إجابات كتاب التمارين

الوحدة 3

أستعد لدراسة الوحدة

قسمة كثيرات الحدود

1) الناتج هو: $3x^2+6x+33$ ، والباقي(127)

2) الناتج هو: $4x^3-10x^2+28x-75.5$ ، والباقي(384.5)

تحليل المقادير الجبرية

1) $x^2-25=(x-5)(x+5)$

2) $x^2-6x-16=(x-8)(x+2)$

3) $x^3+3x^2-10x=x(x^2+3x-10)$

$=x(x-2)(x+5)$

تبسيط المقادير النسبية

1) $\frac{7x-1}{x^2-2x-3}$ 2) $\frac{-x+23}{x^2-x-6}$ 3) $\frac{x+4}{2(x-1)}$

4) $\frac{2x}{x+4}$ 5) $\frac{1}{x-4}$ 6) $x-5$

الدرس الأول نظريتا الباقي والعوامل

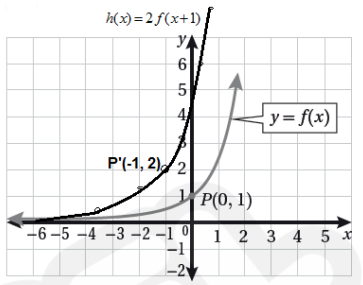
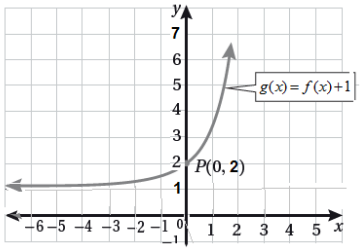
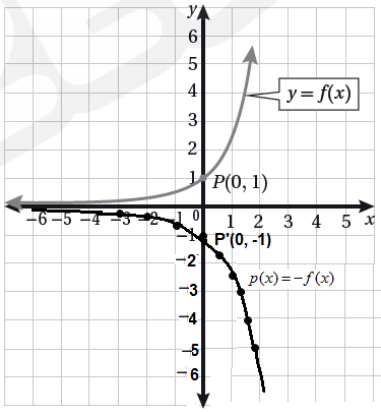
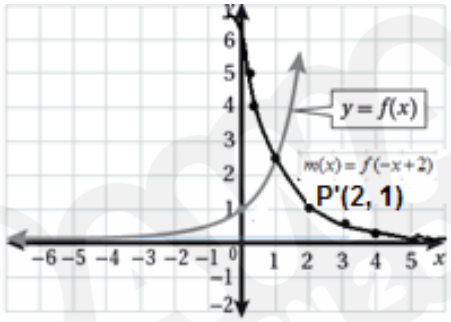
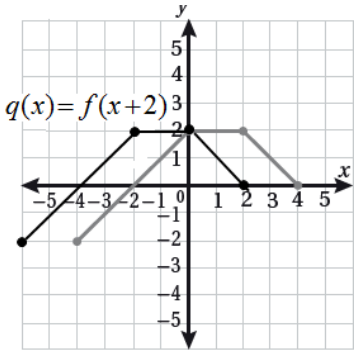
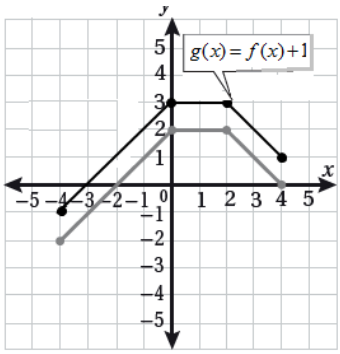
رقم السؤال	الإجابة
1	<table><tr><td>×</td><td>$3x^2$</td><td>$-8x$</td><td>$+15$</td></tr><tr><td>$2x$</td><td>$6x^3$</td><td>$-16x^2$</td><td>$+30x$</td><td>0</td></tr><tr><td>$+3$</td><td>$+9x^2$</td><td>$-24x$</td><td>$+45$</td></tr></table> الناتج هو $3x^2-8x+15$، والباقي 0
2	<table><tr><td>×</td><td>$3x^3$</td><td>$+7x^2$</td><td>$+5x$</td><td>$+2$</td></tr><tr><td>x</td><td>$3x^4$</td><td>$+7x^3$</td><td>$+5x^2$</td><td>$+2x$</td><td>$+13$</td></tr><tr><td>-2</td><td>$-6x^3$</td><td>$-14x^2$</td><td>$-10x$</td><td>-4</td></tr></table> الناتج هو $3x^3+7x^2+5x+2$، والباقي 13
3	$x+8$, $x-1$
4	$a = -5$
5	4 cm, 5 cm, 9 cm
6	$a = 3$, $b = -1$
7	$(3x+2)(x+5)(x-1)$
8	يُعدّل هذا السؤال على النحو الآتي: $\mathbf{2x^4-3x^3-8x^2-3x}$ $= x(2x^3-3x^2-8x-3)$ $= x(x+1)(2x^2-5x-3)$ $= x(x+1)(2x+1)(x-3)$
9	$x=2$, $x = \frac{-2\pm\sqrt{4+24}}{6} \approx 0.55,\ -1.22$
10	$x= -2$, $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+144}}{4} \approx 2.76,\ -3.26$
11	ليس له إلّا صفر حقيقي واحد هو $x = -2$.
12	طول نصف قطر قاعدته 6 cm، وارتفاعه 11 cm

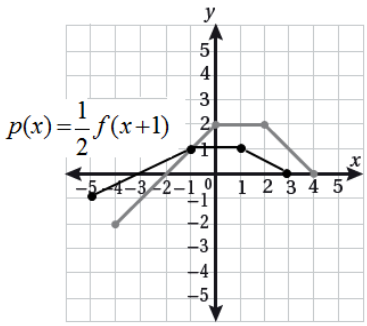
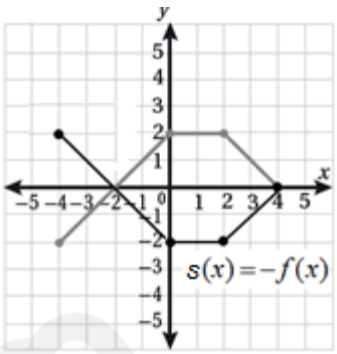
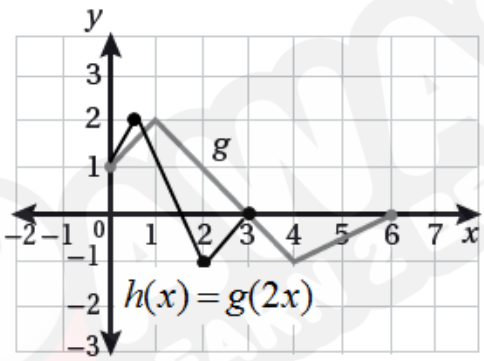
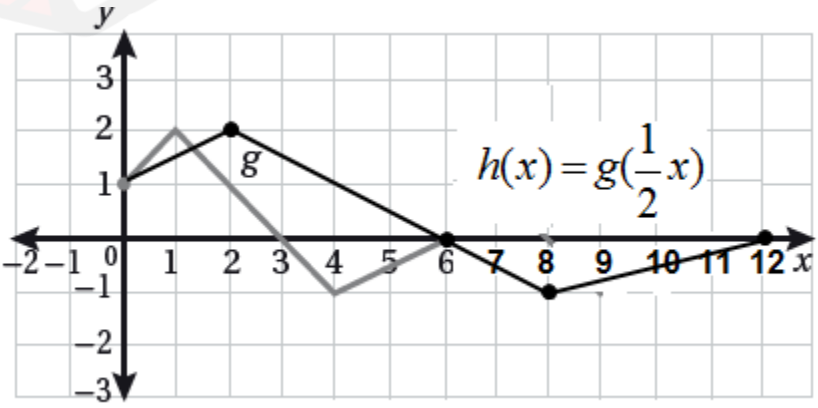
الدرس2 الكسور الجزئية

