مكتبة إيلاف

الحتاملة

في الرياضيات

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

إعداد الأستاذ

ايمن حتاملة

كل ما يحتاجه طالب التوجيهي

إربد - إشارة النسيم بجانب سوبر ماركت الشرع

مكتبة إيلاف

E-MAIL: Elaaflibrary@yahoo.com

0799282927

الأستاذ
أيمن حتاملة
0795373460

بسم الله الرحمن الرحيم

التكامل وتطبيقاته

الرياضيات العلمي

مقلوس المشتقة

تعريف:-

اذا كان $هـ(س)$ اقتران متصل على $[أ، ب]$ يدعى $م(س)$ بانه مقلوس المشتقة للاقتران $هـ(س)$ اذا كان

$م'(س) = هـ(س)$.

مثال اذا كان $هـ(س) = ٣س^{٢}$

اكتب اكثر من مقلوس المشتقة للاقتران $هـ(س)$.

$م_{١}(س) = س^{٣} + ٢$

$م_{٢}(س) = س^{٣} - ٤$

$م_{٣}(س) = س^{٣} + \frac{١}{٢}$

الشكل العام $م(س) = س^{٣} + ج$

لاحظ ان امثلة عدد لانهائي من مقلوس المشتقة لأي اقتران الفرق بينها الثابت ج

مثال

اذا كان $م_{١}(س)$ ، $م_{٢}(س)$ اقترانين يمثلان مقلوسين لمشتقة الاقتران المتصل $هـ(س)$

وكان $د(س) = م_{١}(س) - م_{٢}(س)$

جد $د'(س)$

الحل

بما أن $هـ(س)$ = ثابت

$\Leftarrow د'(س)$ = صفر

حل آخر

$د'(س) = م_{١}'(س) - م_{٢}'(س)$

$د'(س) = هـ(س) - هـ(س)$

= صفر

مثال

اذا كان $د(س)$ ، $ل(س)$ اقترانين يمثلان مقلوس المشتقة للاقتران $هـ(س)$ المتصل الحيث

$ع(س) = ٢د(س) - ٣ل(س)$

جد $ع'(س)$.

الحل

$ع'(س) = ٢د'(س) - ٣ل'(س)$

$= ٢هـ(س) - ٣هـ(س)$

$= -هـ(س)$

بسم الله الرحمن الرحيم

التكامل وتطبيقاته

الرياضيات العلمي

مثال
جد مقاوسًا لمشتقة كل من الاقترانات التالية

① $هـ(س) = ٢س$
$م(س) = س^{٢} + جـ$

② $هـ(س) = جتاس$
$م(س) = جاس + جـ$

③ $هـ(س) = ٤س^{٣} + قاس$
$م(س) = س^{٤} + ظاس + جـ$

④ $هـ(س) = ٨$
$م(س) = ٨س + جـ$

تسمى عملية ايجاد مقاوس المشتقة لأي اقتران بالتكامل غير المحدود والذي يرمز له بالرمز $\int$

اي ان
$م(س) = \int هـ(س)\, د س$.

ويقرأ تكامل هـ(س) دال السين
حيث
اشارة $\int$ تعني هـ هو مقاوس المشتقة لما سيأتي
* أو هـ هو الاقتران الذي كانت مشتقته ما سيأتي
الرمز د س رمز مرافق لكل اشارة تكامل ويدل على ان الاقتران مكتوب بالسينات

مثال
جد كل مما يلي

① $\int ٢س\, د س = \frac{٢س^{٢}}{٢} + جـ$
$= س^{٢} + جـ$

② $\int جتاس\, د س = جاس + جـ$

③ $\int ٨\, د س = ٨س + جـ$

④ $\int \frac{١}{٢}\, د ص = \frac{١}{٢} ص + جـ$

⑤ $\int ظا^{٢}س\, د س$ مطابقة
$\int (قا^{٢}س - ١)\, د س = ظاس - س + جـ$

لاحظ ان عملية التكامل عكس عملية الاستقاق تمامًا وبقاس صحيح

اي ان
$\frac{ك}{د س} \int هـ(س)\, د س = هـ(س)$

الاستقاق يلغي التكامل

قاعدة
مشتقة التكامل غير المحدود تساوي ما داخل التكامل.

الأستاذ
أيمن حتاملة
0795373460

بسم الله الرحمن الرحيم

الرياضيات العلمي

التكامل وتطبيقاته

مثال

اذا كان $هـ(س) = \int 3س^2 + 2س \, دس$

جد $هـ(س)$.

$\therefore م(س) = س^3 + س^2 + جـ$

$\therefore هـ(س) = 3س^2 + 2س$

مثال

اذا كان $هـ(س) = \int \frac{3س^2 + 2س}{1 + س^2} \, دس$

جد $هـ(س)$.

$هـ(س) = \frac{3س^2 + 2س}{1 + س^2}$

مثال

اذا كان $هـ(س) = س^2 \int جتاس \, دس$

جد $هـ(س)$.

$هـ(س) = س^2 \times جتاس + \int جتاس \, دس \times 2س$

$= س^2 جتاس + 2س جاس$.

مثال

اذا كان $هـ(س) = \int (8 دس) \, دس$

جد $هـ(س)$

$هـ(س) = \int 8 \, دس$

$= 8س + جـ$

الاستقاق عكس التكامل

تذكر ان

1) $\int هـ(س) \, دس = م(س) + جـ$

2) $هـ(س) \, دس = هـ(س) + جـ$

3) $\int هـ(س) \, دس = هـ(س) + جـ$

4) $\int ت(ن) \, دن = ع(ن) + جـ$

5) $ع(ن) \, دن = ت(ن) + جـ$

6) $\int ت(ن) \, دن = م(ن) + جـ$

مثال

اذا كان $\int هـ(س) \, دس = س^3 + 2س^2 + 2س + 3$

جد $هـ(س)$.

$م(س) = س^3 + س^2 + 2س + 3 + جـ$

$م'(س) = هـ(س) = 3س^2 + 2س + 2$

$م''(س) = هـ'(س) = 6س + 2$

او نستق الطرفين من البداية.

مثال

اذا كان $\int هـ'(س) \, دس = س^4 + س^2$ جد $هـ(س)$

نشتق الطرفين

$هـ'(س) = 4س^3 + 2س$.

مثال

إذا كان $\begin{cases} \text{هـ}(س) ، ص = س^3 + س^2 + س + 3 \\ \text{حيث هـ}(٤) \text{ علمًا بأن هـ}(٢) = ٦ \end{cases}$

$\therefore$ هـ$(س) = س^4 + س^3 + س^2 + س + ٣ + جـ$

ولكن هـ$(٢) = ٨ + ٤ + ٢ + ٣ + جـ = ٦$

$جـ = -١٠$

$\therefore$ هـ$(س) = س^4 + س^3 + س^2 + س + ٣ - ١٠$

هـ$(٤) = ٢٥٦ + ٦٤ + ١٦ + ٤ + ٣ - ١٠$

$= \boxed{٧٦}$

مثال

إذا كان $\begin{cases} \text{هـ}(س) ، ص = جا^2 س + \text{ظا} س + جـ \\ \text{حيث هـ}(\frac{\pi}{٤}) \end{cases}$

نشتق الطرفين

هـ$(س) = ٢ (\text{جا} س)^{١} \times \text{جتا} س + \text{قا}^2 س$

هـ$(س) = ٢ \text{جا} س \text{جتا} س + \text{قا}^2 س$

هـ$(س) = ٨ \text{جتا}^3 س + ٢ \text{قا} س \text{قا} س \text{ظا} س$

هـ$(\frac{\pi}{٤}) = ٨ \times -١ + ٢ \times ٢ \times ١$

$= \boxed{-٤}$

مدرسي/ كتاب

إذا كان هـ$(س)$ اقتران متصل في مجاله

وكان $\begin{cases} \text{هـ}(س) \text{ جا}^2 \frac{\pi}{٢} ص = ١ + س^2 \\ \text{حيث هـ}(س) . \end{cases}$

نشتق $\begin{cases} -\text{هـ}(س) ص = ١ + س^2 \\ \text{نشتق} \end{cases}$

$-\text{هـ}(س) = ٢ س$

$\Leftarrow$ هـ$(س) = -٢ س .$

مدرسي/ كتاب

إذا كان $\begin{cases} \text{هـ}(س) ص = \text{جا} س - أ \text{جتا} س + ١ \\ \text{وكان هـ}(\frac{\pi}{٤}) = \text{صفر حيث } أ . \end{cases}$

نشتق الطرفين

هـ$(س) = \text{جتا} س \text{جتا} س + أ \text{جا} س$

هـ$(\frac{\pi}{٤}) = \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + أ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$

$١ + \frac{أ}{\sqrt{٢}} = ٠$

$\frac{أ}{\sqrt{٢}} = -١$

$أ = -\sqrt{٢}$

مثال

اذا كان $\int_{1}^{2} (هـ(س) + 2س)\,دس = س^3 + أ س^2 + 1$

وكان $هـ'(1) = 5$ ، $هـ(2) = 7$

جد ① قيمة أ ② $هـ(0)$

الحل

① نشتق الطرفين

$هـ(س) + 2س = 3س^2 + 2أس$

$هـ'(1) + 2 = 3 + 2أ$

$5 + 2 = 3 + 2أ$

$2أ = 4$

$\therefore$ $\boxed{أ = 2}$

② $\int_{0}^{2} (هـ(س) + 2س)\,دس = س^2 + 2س + 1$

تكامل

$هـ(س) + س^2 = س^2 + 2س + 1 + جـ$

لمعرفة جـ

$هـ(2) + 4 = 8 + 8 + 1 + جـ$

$7 + 4 = 17 + جـ$

$\boxed{جـ = -6}$

$\therefore هـ(س) + س^2 = س^3 + 2س + 1 - 6$

$هـ(0) + 0 = 0 + 0 + 1 - 6$

$\boxed{هـ(0) = -5}$

مثال

بيّن ان الاقتران

$م(س) = جا^2 س$ هو مقاوم لمشتقه

الاقتران $هـ(س) = جا 2س$

الحل

الشروط
1) $هـ(س)$ متصل على مجاله
2) $م'(س) = هـ(س)$

1) $هـ$ متصل على مجاله

2) $م'(س) = 2 جا س \cdot جتا س$

$= جا 2س$

$= هـ(س)$ وهو المطلوب

مثال

اذا كان $\int_{1}^{2} هـ(س)\,دس = جاس - جتاس + 2$

اثبت ان

$هـ(\frac{\pi}{2}) - هـ'(\frac{\pi}{2}) = 2$

الحل نشتق الطرفين

$هـ(س) = جتاس + جاس$

$هـ'(س) = -جاس + جتاس$

$هـ(\frac{\pi}{2}) = جتا\frac{\pi}{2} + جا\frac{\pi}{2} = 1$

$هـ'(\frac{\pi}{2}) = -جا\frac{\pi}{2} + جتا\frac{\pi}{2} = -1$

$هـ(\frac{\pi}{2}) - هـ'(\frac{\pi}{2}) = 1 - (-1)$

$= 2$

الأستاذ

بسم الله الرحمن الرحيم

الرياضيات العلمي

أمين حنامله

التكامل وتطبيقاته

0795373460

قواعد التكامل غير المحدود

(١) $\int م \, دس = م س + جـ$

تكامل ثابت = ثابت × س + جـ

أمثلة

١) $\int ٤ \, دس = ٤س + جـ$

٢) $\int ٣ \, دص = ٣ص + جـ$

٣) $\int \frac{١}{٤} \, دع = \frac{١}{٤} ع + جـ$

٤) $\int -٦ \, دس = -٦س + جـ$

٥) $\int دس = س + جـ$

٦) $\int \frac{دص}{٥} = \frac{١}{٥} ص + جـ$

٧) $\int \pi \, دل = \pi ل + جـ$

٨) $\int \sqrt{٢٧} \, دس = \sqrt{٢٧} س + جـ$

٩) $\int حا\frac{\pi}{٤} \, دس = (حا\frac{\pi}{٤}) س + جـ$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} س + جـ$

(٢) $\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$

حيث $ن \neq -١$

أمثلة

١) $\int س^{٢} \, دس = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

٢) $\int س^{-٥} \, دس = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

٣) $\int س^{\frac{١}{٣}} \, دس = \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

٤) $\int س^{\pi} \, دس = \frac{س^{\pi+١}}{\pi+١} + جـ$

٥) $\int س^{\sqrt{٢}} \, دس = \frac{س^{\sqrt{٢}+١}}{\sqrt{٢}+١} + جـ$

٦) $\int س^{-\frac{١}{٢}} \, دس = ٢ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

٧) $\frac{١}{س^{٤}} \, دس = \int س^{-٤} \, دس = \frac{س^{-٣}}{-٣} + جـ$

٨) $\sqrt[٤]{س^{٣}} \, دس = \int س^{\frac{٣}{٤}} \, دس$

$= \frac{٤}{٧} س^{\frac{٧}{٤}} + جـ$

٩) $\int ص^{ن} \, دس = (ص^{ن}) س + جـ$

ثابت

بسم الله الرحمن الرحيم

الرياضيات العلمي

التكامل وتطبيقاته

أيمن حتاملة
0795373460

⟨٣⟩ $\int P \cdot f(x)\,dx = P \int f(x)\,dx$

⟨٤⟩ $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

أمثلة

١) $\int 12x^2\,dx = 12\frac{x^4}{4} + c$
$= 3x^4 + c$

٢) $\int 8x\,dx = 8\frac{x^2}{2} + c$
$= 4x^2 + c$

٣) $\int 7x^4\,dx = 7\frac{x^5}{5} + c$
$= \frac{7}{5}x^5 + c$

٤) $\int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx = \int 6x^{-\frac{1}{2}}\,dx$
$= 6 \times 2\,x^{\frac{1}{2}} + c$

٥) $\int (8x+3)\,dx = 8\frac{x^2}{2} + 3x + c$
$= 4x^2 + 3x + c$

٦) $\int (12x^3 - 4x + 8)\,dx$
$12\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} + 8x + c$
$4x^4 - 2x^2 + 8x + c$

٧) $\int (2x+1)(3x+2)\,dx$ نقل الاقواس
$\int 6x^2 + 5x + 2\,dx$
$6\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 2x + c$

٨) $\int \frac{x^5 + x^2 + 2}{x^2}\,dx$ وزع البسط على المقام اذا كان حد واحد
$\int x^3 + 1 + 2x^{-2}\,dx$
$\frac{x^4}{4} + x + 2\frac{x^{-1}}{-1} + c$
$\frac{x^4}{4} + x - \frac{2}{x} + c$

٩) $\int \frac{x^3 - 4x + 3}{x-1}\,dx$ حلل اذا كان المقام احد قوسين
$\int \frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

١٠) $\int x^3\left(\frac{2}{x^3} + 3\right)\,dx$
$\int 2 + 3x^3\,dx = 2x + 3\frac{x^4}{4} + c$

١١) $\int \frac{x^3 - 9}{x+3}\,dx$
$\int \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + c$

١٢) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
$\int \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx$
$\int x^{\frac{1}{2}} + 1\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x + c$

١٣) $\int_{0}^{1} س \sqrt{س} \, ص$

$= \int_{0}^{1} س \cdot س^{\frac{1}{2}} \, ص = \int_{0}^{1} س^{\frac{3}{2}} \, ص$

$= \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + ج$

١٤) $\int_{0}^{4} س \sqrt{2س} \, ص$

$= \int_{0}^{4} س \cdot \sqrt{2} \, س^{\frac{1}{2}} \, ص = \sqrt{2} \int_{0}^{4} س^{\frac{3}{2}} \, ص$

$= \sqrt{2} \times \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + ج$

١٥) $\int \frac{2س^{2} - 3\sqrt{س}}{\sqrt{س}} \, ص$

$= \int (2س^{2} - 3س^{\frac{1}{2}}) س^{-\frac{1}{2}} \, ص$

$= \int 2س^{\frac{3}{2}} - 3س^{0} \, ص$

$= 2 \times \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} - 3س + ج$

١٦) $\int \frac{س^{2} + 5س + 4}{س^{3} + 3س} \, ص$

$= \int \frac{(س+4)(س+1)}{س(س+3)} \, ص$

$= \int \frac{س+4}{س^{2}+3} + \frac{س+1}{س} \, ص$

$= \frac{1}{2} \ln|س^{2}+3| + \frac{4}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{س}{\sqrt{3}}\right) + \ln|س| + ج$

١٧) $\int_{0}^{1} س^{3} (\sqrt{س} + س) \, ص$

$= \int_{0}^{1} س^{\frac{1}{2}} (س^{\frac{1}{2}} + س) \, ص$

$= \int_{0}^{1} س^{\frac{5}{2}} + س^{\frac{3}{2}} \, ص$

$= \frac{2}{7} س^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + ج$

قاعدة / مهم جدًا

$\int (أ س + ب)^{ن} \, ص = \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{أ \times (ن+1)} + ج$ حطي نقط

أمثلة

١) $\int (3ص + 3)^{4} \, ص = \frac{(3ص+3)^{5}}{3 \times 5} + ج$

٢) $\int (6 - 3ص)^{7} \, ص = \frac{(6-3س)^{8}}{-3 \times 8} + ج$

٣) $\int \sqrt{3ص + 5} \, ص = \int (3ص+5)^{\frac{1}{2}} \, ص$

$= \frac{(3ص+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times 3} + ج$

٤) $\int_{0}^{1} \frac{7}{\sqrt{3ص + 2}} \, ص$

$\int 7 (3ص+2)^{-\frac{1}{2}} \, ص$

$\frac{7 (3ص+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 3} + ج$

$3\sqrt{3ص+2} + ج$

٥) $\int \frac{٣}{(س^٢ - ٤س + ٤)^٣}$ د س

$= \int \frac{٣}{((س-٢)^٢)^٣}$ د س

$= \int ٣(س-٢)^{-٦}$ د س $= \frac{٣(س-٢)^{-٥}}{-٥ \times ١} + ج$

٦) $\int (س^٤ - ٦س + ٩)^٤$ د س

$= \int ((س-٣)^٢)^٤$ د س $= \int (س-٣)^٨$ د س

$= \frac{(س-٣)^٩}{٩ \times ١} + ج$

٧) $\int (٤س - ٤)^٣ \cdot (٢س - ٦)^٤$ د س.

$\int ٨(س-٢)^٢ \times ١٨ (س-٢)^٤$ د س

$\int ٧٢٨ (س-٢)^٧$ د س $= \frac{٧٢٨(س-٢)^٨}{٨ \times ١} + ج$

٨) $\int (٢ - س)(س-٢)^٧$ د س.

$= \int -١(س-٢)(س-٢)^٧$ د س $= \int -(س-٢)^٨$ د س

$= -\frac{(س-٢)^٩}{٩ \times ١} + ج$

٩) $\int \sqrt[٣]{س^٢ - ٢س + ١}$ د س.

$= \int \sqrt[٣]{(س-١)^٢}$ د س $= \int (س-١)^{\frac{٢}{٣}}$ د س

$= \frac{(س-١)^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣} \times ١} + ج$

١٠) $\int س \sqrt[٣]{(\frac{٥}{س^٢} - \frac{١}{س^٤})}$ د س

$\int \sqrt[٣]{س^٣ (\frac{٥}{س^٢} - \frac{١}{س^٤})}$ د س

$\int (٥ - س)^{\frac{١}{٣}}$ د س $= \frac{(٥-س)^{\frac{٤}{٣}}}{-١ \times \frac{٤}{٣}} + ج$

١١) $\int \frac{١}{س^٤} (س^٣ - ٤س^٤)^٣$ د س.

$\int \frac{١}{س^٤} (س^٤ (س-٤))^٣$ د س

$\int \frac{١}{س^٤} \times س^{١٢} (س-٤)^٣$ د س

$\int (س-٤)^٣$ د س $= \frac{(س-٤)^٤}{٤ \times ١} + ج$

أكمل

١) $\int \frac{س^٢ - ٨}{س - ٢}$ د س

$\int \frac{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)}{س-٢}$ د س

$\frac{س^٣}{٣} + ٢س^٢ + ٤س + ج$

٣) $\int \frac{(س+٤)^٢ - ١٦}{س+٦}$ د س

$\int \frac{(س+٤-٤)(س+٤+٤)}{س+٦}$ د س

$\int (س-٤)$ د س $= \frac{س^٢}{٢} - ٤س + ج$

٢) $\int \frac{س - ٢\sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}$ د س

$\int \frac{\sqrt{س}(\sqrt{س} - ٢)}{\sqrt{س} - ١}$ د س

$\int س^{\frac{١}{٢}}$ د س $= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

٤) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٢س+٣} + \sqrt{٢س+٢}}$ د س بالمرافق

$\int \frac{٥س}{\sqrt{٢س+٣} + \sqrt{٢س+٢}} \times \frac{\sqrt{٢س+٣} - \sqrt{٢س+٢}}{\sqrt{٢س+٣} - \sqrt{٢س+٢}}$ د س

$\int \frac{٥س(\sqrt{٢س+٣} - \sqrt{٢س+٢})}{٢س+٣-٢س-٢}$ د س

$\int ٥س(\sqrt{٢س+٣} - \sqrt{٢س+٢})$ د س

$\int ٥س(٢س+٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢س+٢)^{\frac{١}{٢}})$ د س

$\frac{٥}{٢} \times \frac{٢}{٥}(٢س+٣)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٥ \times ٢}(٢س+٢)^{\frac{٥}{٢}} + ج$

$\frac{(٢س+٣)^{\frac{٥}{٢}}}{٥} - \frac{(٢س+٢)^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ج$

٥) $\int \frac{(٢-س)}{س\sqrt{س}}$ د س. حله لبكيب

$\int \frac{٨ - ١٢س + ٦س^٢ - س^٣}{س^{\frac{٣}{٢}}}$ د س

$\int ٨س^{-\frac{٣}{٢}} - ١٢س^{-\frac{١}{٢}} + ٦س^{\frac{١}{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}}$ د س

$-٨ \times ٢ س^{-\frac{١}{٢}} - ١٢ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ٦ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

$-١٦ س^{-\frac{١}{٢}} - ٢٤ س^{\frac{١}{٢}} + ٤ س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

H.W

٦) $\int \frac{٣س}{\sqrt{٤س+٣} - \sqrt{س+٣}}$ د س

سؤال من الكتاب

اذا كان $ق'(س) = 3س^2 - 2$

وكان المنحنى يمر بالنقطة $(1، 0)$ المطلوب ايجاد معادلة $ق(س)$

الحل

$ق(س) = \int (3س^2 - 2)$ د س

$ق(س) = س^3 - 2س + ج$

لكن $ق(0) = 1$

$ق(0) = 0 - 0 + ج = 1$

$ج = 1$

$\therefore ق(س) = س^3 - 2س + 1$

سؤال من الكتاب

اذا كان $ق'(س) = \frac{6}{\sqrt{س}}$ ، $ق(4) = 0$

ومنحنى $ق(س)$ يمر بالنقطة $(4، 0)$

وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (1)

فما قاعدة $ق(س)$؟

$ق(س) = \int 6 س^{-\frac{1}{2}}$ د س

$ق(س) = 6 \times 2 س^{\frac{1}{2}} + ج$

$ق(س) = 12 \sqrt{س} + ج$

$ق'(4) = 12 \times \frac{1}{2\sqrt{4}} + ج = 1$

$ج = -3$

$\therefore ق(س) = 12 \sqrt{س} - 3$

$ق(س) = 12 \times \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} - 2س + ج$

$ق(4) = 8 \sqrt{(4)^3} - 2(4) + ج = 0$

$64 - 8 + ج = 0$

$ج = -56$

$ق(س) = 8 \sqrt{س^3} - 2س - 56$

سؤال من الكتاب

اذا كان $ق'(س) = -3س + 4$

وكان للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى محلية

تساوي (-2) عندما $س = 2$

فما قاعدة الاقتران

$ق(س) = -\frac{3}{2} س^2 + 4س + ج$

$-10 = -6 + 8 + ج$

$ج = -12$

$ق(س) = -\frac{3}{2} س^2 + 4س - 12$

تكامل الاشتقاقات الدائرية

*	الاشتقاق	تكامله
١	∫ حاس دس	− حتاس + ج
٣	∫ حتاس دس	حاس + ج
٣	∫ قا^{٢}س دس	ظاس + ج
٤	∫ قاس ظاس دس	قاس + ج
٥	∫ قتاس ظتاس دس	− قتاس + ج
٦	∫ قتا^{٢}س دس	− ظتاس + ج

تقسيم

$$\int \text{حا}(\text{ب س} + \text{ح})\,\text{د س} = -\frac{\text{حتا}(\text{ب س} + \text{ح})}{\text{ب}} + \text{ج}$$

ماينطبق على الجيب ينطبق على البقية.

أمثلة.

١) $\int \text{حتا}(٣ - ٢\text{س})\,\text{د س}$

$= \frac{\text{حا}(٣ - ٢\text{س})}{-٢} + \text{ج}$

٢) $\int ٦\,\text{قا}\frac{١}{٢}\text{س ظا}\frac{١}{٢}\text{س}\,\text{د س}$

$= ٦ \times ٢\,\text{قا}\frac{١}{٢}\text{س} + \text{ج}$

٣) $\int ٤\,\text{قتا}^{٢}(١ - \text{س})\,\text{د س}$

$= -٤\,\frac{\text{ظتا}(١ - \text{س})}{-١} + \text{ج}$

٤) $\int \text{قا}(٢\text{س} - ١)\,\text{ظا}(١ - ٢\text{س})\,\text{د س}$

$\int \text{قا}(٢\text{س} - ١)\,\text{ظا}(٢\text{س} - ١)\,\text{د س}$

$-\int \text{قا}(٢\text{س} - ١)\,\text{ظا}(٢\text{س} - ١)\,\text{د س}$

$= -\frac{\text{قا}(٢\text{س} - ١)}{٢} + \text{ج}$

٥) $\int \text{ظا}^{٢}\text{س}\,\text{د س}$

$\int (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{د س} = \text{ظاس} - \text{س} + \text{ج}$

٦) $\int \text{حتاس ظاس}\,\text{د س}$.

$\int \text{حتاس} \times \frac{\text{حاس}}{\text{حتاس}}\,\text{د س} = -\text{حتاس} + \text{ج}$

٧) $\int \frac{٢}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س} \Leftarrow \int ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{د س}$

$= ٢\,\text{ظاس} + \text{ج}$

٨) $\int$ حأس دس $= \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ حتاس دس

$= \frac{1}{2}$ س $- \frac{1}{2} \frac{\text{حاس}}{\text{ج}} + \text{د}$

٩) $\int$ ٤ حتأس دس.

$\int$ ٤ $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ حتا٢س$)$ دس

$= ٢$س $+ ٢ \frac{\text{حا٢س}}{\text{ج}} + \text{د}$

١٠) $\int$ حأس + حتأس دس

$\int$ ١ دس $=$ س $+ \text{د}$

١١) $\int$ ٢ حاس حتاس دس

$\int$ حا٢س دس $= - \frac{\text{حتا٢س}}{\text{ج}} + \text{د}$

١٢) $\int$ ١٧ حا٣س حتا٤س دس

$\int \frac{17}{2}$ حا٤س دس $= - \frac{17}{2} \frac{\text{حتا٤س}}{\text{٤}} + \text{د}$

١٣) $\int$ حتأس $-$ جأس دس

$\int$ حتا٢س دس $= \frac{\text{حا٢س}}{\text{ج}} + \text{د}$

١٤) $\int$ قأس $-$ ظأس دس.

$\int$ ١ دس $=$ س $+ \text{د}$

١٥) $\int$ ظتأس دس

$\int$ حتأس $-$ ١ دس $= -$ ظتاس $-$ س $+ \text{د}$

١٦) $\int$ (حاس + حتاس)^{٢} دس

$\int$ ١ + حا٢س دس $=$ س $- \frac{\text{حتا٢س}}{\text{ج}} + \text{د}$

١٧) $\int \frac{\text{٤ جتا٢س}}{\text{حتا٢س}}$ دس $= \int$ ٤ جتا٢س دس

$= -$ ٤ جتا٢س $\frac{\text{حتا٢س}}{\text{ج}} + \text{د}$

١٨) $\int \frac{1}{\text{حتاس ظتاس}}$ دس

$\int$ قاس ظاس دس $=$ قاس $+ \text{د}$

١٩) $\int \frac{\text{جاس}}{\text{حتأس}}$ دس $= 0 \int$ ظاس قاس دس

$=$ قاس $+ \text{د}$

٢٠) $\int \frac{\text{س}^{٤} \text{حاس} + ٢ \text{حاس}}{\text{س}^{٤} + ٢}$ دس

$\int \frac{\text{حاس} (\text{س}^{٤} + ٢)}{\text{س}^{٤} + ٢}$ دس

$-$ حتاس $+ \text{د}$

١) $\int \frac{1}{1-\text{جتا}س}$ د س

في حالة $\frac{م}{1+\text{جا}س}$ بالمرافق $\frac{م}{1+\text{جتا}س}$

الحل

$\int \frac{1}{1-\text{جتا}س} \times \frac{1+\text{جتا}س}{1+\text{جتا}س}$ د س

$\int \frac{1+\text{جتا}س}{1-\text{جتا}^2س}$ د س $= \int \frac{1+\text{جتا}س}{\text{جا}^2س}$ د س

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2س}$ د س $+ \int \frac{\text{جتا}س}{\text{جا}^2س}$ د س

$= \int \text{قتا}^2س$ د س $+ \int \text{ظتا}س \text{قتا}س$ د س

$= -\text{ظتا}س - \text{قتا}س + ج$

٢) $\int \frac{1}{1+\text{جا}س}$ د س بالمرافق

$\int \frac{1}{1+\text{جا}س} \times \frac{1-\text{جا}س}{1-\text{جا}س}$ د س

$\int \frac{1-\text{جا}س}{1-\text{جا}^2س}$ د س

$\int \frac{1-\text{جا}س}{\text{جتا}^2س}$ د س

$\int \frac{1}{\text{جتا}^2س} - \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}^2س}$ د س

$\int \text{قا}^2س$ د س $- \int \text{ظا}س \text{قا}س$ د س

$\text{ظا}س - \text{قا}س + ج$

٣) $\int \frac{\text{جتا}^2س}{\text{جا}^3س \text{جتا}^3س}$ د س

الحل

$\int \frac{\text{جتا}^2س - \text{جا}^3س}{\text{جا}^3س \text{جتا}^3س}$ د س وزع

$\int \frac{1}{\text{جا}^3س} - \frac{1}{\text{جتا}^3س}$ د س

$\int \text{قتا}^3س$ د س $- \int \text{قا}^3س$ د س

$-\text{ظتا}س - \text{ظا}س + ج$

٤) $\int \frac{1}{\text{جا}^3س - \text{جا}^4س}$ د س

$\int \frac{1}{\text{جا}^3س(1-\text{جا}س)}$ د س عامل مشترك

$\int \frac{1}{\text{جا}^3س \text{جتا}^2س}$ د س.

$\text{جا}س \text{جتا}س = \frac{\text{جا}2س}{2}$

$\int \frac{1}{(\frac{\text{جا}2س}{2})^2}$ د س

$\int \frac{4}{\text{جا}^2 2س}$ د س

$\int 4 \text{قتا}^2 2س$ د س

$-4 \frac{\text{ظتا}2س}{2} + ج$

٥) $\int$ حا^{4}س ى س

$\int$ (حا^{2}س)^2 ى س

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ حتا ٢س$\right)^2$ ى س

$\int \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ حتا ٢س $+ \frac{1}{4}$ حتا^2 ٢س ى س

$\int \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ حتا ٢س $+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ حتا ٤س$\right)$ ى س

$\frac{1}{4}$ س $- \frac{1}{4}$ حا ٤س $+ \frac{1}{8}$ س $+ \frac{1}{32}$ حا ٨س $+$ ﺟ

$\frac{3}{8}$ س $- \frac{1}{4}$ حا ٤س $+ \frac{1}{32}$ حا ٨س $+$ ﺟ

٦) $\int$ حتا^4 ٢س ى س

$\int$ (حتا^2 ٢س)^2 ى س

$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ حتا ٤س$\right)^2$ ى س

$\int \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ حتا ٤س $+ \frac{1}{4}$ حتا^2 ٤س ى س

$\int \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ حتا ٤س $+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ حتا ٨س$\right)$ ى س

$\frac{1}{4}$ س $+ \frac{1}{8}$ حا ٤س $+ \frac{1}{8}$ س $+ \frac{1}{32}$ حا ٨س $+$ ﺟ

$\frac{3}{8}$ س $+ \frac{1}{8}$ حا ٤س $+ \frac{1}{32}$ حا ٨س $+$ ﺟ

٧) $\int$ حتا^{4}س $-$ حا^{4}س ى س. فرق بين مربعين

$\int$ (حتا^{2}س $-$ حا^{2}س) (حتا^{2}س $+$ حا^{2}س) ى س

$\int$ حتا ٢س $\times 1$ ى س

$\frac{\text{حا ٢س}}{2} +$ ﺟ

٨) $\int \frac{\text{حتا}^2 \text{س}}{\text{حتا س}}$ ى س

$\int \frac{\text{حتا س}(\text{س} + \text{ص})}{\text{حتا س}}$ ى س.

