في الفترة [جـ، ب]، فإن

المساحة المطلوبة = المساحة م١ + المساحة م٢

المساحة المطلوبة = $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ − ق(س) ءس + $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس

= − $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس + $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس،

انظر الشكل (٤−٥)



الشكل (٤−٥).

مثال (١)

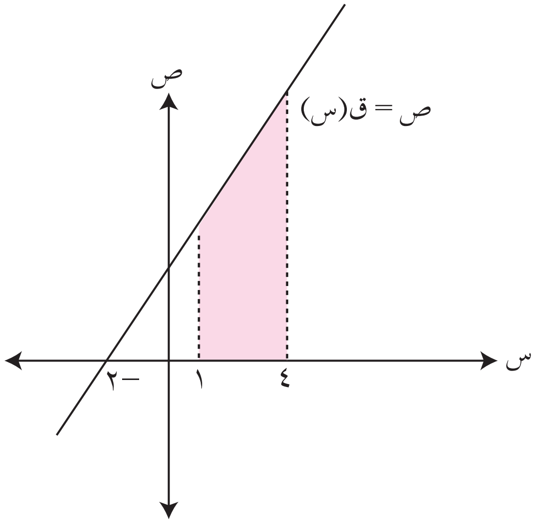
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س + ٤، ومحور السينات، والمستقيمين: س = ١، س = ٤

الحل

لإيجاد المساحة المطلوبة، اتبع الخطوات الآتية:

١) جد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات (إن وجدت) بمساواة الاقتران بالصفر (لماذا؟).

٢س + ٤ = ٠، ومنه: س = –٢، وهذه القيمة لا تقع ضمن الفترة المطلوبة، انظر الشكل (٤–٦).



الشكل (٤–٦).

٢) جد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [١، ٤].

$$\int_{١}^{٤} (٢\text{س} + ٤)\,\text{ءس} = \left[\,(\text{س}^{٢} + ٤\text{س})\,\right]_{١}^{٤}$$

$$= (١٦ + ١٦) - (١ + ٤) = ٢٧$$

٣) المساحة = $\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$ = ٢٧ وحدة مربعة.

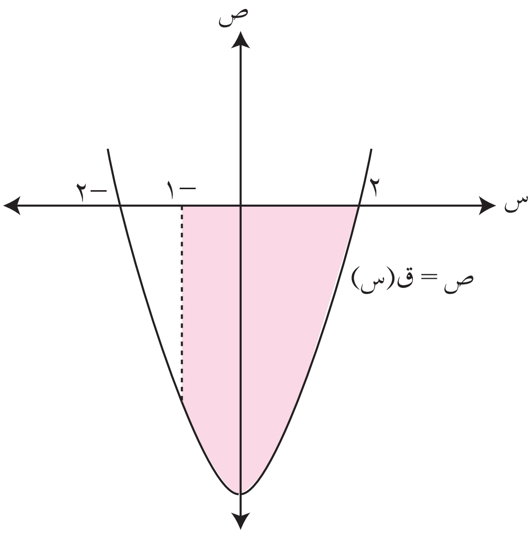
مثال (٢)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢، ومحور السينات، والمستقيمين: س = –١، س = ٢

الحل

$ق(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$، ومنه: $س = -٢، ٢$، وهي قيم س التي يتقاطع منحنى الاقتران ق عندها مع محور السينات، انظر الشكل (٤-٧).



الشكل (٤-٧).

لاحِظ أن $ق(س) \leq ٠$ على الفترة [−١، ٢]؛ لذا يتعين إيجاد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [−١، ٢]:

$$\int_{-١}^{٢} (٣س^{٢} - ١٢)\, ءس = (س^{٣} - ١٢س) \Big]_{-١}^{٢}$$

$$= (٨ - ٢٤) - ((-١) - (-١٢)) = -٢٧$$

$$\therefore \text{المساحة المطلوبة} = \int_{-١}^{٢} |ق(س)|\, ءس = - \int_{-١}^{٢} ق(س)\, ءس = ٢٧ \text{ وحدة مربعة.}$$

مثال (٣)

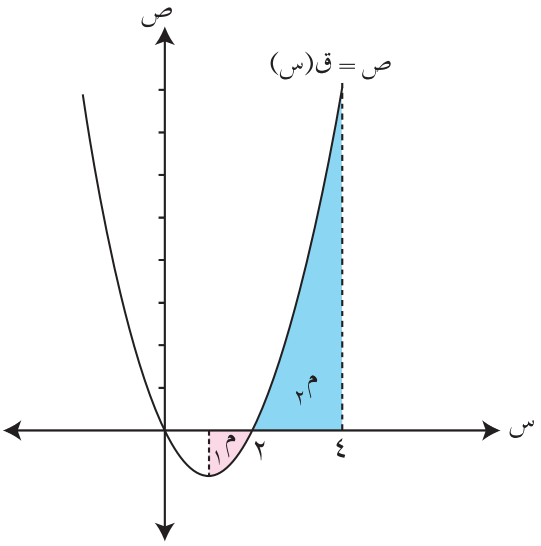
جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س) = س^{٢} - ٢س$، ومحور السينات على الفترة [١، ٤].

الحل

$ق(س) = ٠$

$س^{٢} - ٢س = ٠$

$س(س - ٢) = ٠$، ومنه: $س = ٠$، $س = ٢$، عندها يتقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات، انظر الشكل (٤-٨).



الشكل (٤-٨).

لاحِظ أن $س = ٠$ لا تقع ضمن الفترة $[١، ٤]$،

في حين أن $س = ٢$ تقع ضمن الفترة $[١، ٤]$.

ولهذا يتعين أولًا إيجاد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة $[١، ٢]$:

$$\int_{١}^{٢} (س^{٢} - ٢س)\, ءس = \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٨}{٣} - ٤\right) - \left(\frac{١}{٣} - ١\right) = \frac{-٢}{٣}$$

ثم إيجاد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة $[٢، ٤]$:

$$\int_{٢}^{٤} (س^{٢} - ٢س)\, ءس = \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢}\right)\right]_{٢}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٦٤}{٣} - ١٦\right) - \left(\frac{٨}{٣} - ٤\right) = \frac{٢٠}{٣}$$

$\therefore$ المساحة المطلوبة $= \int_{١}^{٤} |ق(س)|\, ءس = - \int_{١}^{٢} ق(س)\, ءس + \int_{٢}^{٤} ق(س)\, ءس$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٢٠}{٣} = \frac{٢٢}{٣}$ وحدة مربعة.

مثال (٤)

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س) = س^{٢} + ٣س$، ومحور السينات.

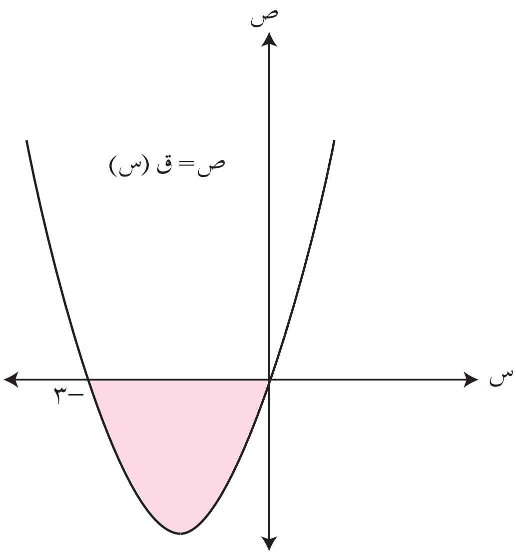
الحل

$ق(س) = ٠$

$س^{٢} + ٣س = ٠$

$س(س + ٣) = ٠$، ومنه: $س = ٠$، $س = -٣$

عندئذٍ يتقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات، انظر الشكل (٤-٩)، فتكون المساحة المطلوبة محصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [-٣، ٠]؛ إذ يتعين إيجاد التكامل المحدود للاقتران ق على الفترة [-٣، ٠]:



الشكل (٤-٩).

$$\int_{-٣}^{٠} (\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\, \text{ءس} = \left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}\right)\Big|_{-٣}^{٠}$$

$$= (٠) - \left(-٩ + \frac{٢٧}{٢}\right) = \frac{-٩}{٢}$$

$$\therefore \text{المساحة المطلوبة} = \int_{-٣}^{٠} |\text{ق(س)}|\, \text{ءس} = \frac{٩}{٢} \text{ وحدة مربعة.}$$

تدريب ١

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

١) ق(س) = ١٢ - ٤س ، على الفترة [١، ٢].

٢) ق(س) = $٣\text{س}^{٢}$ - ١٢س ، على الفترة [٠، ٢].

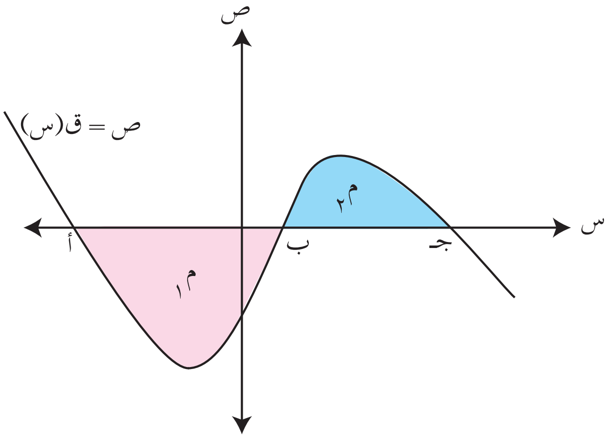
٣) ق(س) = ٦ - ٢س ، على الفترة [١، ٤].

تدريب ٢

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = $\text{س}^{٢}$ - ٢س - ٣، ومحور السينات.

تدريب ٣

يمثل الشكل (٤ – ١٠) منحنى الاقتران ص = ق(س). فإذا كانت المساحة $م_{١}$ = ٨ وحدات مربعة، والمساحة $م_{٢}$ = ٥ وحدات مربعة، فجد قيمة كل مما يأتي، مبرِّرًا إجابتك:



الشكل (٤–١٠).

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) ءس

٢) $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) ءس

٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [أ، جـ].

الأسئلة

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ١٢ ، س = −١ ، س = ٢

ب) ق(س) = ٥ − ٢س ، س = −٢ ، س = ٢

جـ) ق(س) = $٣س^٢$ − ٣ ، س = −٤ ، س = −٢

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ − $٦س^٢$ ، على الفترة [−٢، ٠].

ب) ق(س) = $٤س^٣$ ، على الفترة [−١، ١].

جـ) ق(س) = $٣س^٢$ − ٤٨ ، على الفترة [٣، ٥].

د) ق(س) = $−س^٢$ − ٤ ، على الفترة [−١، ١].

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات في كل مما يأتي:

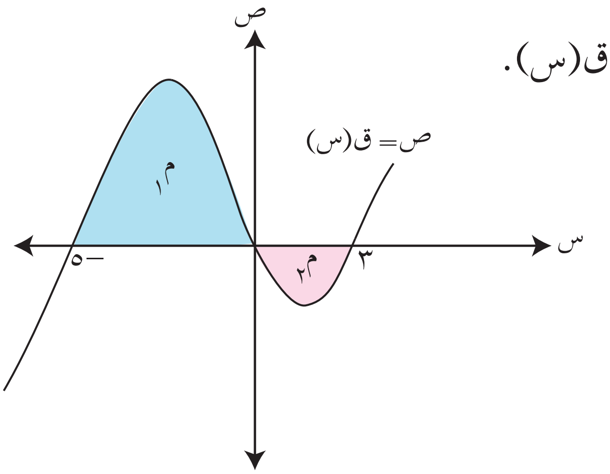
أ) ق(س) = ٤س − $س^٢$ ب) ق(س) = $٤س^٣$ − $١٢س^٢$

٤) يمثل الشكل (٤−١١) منحنى الاقتران ص = ق(س).

فإذا كانت المساحة $م_١$ = ١٣ وحدة مربعة،

والمساحة $م_٢$ = ٣ وحدات مربعة،

فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس، مبرِّرًا إجابتك.



الشكل (٤−١١).

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الفصل الثالث

الاقترانان: اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما

Natural Logarithmic and Natural Exponential Functions and their Applications

النتاجات

- تتعرف الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي.
- تجد مشتقة كل من الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي.
- تجد تكامل الاقتران الأسي الطبيعي.
- تستخدم الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي في التكامل.
- تحل مسائل عملية تتعلق بالنمو والاضمحلال.

أولًا: الاقترانان: اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي

Natural Logarithmic and Natural Exponential Functions

هل يمكنك إيجاد $\int \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{ءس}$ باستخدام قواعد التكامل التي تعلمتها سابقًا؟ فسِّر إجابتك.

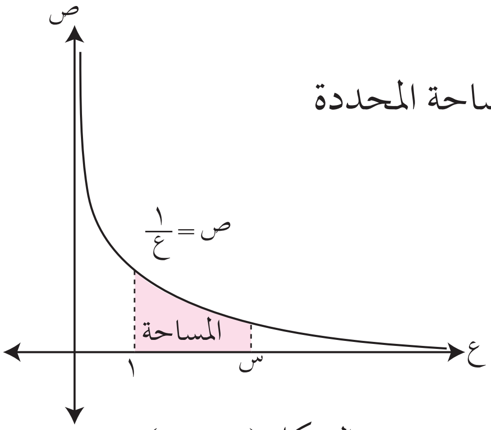
الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

استُخدِمت اللوغاريتمات منذ القرن السابع عشر الميلادي بوصفها طريقة لإجراء العمليات الحسابية التي يصعب تنفيذها بالطرائق التقليدية. وستدرس في هذا الفصل الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي، وبعض تطبيقاتهما.

يمثل الشكل (٤– ١٢) منحنى الاقتران ص = $\frac{\text{١}}{\text{ع}}$ حيث (ع > ٠)، والمستقيمين: ع = ١، ع = س (حيث س > ١).

بتطبيق قواعد حساب المساحات بالتكامل المحدود على المساحة المحددة في الشكل (٤– ١٢)، فإن:

المساحة = $\int_{\text{١}}^{\text{س}} \frac{\text{١}}{\text{ع}}\,\text{ءع}$ ، وهذا التكامل يُسمّى **الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي**، ويُرمَز إليه بالرمز: ($\text{لــو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$).



الشكل (٤–١٢).

أي إن: $لـو_{هـ} س = \int_{١}^{س} \frac{١}{ع} \, ءع$، حيث ع > ٠، ويمكن استخدام هذا التعريف إذا كانت قيمة س بين ٠ ، ١، وينطبق على الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي قوانين اللوغاريتمات التي درستها سابقًا.

تعريف

إذا كان س > ٠، فإن $لـو_{هـ} س = \int_{١}^{س} \frac{١}{ع} \, ءع$

ويُقرَأ: اللوغاريتم الطبيعي لِـ (س).

والعدد هـ هو العدد النيبيري (نسبة إلى عالم الرياضيات الأسكتلندي جون نيبير) الذي يجعل المساحة المحددة في الشكل (٤-١٢) تساوي وحدة مربعة واحدة، وهو عدد غير نسبي، وسنعتمد قيمته التقريبية ٢,٧

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

تعلمت سابقًا أن $\int س^{ن} \, ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ ، حيث $ن \neq -١$

ولكن، ما قيمة التكامل الآتي: $\int س^{-١} \, ءس$ ، حيث س > ٠؟

ليكن $ل(س) = \int س^{-١} \, ءس = \int \frac{١}{س} \, ءس$، حيث س > ٠

باشتقاق كل من الطرفين، ينتج:

$لَ(س) = \frac{١}{س}$ (لماذا؟).

وبما أن ل(س) هو التكامل غير المحدود للاقتران $\frac{١}{س}$، فإن:

$$لـو_{هـ} س = \int_{١}^{س} \frac{١}{ع} \, ءع = ل(س) - ل(١)$$

$$لـو_{هـ} س = ل(س) - ل(١)$$

وباشتقاق كل من الطرفين، ينتج:

(لـــو$_{\text{هـ}}$ س)َ = لَ(س) – صفر (لماذا؟).

وبذلك يكون (لـــو$_{\text{هـ}}$ س)َ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، حيث س > ٠

نظرية

١) إذا كان ق(س) = لـــو$_{\text{هـ}}$ س حيث س > ٠، فإن قَ(س) = $\frac{١}{\text{س}}$.