رقم السؤال	الإجابة
1	$\frac{-11}{29(2x+5)}+\frac{-2}{29(7-3x)}$
2	$\frac{-5}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}$
3	$\frac{-1}{2x-1}+\frac{x+1}{x^2+1}$
4	$\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{x-3}$
5	$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-3}$
6	$\frac{7}{4-x}+\frac{2}{4+x}$
7	$-\frac{1}{x}+\frac{9}{x-3}$
8	$\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}$
9	$\frac{18}{x-2}-\frac{15}{x-3}+\frac{35}{(x-3)^2}$
10	$\frac{-3}{x}+\frac{5}{x-3}+\frac{-6}{(x-3)^2}$
11	$\frac{2}{x-2}-\frac{4}{(2x-1)}-\frac{7}{(2x-1)^2}$
12	$\frac{1}{1-2x}-\frac{2x+1}{x^2+3}$
13	$\frac{3}{x-1}-\frac{6x+9}{2x^2+x+5}$
14	$3+\frac{-3}{2x+5}+\frac{1}{x-1}$
15	$x+\frac{-7}{x-1}+\frac{2}{x-2}$
16	$\frac{3x^2-x}{x^3-x^2-x+1}$
17	$\frac{a}{x-c}+\frac{ac+b}{(x-c)^2}$

18	$\frac{1}{ab-a-b}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-a-b+ab})$
19	$\frac{1}{2c}(\frac{ac+b}{x-c}+\frac{ac-b}{x+c})$
20	يُعدّلُ الكسر الأخير في السؤال إلى $\frac{2}{n\times(n+2)}$ $\frac{2}{x(x+2)}\ \frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=$ $\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+....+\frac{2}{n\times(n+2)}$ $=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$ $=1-\frac{1}{n+2}$

الدرس3 التحويلات الهندسية للاقترانات

الإجابة	رقم السؤال
2)  	1
4)  	3
انعكاس حول المحور x، وتوسيع رأسي معامله 3، وانسحاب إلى اليمين بمقدار وحدتين، وأخيرًا انسحاب إلى الأعلى بمقدار 5 وحدات.	5
انعكاس حول المحور y، وتوسيع رأسي معامله 2، وانسحاب إلى اليمين بمقدار 4 وحدات، وأخيرًا انسحاب إلى الأسفل بمقدار 3 وحدات.	6
8)  	7

9		(10 
11	تضييق رأسي معامله0.1، وانسحاب إلى الأعلى بمقدار 3000 وحدة.	
12		
13		

الدرس 4 النهايات والاتصال

1) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1$

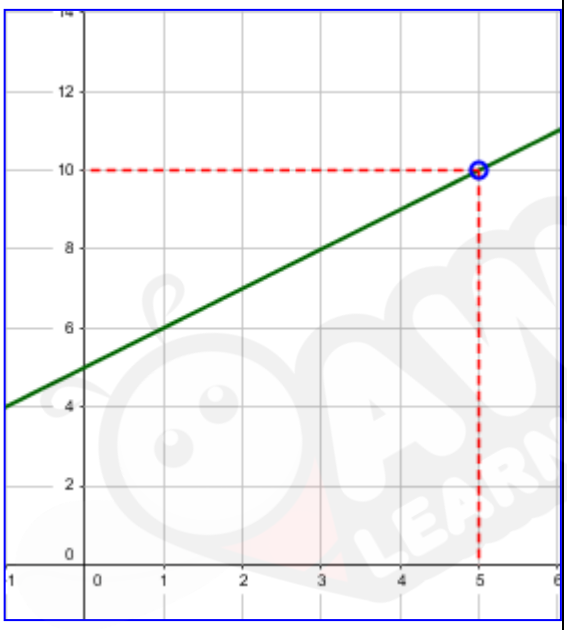
3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

4) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = 10$

عدديا:

	اليسار ←			5	→ اليمين		
x	4.9	4.99	4.999		5.001	5.01	5.1
$f(x)$	9.9	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1
	اليسار ←			10	→ اليمين		

بيانيا:

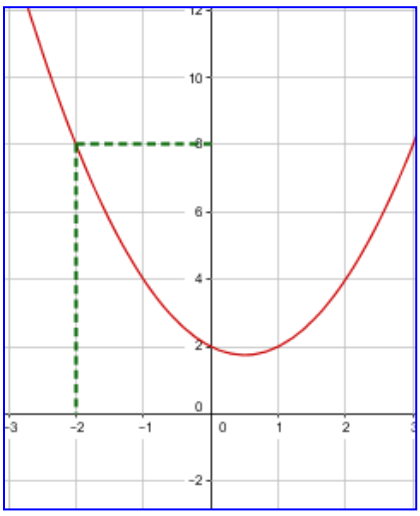


5) $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 - x + 2) = 8$

عدديا:

	اليسار ←			−2	→ اليمين		
x	−2.1	−2.01	−2.001		−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	8.51	8.05	8.005		7.995	7.95	7.51
	اليسار ←			8	→ اليمين		

بيانيا:

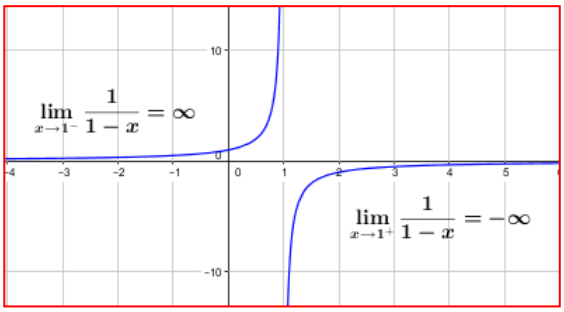


6) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}$ غير موجودة

عدديا:

	اليمين ←			1	→ اليسار		
x	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	10	100	1000		−1000	−100	−10
	اليمين $-\infty$				∞ اليسار ←		

بيانيا:



7)

8)

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$

b) $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to 6} f(x)=0$

9) $\lim_{x\to -7}(2x+5)=2(-7)+5=-9$

10) $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)=4$

11) $\lim_{t\to 2}\frac{t+3}{t+6}=\frac{5}{8}$

12) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{1-x}=-2$

13) $\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{x+5}=\frac{2(3)-6}{3+5}=0$

14) $\lim_{z\to -4}\sqrt[3]{2z-8}=\sqrt[3]{2(-4)-8}=0$

15) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x^2-9)}{x^3-27}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-9)(x+9)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+9)}{(x^2+3x+9)}=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$

16) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{25-5x}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-2)}{5(5-x)}$

$=\lim_{x\to 5}\frac{-1(x-2)}{5}=\frac{-3}{5}$

17)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}+1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x+1-1}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} = \frac{3}{2}$$

18)

$$f(2) = -4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-6) = -4$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{2-x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{2-x}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} -1(x+2) = -4$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = -4 = f(2)$$

إذن الاقتران متصل عند $x = 2$

إجابات كتاب الطالب

الوحدة 3

الدرس 1

ملحوظة: يرجى تعديل مسألة اليوم على النحو الآتي:

مسألة اليوم: صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات أبعاده بالأمتار هي $2,\ x,\ x^2 + 6x - 19$

ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$؟

<u>أتحقق من فهمي 1 (ص106)</u>

a)

×	x^2	$+5x$	-14	
x	x^3	$+5x^2$	$-14x$	0
$+1$	$+x^2$	$+5x$	-14	

ناتج القسمة هو $x^2+5x-14$، والباقي 0

b)

×	$2x^2$	$+5x$	$+15$	
x	$2x^3$	$+5x^2$	$+15x$	$+48$
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو $2x^2+5x+15$، والباقي 48

<u>أتحقق من فهمي 2 (ص109)</u>

a) الباقي هو $P(1) = 4$

b) الباقي هو $P(-3) = -6$

c) الباقي هو $P(-4) = 17 = P(-\frac{8}{2})$

<u>أتحقق من فهمي 3 (ص110)</u>

a) $P(5) = 5^3 - 2(5)^2 - 13(5) - 10$

$= 125 - 50 - 65 - 10 = 0$

إذن، $(x - 5)$ عامل من عوامل $P(x)$

b) لتحليل $P(x)$ أقسم $P(x)$ على $(x - 5)$

$P(x) = (x-5)(x^2 + 3x + 2)$

$= (x-5)(x+2)(x + 1)$

×	x^2	$+3x$	$+2$	
x	x^3	$+3x^2$	$+2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

أتحقق من فهمي 4 (ص113)

a) عوامل الحد الثابت هي1±، وعوامل المعامل الرئيس هي1±، و5±،

الأصفار المحتملة للاقتران هي: $\pm 1, \pm\frac{1}{5}$

بالتعويض نجد أن $P(1) = 5 - 1 - 5 + 1 = 0$

إذن، $(x-1)$ هو أحد عوامل $P(x)$

أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن.