$\int \frac{\text{حتا س حتا ص} - \text{حا س حا ص}}{\text{حتا س}}$ ى س

$\int$ حتا ص $-$ حا س حا ص ى س

$\int$ حتا ص ى س $-$ $\int$ حا س ى س

حا ص $-$ س $+$ ﺟ

٢٩) ∫ حا٥س حا٣س دس

∫ ½ [حتا٢س − حتا٨س] دس

½ حا٢س / ٢ − ½ حا٨س / ٨ + جـ

¼ حا٢س − 1/16 حا٨س + جـ

٣٠) ∫ حتا٦س حتا٤س دس

∫ ½ [حتا١٠س + حتا٢س] دس

½ حا١٠س / ١٠ + ½ حا٢س / ٢ + جـ

1/20 حا١٠س + ¼ حا٢س + جـ

٣١) ∫ حا٤س حتا٨س دس

∫ ½ [جا−٤س + جا١٢س] دس

½ حتا−٤س / −٤ − ½ حتا١٢س / ١٢ + جـ

⅛ حتا−٤س − 1/24 حتا١٢س + جـ

⅛ حتا٤س − 1/24 حتا١٢س + جـ

حتا−هـ = حتاهـ

٣٢) ∫ (قاس + ظاس)٢ دس

∫ قا٢س + ٢ قاس ظاس + ظا٢س دس

∫ قا٢س + ٢ قاس ظاس + قا٢س − ١ دس

ظاس + ٢ قاس + ظاس − س + جـ

٢ ظاس + ٢ قاس − س + جـ

٣٣) ∫ ١ / (قاس − ١) دس بالمرافق أو قاس = ١/حتا

∫ ١/(قاس − ١) × (قاس + ١)/(قاس + ١) دس

∫ (قاس + ١)/(قا٢س − ١) دس

∫ (قاس + ١)/ظا٢س دس

∫ ١/(حتاس حا٢س/حتا٢س) + ١/ظا٢س دس

∫ حتا٢س/(حا٢س حتاس) + ظتا٢س دس

∫ حتاس/حا٢س + ظتا٢س دس

∫ ظتاس قتاس + قتا٢س − ١ دس

− قتاس − ظتاس − س + جـ

٢٤) $\int \frac{\text{حا}^2 س + \text{حتا}^2 س}{1 + \text{حتا} س}$ ء س

$\int \frac{1}{1 + \text{حتا} س}$ ء س ← بالمرافق ← مضاعفة

$\int \frac{1}{2\,\text{حتا}^2 س}$ ء س

$\frac{1}{2}\int$ قا^2 س ء س $= \frac{1}{2}$ ظا س $+$ جـ

٢٥) $\int \frac{\text{حا} س + \text{حتا}^2 س}{1 - \text{حا} س}$ ء س **

$\int \frac{\text{حا} س}{1 - \text{حا} س} + \frac{\text{حتا}^2 س}{1 + \text{حا} س}$ ء س

$\int \frac{\text{حا} س (1 + \text{حا} س)}{(1 - \text{حا} س)(1 + \text{حا} س)} + \frac{1 - \text{حا}^2 س}{1 + \text{حا} س}$ ء س

$\int \frac{\text{حا} س (1 + \text{حا} س)}{\text{حتا}^2 س} + \frac{(1 - \text{حا} س)(1 + \text{حا} س)}{1 + \text{حا} س}$ ء س

$\int \frac{\text{حا} س}{\text{حتا}^2 س} + \frac{\text{حا}^2 س}{\text{حتا}^2 س} + 1 - \text{حا} س$ ء س

$\int$ ظا س قا س $+$ ظا^2 س $+ 1 - \text{حا} س$ ء س

$\int$ ظا س قا س $+$ قا^2 س $- 1 + 1 - \text{حا} س$ ء س

قا س $+$ ظا س $+ \text{حتا} س + جـ$

٢٦) $\int \frac{1 - \text{حا} س}{\text{حا} س - \text{حتا} س}$ ء س

$\int \frac{(\text{حا} س - \text{حتا} س)^2}{\text{حا} س - \text{حتا} س}$ ء س

$\int \text{حا} س - \text{حتا} س$ ء س

$- \text{حتا} س - \text{حا} س + جـ$

٢٧) $\int \frac{\text{حا} س}{1 - \text{حا} س}$ ء س . مرافق

حلول حتى ٢٥

٢٨) $\int \frac{1 - \text{حا}^2 س}{\text{حا}^2 س\ \text{حتا}^2 س}$ ء س

$\int \frac{\text{حتا}^2 س}{(\text{حا} س)^2}$ ء س

$\int \frac{4\,\text{حتا}^2 س}{\text{حا}^2 س}$ ء س

$\int 4$ ظتا^2 س ء س

$\int 4$ (قتا^2 س $- 1$) ء س

4 (ظتا س $- س$) $+ جـ$

٢٩) $\int \frac{\text{ظا}^2 س - ٥}{١ - \text{جا}^2 س}$ دس

$\int \frac{\text{ظا}^2 س - ٥}{\text{ظا}^2 س}$ دس

$\int$ ظا^{2}س $-$ ٥ قا^{2}س دس

ظاس $-$ ٥ س $+$ جـ

Hw
٤٠) $\int \frac{\text{جا}^3 س}{\text{جاس}}$ دس

٤١) $\int$ جا^{3}س ظا^{4}س دس

$\int$ (جا^{3}س)^2 دس

$\int \frac{1}{4}$ جا^{2}٢س دس

$\int \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ جتا٤س) دس

$\frac{1}{8}$ س $- \frac{1}{8}$ جا٤س $+$ جـ

٤٢) $\int$ ظا^{5}س جا^{2}س دس

$\int \frac{\text{جا}^5 س}{\text{جتا}^5 س} \times$ ٢ جاس جتاس دس

$\int$ ٢ جا^{2}س دس

$\int$ ٢ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ جتا٢س) دس

س $-$ جا٢س$/$٢ $+$ جـ

التكامل المحدود

التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ المعرف في الفترة $[a,b]$ هو $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$

$= F(b) - F(a)$

حيث a : الحد السفلي

b : الحد العلوي

وبإيجاد قيمة التكامل نقول انه $f(x)$ قابل للتكامل في الفترة $[a,b]$

قواعد التكامل المحدود نفس قواعد التكامل غير المحدود باختلاف التعويض وحذف جـ

أمثلة

1) $\int_2^5 6x\,dx = 3x^2\Big]_2^5$

$= 6\times5^2 - 6\times2^2$

$= 150 - 24 = 126$

قاعدة $\int_a^b جـ\,dx = جـ(b-a)$ حيث a للتأكيد فقط.

2) $\int_{-3}^{1} 8x\,dx = 4x^2\Big]_{-3}^{1} = 8(1-9) = -64$

3) $\int_{0}^{4} \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big]_0^4 = \frac{1}{4}(16-0) = 4$

4) $\int_{2}^{m} 4x\,dx = 2x^2\Big]_2^m = 2(m^2-4)$

5) إذا كان $\int_2^a 6x\,dx = 42$ حيث a

$6(a^2-4) = 42 \div 6$

$a^2 - 4 = 7 \Leftarrow a^2 = 11$ $\boxed{a = 9}$

6) $\int_{a}^{1+a} 8x\,dx = 8$ حيث a

$8(1+a)^2 - a^2) = 8$

$8 = 8$ صحيحة دائماً

$\therefore a \in \mathbb{R}$

٧) $\int_1^3 س^2 \, دس = \frac{س^3}{3}\Big|_1^3$

$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

٨) $\int_1^2 س^3 \, دس = \frac{س^4}{4}\Big|_1^2$

$= \frac{(2)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

٩) $\int_1^8 \sqrt{س} \, دس = \int_1^8 س^{\frac{1}{2}} \, دس$

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}}\Big|_1^8$

$= \frac{2}{3}(\sqrt{8})^3 - (\sqrt{1})^3) = \frac{2}{3}(16-1)$

$= \frac{45}{3}$

١٠) $\int_1^1 (12س + 4) \, دس$

$12\frac{س^3}{3}\Big|_1^1 + 4س\Big|_1^1$

$6(1-0) + 4(1-0) = \boxed{10}$

١١) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جاس \, دس = -جتاس\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -(0 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

١٢) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} قا^2س ظاس \, دس$

$قا^2س\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(قا^2\frac{\pi}{4} - قا^2\frac{\pi}{8})$

$= \frac{1}{2}(2 - 1)$

١٣) $\int_1^2 (6س^2 + 8س + 4) \, دس$

$6\frac{س^3}{3}\Big|_1^2 + 8\frac{س^2}{2}\Big|_1^2 + 4س\Big|_1^2$

$2(8-1) + 4(4-1) + 4(2-1)$

$14 + 12 + 4 = 30$

١٤) $\int_0^1 (2س+1)^4 \, دس$

$\frac{(2س+1)^5}{5\times2}\Big|_0^1 = \frac{1}{10}|(2)^5 - (1)^5|$

$= \frac{1}{10}(243 - 1)$

$= \frac{242}{10}$

وزاري

⑮ اذا كان ن عدد صحيح موجب
فما جميع قيم ن التي تجعل

$\int_{-1}^{1} س^{ن} \, دس = 2\int_{0}^{1} س^{ن} \, دس$ صحيحه

الحل

$\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\Big|_{-1}^{1} = 2\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\Big|_{0}^{1}$

$\frac{(1)^{ن+1}}{ن+1} - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} = 2(\frac{(1)^{ن+1}}{ن+1} - 0)$

$1 - (-1)^{ن+1} = 2$

$(-1)^{ن+1} = -1$

∴ الاس $ن+1$ فردي

⟸ ن أي عدد زوجي

خصائص التكامل المحدود

1

(1) $\int_{م}^{م} هـ(س)\,دس = صفر$

(2) $\int_{م}^{ن} هـ(س)\,دس = -\int_{ن}^{م} هـ(س)\,دس$

أمثلة

① $\int_{3}^{3} هـ(س)\,دس$ = ؟ صفر

② $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} جا^٦ س\,دس$ = ؟ صفر

③ إذا كان $\int_{م}^{7} هـ(س)\,دس = صفر$ فإن م = ؟ ٧

④ إذا كان $\int_{1}^{م} ٦س\,دس = صفر$ فإن م = ؟

تكامل: $٦\frac{س^٢}{٢}\Big|_1^م = ٠$ ، $٣(م^٢ - ١) = ٠$ ، $م^٢ - ١ = ٠$ ، $م^٢ = ١$ ، $م = \pm ١$

⑤ إذا كان $\int_{1}^{٥} هـ(س)\,دس = \frac{٤}{٣}$ فإن $\int_{1}^{٥} هـ(س)\,دس$ = ؟ $\frac{-٤}{٣}$

2 الخاصية الخطية:

(1) $\int_{م}^{ن} ك\,هـ(س)\,دس = ك\int_{م}^{ن} هـ(س)\,دس$ حيث ك ثابت

(2) $\int_{م}^{ن} (هـ(س) \pm د(س))\,دس = \int_{م}^{ن} هـ(س)\,دس \pm \int_{م}^{ن} د(س)\,دس$

أمثلة

١) إذا كان $\int_{1}^{٤} ٨\,هـ(س)\,دس = ٣٢$

جد $\int_{1}^{٤} ٣\,هـ(س)\,دس$.

الحل: $٣\int_{1}^{٤} هـ(س)\,دس = ٣ \times ٤ = ١٢$

$\int_{1}^{٤} ٨\,هـ(س)\,دس = ٣٢$

$٨\int_{1}^{٤} هـ(س)\,دس = ٣٢$

$\int_{1}^{٤} هـ(س)\,دس = ٤$

٢) إذا كان $\int_{٢}^{٥} هـ(س)\,دس = ٤$ ، $\int_{٣}^{٥} د(س)\,دس = ٣$

جد $\int_{٢}^{٥} (٣\,هـ(س) - ٢\,د(س) + ٣س)\,دس$.

الحل: $٣\int_{٢}^{٥} هـ(س)\,دس - ٢\int_{٣}^{٥} د(س)\,دس + \int_{٢}^{٥} ٣س\,دس$

$= ٣ \times ٨ - ٢ \times ٩ + \frac{س^٢}{٢}\Big|_٢^٥$

$= ٢٤ + ١٨ + \frac{٢٥}{٢} - \frac{٤}{٢}$

$= ٦٣$

$\int_{٢}^{٥} هـ(س)\,دس = ٨$

$\int_{٣}^{٥} د(س)\,دس = ٩$

٣) إذا كان $\int_{1}^{4} 2\,د(س)\,دس = ٣$

فما قيمة $\int_{4}^{1} د(س)\,دس$.

الحل

$$\int_{4}^{1} د(س)\,دس = \frac{1}{4}\int_{1}^{4} د(س)\,دس$$

$$= -٦ \times \frac{1}{4} = \frac{-٦}{4}$$

$$\text{لكن } \int_{1}^{4} د(س)\,دس = ٢ \Leftarrow \int_{1}^{4} د(س)\,دس = ٦$$

٣) إذا كان $\int_{1}^{3} (٤ د(س) + ٧ د(س))\,دس = ١٩$

وكان $\int_{1}^{3} ٣ د(س)\,دس = ٩$

أحسب $\int_{3}^{1} ٥ د(س)\,دس$

$$\int_{1}^{3} ٤ د(س)\,دس + \int_{1}^{3} ٧ د(س)\,دس = ١٩$$

$$٤ \times ٣ + \int_{1}^{3} ٧ د(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{1}^{3} ٧ د(س)\,دس = ٧ \Leftarrow \int_{1}^{3} د(س)\,دس = ١ \times ٥$$

$$\int_{3}^{1} ٥ د(س)\,دس = -٥$$

$$\int_{1}^{3} ٥ د(س)\,دس = ٥$$

$$\int_{1}^{2} د(س)\,دس = ٩ \quad \int_{1}^{2} د(س)\,دس = ٣$$

٣ خاصية الإضافة

ألف

$$\int_{م}^{ب} د(س)\,دس = \int_{م}^{ح} د(س)\,دس + \int_{ح}^{ب} د(س)\,دس$$

ح ليس شرطاً أن تقع بين م ، ب

نستخدم هذه الخاصية في إيجاد تكامل اقترانات متعددة القواعد كالمطلق والصحيح

مثال

إذا كان $\int_{1}^{3} ٢ د(س)\,دس = ١٤$

$\int_{5}^{3} ٤ د(س)\,دس = ٣٢$

جد $\int_{5}^{1} د(س)\,دس$.

الحل

المطلوب = حاصل جمع تكاملين

$$\int_{5}^{1} د = \int_{5}^{3} د + \int_{3}^{1} د$$

$$= ٨ + -٧$$

$$= ١$$

$$\int_{1}^{2} ٢ د = ١٤ *$$

$$\int_{1}^{2} د = ٧$$

$$\int_{5}^{2} ٤ د = ٣٢ *$$

$$\int_{5}^{2} د = ٨$$

مثال

اذا كان $\int_1^2 \frac{1}{2}$ هـ(س) دس = ٣ ، $\int_2^4$ هـ(س) دس = ١

جد $\int_1^2$ ٣ هـ(س) دس.

الحل

$\int_1^2$ هـ = $\int_1^2$ هـ + $\int_2^4$ هـ

$\int_1^2 \frac{1}{2}$ هـ = ٣

$\int_1^2$ هـ = ٦

$\int_2^4$ هـ = ١ ×٢

$\int_1^2$ هـ = ٤ + ٦ = ١٠

$\int_1^2$ ٣ هـ(س) دس = ٣ × ١٠ = ٣٠

مثال

اذا كان $\int_2^5$ (٣ هـ(س) + ٢ ك(س)) دس = ٢٤

$\int_2^4$ ٢ هـ(س) دس = ١٤

جد $\int_2^4$ هـ(س) دس.

$\int_2^4$ ٣ هـ + $\int_2^4$ ٢ ك دس = ٢٤

٣ $\int_2^4$ هـ + س^2]$_2^4$ = ٢٤

٣ $\int_2^4$ هـ + ١٦ − ٤ = ٢٤

٣ $\int_2^4$ هـ = ١٢ ⟹ $\int_2^4$ هـ = ٤

٢ $\int_4^7$ هـ = ١٤ ⟹ $\int_4^7$ هـ = ٧

المطلوب $\int_2^7$ هـ = $\int_2^4$ هـ + $\int_4^7$ هـ

= ٧ + ٤ − = ٣

مثال

اذا كان $\int_1^5$ ٣ هـ(س) دس = ١٥ ، $\int_5^9$ ٤ هـ(س) دس = ١٦

جد $\int_2^9$ (٢ هـ(س) + ٣ ك(س)) دس.

الحل

$\int_2^5$ ٢ هـ = ١٠ ⟹ $\int_2^5$ هـ = ٥

$\int_5^9$ ٤ هـ = ١٦ ⟹ $\int_5^9$ هـ = ٤

٢ $\int_2^9$ هـ دس + ٣ $\int_2^9$ ك دس

٢ ($\int_2^5$ هـ + $\int_5^9$ هـ) + س^2]$_2^9$

٢ (٥ + ٤) + ٨١ − ٤

١٨ + ٧٧ = ٩٥

مثال

اذا كان $\int_1^2 \frac{1}{2}$ هـ = ٣

$\int_2^5$ هـ = ٦

$\int_2^5 \frac{1}{4}$ هـ = ١ ×٤

$\int_1^5$ هـ = ٤

$\int_1^2$ هـ = $\int_1^5$ هـ + $\int_5^2$ هـ

= ٤ − ٦ = −٢ ×٢

$\int_1^2$ هـ = −١٠

$\int_1^2$ ٣ هـ(س) دس = ٣ × −١٠ = −٣٠

مثال

اجد قيمة $\int_2^4$ (٢ك(س) + ٥) + $\int_4^5$ (٢ك(س) + ٥) دس.

$\int_2^4$ (٢ك(س) + ٥) دس + $\int_4^5$ (٢ك(س) + ٥) دس

= $\int_2^5$ (٢ك(س) + ٥) دس

= س^2]$_2^5$ + ٥س]$_2^5$

= ١٢٥ − ٨ + ٢٥ − ١٠

= ١١٧ + ١٥ = ١٣٢

مثال
لتكن $هـ(س) = \begin{cases} ٢س ، & ١ \le س < ٣ \\ ٦ ، & ٣ \le س < ٦ \end{cases}$

جد
① $\int_{١}^{٢} هـ(س)\,د س = \int_{١}^{٢} ٢س\,د س$
$= س^{٢}|_{١}$
$= ٩ - ١ = ٨$

② $\int_{٣}^{٦} هـ(س)\,د س = \int_{٣}^{٦} ٦\,د س$
$= ٦(٦-٣) = ١٨$

③ $\int_{١}^{٥} هـ(س)\,د س$
$\int_{١}^{٥} هـ = \int_{١}^{٣} هـ + \int_{٣}^{٥} هـ$
$= \int_{١}^{٣} ٢س\,د س + \int_{٣}^{٥} ٦\,د س$
$= س^{٢}|_{١}^{٣} + ٦(٥-٣)$
$= ٩ - ١ + ١٢ = ١٧$

مثال / احسب كل مما يلي

① $\int_{١}^{٥} |س - ٤|\,د س$

نقسم للتعريف

$\int_{١}^{٥} |س-٤|\,د س = \int_{١}^{٤} -(س-٤)\,د س + \int_{٤}^{٥} (س-٤)\,د س$
$= -\frac{س^{٢}}{٢}|_{١}^{٤} + \frac{س^{٢}}{٢}|_{٤}^{٥}$

② $\int_{-٣}^{٢} |س^{٢} - ٩|\,د س$

$س^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

$\int_{-٣}^{٢} |س^{٢} - ٩|\,د س = \int_{-٣}^{-١} س^{٢} - ٩\,د س + \int_{-١}^{٢} ٩ - س^{٢}\,د س$

③ $\int_{١}^{٤} س\,|س - ٦|\,د س$

$س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$\int_{١}^{٤} س(٦-س)\,د س + \int_{٣}^{٤} س(س-٦)\,د س$
$\int_{١}^{٣} ٦س - س^{٢}\,د س + \int_{٣}^{٤} س^{٢} - ٦س\,د س$

مثال اكتب كل مما يلي على صورة تكامل منفرد

① $\int_{2}^{9} هـ(س)\,دس + \int_{9}^{12} هـ(س)\,دس$

$\Leftarrow \int_{2}^{12} هـ(س)\,دس$

② $\int_{2}^{9} هـ(س)\,دس - \int_{5}^{9} هـ(س)\,دس$

$\Leftarrow \int_{2}^{9} هـ(س)\,دس + \int_{9}^{5} هـ(س)\,دس$

$\Leftarrow \int_{5}^{9} هـ(س)\,دس$

③ $\int_{م}^{ن} هـ(س)\,دس - \int_{م}^{ل} هـ(س)\,دس$

$\Leftarrow \int_{م}^{ل} هـ + \int_{ل}^{ن} هـ = \int_{م}^{ن} هـ$

④ اذا كان $\int_{م}^{ن} هـ(س)\,دس - \int_{3}^{5} هـ(س)\,دس = \int_{9}^{3} هـ(س)\,دس$

حيث م < ن

الحل $\int_{م}^{ن} هـ = \int_{9}^{3} هـ + \int_{3}^{5} هـ$

$\int_{م}^{ن} هـ = \int_{9}^{5} هـ$

$\Leftarrow$ م = 9

ن = 5

⑤ اذا كان $ع = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} قتاس\,دس$ ، $ل = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} ظتاس\,دس$

حيث ع + ل

الحل $ع + ل = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} قتاس\,دس + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} ظتاس\,دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} قتاس - ظتاس\,دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,دس$

$= 1(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

$= \frac{\pi}{4}$

اسئلة إضافية

① اذا كان $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 3$

جد $\int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{1} f(x)\,dx$

الحل $\int_{1}^{2} f + \int_{2}^{1} f = 2\int_{1}^{2} f$

$= 2 \times 3 = 6$ ← الخواص مباشر

② اذا كان $L'(x) = f(x)$

$f'(x) = g(x)$

فأي العبارات التالية صحيحة

1) $L'(x) + g(x) = f(x) + c$

2) $L(x) + g(x) = f(x) + c$

3) $f(x) + g(x) = L'(x) + c$

4) $L(x) - f(x) = c$

③ اذا كان

1) $\int_{-1}^{2} 2b\,dx = -30$ جد b

$2b(2-(-1)) = -30$

$4b - 2b^2 = -30$

$2b^2 - 4b - 30 = 0$

$b^2 - 2b - 15 = 0 \Leftarrow (b+3)(b-5) = 0$

$b = -3, b = 5$

2) اذا كان $\int_{0}^{1} x(1-x)\,dx =$ صفر

جد c

$\int_{0}^{c} x - x^2\,dx = 0$

$\frac{x^2}{2}\Big|_0^c - \frac{x^3}{3}\Big|_0^c = 0$

$\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{3}c^3 = 0$ ×6

$3c^2 - 2c^3 = 0$

$c^2(3-2c) = 0$

$c = 0$ او $c = \frac{3}{2}$

3) $\int_{1}^{2} (2x-5)\,dx = 10$ جد b

$x^2\Big|_1^b - 5x\Big|_1^b = 10$

$b^2 - 1 - 5b + 5 = 10$

$b^2 - 5b - 6 = 0$

$(b-6)(b+1) = 0$

$b = 6$, $b = -1$

4) اذا كان $\int_{-1}^{3} (3x^2 - 2x + 3)\,dx = -20$

جد c

$x^3\Big|_{-1}^{3} - x^2\Big|_{-1}^{3} + 3x\Big|_{-1}^{3} = -20$

$27 + 1 - 9 - 1 + 9 + 3 - 3c = -20$

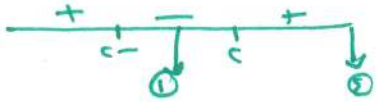
$3c = 48$

$c = 16$

$c = \pm 4$

③ $\int_1^4 \frac{|س^2-3|}{س-2}$ ص

$س^2-3=0 \Leftarrow س=\pm\sqrt{3}$



$\int_1^2 \frac{(س-1)(س+2)}{(س-2)}$ ص $+\int_2^4 \frac{(س-1)(س+2)}{(س-2)}$ ص

$-\frac{1}{2}|س^2-س-2|_1^2 + \frac{1}{2}|س^2-س-2|_2^4$

$-3+2-\frac{1}{2}(3-1)+\frac{1}{2}(16-3)+8-3$

$-2-\frac{1}{2}+6+3$

$\frac{13}{2}=\frac{1}{2}-\frac{16}{2}$

⑤ $\int_1^4 \sqrt{س^2-3س+3}$ ص

$=\int_1^4 \sqrt{(س-2)^2}$ ص $=\int_1^4 |س-2|$ ص

$\int_1^2 -س+2$ ص $+\int_2^4 س-2$ ص

$2(2-1)-\frac{1}{2}|س^2|_1^2+\frac{1}{2}|س^2|_2^4-2(4-2)$

$2-\frac{1}{2}(4-1)+\frac{1}{2}(16-4)-4$

$2-\frac{3}{2}+6-4$

$\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-4$

⑥ إذا كان $\int_1^4 |2س-6|$ ص $=8$

حيث ح ثابت ح >1

الحل

نجد الصفر

$2س-6=0 \Leftarrow س=3$

نفرض أن ح $=3$

$\int_1^3 6-2س$ ص

إذا كان التكامل $=8 \Leftarrow$ ح $=3$

إذا كان التكامل $>8 \Leftarrow$ ح <3

إذا كان التكامل $<8 \Leftarrow$ ح >3

$6(2-1)-|س^2|_1^2$

$12-(9-1)$

$12-8=4$

ح $>3 \Leftarrow$

$\int_1^3 6-2س$ ص $+\int_3^ح 2س-6$ ص $=8$

$4+2س^2|_3^ح - 6س|_3^ح = 8$

$4+ح^2-9-6ح+18=8$

$ح^2-6ح+5=0$

$(ح-5)(ح-1)=0$

ح $=5$ ✓

ح $=1$ ✗ لأن ح >3

تكامل اقتران أكبر عدد صحيح
((خطي))

① $\int_{1}^{8} [\frac{1}{3}س + 5]$ ﺩس

لصحيح التعريف
إذا كان معامل س موجب نقوص لحد الأقل
وتأخذ صحيحه وتكامله

إذا كان معامل س سالب نقوص لحد الأعلى

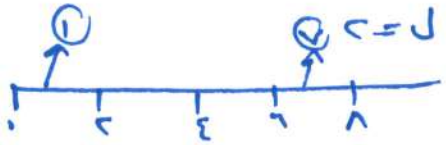
ل = ٣

$= \int_{1}^{3} ٥$ ﺩس $+ \int_{3}^{6} ٦$ ﺩس $+ \int_{6}^{8} ٧$ ﺩس

$= ١٠ + ١٨ + ١٤ = ٤٢$

② $\int_{1}^{7} [٨ - \frac{1}{2}س]$ ﺩس

ل = ٢

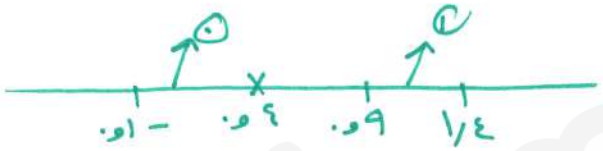


$\int_{1}^{2} ٧$ ﺩس $+ \int_{2}^{4} ٦$ ﺩس $+ \int_{4}^{6} ٥$ ﺩس $+ \int_{6}^{7} ٤$ ﺩس

$= ٧ + ١٢ + ١٠ + ٤ = ٣٣$

③ $\int_{1}^{0.9} [$ ﺱ٢ $- ٨$ و$]$ ﺩس

لصحيح التعريف
ل = $\frac{1}{2}$
نبدأ التقسيم عند صفر الأقرب له
ﺱ٢ $- ٨$ و$= ٠ \Leftarrow$ س $= ٤$ و



$\int_{1}^{0.4}$ ﺩس $+ \int_{0.4}^{0.9}$ ﺩس $+ \int_{0.9}^{1}$ ﺩس

-٤ و$+$ صفر $+$ ١ و $= -٣$ و

④ واجب إذا كان $\int_{1}^{ح} [\frac{1}{3}ﺱ + ٢]$ ﺩس $= ١٧$

حيث ح عدد صحيح < ١٧

ح $= ٧$

مثال
دون اجراء التكامل
اثبت ان $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$
محصورة بين العددين صفر ، ٢

حسب طريقة لاسبان وله
① طريقة القيم العظمى
② طريقة البناء

القيم العظمى
لتكن $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $x \in [-1,1]$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = 0$
البسط = 0
$-x = 0$
$x = 0$

المقام = 0
$\sqrt{1-x^2} = 0$
$1-x^2 = 0$
$x = \pm 1$

للاقتران عظمى عندما $x = 0$ وقيمتها $f(0) = 1$
للاقترانان صغرى عندما $x = -1$ وقيمتها $f(-1) = 0$
$x = 1$ $f(1) = 0$

اي ان $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1$ على $[-1,1]$

حسب المقارنة
$\int_{-1}^{1} 0 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \le \int_{-1}^{1} 1$

$0 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \le 2$ ✱

ملاحظات
① $-p \le x \le p$ بالتربيع
$0 \le x^2 \le p^2$
② $c \le x \le d$ بالتربيع
$0 \le x^2 \le 16$

طريقة البناء
$-1 \le x \le 1$ على $[-1,1]$
بتربيع المتباينة
$0 \le x^2 \le 1$
$-1 \le -x^2 \le 0$
$0 \le 1-x^2 \le 1$
اي ان $0 \le 1-x^2$ باضافة 1
$0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1$ بأخذ الجذر التربيعي
$0 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \le \int_{-1}^{1} 1$
حسب المقارنة
$\int_{-1}^{1} 0 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \le \int_{-1}^{1} 1$
$0 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \le 2$ ✱

مثال
دون حساب التكامل
بين انه
$\frac{\pi}{5} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3\sin x + 2}\, dx \leq \frac{\pi}{2}$

طريقة البناء
$-1 \leq \sin x \leq 1$ لما $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$
ربع
$0 \leq \sin x \leq 1$ ×3
$0 \leq 3\sin x \leq 3$
$2 \leq 3\sin x + 2 \leq 5$ بالعكس
$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3\sin x + 2} \leq \frac{1}{2}$
حسب المقارنة
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{5}\, dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3\sin x + 2}\, dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx$
$\frac{\pi}{5} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3\sin x + 2}\, dx \leq \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{5} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{3\sin x + 2}\, dx \leq \frac{\pi}{2}$ ⇐

مثال
اذا علمت انه
$m \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}}\, dx \leq M$
حيث m, M دون حساب تكامل
المقدار $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}}\, dx$.

طريقة البناء
$1 \leq x \leq 3$ لما $x \in [1,3]$
$1 \leq x^2 \leq 9$ ×2
$8 \leq x^2 + 7 \leq 16$
$\sqrt{8} \leq \sqrt{x^2 + 7} \leq 5$
$3 \leq \sqrt{x^2 + 7} \leq 5$ بالعكس
$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}} \geq \frac{1}{5}$
حسب المقارنة
$\int_{1}^{3} \frac{1}{5}\, dx \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}}\, dx \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{3}\, dx$
$\frac{4}{5} \leq \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 7}}\, dx \leq \frac{4}{3}$.

//

مثال
اذا علمت انه
$م = \int \frac{س}{1+س^2}$ د له

جد اصغر قيمة ممكنة للثابت ل
واكبر قيمة ممكنة للثابت م
دون حساب $\int \frac{س}{1+س^2}$ ود.

الحل
طريقة البسط للمقام ومقام كلاً لوحده
البسط $0 \le س \le 1$ على $[1,0]$
المقام $0 \le س \le 1$ لـ $س^2$
$0 \le س^2 \le 1$
$1 \le 1+س^2 \le 2$
اقسم البسط على المقام
$0 \le \frac{س}{1+س^2} \le \frac{1}{2}$
حسب المقارنة
$\int_0^1 0 \, ود \le \int_0^1 \frac{س}{1+س^2} \, ود \le \int_0^1 \frac{1}{2} \, ود$
$0 \le \int_0^1 \frac{س}{1+س^2} \, ود \le \frac{1}{2}$

مثال
دون ايجاد التكامل اثبت ان
$\int_0^1 س \, ود \le \int_0^1 س^2 \, ود$.

الحل
اذا اثبتنا ان $س \le س^2$ على $[1,0]$
تم
نظرحهما مع بعض
$س - س^2 = 0$ وتسمى الاشارة
$س(1-س) = 0$
اما $س = 0$ او $س = 1$

لاحظ انه
$س - س^2 \le 0$ على $[1,0]$
$\Leftarrow س \le س^2$
حسب المقارنة
$\int_0^1 س \, ود \le \int_0^1 س^2 \, ود$
وهو المطلوب

٤ خاصية المقارنة / مهم جدًا.

النص

اذا كان $هـ(س) \geq و(س)$ على $[أ، ب]$

فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس \geq \int_{أ}^{ب} و(س)\,دس$.

نتائج :-

① اذا كان $هـ(س)$ موجب ≥ 0 على $[أ، ب]$

فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس \geq$ صفر

② اذا كان $هـ(س)$ سالب ≤ 0 على $[أ، ب]$

فإن $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس \leq$ صفر

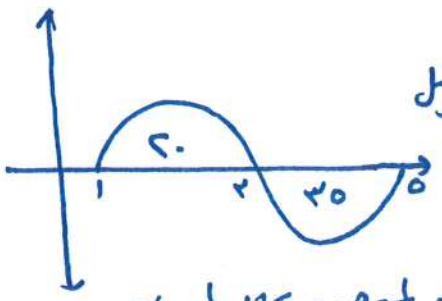
ملاحظة

* التكامل = المساحة

* المنحنى المرسوم فوق محور السينات تكامله +

= = اكتب = = تكامله سالب

مثال



الشكل المجاور يمثل منحنى $هـ(س)$ على $[١، ٥]$

اذا كان العدد الموضوع يمثل المساحه

حيث

① $\int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس$

$= \int_{١}^{٢}$ فوق السينات $+ \int_{٢}^{٥}$ تحت السينات

$= ٢٠ + (-٣٥) = \boxed{-١٥}$

② المساحه بالقترة $[١، ٥]$.