٢) إذا كان ق(س) = لـــو$_{\text{هـ}}$ م(س) ، م(س) > ٠، وكان م اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{مَ(س)}}{\text{م(س)}} .$$

تدريب ١

وضّح الفرع (٢) من النظرية السابقة بتطبيق الفرع (١)، مستخدمًا قاعدة السلسلة.

مثال (١)

جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند النقطة المحددة في كل مما يأتي:

١) ص = لـــو$_{\text{هـ}}$ ٦س ، س > ٠ عندما س = ١

٢) ص = لـــو$_{\text{هـ}}$ (س^{٢} + ١٠) عندما س = −٢

الحل

١) ص = لـــو$_{\text{هـ}}$ ٦س

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٦}{\text{٦س}} = \frac{١}{\text{س}}$$

$$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س} = ١} = ١$$

٢) $ص = \text{لـو}_{هـ}(س^{٢}+١٠)$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{س^{٢}+١٠}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢} = \frac{-٤}{١٤} = \frac{-٢}{٧}$$

تدريب ٢

جد قَ(س) في كل مما يأتي:

١) $ق(س) = \text{لـو}_{هـ}\ \text{جتاس}$

٢) $ق(س) = \text{لـو}_{هـ}\frac{٢}{س}$ ، $س > ٠$

٣) $ق(س) = \text{لـو}_{هـ}(س^{٣}+٨)$، $س > -٢$

تدريب ٣

إذا كان $ق(س) = \text{لـو}_{هـ}(أ\,س + ٣)$ ، حيث أ ثابت، وكان $قَ(-٢) = ١$ ، فجد قيمة الثابت أ.

تدريب ٤

إذا كان $ق(س) = \text{لـو}_{هـ}|س|$ (حيث $س \neq ٠$)، فجد قَ(س).

(إرشاد: ادرس الحالتين: الأولى عندما $س > ٠$ حيث $|س| = س$،

والثانية عندما $س < ٠$ حيث $|س| = -س$).

بناءً على حل التدريب (٤)، يمكن استنتاج النظرية الآتية:

نظرية

$$\int س^{-١}\,ءس = \int \frac{١}{س}\,ءس = \text{لـو}_{هـ}|س| + جـ \text{، حيث } س \neq ٠$$

مثال (٢)

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int \frac{٢}{\text{س}} \, \text{ءس}$ ، س $\neq$ ٠   ٢) $\int \frac{٥ - ١٠\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٧} \, \text{ءس}$

الحل

١) $\int \frac{٢}{\text{س}} \, \text{ءس} = ٢ \left(\text{لـــو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \right) + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{٥ - ١٠\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٧} \, \text{ءس} = -٥ \left(\text{لـــو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} - \text{س} + ٧| \right) + \text{جـ}$

وضِّح خطوات الحل في الفرع (٢) باستخدام التكامل بالتعويض.

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int \frac{-٣}{\text{س}} \, \text{ءس}$ ، س $\neq$ ٠

٢) $\int (٦\text{س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١)^{-١} \, \text{ءس}$

الاقتران الأسي الطبيعي

تعرفت سابقًا أن الاقتران الأسي الطبيعي ($\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$، حيث هـ العدد النيبيري) هو الاقتران العكسي للاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.

فالصورة الأسية ($\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$) تكافئ الصورة اللوغاريتمية ($\text{لـــو}_{\text{هـ}} \text{ص} = \text{س}$).

ويمكن إيجاد المشتقة الأولى للاقتران الأسي الطبيعي باستخدام النظرية الآتية:

نظرية

١) إذا كان $ق(س) = هـ^{س}$ (حيث هـ العدد النيبيري)، فإن $قَ(س) = هـ^{س}$.

٢) إذا كان $ق(س) = هـ^{ل(س)}$ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإن:

$قَ(س) = لَ(س) \, هـ^{ل(س)}$.

تدريب ٦

وضِّح الفرع (٢) من النظرية السابقة بتطبيق الفرع (١)، مستخدمًا قاعدة السلسلة.

مثال (٣)

جد قَ(س) في كل مما يأتي:

١) $ق(س) = هـ^{٣س}$

٢) $ق(س) = هـ^{٢س^٢+١}$

٣) $ق(س) = هـ^{جا ٣س^٢}$

٤) $ق(س) = ٢س^٢ هـ^{٥س} - لو_{هـ}(س^٣+١)$

الحل

١) $قَ(س) = ٣ هـ^{٣س}$

٢) $قَ(س) = ٤س هـ^{٢س^٢+١}$

٣) $قَ(س) = ٦س \, جتا ٣س^٢ \, هـ^{جا ٣س^٢}$ (برِّر خطوات الحل).

٤) $قَ(س) = ٢س^٢ \times (٥) هـ^{٥س} + هـ^{٥س} \times ٤س - \frac{٣س^٢}{س^٣+١}$ (برِّر خطوات الحل).

تدريب ٧

جد صَ في كل مما يأتي:

١) $ص = هـ^{٣-س^٢}$ ٢) $ص = هـ^{جتا ٢س}$

٣) $ص = (هـ^{س})(لو_{هـ} س)$ ٤) $ص = \frac{هـ^{٣س}}{س^٢+١}$

لاحِظ أن **مشتقة** $(هـ^{س})$ **تساوي** $(هـ^{س})$؛ لذا يمكن استنتاج النظرية الآتية:

نظرية

١) $\int هـ^{س}\, ءس = هـ^{س} + جـ$ ، حيث هـ العدد النيبيري.

٢) $\int هـ^{أس+ب}\, ءس = \frac{هـ^{أس+ب}}{أ} + جـ$ ، أ ، ب عددان حقيقيان، $أ \neq ٠$

تدريب ٨

وضِّح الفرع (٢) من النظرية السابقة بتطبيق الفرع (١)، مستخدمًا التكامل بالتعويض.

مثال (٤)

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int (٣هـ^{س} - \frac{٦}{س} + ٥)\, ءس$

٢) $\int ٨\, هـ^{٤-٢س}\, ءس$

٣) $\int (٢-س)\, هـ^{س^٢-٤س+٧}\, ءس$

الحل

١) $\int (\text{٣هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{٦}}{\text{س}} + \text{٥})\, \text{ءس} = \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٦ لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{٥س} + \text{جـ}$.

٢) $\int \text{٨ هـ}^{\text{٤}-\text{٢س}}\, \text{ءس} = -\text{٤هـ}^{\text{٤}-\text{٢س}} + \text{جـ}$ (برِّر الإجابة).

٣) $\int (\text{٢} - \text{س})\, \text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤س}+\text{٧}}\, \text{ءس} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}}\, \text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤س}+\text{٧}} + \text{جـ}$.

(وضِّح خطوات الحل في الفرع (٣) باستخدام التكامل بالتعويض).

تدريب ٩

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس}$

٢) $\int \frac{\text{١}}{\text{٣}}\, \text{هـ}^{\text{١}-\text{٦س}}\, \text{ءس}$

٣) $\int (\text{٢} + \text{٣س}^{\text{٢}})\, \text{هـ}^{\text{س}^{\text{٣}}+\text{٢س}-\text{١}}\, \text{ءس}$

٤) $\int \frac{\text{٦ ءس}}{\text{هـ}^{\text{١}-\text{٢س}}}$

الأسئلة

١) جد $قَ(س)$ في كل مما يأتي:

أ) $ق(س) = \frac{١}{س} + لـو_{هـ} س + ٧ هـ^{٢س} + ٦$ ، $س > ٠$

ب) $ق(س) = ٣ لـو_{هـ} س - ٢ هـ^{٣-٢س} - س^{٢}$ ، $س > ٠$

جـ) $ق(س) = هـ^{جاس} - ٢ لـو_{هـ} (جتا س)$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (٢هـ^{س} - \frac{١}{س} + ٣س^{٢}) \, ءس$

ب) $\int ٤٢ هـ^{١+٢س} \, ءس$

جـ) $\int ٢س هـ^{١-س^{٢}} \, ءس$

د) $\int (\frac{٥}{س} - ٣هـ^{٣س} - ٤) \, ءس$

هـ) $\int \frac{٨س}{س^{٢} + ٤} \, ءس$

٣) إذا كان ميل المماس للاقتران $ص = ق(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يعطى بالقاعدة:

$قَ(س) = ٢هـ^{س} + ٢س$ ، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(٠، ٤)$.

٤) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة:

$ع(ن) = هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن}$ ، وإن $ن > ٠$، جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها.

ثانيًا النمو والاضمحلال Growth and Decay

يتزايد عدد سكان مدينة ما بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة مقدارها ٠,٨٪ سنويًّا. فإذا بلغ عدد سكانها ٦٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠١٠م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢١٣٥م؟

النمو والاضمحلال هما من التطبيقات العملية المهمة للاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي؛ فالكثير من الظواهر العلمية والاجتماعية والإنسانية والبيولوجية وغيرها يمكن التعامل معها باقتران ع(ن) الذي يرتبط بالزمن (ن)؛ أي إن ص = ع(ن)، حيث ن الزمن.

أما إذا كان معدل تغير الاقتران ص (أي عَ(ن)) يتناسب بانتظام واستمرار مع الاقتران نفسه ع(ن)، فإن:

$عَ(ن) = أ \times ع(ن)$، حيث: أ: ثابت التناسب، ن: الزمن.

ومنه: $\frac{عَ(ن)}{ع(ن)} = أ$ ، حيث $ع(ن) \neq ٠$

$$\therefore \int \frac{عَ(ن)}{ع(ن)} \, دن = \int أ \, دن$$

وبفرض أن ل = ع(ن)، واستخدام التكامل بالتعويض، ينتج:

$$لو_{هـ} |ع(ن)| = أ\,ن + جـ$$

وإذا كان ع(ن) > ٠، فإن العلاقة تصبح: $لو_{هـ} ع(ن) = أ\,ن + جـ$

وهذه الصورة اللوغاريتمية تكافئ الصورة الأسية: $ع(ن) = هـ^{أن+جـ}$

وعندما ن = ٠، فإن $ع(٠) = هـ^{جـ}$

إذن: $ع(ن) = هـ^{أن+جـ}$

$ع(ن) = هـ^{أن} \times هـ^{جـ}$ (استخدام قوانين الأسس).

$ع(ن) = هـ^{أن} \times ع(٠)$

قيمة الظاهرة المدروسة ص = ع(ن) هي:

ص = ع(ن) = ع$_{٠}$ × هـ$^{\text{أن}}$ ، حيث: ع$_{٠}$ = ع(٠) = القيمة الابتدائية.

هـ = العدد النيبيري ≈ ٢٫٧.

ن = الزمن.

أ = ثابتًا عدديًا يمثل ثابت التناسب.

١) إذا كان أ > ٠، فإن ص = ع(ن) تزداد بزيادة قيمة ن، فتكون المعادلة ص = ع(ن) **معادلة النمو**، ويكون أ **معامل النمو**.

٢) إذا كان أ < ٠، فإن ص = ع(ن) تنقص بزيادة قيمة ن، فتكون المعادلة ص = ع(ن) **معادلة الاضمحلال** أو التلاشي، ويكون أ **معامل الاضمحلال**.

مثال (١)

إذا كان عدد سكان بلدة ما يخضع لقانون النمو، ويتزايد بانتظام واستمرار بمعدل ٢٪ سنويًا، وكان عدد سكانها ٤٠ ألف نسمة عام ١٩٩٠م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٤٠م؟

الحل

عدد السكان = ع(ن) = ع$_{٠}$ × هـ$^{\text{أن}}$

ع$_{٠}$ = ع(٠) = ٤٠٠٠٠ نسمة، على فرض أن عام ١٩٩٠م هو نقطة الإسناد.

أ = ٠٫٠٢

ن = ٢٠٤٠ − ١٩٩٠ = ٥٠ عامًا.

ع(ن) = ع$_{٠}$ × هـ$^{\text{أن}}$

ع(٥٠) = ٤٠٠٠٠(٢٫٧)$^{٥٠×٠٫٠٢}$

ع(٥٠) = ٤٠٠٠٠×٢٫٧ = ١٠٨٠٠٠ نسمة عدد سكان البلدة عام ٢٠٤٠م.

تدريب ١

اقترض يمان مبلغ ١٠٠٠٠ دينار من مصرف يحسب ربحًا مركّبًا منتظمًا وفق قانون النمو، بنسبة ربح مقدارها ٤٪ سنويًّا. جد جملة المبلغ الذي سيسدده يمان للمصرف بعد مرور خمس وعشرين سنة.

مثال (٢)

تتحلل مادة مشعة بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل تناقص مقداره ٠,٠٠٠٢ سنويًّا. جد كتلة المادة المشعة المتبقية بعد مرور ٥٠٠٠ سنة، علمًا بأن كتلة المادة الأصلية هي ٥٤٠ غرامًا.

الحل

كتلة المادة المتبقية = ع(ن) = $\text{ع}_{.}$ × هـ$^{\text{أن}}$

$\text{ع}_{.}$ = ع (٠) = ٥٤٠ غرامًا.

أ = –٠,٠٠٠٢ (لماذا الإشارة سالبة؟).

ن = ٥٠٠٠ سنة.

ع(ن) = $\text{ع}_{.}$ × هـ$^{\text{أن}}$

ع(٥٠٠٠) = ٥٤٠ × $(\text{٢,٧})^{\text{–٠,٠٠٠٢×٥٠٠٠}}$

= ٥٤٠ × $\text{٢,٧}^{\text{–١}}$

= $\frac{\text{٥٤٠}}{\text{٢,٧}}$ = $\frac{\text{٥٤٠٠}}{\text{٢٧}}$ = ٢٠٠ غرام كتلة المادة المتبقية بعد ٥٠٠٠ سنة.

تدريب ٢

يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥٪ سنويًّا. فإذا كان ثمنه الأصلي ٨٠٠٠٠ دينار، فكم يصبح ثمنه بعد مرور ٤٠ سنة؟

مثال (٣)

يتزايد سعر قطعة أرض وفق قانون النمو بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة. فإذا ازداد سعرها من ٤٠٠ ألف دينار إلى ٨٠٠ ألف دينار خلال ١٠ سنوات، فجد سعرها بعد مرور ٣٠ سنة.

الحل

سعر قطعة الأرض = ع(ن) = ع. × هـ$^{\text{أن}}$

ع. = ع (٠) = ٤٠٠٠٠٠ دينار.

ع (١٠) = ٨٠٠٠٠٠ دينار.

ع (ن) = ع٠ × هـ$^{\text{أن}}$

عندما ن = ١٠ سنوات، ع (١٠) = ع. × هـ$^{\text{١٠أ}}$

٨٠٠٠٠٠ = ٤٠٠٠٠٠ × هـ$^{\text{١٠أ}}$ ، ومنه: (هـ)$^{\text{١٠أ}}$ = ٢

عندما ن = ٣٠ سنة، ع(٣٠) = ٤٠٠٠٠٠ × هـ$^{\text{٣٠أ}}$

= ٤٠٠٠٠٠ × (هـ$^{\text{١٠أ}}$)^{٣} = ٤٠٠٠٠٠ × (٢)^{٣}

= ٤٠٠٠٠٠ × (٨)

= ٣٢٠٠٠٠٠ دينار يصبح ثمنها بعد ٣٠ سنة.

الأسئلة

١) تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠ ٪ في الساعة. جد عددها بعد نصف ساعة، علمًا بأن عددها الابتدائي (٥٠٠ ٠٠٠).

٢) يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل ٨ ٪ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي ١٢٥٨٠ دينارًا، فجد ثمنها بعد مرور ٢٥ سنة.

٣) يذوب ملح في الماء، وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال. إذا وضعت ١٠ كيلوغرامات من الملح في الماء، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة، فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة.

٤) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي:

أ) $ص = \int \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ٥} \, ءس$

ب) $ص = \int_{-١}^{٣} (٣س)(٤س - ٢) \, ءس$

جـ) $ص = \int ظا(٤ + س) \, ءس$

د) $ص = \int_{٢}^{٢} (لو_{هـ} س - هـ^{٢س}) \, ءس$

هـ) $ص = لو_{هـ}(س^{٢} + ٦) - هـ^{٢س-١} + س^{٣} - ١$

و) $ص = جاس \; لو_{هـ} س$

٢) إذا كان $ق(س) = هـ^{٢س^{٢}-١}$ ، فجد $قً(س)$.