×	$5x^2$	$+4x$	-1	
x	$5x^3$	$+4x^2$	$-x$	0
-1	$-5x^2$	$-4x$	$+1$	

$$P(x) = (x-1)(5x^2 + 4x - 1)$$

$$= (x-1)(5x-1)(x+1)$$

إذن، أصفار $P(x)$ هي: $1, -1, \frac{1}{5}$

b) معامل الحد الرئيس يساوي1، فالأصفار المحتملة هي عوامل الحد الثابت 8، وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

بالتعويض نجد أن $Q(1) = 1 + 6 + 7 - 6 - 8 = 0$

إذن، $(x-1)$ هو أحد عوامل $Q(x)$

أجد العوامل الأخرى بالقسمة وتحليل الناتج إن أمكن.

×	x^3	$+7x^2$	$+14x$	$+8$	
x	x^4	$+7x^3$	$+14x^2$	$+8x$	0
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8	

$$Q(x) = (x-1)(x^3 + 7x^2 + 14x + 8)$$

وبتعويض $x = -1$ في العامل التكعيبي نجد أن الناتج 0 ، نقسم $x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ على $(x+1)$

×	x^2	$+6x$	8	
x	x^3	$+6x^2$	$+8x$	0
$+1$	$+x^2$	$+6x$	$+8$	

فنجد أن:

$$Q(x) = (x-1)(x+1)(x^2 + 6x + 8)$$

$$= (x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$$

إذن، أصفار $Q(x)$ هي: $-1, 1, -2, -4$

أتحقق من فهمي 5 (ص115)

a) $x^3-x^2-9x+9=0$

$x^2(x-1)\ -9(x-1)=0$

$(x-1)(x^2\ -9)\ =0$

$(x-1)(x-3)(x+3)=0$

$x=1,\ x=3,\ x=-3$

إذن، حلول هذه المعدلة هي: $x=1,\ x=3,\ x=-3$

b) حلول هذه المعادلة هي $x=-2\ ,\ x=1$، ويمكن حلها بتحليل الطرف الأيسر إلى عوامل بطريقة مشابهة لحل الفقرة a ويمكن حلها بطريقة المثال 5.

أتحقق من فهمي6 (ص116)

نصف قطر قاعدة الاسطوانة 3 cm، وارتفاعها 8 cm

أتدرب أحل المسائل

السؤال	الإجابة
1	<table><tr><td>×</td><td>$2x^3$</td><td>$+x^2$</td><td>$+4x$</td><td>$+3$</td><td></td></tr><tr><td>$3x$</td><td>$6x^4$</td><td>$+3x^3$</td><td>$+12x^2$</td><td>$+9x$</td><td>0</td></tr><tr><td>-4</td><td>$-8x^3$</td><td>$-4x^2$</td><td>$-16x$</td><td>-12</td><td></td></tr></table> الناتج: $2x^3+x^2+4x+3$ الباقي: 0
2	<table><tr><td>×</td><td>$-x^4$</td><td>$+2x^3$</td><td>$+x^2$</td><td>$-4\ x$</td><td>$+3$</td><td></td></tr><tr><td>$-2x$</td><td>$2x^5$</td><td>$-4x^4$</td><td>$-2x^3$</td><td>$+8x^2$</td><td>$-6x$</td><td>12</td></tr><tr><td>$+1$</td><td>$-x^4$</td><td>$+2x^3$</td><td>$+x^2$</td><td>$-4x$</td><td>$+3$</td><td></td></tr></table> الناتج: $-x^4+2x^3+x^2-4x+3$ الباقي: 12
3	الباقي هو: $f(-1)\ =\ 8\ -2-53-\ 37-6\ =-90$
4	الباقي هو: $f(-\frac{4}{3})\ =\ 4(-\frac{4}{3})^3\ +2(-\frac{4}{3})^2-6(-\frac{4}{3})-\ 8\ =-\frac{160}{27}$

5	$f(-7) = (-7)^3 - 37(-7) + 84 = 0$ إذن، $(x+7)$ عامل من عوامل $f(x)$.
6	$f(1.5) = 2(1.5)^3 - 5(1.5)^2 - 1.5 + 6 = 0$ إذن، $(2x-3)$ عامل من عوامل $f(x)$.
7	$f(x) = (x+5)(x-3)(x+1)$
8	$g(x) = (x+1)(x-2)(x-3)^2$
9	$h(x) = (x-3)(x-4)(2x+1)$
10	$q(x) = (x-6)(3x^2+2)$
11	$(x-1)(x^2-3x-10)=0$ $(x-1)(x-5)(x+2)=0$ $x=1,\ x=5,\ x=-2$
12	$3x^3 - 5x^2 - 47x - 15 = 0$ $(x+3)(3x^2-14x-5)=0$ $(x+3)(3x+1)(x-5)=0$ $x=-3,\ x=-\frac{1}{3},\ x=5$
13	$(x-2)(3x^2+9x+4)=0$ $x=2,\ \ x=\frac{-9\pm\sqrt{81-48}}{2(3)}$ $x=2,\ x=\frac{-9+\sqrt{33}}{6},\ x=\frac{-9-\sqrt{33}}{6}$ $x=2,\ x\approx -0.54,\ x\approx -2.46$
14	$(x-2)(6x^2-x-1)=0$ $(x-2)(3x+1)(2x-1)=0$ $x=2,\ x=-\frac{1}{3},\ x=\frac{1}{2}$
15	$V(x) = 2x^3 + 5x^2 - 19x - 42$ $=(x-3)(2x^2+11x+14)$ $= (x-3)(2x+7)(x+2)$ إذن، طول ضلعي القاعدة هما$(x+2)$، وَ$(2x+7)$ مساحة السطح الكلية= المساحة الجانبية $+2\times$ مساحة القاعدة $A(x) = 2(2x+7+x+2)(x-3) + 2(2x^2+11x+14)$ $= 2(3x+9)(x-3) + 4x^2 + 22x + 28$ $= 6x^2 - 54 + 4x^2 + 22x + 28$

	$= 10x^2 + 22x - 26$
16	أحد أصفار الاقتران هو $x=1$، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $f(x)$ $f(x) = (x-1)(4x^2 + 4x - 16)$ صفراه الآخران هما جذرا المعادلة : $4x^2 + 4x - 16 = 0$ $x^2 + x - 4 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$ $x \approx 1.56, \quad x \approx -2.56$
17	أحد أصفار الاقتران هو $x = -1$، إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$ $f(x) = (x+1)(4x^2 - 16x + 15)$ صفراه الآخران هما جذرا المعادلة : $4x^2 - 16x + 15 = 0$ $(2x-3)(2x-5) = 0$ $x = 1.5, \; x = 2.5$
18	افرض أن الحل الثالث هو $x=c$ ، فيكون $(x-1), (x-4), (x-c)$ عوامل للمقدار $x^3 - 3x^2 + ax + b$ $x^3 - 3x^2 + ax + b = (x-1)(x-4)(x-c)$ $x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - 5x + 4)(x-c)$ $x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - cx^2 - 5x^2 + 5cx + 4x - 4c$ $x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - (c+5)x^2 + (4+5c)x - 4c$ بمقارنة معاملات الحدود المتشابهة في الطرفين نجد أن: معامل x^2 : $-3 = -(c+5)$ $c+5 = 3 \rightarrow c = -2$ إذن، الحل الثالث هو $x = -2$
19	هذا يعني أن $f(1) = 2f(-1)$ $1 + a + 1 + 5 = 2(-1 + a - 1 + 5)$ $a + 7 = 2a + 6$ $a = 1$
20	حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته مضروبًا في ارتفاعه، افرض أن طول ضلع القاعدة هو x، فيكون الارتفاع $x + 1$ $V = \frac{1}{3}x^2(x+1)$ $4 = \frac{1}{3}x^2(x+1)$ $12 = x^3 + x^2$ $x^3 + x^2 - 12 = 0$ $(x-2)(x^2+3x+6) = 0$