المساحه $= ٢٠ + ٣٥ = \boxed{٥٥}$

مثال

اذا كان $هـ(س) \leq ٦$ على $[١، ٥]$

فما اكبر أو أصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس$

او حدد القيمة العظمى او الصغرى للمقدار

∵ $هـ(س) \leq ٦$ حسب المقارنة

$\int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس \leq \int_{١}^{٥} ٦\,دس$

$\int_{١}^{٥} هـ(س)\,دس \leq ٢٤$

∴ اصغر قيمة (القيمة الصغرى) $= ٢٤$

اكبر قيمة (القيمة العظمى) ∞

مثال

اذا كان $f(x) \leq 5$ على $[2, 9]$

جدا اكبر او اصغر قيمة للمقدار

$$\int_2^9 (4 - 3f(x))\,dx$$

الحل

$\because f(x) \leq 5$ على $[2, 9]$

بالضرب $\times -3$

$$-3f(x) \geq -15$$

بالاضافة (4)

$$4 - 3f(x) \geq -11$$

حسب المقارنة

$$\int_2^9 (4 - 3f(x))\,dx \geq \int_2^9 -11\,dx$$

$$\int_2^9 (4 - 3f(x))\,dx \geq -77$$

اكبر قيمة $= -77$

اقل قيمة $= -\infty$

مثال

اذا كان $2 \leq f(x) \leq 9$ على $[1, 4]$

وكان $n \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq m$

جد m, n

$$n = \int_1^4 2\,dx = 6$$

$$m = \int_1^4 9\,dx = 27$$

أو

$$2 \leq f(x) \leq 9$$

$$\int_1^4 2 \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq \int_1^4 9\,dx$$

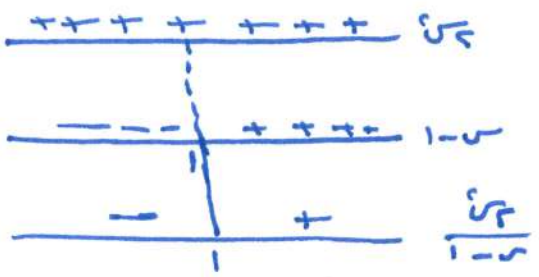
$$6 \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq 27$$

مثال

دون اجراء التكامل اوجد

هل إشارة $\int_1^2 \frac{x^2}{x-1}\,dx$.

لدرس اشارة $\frac{x^2}{x-1}$ ثم حفظ الاشارة



لاحظ ان $\frac{x^2}{x-1} > 0$ على $[1, 2]$

$\therefore$ حسب المقارنة

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x-1}\,dx > 0$$ اي موجب

مثال

دون اجراء التكامل

بين ان $\int_0^{\pi/2} 1 + \sin x\,dx \geq 0$

$\because -1 \leq \sin x \leq 1$ على $[0, \frac{\pi}{2}]$

بالاضافة 1

$$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

$\therefore$ حسب المقارنة

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} 1 + \sin x\,dx \leq \pi$$

اي ان $\int_0^{\pi/2} 1 + \sin x\,dx \geq 0$ موجب

مثال

دون حساب التكامل بين أن

$$\int_{-2}^{0} (x^2+4)\,dx \le \int_{-2}^{0} 3x\,dx$$

الحل

نطرحهما ونبسط

$x^2+4-3x=0$

$x^2-3x+4=0$

$\Delta = 9-4\times1\times4$

$= -7$ سالب

$\therefore$ لا يحلل

لنفس الإشارة معامل x^2

$\therefore x^2+4-3x \ge 0$ لكل $x \in [-2,0]$

$\therefore x^2+4 \ge 3x$

حسب المقارنة

$$\int_{-2}^{0} (x^2+4)\,dx \ge \int_{-2}^{0} 3x\,dx$$

#

2011

مثال

جد أقل قيمة للتكامل أو المقدار

$$\int_{-4}^{-1} (x^2+1)\,dx$$

طريقة الاستبدال

$-4 \le x \le -1$ لكل $x \in [-4,-1]$

نرفع الطرفين مع (الإشارة) تقلب الإشارة

$1 \le x^2 \le 16$ $+1$

$2 \le x^2+1 \le 17$

حسب المقارنة

$$\int_{-4}^{-1} 2\,dx \le \int_{-4}^{-1} (x^2+1)\,dx \le \int_{-4}^{-1} 17\,dx$$

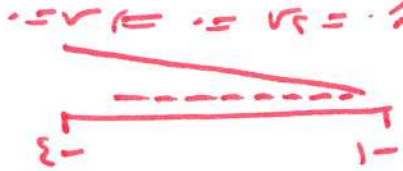
$$6 \le \int_{-4}^{-1} (x^2+1)\,dx \le 51$$

$\therefore$ أقل قيمة للمقدار تساوي (6)

حل آخر

$f(x) = x^2+1$

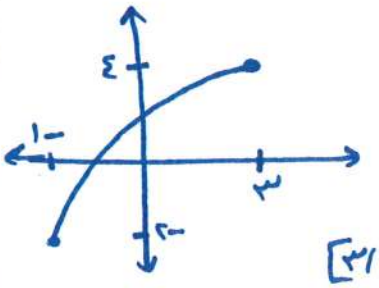
$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$



للاقتران صفر عند $x=-1$ قيمتها $f(-1)=2$

$\therefore$ أقل قيمة للتكامل $= \int_{-4}^{-1} 2\,dx = 6$

مثال



الشكل المجاور
يمثل منحنى
$هـ(س)$ معرّف على $[-١، ٣]$

جد أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٣} (٥ - ٣هـ(س)) دس$.

الحل

نلاحظ أن

$-٢ \leq هـ(س) \leq ٤$ الضرب

بالمقدار $\times -٣$

$٦ \geq -٣هـ(س) \geq -١٢$

بإضافة ٥

$١١ \geq ٥ - ٣هـ(س) \geq -٧$

أي أن $-٧ \leq ٥ - ٣هـ(س) \leq ١١$

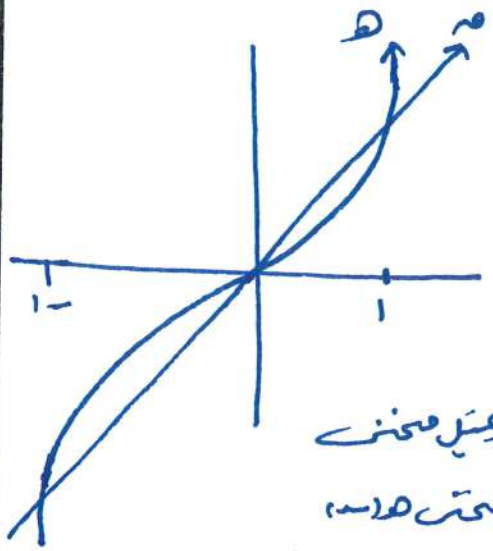
حسب المقارنة

$\int_{-١}^{٣} -٧ دس \leq \int_{-١}^{٣} (٥ - ٣هـ(س)) دس \leq \int_{-١}^{٣} ١١ دس$

$-٢٨ \leq \int_{-١}^{٣} (٥ - ٣هـ(س)) دس \leq ٤٤$

∴ أكبر قيمة = (٤٤)

مثال



الشكل المجاور يمثل منحنى
$هـ(س)$ ومنحنى $د(س)$

حاول بين متى يتحقق التكامل التالي:

① $\int_{-١}^{١} هـ(س) دس \geq \int_{-١}^{١} د(س) دس$

لاحظ أن $هـ \geq د$ على $[-١، ١]$

$\Rightarrow \int_{-١}^{١} هـ \geq \int_{-١}^{١} د$

② $\int_{-١}^{١} هـ(س) دس \leq \int_{-١}^{١} د(س) دس$

لاحظ أن $د \geq هـ$ على $[-١، ١]$

$\Rightarrow \int_{-١}^{١} د \geq \int_{-١}^{١} هـ$

مثال/ صـ٣

اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين
يمثلان على الترتيب ميل المستقيم للاقتران هـ(س)

وكان $\int_{1}^{3} (م(س) - هـ(س))\, دس = 12$

$\int_{1}^{4} 3 م(س)\, دس + \int_{4}^{4} 2 هـ(س)\, دس$

الحل

$= \int_{4}^{4} 3 م(س)\, دس - \int_{4}^{4} 2 هـ(س)\, دس$

$= \int_{4}^{4} 3 (م(س) - هـ(س))\, دس$

$= \int_{4}^{4} 3 جـ\, دس$

$= 3 \int_{4}^{4} جـ\, دس$

$= 3 [جـ س]_{4}^{4}$

$= 3 (16 - 0)$

$= 48$

مثال

اذا كان م$_1$(س) ، م$_2$(س) اقترانين يمثلان على الترتيب ميل المستقيم للاقتران هـ(س) المتصل على ح

وكان

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتا س\, م_1(س)\, دس + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} جتا س\, م_2(س)\, دس$

يساوي $2 + \pi$

اجب $\int_{1}^{0} م_1(س) - م_2(س)\, دس$.

الحل

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} جتا س\, م_1(س)\, دس - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} جتا س\, م_2(س)\, دس = 2 + \pi$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} جتا س (م_1 - م_2)\, دس = 2 + \pi$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} هـ \cdot جتا س\, دس = 2 + \pi$

$هـ \times \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} جتا 2س\, دس = 2 + \pi$

$هـ \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{2} \left. \frac{جا 2س}{2} \right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} \right) = 2 + \pi$

$هـ \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}(1 - 0) \right) = 2 + \pi$

$هـ \left(\frac{\pi + 2}{8} \right) = 2 + \pi$

$هـ = 8$

$= \int_{1}^{0} م_1 - م_2\, دس = \int_{1}^{0} هـ\, دس = \int_{1}^{0} 8\, دس$

$= (32)$

الاقتران اللوغاريتمي
المشتقة والتكامل

الاقتران اللوغاريتمي هو $ه_{(س)} = ص = لو_{ه} س$
حيث $س > 0$ ، $ه$ العدد النيبري
$ه \approx 2.72$

خواص اللوغاريتم

① $لو_{ه} أ ب = لو_{ه} أ + لو_{ه} ب$

② $لو_{ه} \frac{أ}{ب} = لو_{ه} أ - لو_{ه} ب$

③ $لو_{ه} أ^{ن} = ن \, لو_{ه} أ$

وتذكر أن $(لو_{ه} أ)^{ن} \neq ن \, لو_{ه} أ$

④ $لو_{ه} 1 = صفر$ ⑤ $لو_{ه} ه = 1$

قاعدة التحويل من لوغاريتم الى اسس والعكس

$لو_{أ} ب = حـ \iff ب = أ^{حـ}$

① $لو_{5} 125 = 3 \iff 5^{3} = 125$

② $3^{4} = 81 \iff لو_{3} 81 = 4$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي

نظرية

اذا كان $ه_{(س)} = لو_{ه} س$ فان

$ه'_{(س)} = \frac{1}{س}$ حيث $س > 0$

نتيجة

اذا كان $ه_{(س)} = لو_{ه} م_{(س)}$ فان

$ه'_{(س)} = \frac{م'_{(س)}}{م_{(س)}}$

$= \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$

مثال

جد المشتقة لكل مما يلي

1- $ص = لو_{ه} (س^{2} + 2س + 1)$

$ص' = \frac{2س + 2}{س^{2} + 2س + 1}$

2- $ه_{(س)} = لو_{ه} جا 2س$

$ه'_{(س)} = \frac{2 جتا 2س}{جا 2س}$

$= 2 ظتا 2س$

٣- $\text{مد}(س) = \log_{هـ} \frac{1}{س}$

$\therefore \text{مد}(س) = \log_{هـ} 1 - \log_{هـ} س$

$\text{مَ}(س) = 0 - \frac{1}{س} = -\frac{1}{س}$

٤- $ص = \log_{هـ} (س^2+1)^5$

$\therefore ص = 5 \log_{هـ} (س^2+1)$

$ص' = 5 \times \frac{2س}{س^2+1} = \frac{10س}{س^2+1}$

٥- $ص = \log_{هـ} جا^2 س \, ظا^3 س$

$\therefore ص = \log_{هـ} جا^2 س + \log_{هـ} ظا^3 س$

$ص' = \frac{2جتا س}{جا س} + \frac{3 ق^2 س}{ظا^3 س}$

٦- $ص = \log_{هـ} \sqrt[3]{جا س + جتا س}$

$\therefore ص = \frac{1}{3} \log_{هـ} (جا س + جتا س)$

$ص' = \frac{1}{3} \cdot \frac{جتا س - جا س}{جا س + جتا س}$

٧- $ص = \log_{هـ} \frac{جا س}{س}$

$\therefore ص = \log_{هـ} جا س - \log_{هـ} س$

$ص' = \frac{جتا س}{جا س} - \frac{1}{س}$

$ص = \log_{هـ} (س^2+1)$ حيث $ص'$

$ص' = \frac{2}{س^2+1}$

$ص'' = \frac{-2 \times 2س}{(س^2+1)^2}$

٨- $\text{مد}(س) = س^3 \log_{هـ} ظا س$

$\text{مَ}(س) = س^3 \frac{ظا س \, ظا س}{ظا س} + \log_{هـ} ظا س \times 3س^2$

$= س^3 ظا س + 3س^2 \log_{هـ} ظا س$

٩- $\text{مد}(س) = 12 \log_{هـ} س^5$

$\text{مَ}(س) = 12 \times \frac{5}{س^5} = \frac{60}{س^5} = \frac{12}{س^5}$

١٠- $ص = \log_{هـ} 3$

$ص' = صفر$

١١- $\text{مد}(س) = (\log_{هـ} (س^2+1))^5$ اشياه

$\text{مَ}(س) = 5 (\log_{هـ} (س^2+1))^4 \left(\frac{2س}{س^2+1}\right)$

١٢- $\text{مد}(س) = هـ^{\log_{هـ} س}$

$\text{مَ}(س) = \frac{1}{س} هـ^{\log_{هـ} س}$

١٣- $\text{مد}(س) = \log_{هـ} (س^2+1)$

$\therefore \text{مد}(س) = 5 \log_{هـ} جا س - \log_{هـ} (س^2+1)$

$\text{مَ}(س) = 5 \times \frac{جتا س}{جا س} - \frac{2س}{س^2+1}$

١٤- $هـ(س) = لو_{هـ} |س|$

$هـ(س) = \begin{cases} لو_{هـ} س & ، س > 0 \\ لو_{هـ}(-س) & ، س < 0 \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{1}{س} & ، س > 0 \\ \frac{1}{-س} \times -1 = \frac{1}{س} & ، س < 0 \end{cases}$

$\therefore هـ'(س) = \frac{1}{س}$

١٥- $هـ(س) = لو_{هـ} |س^٢ - ٤|$

$هـ'(س) = \frac{٢س}{س^٢ - ٤}$

١٦- اذا كان $هـ(س) = لو_{هـ} \frac{س + \sqrt{س^٢ + ١}}{\sqrt{س^٢ + ١} - س}$

اثبت ان $هـ'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١}}$

الحل

$هـ(س) = لو_{هـ} \frac{\frac{س + \sqrt{س^٢ + ١}}{\sqrt{س^٢ + ١}}}{\frac{\sqrt{س^٢ + ١} - س}{\sqrt{س^٢ + ١}}}$ لو على كسر

$= \frac{١ + \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}}{١ - \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ١}}}$

$= \frac{\sqrt{س^٢ + ١} + س}{\sqrt{س^٢ + ١} - س}$

$هـ'(س) = \frac{\frac{\sqrt{س^٢ + ١} - س}{\sqrt{س^٢ + ١}} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ١} - \frac{س^٢}{\sqrt{س^٢ + ١}}}{\sqrt{س^٢ + ١} - س}}{\frac{\sqrt{س^٢ + ١} + س}{\sqrt{س^٢ + ١}} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ١} + \frac{س^٢}{\sqrt{س^٢ + ١}}}{\sqrt{س^٢ + ١} + س}}$

$= \frac{\frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١}}}{\frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١}}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س^٢ + ١}}$ ✻

١٧- اذا كان

$هـ(س) = لو_{هـ} (اقاس + ظاس)$ ، $هـ'(س) = ب س + ج$

اثبت ان

$هـ'(س) = ٣س + قاس$.

الحل

نشتق الطرفين

$هـ''(س) = \frac{قاس ظاس + قا^٢س}{قاس + ظاس} + ٣$

$هـ'(س) = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{قاس + ظاس} + ٣س$

$هـ'(س) = قاس + ٣س$ ✻

١٨- بين انه $م(س) = لو_{هـ} هاس$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $هـ(س) = ظتاس$.

① $هـ(س) = ظتاس$ معكوس كم فيالة

② $م(س) = \frac{ظاس}{هاس} = ظتاس$.

$\therefore م(س)$ معكوس لمشتقة $هـ(س)$

تكامل الاقتران اللوغاريتمي

نظرية $\int \frac{1}{س} \, د س = \log_{هـ} |س| + ج$

$\int س^{ن} \, د س$

تنبيه (1)

$\int \frac{م}{ن س + و} \, د س = \frac{م}{ن} \log_{هـ} |ن س + و| + ج$

الإشارات على درس التكامل بالتعويض

نفرض $ص = ن س + و$

$د س = \frac{د ص}{ب}$

$\int \frac{م}{ص} \frac{د ص}{ب}$

$= \frac{م}{ن} \log_{هـ} |ص| + ج$

$= \frac{م}{ن} \log_{هـ} |ن س + و| + ج$

أمثلة

1- $\int \frac{3}{٤ + ٢س} \, د س$

$= \frac{3}{2} \log_{هـ} |٤ + ٢س| + ج$

2- $\int \frac{٦}{٥ - ٢س} \, د س$

$= -\frac{٦}{٥} \log_{هـ} |٥ - ٢س| + ج$

3- $\int \frac{د س}{٤ س + ١}$

$= \frac{1}{4} \log_{هـ} |٤س + ١| + ج$

4- $\int_{1}^{2} \frac{3}{٥ - ٢س} \, د س$

$= \frac{3}{2} \left[\log_{هـ} |٥ - ٢س| \right]_{1}^{2}$

$= \frac{3}{2} (\log_{هـ} ١ - \log_{هـ} ٣) = -\frac{3}{2} \log_{هـ} ٣$

5- $\int (٢س + ٣)^{-1} \, د س$

$= \frac{1}{2} \log_{هـ} |٢س + ٣| + ج$

تتمة رقم (٢)

$$\int \frac{\text{مقدار}}{\text{مقدار}}\,\text{د}س = \ln|\text{مقدار}| + \text{ج}$$

الإثبات على درس التكامل بالتعويض

نفرض ص = مقدار

$$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{\text{مقدار}}$$

$$\int \frac{\text{مقدار}}{ص}\cdot\frac{\text{د}ص}{\text{مقدار}}$$

$$\int \frac{1}{ص}\,\text{د}ص = \ln|ص| + \text{ج}$$

$$= \ln|\text{مقدار}| + \text{ج}$$

أمثلة

١- $\int \frac{\text{مقدار}'}{\text{مقدار}}\,\text{د}س$

$$\int \frac{3س^2 + 5}{س^3 + 5س + 7}\,\text{د}س$$

$$= \ln|س^3 + 5س + 7| + \text{ج}$$

٢- $\int \frac{4س + 8}{س^2 + 4س + 5}\,\text{د}س$

$$\int \frac{2(2س + 4)}{س^2 + 4س + 5}\,\text{د}س$$

$$= 2\ln|س^2 + 4س + 5| + \text{ج}$$

٣- $\int \frac{س^2}{س^3 + 3}\,\text{د}س$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3س^2}{س^3 + 3}\,\text{د}س$$

$$\frac{1}{3}\ln|س^3 + 3| + \text{ج}$$

٤- $\int \frac{5 - س}{س^2 + 4}\,\text{د}س$

$$\frac{5}{2}\int \frac{2 - س}{س^2 + 4}\,\text{د}س$$

$$\frac{5}{2}\ln|س^2 + 4| + \text{ج}$$

٥- $\int ظا س\,\text{د}س$

$$\int \frac{جا س}{جتا س}\,\text{د}س = -\int \frac{-جا س}{جتا س}\,\text{د}س$$

$$= -\ln|جتا س| + \text{ج}$$

٦- $\int ظتا س\,\text{د}س$

$$\int \frac{جتا س}{جا س}\,\text{د}س = \ln|جا س| + \text{ج}$$

٧- $\int \frac{\text{ظتا}^4 س}{\text{حتا}^4 س}\, د س$

$\int \frac{\text{حتا}^4 س}{\text{حا}^4 س}\, د س$

$\frac{1}{4}\int \frac{4\,\text{حتا}^4 س}{\text{حا}^4 س}\, د س = \frac{1}{4}\,\text{لو}_{هـ}\,|\text{حا}^4 س| + ج$

٨- $\frac{5}{2}\int \text{ظتا}^{\frac{5}{2}} س\, \text{قا}^2 س\, د س$

$\frac{5}{2}\int \frac{\text{حتا}^{\frac{5}{2}} س}{\text{حا}^{\frac{5}{2}} س}\, د س$

$\frac{5}{2}\int \frac{3\,\text{حتا}^2 س\, د س}{\text{حا}^{\frac{5}{2}} س} = \frac{5}{2}\,\text{لو}_{هـ}\,|\text{حا}^2 س| + ج$

٩- $\int \frac{\text{حتا}س - \text{جا}س}{\text{جا}س + \text{حتا}س + 1}\, د س$ قيمة

$= \text{لو}_{هـ}\,|\text{جا}س + \text{حتا}س + 1| + ج$

١٠- $\int \frac{\text{حا}س}{1 + \text{حا}س}\, د س$

$\int \frac{2\,\text{جا}س\,\text{حتا}س}{1 + \text{حا}س}\, د س$

$= \text{لو}_{هـ}\,|1 + \text{حا}س| + ج$

١١- $\int \frac{\text{قا}س}{3 + \text{ظا}س}\, د س$

$= \text{لو}_{هـ}\,|3 + \text{ظا}س| + ج$

١٢- $\int \frac{1 + \text{ظا}س}{1 - \text{ظا}س}\, د س$ صفا تقه

$\int \text{ظا}\left(\frac{\pi}{4} + س\right)\, د س$

$\int \frac{\text{حا}\left(\frac{\pi}{4} + س\right)}{\text{حتا}\left(\frac{\pi}{4} + س\right)}\, د س = -\,\text{لو}_{هـ}\,\left|\text{حتا}\left(\frac{\pi}{4} + س\right)\right| + ج$

١٣- $\int \text{قا}س\, د س$ شاذ

$\int \frac{\text{قا}س(\text{قا}س + \text{ظا}س)}{\text{قا}س + \text{ظا}س}\, د س$

$= \text{لو}_{هـ}\,|\text{قا}س + \text{ظا}س| + ج$

١٤- $\int \text{قتا}س\, د س$

$\int \frac{\text{قتا}س(\text{قتا}س - \text{ظتا}س)}{\text{قتا}س - \text{ظتا}س}\, د س$

$= \text{لو}_{هـ}\,|\text{قتا}س - \text{ظتا}س| + ج$

واجب

١٥- $\int \frac{1}{1 + \text{ظا}س}\, د س$ ، $س = 0$

الاقتران الاسي

هو ص = م(س) = $هـ^{س}$

من قوانين الاسس

- بالضرب نجمع
- بالقسمة نطرح
- بالرفع نضرب

مشتقة الاقتران الاسي

نظرية

اذا كان ص = $هـ^{س}$ فان

$\frac{د ص}{د س} = هـ^{س}$

الاثبات

نأخذ اللوغاريتم للطرفين

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{س}$

$لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} هـ$

$لو_{هـ} ص = س$

$\frac{1}{ص} \frac{د ص}{د س} = 1$

$\frac{د ص}{د س} = ص$

$= هـ^{س}$

نتيجة:

اذا كان ص = $هـ^{م(س)}$ فان

$\frac{د ص}{د س} = م'(س) . هـ^{م(س)}$

= مشتقة الاس × الاقتران الاسي نفسه

أمثلة

جد المشتقة لكل مما يلي

١- ص = $هـ^{س^2 + 3س + 5}$

$ص' = (2س + 3) هـ^{س^2 + 3س + 5}$

٢- ص = $هـ^{جاس}$

$ص' = جتاس \cdot هـ^{جاس}$

٣- ص = $هـ^{\frac{1}{س}}$

$ص' = \frac{-1}{س^2} هـ^{\frac{1}{س}}$

٤- ص = $هـ^{3}$

ص' = صفر

٥- ص = $هـ^{س} + س هـ$

$ص' = هـ^{س} + هـ \cdot س هـ^{-1}$

٦- ص = $\sqrt{هـ^{2س+4}}$

$ص = (هـ^{2س+4})^{\frac{1}{2}} = هـ^{س+2}$

$ص' = هـ^{س+2}$

٧- $ص = \frac{٦}{هـ^{٥+س}}$

$ص = ٦ هـ^{-س-٥}$

$ص' = -١٢ هـ^{-س-٥}$

٨- $ص = هـ^{س+١} \times هـ^{س^٢+٢}$

$ص = هـ^{س^٢+س+٢}$

$ص' = (٢س+١) هـ^{س^٢+س+٣}$

٩- $ص = \frac{هـ^{٢س+٥}}{هـ^{س+٢}}$

$ص = هـ^{٢س+٢}$

$ص' = ٢ هـ^{٢س+٣}$

١٠- $ص = هـ^{\sqrt{س}}$

$ص' = \frac{١}{٢\sqrt{س}} هـ^{\sqrt{س}}$.

١١- $ص = س^٢ جاس$

$ص' = س^٢ \times جتاس + هـ^{جاس} \times ٢س$.

١٢ $ص = \sqrt[٥]{هـ^{٢٠س+١٠}}$

$ص = هـ^{٤س+٢}$

$ص' = ٤ هـ^{٤س+٢}$

١٣- اذا كان $ص = هـ^{م س}$

وكان $ص''' - ٥ص' + ٦ص = ٠$ حيث م

$ص' = م هـ^{م س}$

$ص'' = م^٢ هـ^{م س}$

$م^٣ هـ^{م س} - ٥م هـ^{م س} + ٦ هـ^{م س} = ٠$

$هـ^{م س}(م^٣ - ٥م + ٦) = ٠$

$هـ^{م س}(م-٢)(م-٣) = ٠$

$هـ^{م س} = ٠$ مستحيل

$م = ٣ ، م = ٢$

قاعدة

اذا كان $ص = م^{هـ(س)}$ فان

$\frac{ص'}{ص} = هـ'(س) لو_هـ م$. $م^{هـ(س)}$

الاثبات

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$لو_هـ ص = لو_هـ م^{هـ(س)}$

$لو_هـ ص = هـ(س) لو_هـ م$

$\frac{١}{ص} \frac{ص'}{ص'} = لو_هـ م . هـ'(س)$

$\frac{ص'}{ص} = لو_هـ م . هـ'(س) . ص$

$= لو_هـ م . هـ'(س) . م^{هـ(س)}$ *

١٤- اذا كان $ص = ٩^{س}$ جد $\frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٥ لو_{٩} . ٩^{س}$

او بأخذ اللوغاريتم للطرفين

١٥- $ص = ٧^{٣س}$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ لو_{٧} . ٧^{٣س}$

١٦- $ص = س^{س}$

بأخذ اللوغاريتم

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^{س}$

$لو_{هـ} ص = س لو_{هـ} س$

$\frac{١}{ص} \frac{د ص}{د س} = س \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times ١$

$\frac{د ص}{د س} = (س + لو_{هـ} س) . ص$

$= (س + لو_{هـ} س) س^{س}$

نتائج

① اذا كان $ص = هـ^{م(س)}$ فان

$ص = م(س)$

② اذا كان $ص = لو_{هـ}^{م(س)}$ فان

$ص = م(س)$

مثال اذا كان $ص = س^{ن}$ لو هـ جا س جد صَ

$ص = س^{ن} . جا^{ن} س$

$صَ = س^{ن} \times$ جتا $س \times جا^{ن} س + جا^{ن} س \times ن س^{ن-١}$

مثال اذا كان $ص = لو_{هـ}^{\frac{س^{٢}+١}{س}}$ جد صَ

$ص = \frac{س^{٢}+١}{س}$

$صَ = \frac{س(٢س) - (س^{٢}+١)١}{س^{٢}}$

مثال اذا كان $هـ^{ص} = س + ص$

اثبت ان $\frac{د ص}{د س} = \frac{صَ + س ص - ١}{١ - س ص - س^{٢}}$

الحل

$(س صَ + ص ١) هـ^{س ص} = ١ + صَ$

$س صَ هـ^{س ص} + ص هـ^{س ص} = ١ + صَ$

$صَ (س هـ^{س ص} - ١) = ١ - ص هـ^{س ص}$

$صَ = \frac{١ - ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص} - ١}$

$= \frac{١ - ص (س + ص)}{س (س + ص) - ١}$

$= \frac{١ - ص س - صَ^{٢}}{س^{٢} + س ص - ١}$

$= + ١ \frac{(صَ^{٢} + س ص - ١)}{(١ - س ص - صَ^{٢})}$ *

تكامل الاقتران الاسي

نظرية $\int هـ^{س} \, د س = هـ^{س} + ج$

نتيجة $\int هـ^{م س + ن} \, د س = \frac{1}{م} هـ^{م س + ن} + ج$

الاشتقاق على درس التفويض

نفرض $ص = م س + ب$

$د س = \frac{د ص}{م}$

$\int هـ^{ص} \frac{د ص}{م} = \frac{1}{م} \int هـ^{ص} \, د ص$

$= \frac{1}{م} هـ^{م س + ن} + ج$

أمثلة

١- $\int ١٢ هـ^{٤ س + ١} \, د س = ١٢ \frac{1}{٤} هـ^{٤ س + ١} + ج$

٢- $\int ٣ هـ^{١ - ٦ س} \, د س = ٣ \frac{1}{-٦} هـ^{١ - ٦ س} + ج$

٣- $\int \frac{٤}{هـ^{٤ س + ١}} \, د س$

$= \int ٤ هـ^{-٤ س - ١} \, د س = ٤ \frac{1}{-٤} هـ^{-٤ س - ١} + ج$

٤- $\int هـ^{\sqrt{٩ س + ١٨}} \, د س$

$= \int هـ^{٩ س + ١٨)^{\frac{١}{٢}}} \, د س = \frac{هـ^{٩ س + ١٨)^{\frac{٣}{٢}}}}{\frac{٣}{٢} \times ٩} + ج$

٥- $\int هـ^{٤ س + ١} \cdot هـ^{٥ س + ٥} \, د س$

$= \int هـ^{٩ س + ٦} \, د س = \frac{1}{٩} هـ^{٩ س + ٦} + ج$

٦- $\int \frac{هـ^{٤ س + ٤}}{هـ^{١ - ٤ س}} \, د س$

$= \int هـ^{٤ س + ٣} \, د س = \frac{1}{٤} هـ^{٤ س + ٣} + ج$

٧- $\int هـ^{٢ س} \, د س = \frac{1}{٢} هـ^{٢ س} + ج$

٨- $\int هـ^{س} + س \, د س$

$= هـ^{س} + \frac{س^{هـ + ١}}{هـ + ١} + ج$

التكامل وتطبيقاته

9- $\int \frac{هـ^{س}+1}{هـ^{س}}\,دس$

$\int هـ^{س+1}\,دس = هـ^{س+1} + جـ$

10- $\int \frac{هـ^{2س}-1}{هـ^{س}+1}\,دس$

$\int \frac{(هـ^{س}+1)(هـ^{س}-1)}{هـ^{س}+1}\,دس = هـ^{س} - س + جـ$

11- $\int \frac{هـ^{3س}-8}{هـ^{2س}+2هـ^{س}+4}\,دس$

$\int \frac{(هـ^{س}-2)(هـ^{2س}+2هـ^{س}+4)}{هـ^{2س}+2هـ^{س}+4}$

$هـ^{س} - 2س + جـ$

12- $\int \sqrt{هـ^{س}}\,دس$

$\int (هـ^{س})^{\frac{1}{2}}\,دس = \int هـ^{\frac{1}{2}س}\,دس$

$= 2هـ^{\frac{1}{2}س} + جـ$

13- $\int \frac{هـ^{2س}}{هـ^{2س}+1}\,دس$

$\frac{1}{2}\int \frac{2هـ^{2س}}{هـ^{2س}+1}\,دس$

$\frac{1}{2}لو|هـ^{2س}+1| + جـ$

14- $\int هـ^{6س}\,دس$

$\int 6س\,دس = \frac{6س^{2}}{2} + جـ$

15- $\int هـ^{س^{2}}\,دس$.

$= \int هـ^{لو س^{4}}\,دس = \int س^{4}\,دس$

$= \frac{س^{5}}{5} + جـ$

16- $\int (1+هـ^{س})^{2}\,دس$.

$\int 1 + 2هـ^{س} + هـ^{2س}\,دس$

$س + 2هـ^{س} + \frac{هـ^{2س}}{2} + جـ$

17- اذا طا $\frac{س}{2} = \frac{1}{2}$ حيث $س \in (0, \frac{\pi}{2})$ فان $\int \frac{دس}{1+جتاس}$ يساوي

(واجب)

$هـ = هـ^{طاس} + 2لو|جتاس| + جـ$

$وطا\frac{س}{2} = \frac{1}{2} = هـ + 1$

حيث $س = \frac{\pi}{2}$

① دون حساب التكامل سيّ ان

$\pi 3 \geq \int_{\pi}^{\pi} (4 \sin^2 س + 3) ص \geq \pi 7$

② دون حساب التكامل سيّ ان

$18 \geq \int_{-2}^{2} س^3 + 3 ص \geq 114$

③ اذا كان

$ص = هـ^{\int_{\frac{\pi}{4}}^{س} \frac{1}{3 + \cos^2 س} ع}$

جد $\frac{د ص}{د س}$.

④ اذا كان $ص = هـ^{\ln(س + \sin س)}$

جد $\frac{د ص}{د س}$.

⑤ $\int \sqrt{(س^{3} - س^{-2})^{2} + 4}$ د س

⑥ $\int_{هـ}^{ط} \frac{1}{س - 1}$ د س

⑦ $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{2}{س} - \frac{3}{س})^{4}$ د س

⑧ اذا كان $\int_{ب}^{ن} [\frac{1}{2} س + 3]$ د س = ع
حيث ب > ح حيث ب

⑨ لذا فإن

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\text{جتا}(س) - س)\, دس = \left[\text{جا}(س) + \frac{س^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

لأن $\text{جتا}(س) - س$ دالة فردية

⑩ إذا فإن

$$\int_{-ك}^{ك} \text{جا}(س)\, دس = \int_{0}^{ك} \text{جا}(س)\, دس + \int_{-ك}^{0} \text{جا}(س)\, دس$$

حيث $\text{جا}(س)$ دالة زوجية

$$= 2\int_{0}^{ك} \text{جا}(س)\, دس$$

⑪ $م(س) = س - هـ^{س}$

فالمطلوب استنتاج الاقتران $م(س) = س - هـ^{س}$

وفإن

$$\int_{-2}^{2} (\text{جا}(س) + هـ^{س})\, دس = \frac{م}{هـ - 2}$$

$$م = 6(هـ - 2)$$

⑫ $م \leq هـ(س) \leq ن$

$$\int_{-1}^{2} (هـ(س) + 5)\, دس \leq 0$$

حيث $م = 1$، $ن$

$$-6 \leq$$

التكامل وتطبيقاته

الفصل الثاني

طرائق التكامل

اولاً: التكامل بالتعويض.