٣) إذا كان $ق(س) = \int س(٢ - س^{٢}) \, ءس$، فجد $قَ(٢)$.

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{س^{٢} - ٧س}{\sqrt[٣]{س}} \, ءس$

ب) $\int \frac{٦}{س^{-٥}} \, ءس$

جـ) $\int (س - ٢)(س + ٢) \, ءس$

د) $\int (٣س + ٢)^{٢} \, ءس$

هـ) $\int (٢س - ١)(س^{٢} - س)^{٥} \, ءس$

و) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{س^{٣} + ١}} \, ءس$ ، $س > -١$

ز) $\int \left(\frac{٢}{س} - هـ^{س} + ٣\right) ءس$

ح) $\int \frac{١٢س^{٣}}{س^{٤} + ٣} \, ءس$

ط) $\int ٦س \, هـ^{س^{٢}+٥} \, ءس$

ي) $\int \frac{٢س + ١}{جتا^{٢}(س^{٢} + س)} \, ءس$

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{-٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{٤} \text{هـ}\,\text{ءس}$، حيث هـ العدد النيبيري

جـ) $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\text{ءس}$

د) $\int_{-١}^{١} \frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} + ٤}\,\text{ءس}$

هـ) $\int_{٣}^{٠} \frac{٢}{٢\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

و) $\int_{١}^{٠} ٤\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

ز) $\int_{٢}^{٦} \frac{١٠}{\sqrt{٥\text{س} + ٦}}\,\text{ءس}$

٦) إذا كان $\int_{\text{ب}^{٢}+\text{ب}}^{-\text{ب}+٣} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$ = صفرًا، فجد قيمة الثابت ب.

٧) إذا كان $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = ٤$، $\int_{-١}^{٥} (\text{ق(س)} + ٣)\,\text{ءس} = ٢٠$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٥}^{-١} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

ب) $\int_{١}^{-١} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

جـ) $\int_{٥}^{١} (٣\text{ق(س)} - ٤\text{س})\,\text{ءس}$

٨) جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

أ) $\int_{\text{١-}}^{\text{٣}} \text{٢ب ءس} = \text{١٢}$

ب) $\int_{\text{٤}}^{\text{ب}} (\text{٢س} - \text{١})\ \text{ءس} = \text{٠}$

جـ) $\int_{\text{٠}}^{\text{٣}} (\text{ب س}^{\text{٢}} + \text{٢})\ \text{ءس} = -\text{٢١}$

د) $\int_{\text{٢}}^{\text{ب}} (\text{١} - \text{٤س})\ \text{ءس} = \text{٥ب}$

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة (١ + س) (٣س + ٢)، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٢، −١).

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س$^{\text{٢}}$ − ٢٧، ومحور السينات في الفترة [−٤، ٠].

١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره ت(ن) = ١٢ن(١ − ن) م/ث$^{\text{٢}}$، حيث ن الزمن بالثواني. فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث، وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م، فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

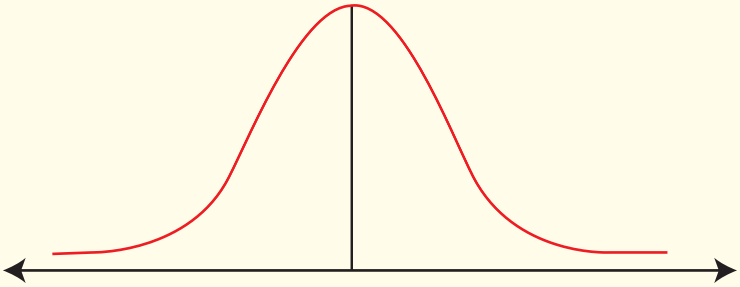
ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

١٢) يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة ٢,٥٪ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار، فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عامًا؟

الوحدة الخامسة

٥

الإحصاء والاحتمالات



يُعَدُّ علم الإحصاء والاحتمالات أحد فروع الرياضيات التي لا يمكن الاستغناء عنها؛ نظرًا إلى تطبيقاتها المتعددة في مختلف مجالات الحياة، ولا سيما الهندسية، والعلمية، والاجتماعية، والاقتصادية، والطبية، والإدارية، ولهذا فإن تعلم أساسياتها يُعَدُّ مدخلًا مهمًّا لفهم الكثير من الظواهر الطبيعية في العالم المحيط بنا.

Statistics and Probability

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مبدأ العد، واستخدامه في حل مسائل حياتية.
- استقصاء التباديل والتوافيق ومضروب العدد الصحيح غير السالب باستخدام مبدأ العد، وحل مسائل عملية على ذلك.
- فهم العلامة المعيارية وعلاقتها بالعلامة الخام.
- حساب العلامة المعيارية للعلامة الخام، وتفسيرها.
- استقصاء خصائص التوزيع الطبيعي، والإفادة منها في حل مسائل عملية.
- تحديد طبيعة الارتباط بين متغيرين عن طريق شكل الانتشار.
- حساب قيمة معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين، وتفسير دلالات قيمته عن طريق شكل الانتشار.
- تحديد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبيق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتحديد الفرق بين القيمة المفترضة والقيمة المتنبأ بها.
- فهم المتغير العشوائي المنفصل، وتوزيع ذي الحدين.

الفصل الأول

طرائق العد

Counting Methods

النتاجات

- تتعرف مبدأ العد، وتستخدمه في حل مسائل حياتية.
- تجد قيمة مضروب العدد الصحيح غير السالب، وتستخدمه في حل مسائل حياتية.
- تتعرف مفهومي التباديل والتوافيق، وخصائص كل منهما.
- تحل مسائل حياتية باستخدام التباديل والتوافيق.

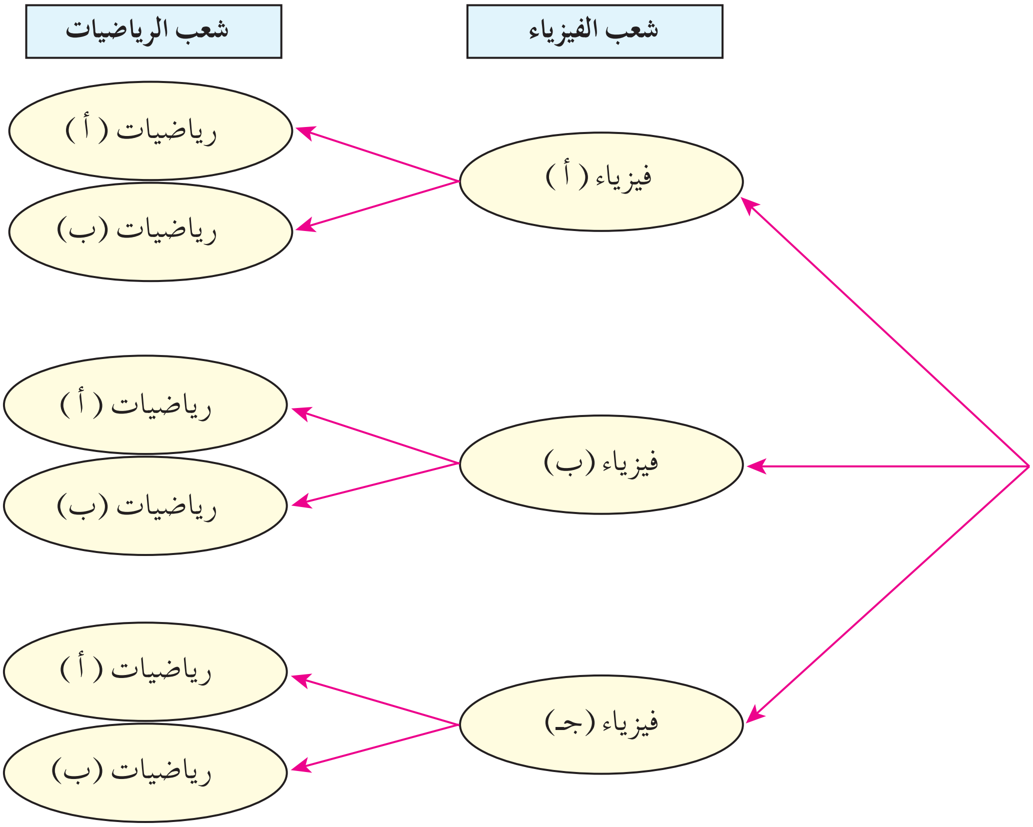
أولًا مبدأ العد Counting Principle

لدى محمد أربعة أنواع من القمصان، وثلاثة أنواع من البناطيل، ونوعان من الأحذية، فهل يكفيه ذلك إذا أراد كل يوم ارتداء لباس مختلف عن اليوم الذي سبقه مدة شهر كامل؟

أحمد طالب جامعي يريد تسجيل مساقي الفيزياء والرياضيات. فإذا علم أن عدد الشعب المتوافرة لمساق الفيزياء هي ثلاث شعب، وشعبتان لمساق الرياضيات، فكم عدد الطرائق التي يمكنه بها التسجيل للمساقين (علمًا بأنه لا يمكن طرح هذه الشعب جميعًا في وقت واحد)؟

يتضح من معطيات السؤال أن الطالب سيقوم بعمليتي اختيار، تتمثل الأولى في تسجيل شعبة من شعب مساق الفيزياء المتوافرة، وأن أمامه ثلاثة خيارات هي: التسجيل في شعبة (أ)، أو شعبة (ب)، أو شعبة (جـ). أما عملية الاختيار الأخرى فتتمثل في تسجيل شعبة من شعب مساق الرياضيات، حيث يوجد لديه خياران فقط هما: التسجيل في شعبة (أ)، أو في شعبة (ب).

ولإيجاد عدد طرائق اختيار شعبتين معًا، انظر الشكل (٥-١):



الشكل (٥-١).

يتبين من الشكل (٥-١) أن عدد طرائق اختيار شعبتي فيزياء ورياضيات يساوي (٦) كالآتي:

(فيزياء أ، رياضيات أ)، (فيزياء أ، رياضيات ب)، (فيزياء ب، رياضيات أ)، (فيزياء ب، رياضيات ب)، (فيزياء جـ، رياضيات أ)، (فيزياء جـ، رياضيات ب).

فكر وناقش

ما علاقة عدد طرائق اختيار شعبتي فيزياء ورياضيات معًا بعدد طرائق اختيار شعبة من كل مساق على حِدَة؟

مثال (١)

في مكتبة فاطمة ٤ دواوين شعرية (للشعراء: المتنبي، وأحمد شوقي، وعرار، والفرزدق)، و٣ روايات أدبية (للروائيين: فدوى طوقان، وتوفيق الحكيم، ووليد سيف). إذا أرادت فاطمة قراءة كتابين أحدهما يمثل ديوانًا شعريًا والآخر يمثل روايةً أدبيةً، فبكم طريقة يمكنها ذلك؟

الحل

بما أن الاختيار يتكون من عمليتين، فإننا نستطيع تمثيل طرائق الاختيار باستخدام الجدول الآتي:

طرائق الاختيار			
	فدوى طوقان	**توفيق الحكيم**	**وليد سيف**
المتنبي	(المتنبي، فدوى)	(المتنبي، توفيق)	(المتنبي، وليد)
أحمد شوقي	(أحمد، فدوى)	(أحمد، توفيق)	(أحمد، وليد)
عرار	(عرار، فدوى)	(عرار، توفيق)	(عرار، وليد)
الفرزدق	(الفرزدق، فدوى)	(الفرزدق، توفيق)	(الفرزدق، وليد)

يتبين لنا من دراسة الجدول السابق أن فاطمة لديها ١٢ طريقة لقراءة كتابين، بحيث يكون أحدهما ديوانًا شعريًا، والآخر روايةً أدبيةً.

فكر وناقش

ما علاقة عدد طرائق اختيار ديوان شعري ورواية أدبية معًا بعدد طرائق اختيار ديوان شعري ورواية أدبية على حِدَة؟

استنادًا إلى العرض السابق، يمكن التوصل إلى قاعدة أساسية في العد تُسمّى **مبدأ العد**، وتنص على ما يأتي:

تعريف

إذا أمكن إجراء عملية ما في مرحلتين متتابعتين، بحيث أجريت المرحلة الأولى بطرائق عددها $ن_١$، والمرحلة الأخرى بطرائق عددها $ن_٢$، فإنه يمكن إتمام المرحلتين: الأولى والثانية معًا بطرائق عددها $ن_١ \times ن_٢$.

تدريب ١

محل لبيع الخضراوات والفواكه يحتوي على أربعة أصناف من الفاكهة (موز، برتقال، تفاح، دراق)، وصنفين من الخضراوات (كوسا، بطاطا). دخلت أم رامي المحل لشراء صنف واحد من الفواكه، وصنف آخر من الخضراوات. ما الخيارات المتوافرة لها؟

مثال (٢)

أراد عمر شراء ثلاجة وغسالة وجهاز تكييف من أحد معارض الأجهزة الكهربائية. بكم طريقة يمكنه شراء ذلك، علمًا بأن المعرض يحتوي على ٤ أنواع مختلفة من الثلاجات، و ٥ أنواع من الغسالات، و ٣ أنواع من أجهزة التكييف؟

الحل

عدد طرائق اختيار الثلاجة = ٤ طرائق، وعدد طرائق اختيار الغسالة = ٥ طرائق، وعدد طرائق اختيار جهاز التكييف = ٣ طرائق.

بحسب مبدأ العد، فإن عدد طرائق اختيار الثلاجة والغسالة وجهاز التكييف هي:

$٤ \times ٥ \times ٣ = ٦٠$ طريقة.

وهذا المثال يقودنا إلى تعميم مبدأ العد الآتي:

إذا أمكن إجراء عملية ما ضمن مراحل عدة متتابعة عددها (ك)، بحيث أجريت المرحلة الأولى بطرائق عددها $ن_١$، والمرحلة الثانية بطرائق عددها $ن_٢$، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة (ك) التي تجري بطرائق عددها $ن_ك$، فإنه يمكن إتمام هذه العملية بطرائق عددها $ن_١ \times ن_٢ \times ... \times ن_ك$.

تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٣)

من مجموعة الأرقام الآتية: { ٢، ٣، ٥، ٦}، كم عددًا يمكن تكوينه من منزلتين:

١) إذا سُمِح بتكرار الأرقام؟

٢) إذا لـم يُسمَح بتكرار الأرقام؟

الحل

١) بما أن التكرار مسموح به، فإن:

عدد طرائق اختيار المنزلة الأولى = ٤ طرائق (لدينا أربعة أرقام يمكن الاختيار منها)،

وعدد طرائق اختيار المنزلة الثانية = ٤ طرائق.

∴ عدد طرائق تكوين العدد = ٤ × ٤ = ١٦ طريقة، والأعداد هي:

٢٢، ٣٢، ٥٢، ٦٢، ٢٣، ٣٣، ٥٣، ٦٣، ٢٥، ٣٥، ٥٥، ٦٥، ٢٦، ٣٦، ٥٦، ٦٦.

٢) بما أنه لا يُسمَح بالتكرار، فإن:

عدد طرائق اختيار المنزلة الأولى = ٤ طرائق (لدينا أربعة أرقام يمكن الاختيار منها).

وعدد طرائق اختيار المنزلة الثانية = ٣ طرائق (عدد الاختيارات نقص بمقدار واحد بسبب عدم التكرار).

∴ عدد طرائق تكوين العدد = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة، والأعداد هي:

٣٢، ٥٢، ٦٢، ٢٣، ٥٣، ٦٣، ٢٥، ٣٥، ٦٥، ٢٦، ٣٦، ٥٦.

تدريب ٣

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ منازل من مجموعة الأرقام الفردية التي هي أكبر من ٤، في حال:

أ) سُمِح بتكرار الأرقام؟ ب) لم يُسمَح بتكرار الأرقام؟

مضروب العدد الصحيح غير السالب

إذا أردنا معرفة عدد الطرائق التي يمكن بها توزيع ٤ أقلام ملونة (أحمر، أخضر، أزرق، أسود)، على ٤ طالبات (هدى، سمر، ليلى، بتول بالترتيب)، فإن هدى لديها أربعة خيارات، وسمر ثلاثة خيارات، وليلى خياران، وبتول خيار واحد فقط. وبحسب مبدأ العد، فإن عدد طرائق الاختيار ستبلغ: ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة.