	$x-2=0,\ x^2+3x+6=0$ المعادلة $x^2+3x+6=0$ ليس لها حل لأن مميزها سالب (-15)، فالحل الوحيد للمعادلة $x^3+x^2-12=0$ هو $x=2$ إذن، طول ضلع قاعدة المنحوتة هو 2 m، وارتفاعها 3 m
21	$f(x)=ax^3+bx^2-9x-9$ عامل من عوامل $(x-3)$ إذن، $f(3)=0$ $27a+9b-27-9=0$ $27a+9b=36$ بقسمة الطرفين على 9 ينتج أن: $3a+b=4$
22	باقي قسمة $f(x)$ على $(x-2)$ يساوي -15، يعني أن $f(2)=-15$ $8a+4b-18-9=-15$ $8a+4b=12$ بقسمة الطرفين على 4 ينتج أن: $2a+b=3$
23	بطرح المعادلة الناتجة في سؤال22 من المعادلة الناتجة في سؤال 21 نجد أن $a=1$، وبتعويض قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أن $b=1$
24	حجم الصندوق يساوي $2(x)(x^2+6x-19)$، وهذا يساوي $48\ m^3$ $2(x)(x^2+6x-19)=48$ بقسمة الطرفين على 2، والتوزيع ينتج أن: $x^3+6x^2-19x=24$ $x^3+6x^2-19x-24=0$ $(x-3)(x^2+9x+8)=0$ $(x-3)(x+1)(x+8)=0$ $x=3,\ x=-1,\ x=-8$ الحلان السالبان مرفوضان لأن x أحد أبعاد الصندوق ولا يمكن أن يكون سالبًا. إذن، قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ هي 3 m
25	بما أن $(x-3)$ عامل لاقتران من الدرجة الثالثة فإن العامل الثاني يكون تربيعيًا أفرضه ax^2+bx+c $f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$ باقي قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ هو -8، فإن $f(-1)=-8$ $(-1-3)(a-b+c)=-8$ $a-b+c=2$

	لذلك أختار أي قيم تحقق هذه المعادلة مثل $a = 1, b=1, c= 2$ فيكون الاقتران المطلوب هو :$f(x)= (x-3)(x^2 + x +2)$ $f(x) = x^3-2x^2-x -6$
26	قسمت سهام عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت بعد إخراج العامل المشترك في حدود الاقتران وهو x. الحل الصحيح هو$f(x) = x(-8x^5 = 7x^4 -3x^3 +45x^2 -1500x+16)$ عوامل الحد الثابت (16) هي: $\pm1, \pm2, \pm4 \pm8, \pm16$ عوامل المعامل الرئيس(-8) هي: $\pm1, \pm2, \pm4 \pm8$ الأصفار النسبية هي: $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$,$\pm1, \pm2, \pm4 \pm8, \pm16$
27	لم يبق حدود يمكن قسمتها بعد قسمة $-4x^2$ علىx^2، لذلك انتهت عملية القسمة، ويكون الفرق بين المقسوم ومجموع الحدود داخل منطقة العمل هو باقي القسمة المدون إلى يمين منطقة العمل. الناتج هو $4x-4$ الباقي: $-13x +12$ $\times$ | $4x$ | -4 x^2 | $4x^3$ | $-4x^2$ $+3x$ | $+12x^2$ | $-12x$ | $-13x+12$ -4 | $-16x$ | 16
28	$x^{13} -15x^9 -16x^5 = x^5(x^8-15x^4- 16)$ $=x^5(x^4-16)(x^4+ 1)$ $= x^5(x^2-4)(x^2 +4)(x^4 +2x^2+1-2x^2)$ $= x^5(x-2)(x+2)(x^2 +4)((x^2 +1)^2-2x^2))$ $= x^5(x-2)(x+2)(x^2 +4)((x^2 +1) -\sqrt{2}x))\ ((x^2 +1) +\sqrt{2}x))$ $= x^5(x-2)(x+2)(x^2 +4)(x^2 -\sqrt{2}x +1)(x^2 +\sqrt{2}x+1)$

الدرس 2

أتحقق من فهمي1(ص122)

a) $\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-3)}-\frac{2}{(x-2)}$

b) $\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{2}{3(x+2)}-\frac{4}{15(x-1)}+\frac{3}{5(x+4)}$

أتحقق من فهمي2(ص124)

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-5}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{(x-2)}$$

أتحقق من فهمي3(ص126)

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}=\frac{2}{x+5}+\frac{-2x+3}{(x^2+3)}$$

أتحقق من فهمي4(ص126)

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}=3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x+1}$$

أتدرب وأحل المسائل

رقم السؤال	الإجابة
1	$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{-9}{x+2}+\frac{11}{x+3}$
2	$\frac{2x+22}{x(x+2)}=\frac{11}{x}-\frac{9}{x+2}$
3	$\frac{4x-30}{(x-5)(x-3)}=\frac{-5}{x-5}+\frac{9}{x-3}$
4	$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{4}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+1}$
5	$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{-2}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{1-2x}$

6	$\frac{x}{(4x-3)(2x-1)}=\frac{3}{2(4x-3)}-\frac{1}{2(2x-1)}$
7	$\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}=\frac{1}{40(x+3)}+\frac{1}{88(x-5)}-\frac{4}{55(2x+1)}$
8	$\frac{9x^2-9x+6}{(x-2)(x+2)(2x-1)}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-1}$
9	$\frac{5+3x-x^2}{(x+2)(x-2)(3-x)}=\frac{1}{4(x+2)}+\frac{7}{4(x-2)}+\frac{1}{3-x}$
10	$\frac{(x-3)^2}{x(x+4)(x-4)}=\frac{-9}{16x}+\frac{49}{32(x+4)}+\frac{1}{32(x-4)}$
11	$\frac{7x-3}{(x-4)^2}=\frac{7}{(x-4)}+\frac{25}{(x-4)^2}$
12	$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{9(x+1)}-\frac{1}{9(x-2)}+\frac{1}{3(x-2)^2}$
13	$\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2}=\frac{-3}{2x}+\frac{7}{2(x+2)}-\frac{2}{(x+2)^2}$
14	$\frac{x-3}{x(x^2+3)}=\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$
15	$\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\frac{1}{x-5}-\frac{3}{x^2+5x+25}$
16	$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}$ $=-2+\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^3-6x+36)}=-2+\frac{-6}{x+6}+\frac{-24x+144}{x^2-6x+36}$
17	$x+4+\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{(x+5)(x+3)}$ $=x+4-\frac{6}{(x+5)}-\frac{8}{(x+3)}$
18	$x^2+\frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$ $=x^2+\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}=x^2+\frac{3}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+1}$
19	$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$ $A(x+a)+B(x-a)=1$

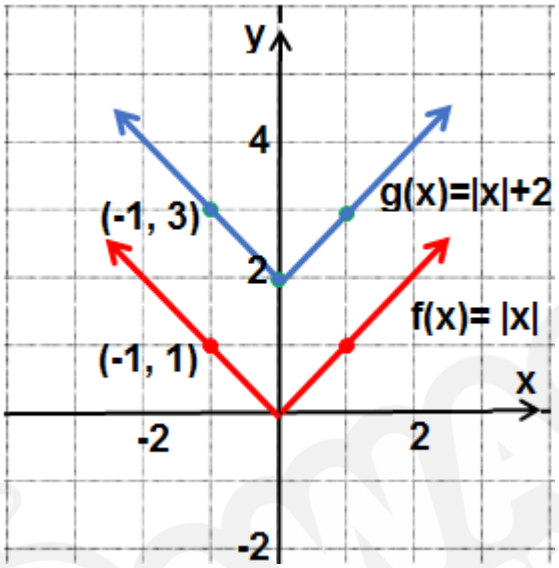
	بتعويض $x=a$ ينتج أن $A=\frac{1}{2a}$ ، بتعويض $x=-a$ ينتج أن $B=\frac{-1}{2a}$ ، إذن، $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}+\frac{-1}{2a(x+a)}$ $=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$
20	$p=5$
21	$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}=\frac{(px-37)(x-1)^2-p(x-1)\ (x^2+2)+24p(x^2+2)}{9(x-1)^2(x^2+2)}$ $9(x^2+8x+7)=(px-37)(x-1)^2-p(x-1)\ (x^2+2)+24p(x^2+2)$ بتعويض x = 1 ينتج أن: $9(1+8+7)=24p(1+2)$ $144=72p$ $p=2$
22	$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{-2000}{11-7x}+\frac{2000}{7-4x}=\frac{2000}{7-4x}-\frac{2000}{11-7x}$
23	اقتران أعلى درجة حرارة هو $\frac{2000}{7-4x}$ ، اقتران أدنى درجة حرارة هو $\frac{2000}{11-7x}$.
24	$\frac{t^2-5t+8}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1}$ $=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{-6}{t+1}+\frac{\frac{1}{3}}{t-1}$ $=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{-\frac{17}{3}t+\frac{19}{3}}{t^2-1}$ نعم يمكن.
25	$\frac{x^3-2x^2+4x+3}{x^4}=\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}$ $=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}$
26	$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{x-2}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{15}{(x-2)^3}$