هو تكامل حاصل ضرب اقتران مقدارين لوحيد علاقة بين مشتقه احدهما والاخر

الصورة الاولى

$\int (\text{مقدار})(\text{مقدار عن حظ})^{\text{اس}}\, دس$.

طريقة الحل

١- نفرض ص = المقدار الموجود داخل القوس المرفوع لأس وبدون الأس

٢- نشتق الفرض $\frac{دص}{دس}$ = ---

ومنها نجد دس بدلالة دص

حيث $دس = \frac{دص}{\text{مشتقة الفرض}}$

٣- نعود للتكامل نعوض مكان المفروض ب ص ومكان دس ما يساويه مع ملاحظة اختفاء س نهائياً بالاختصار

وان لم تختفي نرجع للفرض لنفسها ثم تكامل عادي ونعوض للرجوع ص ما فرضنا.

واذا كان محدوداً نعوض الحد السفلي والعلوي لنجد الناتج

أمثلة

① $\int 3س^2 (س^3+1)^{٥} دس$ ← عن حظ / نعوض

(١) نفرض ص = $س^3+1$

(٢) نشتق $\frac{دص}{3س^2} = دس$

(٣) نعود للتكامل

$\int 3س^2 ص^{٥} \frac{دص}{3س^2}$

$\int ص^{٥} دص = \frac{ص^6}{6} + ج$

$= \frac{(س^3+1)^6}{6} + ج$

للدوائر

$\int (\text{قا}(س))^{ن} \cdot (\text{ظا}(س)) دس = \frac{(\text{قا}(س))^{ن+1}}{ن+1} + ج$

② $\int \frac{٤س+٢}{\sqrt{س^2+س+٤}} دس$

كلما التكامل كسر مقام ضرب اس اقل

$= \int (٤س+٢)(س^2+س+٤)^{-\frac{1}{2}} دس$ ← عن حظ / نعوض

١) $ص = س^2+س+٤$

٢) $دس = \frac{دص}{٢س+١}$

٣) $\int ٢(٢س+١) ص^{-\frac{1}{2}} \frac{دص}{(٢س+١)}$

$٢ \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + ج$

$٢ \times \frac{٢}{١} (س^2+س+٤)^{\frac{1}{2}} + ج$

$٣ \sqrt{(س^2+س+٤)^2} + ج$

(٣) $\int_{1}^{2} ٦س^{٣}(س^{٤}+١)^{٤}\,دس$

لـه عنـ حطـ / لقوصين

الحل

اسمـ الحدود

١) نفرض $ص = س^{٤}+١$

$س = ٠$	$ص = ١$
$س = ١$	$ص = ٢$

٢) $دص = ٤س^{٣}\,دس$

$\frac{دص}{٤} = س^{٣}\,دس$

لم تختفي س.

نأسه عن الفرض $س^{٤} = ص - ١$

$\int_{1}^{2} ٣(ص-١)ص^{٤}\,دص$

$\int_{1}^{2} ٣ص^{٥} - ٣ص^{٤}\,دص$

$\left[\frac{٣ص^{٦}}{٦}\right]_{١}^{٢} - \left[\frac{٣ص^{٥}}{٥}\right]_{١}^{٢}$

$\frac{٣}{٦}(٦٤-١) - \frac{٣}{٥}(٣٢-١)$

$\frac{١}{٢} \times ٦٣ - \frac{٣}{٥} \times ٣١$

$\frac{٦٣}{٢} - \frac{٩٣}{٥} = \frac{٣١٥ - ١٨٦}{١٠}$

$= \frac{١١٩}{١٠}$

وإذا لم نستنبل الحدود

$\left[\frac{٣ص^{٦}}{٦}\right]_{١}^{٠} - \left[\frac{٣ص^{٥}}{٥}\right]_{١}^{٠}$

نرجع ص ثم نعوض

$\left[\frac{٣}{٦}(س^{٤}+١)^{٦}\right]_{١}^{٠} - \left[\frac{٣}{٥}(س^{٤}+١)^{٥}\right]_{١}^{٠}$

$\frac{٣}{٦}(١-٦٤) - \frac{٣}{٥}(١-٣٢)$ *

(٤) $\int \frac{٦}{س^{٤}}\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٥}\,دس$

لـه عنـ حطـ / لقوصين

الحل

١) $ص = \frac{س+١}{س}$

$= ١ + \frac{١}{س}$

٢) $دس = \frac{دص}{-\frac{١}{س^{٢}}} = -س^{٢}\,دص$

$\int \frac{٦}{س^{٤}}(ص)^{٥} \times -س^{٢}\,دص$

$\int -٦ص^{٥}\,دص = -\frac{٦ص^{٦}}{٦} + ج$

$= -\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٦} + ج$

التكامل وتطبيقاته

⑤ $\int \sqrt[3]{س^5 - س^3}\, دس$

الحل

$\int \sqrt[3]{س^3 (س^2 - 1)}\, دس$ ← $س^2$ عامل مشترك

$\int س \sqrt[3]{س^2 - 1}\, دس$

$\int س (س^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\, دس$

← نعوض بطريقة التعويض

1) $ص = س^2 - 1$

2) $دس = \frac{دص}{2س}$

3) $\int س\, ص^{\frac{1}{3}} \frac{دص}{2س}$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}} + ج$

$\frac{3}{8} (س^2 - 1)^{\frac{4}{3}} + ج$

⑥ $\int \sqrt{س^4 - س^2}\, دس$

الحل

$\int \sqrt{س^2 (س^2 - 1)}\, دس$

$\int |س| \sqrt{س^2 - 1}\, دس$ ← نعوض بطريقة التعويض

نعيد تعريف المطلق اذا كان محدود

ونسهل ان لم يكن محدود

$\int س (س^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, دس$

1) $ص = س^2 - 1$

2) $دس = \frac{دص}{2س}$

3) $\int س\, ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{2س}$

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ج \Leftarrow \frac{1}{3} (س^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + ج$

⑦ $\int \frac{(س+1)^5}{س^7}\, دس$

الحل

$\int \frac{(س+1)^5}{س^2 \times س^5}$

$\int \frac{1}{س^2} \left(\frac{س+1}{س}\right)^5 دس$ ← نعوض بطريقة التعويض

نفرض $ص = \frac{س+1}{س} = 1 + \frac{1}{س}$

$دس = \frac{دص}{\frac{-1}{س^2}} = -س^2\, دص$

$\int \frac{1}{س^2} ص^5 \times -س^2\, دص$

$-\int ص^5\, دص$

$-\frac{ص^6}{6} + ج$

$-\frac{1}{6} \left(\frac{س+1}{س}\right)^6 + ج$

التكامل وتطبيقاته

⑧ $\int \frac{\sqrt{س^{٤}+س^{٥}}}{س^{٥}}\,د س$

ملاحظة في هذه الحالة نخرج $س^{٥}$ عامل مشترك وننشطب إذا وجدي علاقة بين مشتقة ما تحت الجذر والمقدار الخارجي نفرض ص = وإن لم يوجد نخرج $س^{٤}$ عامل مشترك وننشطب ... وهكذا حتى نحصل على مشتقة ما داخل الجذر لنهائي علاقة بالمقدار الخارجي

$\int \frac{\sqrt{س^{٤}(س^{٢}+١)}}{س^{٥}}\,د س$

$\int \frac{س^{٤}\sqrt{(س^{٢}+١)}}{س^{٥}}\,د س$ كامل المطلق

$\int \frac{١}{س}(س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}}\,د س$

$ص = س^{٢}+١$

$د ص = ٢س\,د س$

$د س = \frac{د ص}{٢س}$

$\int \frac{١}{س^{٣}}\,ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{٢}س^{-٢}\,د ص$

$-\frac{١}{٤}س^{-٢}ص^{\frac{٣}{٢}}+ج$

$-\frac{١}{٤}(س^{٢}+١)^{\frac{٣}{٢}}+ج$

$-\frac{١}{٤}(\frac{١}{س^{٢}}+١)^{\frac{٣}{٢}}+ج$

⑨ $\int \frac{\sqrt[٤]{٢س^{٤}+س^{٣}}}{س^{٢}}\,د س$

الفكرة نفس المثال السابق نخرج $س^{٤}$ أو $س^{٨}$ وهكذا..

$\int \frac{\sqrt[٤]{س^{٤}(٢+س^{-١})}}{س^{٣}}\,د س$

$\int \frac{|س|(٢+س^{-١})^{\frac{١}{٤}}}{س^{٣}}\,د س$ كامل المطلق

$\int \frac{١}{س^{٢}}(٢+س^{-١})^{\frac{١}{٤}}\,د س$

$ص = ٢+س^{-١}$

$د ص = -١س^{-٢}\,د س$

$د س = \frac{د ص}{-س^{-٢}} = -س^{٢}\,د ص$

$\int \frac{١}{س^{٢}}\,ص^{\frac{١}{٤}} \times -س^{٢}\,د ص$

$-\frac{٤}{٥}ص^{\frac{٥}{٤}}+ج$

$-\frac{٤}{٥}(٢+س^{-١})^{\frac{٥}{٤}}+ج$

الصورة القياسية

∫ (مقدار) جا (زاوية عبر خطية) دس

في هذه الحالة نفرض ص = الزاوية

أمثلة

① ∫ ١٢ س^٣ جا(س^٤ + ٥) دس

← مميز خطي / نفرض

١) ص = س^٤ + ٥

٢) دص / ٤س^٣ = دس

∫ ١٢ س^٣ جا ص × دص / ٤س^٣

∫ ٣ جا ص دص

= −٣ جتا ص + جـ

= −٣ جتا(س^٤ + ٥) + جـ

② ∫ ٤ / س^٤ ظا^٢(١/س + ١) دس

← مميز خطي / نفرض

١) ص = ١/س + ١

٢) دس = دص / −١/س^٢ = −س^٢ دص

∫ ٤/س^٤ ظا^٢ ص × −س^٢ دص

= −٤ ∫ ظا^٢ ص دص

= −٤ ظا ص + جـ

= −٤ ظا(١/س + ١) + جـ

③ ∫ جتا^٢ ٧س دس

← مميز خطي / نفرض

١) ص = ٧س

٢) دص / ٧ = دس

∫ جتا^٢ ص × دص / ٧

∫ ١/٧ (١/٢ + ١/٢ جتا ٢ص) دص

١/١٤ ص + ١/٢٨ جا ٢ص + جـ

١/١٤ ٧س + ١/٢٨ جا ١٤س + جـ

④ ∫ جتا ٧س / √(١ − س) دس

← مميز خطي / نفرض

١) ص = √(١ − س)

ص^٢ = ١ − س

٢) ٢ص دص = −دس

∫ جتا ص / ص × −٢ص دص

= −٢ ∫ جتا ص دص

= −٢ جا ص + جـ

= −٢ جا √(١ − س) + جـ

⑤ ∫ ٢ جا^٣ س ظا(جتا^٢ س) دس

← مميز خطي / نفرض

ص = جتا^٢ س

دص / −٢ جا س جتا س = دس

∫ ٢ جا^٣ س ظا ص × دص / −٢ جا س جتا س

= ∫ (١ − جتا^٢ س) ظا ص دص

= ∫ (ظا ص − ظا ص جتا^٢ س) دص

= ∫ (ظا ص − ظا ص جتا س جتا س) دص

= ∫ (ظا ص − جا ص جتا س) دص

= ∫ ظا ص دص − ∫ جا ص جتا س دص

= ∫ ظا ص دص − ∫ جا س دس

= ∫ جا ص / جتا ص دص + جتا س + جـ

= −∫ −جا ص / جتا ص دص + جتا س + جـ

= −لو |جتا ص| + جتا س + جـ

= −لو |جتا^٢ س| + جتا س + جـ

= −٢ لو |جتا س| + جتا س + جـ

التكامل وتطبيقاته

الصورة الثالثة

تكامل بسيطين مثلثيين مختلفين لهما نفس الزاوية

$\int$ جا^{أ}(س + ب) جتا^{أ}(س + ب) دس

في هذه الحالة نقارن بين مستقة احداهما والاخرى . ونفرض ص = لنسبة التي مستقتها موجودة خارجاً .

أمثلة

① $\int$ ٤ جا^{٣}س جتا س دس

مستقة نسبة	ص = جا س	ص = جتا س

$\int$ ١٢ جا^{٢}س د س = $-١٢ \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

كل منها مستقة لآخر افرض اي منها

ص = جا س

د ص = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$\int$ ٤ ص^{٣} $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$\int$ ٤ ص^{٣} + جـ

١٢ (جا س)^{٢} + جـ

② $\int$ ٤ جا^{٥}س جتا س دس

ص = جتا س

د ص = $\frac{\text{د ص}}{-\text{جا س}}$

$\int$ ٤ جا^{٥}س $\frac{\text{د ص}}{-\text{جا س}}$

$-\int$ ٤ ص^{٦} د ص

$-٤ \frac{\text{ص}^{٦}}{٦}$ + جـ

$-٤ (\text{جتا س})^{٦}$ + جـ

③ $\int_{\pi/4}^{0}$ ظا^{٣}س قا^{٢}س دس

الاستدلال

ص = ظا س

د ص = $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

س = ٠ ⇐ ص = ٠

س = $\frac{\pi}{4}$ ⇐ ص = ١

$\int$ ص^{٣} قا^{٢}س $\frac{\text{د ص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int$ ص^{٣} د ص

$\left[\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٤} - ٠ = \frac{١}{٤}$

التكامل وتطبيقاته

④ $\int ٤ \text{ظا}^{٢}س \text{قا}^{٢}س \, دس$

$ص = \text{ظا}^{٢}س$

$دس = \frac{دص}{\text{قا}^{٢}س}$

$\int ٤ ص^{٢} \text{قا}^{٢}س \frac{دص}{\text{قا}^{٢}س}$

$٤ \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ$

$\frac{٤}{٣} (\text{ظا}س)^{٣} + جـ$

⑤ $\int ٨ \text{ظا}^{٥}س \text{قا}^{٤}س \, دس$

$\int ٨ \text{ظا}^{٥}س \text{قا}^{٢}س \text{قا}^{٢}س \, دس$

$ص = \text{قا}س$

$دس = \frac{دص}{\text{قا}س \text{ظا}س}$

$\int ٨ \text{ظا}^{٥}س \text{قا}^{٢}س ص^{٢} \frac{دص}{\text{قا}س \text{ظا}س}$

$٨ \frac{ص^{٥}}{٥} + جـ$

$\frac{٨}{٥} \text{قا}^{٥}س + جـ$

⑥ $\int ١٢ \text{جا}^{٦}س \text{قا}^{٢}س \, دس$

في حاله قا، ظتا، ظا، ظتا
اذا لم يوجد علاقه تحول الى جا، جتا

$\int ١٢ \text{جا}^{٦}س \frac{١}{\text{جتا}^{٦}س} دس$

$\int ١٢ \text{جا}^{٦}س \text{جتا}^{-٦}س \, دس$

$ص = \text{جتا}س$

$دس = \frac{دص}{-\text{جا}س}$

$\int ١٢ \text{جا}^{٦}س ص^{-٦} \frac{دص}{-\text{جا}س}$

$\int -٦ ص^{-٦} دص$

$\frac{-٦ ص^{-٥}}{-٥} + جـ$

$\frac{٦}{٥} (\text{جتا}س)^{-٥} + جـ$

$\frac{٦}{٥} \times \frac{١}{\text{جتا}^{٥}س} + جـ$

$\frac{٦}{٥} \text{قا}^{٥}س + جـ$

$\int ١٢ \text{جا}^{٦}س \text{قا}^{٢}س \, دس$

$\int ١٢ \text{جا}^{٤}س \text{جا}^{٢}س \text{قا}^{٢}س \, دس$

$\int ١٢ \text{جا}^{٤}س \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} \frac{١}{\text{جتا}^{٢}س} دس$

$\int ١٢ \text{جا}^{٤}س \text{قا}^{٢}س \text{قا}^{٢}س \, دس$

$ص = \text{ظا}س$

$دس = \frac{دص}{\text{قا}^{٢}س}$

$\int ١٢ \text{جا}^{٤}س ص^{٢} \frac{دص}{\text{قا}^{٢}س}$

$\int ١٢ \text{جا}^{٤}س \text{جتا}^{-٤}س \, دس$

$ص = \text{جا}س$

$دس = \frac{دص}{\text{جتا}س}$

$\int ١٢ ص^{٤} \frac{دص}{\text{جتا}س} \text{جتا}^{-٤}س$

$\int ١٢ ص^{٤} \text{جتا}^{-٥}س \, دص$

$\frac{١٢ ص^{٥}}{٥} + جـ$

$\frac{١٢}{٥} \text{جا}^{٥}س + جـ$

⑦ $\int 3س^{2} ظا^{4}س قا^{2}س \, دس$.

كيف
- ان كان $ظا^{4}س$ يمثل مشتقة للمقدار
- تحتوي وكاملة بالاقواس ان كان لا يمثل مشتقة للمقدار

$ص = ظا^{4}س$

$دص = \frac{دص}{3س^{2} قا^{2}س}$

$\int 3س^{2} ص قا^{2}س \frac{دص}{3س^{2} قا^{2}س}$

$\int ص^{4} + ج$

$\frac{1}{5} ظا^{5}س + ج$

او بكاملة لتعويض مرتين

1) $ص = س^{2}$

2) $ع = ظاص$

⑧ $\int حا^{3}س قا^{4}س \, دس$

$\int حا^{3}س قا^{3}س قا^{1}س \, دس$

$\int حا^{3}س \times \frac{1}{حتا^{3}س} قا^{1}س \, دس$

$\int ظا^{3}س قا^{1}س \, دس$

$ص = ظاس$

$دس = \frac{دص}{قاس}$

$\int ص^{3} قاس \frac{دص}{قاس}$

$\int ص^{3} + ج \Leftarrow \frac{ظا^{4}س}{4} + ج$

⑨ $\int حا^{3}س \sqrt{1 + حتاس} \, دس$

$ص = 1 + حتاس$

$دس = \frac{دص}{-حاس} = \frac{دص}{-حاس حتاس}$

$\int حا^{2}س (ص)^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{-حاس}$

$-\int ص^{\frac{1}{2}} + ج$

$-\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ج$

$-\frac{2}{3} (1 + حتاس)^{\frac{3}{2}} + ج$

⑩ $\int ظا^{2}س\ ص\ س$

$\int ظا^{2}س\ ظا^{2}س\ ص\ س$

$\int ظا^{2}س\ (قا^{2}س - 1)\ ص\ س$

$\int ظا^{2}س\ قا^{2}س\ ص\ س - \int ظا^{2}س\ ص\ س$

بالتعويض — بالمتطابقة

ص = ظاس

ص س = $\frac{ص\ ص}{قا^{2}س}$

$\int ص\ قا^{2}س\ \frac{ص\ ص}{قا^{2}س} - \int (قا^{2}س - 1)\ ص\ س$

$\frac{ص^{2}}{2}$ − ظاس + س + ج

$\frac{ظا^{2}س}{2}$ − ظاس + س + ج

⑪ $\int حا^{2}س\ ص\ س$

الحل

$\int حاس\ حاس\ ص\ س$

$\int حاس\ (1 - حتا^{2}س)\ ص\ س$

$\int حاس\ ص\ س - \int حاس\ حتا^{2}س\ ص\ س$

مباشر — بالتعويض

ص = حتاس

ص س = $\frac{ص\ ص}{-حاس}$

$-حتاس - \int حاس\ ص^{2}\ \frac{ص\ ص}{-حاس}$

$-حتاس + \frac{ص^{3}}{3} + ج$

$-حتاس + \frac{حتا^{3}س}{3} + ج$

(١٢) $\int$ حا^{٢}س جتا^{٢}س دس

$\int$ (حاس جتاس)^{٢} دس

$\int$ $\left(\frac{\text{حا}٢\text{س}}{٢}\right)^{٢}$ دس

$\int \frac{١}{٨}$ حا^{٢}٢س دس

$\int \frac{١}{٨}$ حا٢س . حا٢س دس

$\int \frac{١}{٨}$ حا٢س (١ − جتا٢س) دس

$\int \frac{١}{٨}$ حا٢س دس − $\int \frac{١}{٨}$ حا٢س جتا٢س دس

مباشر — بتعويض

ص = جتا٢س

دس = $\frac{\text{دص}}{-٢\text{حا}٢\text{س}}$

$\frac{١}{٨}$ جتا٢س − $\int \frac{١}{٨}$ حاس ص^{٢} $\frac{\text{دص}}{-٢\text{حاس}}$

$\frac{-١}{١٦}$ جتا٢س + $\frac{١}{١٦}$ $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ

$\frac{-١}{١٦}$ جتا٢س + $\frac{١}{٤٨}$ جتا^{٣}٢س + جـ

(١٣) $\int$ حا^{٣}س جتا^{٢}س دس

دائماً حول المفرد الى مفرد × مزدوج

$\int$ حا^{٢}س . حاس جتا^{٢}س دس

وحول المزدوج الباقي الى جا

$\int$ حا^{٢}س جتاس (١ − حا^{٢}س) دس

$\int$ حا^{٢}س جتاس دس − $\int$ حا^{٤}س جتاس دس

ص = حاس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\int$ ص^{٢} جتاس $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$ − $\int$ ص^{٤} جتاس $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ − $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + جـ

$\frac{\text{حا}^{٣}\text{س}}{٣}$ − $\frac{\text{حا}^{٥}\text{س}}{٥}$ + جـ

التكامل وتطبيقاته

(١٤) $\int$ حا^{٣}س جتا س دس

$\int$ حا^{٢}س (حا س)^{٢} دس

$\int$ حا^{٢}س (١ − جتا^{٢}س) دس.

$\int$ حا^{٢}س (١ − ٢ جتا^{٢}س + جتا^{٤}س) دس

$\int$ حا^{٢}س دس − $\int$ ٢ حا^{٢}س جتا^{٢}س دس + $\int$ حا^{٢}س جتا^{٤}س دس

ص = حا س ، ص = جتا س ، ص = جتا س

دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{حا س}}$

− جتا س − $\int$ ٢ حا^{٢}س جتا^{٢}س $\frac{\text{دص}}{-\text{حا س}}$ + $\int$ حا^{٢}س ص^{٤} $\frac{\text{دص}}{-\text{حا س}}$

− جتا س + $\int$ ٢ ص^{٢} دص − $\int$ ص^{٤} دص

− جتا س + ٢ $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ − $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + ج

− جتا س + $\frac{٢}{٣}$ جتا^{٣}س − $\frac{١}{٥}$ جتا^{٥}س + ج

(١٥) $\int$ قا^{٢}س ظا^{٢}س دس.

$\int$ قا^{٢}س ظا س ظا س دس

$\int$ قا^{٢}س ظا س (قا^{٢}س − ١) دس

$\int$ قا^{٤}س ظا س دس − $\int$ قا^{٢}س ظا س دس

ص = قا س

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا س ظا س}}$

$\int$ ص^{٤} ~~حا س~~ $\frac{\text{دص}}{\text{قا س ~~ظا س~~}}$ − $\int$ ص^{٢} ~~ظا س~~ $\frac{\text{دص}}{\text{قا س ~~ظا س~~}}$

لكن قا س = ص

$\int$ ص^{٤} دص − $\int$ ص^{٢} دص

$\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ − $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + ج

$\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}$ − $\frac{\text{قا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + ج

الصورة الرابعة

في حالة هـ ، هـ ، هـ لمقدار (غير س)

نفرض ص = المقدار

أمثلة

① $\int_{1}^{2} 6س^2 هـ'(س^3+1)\,دس$ ← (غير س)

علمًا أن هـ(1) = 6 ، هـ(2) = 10

الاستبدال	
ص = $س^3+1$	س = 0 ⇐ ص = 1
$دس = \frac{دص}{3س^2}$	س = 1 ⇐ ص = 2

$\int_{1}^{2} 6س^2 هـ'(ص)\frac{دص}{3س^2}$

$2\int_{1}^{2} هـ'(ص)\,دص$

$2[هـ(ص)]_{1}^{2}$

$2(هـ(2) - هـ(1))$

$2(10-6) = \boxed{8}$

② اشتقاق

$\frac{1}{ب}\int_{ا}^{ب} هـ(ب-س)\,دس = \frac{1}{ب}\int_{ب}^{ا} هـ(ص)(-دص)$

الاستبدال	الأمين
س = 0 ⇐ ص = ب	ص = ب − س
س = 1 ⇐ ص = ب − 1	$دس = -دص$

$\frac{1}{ب}\int_{ب-1}^{ب} هـ(ص)\,دص$

وهو المطلوب

③ اشتقاق $\int_{0}^{1} س^م(1-س)^ن\,دس = \int_{0}^{1} (1-ص)^م ص^ن\,دص$

الأمين

الاستبدال	
س = 0 ⇐ ص = 1	ص = 1 − س
س = 1 ⇐ ص = 0	$دس = -دص$

$\int_{1}^{0} س^م ص^ن (-دص)$ لم تختفِ س

س = 1 − ص

$-\int_{1}^{0} (1-ص)^م ص^ن\,دص$

$= \int_{0}^{1} (1-ص)^م ص^ن\,دص$ #

① إذا كان $\int_{2}^{9} هـ(س)\,دس = 8$

أجد $\int_{9}^{3} \frac{هـ(\sqrt{س})}{\sqrt{س}}\,دس$.

$ص = \sqrt{س}$ | $س = 0 \leftarrow ص = 0$
$ص^2 = س$ | $س = 9 \leftarrow ص = 3$

$2ص\,دص = دس$

$\int_{3}^{3} \frac{هـ(ص)}{ص} \times 2ص\,دص$

$2 \times \int_{3}^{3} هـ(ص)\,دص$

$2 \times 8 = \boxed{16}$

* $\int \frac{1+ظا س}{1-ظا س} قا^2(\frac{\pi}{4}+س)\,دس$

$\frac{1+ظا س}{1-ظا س} = ظا(\frac{\pi}{4}+س)$

$\int ظا(\frac{\pi}{4}+س)\,قا^2(\frac{\pi}{4}+س)\,دس$

$ص = ظا(\frac{\pi}{4}+س)$

$دس = \frac{دص}{قا^2(\frac{\pi}{4}+س)}$

$\int ص\,قا^2(\frac{\pi}{4}+س) \times \frac{دص}{قا^2(\frac{\pi}{4}+س)}$

$\int ص\,دص = \frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{ظا^2(\frac{\pi}{4}+س)}{2} + جـ$

$$* \int \frac{\sqrt{\text{ظا}س}}{\text{حا}^2 س}\, دس$$

$ص = \sqrt{\text{ظا}س}$

$ص^2 = \text{ظا}س$

$2ص\, دص = \text{قا}^2 س\, دس$

$$\int \frac{2ص}{\text{قا}^2 س}\, دص = \int دس$$

$$\int \frac{ص}{\text{حا}س \text{جتا}س} \times \frac{2ص}{\text{قا}^2 س}\, دص$$

$$\int \frac{ص^2}{\text{حا}س \text{جتا}س} \times \text{جتا}^2 س\, دص$$

$$\int \frac{ص^2}{\text{حا}س} \times \text{جتا}س\, دص$$

$$\int ص^2 \text{ظتا}س\, دص$$

$$\int ص^2 \times \frac{1}{\text{ظا}س}\, دص$$

$$\int \frac{ص^2}{ص^2}\, دص$$

$$\int 1\, دص$$

$ص + ج$

$\sqrt{\text{ظا}س} + ج$.

$$* \int \frac{\text{جتا}^2 س}{\sqrt{\text{حا}س}}\, دس$$

$ص = \sqrt{\text{حا}س}$

$ص^2 = \text{حا}س$

$2ص\, دص = \text{جتا}س\, دس$

$$\frac{2ص}{\text{جتا}س}\, دص = دس$$

$$\int \frac{\text{جتا}^2 س}{ص} \times \frac{2ص}{\text{جتا}س}\, دص$$

$$\int 2(1 - \text{حا}^2 س)\, دص$$

$$\int 2(1 - ص^4)\, دص$$

$2ص - \frac{2ص^5}{5} + ج$

$2\sqrt{\text{حا}س} - \frac{2}{5}(\sqrt{\text{حا}س})^5 + ج$

$$* \int \sqrt{\frac{(1+س)^9}{س^{12}}}\, دس$$

$$\int \sqrt{\frac{(1+س)^9}{س^4 \, س^9}}\, دس$$

$$\int \frac{1}{س^{14}} \sqrt{(\frac{1+س}{س})^9}\, دس$$

$$\int \frac{1}{س^4} (\frac{1+س}{س})^{\frac{9}{2}}\, دس$$

$ص = \frac{1+س}{س}$

$ص = \frac{1}{س} + 1$

$دس = \frac{دص}{-\frac{1}{س^2}} = -س^2 \, دص$

$$\int \frac{1}{س^4} ص^{\frac{9}{2}} \times -س^2 \, دص$$

$$\int - ص^{\frac{9}{2}} \, دص$$

$$- \frac{2}{11} ص^{\frac{11}{2}} + د$$

$$-\frac{2}{11} (\frac{1+س}{س})^{\frac{11}{2}} + د$$

$$* \int \frac{(1-جتا ٢س)^3}{(1+جتا ٢س)^4}\, دس$$

$$\int \frac{(٢ جا^2 س)^3}{٤ (٢ جتا^2 س)^4}\, دس$$

$$\int \frac{٨ جا^6 س}{١٦ جتا^8 س}\, دس$$

$$* \int \frac{1}{2} ظا^6 س \, قا^2 س \, دس$$

$ص = ظا س$

$دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$$\int \frac{1}{2} ص^6 \, قا^2 س \, \frac{دص}{قا^2 س}$$

$$\frac{1}{2} \frac{ص^7}{7} + د$$

$$\frac{1}{14} (ظا س)^7 + د$$

التكامل وتطبيقاته

ورقة عمل

① $\int$ حاس جا٢س دس

② $\int$ ٣س قا٢ ٤س دس

③ $\int \frac{\text{ظا}^{\frac{1}{2}}\text{س}}{\text{جتا س}}$ دس

④ $\int$ حا٢س $\sqrt{1+\text{حا}^{2}\text{س}}$ دس

⑤ $\int \frac{\text{حا}^{2}\text{س}}{(1+\text{جتا س})^{2}}$ دس

⑥ $\int$ حاس جتا$^{\frac{1}{2}}$س دس

⑦ $\int \frac{1}{(\text{حاس}+\text{جتا س})^{2}}$ دس

⑧ $\int \left(\frac{1-\text{جتا ٢س}}{1+\text{جتا ٢س}}\right)^{2}$

⑨ $\int \frac{(1-\text{جتا ٣س})^{\frac{3}{2}}}{(1+\text{جتا ٣س})^{\frac{9}{2}}}$

⑩ $\int$ س^{3} (٤س^{2} − ٢)^{4} دس

⑪ $\int$ س^{6} (س − $\frac{1}{\text{س}}$)^{5} دس

⑫ $\int$ س^{8} ($\frac{2}{\text{س}^{3}}$ − $\frac{3}{\text{س}^{4}}$)^{4} دس

⑬ $\int$ س^{6} (س^{4} + $\frac{1}{\text{س}}$)^{4} دس

⑭ $\int$ س $\sqrt[3]{\frac{2}{\text{س}^{2}}+\frac{5}{\text{س}^{3}}}$ دس

⑮ $\int \frac{\text{س}^{4}}{(\text{س}+1)^{6}}$ دس

⑯ $\int$ س^{5} (٢ − $\frac{3}{\text{س}^{2}}$)^{5} دس

⑰ $\int \sqrt{(\text{س}^{3}-\frac{1}{\text{س}^{3}})^{2}+4}$ دس

⑱ $\int$ (٢س^{6} − ٣س)^{4} دس

⑲ $\int$ س^{7} ($\frac{4}{\text{س}^{3}}$ − $\frac{2}{\text{س}^{4}}$)^{3} دس

⑳ $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{1+\text{س}}-\sqrt{\text{س}}}$

ثانياً التكامل بالأجزاء

هو تكامل حاصل ضرب اقتران مقدارين للوصول عادة من أحدهما والآخر

الصور

① ∫ (مقدار) (مقدار - حتى) اس دس

② ∫ (مقدار) ما (زاوية حتى) دس

طريقة الحل :-

نفرض أحد المقادير الجبرية = هـ

وهو الأسهل للاشتقاق ونشتقه للايجاد دهـ

ونفرض ما تبقى من التكامل دهـ وتكامله للايجاد هـ ثم نطبق القانون

∫ هـ . دهـ = هـ × هـ - ∫ هـ . دهـ

∫ الأول × الثاني = الأول × تكامل الثاني - ∫ تكامل الثاني × مشتق الأول .