لاحِظ أن العملية السابقة تضمنت ضرب أعداد متتالية بدءًا بالعدد ٤، ثم تناقصت حتى انتهت بالعدد ١، ويمكننا التعبير عن ذلك باستخدام **مضروب العدد ٤**، ويُرمَز إليه بالرمز **٤!**، ويساوي ٤ × ٣ × ٢ × ١.

يمكن تعريف مضروب العدد على النحو الآتي:

تعريف

إذا كان ن عددًا صحيحًا غير سالب، فإن مضروب العدد ن يساوي:

ن!= ن × (ن−١) × (ن−٢) × (ن−٣) ×٠٠٠٠× ٣ × ٢ × ١

أما مضروب العدد صفر فيساوي ٠! = ١

يمكن أيضًا استنتاج أن (ن !) = ن × (ن−١)!

= ن × (ن−١) × (ن−٢)!

= ن × (ن−١) × (ن−٢) × (ن−٣)!،

وهكذا.

مثال (٤)

جد قيمة كل مما يأتي:

١) ٥!

٢) ٧!

٣) ٢!

٤) ٤! + ٣!

الحل

١) ٥! = ٥×٤×٣×٢×١ = ١٢٠

٢) ٧! = ٧×٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٥٠٤٠

٣) ٢! = ٢×١ = ٢

٤) ٤! +٣! = (٤×٣×٢×١) + (٣×٢×١) = ٢٤ + ٦ = ٣٠

تدريب ٤

بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ طلاب على ٦ مقاعد موضوعة بطريقة مستقيمة؟

مثال (٥)

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

١) (ن!) = ٧٢٠

٢) ٤ + ٢ (ن!) = ٥٢

٣) −٦ + (ن + ١)! = ٠! + ١٧

٤) $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ٢)!}} = ١٢$

الحل

١) ٧٢٠ = ٦×٥×٤×٣×٢×١ = ٦!

∴ (ن!) = ٦! ، ومنه ن = ٦

٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦
١	

٢) ٤ + ٢ (ن!) = ٥٢

٢(ن!) = ٤٨

ن! = ٢٤

ن! = ٤!

∴ ن = ٤

٣) −٦ + (ن + ١)! = ٠! + ١٧

−٦ + (ن + ١)! = ١ + ١٧

(ن + ١)! = ٢٤

(ن + ١)! = ٤!

ن + ١ = ٤

∴ ن = ٣

٤) $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ٢)!}} = \text{١٢}$

$$\frac{\text{ن(ن−١) (ن−٢)!}}{\text{(ن − ٢)!}} = \text{١٢}$$

ن (ن − ١) = ١٢

ن^{٢} − ن − ١٢ = ٠

(ن − ٤) (ن + ٣) = ٠

ن = ٤

أو: ن = −٣ (مرفوض).

تدريب ٥

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

١) (ن !) = ١٢٠

٢) ١٠ + ٣ (ن!) = ١٦

٣) (٢ ن + ١)! = ١٢٠

٤) $\frac{\text{(ن + ١)!}}{\text{(ن − ١)!}} = \text{٣٠}$

الأسئلة

١) تعمل ١٠ حافلات لنقل الركاب بين مدينتي مأدبا وعمان، وتعمل ٣٠ حافلة أخرى بين مدينتي عمّان والزرقاء. فإذا أراد راكب أن يسافر من مأدبا إلى الزرقاء مرورًا بعمّان، ثم يعود سالكًا الطريق نفسه، فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك شريطة ألا يركب الحافلة نفسها في أثناء رحلته؟

٢) محل لبيع المجمدات الغذائية، فيه ٣ أنواع مختلفة من الأسماك، و ٤ أنواع مختلفة من اللحوم الحمراء، ونوعان مختلفان من الدجاج. بكم طريقة يمكن لأحد الزبائن أن يشتري نوعًا واحدًا من كل من الأسماك واللحوم الحمراء والدجاج؟

٣) اتبعت دائرة السير في إحدى الدول نظامًا لترقيم السيارات مُستخدمة الأرقام ١ ← ٩، بحيث تحتوي لوحة السيارة على ٤ أرقام، وحرفين من أحرف الهجاء. كم سيارة يمكن ترقيمها بهذه الطريقة، علمًا بأن عدد أحرف الهجاء ٢٨ حرفًا، وتكرار الأرقام مسموح به، خلافًا لتكرار الأحرف؟

٤) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) ٦!

ب) ٣! + ٥! + ٢!

جـ) ٢! + ٠!

د) ٤٢ × ٣!

٥) حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) ٢ × (ن!) = ٤٨

ب) ١٠٠ − (ن !) = −٢٠

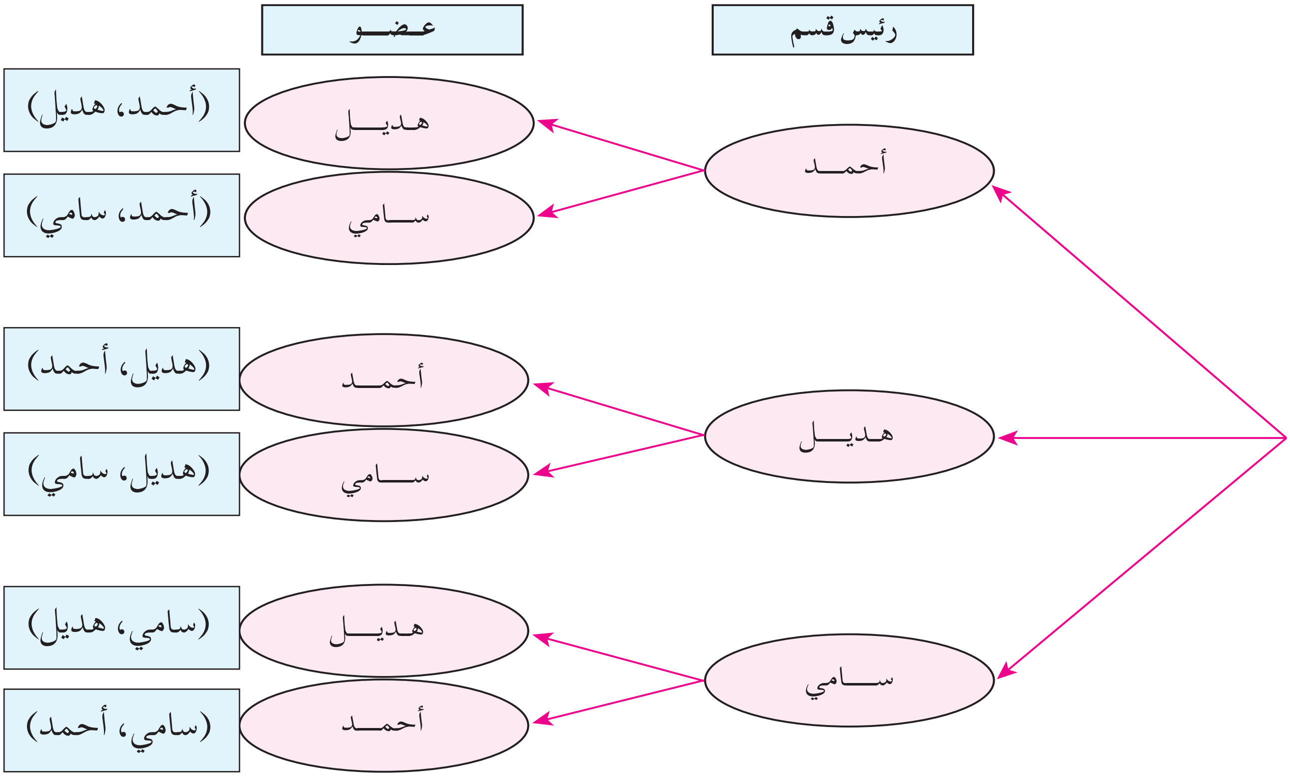
جـ) (٣ ن − ١)! = ٢

ثانيًا التباديل Permutations

أعلنت إحدى الإدارات عن توافر شاغرين لرئيس قسم وعضو فيها. فإذا تقدم ثلاثة أشخاص لهاتين الوظيفتين، هم: أحمد، وهديل، وسامي، فاكتب جميع الطرائق الممكنة لاختيار شخصين منهم؛ على أن لا يشغل الشخص نفسه كلتا الوظيفتين.

لاحِظ أننا سنقوم بعمليتين؛ الأولى: اختيار رئيس قسم بثلاث طرائق، والثانية: اختيار عضو بطريقتين اثنتين.

اعتمادًا على مبدأ العد، فإن اختيار رئيس القسم والعضو معًا سيكون بست طرائق (٣×٢ = ٦)، والشكل (٥–٢) يبين هذه الطرائق.



الشكل (٥–٢).

يتبين مما سبق أهمية الترتيب في كتابة الأزواج المرتبة؛ وذلك أنه يعطي معنًى مختلفًا. فإذا اخترنا مثلًا (أحمد، هديل) فهذا يعني أن أحمد هو رئيس القسم، وهديل هي العضو، أما إذا اخترنا

(هديل، أحمد) فهذا يعني أن هديل هي رئيس القسم، وأحمد هو العضو.

يُطلق على الأزواج المرتبة الآنف ذكرها اسم **تباديل** المجموعة { أحمد، هديل، سامي}، وهي تتضمن عنصرين في كل مرة، ويُرمَز إليها بالرمز: ل(٣، ٢) = ٣ × ٢ = ٦

عدد تباديل مجموعة متمايزة، عدد عناصرها (ن) عنصر، مأخوذة (ر) في كل مرة، يساوي حاصل ضرب الأعداد المتتالية بدءًا من (ن)، ثم تتناقص واحدًا كل مرة حتى تصل العدد (ن − ر + ١)، أو تتناقص بحيث يكون عددها (ر).

تعريف

التباديل

إذا اختيرت عناصر عددها ر من مجموعة عدد عناصرها ن، بحيث يكون ترتيب الاختيار مهمًّا، فإن هذا الاختيار يُسمّى تباديل.

ويُرمَز إلى عددها بالرمز: ل (ن، ر)، حيث ن ، ر عددان طبيعيان ، ٠≤ ر ≤ ن،

$$\text{ويكون ل (ن، ر)} = \frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}} .$$

أي إن ل (ن ، ر) = ن × (ن − ١) × (ن − ٢) × (ن − ٣)× . . . × (ن − ر + ١)

مثال (١)

ما عدد تباديل مجموعة مكونة من (٧) عناصر مأخوذة (٣) في كل مرة؟

الحل

ل (٧،٣) = ٧ × ٦ × ٥ (عدد الأعداد = ٣، وهو يمثل (ر) في القانون)

= ٢١٠

$$\text{وبطريقة أخرى: ل (٧، ٣)} = \frac{\text{٧!}}{\text{(٧ − ٣)!}} = \frac{\text{٧ × ٦ × ٥ × ٤!}}{\text{٤!}} = \text{٧ × ٦ × ٥}$$

تدريب ١

١) كم عدد تباديل مجموعة مكونة من ٥ عناصر مأخوذة ٢ في كل مرة؟

٢) جد قيمة ل (٦، ٤) + ل (٧، ٥) + ٢!

مثال (٢)

بكم طريقة يمكن اختيار رئيس منتدى ثقافي، ومساعد له، وأمين سر، وأمين صندوق مختلفين، من بين ١٠ أعضاء منتسبين إلى هذا النادي؟

الحل

ل (١٠، ٤) = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤٠ طريقة.

فكر وناقش

جد طريقة أخرى لحل المثال (٢).

تدريب ٢

ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة، ونائب له، ومدير مالي من بين ٢٠ موظفًا في الشركة، علمًا بأن الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة؟

مثال (٣)

جد قيمة (ر) في كل معادلة مما يأتي:

١) ل (٥، ر) = ٦٠

٢) ٣ + ٢ ل (٦، ر) = ٤! + ٣٩

الحل

١) ٥×٤×٣ = ٦٠، عدد الأعداد = ٣

∴ ر = ٣

٦٠	٥
١٢	٤
٣	٣
١	

٢) ٣ + ٢ ل (٦، ر) = ٤! + ٣٩

٣ + ٢ ل (٦، ر) = ٢٤+٣٩ = ٦٣

٢ ل (٦، ر) = ٦٣ − ٣ = ٦٠

ل (٦، ر) = ٣٠

٦×٥ = ٣٠، عدد الأعداد = ٢

∴ ر = ٢

تدريب ٣

جد قيمة (ر) في كل من المعادلتين الآتيتين:

١) ل (٨، ر) = ١٦٨٠

٢) ٨٠ − ٣ ل (٤، ر) = ٠! + ٤٣

نشاط

١) جد قيمة كل من:

ل (٤، ٠)، ل (٣، ٠)، ل (٥، ٠)

٢) جد قيمة كل من:

ل (٤، ١)، ل (٣، ١)، ل (٥، ١)

٣) جد قيمة كل من:

ل (٤، ٤)، ل (٣، ٣)، ل (٥، ٥)

ماذا تستنتج في كل حالة من الحالات الثلاث؟

الأسئلة

١) ما عدد تباديل مجموعة مكونة من ٩ عناصر مأخوذة ٥ في كل مرة؟

٢) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس قسم، ومساعد له، وأمين عهدة من بين ٩ أعضاء في هذا القسم شريطة أن لا يشغل أحدهم وظيفتين معًا؟

٣) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) ل (٨، ٣).

ب) ل (١٣، ٤).

جـ) ل (٢٠، ٣).

د) ل (١٧، ٠).

٤) عبِّر عما يأتي باستخدام التباديل:

أ) ١٧ × ١٦ × ١٥ × ١٤ × ١٣

ب) ك × (ك − ١) × (ك − ٢)، ك ≥ ٣

٥) جد قيمة كل من (ن)، و (ر) في ما يأتي:

أ) ل (ن، ٣) = ٧٢٠

ب) ل (٦، ر) = ٣٦٠

جـ) ل (ن، ٣) = ٩ ل (ن، ٢)

٦) كم كلمة مكونة من ٣ أحرف مختلفة يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف: { أ، ن، ق، غ، م }، علمًا بأنه ليس شرطًا أن يكون للكلمة معنى؟

ثالثًا التوافيق Combinations

ضمن تصفيات كرة القدم لأمم آسيا، ضمت المجموعة الأولى فرق الدول الآتية: الأردن، السعودية، اليابان، العراق. بكم طريقة يمكن إجراء مباريات التصفية النهائية بين هذه الفرق؟

إن مباريات التصفية ستكون على النحو الآتي: (الأردن، السعودية)، (الأردن، اليابان)، (الأردن، العراق)، (السعودية، اليابان)، (السعودية، العراق)، (اليابان، العراق)، وإن عدد هذه المباريات هو ٦ . لاحِظ أن الترتيب هنا غير ضروري (ليس له معنى)؛ لأن مباراة (الأردن، السعودية) هي نفسها مباراة (السعودية، الأردن).

إن اختيار مجموعة جزئية عدد عناصرها (ر) من مجموعة عدد عناصرها (ن)، بحيث يكون الترتيب غير مهم، يُسمّى توفيقًا.

تعريف

إذا كان ن ، ر عددين طبيعيين بحيث ٠ ≤ ر ≤ ن، فإن كل مجموعة جزئية عدد عناصرها (ر) تُختار من مجموعة عدد عناصرها (ن) تُسمّى **توفيقًا** مكونًا من (ر) عنصر،

ويُرمَز إليها بالرمز: $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ وتُقرَأ: (ن فوق ر)، حيث:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!}$$

$$= \frac{\text{ل}(\text{ن}\,،\,\text{ر})}{\text{ر}!}.$$

مثال (١)

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\binom{٤}{٢}$

٢) $\binom{٩}{٥}$

٣) $\binom{٦}{٤}$

الحل

١) $\binom{٤}{٢} = \frac{٤!}{٢!(٤-٢)!} = \frac{٤\times٣\times٢!}{٢!\times٢!} = ٦$

٢) $\binom{٩}{٥} = \frac{٩!}{٥!(٩-٥)!} = \frac{٩\times٨\times٧\times٦\times٥!}{٥!\times٤!} = ١٢٦$

٣) $\binom{٦}{٤} = \frac{٦!}{٤!(٦-٤)!} = \frac{٦\times٥\times٤!}{٤!\times٢!} = ١٥$

تدريب ①

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\binom{٩}{٧}$ ٢) $\binom{٨}{٥}$ ٣) $\binom{٥}{٢}$

نشاط

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\binom{٨}{٨}$ ، $\binom{٩}{٩}$ ، $\binom{٣}{٣}$ ، ماذا تستنتج؟

٢) $\binom{٥}{١}$ ، $\binom{٧}{١}$ ، $\binom{٣}{١}$ ، ماذا تستنتج؟

٣) $\binom{٨}{٠}$ ، $\binom{٢}{٠}$ ، $\binom{٤}{٠}$ ، ماذا تستنتج؟

يمكن استخدام التوافيق في حل مسائل عملية كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال (٢)

امتحان للغة العربية يتكون من ٧ أسئلة. جد عدد طرائق اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها.