27	$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{3x^3+12x-20}{(x^2-4)^2}$ $=\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}$ $=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}$ $3x^3+12x-20=A(x-2)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-2)^2+D(x-2)^2$ بتكوين معادلات وحلها ينتج أن: $A=\frac{17}{8},B=\frac{7}{4},C=\frac{7}{8},D=-\frac{17}{4}$ $\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}=\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}-\frac{17}{4(x+2)^2}$
28	الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين في حين أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$. تكون الخطوة الأولى الصحيحة على النحو الآتي: $\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$
29	$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ $ax+b=A(x+1)+B(x-1)$ $x=1\Rightarrow a+b=2A\Rightarrow A=\frac{a+b}{2}$ $x=-1\Rightarrow -a+b=-2B\Rightarrow B=\frac{-a+b}{-2}=\frac{a-b}{2}$
30	تتنوع الإجابات. هذا مثال لإجابة محتملة: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x+7}{2x^3-7x^2+9}$ $=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x^2-x-3)}$ $=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x-3)(x+1)}$ $=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+1}$ $=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{5}{3(2x-3)}+\frac{1}{2(x+1)}$

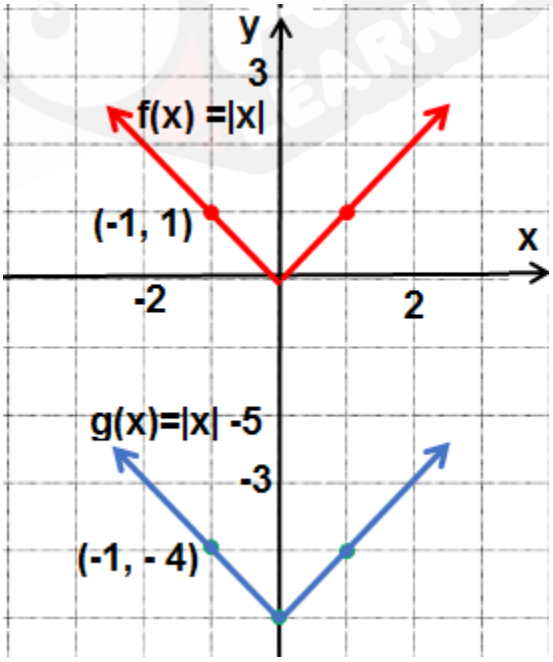
الدرس 3

أتحقق من فهمي 1(ص132)

a)

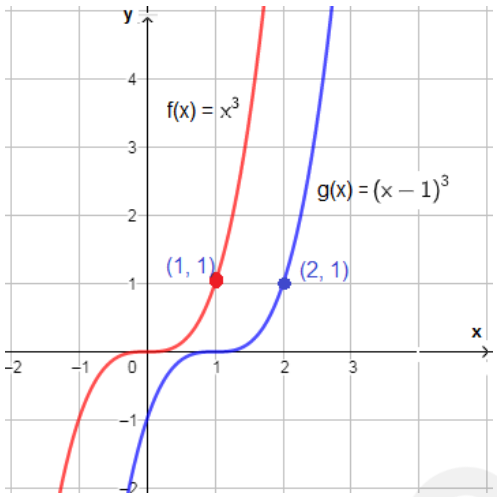


b)

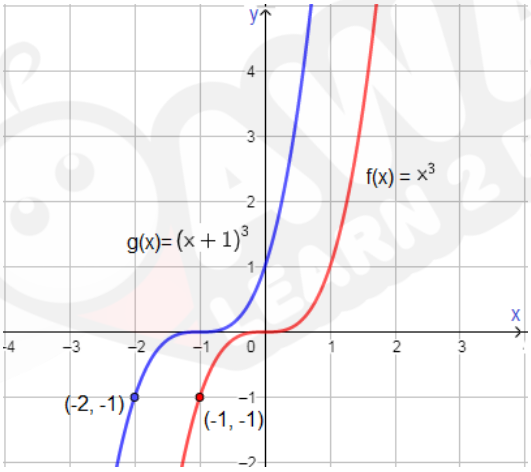


أتحقق من فهمي 2(ص133)

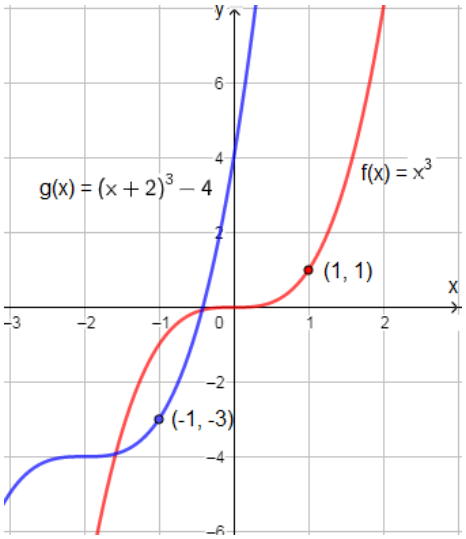
a)



b)

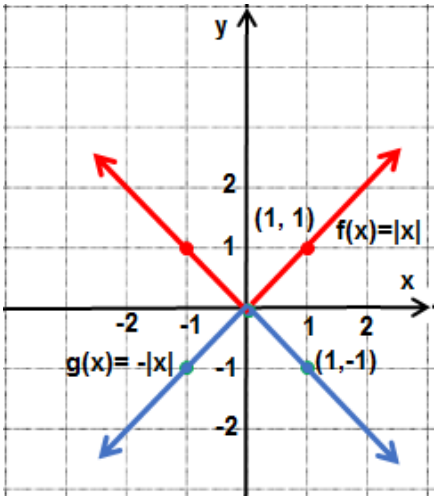


c)

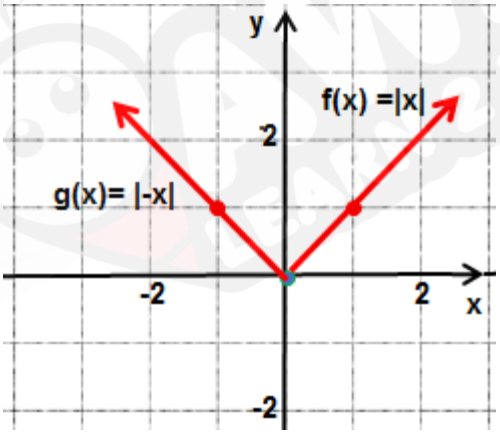


أتحقق من فهمي 3(ص135)

a)



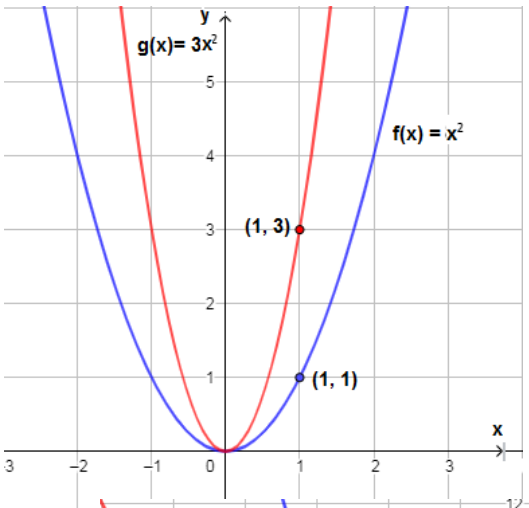
b)



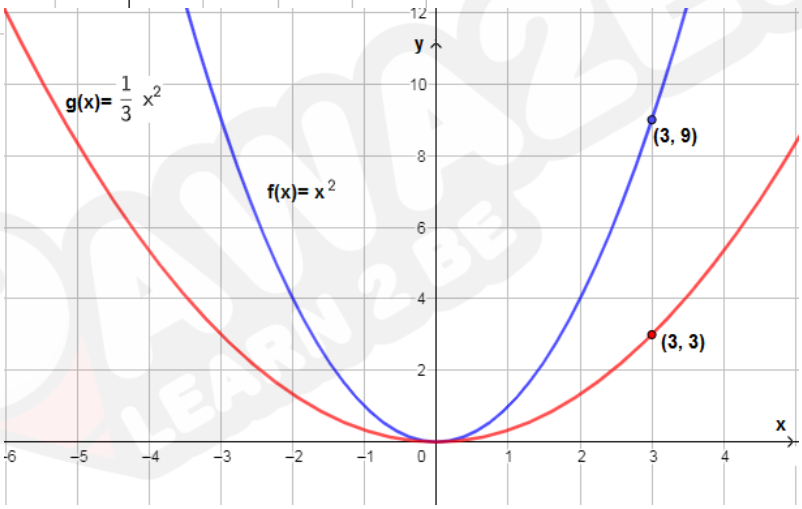
يتطابق منحنى $f(x) = |x|$ مع منحنى $g(x) = |-x|$ لأنه متماثل حول المحور y، فبالانعكاس حول المحور y يبقى المنحنى على وضعه دون تغيير.