استنتاج القانون

(هـ . هـ)' = هـ . هـَ + هـ . هـَ

حيث هـَ = دهـ
هـَ = دهـ

أي أن

(هـ . هـ)' = هـ . دهـ + هـ . دهـ

⇐

هـ . دهـ = (هـ . هـ)' - هـ . دهـ

بأخذ التكامل للطرفين

∫ هـ . دهـ = ∫ (هـ . هـ)' - ∫ هـ . دهـ

⇐

∫ هـ . دهـ = هـ . هـ - ∫ هـ . دهـ ※

التكامل وتطبيقاته

أمثلة

① $\int 12س(2ص+1)^5 \, دس$

نضع حظ/ اجزاء

$ع = 12س$ ، $دع = 12 \, دس$

$دص = (2ص+1)^5 \, دس$ ، $ص = \frac{(2ص+1)^6}{12}$

$ت = 12س\frac{(2ص+1)^6}{12} - \int \frac{(2ص+1)^6}{12} \times 12 \, دس$

$= \frac{(2ص+1)^7}{14} - \int \frac{(2ص+1)^6}{12} \times 12 \, دس$

$= \frac{(2ص+1)^7}{14} - \int (2ص+1)^6 \, دس + ج$

② $\int \frac{2س+1}{(س-2)^5} \, دس$

$\int (2ص+1)(س-2)^{-5} \, دس$

نضع حظ/ اجزاء

$ع = 2ص+1$ ، $دع = 2 \, دس$

$دص = (س-2)^{-5} \, دس$ ، $ص = \frac{(س-2)^{-4}}{-4}$

$ت = (2ص+1)\frac{(س-2)^{-4}}{-4} - \int \frac{(س-2)^{-4}}{-4} \times 2 \, دس$

$= -\frac{1}{2}(2ص+1)(س-2)^{-4} + \int \frac{(س-2)^{-4}}{2} \, دس$

$= -\frac{1}{2}(2ص+1)(س-2)^{-4} - \frac{1}{6}(س-2)^{-3} + ج$

③ $\int 12س \, جا(1-2ص) \, دس$

نضع حظ/ اجزاء

$ع = 12س$ ، $دع = 12 \, دس$

$دص = جا(1-2ص) \, دس$ ، $ص = +\frac{جتا(1-2ص)}{2}$

$ت = 12س\frac{جتا(1-2ص)}{2} - \int \frac{جتا(1-2ص)}{2} \times 12 \, دس$

$= -6س \, جا(1-2ص) + ج$

④ $\int \frac{2س}{ص^2-2ص+1} \, دس$

$\int \frac{2ص}{(س-1)^2} \, دس = \int 2ص(س-1)^{-2} \, دس$

نضع حظ/ اجزاء

$ع = 2ص$ ، $دع = 2 \, دس$

$دص = (س-1)^{-2} \, دس$ ، $ص = \frac{(س-1)^{-1}}{-1}$

$ت = 2ص\frac{(س-1)^{-1}}{-1} + \int \frac{(س-1)^{-1}}{1} \times 2 \, دس$

$= -\frac{2ص}{س-1} + \int \frac{2}{س-1} \, دس$

$= -\frac{2ص}{س-1} + 2 \, لو|س-1| + ج$

⑤ $\int 6س^{4}(س^{5}+1)^{4}\,د س$ ← حطي/ اجباري مرتين / طريقة الجدول (المعربال)

نستخدم شرط $هـ$ = كثير حدود فقط

$هـ = 6س^{4}$		$د هـ = (س^{5}+1)^{4}\,د س$
$هـ' = 12س^{3}$	+	$هـ = \frac{(س^{5}+1)^{5}}{10}$
$هـ'' = 12$	−	$هـ = \frac{1}{10}\cdot\frac{(س^{5}+1)^{6}}{12}$
$هـ''' = صفر$	+	$هـ = \frac{1}{120}\cdot\frac{(س^{5}+1)^{7}}{14}$

$ت = 6س^{4}\frac{(س^{5}+1)^{5}}{10} - 12س^{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{(س^{5}+1)^{6}}{12} + 12\times\frac{1}{120}\cdot\frac{(س^{5}+1)^{7}}{14} + ث$

⑥ $\int 12س^{3}\,جا(س^{5}+1)\,د س$ ← حطي/ اجباري مرتين

$هـ = 12س^{3}$		$د هـ = جا(س^{5}+1)\,د س$
$هـ' = 24س$	+	$هـ = -\frac{جتا(س^{5}+1)}{5}$
$هـ'' = 24$	−	$هـ = -\frac{1}{5}\cdot\frac{جا(س^{5}+1)}{5}$
$هـ''' = صفر$	+	$هـ = +\frac{1}{25}\cdot\frac{جتا(س^{5}+1)}{5}$

$ت = -12س^{3}\cdot\frac{جتا(س^{5}+1)}{5} - 24س\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{جا(س^{5}+1)}{5} + 24\times\frac{1}{25}\cdot\frac{جتا(س^{5}+1)}{5} + ث$

$= -\frac{12}{5}س^{3}جتا(س^{5}+1) + \frac{24}{25}س\,جا(س^{5}+1) + \frac{24}{125}جتا(س^{5}+1) + ث$

⑦ $\int 6س^3 حا(س^4+1)\,دس$

نستخدم التعويض

$ص = س^4+1$

$دص = 4س^3\,دس$

$\frac{دص}{4} = س^3\,دس$

$\int 6 \times \frac{1}{4} حا ص\,دص$

$\int \frac{3}{2} حا ص\,دص$ لكل $س^4 = ص-1$

$\int (3ص-3) حا ص\,دص$

نستخدم التكامل بالأجزاء

$هـ = 3ص-3$ ، $دهـ = 3\,دص$

$دهـ = حا ص\,دص$ ، $هـ = -جتا ص$

$ت = -(3ص-3) جتا ص + \int جتا ص \times 3\,دص$

$= -(3ص-3) جتا ص + 3 حا ص + ج$

ارجع لـ ص

⑧ $\int 2س ظا س قا^2 س\,دس$

نستخدم التكامل بالأجزاء

$هـ = 2س$ ، $دهـ = 2\,دس$

$دهـ = ظا س قا^2 س\,دس$ ، $هـ = \frac{ظا^2 س}{2}$

$ت = 2س \frac{ظا^2 س}{2} - \int \frac{ظا^2 س}{2} \times 2\,دس$

$= س ظا^2 س - \int (قا^2 س - 1)\,دس$

$= س ظا^2 س - ظا س + س + ج$

لاحظ التكامل اجزاء - تعويض - متطابقه - مباشر.

⑨ $\int$ حا^{2}س جتا^{2}س دس

← غير محضر / لتعويض مستقيم الجذر ليست موجوده

ص = جتاس

ص^{2} = س

٢ص دص = دس

$\int$ ص^{2} حاص جتا^{2}ص دص اختار

← لا تحتوي مستقيم الجذر

ع = جتاص

دع = دص / -حاص

$\int$ حاص ع^{2} دع / -حاص

$\int$ -ع^{4} = $\int$ -جتا^{4}ص

لتعويض

هـ = حاص جتا^{2}ص دص

هـ = -جتا^{4}ص / ٤

ع هـ = ٢ دص

دهـ = ٢ دص

ت = -٢ص جتا^{4}ص / ٤ + $\int$ ١/٤ جتا^{4}ص × ٢ دص

← مطابقات

= -١/٢ ص جتا^{4}ص + $\int$ ١/٢ (جتاص)^{2} دص

= -١/٢ ص جتا^{4}ص + $\int$ ١/٢ (١/٢ + ١/٢ جتا٢ص)^{2} دص

= -١/٢ ص جتا^{4}ص + $\int$ ١/٢ (١/٤ + ١/٢ جتا٢ص + ١/٤ جتا^{2}٢ص) دص

= -١/٢ ص جتا^{4}ص + $\int$ ١/٨ + ١/٤ جتا٢ص + ١/٨ (١/٢ + ١/٢ جتا٤ص) دص

= -١/٢ ص جتا^{4}ص + ١/٨ ص + ١/٤ حا٢ص + ١/١٦ ص + ١/٦٤ حا٤ص + ج

= -١/٢ س جتا^{4}س + ١/٨ س + ١/٤ حا٢س + ١/١٦ س + ١/٦٤ حا٤س + ج

ارجع ص

التكامل وتطبيقاته

⑩ $\int ٦ \, حا^{٢}س \, دس$

لـ غير حقيقي / لتفويض

$ص = ظا س$

$ص^{٢} = س$

$٢ ص \, دص = دس$

$\int ٦ \, حا ص \times ٢ ص \, دص$

$\int ١٢ ص \, حا ص \, دص$ / اجزاء

لـ حيلي

$ع = ١٢ ص$ ، $دع = حا ص \, دص$

$دع = ١٢ \, دص$ ، $ه = -حتا ص$

$ت = -١٢ ص حتا ص + \int حتا ص \times ١٢ \, دص + ج$

$= \sim\sim + ١٢ حا ص + ج$

$= -١٢ ص حتا ص + ١٢ حا ص + ج$

⑪ $\int س (حا س + حتا س)^{٢} \, دس$

لـ مضاعفة

$\int س (١ + حا ٢س) \, دس$

$\int س \, دس + \int س \, حا ٢س \, دس$

مباشر ، اجزاء

$ع = س$ ، $دع = حا ٢س \, دس$

$دع = ١ \, دس$ ، $ه = -\frac{١}{٢} حتا ٢س$

$ت = \frac{س^{٢}}{٢} + س \times -\frac{١}{٢} حتا ٢س + \int \frac{١}{٢} حتا ٢س \, دس$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢} س حتا ٢س + \frac{١}{٤} حا ٢س + ج$

التكامل وتطبيقاته

الصورة القانونية

في حالة $هـ$ او $هـ$ او $و$ لمقدار مثل $(س)$
نكامل مباشرة مع إجراء
ونعوض عن $او هـ او و = ك$

① أحسب $\int_{1}^{} ١٢ س \, هـ(س) \, د س$

حيث $هـ(٠) = ٢$ $\quad هـ(١) = ٧$
$هـ'(٠) = ٨$ $\quad هـ'(١) = ١٢$

الحل

$هـ = ١٢ س$ $\quad ك = هـ'(س) \, د س$

$ك هـ = ١٢ د س$ $\quad هـ = هـ(س)$

$ت = ١٢ س \, هـ(س) \Big|_{1}^{} - \int_{1}^{} هـ(س) \times ١٢ د س$

$= ١٢ س \, هـ(س) \Big|_{1}^{} - ١٢ \, هـ(س) \Big|_{1}^{}$

$= (١٢ هـ(١) - ٠) - ١٢ (هـ(١) - هـ(٠))$

$= ١٢ \times ١٢ - ١٢ (٧ - ٢)$

$= ١٤٤ - ٦٠ = ٨٤$

② جد قيمة $\int_{1}^{} س^{٥} \, هـ(س^{٢} + ١) \, د س$
لسهولة (غير س)

علمًا ان
$هـ(٢) = ٣$ ، $هـ(١) = ٥$
وكذلك $\int_{1}^{٢} هـ(س) \, د س = ١٠$

الحل

الاستبدال
$ص = س^{٢} + ١$
$س = ٠ \Rightarrow ص = ١$
$س = ١ \Rightarrow ص = ٢$

$د ص = ٢ س \, د س$

$د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$\int_{1}^{} س^{٣} \, هـ(ص) \, \frac{د ص}{٢ س}$

لم تختفي س ← لكن $س^{٢} = ص - ١$

$\int_{1}^{} \frac{١}{٢} (ص - ١) \, هـ(ص) \, د ص$ اجزاء

$ك = هـ(ص) \, د ص$ $\quad ه = \frac{١}{٢} (ص - ١)$

$ك هـ = \frac{١}{٢} د ص$ $\quad هـ = هـ(ص)$

$ت = \frac{١}{٢} (ص - ١) \, هـ(ص) \Big|_{1}^{} - \int_{1}^{} هـ(ص) \times \frac{١}{٢} د ص$

$= (\frac{١}{٢} هـ(٢) - ٠) - \frac{١}{٢} \int_{1}^{٢} هـ(ص) \, د ص$

$= \frac{١}{٢} \times ٣ - \frac{١}{٢} \times ١٠$

$= ١ - \frac{١٠}{٣} = -\frac{٧}{٣}$

تكامل مقدار مع اقتران لوغاريتمي

$\int$ (مقدار) $\log_{هـ}$ (س) دس

نقارن بين مشتقة اللوغاريتم (كاملاً) والمقدار.

إذا وجدت علاقة فهو تعويض

ونفرض ص = $\log_{هـ}$ (س)

وإذا لم يوجد فهو إفراد ونفرض

ص = $\log_{هـ}$ (س).

أمثلة

① $\int \frac{12س^3}{س^4+3} \log_{هـ}(س^4+3)$ دس

نشتق $\frac{4س^3}{س^4+3}$ دس ∴ نفرض

ص = $\log_{هـ}(س^4+3)$

$\frac{ص}{4س^3}$ = $\frac{س^4+3}{4س^3}$ دص = دس

$\int \frac{12س^3}{س^4+3}$ ص $\frac{س^4+3}{4س^3}$ دص

$\int$ 6 ص دص = $6\frac{ص^2}{2}$ + جـ

= 3 $(\log_{هـ}(س^4+3))^2$ + جـ

② $\int 6س \log_{هـ}(2س)$ دس

نشتق $\frac{2}{2س}$ دس = $\frac{1}{س}$ دس

لا يوجد علاقة ∴ إفراد.

هـ = 6س ، دهـ = 6 دس

دص = $\log_{هـ}$ دس ، ص = $\frac{1}{س}$

ت = 6س × $\frac{1}{س}$ − $\int \frac{1}{س}$ × 6 دس

= 6 − 6 $\log_{هـ}$ |س| + جـ

③ $\int \frac{6}{س \log_{هـ} س}$ دس

ص = $\log_{هـ}$ س

دص = $\frac{1}{س}$ دس ⇒ س دص = دس

$\int \frac{6}{س \cdot ص}$ × س دص

$\int \frac{6}{ص}$ دص

6 $\log_{هـ}$ |ص| + جـ

6 $\log_{هـ}$ $\log_{هـ}$ |س| + جـ

التكامل وتطبيقاته

④ $\int 6 \, ضتا ٢س \, لو_{هـ}(حتا ٢س) \, دس$ ← $\frac{-٢ ضتا ٢س}{حتا ٢س}$

$ص = لو_{هـ}(حتا ٢س)$

$دص = \frac{-٢ ضتا ٢س}{حتا ٢س} دس$

$دس = \frac{دص}{-٢ ضتا ٢س} = \frac{دص}{-٢ ضتا ٢س}$

$\int -٣ ضتا ٢س \, ص \, \frac{دص}{-٢ ضتا ٢س}$

$٣ \int ص \, دص$

$\frac{٣}{٢} ص^{٢} + جـ$

$\frac{٣}{٢} (لو_{هـ}(حتا ٢س))^{٢} + جـ$

⑤ $\int ٨ ضتا ٨س \, لو_{هـ}(حا ٨س) \, دس$ ← $\frac{ضتا ٨س}{حا ٨س}$ لاالوحيد للاشتقاق

$ص = لو_{هـ}(حا ٨س)$

$دص = \frac{ضتا ٨س}{حا ٨س} دس$

$دس = \frac{دص}{ضتا ٨س}$ ← $هـ = ٨ حا ٨س$

$ت = لو_{هـ}(حا ٨س) \times ٨ حا ٨س - \int ٨ حا ٨س \times \frac{ضتا ٨س}{٨ حا ٨س} دس$

$= ٨ حا ٨س لو_{هـ}(حا ٨س) - ٨ حا ٨س + جـ$

⑥ $\int لو_{هـ} س \, دس$ ← $\frac{١}{س}$ اجزاء

$ص = لو_{هـ} س$ ← $دص = \frac{١}{س} دس$

$دهـ = دس$ ← $هـ = س$

$ت = لو_{هـ} س \times س - \int س \times \frac{١}{س} دس$

$= س لو_{هـ} س - \int ١ دس$

$= س لو_{هـ} س - س + جـ$

قاعدة

$\int لو_{هـ}^{م} س \, دس = س(لو_{هـ}^{م} س - م لو_{هـ}^{م-١} س + م(م-١) لو_{هـ}^{م-٢} س - \dots + (-١)^{م} م!) + جـ$

امثلة

① $\int لو_{هـ} س \, دس$

$= س لو_{هـ} س - س + جـ$

② $\int لو_{هـ}^{٢} س \, دس = س(لو_{هـ}^{٢} س - ٢ لو_{هـ} س + ٢) + جـ$

③ $\int لو_{هـ}^{\frac{١}{٢}} س \, دس = \frac{١}{٢} \int لو_{هـ} س \, دس$

$= \frac{١}{٢}(س لو_{هـ} س - س) + جـ$

④ $\int لو_{هـ}^{١٠} س \, دس = ١٠ \int لو_{هـ}^{٩} س \, دس$

$= ١٠(س لو_{هـ}^{٩} س - ٩ \int لو_{هـ}^{٨} س \, دس) + جـ$

التكامل وتطبيقاته

⑦ $\int س^{ن} \ لو_{هـ} س \ د س$ — $\frac{1}{ن+1}$ لا يوجد

$ع = لو_{هـ} س$ ، $د ص = س^{ن} د س$

$د ع = \frac{1}{س} د س$ ، $ص = \frac{س^{ن+1}}{ن+1}$

$ت = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} لو_{هـ} س - \int \frac{س^{ن+1}}{ن+1} \times \frac{1}{س} د س$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1} لو_{هـ} س - \int \frac{1}{ن+1} س^{ن} د س$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1} لو_{هـ} س - \frac{1}{ن+1} \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ج$

⑧ $\int (لو_{هـ} س)^{2} د س$ — $\frac{1}{س}$ اجزاء.

$ع = (لو_{هـ} س)^{2}$ ، $د ص = د س$

$د ع = 2 لو_{هـ} س \times \frac{1}{س} د س$ ، $ص = س$

$ت = س (لو_{هـ} س)^{2} - \int س (2 لو_{هـ} س \times \frac{1}{س}) د س$

$= س (لو_{هـ} س)^{2} - 2 \int لو_{هـ} س \ د س$ — اجزاء.

$= س (لو_{هـ} س)^{2} - 2 \int لو_{هـ} س \ د س$

$= (لو_{هـ} س)^{2} س - 2 (س لو_{هـ} س - س) + ج$

⑨ $\int س (لو_{هـ} س)^{2} د س$ — $\frac{1}{2}$ لا يوجد

$ع = (لو_{هـ} س)^{2}$ ، $د ص = س د س$

$د ع = 2 لو_{هـ} س \times \frac{1}{س} د س$ ، $ص = \frac{س^{2}}{2}$

$ت = (لو_{هـ} س)^{2} \frac{س^{2}}{2} - \int \frac{س^{2}}{2} \times 2 لو_{هـ} س \times \frac{1}{س} د س$

$= \frac{س^{2}}{2} (لو_{هـ} س)^{2} - \int س لو_{هـ} س \ د س$

اجزاء.

$ع = لو_{هـ} س$ ، $د ص = س د س$

$د ع = \frac{1}{س} د س$ ، $ص = \frac{س^{2}}{2}$

$ت = \frac{س^{2}}{2} (لو_{هـ} س)^{2} - (\frac{س^{2}}{2} لو_{هـ} س - \int \frac{س^{2}}{2} \times \frac{1}{س} د س)$

$= \frac{س^{2}}{2} (لو_{هـ} س)^{2} - \frac{س^{2}}{2} لو_{هـ} س + \frac{1}{2} \frac{س^{2}}{2} + ج$

⑩ $\int \frac{لو_{هـ} (س+2)}{\sqrt{س+2}} د س$

$ع = لو_{هـ} (س+2)$ ، $د ص = (س+2)^{-\frac{1}{2}} د س$

$د ع = \frac{1}{س+2} د س$ ، $ص = 2 (س+2)^{\frac{1}{2}}$

$ت = لو_{هـ} (س+2) \times 2 (س+2)^{\frac{1}{2}} - \int 2 (س+2)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{(س+2)} د س$

$= 2 (س+2)^{\frac{1}{2}} لو_{هـ} (س+2) - \int 2 (س+2)^{-\frac{1}{2}} د س$

$= 2 (س+2)^{\frac{1}{2}} لو_{هـ} (س+2) - 2 \times 2 (س+2)^{\frac{1}{2}} + ج$

(11) $\int \text{لعم}^{س-1}\, دس$

$ع = \text{لعم}^{س-1}$ ⟋ $دع = دس$

$دف = \frac{دس}{س-1}$ ⟋ $ف = س$

$ت = \text{لعم}^{س-1} \times س - \int س \times \frac{دس}{س-1}$

$= س\,\text{لعم}^{س-1} - \int \frac{س\,دس}{س-1}$

$= \frac{س}{س-1}$ | $\frac{1}{س-1}$

$= \frac{س}{س-1} + \frac{1}{س-1}$

$= 1 + \frac{1}{س-1}$

$\int \left(1 + \frac{1}{س-1}\right) دس$

$= س\,\text{لعم}^{س-1} - \int 1\,دس + \int \frac{1}{س-1}\,دس$

$= س\,\text{لعم}^{س-1} - س + \text{لعم}|س-1| + ج$

(12) $\int \frac{2\,\text{لعم}\,س}{(س-2)^2}\, دس$

$ع = 2\,\text{لعم}\,س$ ⟋ $دع = (س-2)^{-2}\, دس$

$دف = 2 \times \frac{1}{س}\, دس$ ⟋ $ف = \frac{(س-2)^{-1}}{-1}$

$ت = 2\,\text{لعم}\,س \times \frac{-1}{(س-2)} + \int \frac{1}{(س-2)} \times 2 \times \frac{1}{س}\, دس$

$= \frac{-2\,\text{لعم}\,س}{(س-2)} + \int \frac{2}{س(س-2)}\, دس$

$\frac{2}{س(س-2)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-2}$

$2 = أ(س-2) + ب س$

$س = 2 \Leftarrow 2 = 2ب \Leftarrow ب = 1$

$س = 0 \Leftarrow 2 = -2أ \Leftarrow أ = -1$

$= \frac{-2\,\text{لعم}\,س}{(س-2)} + \int \frac{-1}{س}\, دس + \int \frac{1}{س-2}\, دس$

$= \frac{-2\,\text{لعم}\,س}{(س-2)} - \text{لعم}|س| + \text{لعم}|س-2| + ج$

* $\int$ ق^{2}س ر س شاذ (دوري)

اجزاء.

عد = ق س ره = ق^{2}س ر

ره = ق س ظ س ر هـ = ظ س

$\therefore$ $\int$ ق^{2}س ر = ق س ظ س − $\int$ ق س ظ^{2}س ر

= ق س ظ س − $\int$ ق س (ق^{2}س − ١) ر

$\int$ ق^{2}س ر = ق س ظ س − $\int$ ق^{2}س ر + $\int$ ق س ر

بالنقل

٢ $\int$ ق^{2}س ر = ق س ظ س + $\ln|\text{ق س} + \text{ظ س}|$

بالقسمة ٢

$$\int \text{ق}^{2}\text{س}\, ر = \frac{\text{ق س ظ س} + \ln|\text{ق س} + \text{ظ س}|}{٢} + \text{ج}$$

* $\int \frac{١}{\text{س} + \text{س} \ln \text{س}}$ ر س.

= $\int \frac{١}{\text{س}(١ + \ln \text{س})}$ ر س

ص = ١ + $\ln$ س

ر = $\frac{\text{ره}}{\frac{١}{\text{س}}}$ = س ره

$\int \frac{١}{\text{ص}}$ × س ره

$\ln|\text{ص}| + \text{ج}$

$\ln|١ + \ln \text{س}| + \text{ج}$

تكامل مقدار مع اقتران أسي

$\int$ (مقدار) $هـ^{\text{اس}}$ دس

نقارن بين مشتق الأس والمقدار

إذا وجدت علاقة مرتبطة بتقويض ونفرض ص = الأس

وإذا لم يوجد منها اختزال ونفرض ده = الأس

الأس عزيز حظي ← تقويض

الأس حظي ← اختزال

أمثلة

① $\int 8$ جتاس $هـ^{\text{جاس}}$ دس ← عزيز حظي ← تقويض

ص = جاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس

$\int 8$ جتاس $هـ^{ص}$ $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$8 \int هـ^{ص}$ دص

$8 هـ^{ص} + ج$

$8 هـ^{\text{جاس}} + ج$

② $\int ٢س هـ^{س^٤}$ دس ← حظي ← اختزال

ع = $س^٤$ ، $\frac{\text{دع}}{٤}$ = $س^٣$ دس

$\int \frac{هـ^{ع}}{٤}$ دع = $\frac{1}{٤} هـ^{ع} + ج$

$= \frac{1}{٤} هـ^{س^٤} + ج$

③ $\int هـ^{\sqrt{س}}$ دس ← عزيز حظي

ص = $\sqrt{س}$

$ص^٢ = س$

$٢ص$ دص = دس

$\int هـ^{ص} \times ٢ص$ دص ← اختزال

ع = ٢ص ، دع = $هـ^{ص}$ دص

دع = ٢دص ، $هـ^{ص}$ = هـ

$\int ٢ص هـ^{ص}$ دص = $٢ص هـ^{ص} - \int ٢هـ^{ص}$ دص

$= ٢ص هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + ج$

$= ٢\sqrt{س} هـ^{\sqrt{س}} - ٢هـ^{\sqrt{س}} + ج$

① $\int e^{x} \sin x \, dx$ ← ضلع ← اجزاء.

الدوري: اجزاء وتكرر + نقل

$u = \sin x$ ، $dv = e^{x} dx$

$du = \cos x$ ، $v = e^{x}$

$$\int e^{x} \sin x \, dx = \sin x \, e^{x} - \int e^{x} \cos x \, dx$$ اجزاء.

$u = \cos x$ ، $dv = e^{x} dx$

$du = -\sin x$ ، $v = e^{x}$

$$\int e^{x} \sin x \, dx = \sin x \, e^{x} - \left[\cos x \, e^{x} + \int e^{x} \sin x \, dx \right]$$

$$\int e^{x} \sin x \, dx = \sin x \, e^{x} - \cos x \, e^{x} - \int e^{x} \sin x \, dx$$ بالنقل

$$2\int e^{x} \sin x \, dx = \sin x \, e^{x} - \cos x \, e^{x}$$ بالقسمة ÷ 2

$$\int e^{x} \sin x \, dx = \frac{\sin x \, e^{x} - \cos x \, e^{x}}{2} + c$$

ملاحظة استكمال هذا السؤال

① $\int e^{x} \cos x \, dx$ ② $\int \frac{e^{x}}{\cos x} \, dx$ ③ $\int \frac{e^{x}}{\sin x} \, dx$.

⑤ $\int$ حا($\ln س$) دس

← غير صفي / لوغاريتمي

ص = $\ln س$

دس = $\frac{دص}{1/س}$ = س دص

$\int$ حا ص × س دص لم تختفِ س.

لأنه س = $هـ^{ص}$

$\int هـ^{ص}$ حا ص دص (دوري)

حلول رقم (٤)

ثم ارجع ص

⑥ $\int هـ^{س-هـ^{س}}$ دس

$= \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{هـ^{س}}}$ دس

ص = $هـ^{س}$

دص = $\frac{دص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{هـ^{ص}}{هـ^{ص}}$ دص لأنه $هـ^{س}$ = ص

$\int هـ^{-ص}$ دص = $\frac{-هـ^{-ص}}{-1}$ + جـ

= $-هـ^{-س}$ + جـ

⑦ $\int \frac{1}{(هـ^{س}+هـ^{-س})^{2}}$ دس

$\int \frac{1}{هـ^{2س}+2+هـ^{-2س}}$ دس

ص = $هـ^{2س}$

دص = $\frac{دص}{2هـ^{2س}}$

$\int \frac{1}{ص+2+ص^{-1}} \times \frac{دص}{2ص}$

$\int \frac{1}{2ص^{2}+2ص+2}$ دص

$= \int \frac{1}{2(ص+1)^{2}}$ دص = $\frac{1}{2}\int (ص+1)^{-2}$ دص

$= \frac{1}{2}\frac{(ص+1)^{-1}}{-1}$ + جـ

$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{هـ^{س}+1})$ + جـ

⑧ $\int \frac{س هـ^{س}}{(س+1)^{2}}$ دس

ف = س $هـ^{س}$ ← دف = $(س هـ^{س} + هـ^{س})$ دس

دص = $(س+1)^{-2}$ دس ← هـ = $\frac{(س+1)^{-1}}{-1}$

ك = س $هـ^{س}$ × $\frac{-1}{س+1}$ + $\int \frac{-1}{س+1}(س هـ^{س}+هـ^{س})$ دس

= $\frac{-س هـ^{س}}{س+1}$ + $\int \frac{هـ^{س}(س+1)}{س+1}$ دس

= $\frac{-س هـ^{س}}{س+1}$ + $هـ^{س}$ + جـ

التكامل وتطبيقاته

⑨ اذا كان $\int_{1}^{2} س\, هـ^{(س-1)}\, دس = ٤$

فما قيمة $\int_{1}^{2} هـ^{س}\, هـ^{(س-1)}\, دس$

نغير س

عندما
$س = ١ \Leftarrow ص = ٠$
$س = ٢ \Leftarrow ص = ه$

$ص = س - ١$

$دص = دس$

$٢ص\, دص = هـ^{س}\, دس$

$\frac{٢ص}{هـ^{س}}\, دص = دس$

$\int_{٠}^{ه} ص\, هـ^{(ص+١)}\, \frac{٢ص}{هـ^{س}}\, دص$ بكتبه $هـ^{س} = ص$

$\int_{٠}^{ه} ٢ص^{٢}\, هـ^{(ص+١)}\, دص$

$= ٢ \times \int_{٠}^{ه} ص\, هـ^{(ص+١)}\, دص$

$= ٢ \times ٤ = \boxed{٨}$

⑩ $\int \frac{أ^{٢}س + هـ^{جاس}}{أ^{س}}\, دس$

$\Leftarrow \int أ^{س}\, دس + \int هـ^{جاس}\, هـ^{س}\, دس$

بالتجزئ

$ص = جاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$\Leftarrow ظاس + \int هـ^{ص}\, \frac{دص}{جتاس}$

$\Leftarrow ظاس + هـ^{ص} + جـ$

$\Leftarrow ظاس + هـ^{جاس} + جـ$

⑪ $\int هـ^{س} (٢ جتا^{٢}س جاس - جتا^{٢}س)\, دس$

لا مطابقه

$\int هـ^{س} \left(٢ \left[\frac{١}{٢}(جتا٤س + جتا٢س)\right] - جتا^{٢}س\right) دس$

$\int هـ^{س} جتا٤س\, دس$

الدوري اجزاء وسيله + تعويض

$ع = جتا٤س$	$دص = هـ^{س}$
$دع = -٤ جا٤س$	$ص = هـ^{س}$

اكمل.

⑫ $\int_{لو ٢}^{لو ٤} هـ^{س} (٩ - ٤ هـ^{س})\, دس$

$\int_{لو ٢}^{لو ٤} ٩ هـ^{س}\, دس - \int_{لو ٢}^{لو ٤} ٤ هـ^{٢س}\, دس$

$٩ هـ^{س} \Big|_{لو ٢}^{لو ٤} - ٤ \frac{هـ^{٢س}}{٢} \Big|_{لو ٢}^{لو ٤}$

$٩ (هـ^{لو ٤} - هـ^{لو ٢}) - ٢ (هـ^{٢ لو ٤} - هـ^{٢ لو ٢})$

$٩ (٤ - ٢) - ٢ (هـ^{لو ١٦} - هـ^{لو ٤})$

$٩ - ٢ (١٦ - ٤)$

$٩ - ٢٤ = -١٥$ ∴

التكامل بالكسور الجزئية

هو تكامل حاصل قسمة مقدارين
للحصول على مقدار من مستقل احدهما الاخر
وليس اجراء.

ملاحظة] بسط / مقام دس مستحيل
ان تكون اجزاء الا في حالتين

① المقام خطي مرفوع لأس
] $\frac{ج س+1}{ه(س-2)}$ دس

② المقام تحلل لعوامل خطية متشابهة
] $\frac{ج س+1}{س^3-6س+9}$ دس

وسيتم التكامل بالكسور الجزئية بحالتين

① البسط والمقام كثيرا حدود

② درجة البسط اقل من درجة المقام
وان لم تكن تقوم بالقسمة الطويلة اولاً

③ المقام كثير حدود من الدرجة الثانية فقط
قابل للتحليل لعوامل خطية مختلفة
وغير مرفوع لأس

طريقة الحل:-

١) نتأكد ان البسط والمقام لا يجمع
وان درجة البسط < درجة المقام
وان لم تكن تقسم قسمة طويلة

٢) نحلل المقام الى عوامله الاولية

العوامل مختلفة	العوامل متشابهة
كسور	افراد.

٣- نجزئ الكسر الى كسرين بينهما اشارة جمع

٤- نضع حرف لكل عامل مجهول مثل أ، ب

٥- لايجاد أ، ب نوحد المقامات
ونقوض قيمة المقام في بسط الطرفين

٦- نكامل باللوغاريتم

] $\frac{أ}{س+ط}$ دس = أ لو | س+ط | + د

أمثلة

① $\int \frac{2س+1}{س^2-5س+6}$ د س كمية

$\frac{2س+1}{س^2-5س+6} = \frac{2س+1}{(س-3)(س-2)} = \frac{ب}{س-3} + \frac{ا}{س-2}$

$2س+1 = ا(س-3) + ب(س-2)$

$س=3 \Leftarrow \boxed{ب=7}$

$س=2 \Leftarrow 5 = -ا \Leftarrow \boxed{ا=-5}$

$\int \frac{2س+1}{س^2-5س+6}$ د س $= \int \frac{-5}{س-2}$ د س $+ \int \frac{7}{س-3}$ د س

$= -5$ لو$_ه$ $|س-2| + 7$ لو$_ه$ $|س-3| + ج$

② $\int \frac{4}{س^2-4}$ د س كمية

$\frac{4}{س^2-4} = \frac{4}{(س-2)(س+2)} = \frac{ب}{س+2} + \frac{ا}{س-2}$

$4 = ا(س+2) + ب(س-2)$

$س=2 \Leftarrow 4 = 4ا \Leftarrow ا=1$

$س=-2 \Leftarrow 4 = -4ب \Leftarrow ب=-1$

$\int \frac{4}{س^2-4}$ د س $= \int \frac{1}{س-2}$ د س $+ \int \frac{-1}{س+2}$ د س

$= $ لو$_ه$ $|س-2| - \frac{1}{1}$ لو$_ه$ $|س+2| + ج$

③ $\int \frac{2س^2}{س^2-1}$ د س

قسمة طويلة + كسور

$$\begin{array}{r} 2 \\ س^2-1 \overline{)\,2س^2} \\ \mp 2س^2 \pm 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\int \frac{2س^2}{س^2-1}\,د س = \int 2\,د س + \int \frac{2}{س^2-1}\,د س$$

$$= \int 2\,د س + \int \frac{ا}{س-1}\,د س + \int \frac{ب}{س+1}\,د س$$

$$2 = ا(س+1) + ب(س-1)$$

$$س=1 \Leftarrow 2 = 2ا \Leftarrow ا = 1$$

$$س=-1 \Leftarrow 2 = -2ب \Leftarrow ب = -1$$

$$ت = \int 2\,د س + \int \frac{1}{س-1}\,د س + \int \frac{-1}{س+1}\,د س$$

$$= 2س + \frac{1}{1}لو|س-1| + \frac{-1}{1}لو|س+1| + ج$$

العملية الطويلة

كسور ← المقام درجته أكبر

لوغاريتم ← المقام درجته أصغر

④ $\int \frac{3}{س(س-1)}$ د س كسور

$$ت = \int \frac{ا}{س}\,د س + \int \frac{ب}{س-1}\,د س$$

$$3 = ا(س-1) + ب(س)$$

$$س=0 \Leftarrow 3 = -ا \Leftarrow \boxed{ا = -3}$$

$$س=1 \Leftarrow \boxed{ب = 3}$$

$$ت = \int \frac{-3}{س}\,د س + \int \frac{3}{س-1}\,د س$$

$$= -3لو|س| + 3لو|س-1| + ج$$

⑤ $\int \frac{3س+5}{س^2-4س+3}\,د س$ كسور X اجبار.