الحل

عدد الطرائق $= \binom{٧}{٥} = \frac{٧!}{٥!(٧-٥)!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٢!} = ٢١$ طريقة.

مثال (٣)

في إحدى مديريات التربية والتعليم يراد اختيار لجنة رباعية تتولى إعداد خطة استعدادًا لبدء العام الدراسي، من بين ٧ رؤساء أقسام، و٨ أعضاء أقسام. بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة في الحالات الآتية:

١) اللجنة تتكون من ٣ رؤساء أقسام وعضو واحد.

٢) اللجنة تتكون من عضوين اثنين على الأقل.

٣) رئيس اللجنة يجب أن يكون رئيس قسم، والبقية من الأعضاء.

٤) لا تضم اللجنة أي عضو من أعضاء الأقسام.

الحل

١) عدد طرائق اختيار ٣ رؤساء أقسام $= \binom{٧}{٣} = ٣٥$ طريقة.

عدد طرائق اختيار عضو $= \binom{٨}{١} = ٨$ طرائق.

عدد طرائق اختيار اللجنة $= ٣٥ \times ٨ = ٢٨٠$ طريقة.

٢) تتكون اللجنة من عضوين اثنين ورئيسي قسمين، أو من ثلاثة أعضاء ورئيس قسم واحد، أو من أربعة أعضاء.

عدد طرائق اختيار اللجنة $= \binom{٨}{٢} \times \binom{٧}{٢} + \binom{٨}{٣} \times \binom{٧}{١} + \binom{٨}{٤} \times \binom{٧}{٠}$

$= ٢٨ \times ٢١ + ٥٦ \times ٧ + ٧٠ \times ١$

$= ٥٨٨ + ٣٩٢ + ٧٠ = ١٠٥٠$ طريقة.

٣) عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة $= ٧$ طرائق.

عدد طرائق اختيار اللجنة $= ٧ \times \binom{٨}{٣} = ٧ \times ٥٦ = ٣٩٢$ طريقة.

٤) تتألف اللجنة جميعها من رؤساء الأقسام، فيكون عدد طرائق اختيار اللجنة:

$\binom{٧}{٤} = ٣٥$ طريقة.

تدريب ٢

في أحد المستشفيات يراد اختيار فريق طبي خماسي لتمثيل المستشفى في مؤتمر صحي، من بين ٥ أطباء، و٦ ممرضين. بكم طريقة يمكن تكوين الفريق في الحالات الآتية:

١) الفريق يتألف من طبيبين اثنين على الأكثر.

٢) رئيس الفريق ونائبه من الأطباء، والبقية ممرضون.

والآن، جد قيمة كل من التوفيقين في (أ) و (ب)، ثم قارن النتيجة التي ستتوصل إليها.

أ) $\binom{٨}{٣}$ و $\binom{٨}{٥}$ ب) $\binom{٦}{٤}$ و $\binom{٦}{٢}$

لاحظ أن كلًّا من التوفيقين في (أ) متساويان، وكذا الحال في (ب)، وهذا يقودنا إلى التعميم الآتي:

$\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$ حيث ن ، ر عددان طبيعيان، $٠ \leq ر \leq ن$.

مثال (٤)

حُلَّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

١) $\binom{٧}{٣} = \binom{٧}{ك}$ ٢) $\binom{ك}{٤} = \binom{ك}{٥}$

الحل

١) ك = ٣

أو: ك + ٣ = ٧، ومنه: ك = ٤

∴ ك = ٣ ، ك = ٤ (تحقق من صحة الحل).

٢) ك = ٤ + ٥ = ٩ (تحقق من صحة الحل).

تدريب ٣

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

١) $\binom{٦}{٤} = \binom{٦}{س+١}$ ٢) $\binom{س}{٥} = \binom{س}{٧}$

الأسئلة

١) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\binom{١٠٠}{٩٧}$ ب) $\binom{٥}{٥}$

جـ) $\binom{٤}{٠}$ د) $\binom{٤}{١}$

٢) جد عدد طرائق اختيار قلمين من علبة تحوي ١٠ أقلام.

٣) عائلة تتألف من ٥ أولاد و ٣ بنات. يراد تكليف ٣ منهم بتنظيف الحديقة، فبكم طريقة يمكن اختيارهم، بحيث:

أ) يوجد بنتان على الأقل ضمن الفريق.

ب) لا يوجد أي بنت في الفريق.

جـ) يكون رئيس الفريق من البنات.

٤) حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

أ) $\binom{٣}{٢س} = \binom{٣}{١}$

ب) $\binom{س}{٢١} = \binom{س}{٥}$

الفصل الثاني

المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

Discrete and Continuous Random Variable

النتاجات

- تتعرف مفهوم المتغير العشوائي: المنفصل، والمتصل.
- تحسب الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين.
- تتعرف العلامة المعيارية، وعلاقتها بالعلامة الخام.
- تحسب العلامة المعيارية، وتفسرها.
- تتعرف منحنى التوزيع الطبيعي وخصائصه.
- تستخدم خصائص التوزيع الطبيعي في حل مسائل عملية.

أولًا المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

عند إجراء تجربة ما، قد يتركز اهتمامنا أحيانًا على خصيصة محددة لناتج التجربة أكثر من الناتج نفسه. فعلى سبيل المثال، قد نركز على عدد الأبناء الذكور لعائلة معينة أكثر من تركيزنا على تسلسل الذكور والإناث عند الولادة، أو قد نهتم بعدد العمليات الجراحية الناجحة من بين العمليات التي يجريها طبيب جراح، أو عدد مرات ظهور الصورة في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين.

ركَّزت كل تجربة من التجارب السابقة على القيم العددية لكل ناتج من نواتج التجربة؛ ما شكَّل اقترانًا يُعرف باسم **المتغير العشوائي**، ومجاله الفضاء العيني، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ح.

تعريف

المتغير العشوائي هو اقتران معرف من الفضاء العيني Ω إلى مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ح ، بحيث تُستخدم الرموز س، ص، ع، ... للدلالة على المتغيرات العشوائية.

أما إذا كانت القيم التي يأخذها المتغير العشوائي مجموعة معدودة فإنه يُسمّى المتغير العشوائي المنفصل.

مثال (١)

إذا دلَّ المتغير العشوائي س على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها ٣ أطفال، ودُوِّنت النتائج بحسب الجنس وتسلسل الولادة، فجد القيم التي قد يأخذها المتغير العشوائي س.

الحل

يتعين إيجاد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة، وعدد الأطفال الذكور من كل ناتج كما في الجدول الآتي:

عناصر الفضاء العيني Ω	عدد الأطفال الذكور
(و و و)	٣
(و و ب)	٢
(و ب و)	٢
(ب و و)	٢
(و ب ب)	١
(ب و ب)	١
(ب ب و)	١
(ب ب ب)	٠

المتغير العشوائي س يأخذ القيم: {٠، ١، ٢، ٣}، وهي قيم معدودة ومنتهية؛ لذا يُسمّى س **متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا.**

في المثال السابق ، يمكن حساب احتمال القيم التي يأخذها المتغير العشوائي س، حيث:

ل (س = ٣) = ل (و و و) = $\frac{١}{٨}$

ل (س = ٢) = ل (و و ب) + ل (و ب و) + ل (ب و و) = $\frac{٣}{٨}$

ل (س = ١) = ل (و ب ب) + ل (ب و ب) + ل (ب ب و) = $\frac{٣}{٨}$

ل(س = ٠) = ل (ب ب ب) = $\frac{١}{٨}$

يمكن أيضًا ترتيب هذه القيم على صورة أزواج مرتبة تُسمّى **التوزيع الاحتمالي** للمتغير العشوائي س كالآتي:

{ (٠، $\frac{١}{٨}$)، (١، $\frac{٣}{٨}$)، (٢، $\frac{٣}{٨}$)، (٣، $\frac{١}{٨}$) }، أو بصورة جدول نُسمّيه جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س، على النحو الظاهر في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣
ل($س_ر$)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

لاحِظ أن:

- ل ($س_ر$) ≥ صفر، ر = ٠، ١، ٢، ... ن
- $\sum$ ل ($س_ر$) = ١

لذا نُسمّي ل **اقتران احتمال** للمتغير العشوائي س.

تدريب ١

في تجربة إلقاء قطعتي نقد مرة واحدة، دَلَّ المتغير العشوائي ع على عدد مرات ظهور كتابة على الوجه الظاهر:

١) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي ع.

٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع.

٣) بيِّن أن ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

مثال (٢)

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى كما في الجدول الآتي، فما قيمة الثابت أ؟

س	٠	١	٢
ل ($س_ر$)	٠,٣	٠,١	أ

الحل

$\sum$ ل (س$_{ر}$) = ٠,٣ + ٠,١ + أ = ١

٠,٤ + أ = ١، ومنه: أ = ٠,٦

تدريب ٢

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى في المجموعة:

{ (٠، ٠,٢)، (١، ٠,٣)، (٢، ٠,١)، (٣، ٢ب) }، فما قيمة الثابت ب؟

توزيع ذي الحدين

أطلق صياد (٥) رصاصات نحو هدف. فإذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مرة ثابتًا، ويساوي ٠,٨، فما احتمال أن يصيب الصياد الهدف ٣ مرات؟

كل محاولة للصياد تشمل احتمالين؛ فإما أن ينجح في إصابة الهدف، وإما أن يفشل في ذلك. وهذه المحاولة تُسمّى تجربة برنولي، وفضاؤها العيني مكون من ناتجين منفصلين؛ إما نجاح، وإما فشل. **وفي حال كُرِّرت هذه المحاولة عددًا من المرات بحيث تكون مستقلة ومتماثلة (نتيجة إحدى التجارب لا تُؤثّر في سواها)**، وكان احتمال النجاح ثابتًا في كل مرة، فإن هذا النوع من التجارب يُسمّى توزيع ذي الحدين.

إذا أُجريت تجربة برنولي ن من المرات، وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة (أ)، وكان س متغيرًا عشوائيًّا ذا حدين معاملاه: ن، أ؛

أي إن س يساوي عدد مرات النجاح من (ن) محاولة مستقلة ومتماثلة، فإن احتمال النجاح في (ر) من المرات يساوي:

$\text{ل}\,(\text{س} = \text{ر}) = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (١ - \text{أ})^{\text{ن} - \text{ر}}$ حيث ر ∈ { ٠، ١، ٢، ... ن }.

يمكن حل المسألة السابقة على النحو الآتي:

(عدد مرات إجراء التجربة يساوي ٥) ← ن = ٥

(احتمال النجاح في كل محاولة ثابت) ← أ = ٠,٨

$$\text{ل}(\text{س} = ٣) = \binom{٥}{٣}(٠,٨)^{٣}(١ - ٠,٨)^{٥-٣}$$

$$= ١٠ \times ٠,٥١٢ \times ٠,٠٤ \approx ٠,٢٠$$

مثال (٣)

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٣، أ = ٠,٤، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل (س = ٢).

٢) ل (س ≥ ١).

٣) ل (س < ٢).

الحل

١) $\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٣}{٢}(٠,٤)^{٢}(١ - ٠,٤)^{٣-٢}$

$= ٣ \times ٠,١٦ \times ٠,٦ = ٠,٢٨٨$

٢) $\text{ل}(\text{س} \geq ١) = \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٢) + \text{ل}(\text{س} = ٣)$

$= ١ - \text{ل}(\text{س} = ٠)$

$= ١ - \binom{٣}{٠}(٠,٤)^{٠}(١ - ٠,٤)^{٣-٠}$

$= ١ - (١ \times ١ \times ٠,٢١٦)$

$= ٠,٧٨٤$

٣) $\text{ل}(\text{س} < ٢) = \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٠)$

$= \binom{٣}{١}(٠,٤)^{١}(٠,٦)^{٣-١} + \binom{٣}{٠}(٠,٤)^{٠}(٠,٦)^{٣-٠}$

$= ٣ \times ٠,٤ \times ٠,٣٦ + ١ \times ١ \times ٠,٢١٦$

$= ٠,٤٣٢ + ٠,٢١٦ = ٠,٦٤٨$

تدريب ٣

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٦، أ = ٠,٧، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل (س = ٥).

٢) ل (س ≥ ٤).

٣) ل (س ≤ ٢).

مثال (٤)

إذا كان س متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٣، أ = ٠,٣، فجد كلًّا مما يأتي:

١) قيم س.

٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل

١) قيم س = {٠، ١، ٢، ٣}.

٢) $\text{ل}(\text{س} = ٠) = \binom{٣}{٠}(٠,٣)^{٠}(١ - ٠,٣)^{٣-٠}$

$= ١ \times ١ \times ٠,٣٤٣ = ٠,٣٤٣$

$\text{ل}(\text{س} = ١) = \binom{٣}{١}(٠,٣)^{١}(٠,٧)^{٣-١} = ٣ \times ٠,٣ \times ٠,٤٩ = ٠,٤٤١$

$\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٣}{٢}(٠,٣)^{٢}(٠,٧)^{١} = ٣ \times ٠,٠٩ \times ٠,٧ = ٠,١٨٩$

$\text{ل}(\text{س} = ٣) = \binom{٣}{٣}(٠,٣)^{٣}(٠,٧)^{٠} = ١ \times ٠,٠٢٧ \times ١ = ٠,٠٢٧$

يكون جدول التوزيع الاحتمالي كما في الجدول الآتي:

س	٠	١	٢	٣
ل $(\text{س}_\text{ر})$	٠,٣٤٣	٠,٤٤١	٠,١٨٩	٠,٠٢٧

فكر وناقش

كيف يمكنك التحقق من صحة حلك للمثال (٤)؟

تدريب ٤

غرس مُزارع ٧ شتلات، وكان احتمال نجاح غرس الشتلة الواحدة هو ٦٠٪. ما احتمال نجاح غرس ٣ شتلات على الأقل؟

الأسئلة

١) إذا دلَّ المتغير العشوائي س على مجموع العددين الظاهرين في تجربة إلقاء حجري نرد، وملاحظة الرقمين على الوجهين الظاهرين، فأجب عما يأتي:

أ) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي س.

ب) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

جـ) بيِّن أن ل هو اقتران احتمال.

٢) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالجدول الآتي، فما قيمة الثابت أ؟

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,٥	٠,١	أ + ١

٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٤، أ = ٠,٦، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) ل (س = ٢).

ب) ل (س ≤ ٤).

جـ) ل (س ≥ ١).

٤) صندوق يحوي ٥ كرات، ٣ منها حمراء، والبقية زرقاء اللون. إذا سُحِبت من الصندوق ٤ كرات على التوالي مع الإرجاع، ودَلَّ المتغير العشوائي س على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

ثانيًا العلامة المعيارية Stander Score

درس أحمد مساقًا في الرياضيات، وحصل على علامة ٨٧، في حين كانت علامة رامي ٩٠ في المساق نفسه، ولكن في شعبة أخرى. أي الطالبين كان مستواه التحصيلي أفضل في هذا المساق؟

يبدو من أول وهلة أن تحصيل رامي أفضل من تحصيل أحمد؛ لأن علامته أعلى. ولكن، لكي تكون المقارنة دقيقة؛ فلا بد من مراعاة عدد من المعايير، مثل: مستوى أسئلة معلم كل مساق، ومستوى تحصيل طلبة كل شعبة.

إذن، يجب توافر معلومات عن طبيعة توزيع علامات كل شعبة، مثل: المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري، وحساب ما يُسمّى **العلامة المعيارية**، ثم إجراء عملية المقارنة. والتعريف الآتي يوضِّح مفهوم العلامة المعيارية.