أتحقق من فهمي 4(ص136)

a)

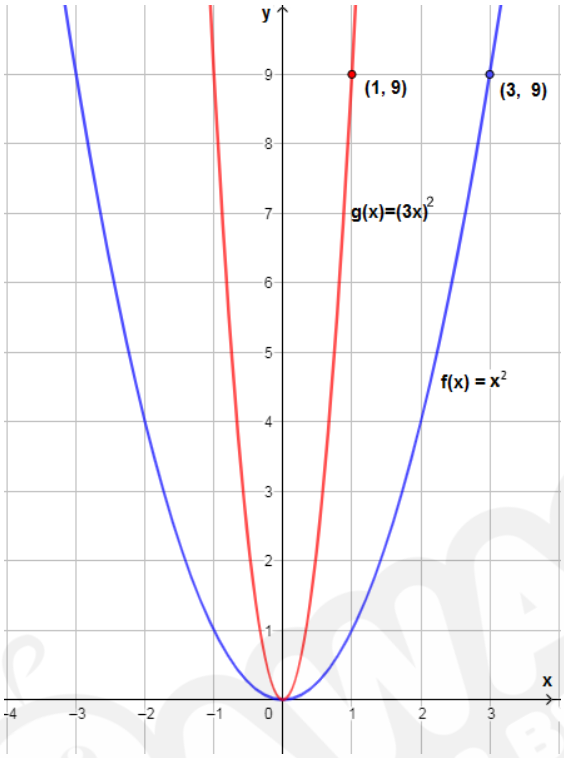


b)

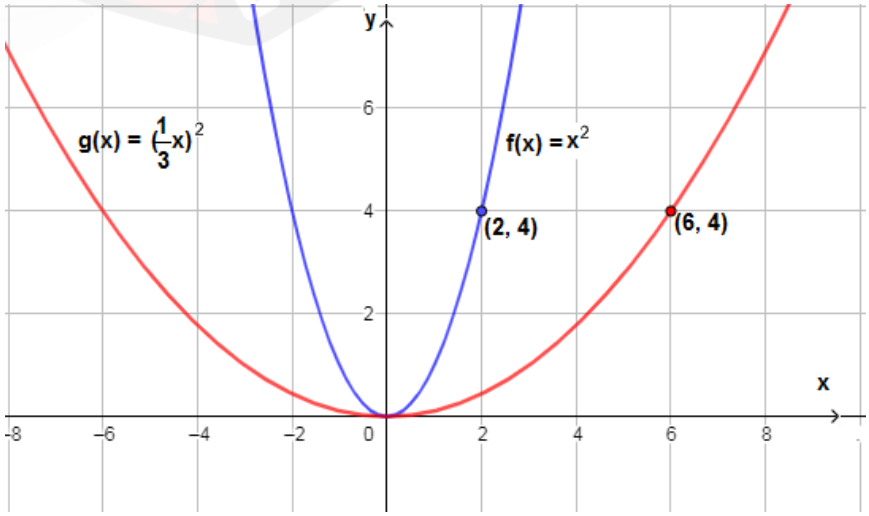


أتحقق من فهمي 5(ص137)

a)

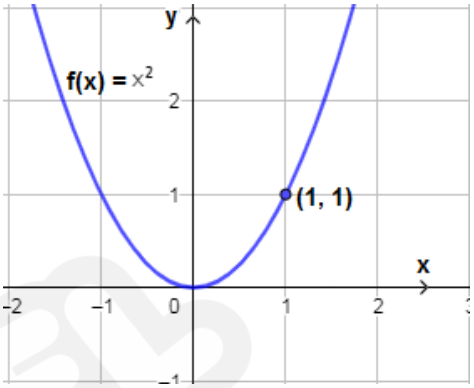


b)

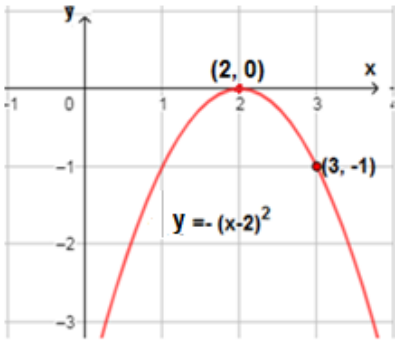


أتحقق من فهمي 6(ص138)

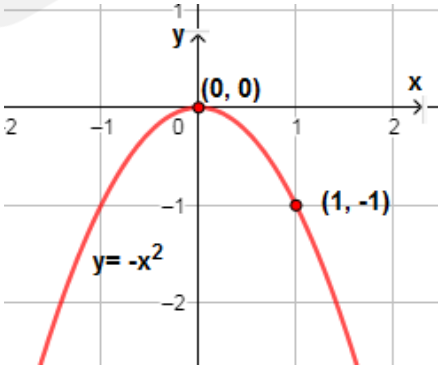
أولًا: رسم $f(x) = x^2$



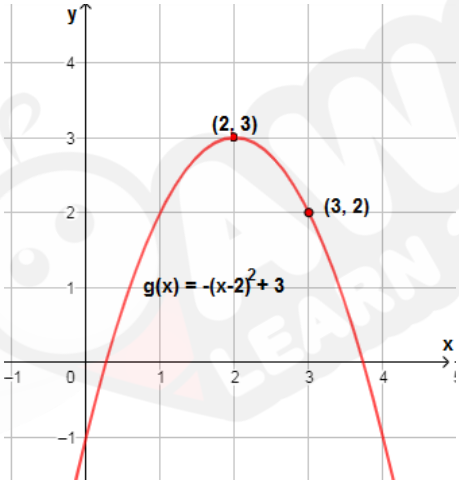
ثالثًا: انسحاب وحدتين إلى اليمين



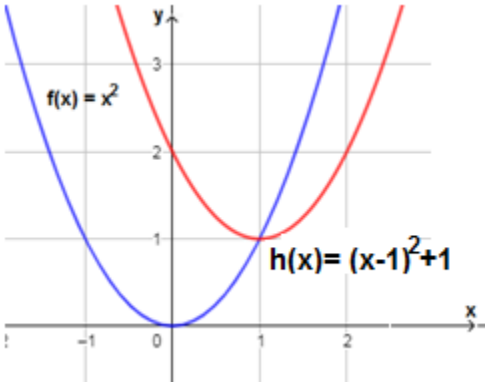
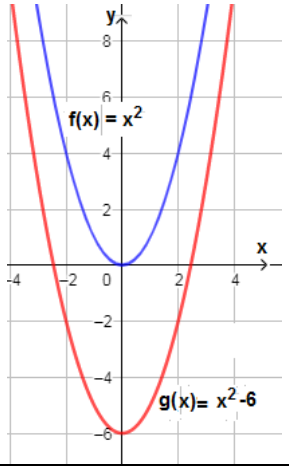
ثانيًا: رسم انعكاس f(x) حول المحور x