$= \int \frac{3ر+5}{ر^2-4ر+3}\,د ر = \int \frac{3ر+5}{(ر-3)(ر-1)}\,د ر$

$= \int \frac{(3ر+5)(ر-1)^{-2}}{(ر-3)}\,د ر$

$3ر+5 = أ(ر-1)+ب$ ، $ر-3 = ك(ر-1)$

$ر=1 \Rightarrow 8 = ب$ ، $ر=3 \Rightarrow ك = 2$

$ت = \int \frac{14}{(ر-1)^2}(ر-3)^{-1}\,د ر + \int \frac{2}{(ر-1)}\,د ر$

$= -\frac{14}{ر-1} + 2\ln|ر-3| + ج$

$= -\frac{14}{س-1} + 2\ln|س-3| + ج$

⑥ $\int \frac{س+1}{س-1}\,د س$ حيث هو طيب + لوغاريتم

$\begin{array}{r|l} 1 & س-1 \\ \hline \frac{+س\pm 1}{2} & \end{array}$

$= \int 1\,د ر + \int \frac{2}{ر-1}\,د ر$

$= ر + 2\ln|ر-1| + ج$

$= س + 2\ln|س-1| + ج$

⑦ $\int \frac{7س}{2س^2-5س-3}\,د س$

$\int \frac{7ر+7}{2ر^2-5ر-3}\,د ر = \int \frac{أ}{2ر+1}\,د ر + \int \frac{ب}{ر-3}\,د ر$

$7ر+7 = أ(ر-3)+ب(2ر+1)$

$ر=3 \Rightarrow 28 = 7ب \Rightarrow ب=4$

$ر=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = -\frac{7}{2}أ \Rightarrow أ=-1$

$ت = \int \frac{-1}{2ر+1}\,د ر + \int \frac{4}{ر-3}\,د ر$

$= -\frac{1}{2}\ln|2ر+1| + 4\ln|ر-3| + ج$

$= -\frac{1}{2}\ln|2س+1| + 4\ln|س-3| + ج$

⑧ $\int \frac{2ر+2}{ر^2+2ر+2}\,د ر$

كسور X ، اجبار X ، لوغاريتم ✓

$= \ln|ر^2+2ر+2| + ج$

$= \ln|س^2+2س+2| + ج$

التكاملات الغير حقيقية ← التعويض / الكسور الجزئية

حالات تكاملات عدة لا ينطبق عليها احدى طرق التكامل.

① المقام الطويل $\frac{\text{لو بج}}{\text{لو ج}}$ درجة البسط ≥ المقام

② المباشر صور المباشر

③ المثلثيات نسب مثلثية

④ التعويض احدى الصور

٥ - الاجزاء احدى الصور

٦ - اللوغاريتم مقامه المقام بالبسط

٧ - الكسور المقام له ج تربيعي حلل

⑧ التكاملات

حيث نفرض ص = المقدار اللي تحته عبر صحيح

أمثلة

① $\int \frac{\sqrt{س}}{س - ٤}$ دس ،

نفرض $ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} = س$

$٢ ص$ دص $=$ دس

$\int \frac{ص}{ص^{٢} - ٤} \times ٢ ص$ دص

$\int \frac{٢ ص^{٢}}{ص^{٢} - ٤}$ دص

مقه + كسور

$٢ + \frac{٢ ص^{٢} + ٨}{ص^{٢} - ٤}$

$\int ٢$ دص $+ \int \frac{٨}{ص^{٢} - ٤}$ دص

$٢ ص + \int \frac{أ}{ص - ٢}$ دص $+ \int \frac{ب}{ص + ٢}$ دص

التكاملات الغير حقيقية
- كسور
- مقه طويل
  - كسور
  - لوغاريتم

التكامل وتطبيقاته

② $\int \frac{6}{س - 4\sqrt{س} + 3}$ دس

نفرض ص $= \sqrt{س}$

$ص^2 = س$

$2ص$ دص $=$ دس

$\int \frac{6}{ص^2 - 4ص + 3} \times 2ص$ دص

$\int \frac{12ص}{ص^2 - 4ص + 3}$ دص

$\int \frac{م}{ص - 2}$ دص $+ \int \frac{ن}{ص - 1}$ دص

اكمل.

③ $\int \frac{1}{س - \sqrt[2]{س}}$ دس

$ص = \sqrt[2]{س}$

$ص^2 = س$

$3ص^2$ دص $=$ دس.

$\int \frac{1}{ص^3 - ص} \times 3ص^2$ دص

$\int \frac{3ص^2}{ص(ص^2 - 1)}$ دص

$\frac{3}{2} \int \frac{2ص}{ص^2 - 1}$ دص

$\frac{3}{2}$ لو$_م$ $|ص^2 - 1| + ج$

ارجع ص

④ $\int \frac{1}{\sqrt[2]{س} + \sqrt{س}}$ دس

في حاله الاوله مختلفه نفرض ص $= \sqrt[4]{س}$
حيث م المضاعف المشترك للأدله

نفرض ص $= \sqrt[6]{س}$

$ص^6 = س$

$6ص^5$ دص $=$ دس

$\int \frac{6ص^5}{ص^2 + ص^3}$ دص

$\int \frac{6ص^5}{ص^2(1 + ص)}$ دص

$\int \frac{6ص^2}{1 + ص}$ دص $+$ ثابت تكامل

⑤ $\int \frac{\sqrt[2]{س} - 1}{\sqrt[2]{س} - 4}$ دس

نفرض ص $= \sqrt[2]{س}$

$ص^2 = س$

$2ص$ دص $=$ دس

$\int \frac{ص - 1}{ص^2 - 4} \times 2ص$ دص

$\int \frac{2ص^2 - 2ص}{ص^2 - 4}$ دص

ثابت $+$ كسور

التكامل وتطبيقاته

⑥ $\int \frac{\text{حا}س}{\text{حتا}^2 س - 5\text{حتا}س + 4}\, \text{د}س$

نفرض ص = حتاس

$\text{د}ص = -\text{حا}س\, \text{د}س$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{-\text{حا}س}$

$\int \frac{\text{حا}س}{\text{ص}^2 - 5\text{ص} + 4} \times \frac{\text{د}ص}{-\text{حا}س}$

$\int \frac{-1}{\text{ص}^2 - 5\text{ص} + 4}\, \text{د}ص$

$\int \frac{-1}{(\text{ص}-4)(\text{ص}-1)}\, \text{د}ص$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-4}\, \text{د}ص + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص}-1}\, \text{د}ص$

⑦ $\int \frac{\text{قا}^2 س}{\text{قا}^2 س - 4\text{ظا}س + 3}\, \text{د}س$ وحدّ لنسب بالمقام

$= \int \frac{\text{قا}^2 س}{\text{ظا}^2 س + 1 - 4\text{ظا}س + 2}\, \text{د}س$

$\int \frac{\text{قا}^2 س}{\text{ظا}^2 س - 4\text{ظا}س + 3}\, \text{د}س$

ص = ظاس

$\text{د}ص = \frac{\text{د}ص}{\text{قا}^2 س}$

$\int \frac{\text{قا}^2 س}{\text{ص}^2 - 4\text{ص} + 3} \times \frac{\text{د}ص}{\text{قا}^2 س}$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3}\, \text{د}ص + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص}-1}\, \text{د}ص$

⑧ $\int \frac{1}{\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^4}\, \text{د}س$

$ص = 1 + \sqrt{س}$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{\frac{1}{2\sqrt{س}}} = 2\sqrt{س}\, \text{د}ص$

$\int \frac{1}{\sqrt{س}\,(ص)^4} \times 2\sqrt{س}\, \text{د}ص$

$\int 2\,ص^{-4}\, \text{د}ص = \frac{2\,ص^{-3}}{-3} + \text{جـ}$

$= -\frac{2}{3}(1+\sqrt{س})^{-3} + \text{جـ}$

$= \frac{-2}{3(1+\sqrt{س})^3} + \text{جـ}$

⑨ $\int \frac{2}{س(\text{لعو}^{س} - 2)(\text{لعو}^{س} - 2)}\, \text{د}س$

$ص = \text{لعو}^{س}$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{س} = س\, \text{د}ص$

$\int \frac{2}{\text{ص}(\text{ص}-2)(\text{ص}-2)}\, \text{د}ص$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-2}\, \text{د}ص + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص}-3}\, \text{د}ص$

التكامل وتطبيقاته

(10) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{س^2 + 4س + 3}\sqrt{س+3}}$ دس

نفرض $ص = \sqrt{س+3}$

$ص^2 = س + 3$

$3ص^2$ دص $=$ دس

$\int \frac{2}{ص^4 + 4ص^2 + 2ص^2} \times 3ص^2$ دص

$\int \frac{6ص^2}{ص^2(ص^2+4ص+3)}$ دص

$\int \frac{م}{ص+3}$ دص $+ \int \frac{ن}{ص+1}$ دص

$6 = م(ص+1) + ن(ص+3)$

$ص = -1 \Rightarrow 6 = 2ن \Rightarrow \boxed{ن = 3}$

$ص = -3 \Rightarrow 6 = -2م \Rightarrow \boxed{م = -3}$

$\int \frac{-3}{ص+3}$ دص $+ \int \frac{3}{ص+1}$ دص

-3 لو$_{هـ}$ $|ص+3| + 3$ لو$_{هـ}$ $|ص+1| + ج$

-3 لو$_{هـ}$ $|\sqrt{س+3} + 3| + 3$ لو$_{هـ}$ $|\sqrt{س+3} + 1| + ج$

(11) $\int \frac{1}{1 + هـ^س}$ دس

$ص = 1 + هـ^س$

$دس = \frac{دص}{هـ^س}$

$\int \frac{1}{ص}$ $\frac{دص}{هـ^س}$ $\because هـ^س = ص - 1$

$\int \frac{1}{ص(ص-1)}$ دص

$\int \frac{م}{ص}$ دص $+ \int \frac{ن}{ص-1}$ دص

$1 = م(ص-1) + نص$

$ص = 0 \Rightarrow 1 = -م \Rightarrow \boxed{م = -1}$

$ص = 1 \Rightarrow \boxed{ن = 1}$

$\int \frac{-1}{ص}$ دص $+ \int \frac{1}{ص-1}$ دص $=$ لو$_{هـ}$ $|ص-1|$ $-$ لو$_{هـ}$ $|ص|$ $+ ج$

$1 - هـ^س$

(12) $\int \sqrt{1 + هـ^س}$ دس

$ص = \sqrt{1 + هـ^س}$

$ص^2 = 1 + هـ^س$

$2ص$ دص $= هـ^س$ دس

دس $= \frac{2ص}{هـ^س}$ دص

$\int ص \cdot \frac{2ص}{هـ^س}$ دص

$\int \frac{2ص^2}{ص^2 - 1}$ دص $\quad$ قسمة + كسور

التكامل وتطبيقاته

(١٣) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٣هـ^{س} + ٢}$ دس

$ص = هـ^{س}$

$\frac{دص}{دس} = هـ^{س}$

$\int \frac{١}{ص^{٢} - ٣ص + ٢} \cdot \frac{دص}{هـ^{س}}$ $\quad هـ^{س} = ص$

$\int \frac{أ}{ص - ٢} دص + \int \frac{ب}{ص - ١} دص$

$١ = أ(ص - ١) + ب(ص - ٢)$

$ص = ١ \Rightarrow ١ = -ب \Rightarrow \boxed{ب = -١}$

$ص = ٢ \Rightarrow \boxed{أ = ١}$

$\int \frac{١}{ص - ٢} دص + \int \frac{-١}{ص - ١} دص$ أكمل

(١٤) $\int ٣^{٥س}$ دس

$ص = ٣^{٥س}$

حسب القاعدة

$دس = \frac{دص}{٥ لو_{هـ} ٢ \cdot ٣^{٥س}}$

$\int ص \cdot \frac{دص}{٥ لو_{هـ} ٢ \cdot ٣^{٥س}}$ $\quad$ لكن $٣^{٥س} = ص$

$\int \frac{١}{٥ لو_{هـ} ٢} دص = \frac{١}{٥ لو_{هـ} ٢} ص + ج$

$= \frac{١}{٥ لو_{هـ} ٢} \cdot ٣^{٥س} + ج$.

(١٥) $\int \frac{جتاس}{١ + ٣ جاس - جتا^{٢}س}$ دس

مضاعفة.

$\int \frac{جتاس}{١ + ٣ جاس - (١ - جا^{٢}س)}$ دس

$\int \frac{جتاس}{جا^{٢}س + ٣ جاس}$ دس

$ص = جاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$\int \frac{جتاس}{ص^{٢} + ٣ص} \cdot \frac{دص}{جتاس}$

$\int \frac{١}{ص(ص + ٣)}$ دص كسور

$\int \frac{أ}{ص} دص + \int \frac{ب}{ص + ٣} دص$ أكمل.

(١٦) $\int \frac{١}{س^{١٠} + س}$ دس

$\int \frac{١}{س^{١٠}(١ + س^{-٩})}$ دس

$\int \frac{س^{-١٠}}{١ + س^{-٩}}$ دس

مشتقة المقام لها للاقتراب بالبسط

$-\frac{١}{٩} \int \frac{-٩ س^{-١٠}}{١ + س^{-٩}}$ دس

$-\frac{١}{٩}$ لو$_{هـ}$ $|١ + س^{-٩}| + ج$.

التكامل وتطبيقاته

(١٧) $\int \frac{\sqrt{س+١}-١}{\sqrt{س+١}+١}$ دس

$ص = \sqrt{س+١}$

$ص^٢ = س+١$

$٢ص$ دص $=$ دس

$\int \frac{ص-١}{ص+١} \times ٢ص$ دص

$\int \frac{٢ص^٢-٢ص}{ص+١}$ دص قسمة

$٢ص-٤$ | $ص+١$

$٢ص^٢-٢ص$

$+٢ص^٢+٢ص$

$-٤ص$

$+٤ص+٤$

٤

$\int (٢ص-٤)$ دص $+ \int \frac{٤}{ص+١}$ دص

$ص^٢-٤ص+٤$ لو$_هـ$ $|ص+١|+$ جـ

$(س+١)-٤\sqrt{س+١}+٤$ لو$_هـ$ $|\sqrt{س+١}+١|+$ جـ.

(١٨) $\int \frac{ظاس}{٢٥-(لو_هـ جاس)^٢}$ دس.

$\int \frac{ظاس}{(٥-لو_هـ جاس)(٥+لو_هـ جاس)}$ دس

$ص =$ لو$_هـ$ جاس

دس $= \frac{دص}{\frac{جتاس}{جاس}} = \frac{دص}{ظتاس}$

$\int \frac{ظاس}{(٥-ص)(٥+ص)} \frac{دص}{ظاس}$

$\int \frac{أ}{٥-ص}$ دص $+ \int \frac{ب}{٥+ص}$ دص

$١ = أ(٥+ص)+ب(٥-ص)$

$ص=٥ \Leftarrow ١ = ١٠أ \Leftarrow أ = \frac{١}{١٠}$

$ص=-٥ \Leftarrow ١ = ١٠ب \Leftarrow ب = \frac{١}{١٠}$

$\int \frac{\frac{١}{١٠}}{٥-ص}$ دص $+ \int \frac{\frac{١}{١٠}}{٥+ص}$ دص

$-\frac{١}{١٠}$ لو$_هـ$ $|٥-ص| + \frac{١}{١٠}$ لو$_هـ$ $|٥+ص|+$ جـ

$\frac{١}{١٠}$ لو$_هـ$ $\left|\frac{٥+ص}{٥-ص}\right|+$ جـ

$\frac{١}{١٠}$ لو$_هـ$ $\left|\frac{٥+جاس}{٥-جاس}\right|+$ جـ

التكامل وتطبيقاته

① اذا كان

$ق(س) = \frac{1}{س} هـ + م لو_{هـ} س$

وكان $ق'(1) = هـ$ حيث م.

$ق'(س) = -\frac{1}{س^2} هـ + \frac{1}{س} م$

$ق'(1) = -1 هـ + 1 م = هـ$

$-هـ + م = هـ$

$م = 2هـ$

$\boxed{م = 4هـ}$

② اذا كان

$ص = هـ^{م جتا س} + لو_{هـ} جا س + \int_{\frac{\pi}{4}}^{س} \frac{ك س}{2 + جا س}$

وكان $\frac{ك ص}{ك س}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = -2$ حيث م.

$\frac{ك ص}{ك س} = -م جا س هـ^{م جتا س} + \frac{م جتا س}{جا س} + صفر$

$\frac{ك ص}{ك س}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = -م \times \frac{1}{2} هـ^{\frac{1}{2}م} + \frac{\frac{1}{2}م}{\frac{1}{2}} = -2$

$-\frac{1}{2}م هـ^{\frac{1}{2}م} + م = -2$

$م - \frac{1}{2}م هـ^{\frac{1}{2}م} = -2$

$\boxed{م = 2}$

③ اذا كان

$ص = هـ^{جتا س} + لو_{هـ} جا س + \int_{\frac{\pi}{2}}^{س} \frac{ك س}{1 + جا س}$

وكان $\frac{ك ص}{ك س}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = 2هـ + 1$ حيث م

$\frac{ك ص}{ك س} = -جا س هـ^{جتا س} + \frac{جتا س}{جا س} + صفر$

$\frac{ك ص}{ك س}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = -1 \times م هـ^{\frac{1}{2}م} - 1 = 2هـ + 1$

$2هـ + م = 2هـ + 1$

$م = 1$

$\boxed{م = -1}$

④ اذا كان

$ص = م هـ^{س^2} + جا(لو_{هـ} س)$

وكان $\frac{ك ص}{ك س}\Big|_{س=1} = هـ^2 + 1$ حيث م.

$\frac{ك ص}{ك س} = 2م س هـ^{س^2} + \frac{1}{س} جتا(لو_{هـ} س)$

$\frac{ك ص}{ك س}\Big|_{س=1} = 2م هـ + \frac{1}{1} جتا 0 = هـ^2 + 1$

$2م هـ + 1 = هـ^2 + 1$

$2م هـ = هـ^2$

$م = \frac{هـ^2}{2هـ} = \frac{هـ}{2}$

المعادلة التفاضلية

هي معادلة تحوي س ، د س ، ص ، د ص

وحل المعادلة التفاضلية يجب فصل المتغيرات مع د س في جهة و د ص مع المقادير في جهة اخرى.

وذلك من خلال النقل - الضرب التبادلي - القسمة.

ثم تكامل الطرفين ونضع جـ لاحدى الجهتين

ملاحظة
لا يجوز ان تكون د س او د ص بالمقام
عندئذ لا يجوز القسمة كما هنا.

أمثلة على المعادلات التفاضلية

١- على شكل معادلة مستقيم خطي.
٢- تطبيق على المعنى الهندسي للمشتقة
٣- " " " الفيزيائي للمشتقة
٤- تطبيقات حياتية

مثال
حل المعادلات التفاضلية التالية
أو جد ص بدلالة س.

① $\frac{د ص}{د س} - \frac{٦ س}{ح^٢ ص} = ٠$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٦ س}{ح^٢ ص}$

$ح^٢ ص \, د ص = ٦ س \, د س$

$\frac{ح^٢ ص}{٢} = ٦ \frac{س^٢}{٢} + جـ$

$\frac{١}{٢} ح^٢ ص = ٣ س^٢ + جـ$.

② $\frac{د ص}{د س} - \sqrt{\frac{ص}{س}} = ٠$ حيث $س > ٠$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{١}{٢}}}$

$س^{\frac{١}{٢}} د ص = ص^{\frac{١}{٢}} د س$ / $س^{\frac{١}{٢}} ص^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{د ص}{ص^{\frac{١}{٢}}} = \frac{د س}{س^{\frac{١}{٢}}}$

$ص^{-\frac{١}{٢}} د ص = س^{-\frac{١}{٢}} د س$

$٢ ص^{\frac{١}{٢}} = ٢ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$٢ \sqrt{ص} = ٢ \sqrt{س} + جـ$.

③ $\frac{dص}{dس} = \frac{ظتا^2 ص}{س^4}$

$س^4 \, dص = ظتا^2 ص \, dس \Big/ س^4 \, ظتا^2 ص$

$\int \frac{dص}{ظتا^2 ص} = \int \frac{dس}{س^4}$

$\int هأ^2 ص \, dص = \int س^{-4} \, dس$

$-ظتا ص = \frac{س^{-3}}{-3} + جـ$

④ $\frac{dص}{dس} = 0$

$\int dص = \int 0 \, dس$

$ص = 0 \cdot س + جـ$

$\boxed{ص = جـ}$

⑤ $س^2 \frac{dص}{dس} = ص^2 س^5$

$س^2 \, dص = ص^2 س^5 \, dس \Big/ س^2 ص^2$

$\int \frac{dص}{ص^2} = \int \frac{س^5}{س^2} \, dس$

$\int ص^{-2} \, dص = \int س^3 \, dس$

$\frac{ص^{-1}}{-1} = \frac{س^4}{4} + جـ$

$\frac{-1}{2ص} = \frac{1}{4} س^4 + جـ$

⑥ $٦ س \, dس - ٤ ص^2 \, dص = هأ^4 ص \, dص$

$\int ٦ س \, dس = \int (هأ^4 ص + ٤ ص^2) \, dص$

$\frac{٦ س^2}{2} = \frac{هأ^4 ص}{4} + \frac{٤ ص^3}{3} + جـ$

$٣ س^2 = \frac{1}{4} هأ^4 ص + ص^3 + جـ$

⑦ $\frac{dص}{dس} = \frac{٣ س (س^2+2)^5}{هأ ص}$

$\int هأ ص \, dص = \int ٣ س (س^2+2)^5 \, dس$

فرضنا أن: $ع = س^2 + 2$

$\frac{dع}{dس} = 2س$

$dس = \frac{dع}{2س}$

$\int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ظتا^2 ص \, dص = \int \cancel{٣ س} ع^5 \frac{dع}{\cancel{2س}}$

$\frac{1}{2} ص - \frac{1}{2} ظتا ص = \frac{ع^6}{6} + جـ$

$\frac{1}{2} ص - \frac{1}{2} ظتا ص = \frac{1}{6} (س^2+2)^6 + جـ$

التكامل وتطبيقاته

⑧ $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$

$dy = e^x \cdot e^y \, dx \;/\; e^y$

$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x \, dx$

$\int e^{-y} dy = \int e^x \, dx$

$\frac{e^{-y}}{-1} = e^x + c$

⑨ $\frac{dy}{dx} = x \ln x$

$\int dy = \int x \ln x \, dx$

$u = \ln x \quad \nearrow \quad dv = x$

$du = \frac{1}{x} \quad \searrow \quad v = \frac{x^2}{2}$

$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx$

$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{2} x \, dx$

$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c$

⑩ $x \ln x \frac{dy}{dx} = y \quad / yx \ln x$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x}$

$z = \ln x$

$x = e^z$

$dx = e^z \, dz$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x \ln x} \times e^z \, dz$

$\ln|y| = \int \frac{1}{e^z \cdot z} \times e^z \, dz$

$\ln|y| = \ln|z| + c$

$\ln|y| = \ln|\ln x| + c$

⑪ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x + xy + y + 1}$

عامل مشترك

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x(1+y) + y + 1}$ عامل مشترك

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1+y)(x+1)}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{x+1} \quad / \sqrt{1+y}$

$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \int \sqrt{x+1} \, dx$

$\int (1+y)^{-\frac{1}{2}} dy = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$2(1+y)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + c$

$2\sqrt{1+y} = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$

① $x \ln x \, dy = y \, dx \quad / yx \ln x$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x}$

$z = \ln x$

$x = e^z$

$dx = e^z \, dz$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{e^z \cdot z} \times e^z \, dz$

$\ln|y| = \int \frac{1}{z} \, dz$

$\ln|y| = \ln|z| + c$

$\ln|y| = \ln|\ln x| + c$

(١٢) $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = (٢ جتا ٢س + ١)$ جا س

$٢ د ص = (٢ جتا ٢س + ١)(١ - جتا س)$ د س

$٢ د ص = ٢ جتا ٢س - ٢ جتا ٢س جتا س + ١ - جتا س$ د س

$٢ ص = \int س - ٢ جتا ٢س جتا س + ١$ د س

$٢ ص = س - \frac{٢}{٣} جا ٣س + س + ج$

$٢ ص = \frac{١}{٢} س^٢ - \frac{٢}{٣} س جا ٣س + س + ج$

(١٣) $ق^٢ ص - ط^٢ ص = ٠$

$ق^٢ د ص = ط^٢ ص$ د س $/ ق^٢$

$\frac{د ص}{ص} = \frac{ط^٢}{ق^٢}$ د س

$\int \frac{د ص}{ص} = \int (\frac{ط}{ق})^٢$ د س

$\int \frac{د ص}{ص} = \int (ط ق^{-١})^٢$ د س

$ص = \int ط^٢ ق^{-٢}$ د س

$ص = \frac{١}{٢} ط^٢ س - \frac{١}{٨} ق^{-٢} جا ٤س + ج$

(١٤) اذا كان ميل المماس لمنحنى $ه(س)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $٦س + ٤$ وكان منحنى $ه(س)$ يمر بالنقطة $(٢، ٥)$ جد قاعدة الاقتران $ه(س)$.

ميل المماس $= ٦س + ٤$

$ه'(س) = ٦س + ٤$

$ه(س) = \int ٦س + ٤$ د س

$ه(س) = ٣س^٢ + ٤س + ج$

بما أن $ه(٢) = ٥$

$ه(٢) = ١٢ + ٨ + ج = ٥$

$ج = -١٥$

$\therefore ه(س) = ٣س^٢ + ٤س - ١٥$

اذا كان ميل المماس مكتوباً بالسينات استخدم $ه'(س)$

اذا كان ميل المماس مكتوباً بالسينات والصادات نستخدم $\frac{د ص}{د س}$

التكامل وتطبيقاته

⑮ اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة سيادي

$\frac{قأس - حاس}{3ص^2}$ وكان صحناه

يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, 4)$ جد قاعدة العلاقة

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{قأس - حاس}{3ص^2}$

$3ص^2 \, دص = (قأس - حاس) \, دس$

$ص^3 = ط جاس + ح جاس + جـ$

لكنه $(\frac{\pi}{4}, 4)$ تحقق

$64 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + جـ$

$\Leftarrow جـ = 63 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore ص^3 = ط جاس + ح جاس + 63 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

⑯ اذا كان $ق'(س) = 12س^2 + 6$

وكان المستقيم $ص = 4س + 9$ يمس

منحنى $ق(س)$ عند النقطة $(1, 5)$

جد قاعدة الاقتران $ق(س)$

الحل

$\int ق'(س) = \int 12س^2 + 6 \, دس$

$ق(س) = 4س^3 + 6س + جـ$

لكنه ميل المماس = معامل س

$ق'(1) = 4$

$ق'(1) = 4 + 6 + جـ = 4$

$جـ = -6$

$\therefore ق(س) = \int 4س^3 + 6س - 6 \, دس$

$ق(س) = س^4 + 3س^2 - 6س + جـ$

لكنه $ق(1) = 5$

$ق(1) = 1 + 3 - 6 + جـ = 5$

$\boxed{جـ = 7}$

$\therefore ق(س) = س^4 + 3س^2 - 6س + 7$

2011
(١٧) اذا كان $\frac{d}{dx}(x) = 4$
وكان $f(1) = 5$ ، $\int f'(x)\,dx = 3$
جد قاعدة الاقتران $f(x)$.

$\int f'(x) = 4$

$f(x) = 4x + c$

$\int 4x + c\,dx = 3$

$2x^2 + cx = 3$

$2 + c - c = 3$

$c = 1$

$\therefore f(x) = 4x + 1$

$\int f(x)\,dx = \int 4x + 1\,dx$

$f(x) = 2x^2 + x + c$

$f(0) = 0 + 0 + c = 5$

$\therefore f(x) = 2x^2 + x + 5$

طريقة اخرى
يمكن الاستغناء عن التكامل $\int f'(x)\,dx = 3$

$f(x) = 2$

$f(1) - f(0) = 3$

$f(1) - 5 = 3$

$f(1) = 8$ وبالتعويض

حاول

(١٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (x, y) يساوي

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+4)(x-3)}{x^2 - 3x}$

جد قاعدة العلاقة اذا كان تمر بالنقطة $(1, 1)$

الحل

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+4)(x-3)}{x(x-3)}$

$dy = \frac{(x+4)(x-3)}{x(x-3)}\,dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+4}{x}$

$\int dy = \int 1 + \frac{4}{x}\,dx$

$y = x + 4\ln|x| + c$

* تذكر أن $ت(ن) = \frac{دع}{دن}$

$ع(ن) = \frac{دف}{دن}$

(١٩) جسم يتحرك بخط مستقيم من نقطة ثابتة ١٠م عن نقطة الأصل بسرعة ٢٠م/ث

وكان تسارعه $ت(ن) = ١٢ن + ٦$

جد معادلة الحركة (المسافة)

الحل

$ت = \frac{دع}{دن} = ١٢ن + ٦$

$ع = \int ١٢ن + ٦ \, دن$

$ع = ٦ن^٢ + ٦ن + جـ$

لكن $ع(٠) = ٢٠$

$ع(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٢٠$

$جـ = ٢٠$

$\therefore ع = \frac{دف}{دن} = ٦ن^٢ + ٦ن + ٢٠$

$ف = \int ٦ن^٢ + ٦ن + ٢٠ \, دن$

$ف = ٢ن^٣ + ٣ن^٢ + ٢٠ن + جـ$

لكن $ف(٠) = ١٠$

$ف(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ١٠$

$جـ = ١٠$

$\therefore ف = ٢ن^٣ + ٣ن^٢ + ٢٠ن + جـ$

(٢٠) قذف جسم رأسيا لأعلى من ارتفاع ٨٠م

بسرعة ٦٤م/ث

وكان تسارعه لأسفل = ٣٢ م/ث^٢

جد ① معادلة الحركة

② أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم

① $ت = \frac{دع}{دن} = -٣٢$

$ع = \int -٣٢ \, دن$

$ع = -٣٢ن + جـ$

لكن $ع(٠) = ٦٤$

$ع(٠) = ٠ + جـ = ٦٤ \Rightarrow جـ = ٦٤$

$\therefore ع = \frac{دف}{دن} = -٣٢ن + ٦٤$

$ف = \int -٣٢ن + ٦٤ \, دن$

$ف = -١٦ن^٢ + ٦٤ن + جـ$

لكن $ف(٠) = ٨٠$

$\Rightarrow جـ = ٨٠$

$\therefore ف(ن) = -١٦ن^٢ + ٦٤ن + ٨٠$

ملاحظة: لدينا عند $ت = -٣٢$ ولكن عند $ع = ٦٤$

② $ف$ أعظم عندما $ع = ٠$

$-٣٢ن + ٦٤ = ٠$

$٣٢ن = ٦٤$

$ن = ٢$

$\therefore ف$ أعظم $= -١٦ \times ٤ + ٦٤ \times ٢ + ٨٠$

$= -٦٤ + ١٢٨ + ٨٠$

$= ١٤٤$

التكامل وتطبيقاته

(٢١) تحرك جسم من السكون على خط مستقيم وتقطع مسافة ٢٠م بعد مرور ٤ ثواني وكان $ت = \frac{1}{4}$ جتا ع

جد المسافة التي يقطعها بعد $\frac{1}{4}$ ثانية

$$ت = \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع} = \frac{1}{4}$$

$$ع = ع$$

$$\frac{ع}{ع} = ن + جـ$$

تحرك الجسم من السكون ⇐ ع(٠) = ٠

$$٠ = ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$$

$$\therefore \frac{ع}{ع} = ن$$

$$ع = ٢ن$$

$$ع = \pm \sqrt{٢ن}$$ نهمل السالب

$$\therefore ع = \frac{ف}{ن} = \sqrt{٢} ن^{\frac{1}{2}}$$

$$ف = \sqrt{٢} ن^{\frac{1}{2}}$$

$$ف = \sqrt{٢} \times \frac{2}{3} ن^{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$ف(٤) = ٢٠$$

$$٢٠ = \sqrt{٢} \times \frac{2}{3} \sqrt{(٤)^٣} + جـ$$

$$٢٠ = \frac{4\sqrt{٢}}{3} \times ٨ + جـ$$

$$جـ = ٢٠ - \frac{32\sqrt{٢}}{3}$$

$$\therefore ف = \frac{4\sqrt{٢}}{3} \sqrt{ن^٣} + ٢٠ - \frac{32\sqrt{٢}}{3}$$

$$ف(١) = \frac{4\sqrt{٢}}{3} + ٢٠ - \frac{32\sqrt{٢}}{3} = ٢٠ - \frac{28\sqrt{٢}}{3}$$

(٢٢) آلة صناعية قيمتها عند الزمن ن = ٠ تساوي ٥٠٠ دينار وتتناقص قيمتها بمرور الزمن وفق العلاقة

$$\frac{ق}{ن} = -٥٠٠ (ن + ١)^{-٢}$$

احسب ثمن الآلة بعد ٣ سنوات

حيث ق : ثمن الآلة بعد ن سنة

$$ق = \int -٥٠٠ (ن + ١)^{-٢} \, د ن$$

$$ق = \frac{-٥٠٠ (ن + ١)^{-١}}{-١} + جـ$$

$$ق = \frac{٥٠٠}{ن + ١} + جـ$$

بما أن $ق|_{ن=٠} = ٥٠٠$

$$٥٠٠ = \frac{٥٠٠}{١} + جـ$$

$$جـ = ٤٥٠٠$$

$$\therefore ق = \frac{٥٠٠}{ن + ١} + ٤٥٠٠$$

$$ق|_{ن=٣} = \frac{٥٠٠}{٤} + ٤٥٠٠$$

$$= ٤٦٢٥$$

(٢٣) سُكب حريق في غابة اذا دل الزمن على مساحة الحريق وكان معدل ازدياد مساحة الحريق التناسبي ٢٠٠ دونم/ساعة اذا علمت ان مساحة الحريق لحظة اكتشافه تساوي ٣ دونمات. فما مساحة الحريق بعد مرور ٣ ساعات

الحل

$\frac{كم}{كز} = ٢٠٠$

$كم = ٢٠٠ \, م \, كز$

$\frac{كم}{م} = ٢٠٠ \, كز$

$لعم = ٢٠٠ ن + جـ$

لكن $م = ٣$ عندما $ن = ٠$

$لعم = ٠ + جـ \Leftarrow جـ = لعم$

$لعم = ٢٠٠ ن + لعم$

عندما $ن = ٣$

$لعم = ٦٠٠ + لعم$

$\Leftarrow م = هـ$

$= هـ^{٦٠٠} \times هـ^{لعم}$

$= ٣ هـ^{٦٠٠}$

(٢٤) تكاثرت في مزرعة ما نوع من النحل وفق العلاقة $\frac{كل}{كز} = \frac{١}{٤} ل$ نحلة/ساعة حيث ل عدد النحل

اذا كان عدد النحل السائد ٢٠٠ نحلة لحظة اكتشافها فما عدد النحل بعد مرور ٨ ساعات

$\frac{كل}{ل} = \frac{١}{٤} كز$

$لعل = \frac{١}{٤} ن + جـ$

$ل = ٢٠٠$ عندما $ن = ٠$

$لعم = ٠ + جـ \Leftarrow جـ = لعم$

$لعل = \frac{١}{٤} ن + لعم$

عندما $ن = ٨$

$لعل = ٢ + لعم$

$٢ + لعم \Leftarrow ل = هـ$

$ل = هـ^{٢} \times هـ^{لعم}$

$ل = هـ^{٢} \times ٢٠٠$

$= ٢٠٠ هـ^{٢}$

٢٥) خزان للماء فارغ سعته ١٠/٥ م٣ يصب فيه الماء تدريجياً بمعدل (ن+٢) م٣/د حيث ن زمن التشغيل اللازم لامتلاء الخزان.