تعريف

العلامة المعيارية للمشاهدة س هي نسبة انحراف المشاهدة س عن المتوسط الحسابي $\bar{س}$ إلى الانحراف المعياري (ع)، ويُرمَز إليها بالرمز: (ز)؛ أي إن:

$$ز_س = \frac{س - \bar{س}}{ع} \text{ ، } ع \neq \text{صفرًا.}$$

مثال (١)

إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة الرياضيات ٧٠، والانحراف المعياري للعلامات ٤، فجد العلامة المعيارية لعلامة كل من الطالب محمد الذي نال علامة ٨٢، والطالب يوسف الذي نال علامة ٦٦

الحل

المتوسط الحسابي ($\overline{س}$) = ٧٠

الانحراف المعياري (ع) = ٤

العلامة المعيارية للطالب محمد هي: $ز_{٨٢} = \frac{٨٢ - ٧٠}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

وهذا يعني أن العلامة ٨٢ تنحرف ثلاثة انحرافات معيارية فوق المتوسط الحسابي.

العلامة المعيارية للطالب يوسف هي: $ز_{٦٦} = \frac{٦٦ - ٧٠}{٤} = \frac{-٤}{٤} = -١$

وهذا يعني أن العلامة ٦٦ تنحرف انحرافًا معياريًّا واحدًا تحت المتوسط الحسابي.

تدريب ١

تخضع كتل طلبة الصف الخامس الأساسي في إحدى المدارس لمتوسط حسابي مقداره ٤٠ كغ، ولانحراف معياري مقداره ٤. فإذا كانت كتلة أحد طلبة الصف ٣٨ كغ، فجد العلامة المعيارية لكتلة هذا الطالب.

مثال (٢)

إذا علمت أن المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في امتحان الفيزياء هو ٦٠، والانحراف المعياري هو ٦، فجد:

١) العلامة التي تنحرف فوق المتوسط أربعة انحرافات معيارية.

٢) العلامة التي تنحرف تحت المتوسط بمقدار ٢,٥

الحل

١) $\bar{س} = ٦٠$، $ع = ٦$، $ز_{س} = ٤$

$$ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$٤ = \frac{س - ٦٠}{٦}$$

$$٢٤ = س - ٦٠$$

$$\therefore س = ٨٤$$

٢) $ز_{س} = -٢,٥$ (لماذا؟).

$$-٢,٥ = \frac{س - ٦٠}{٦}$$

$$-١٥ = س - ٦٠$$

$$\therefore س = ٤٥$$

تدريب ٢

جد قيمة المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة اللغة الإنجليزية، علمًا بأن الانحراف المعياري للعلامات ٤، وعلامة هديل (٨٥) تنحرف فوق هذا المتوسط بمقدار $\frac{١}{٤}$ ٤ انحراف معياري.

مثال (٣)

اعتمادًا على الجدول الآتي، أجب عن السؤالين الآتيين:

١) في أي المبحثين كان تحصيل صفاء أفضل؟

٢) في أي المبحثين كان تحصيل مريم أضعف؟

	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	علامة صفاء	علامة مريم
التاريخ	٦٠	٤	٦٨	٧٢
الجغرافيا	٧٨	٥	٧٣	٨٣

الحل

١) احسب العلامة المعيارية للطالبة صفاء في كل من مبحثي التاريخ والجغرافيا:

$$ز_{٦٨} = \frac{٦٨ - ٦٠}{٤} = ٢$$

$$ز_{٧٣} = \frac{٧٣ - ٧٨}{٥} = \frac{-٥}{٥} = -١$$

∴ تحصيل صفاء في مبحث التاريخ أفضل.

٢) احسب العلامة المعيارية للطالبة مريم في كل من مبحثي التاريخ والجغرافيا:

$$ز_{٧٢} = \frac{٧٢ - ٦٠}{٤} = ٣$$

$$ز_{٨٣} = \frac{٨٣ - ٧٨}{٥} = ١$$

∴ تحصيل مريم في مبحث الجغرافيا أضعف.

مثال (٤)

إذا كانت العلامتان المعياريتان ٢، (−١) تقابلان العلامتين ٨٠ ، ٦٥ على الترتيب، فجد قيمة المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات الخام.

الحل

$$ز_{٨٠} = \frac{٨٠ - \overline{س}}{ع}$$

ومنه: $٢ع = ٨٠ - \overline{س}$ .... المعادلة (١).

$$ز_{٦٥} = \frac{٦٥ - \overline{س}}{ع}$$

ومنه: $-ع = ٦٥ - \overline{س}$ .... المعادلة (٢).

بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)، ينتج:

٣ ع = ١٥

∴ ع = ٥

بتعويض قيمة ع في إحدى المعادلتين، ولتكن المعادلة (١)، ينتج:

٢×٥ = ٨٠ − $\overline{\text{س}}$

∴ $\overline{\text{س}}$ = ٧٠

تدريب ٣

إذا كانت المشاهدتان ٨٤ ، ٧٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ١، (−٢) على الترتيب، فجد العلامة المعيارية للمشاهدة ٩٠

الأسئلة

١) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة الكيمياء ٦٠، والانحراف المعياري للعلامات ٣، فجد العلامة المعيارية لعلامة الطالب ساهر الذي نال علامة ٧٢، والعلامة المعيارية للطالب مهند الذي نال علامة ٥٤

٢) إذا علمت أن المتوسط الحسابي لأطوال طالبات إحدى المدارس هو ١٦٠سم، وأن الانحراف المعياري لأطوالهن ٤، فجد:

أ) الطول الذي ينحرف فوق المتوسط ثلاثة انحرافات معيارية.

ب) الطول الذي ينحرف تحت المتوسط انحرافين معياريين وربع انحراف معياري.

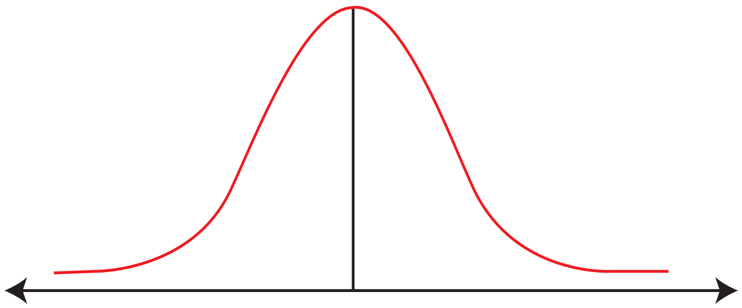
٣) إذا كانت المشاهدة ٨ تقابل العلامة المعيارية ٢، وكان الانحراف المعياري ٢، فجد المتوسط الحسابي.

٤) إذا كانت العلامتان ٣٢، ١٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ٣، (−٣) على الترتيب، فجد قيمة المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

ثالثًا التوزيع الطبيعي Normal Distribution

إذا كانت علامات ١٠٠٠٠ طالب في جامعة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره ٦٥، وانحراف معياري مقداره ٥، فكم يبلغ عدد الطلبة الناجحين، علمًا بأن علامة النجاح ٦٠؟

إن الكثير من الظواهر في حياتنا تحتاج إلى دراسة علمية لبيان حقيقتها. وفي حال رُصِدت المشاهدات، وتَكرَّر حدوثها، وعُبِّر عنها بمنحنى تكراري كالآتي:



فإن توزيع البيانات يمثل **توزيعًا طبيعيًّا** يتميز بالخصائص الآتية:

١) التوزيع الطبيعي متماثل حول العمود المقام على الوسط (μ)، وشكله يشبه الجرس.

٢) للتوزيع الطبيعي قمة واحدة؛ ما يعني أن له منوالًا واحدًا ينطبق على المتوسط.

٣) تقارُب طرفي منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر.

٤) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي وحدة واحدة.

٥) المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.

٦) المساحة على يمين المتوسط تساوي المساحة على يسار المتوسط، ومقدارها (٠,٥).

وبوصف ذلك حالة خاصة، فإذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي مساويًا للصفر، وقيمة الانحراف المعياري ١ فإن التوزيع الطبيعي يُسمّى التوزيع الطبيعي المعياري.

وللتحقق من ذلك، نفِّذ النشاط الآتي:

نشاط

افرض أن العلامات: (١١ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١٤) تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره ٨، وانحراف معياري مقداره ٤:

١) حوِّل العلامات الخام إلى علامات معيارية.

٢) احسب المتوسط الحسابي للعلامات المعيارية، ماذا تلاحظ؟

٣) احسب الانحراف المعياري للعلامات المعيارية، ماذا تلاحظ؟

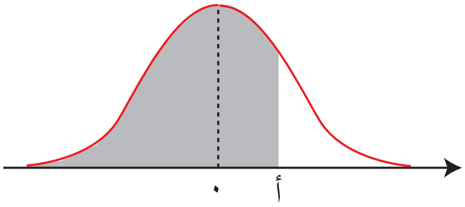
وبما أن المتوسط (μ) والانحراف المعياري (ع) يحددان التوزيع الطبيعي، فإن المساحة على أي فترة تعتمد على قيمتيهما، ولهذا لا يمكن وضع جداول لكل حالة؛ ما يُحتِّم تحويله إلى توزيع طبيعي معياري، ثم إيجاد المساحة المطلوبة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

يمكن إيجاد احتمال وقوع المتغير (ز) تحت قيمة ما، أو فوقها، أو إذا كان محصورًا بين قيمتين، عن طريق جدول التوزيع الطبيعي الوارد ذكره في ملحق الكتاب؛ وذلك على النحو الآتي:

- **الحالة القياسية (الجدولية)**

  ل (ز ≤ أ) من الجدول مباشرة،

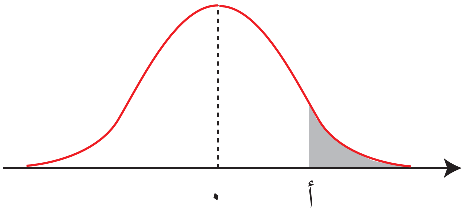
  انظر الشكل (٥-٣).



الشكل (٥-٣).

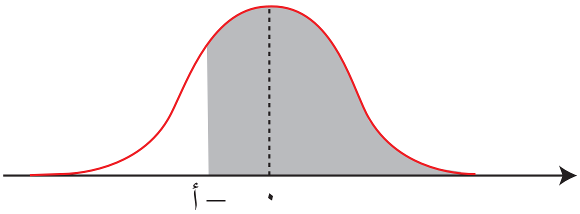
- ل (ز ≥ أ) = ١ – ل (ز ≤ أ)،

  انظر الشكل (٥-٤).



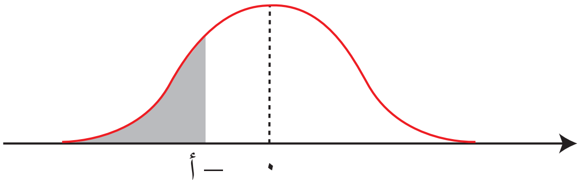
الشكل (٥-٤).

- **ل (ز ≥ –أ) = ل (ز ≤ أ)،**
انظر الشكل (٥–٥).



الشكل (٥–٥).

- **ل (ز ≤ –أ) = ل (ز ≥ أ) = ١ – ل (ز ≤ أ)،**
انظر الشكل (٥–٦).



الشكل (٥–٦).

مثال (١)

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل (ز ≤ ١,٨).
٢) ل (ز ≤ ٢,٣٧).
٣) ل (ز ≥ – ١,٤٥).
٤) ل (ز ≤ – ٢,٢٥).
٥) ل (–١,١٥ ≤ ز ≤ ١,٨٧).

الحل

١) ل (ز ≤ ١,٨) = ٠,٩٦٤١ (من الجدول مباشرة)، وهي القيمة الواقعة في الصف (١,٨) مع عمود الأجزاء من مئة (٠,٠٠).

٢) ل (ز ≤ ٢,٣٧) = ٠,٩٩١١ (من الجدول مباشرة)، وهي القيمة الواقعة في الصف (٢,٣) مع عمود الأجزاء من مئة (٠,٠٧).

٣) ل (ز ≥ – ١,٤٥) = ل (ز ≤ ١,٤٥) = ٠,٩٢٦٥

٤) ل (ز ≤ −٢,٢٥) = ل (ز ≥ ٢,٢٥) = ١ − ل (ز ≤ ٢,٢٥)

= ١ − (٠,٩٨٧٨)

= ٠,٠١٢٢

٥) ل (−١,١٥ ≤ ز ≤ ١,٨٧) = ل (ز ≤ ١,٨٧) − ل (ز ≤ −١,١٥)

= ل (ز ≤ ١,٨٧) − ل (ز ≥ ١,١٥)

= ٠,٩٦٩٣ − (١ − ل (ز ≤ ١,١٥))

= ٠,٩٦٩٣ − (١ − ٠,٨٧٤٩)

= ٠,٩٦٩٣ − ٠,١٢٥١

= ٠,٨٤٤٢

تدريب ١

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل (ز ≤ ٢,٤).

٢) ل (ز ≥ −٢,٨٥).

٣) ل (ز ≤ −١,١٤).

٤) ل (−١,٣٣ ≤ ز ≤ ١,٥٨).

يمكن إيجاد الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل (س) الذي يتبع أي توزيع طبيعي عن طريق تحويله إلى توزيع طبيعي معياري، وملاحظة أن المتوسط الحسابي لمجتمع الدراسة يُرمَز إليه بالرمز (μ)، وأن الانحراف المعياري لمجتمع الدراسة يُرمَز إليه بالرمز (σ)، فتكون العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي (س) هي:

$$\text{ز} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}.$$

مثال (٢)

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٦٠، وانحرافه المعياري ٤،

فجد:

١) ل (س ≤ ٦٧).

٢) ل (س ≥٥٨).

الحل

μ = ٦٠ ، σ = ٤

١) ل (س ≤ ٦٧) = ل (ز ≤ $\frac{٦٧-٦٠}{٤}$)

= ل (ز ≤ ١,٧٥)

= ٠,٩٥٩٥

٢) ل (س ≥ ٥٨) = ل (ز ≥ $\frac{٥٨-٦٠}{٤}$)

= ل (ز ≥ − ٠,٥)

= ل (ز ≤٠,٥) = ٠,٦٩١٥

تدريب ٢

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٢٥، وانحرافه المعياري ٥،

فجد:

١) ل (س ≤ ٣٣).

٢) ل (٢٢≤س ≤ ٣٠).

للتوزيع الطبيعي المعياري الكثير من الاستخدامات العملية، والمثال الآتي يوضِّح ذلك:

مثال (٣)

إذا كان متوسط أطوال ٥٠٠ شجرة حرجية في إحدى غابات عجلون هو ٨ أمتار، والانحراف المعياري ١,٥، وكانت الأطوال تتوزع توزيعًا طبيعيًّا، واختيرت إحدى الأشجار عشوائيًّا، فجد:

١) احتمال أن لا يزيد طول الشجرة على ١١ مترًا.

٢) احتمال أن يكون طول الشجرة أكبر من أو يساوي ٦,٥ أمتار.

٣) احتمال أن يكون طول الشجرة محصورًا بين ٦ أمتار و ٩ أمتار.

٤) عدد الأشجار التي طولها ٥ أمتار على الأقل.

الحل

إذا كان (س) طول الشجرة، الذي يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه $\mu = ٨$، وانحرافه المعياري $\sigma = ١,٥$، فإن:

١) احتمال أن لا يزيد طول الشجرة على ١١ مترًا هو: ل (س ≥ ١١).

$$\text{ل}\,(\text{س} \geq ١١) = \text{ل}\,\left(\text{ز} \geq \frac{١١ - ٨}{١,٥}\right) = \text{ل}\,(\text{ز} \geq ٢) = ٠,٩٧٧٢$$

٢) احتمال أن يكون طول الشجرة أكبر من أو يساوي ٦,٥ أمتار هو:

$$\text{ل}\,(\text{س} \leq ٦,٥) = \text{ل}\,\left(\text{ز} \leq \frac{٦,٥ - ٨}{١,٥}\right)$$

$$= \text{ل}\,(\text{ز} \leq -١) = \text{ل}\,(\text{ز} \geq ١) = ٠,٨٤١٣$$

٣) احتمال أن يكون طول الشجرة محصورًا بين ٦ أمتار و ٩ أمتار هو:

ل(٦ < س < ٩) = ل ($\frac{٦ - ٨}{١,٥}$ < ز < $\frac{٩ - ٨}{١,٥}$)

= ل (−١,٣٣ < ز < ٠,٦٧)

= ل (ز < ٠,٦٧) − ل (ز < −١,٣٣)

= ل (ز < ٠,٦٧) − ل (ز > ١,٣٣)

= ٠,٧٤٨٦ − [١ − ل (ز < ١,٣٣)]

= ٠,٧٤٨٦ − [١ − ٠,٩٠٨٢]

= ٠,٧٤٨٦ − ٠,٠٩١٨

= ٠,٦٥٦٨

٤) احتمال أن يكون طول الشجرة ٥ أمتار على الأقل هو:

ل (س ≥ ٥) = ل (ز ≥ $\frac{٥ - ٨}{١,٥}$)

= ل (ز ≥ −٢)

= ل (ز ≤ ٢) = ٠,٩٧٧٢

∴ عدد الأشجار التي طولها ٥ أمتار على الأقل يساوي:

٠,٩٧٧٢ × ٥٠٠ = ٤٨٨,٦ ≈ ٤٨٨ شجرة.