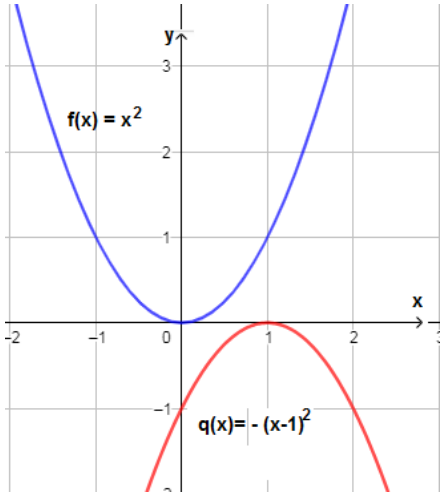
رابعًا: انسحاب 3 وحدات إلى الأعلى



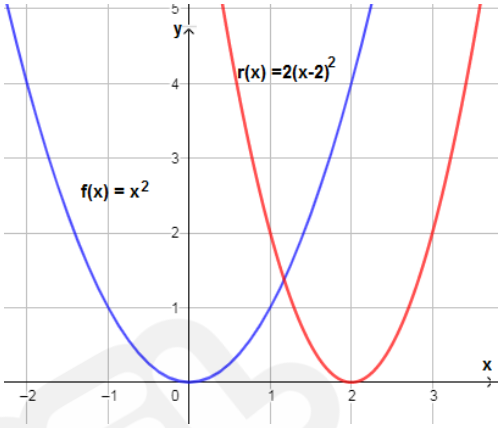
أتدرب وأحل المسائل

الإجابة	الرقم	الإجابة	الرقم
	2		1

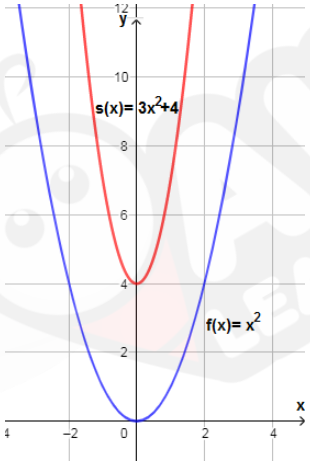
3


y
x
f(x) = x²
q(x)= - (x-1)²

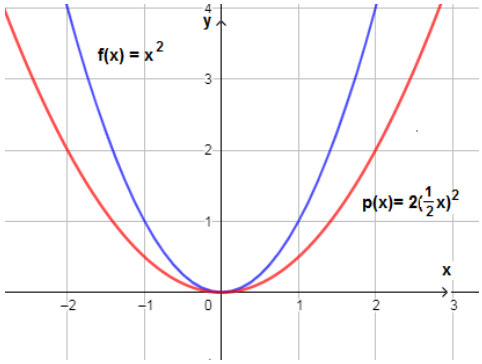
4


y
x
r(x) =2(x-2)²
f(x) = x²

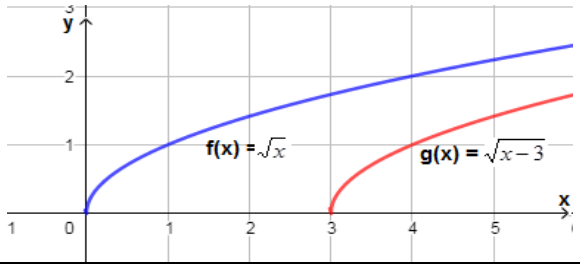
5


y
x
s(x)= 3x²+4
f(x)= x²

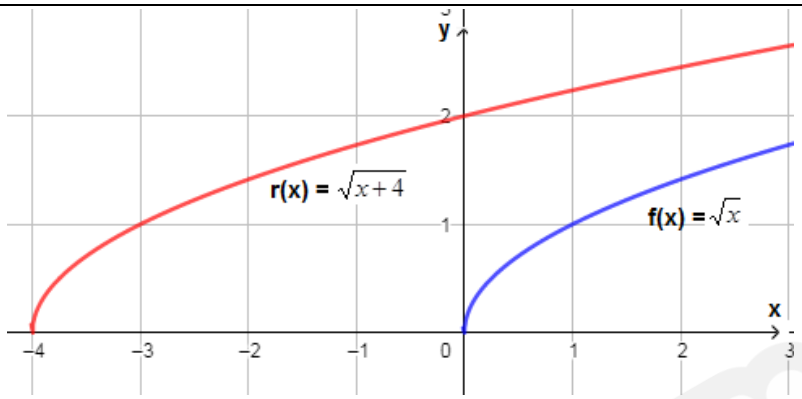
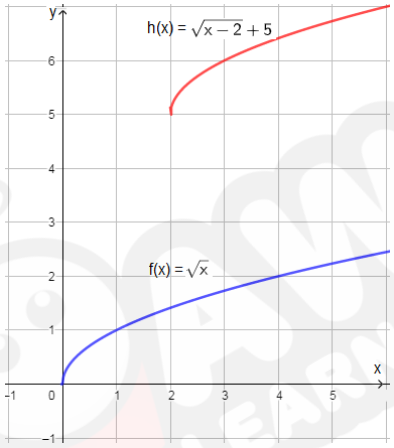
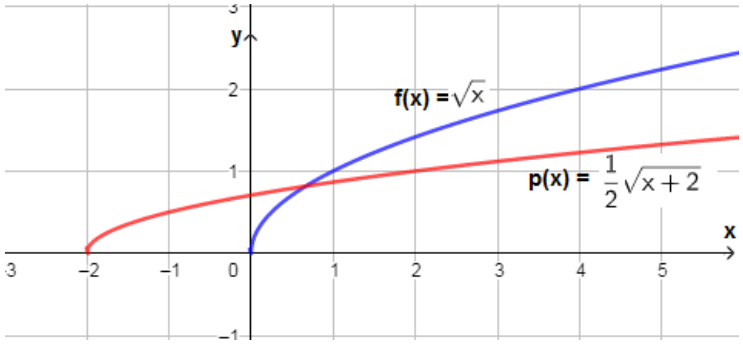
6

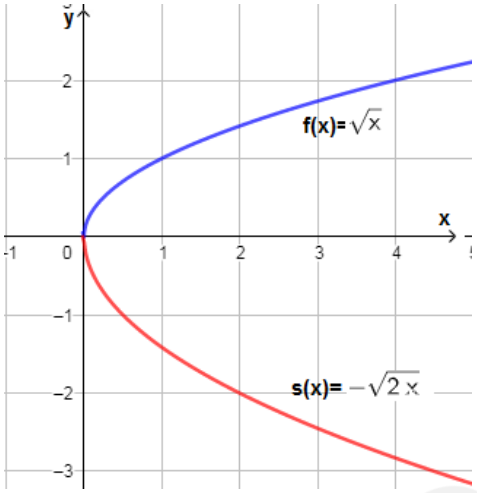
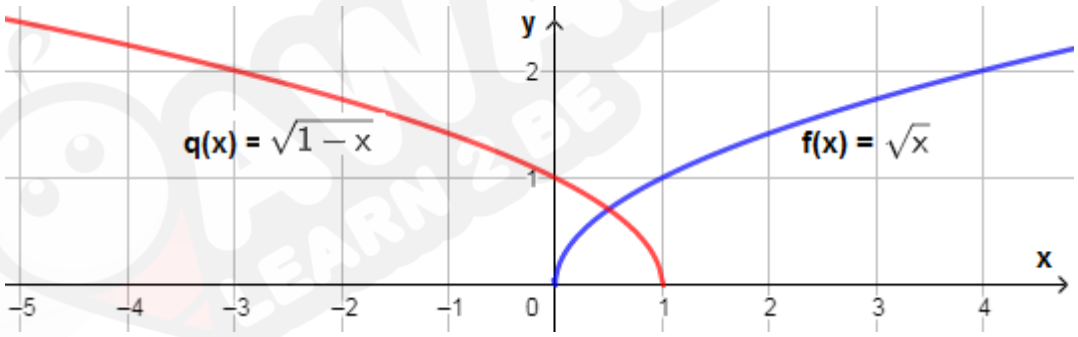
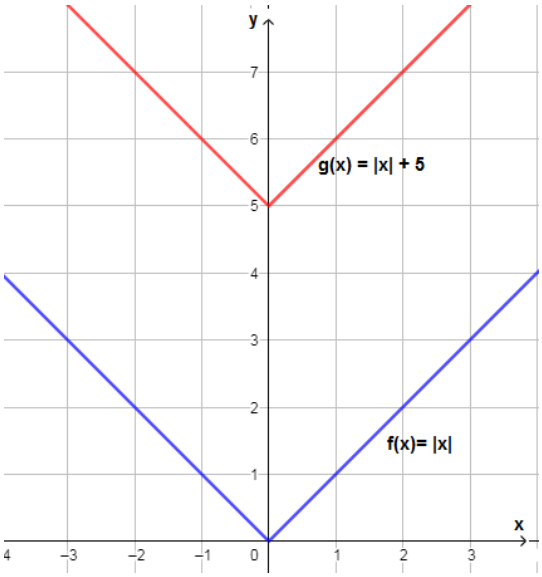