الحل

$\frac{دح}{دن} = (ن+٢)$

$\therefore دح = (ن+٢)\, دن$

$ح = \frac{ن^٢}{٢} + ٢ن + ج$

عندما ن = ٠ ، ح = ٠

$\therefore ٠ = ٠ + ٠ + ج \Rightarrow ج = ٠$

$\therefore ح = \frac{ن^٢}{٢} + ٢ن$

عندما ح = ١٠/٥

$١٠/٥ = \frac{ن^٢}{٢} + ٢ن$ ×٢

$ن^٢ + ٤ن = ٢١$

$ن^٢ + ٤ن - ٢١ = ٠$

$(ن+٧)(ن-٣) = ٠$

$ن = -٧$ ✗

$\boxed{ن = ٣}$ د

٢٦) لبئر نفط ستنتج ٤٠٠ برميل في الشهر اذا كان سعر البرميل الحالي ١٨ دولار وستوقع ان يزداد سعر البرميل ٠.٢ دولار شهرياً احسب مردود الدخل لعدد ستة عشر (١٦) شهر

نفرض الدخل = م

$\frac{دم}{دن}$ = عدد البراميل × (السعر + الزيادة)

$\frac{دم}{دن} = ٤٠٠ (١٨ + ٠.٢ن)$

$\therefore دم = (٤٠٠ \times ١٨ + ٤٠٠ \times \frac{٢}{١٠٠} ن)\, دن$

$م = ٧٢٠٠ ن + ١٢ن^٢ + ج$

$|م|_{ن=٠} = ٧٢٠٠ \times ٠ + ٦(٠)^٢ + ج = ٤٠٠$

$ج = ٤٠٠$

$\therefore م = ٧٢٠٠ ن + ٦ن^٢ + ٤٠٠$

عندما ن = ١٦ شهر = ٤ سنة

$|م|_{ن=٤} = ٧٢٠٠ \times ٤ + ٦(٤)^٢ + ٤٠٠$

$= ٢٨٨٠٠ + ٩٦ + ٤٠٠$

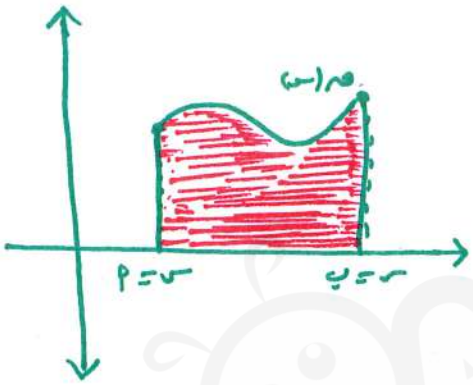
$= ١٧٦٦٥٦$ دولار

المساحة

الحالة الأولى :- المساحة المحصورة بين منحنى واحد فقط ومحور السينات

نظرية :- إذا كان $هـ(س) \geq 0$ على $[أ، ب]$

فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $هـ(س)$ ومحور السينات والمستقيمين $س = أ$ ، $س = ب$



هي $م = \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, د س$

وبشكل عام $م = \left| \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, د س \right|$ أو $م = \int_{أ}^{ب} |هـ(س)| \, د س$

لتحديد التعريف والتكامل

تحديد التكامل ثم نأخذ المطلق للناتج

طريقة الحل :-

نضع $هـ(س) = 0$ ونجد قيم س (الجذور)

إذا وقعت قيم س الناتجة بين حدود التكامل { هما المستقيمات المعطاه باسم $س = أ$ ، $س = ب$ } عدد

نجزئ التكامل حسب الامتحان

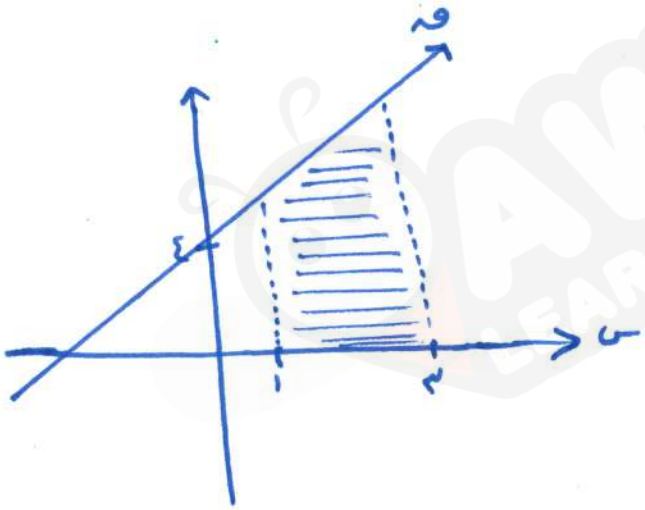
وإذا لم تقع تكمل . وإذا لم تعطى الحدود نعتبر قيم س هي الحدود.

ملاحظات

* اي مستقيم باسم س = عدد يعني حد صد حدود التكامل
اي مستقيم باسم ص = عدد يعني اقتران وتكامل

* محور السينات معادلته ص = ٠ ويعني اقتران
محور الصادات معادلته س = ٠ يعني حد صد حدود التكامل

أمثلة



① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = ٢س + ٤ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣

الحل :- ٢س + ٤ = ٠
س = -٢ تهمل لانها تقع بين ١ ، ٢

$$\therefore م = \left| \int_{1}^{2} (2س + 4)\, دس \right|$$

$$= \left| س^2 + 4س \Big|_{1}^{2} \right|$$

$$= \left| (4 + 8) - (1 + 4) \right|$$

$$= 12 - 5$$

= ٧ وحدة .

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
$f(x) = x^2 - 2x$ ومحور السينات
والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 4$

الحل

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ ✗

$x = 2$ نقبل

$$م_1 = \left| \int_1^2 x^2 - 2x \, dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - x^2 \Big|_1^2 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - (4-1) \right|$$

$$= \left| \frac{7}{3} - 3 \right| = \left| \frac{7-9}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

$$م_2 = \left| \int_2^4 x^2 - 2x \, dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} \Big|_2^4 - x^2 \Big|_2^4 \right|$$

$$= \left| \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) - (16-4) \right|$$

$$= \frac{56}{3} - 12 = \frac{56-36}{3} = \frac{20}{3}$$

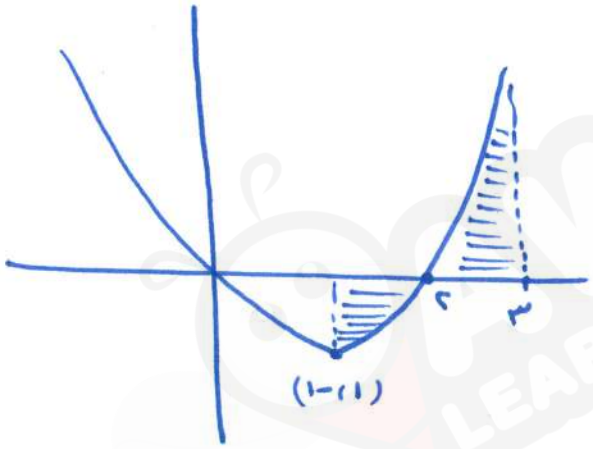
$$م = م_1 + م_2 = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} = \frac{22}{3}$$

الرسم

$$س = \frac{-ب}{2أ} = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = 1$$

$$ص = ق(1) = 1 - 2 = -1$$

الرأس $(1, -1)$



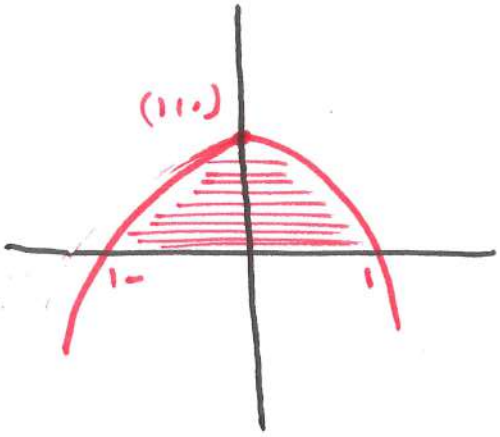
بالرسم

$$م = \int_1^2 ص \, س + \int_2^3 س^2 - 2س \, دس$$

③ حيث المنطقة المحصورة بين المنحنى

$f(x) = 1 - x^2$ ومحور السينات

$1 - x^2 = 0 \Leftarrow x = \pm 1$



$$م = \int_{-1}^{1} |1 - x^2| \, dx$$

$$= \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1}$$

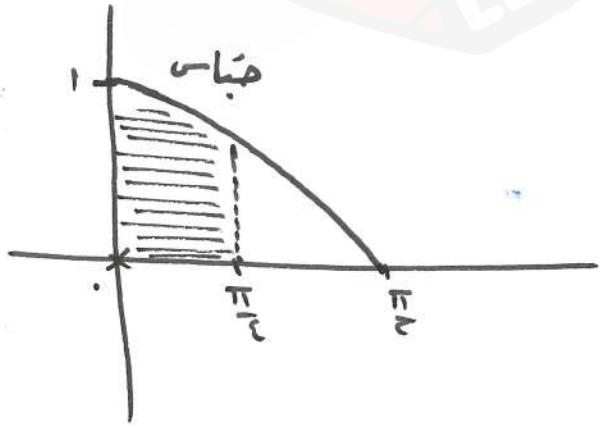
$$= (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3})$$

$$= \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}$$

④ حيث المنطقة المحصورة بين المنحنى

$f(x) =$ جتاس بالفترة $[0، \frac{\pi}{4}]$

ومحور السينات



جتاس $= 0$

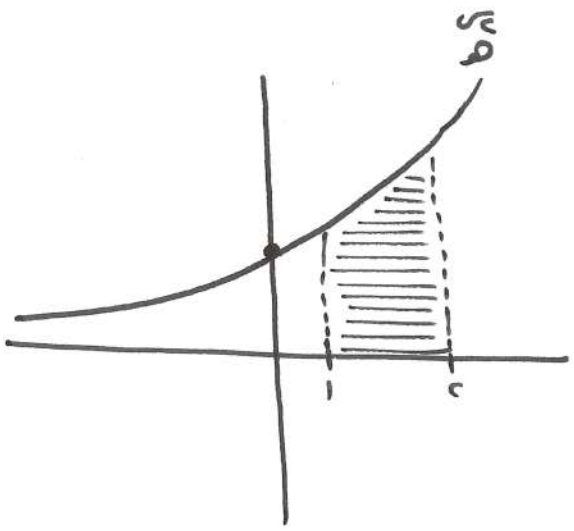
$\Leftarrow x = \frac{\pi}{2}، \frac{3\pi}{2}$ مرفوض

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |جتاس \, dx|$$

$$= |جاس|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} - 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$



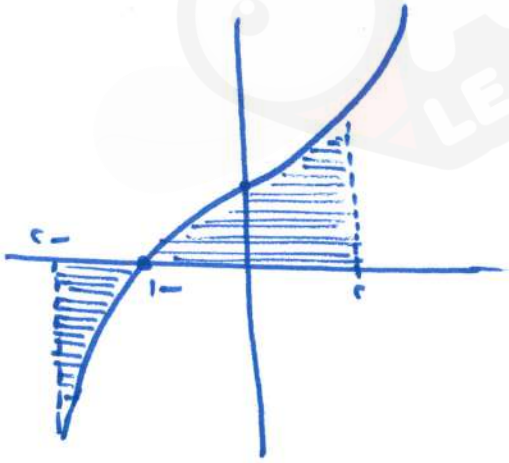
② مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
ق(س) = هـ^س ومحور السينات
والمستقيمين س = ١ ، س = ٢

هـ^س = ٠ مستحيل

م = | ∫_أ^ب هـ^س دس |

= | هـ^س / ٢ |_١^٢

= ½ (هـ^٤ − هـ^٢)



① مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
ق(س) = س^٣ + ١ ومحور السينات
والمستقيمين س = -٢ ، س = ٢

س^٢ + ١ = ٠

س^٢ = -١

س = -١ تقع

م١ = | ∫_-٢^-١ س^٢ + ١ دس |

م٢ = | ∫_-١^٢ س^٢ + ١ دس |

م = م١ + م٢

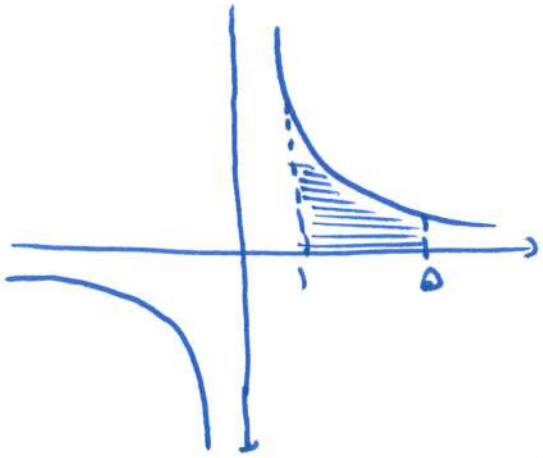
⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

$f(x) = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$

ومحور السينات والمستقيمين

$x = 1$ ، $x = e$

الحل $\frac{1}{x} = 0$ مستحيل



$$م = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx$$

$$= [\ln x]_1^e$$

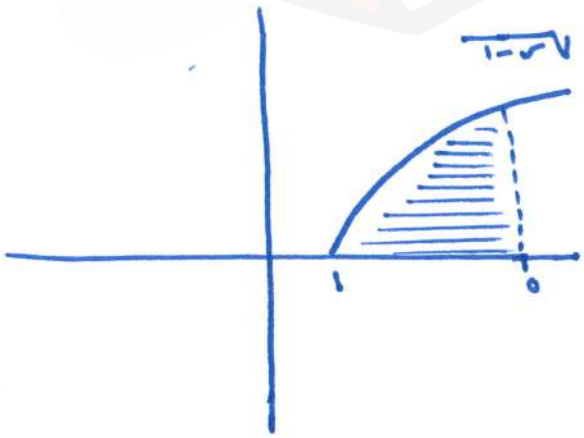
$$= \ln e - \ln 1$$

$$= 1 - 0 = \boxed{1}$$

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات

والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 5$



$\sqrt{x-1} = 0$ بـ

$x - 1 = 0$

$\boxed{x = 1}$

$$م = \int_1^5 \sqrt{x-1}\, dx$$

$$= \int_1^5 (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\Big|_1^5$$

$$= \frac{2}{3}(8 - 0) = \frac{16}{3}$$

⑨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين

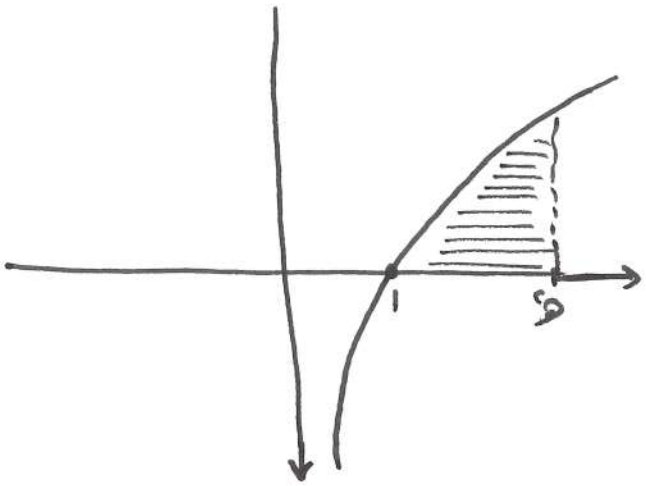
منحنى $ص = لو_{هـ} س$

ومحور السينات والمستقيمين

$س = ١ ، س = هـ^{٢}$

الحل $لو_{هـ} س = ٠$

$س = ١$



$$م = \int_{١}^{هـ^{٢}} |لو_{هـ} س| \, دس$$

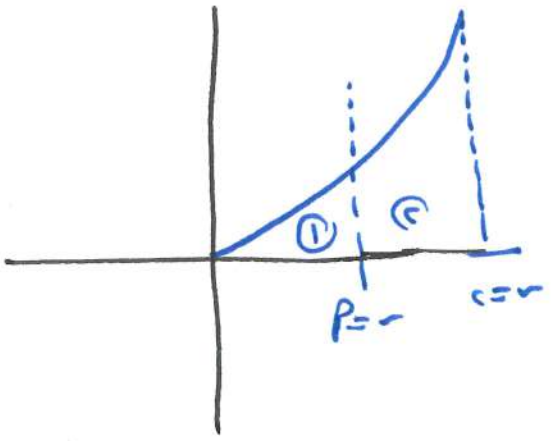
$$= [س لو_{هـ} س - س]_{١}^{هـ^{٢}}$$

$$= (هـ^{٢} لو_{هـ} هـ^{٢} - هـ^{٢}) - (١ لو_{هـ} ١ - ١) = هـ^{٢} + ١$$

⑩ اذا كان المستقيم $س = م$ يقسم المساحة المحصورة بين

منحنى $س = \sqrt{ص}$ والمستقيم $س = ٢$ ومحور السينات

الى قسمين متساويين جد (م)



الحل $\because س^{٢} = ص$ حيث $س \in ح^{+}$

$م_{١} = م_{٢}$

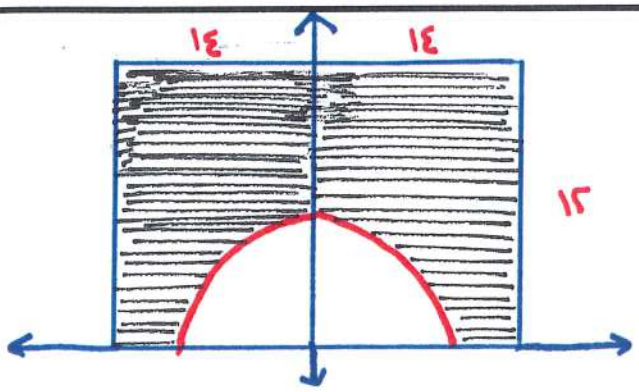
$$\int_{م}^{٢} س^{٢} \, دس = \int_{٠}^{م} س^{٢} \, دس$$

$$\frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{م}^{٢} = \frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{٠}^{م}$$

$$\frac{م^{٣}}{٣} - \frac{٨}{٣} = \frac{م^{٣}}{٣} - ٠$$

$$٢م^{٣} = ٨$$

$$م^{٣} = ٤ \Leftarrow م = \sqrt[٣]{٤}$$



(١١) الشكل المجاور يمثل الواجهة الأمامية لمبنى وزارة التربية والتعليم. عند خارجها على شكل منحنى (قطع مكافئ) معادلته $ص = ٤ - \frac{س^٢}{٤}$ حيث مساحة المنطقة المظللة. ثم احسب تكلفة الدهان علمًا أنه سعر المتر المربع ٥ دنانير

الحل

مساحة المظلل = مساحة المستطيل − مساحة المدخل (القطع)

$م = ١٢ \times ٨ - \int_{-٤}^{٤} (٤ - \frac{س^٢}{٤})\, دس$

$٤ - \frac{س^٢}{٤} = ٠$
$١٦ = س^٢$
$س = \pm ٤$

$= ٩٦ - [٤س]_{-٤}^{٤} + [\frac{س^٣}{١٢}]_{-٤}^{٤}$

$= ٩٦ - (١٦+١٦) + \frac{٦٤}{١٢} + \frac{٦٤}{١٢}$

$= ٩٦ - ٣٢ + \frac{١٢٨}{٣}$

$= ٣٠٤ + \frac{٢٢}{٣}$

$= \frac{٩١٢}{٣} + \frac{٢٢}{٣} = \frac{٩٤٤}{٣}$

الكلفة $= \frac{٩٤٤}{٣} \times ٥ = \frac{٤٧٢٠}{٣}$

الحالة الثانية المساحة المحصورة بين منحنى اقترانين

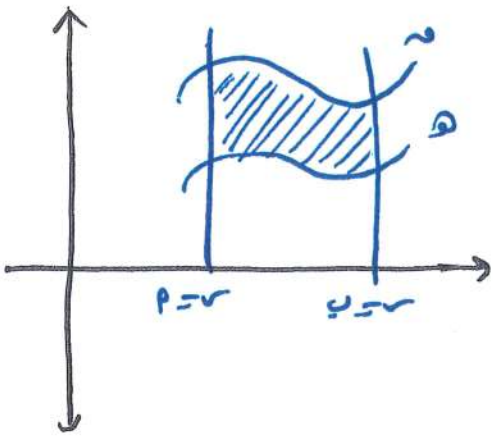
نظرية اذا كان $هـ(س) \geq د(س)$ على $[ب، أ]$

فان مساحة المنطقة المحصورة بين

منحنى $هـ(س)$، ومنحنى $د(س)$

والمستقيمين $س = أ$، $س = ب$ هي

$$م = \int_{أ}^{ب} (هـ(س) - د(س))\, دس .$$



طريقة الحل :-

نضع $هـ(س) = د(س)$ ونحل المعادلة $هـ(س) - د(س) = 0$ ونأخذ قيم س

اذا وقعت قيم س بين الحدود نجزئ التكامل

واذا لم تقع تهمل . واذا لم تعطى لك الحدود تصير قيم س التي هي الحدود

ونعرف اي الاقترانين أكبر

بالرسم هو الاعلى

سيكون رسم عوض الحد السفلي او العلوي او ماشئنا في كلا الاقترانين

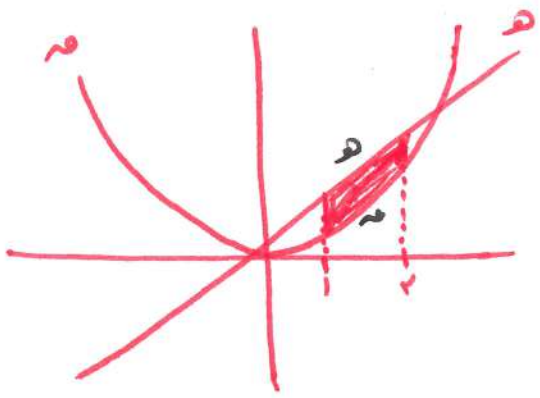
والاقتران الذي يعطي قيمة أكبر هو الاول .

(ويفضل دائما التعويض ماسبقها اي اقلها)

① حيث مساحة المنطقة المحصورة بين

منحنى $ه(س) = س^2$ ، $د(س) = 4س$

والمستقيمين $س = 1$ ، $س = 3$



الحل $ه = د$

$س^2 = 4س$

$س^2 - 4س = 0$

$س(س - 4) = 0$

$س = 0$ ، $س = 4$ مرفوض

$$م = \int_1^3 (4س - س^2)\, دس$$

$$= 2س^2 \Big|_1^3 - \frac{س^3}{3}\Big|_1^3$$

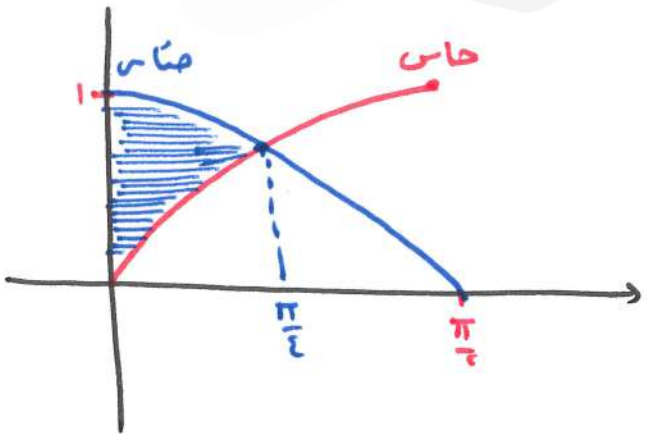
$$= 18 - 2 - (\frac{27}{3} - \frac{1}{3})$$

$$= 16 - \frac{26}{3} = \frac{48}{3} - \frac{26}{3} = \frac{22}{3}$$

② حيث مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

$ه(س) = جا س$ ، $د(س) = جتا س$

ومحور الصادات وبالربع الأول.



محور الصادات $س = 0$

$ه = د$

جا س = جتا س

$س = \frac{\pi}{4}$ ، $س = \frac{\pi}{2}$ مرفوض

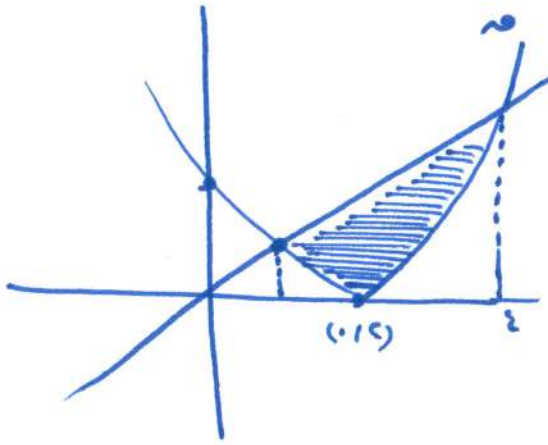
$$م = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (جتا س - جا س)\, دس$$

$$= جا س \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + جتا س \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ه(س) = س^2 - 3س + 3$ والمستقيم $ص = س$



$ه = ص$

$س^2 - 3س + 3 = س$

$س^2 - 4س + 3 = 0$

$(س - 3)(س - 1) = 0$

$س = 3 ، س = 1$

$م = \int_1^3 [س - (س^2 - 3س + 3)]\, د س$

$= \int_1^3 -س^2 + 4س - 3\, د س$

$= [-\frac{س^3}{3} + \frac{4س^2}{2} - 3س]_1^3$

$س = -\frac{ب}{2أ} = \frac{4}{2} = 2$

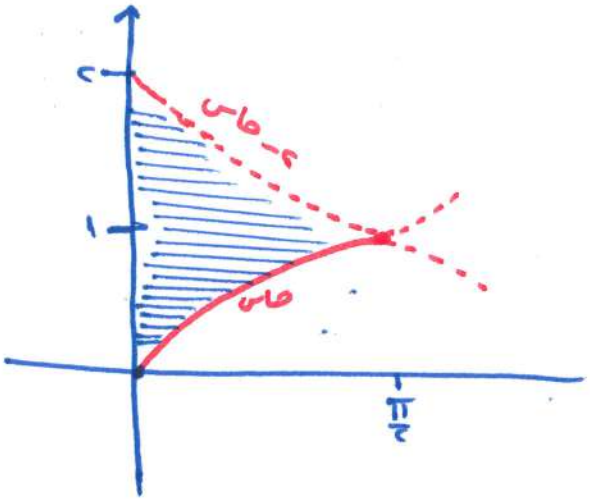
$ص = ه(2) = 0$

$(2,0)$

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ه(س) = 2 - جاس$ ، $و(س) = جاس$، ومحور الصادات وبالربع الأول

$جاس = 1$

$س = \frac{\pi}{2}$



$ه = و$

$2 - جاس = جاس$

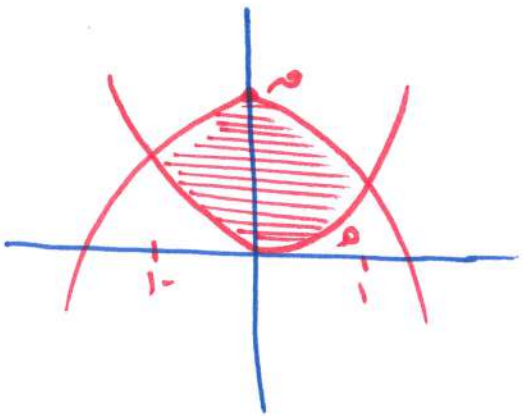
$2 = 2جاس$

$م = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 - جاس - جاس\, د س$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 - 2جاس\, د س$

$= [2س + 2جتاس]_0^{\frac{\pi}{2}}$

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٢ - س^٢$ ، $هـ(س) = س^٢$



$ق = هـ$

$٢ - س^٢ = س^٢$

$٢ = ٢س^٢$

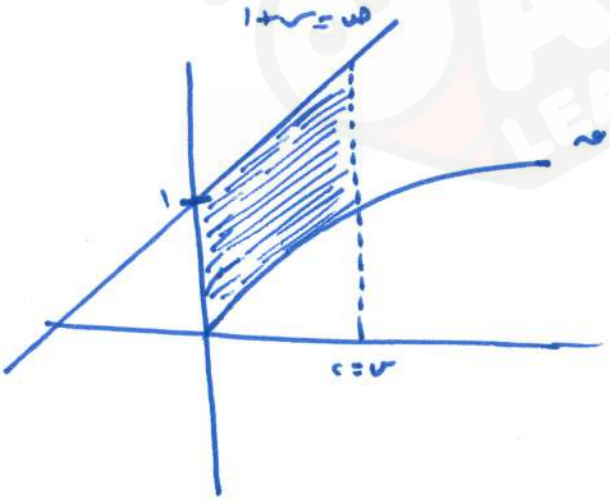
$س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

$$م = \int_{-١}^{١} (٢ - س^٢ - س^٢)\, دس$$

$$= \int_{-١}^{١} (٢ - ٢س^٢)\, دس$$

$$= [٢س - \frac{٢}{٣}س^٣]_{-١}^{١}$$

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $ص = س + ١$ ومحور الصادات والمستقيم $س = ٢$



$س = ٠$

$ق = ص$

$\sqrt{س} = س + ١$ رفع

$س = س^٢ + ٢س + ١$

$س^٢ + س + ١ = ٠$

لا حل

$$م = \int_{٠}^{٢} (س + ١ - \sqrt{س})\, دس$$

$$= [\frac{١}{٢}س^٢ + س - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{٤}{٢} - ٠ + ٢ - ٠ - \frac{٢}{٣}(\sqrt{٨} - ٠)$$

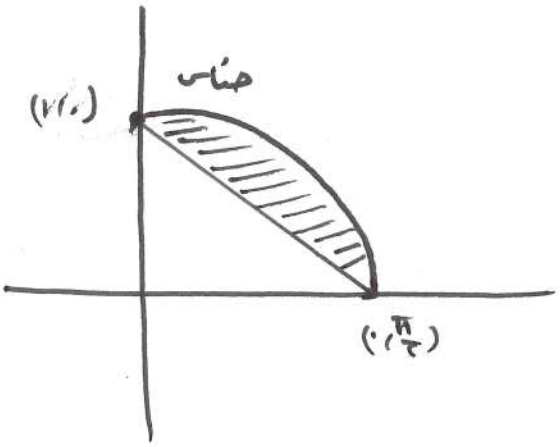
$$= ٤ - \frac{٢}{٣}\sqrt{٨}$$

⑦ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

منحنى $f(x) = \cos x$

والمنطقة المستقيمة المواصلة بين

النقطتين $(0,1)$ ، $(\frac{\pi}{2},0)$



أولاً نجد معادلة المنطقة (المستقيم)

الميل $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}-0} = -\frac{2}{\pi}$

المعادلة $ص - 1 = -\frac{2}{\pi}(س - 0)$

$$ص = -\frac{2}{\pi}س + 1$$

$ف = ص$

$جتاس = -\frac{2}{\pi}س + 1$ جسب

حدود التكامل هي الاحداثيات السينية للنقط $س = 0$ ، $س = \frac{\pi}{2}$

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [جتاس - (-\frac{2}{\pi}س + 1)]\, د س$$

⑧ جد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور

المحصورة بين منحنى $ف(س) = 7 + 2س - س^2$

والمستقيم ل المار بالنقطتين $(-2,-3)$ ، $(4,3)$

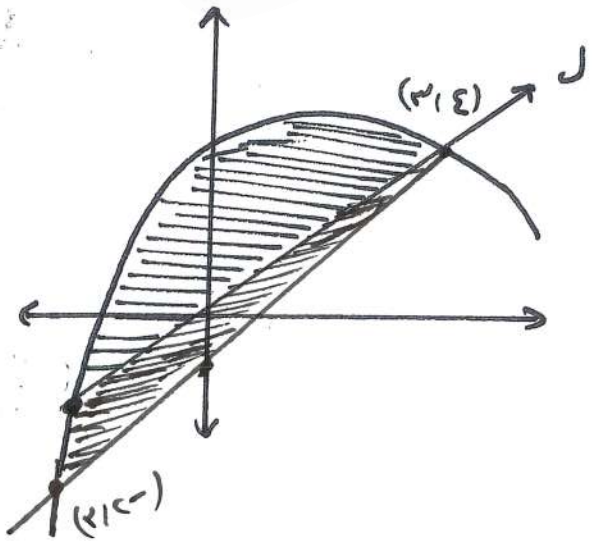
نجد معادلة المستقيم الميل $= \frac{3+3}{4+2} = 1$

المعادلة $ص + 3 = 1(س + 2)$

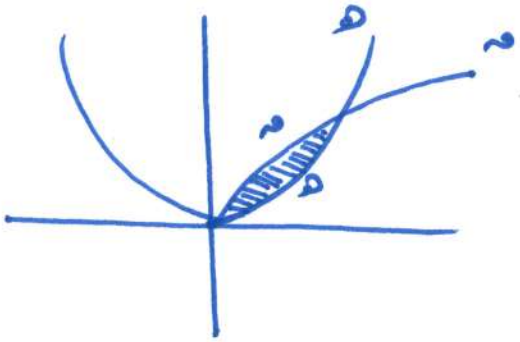
$ص = س - 1$

الحدود $س = -2$ ، $س = 4$

$$م = \int_{-2}^{4} [(7 + 2س - س^2) - (س - 1)]\, د س$$



⑨ إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى $هـ(س) = \overline{أ م}$ ، $هـ(س) = \frac{س^٤}{م}$ حيث $م > ٠$ تساوي ١٢ وحدة مساحة فجد م.