تدريب ٣

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

الأسئلة

١) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) ل (ز ≤ ١,٢).

ب) ل (ز ≤ ٢,٦٧).

جـ) ل (ز ≥ − ١,٢٧).

د) ل (ز ≤ − ٢,١٤).

هـ) ل (−١,١١ ≤ ز ≤ ١,١٥).

٢) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٨٠، وانحرافه المعياري ٥، فجد:

أ) ل (س ≤ ٧٦).

ب) ل (س ≥ ٨٨).

٣) إذا كان متوسط كتل ١٠٠٠ طالبة في إحدى مدارس عمّان هو ٥٥ كيلوغرامًا، والانحراف المعياري ٢، وكانت الكتل تتوزع توزيعًا طبيعيًّا، واختيرت إحدى الطالبات عشوائيًّا، فجد:

أ) احتمال أن لا تزيد كتلة الطالبة على ٥٢ كيلوغرامًا.

ب) احتمال أن تكون كتلة الطالبة محصورة بين ٥٠ كيلو غرامًا و ٦٠ كيلوغرامًا.

جـ) عدد الطالبات اللواتي تزيد كتلتهن على ٥٦ كيلو غرامًا.

٤) إذا كانت علامات امتحان عام تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه الحسابي ٧٠، وانحرافه المعياري ١٠، فما نسبة العلامات التي تقل عن ٦٥؟

الفصل الثالث

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

النتاجات

- تتعرف مفهوم الارتباط.
- ترسم شكل الانتشار بين متغيرين، وتحدد نوع الارتباط من شكل الانتشار.
- تحسب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين، وأثر التعديلات الخطية فيه.
- تجد معادلة خط الانحدار البسيط بين متغيرين.
- تطبق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتجد الخطأ في التنبؤ.

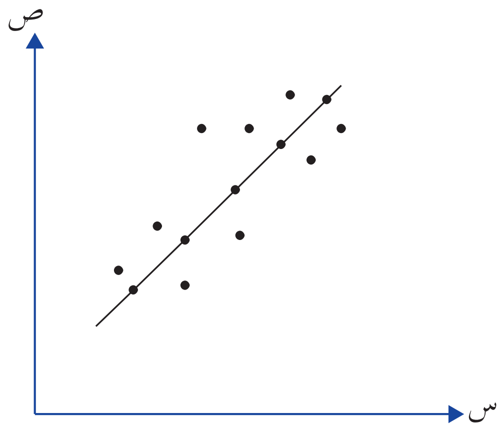
أولًا الارتباط Correlation

ما العلاقة بين سرعة السيارة وزمن الوصول إلى الهدف؟ ما علاقة عدد ساعات العمل بالأجرة اليومية؟ هل توجد علاقة بين عدد ساعات الدراسة والتحصيل الأكاديمي؟ هل توجد علاقة بين لون العيون والذكاء المنطقي الرياضي؟ ما قوة هذه العلاقات؟ ما اتجاهها؟

للإجابة عن هذه التساؤلات التي تحدد العلاقة بين متغيرين، تُجمَع بعض البيانات المتعلقة بهذه المسألة موضوع البحث. فإذا رُمِز إلى أحد المتغيرين بالرمز س، والمتغير الآخر بالرمز ص، فإن البيانات تكون على صورة أزواج مرتبة كالآتي:

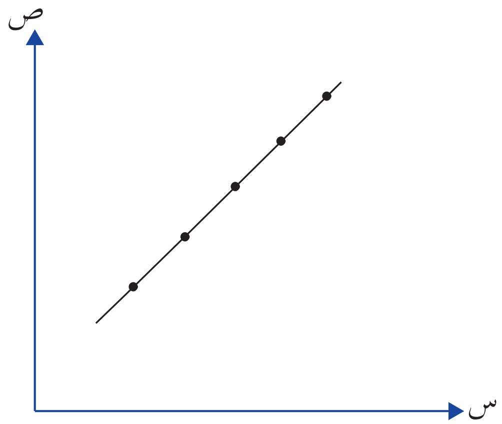
(س$_{١}$ ، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$)، (س$_{٣}$ ، ص$_{٣}$)،....، (س$_{ن}$ ، ص$_{ن}$)، ثم يصار إلى تعيين هذه الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، فيُسمّى الشكل الناتج **شكل الانتشار**. وعن طريق هذا الشكل يمكن تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرين، وقوتها، واتجاهها، علمًا بأنه توجد أنواع للعلاقات الارتباطية، منها:

١) **العلاقة الطردية (الموجبة):** هي علاقة تربط بين متغيرين، وكلما ازدادت قيمة المتغير الأول ازدادت قيمة المتغير الثاني، مثل علاقة ساعات العمل بالأجرة؛ إذ كلما زادت ساعات العمل زادت الأجرة اليومية. والشكل (٥–٧) يمثل نموذجًا لشكل الانتشار الذي يُعبِّر عن هذه العلاقة.



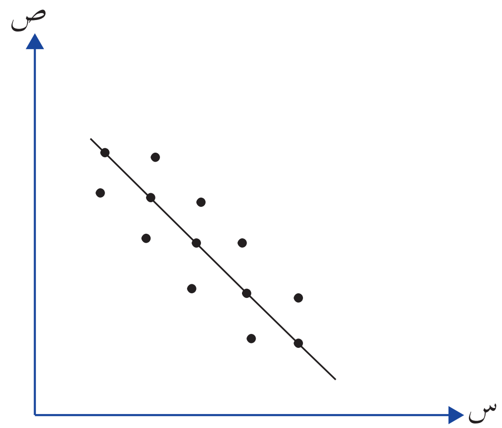
الشكل (٥–٧).

أما إذا وقعت النقط جميعًا على الخط المستقيم فإن العلاقة تصبح **طردية تامة**، ويكون شكل الانتشار كما في الشكل (٥–٨).



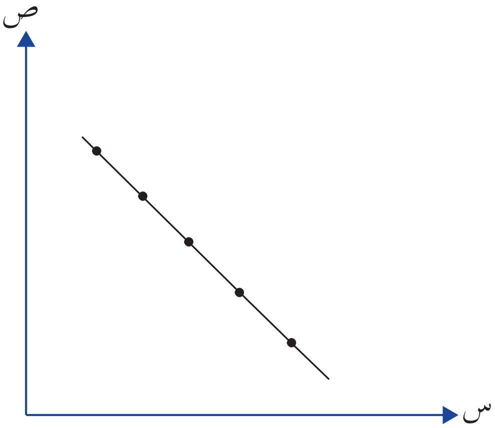
الشكل (٥–٨).

٢) **العلاقة العكسية (السالبة):** هي علاقة تربط بين متغيرين، وكلما زادت قيمة المتغير الأول قلت قيمة المتغير الثاني، مثل علاقة سرعة سيارة بزمن الوصول؛ إذ كلما زادت سرعة السيارة قل زمن الوصول إلى الهدف. والشكل (٥–٩) يمثل نموذجًا لشكل الانتشار الذي يُعبِّر عن هذه العلاقة.



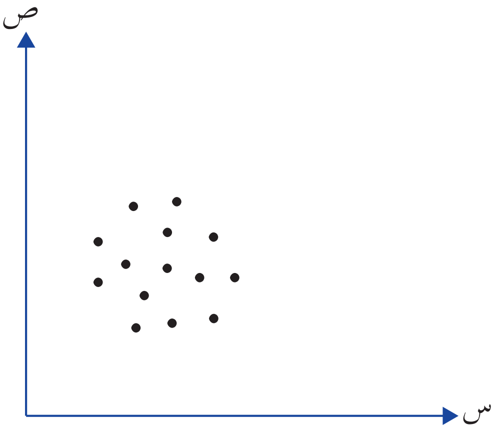
الشكل (٥–٩).

أما إذا وقعت النقط جميعًا على الخط المستقيم فإن العلاقة تصبح **عكسية تامة**، ويكون شكل الانتشار كما في الشكل (٥–١٠).



الشكل (٥–١٠).

٣) لا توجد علاقة تربط بين المتغيرين، مثل علاقة المستوى التحصيلي للطلبة بلون عيونهم؛ إذ يتمثل شكل الانتشار في تجمع النقط على صورة دائرة؛ ما يدل على **عدم وجود ارتباط خطي** كما في الشكل (٥– ١١).



الشكل (٥–١١).

مثال (١)

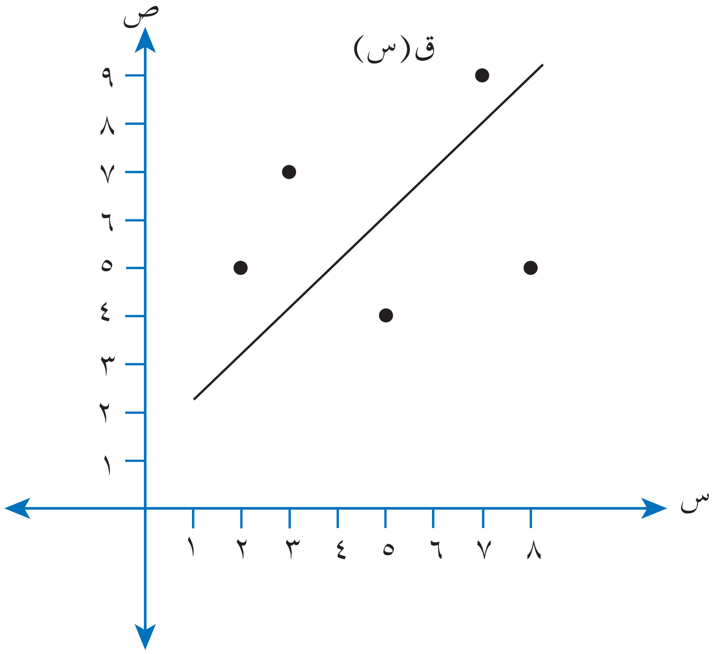
يبين الجدول الآتي علامات ٥ طلاب في امتحاني الرياضيات والتاريخ:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة الرياضيات (س)	٢	٣	٥	٧	٨
علامة التاريخ (ص)	٥	٧	٤	٩	٥

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محددًا نوع العلاقة التي تربط بينهما.

الحل

تُـمثَّل الأزواج المرتبة: (٢،٥)، (٣، ٧)، (٥، ٤)، (٧، ٩)، (٨، ٥) في المستوى الإحداثي كما في الشكل (٥–١٢).



الشكل (٥–١٢).

يتبين من شكل الانتشار أن العلاقة التي تربط بين المتغيرين: س، ص هي علاقة طردية (موجبة).

تدريب ١

النقط: (٢، ٨)، (٣، ٦)، (٥، ٥)، (٤، ٧)، (٨، ٢)، (٦، ٤)، (٧، ٤) تمثل القيم المتناظرة لمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محددًا نوع العلاقة التي تربط بينهما.

معامل ارتباط بيرسون

تعرفت سابقًا كيف تحدد نوع العلاقة بين متغيرين، عن طريق رسم شكل الانتشار بين المتغيرين، ثم الحكم على نوعية العلاقة الارتباطية، وتقدير قوتها، وستتعرف الآن طريقة جديدة لتحديد نوع العلاقة بين متغيرين وقوتها تحديدًا دقيقًا، وذلك باستخدام **قانون بيرسون** في إيجاد **معامل الارتباط** الذي يمكن تعريفه كما يأتي:

إذا كانت $(\text{س}_{١}، \text{ص}_{١})$، $(\text{س}_{٢}، \text{ص}_{٢})$، $(\text{س}_{٣}، \text{ص}_{٣})$،...، $(\text{س}_{\text{ن}}، \text{ص}_{\text{ن}})$، ن من الأزواج المرتبة للمتغيرين: س، ص، فإن **معامل ارتباط بيرسون الخطي** الذي يُرمَز إليه بالرمز (ر) بين المتغيرين يُعرف بالعلاقة الآتية:

$$\text{ر} = \frac{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^{٢} \sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})^{٢}}}$$

وتَرمز $\text{س}_{\text{ك}}$ إلى قيم المتغير س، وتَرمز $\text{ص}_{\text{ك}}$ إلى قيم المتغير ص،حيث ك = ١، ٢، ٣، ...، ن.

يمكن حساب معامل الارتباط بين علامات الرياضيات والتاريخ للطلبة الخمسة، باتباع الخطوات الآتية:

١) إيجاد المتوسط الحسابي لعلامات مبحث الرياضيات:

$$\overline{\text{س}} = \frac{(٢+٣+٥+٧+٨)}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

٢) إيجاد المتوسط الحسابي لعلامات مبحث التاريخ:

$$\overline{\text{ص}} = \frac{(٥+٧+٤+٩+٥)}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

٣) إنشاء الجدول الآتي:

$\text{س}_\text{ك}$	$\text{ص}_\text{ك}$	$\text{س}_\text{ك} - \overline{\text{س}}$	$\text{ص}_\text{ك} - \overline{\text{ص}}$	$(\text{س}_\text{ك} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ك} - \overline{\text{ص}})$	$(\text{س}_\text{ك} - \overline{\text{س}})^٢$	$(\text{ص}_\text{ك} - \overline{\text{ص}})^٢$
٢	٥	−٣	−١	٣	٩	١
٣	٧	−٢	١	−٢	٤	١
٥	٤	٠	−٢	٠	٠	٤
٧	٩	٢	٣	٦	٤	٩
٨	٥	٣	−١	−٣	٩	١
المجموع		٠	٠	٤	٢٦	١٦

٤) التعويض بقانون معامل الارتباط:

$$\text{ر} = \frac{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ك} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_\text{ك} - \overline{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ك} - \overline{\text{س}})^٢ \sum_{\text{ك}=١}^{\text{ن}} (\text{ص}_\text{ك} - \overline{\text{ص}})^٢}}$$

$$\text{ر} = \frac{٤}{\sqrt{٢٦ \times ١٦}} = \frac{٤}{٢٠,٤} \approx ٠,٢٠$$

∴ توجد علاقة طردية ضعيفة بين علامات هؤلاء الطلبة في هذين المبحثين.

تدريب ٢

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص كما في الجدول الآتي:

س	٢	٣	٦	٨	٩	١٠	١١
ص	٦	١٠	٥	٨	٤	٢	٧

مثال (٢)

إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٥، $\sum_{ك=١}^{٥} (س_{ك} - \overline{س})^{٢} = ٢٥$،

$\sum_{ك=١}^{٥} (ص_{ك} - \overline{ص})^{٢} = ١٦$، $\sum_{ك=١}^{٥} (س_{ك} - \overline{س})(ص_{ك} - \overline{ص}) = -١٥$،

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين، محددًا نوع العلاقة بينهما.

الحل

$$ر = \frac{\sum_{ك=١}^{ن} (س_{ك} - \overline{س})(ص_{ك} - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ك=١}^{ن} (س_{ك} - \overline{س})^{٢} \sum_{ك=١}^{ن} (ص_{ك} - \overline{ص})^{٢}}}$$

$$ر = \frac{-١٥}{\sqrt{٢٥ \times ١٦}} = -\frac{١٥}{٢٠} = -٠,٧٥$$

∴ توجد علاقة عكسية قوية بين هذين المتغيرين.

تدريب ٣

إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٧، $\sum_{ك=١}^{٧} (س_{ك} - \overline{س})^{٢} = ٤$،

$\sum_{ك=١}^{٧} (ص_{ك} - \overline{ص})^{٢} = ٩$، $\sum_{ك=١}^{٧} (س_{ك} - \overline{س})(ص_{ك} - \overline{ص}) = ٢$،

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين، محددًا نوع العلاقة بينهما.

أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون

لمعرفة أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون، نفِّذ النشاط الآتي:

نشاط

- احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص للقيم التالية كما في الجدول الآتي:

س	٢	٥	٦	٧
ص	١	٤	٩	١٠

- اضرب قيم س كلها في العدد ٣، وقيم ص كلها في العدد ٢، ثم احسب معامل الارتباط بين القيم الجديدة، ماذا تلاحظ؟
- اضرب قيم س كلها في العدد −٢، وقيم ص كلها في العدد −٣، ثم احسب معامل الارتباط بين القيم الجديدة، ماذا تلاحظ ؟
- اضرب قيم س كلها في العدد ٣، وقيم ص كلها في العدد −٢، ثم احسب معامل الارتباط بين القيم الجديدة، ماذا تلاحظ؟

بوجه عام:

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو (ر)، وعُدِّلت قيم كل منهما بحسب العلاقة:

س* = أ س + ب ، ص* = جـ ص + د ، حيث:

أ، ب، جـ، د أعداد حقيقية، أ ≠ صفرًا، جـ ≠ صفرًا، فإن معامل الارتباط بين س*، ص* يساوي:

١) (ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ متشابهتين.

٢) (−ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ مختلفتين.

فكر وناقش

صِف بالكلمات أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون.

مثال (٣)

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو − ٠,٨، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* اللذينِ يمثلان المشاهدات بعد التعديل في كل مما يأتي:

١) س* = ٢س+٥ ، ص* = ص − ٥
٢) س* = −٤س+٥ ، ص* = ٦ص − ٥
٣) س* = ٥ − ٨س ، ص* = −ص − ٥

الحل

١) معامل س هو (٢) موجب، ومعامل ص هو (١) موجب، والمعاملان لهما الإشارة نفسها؛ لذا فإن ر = −٠,٨

٢) معامل س هو (−٤) سالب، ومعامل ص هو (٦) موجب، والمعاملان ليس لهما الإشارة نفسها؛ لذا فإن ر = ٠,٨

٣) معامل س هو (−٨) سالب، ومعامل ص هو (−١) سالب، والمعاملان لهما الإشارة نفسها؛ لذا فإن ر = −٠,٨

تدريب ٤

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو ٠,٦٥، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

١) س* = −٨س+٥ ، ص* = ٨ − ص
٢) س* = س+٥ ، ص* = ٦ص − ٥
٣) س* = ٢٠ − ٧س ، ص* = ص − ٥

الأسئلة

١) النقط: (٧، ٧)، (٨، ٦)، (٦، ٥)، (٥، ٨)، (٩، ٤)، (٦، ٤)، (١٠، ٣) تمثل القيم المتناظرة لمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محددًا نوع العلاقة التي تربط بينهما.

٢) الجدول الآتي يبين بُعْد مؤسسة استهلاكية عن مركز المدينة بالكيلومتر (س)، وحجم مبيعات المؤسسة بالألف دينار شهريًا (ص) لخمس مؤسسات. احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص.

س	٧	٦	٢	٣	١٢
ص	١١	٩	٦	٨	٦

٣) احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص للقيم المبينة في الجدول الآتي:

س	٦٠	٧٠	٧٥	٩٥
ص	٨٠	١٠٠	٩٠	٥٠

٤) إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما (٧)، $\sum_{ك=١}^{٧} (س_{ك} - \overline{س})^{٢} = ٢٠$،

$\sum_{ك=١}^{٧} (ص_{ك} - \overline{ص})^{٢} = ٥٠٠$، $\sum_{ك=١}^{٧} (س_{ك} - \overline{س})(ص_{ك} - \overline{ص}) = -٨$:

أ) جد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص. ب) حدد نوع العلاقة بينهما.

٥) أي معاملات الارتباط الآتية أقوى:

أ) ٠,٧ ب) −٠,٩ جـ) ٠,٨ د) −٠,٨

٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو ٠,٨٥، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

أ) س* = −٩س + ١٥ ، ص* = ٨ − ٢ص

ب) س* = ٤س + ٥٢ ، ص* = ص − ٥

جـ) س* = ١٧ − ٧س ، ص* = ٥ص − ٣

ثانيًا خط الانحدار Regression Line

لاحظ صاحب محل لبيع الأجهزةالكهربائية وجود علاقة بين عدد ساعات العمل وعدد الأجهزة المبيعة كالآتي:

عدد ساعات العمل	١	٢	٤	٥	٨
عدد الأجهزة المبيعة	٣	٥	٧	٨	١٢

بناءً على المعطيات السابقة، هل يستطيع صاحب المحل أن يتنبأ بعدد الأجهزة المبيعة إذا عمل مدة ١٠ ساعات؟

تعرفت سابقًا كيف يمكن رسم شكل الانتشار بين متغيرين، وأن النقط $(س_ر ، ص_ر)$ التي تربطها علاقة خطية تتجمع حول خط مستقيم يمر بعدد منها، ويتوسط النقط الباقية التي تتوزع على جانبي الخط المستقيم، وأن النقط التي لا تقع على الخط المستقيم تُسبِّب خطأً في التنبؤ يُعبَّر عنه بالصورة الآتية:

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة المتنبأ بها

وإذا رُمِز إلى القيمة الحقيقية بالرمز $ص_ر$، وإلى القيمة المتنبأ بها بالرمز $\hat{ص}_ر$، فإن

الخطأ في التنبؤ = $ص_ر - \hat{ص}_ر$

يمكن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بمعادلة الخط المستقيم الآتية: $\hat{ص} = أ س + ب$، وتُعرف هذه المعادلة باسم **خط الانحدار**، حيث:

$$أ = \frac{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})}{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \bar{س})^{٢}}$$

$$ب = \bar{ص} - أ \bar{س}$$

يمكن حل المسألة الواردة في بداية الدرس باتباع الخطوات الآتية:

(١) إيجاد الوسط الحسابي لقيم (س)، وهو $\overline{\text{س}} = \frac{(١+٢+٤+٥+٨)}{٥} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

(٢) إيجاد الوسط الحسابي لقيم (ص)، وهو $\overline{\text{ص}} = \frac{(٣+٥+٧+٨+١٢)}{٥} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$

(٣) إنشاء الجدول الآتي:

$\text{س}_{\text{ك}}$	$\text{ص}_{\text{ك}}$	$\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}}$	$\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}}$	$(\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})$	$(\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^{٢}$
١	٣	−٣	−٤	١٢	٩
٢	٥	−٢	−٢	٤	٤
٤	٧	٠	٠	٠	٠
٥	٨	١	١	١	١
٨	١٢	٤	٥	٢٠	١٦
المجموع		٠	٠	٣٧	٣٠

(٤) إيجاد قيمة أ = $\dfrac{\sum_{\text{ك}=١}^{٥} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})\,(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})}{\sum_{\text{ك}=١}^{٥} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^{٢}}$

$$= \frac{٣٧}{٣٠} = ١,٢$$

(٥) إيجاد قيمة ب = $\overline{\text{ص}} - \text{أ}\,\overline{\text{س}}$

$$= ٧ - ١,٢ \times ٤ = ٢,٢$$

(٦) معادلة خط الانحدار $\hat{\text{ص}} = \text{أ س} + \text{ب}$

$$\hat{\text{ص}} = ١,٢ \text{ س} + ٢,٢$$

والآن، إذا عمل صاحب المحل مدة ١٠ ساعات ← س = ١٠، فإن:

ص = ١,٢ × ١٠ + ٢,٢ = ١٤,٢ ≈ ١٤ جهازًا.

∴ يمكن أن يبيع صاحب المحل ١٤ جهازًا إذا عمل مدة ١٠ ساعات.

مثال (١)

الجدول الآتي يبين علامات خمسة طلاب في امتحان لمبحثي الجغرافيا والتاريخ، علامته القصوى ١٠:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة الجغرافيا (س)	١	٥	٦	٨	١٠
علامة التاريخ (ص)	٦	٧	٨	٩	١٠

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعلامة مبحث التاريخ إذا علمت علامة مبحث الجغرافيا.

٢) قدِّر علامة طالب في مبحث التاريخ إذا كانت علامته في مبحث الجغرافيا ٧

٣) جد الخطأ في التنبؤ بعلامة طالب في مبحث التاريخ إذا كانت علامته في مبحث الجغرافيا ٥

الحل

١) لإيجاد معادلة خط الانحدار:

جد المتوسط الحسابي لقيم (س)، وهو $\overline{س} = \frac{(١+٥+٦+٨+١٠)}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$

جد المتوسط الحسابي لقيم (ص)، وهو $\overline{ص} = \frac{(٦+٧+٨+٩+١٠)}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

أنشئ الجدول الآتي:

$س_ك$	$ص_ك$	$س_ك - \overline{س}$	$ص_ك - \overline{ص}$	$(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})$	$(س_ك - \overline{س})^٢$
١	٦	−٥	−٢	١٠	٢٥
٥	٧	−١	−١	١	١
٦	٨	٠	٠	٠	٠
٨	٩	٢	١	٢	٤
١٠	١٠	٤	٢	٨	١٦
المجموع		٠	٠	٢١	٤٦

جد قيمة $أ = \dfrac{\sum_{ك=١}^{٥} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sum_{ك=١}^{٥} (س_ك - \overline{س})^٢}$

$= \dfrac{٢١}{٤٦} = ٠,٤٦$

جد قيمة ب $= \overline{ص} - أ\,\overline{س}$

$= ٨ - ٠,٤٦ \times ٦ = ٥,٢$

∴ معادلة خط الانحدار $\hat{ص} = أ\,س + ب$ هي:

$\hat{ص} = ٠,٤٦\,س + ٥,٢$

٢) إذا كانت علامة الطالب في مبحث الجغرافيا ٧، فإن $س = ٧$

∴ $ص = ٠,٤٦ \times ٧ + ٥,٢ = ٨,٤٢ \approx ٨$

٣) الطالب الذي حصل على علامة ٥ في مبحث الجغرافيا كانت علامته الحقيقية في مبحث التاريخ ٧ (انظر الجدول ١).

العلامة المتنبأ بها في مبحث التاريخ هي: $\hat{ص} = ٠,٤٦ \times ٥ + ٥,٢ = ٧,٥$

∴ الخطأ في التنبؤ $= ص_ر - \hat{ص}_ر = ٧ - ٧,٥ = -\,٠,٥$

تدريب ١

الجدول الآتي يبين معدل أربعة طلاب في امتحانات الثانوية العامة والجامعة:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤
معدل الثانوية العامة (س)	٦٥	٧٠	٨٠	٨٥
معدل الجامعة (ص)	٦٠	٦٠	٧٠	٩٠

أجب عما يأتي:

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الجامعة إذا عُلِم معدله في الثانوية العامة.

٢) تنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٨٨

٣) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٧٠

مثال (٢)

إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٨، $\sum_{\text{ك}=١}^{٨} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^{٢} = ١٥$، $\sum_{\text{ك}=١}^{٨} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}}) = ٦٠$، $\overline{\text{س}} = ١٢$، $\overline{\text{ص}} = ٥٠$، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

الحل

جد قيمة أ $= \dfrac{\sum_{\text{ك}=١}^{٨} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ك}} - \overline{\text{ص}})}{\sum_{\text{ك}=١}^{٨} (\text{س}_{\text{ك}} - \overline{\text{س}})^{٢}}$

$= \dfrac{٦٠}{١٥} = ٤$

جد قيمة ب $= \overline{\text{ص}} - \text{أ}\,\overline{\text{س}}$

$= ٥٠ - ٤ \times ١٢ = ٢$

∴ معادلة خط الانحدار: $\hat{\text{ص}} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\hat{\text{ص}} = ٤\,\text{س} + ٢$

تدريب ٢

إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) وعدد الأخطاء التي يرتكبها الموظف في هذا اليوم (ص) هي: $\hat{\text{ص}} = ٠{,}٦\,\text{س} + ١$، فأجب عما يأتي:

١) تنبأ بعدد الأخطاء التي سيرتكبها موظف يعمل مدة ١٠ ساعات يوميًّا.

٢) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ١٥ ساعة يوميًّا هي ٦ أخطاء، فجد الخطأ في التنبؤ.

الأسئلة

١) الجدول الآتي يبين معدل خمسة طلاب في الصفين: التاسع والعاشر.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
التاسع (س)	٥٠	٥٥	٧٠	٨٥	٩٠
العاشر (ص)	٦٠	٧٠	٦٠	٧٠	٨٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الطالب في الصف العاشر إذا عُلِم معدله في الصف التاسع.

ب) تنبأ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٨٨

جـ) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٩٠

٢) إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٨، $\sum_{ك=١}^{٨} (س_ك - \overline{س})^٢ = ٢٠$

$\sum_{ك=١}^{٨} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص}) = ٤٠$، $\overline{س} = ١٥$، $\overline{ص} = ٤٥$، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

٣) إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال (س) والأرباح السنوية لشركة بالألف دينار (ص) هي: $\hat{ص} = ٠,٣ س + ١٠$، فجد الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها ٦٠ ألف دينار، وأرباحها السنوية ٢٧,٤ ألف دينار.

أسئلة الوحدة

١) بكم طريقة يمكن اختيار ٤ مهندسين، و٣ فنيين لتكوين لجنة من بين ٥ مهندسين و١٠ فنيين؟

٢) جد قيمة (ر) التي تحقق المعادلة: ٣ ل (٦، ر) = ٣٦٠

٣) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٢، أ = ٠,٤ ، فجد:

أ) قيم (س).

ب) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

٤) إذا كان المتوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص هو ٤٢ سنة، والانحراف المعياري لها ٤ ، فجد العمر الذي ينحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي.

٥) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة:

{ (١، ٠,٤)، (٢، ٠,٥)، (٣، ب) }، فجد قيمة (ب).

٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو (−٠,٨)، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

أ) س* = −١٠س ، ص* = ٨ − ص

ب) س* = ٤س+٨ ، ص* = ص − ٥

٧) الجدول الآتي يبين القيم المتناظرة للمتغيرين: س، ص:

س	١	٢	٤	٥
ص	٥	٦	٧	١٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة ص إذا عُلِمت قيمة س.

ب) تنبأ بقيمة ص إذا كان س = ١٤

جـ) جد الخطأ في التنبؤ بقيمة ص إذا كان س = ٤

٨) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) ل (ز≤١,٧).
ب) ل (ز ≤ ٢,١٥).
جـ) ل (ز ≥ − ١,١٤).
د) ل (ز ≤ − ٢,٥).
هـ) ل (−١,٣٢≤ ز ≤ ١,١).

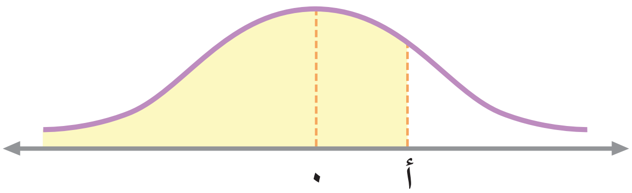
٩) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٩٠، وانحرافه المعياري (٥)، فجد:

أ) ل (س ≤ ٨٥).
ب) ل (س ≥ ٩٣).

١٠) إذا كان متوسط معدل ١٠٠٠ طالبة في إحدى مدارس عمّان ٨٠، والانحراف المعياري ٥، وكانت المعدلات تتوزع توزيعًا طبيعيًّا، واختيرت إحدى الطالبات عشوائيًّا، فجد:

أ) احتمال أن لا يزيد معدل الطالبة على ٧٥
ب) احتمال أن يكون معدل الطالبة محصورًا بين ٧٠ و ٩٠
جـ) عدد الطالبات اللواتي يزيد معدل كل منهن على ٧٠

جدول التوزيع الطبيعي



أ	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠١٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٥	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

قائمة المراجع

أولًا: المراجع العربية

١– منصور عوض، **مبادئ الإحصاء**، عمّان: دار الصفاء للنشر، ٢٠٠٦م.

٢– إدارة المناهج والكتب المدرسية (الأردن)– **الرياضيات للمرحلة الثانوية** / الفرع الأدبي (المستويان: الثالث والرابع)، عمّان، ط١، وزارة التربية والتعليم، ٢٠١٦م.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

1- Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis- **Calculus Early Transcendentals** - Tenth Edition.

2- Larson, **Hosteler-Precalculus** - 7th Edition - Boston.

3- Salas, Hille, Etgen - **Calculus one and Several Varibles** -Tenth Edition 2007 John Willy and sons.

تم بحمد الله