$هـ = هـ$

$\overline{أ م} = \frac{س^٤}{م}$ ربع

$م س = س^٤$

$س^٤ = م^٢ س$

$س^٤ - م^٢ س = ٠$

$س(س^٣ - م^٣) = ٠$

إما $س = ٠$ أو $س = م$

$$\int_{٠}^{م} \left(\overline{أ م} - \frac{س^٤}{م} \right) دس = ١٢$$

$$= \int_{٠}^{م} \frac{(م س)^{\frac{٢}{٣}}}{م^{\frac{٢}{٣}}} - \frac{س^٢}{م^٢} = ١٢$$

$$= \frac{٣}{٥} \left[(م س)^{\frac{٥}{٣}} \right]_{٠}^{م} - \frac{١}{٣} \left[س^٣ \right]_{٠}^{م} = ١٢$$

$$= \frac{٣}{٥} (م^٢ - ٠) - \frac{١}{٣} (م^٣ - ٠) = ١٢$$

$$\frac{٣}{٥} م^٣ - \frac{١}{٣} م^٣ = ١٢$$

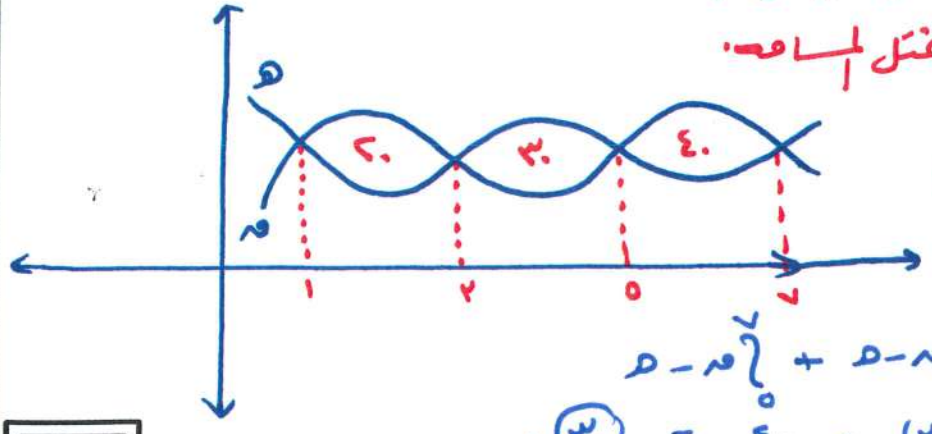
$\frac{١}{١٥} م^٣ = ١٢$

$م^٣ = ٣٦$

$م = \pm ٦$ مرفوض لأنه

$\boxed{م = ٦}$

⑩ الشكل المجاور يمثل رسم منحنى $هـ(س)$ ، $هـ(س)$ حيث الأعداد داخل الشكل تمثل المساحة.

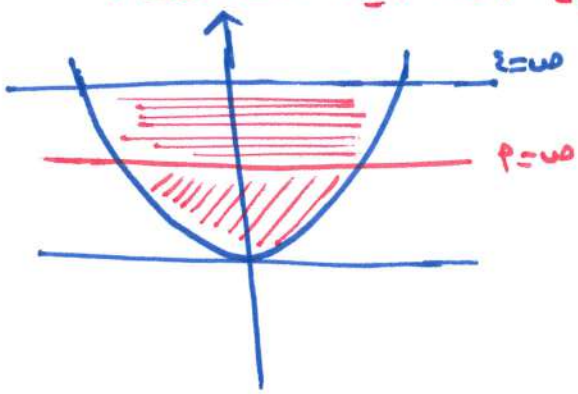


جد $\int_{١}^{٧} (هـ(س) - هـ(س)) دس$.

$$\int_{١}^{٧} هـ - هـ = \int_{١}^{٢} هـ - هـ + \int_{٢}^{٥} هـ - هـ + \int_{٥}^{٧} هـ - هـ$$

$$= ٢٠ + (-٣٠) + ٤٠ = (٣٠)$$

(11) اذا كان المستقيم $ص = م$ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى $ه(س) = س^2$ والمستقيم $ص = 4$ الى قسمين متساويين بالمساحة حيث $م > 0$.



نجد المساحة المحصورة بين $ه = س^2$
$ص = 4$

$ه = ص$
$س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$

$$م = \int_{-2}^{2} (4 - س^2)\, دس$$
$$= 4س \Big|_{-2}^{2} - \frac{س^3}{3} \Big|_{-2}^{2}$$
$$= (8+8) - (\frac{8}{3} + \frac{8}{3}) = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$$

نصف المساحة $\frac{32}{3}$ او $\frac{16}{3}$

بين $ص = 4$ و $ص = م$

بين $ص = م$ و $ه = س^2$

نأخذ المساحة بين $ه = س^2$ و $ص = م$

$س^2 = م$
$س = \pm \sqrt{م}$

$$\int_{-\sqrt{م}}^{\sqrt{م}} (م - س^2)\, دس = \frac{16}{3}$$
$$م س - \frac{س^3}{3} \Big|_{-\sqrt{م}}^{\sqrt{م}} = \frac{16}{3}$$
$$م\sqrt{م} - \frac{(\sqrt{م})^3}{3} - (-م\sqrt{م} + \frac{(\sqrt{م})^3}{3}) = \frac{16}{3}$$
$$2م\sqrt{م} - \frac{2}{3}م\sqrt{م} = \frac{16}{3}$$
$$\frac{4}{3}م\sqrt{م} = \frac{16}{3}$$
$$م\sqrt{م} = 4$$

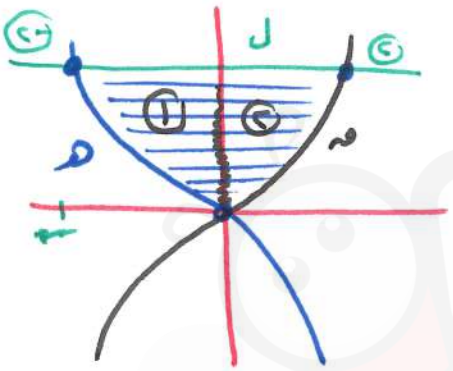
بتربيع الطرفين $م^3 = 16$

$$م = \sqrt[3]{16}$$

الحالة الثالثة المساحة المحصورة بين ٣ منحنيات فأكثر.

في هذه الحالة لابد من الرسم أولاً
وتحليل المنطقة المطلوبة ثم ايجاد نقط تقاطع المنحنيات مع بعضها
المنطقة المطلوبة ثم تكامل حسب الحالة الثالثة للمساحة

① جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س²، ه(س) = -س، ل(س) = ٨



الحل الرسم أولاً

ل = ه	ل = ق
٨ = -س	٨ = س²
س = -٨	س = ٨

المسطرة

$$م = \int_{-٨}^{٠} (ل - ه)\,د س + \int_{٠}^{٨} (ل - ق)\,د س$$

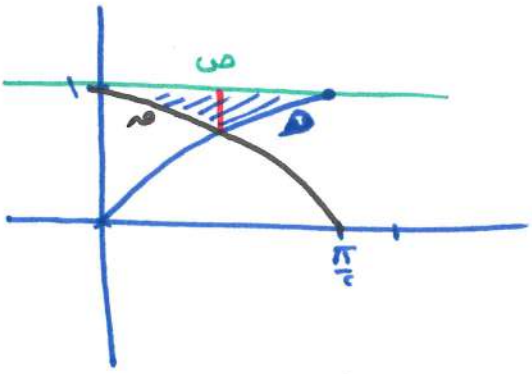
$$= \int_{-٨}^{٠} (٨ + س)\,د س + \int_{٠}^{٨} (٨ - س^{٢})\,د س$$

$$= ٨(٠ + ٨) + \frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{-٨}^{٠} + ٨(٨ - ٠) - \frac{س^{٣}}{٣}\Big|_{٠}^{٨}$$

$$= ١٦ + ٠ - \frac{١٦}{٣} + ١٦ - \frac{٥١٢}{٣}$$

$$= ٣٢ - ٨ = ٢٤$$

② مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \cos x$ ، $g(x) = \sin x$ والمستقيم $x = 1$ ومحور الصادات وبالربع الأول.



$f = g$

$\sin x = \cos x$

$x = \frac{\pi}{4}$

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ص_د - ص_ه + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ص_ه - ص_د$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1 - \cos x \, د س + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin x \, د س$$

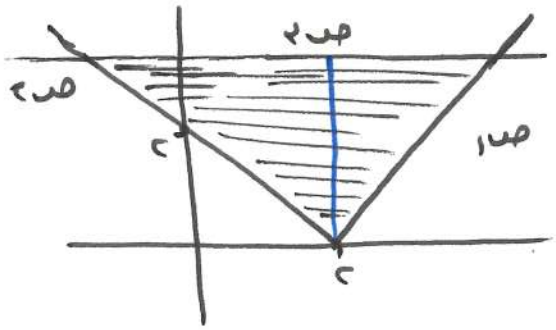
③ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = |x - 2|$ والمستقيم $ص = 4$

الحل نعيد التعريف كالآتي

$ص_1 = x - 2$ حيث

$ص_2 = 2 - x$ سالب

$ص_3 = 4$



نجد نقاط تقاطع $ص_3$ مع الصادات

نضع $x = 0$

$ص = ص_3$

$ص_2 = ص_3$

$4 = 2 - x$

$x = -2$

$ص_2 = ص_1$

$4 = x - 2$

$x = 6$

$$م = \int_{-2}^{2} ص_2 - ص_3 + \int_{2}^{6} ص_2 - ص_1$$

وزاري شتوي

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص_1 = |س-2|$ ومنحنى $ص_2 = 10-س^2$ وبالربع الأول.

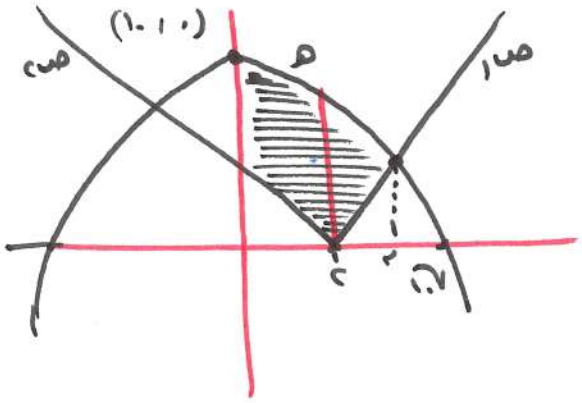
الحل

لتحديد التوقيف

$ص_1 = س-2$

$ص_2 = 2-س$

$ص = 10-س^2$



$ص_1 = ص$

$س-2 = 10-س^2$

$س^2+س-12 = 0$

$(س+4)(س-2) = 0$

$س = -4$ مرفوض $\quad س = 2$

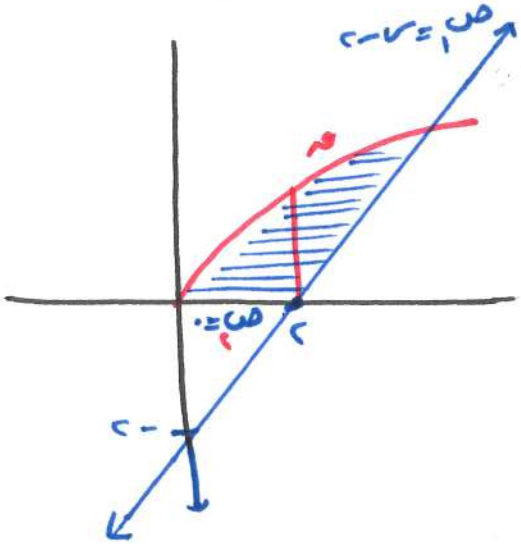
$10-س^2 = 0$

$س = \pm\sqrt{10}$

$$م = \int_{أ}^{ج} (ص - ص_2) + \int_{ج}^{2} (ص - ص_1)$$

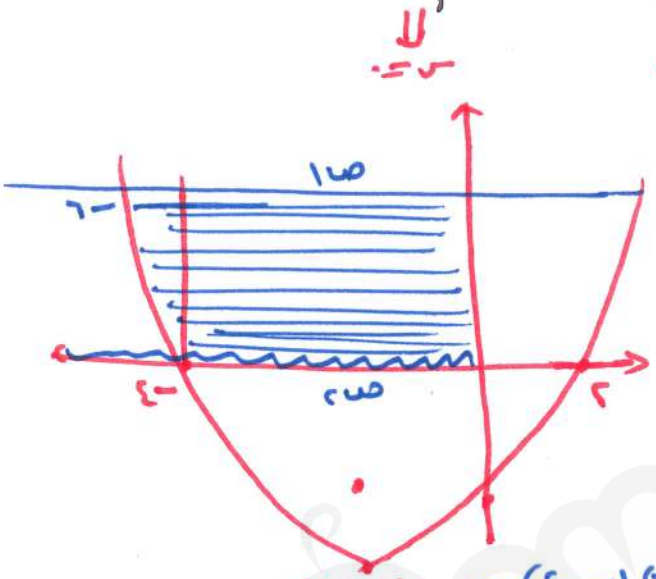
⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = \sqrt{س}$ ، والمستقيم $ص = س-2$ ومحور السينات ومحور الصادات.

$ص = 0$	$س = 0$
$ص_1 = س-2$	
$ص_2 = 0$	
$ص = \sqrt{س}$	$م = ص_1$
$ص_1 = ص_2$	$\sqrt{س} = س-2$
$س-2 = 0$	$س - \sqrt{س} - 2 = 0$
$س = 2$	$(\sqrt{س}-2)(\sqrt{س}+1) = 0$
	$\sqrt{س} = 2 \Rightarrow س = 4$
	$\sqrt{س} = -1$ مرفوض



$$م = \int_{أ}^{ج} (م - ص_2) + \int_{ج}^{4} (م - ص_1)$$

⑥ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ه(س) = س^3 + 3س^2 - 8$ والمستقيم $ص = 16$ ومحور السينات السالب ومحور الصادات.



$ص = ه$ ⇐ $س = 0$

نركم $ه$ $س = \frac{-ب}{2أ} = \frac{-6}{2} = -3$

$ص = ه(-3) = -9$

$(-3 , -9)$

$س^3 + 3س^2 - 8 = 0$

$(س + 4)(س + 2)(س - 1) = 0$

$س = -4$

$س = -2$

$ص = 16$ ⇐ $ه$

$16 = س^3 + 3س^2 - 8$

$س^3 + 3س^2 - 24 = 0$ ⇐ $(س - 2)(س + 3)(س + 4) = 0$

$س = 2$

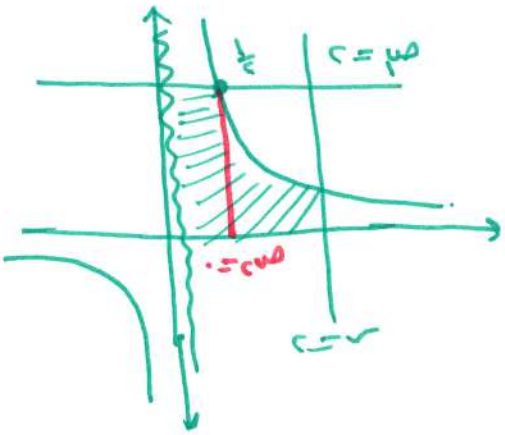
$س = -3$

$س = -4$

$م = \int_{-6}^{-4} (ص_1 - ه)\,د س + \int_{-4}^{0} (ص_1 - ص_2)\,د س$

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ه(س) = \frac{1}{س}$ والمستقيم $ص = 2$ ومحور السينات والصادات والمستقيم $س = 2$

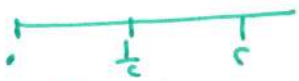
$ص = 0$ ⇐ $س = 0$



$ه = ص_1$

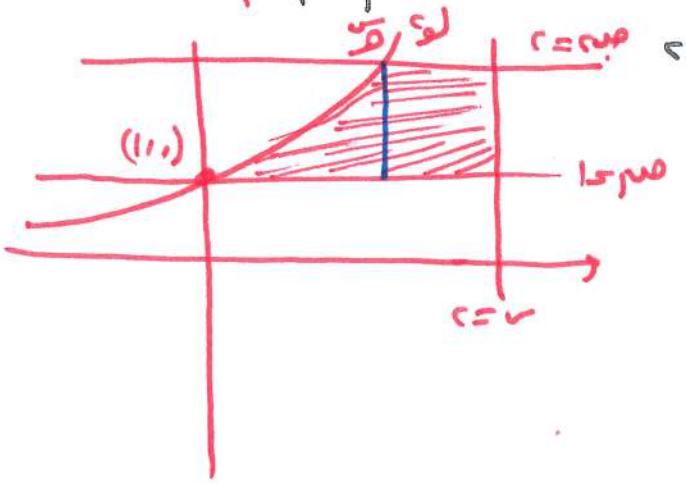
$\frac{1}{س} = 2$

$س = \frac{1}{2}$



$م = \int_{0}^{\frac{1}{2}} ص_1 - ص_2\,د س + \int_{\frac{1}{2}}^{2} ه - ص_2\,د س$

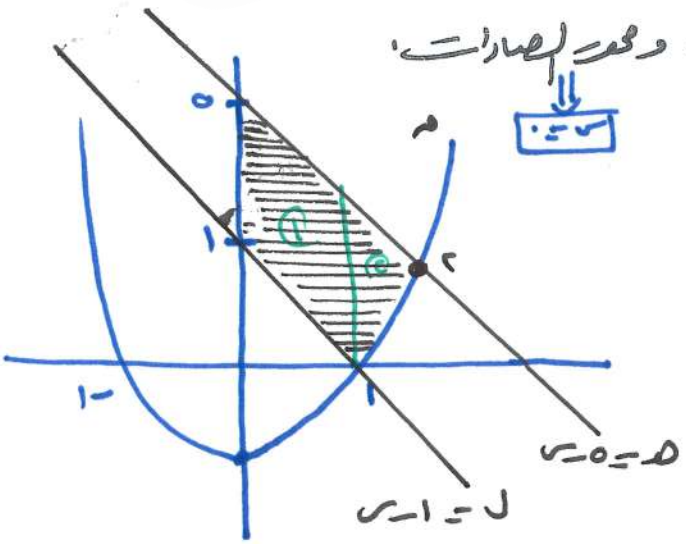
⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = هـ^{س}$ ، والمستقيم $ص = 1$ والمستقيم $ص = 2$ والمستقيم $س = 2$



$ص = هـ^{س}$
$2 = هـ^{س}$
$س = لو_{هـ} 2$

$$م = \int_{1}^{لو 2} (هـ^{س} - 1)\, دس + \int_{لو 2}^{2} (2 - 1)\, دس$$

⑨ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = س^2 - 1$ ، $ص = 5 - س$ والمستقيم $ل: س = 1$ بالربع الأول وفي الصادرات.



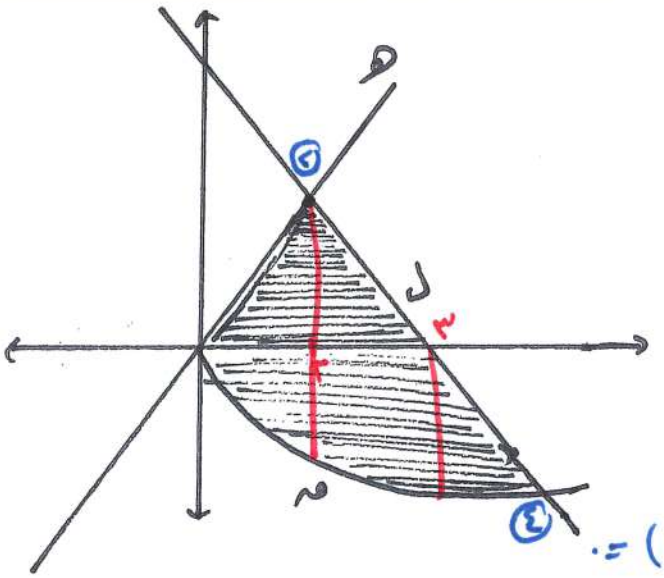
$ص = ص$
$س^2 - 1 = 5 - س$
$س^2 + س - 6 = 0$
$(س + 3)(س - 2) = 0$
$س = -3$ مرفوض
$س = 2$

$$م = \int_{0}^{1} (ص - ل)\, دس + \int_{1}^{2} (ص - ص)\, دس$$

(10) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث

$هـ(س) = -\sqrt{س}$ ، $د(س) = س$

$ل(س) = 6 - 2س$



$د = ل$ ⟹ $س = 6 - 2س$

$3س = 6$

$س = 2$

$هـ = ل$ ⟹ $-\sqrt{س} = 6 - 2س$

$2س - \sqrt{س} - 6 = 0$

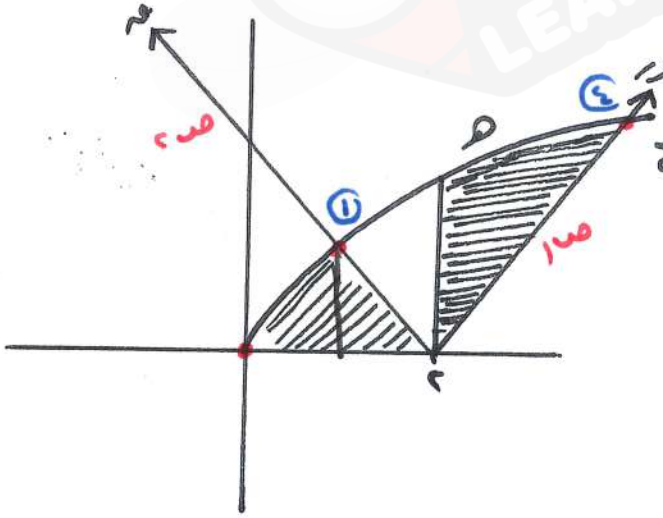
$(2\sqrt{س} + 3)(\sqrt{س} - 2) = 0$

$\sqrt{س} = 2$

$س = 4$

$م = \int_{0}^{2} (د - هـ)$ + $\int_{2}^{4} (ل - هـ)$ ⟹ $\int_{0}^{4} (د - هـ + ل - هـ)$

(11) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث $هـ(س) = |س - 2|$ ، $د(س) = \sqrt{س}$



$ص_1 = س - 2$

$ص_2 = 2 - س$

$ص = \sqrt{س}$

$ص_2 = د$ ⟹ $2 - س = \sqrt{س}$

$س + \sqrt{س} - 2 = 0$

$(\sqrt{س} + 2)(\sqrt{س} - 1) = 0$

$\sqrt{س} = 1$ ⟹ $س = 1$

$ص_1 = د$ ⟹ $س - 2 = \sqrt{س}$

$س - \sqrt{س} - 2 = 0$

$(\sqrt{س} - 2)(\sqrt{س} + 1) = 0$

$\sqrt{س} = 2$ ⟹ $س = 4$

$م = \int_{0}^{1} (د - 0)$ + $\int_{1}^{4} (ص_1 - 0)$ + $\int_{4}^{4} (د - ص_1)$

(١٢) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث

$هـ(س) = س^2 - 4س$

$ه(س) = 0$

$ل(س) = 0$

نجد نقط تقاطع المنحنيات

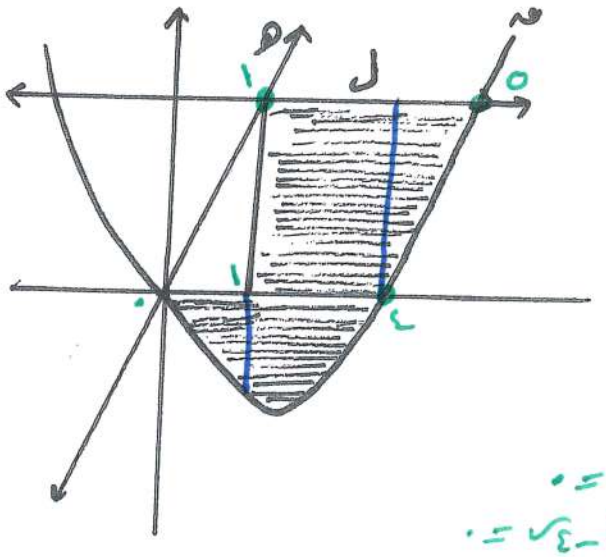
$ل = ه$ | $هـ = ل$ | $هـ = ه$

$0 = س$ | $س^2 - 4س = 0$ | $س^2 - 4س = 0$

$س = 1$ | $س^2 - 4س - 5 = 0$ | $س(س-4) = 0$

$(س-5)(س+1) = 0$ | $س = 0, س = 4$

$س = 5, س = -1$



$$م = \int_{1}^{4} (0 - هـ)\,س + \int_{4}^{5} (ل - هـ)\,س \Leftarrow م = \int_{1}^{5} (ل - هـ)\,س$$

(١٣) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين في الشكل المجاور حيث

$هـ(س) = 2س^2$ ، $ه(س) = 3س$ ، $ل(س) = -س$.

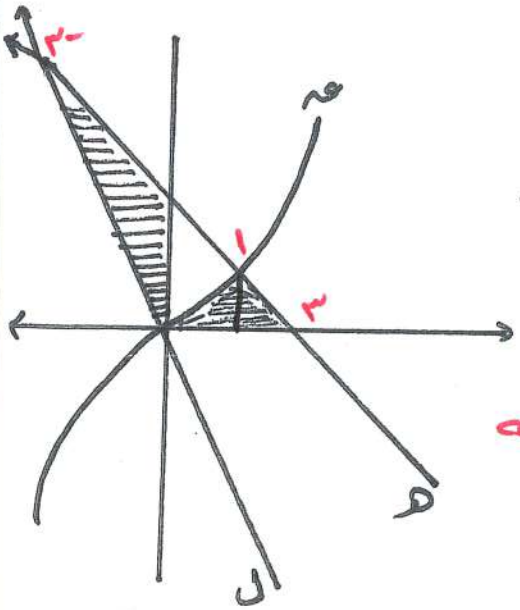
نجد نقط التقاطع

$ه = ل$ | $ه = 0$ | $هـ = ه$

$3س = -س$ | $3س - س^2 = 0$ | $س^2 = 3س$

$س = 0$ | $س = 3$ | $س^2 - 3س = 0$ تركيبه

$س = 1$

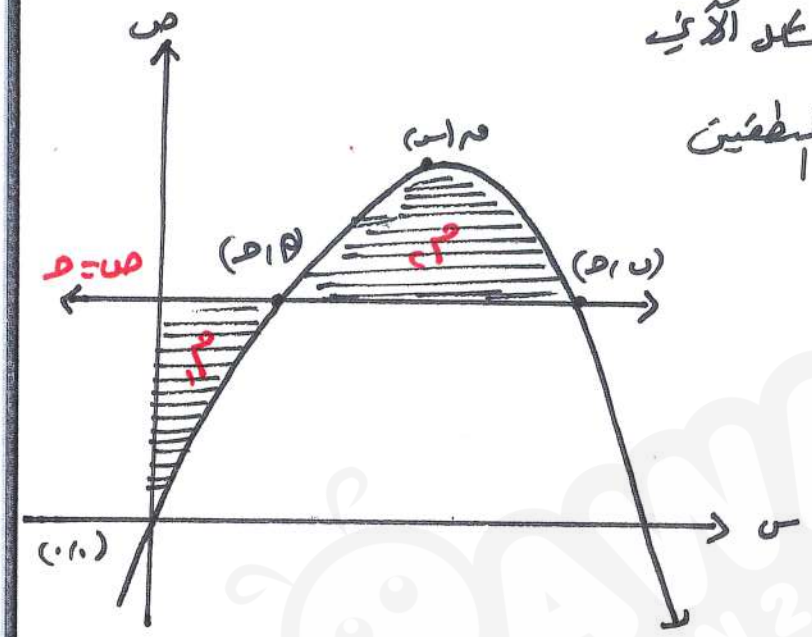


$$م = \int_{-1}^{0} (هـ - ل)\,س + \int_{0}^{3} (ه - 0)\,س$$

2016 ص

(١٤) ليكن المستقيم ص = جـ يقطع منحنى الاقتران ق(س) = ٢س − ٣س^{٣} في النقطتين (أ، ق(أ))، (ب، ق(ب)) حيث أ، ب، جـ > ٠

كما في الشكل المجاور، إذا علمت أن المنطقتين م$_{١}$، م$_{٢}$ متساويتين في المساحة، فجد قيمة جـ بدلالة أ، ب



الحل

∵ م$_{١}$ = م$_{٢}$

$\int_{أ}^{ب}$ جـ − ق = $\int_{أ}^{ب}$ ق − جـ

$\int_{أ}^{ب}$ جـ − ق − $\int_{أ}^{ب}$ ق − جـ = ٠

$\int_{أ}^{ب}$ جـ − ق + $\int_{أ}^{ب}$ جـ − ق = ٠

$\int_{أ}^{ب}$ جـ − ق + جـ − ق = ٠

$\int_{أ}^{ب}$ ٢جـ − ٢ق = ٠

٢جـ(ب − أ) − ٢س^{٤} |$_{أ}^{ب}$ + ٣س^{٤} |$_{أ}^{ب}$ = ٠

٢جـ(ب − أ) − (ب^{٤} − أ^{٤}) + ٣(ب^{٤} − أ^{٤}) = ٠

٢جـ(ب − أ) + ٢(ب^{٤} − أ^{٤}) = ٠

٢جـ(ب − أ) + ٢(ب − أ)(ب^{٣} + ب^{٢}أ + بأ^{٢} + أ^{٣}) = ٠

٢جـ + ٢ب^{٣} + ٢ب^{٢}أ + ٢بأ^{٢} + ٢أ^{٣} = ٠

جـ = −ب^{٣} − ب^{٢}أ − بأ^{٢} − أ^{٣}

جـ = −(ب^{٣} + ب^{٢}أ + بأ^{٢} + أ^{٣})

لكل (ب، جـ) واقعة على ق(س)

جـ = ق(ب) = ٢ب − ٣ب^{٣}

ق(أ) = جـ = ٢أ − ٣أ^{٣}

ق$'$(س) = ٠ ⇒ ٢ − ٩س^{٢} = ٠

٢(١ − $\frac{٩}{٤}$س^{٢}) = ٠

١ − $\frac{٩}{٤}$س^{٢} = ٠

$\frac{٩}{٤}$س^{٢} = ١

س^{٢} = $\frac{٤}{٩}$

س = ± $\frac{٢}{٣}$ مرفوض

س = $\frac{٢}{٣}$

ق$''$(س) = −٩س

ق$''$($\frac{٢}{٣}$) = −٩ × $\frac{٢}{٣}$ = −٦ < ٠

∴ ق له قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{٢}{٣}$

ق$_{max}$ = ٢ × $\frac{٢}{٣}$ − ٣ × $\frac{٨}{٢٧}$

= $\frac{٤}{٣}$ − $\frac{٨}{٩}$

= $\frac{٤}{٩}$

* مثال اسئله بالساحه عليك حلها بطريقه اخرى
بدلالة الصادات وتعيين لوجود ص = سنبات
حيث نحول اسم الاقتران س = صادات
ونصير س = عدد اقتران
ونصير اي مستقيم ص = عدد احد الحدود.

مثال جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = ٤س
والمستقيم س = ١

الحل :-

$\because s = \frac{1}{4} ص^2$

$س = ١$

$ضع ١ = س$

$\frac{1}{4} ص^2 = ١$

$ص^2 = ٤$

$ص = \pm ٢$

$م = \int_{-٢}^{٢} ١ - \frac{1}{4} ص^2 \, ص$

$= [١(٢+٢) - \frac{1}{4} \frac{ص^3}{3}]_{-٢}^{٢}$

$= \frac{1}{12}(٨+٨) - ٤$

$= \frac{16}{12} \Leftarrow ٤ - \frac{4}{3}$

$\Leftarrow \frac{12}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

2018
مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص^2 = -س$ والمستقيم $ص = س - 6$ والمستقيمين $ص = 0$ ، $ص = 4$.

الحل

$س_1 = -ص^2$

$س_2 = ص + 6$

الحدود $ص = 0$ ، $ص = 4$

$س_1 = س_2$

$-ص^2 = ص + 6$

$ص^2 + ص + 6 = 0$

لا يحلل

$ب^2 - 4أ ج$

$1 - 24 \times 1$ سالب

$$م = \int_0^4 ص + 6 - (-ص^2)\, د ص$$

$$= \frac{ص^3}{3}\Big|_0^4 + \frac{6ص^2}{2}\Big|_0^4$$

$$= \frac{64}{3} - 0 + 48 - 0 + 0$$

$$= 32 + \frac{64}{3}$$

$$= \frac{96}{3} + \frac{64}{3} = \frac{160}{3}$$