y
x
f(x) = x²
p(x)= 2(½x)²

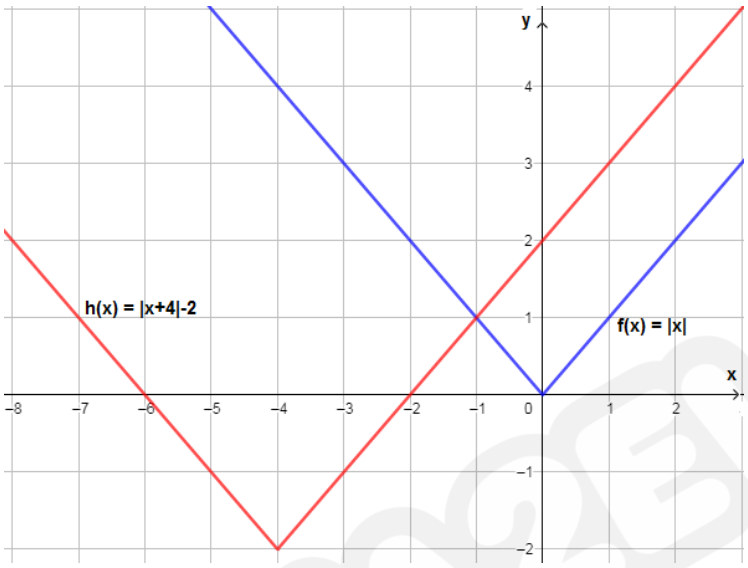
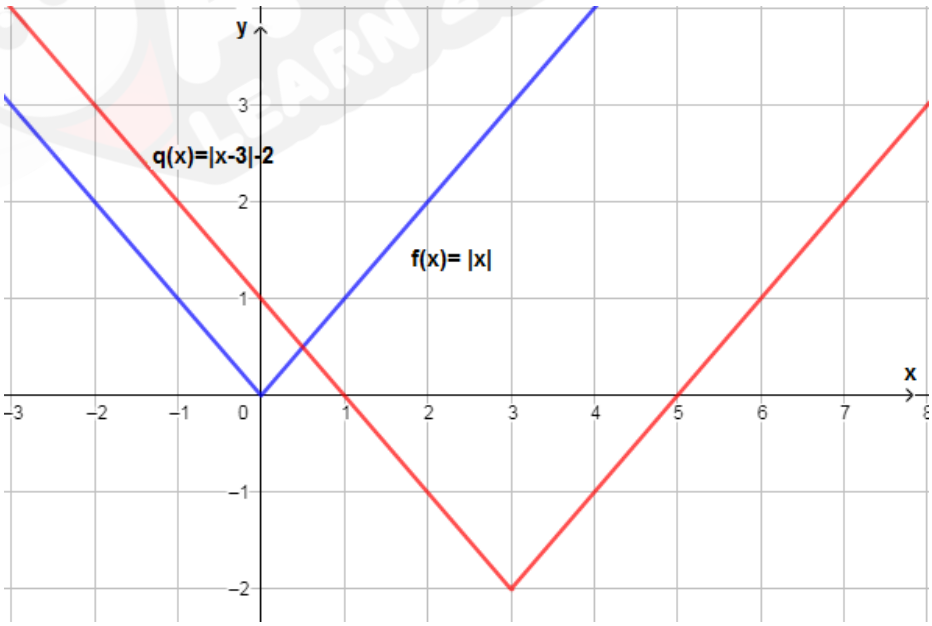
7

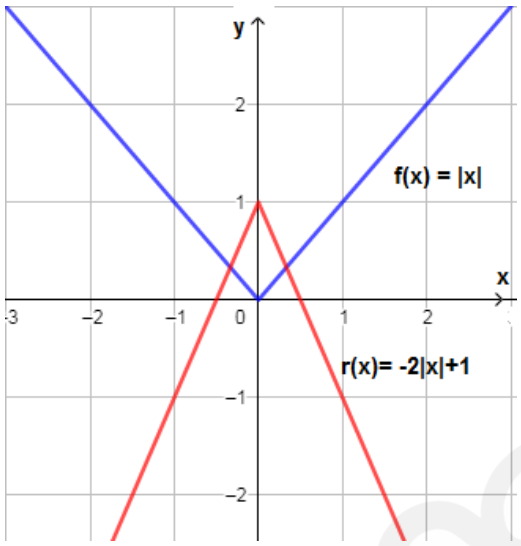
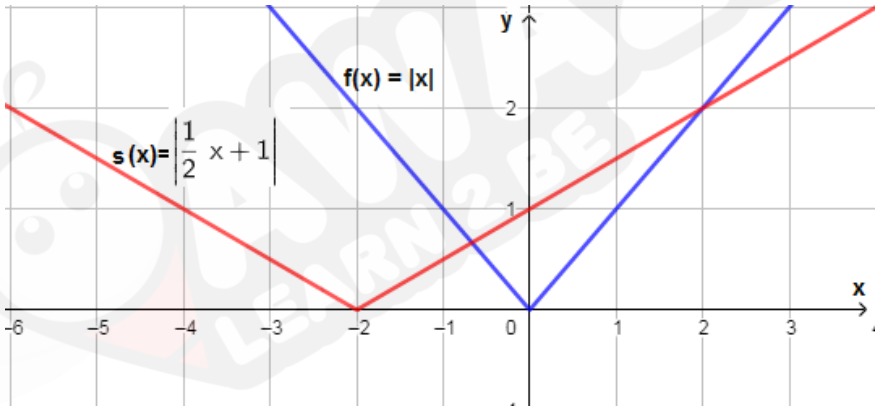
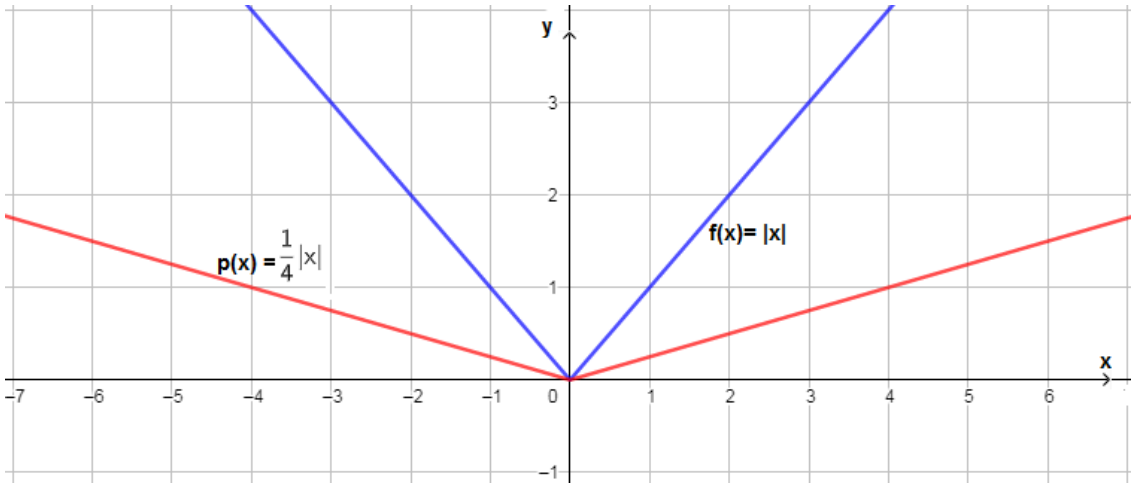

y
x
f(x) = √x
g(x) = √x−3

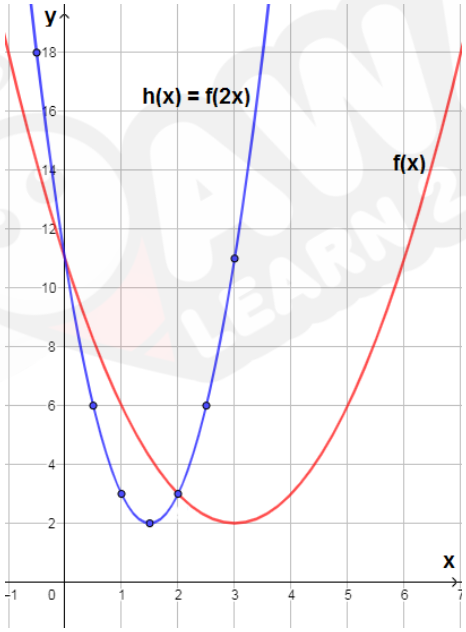
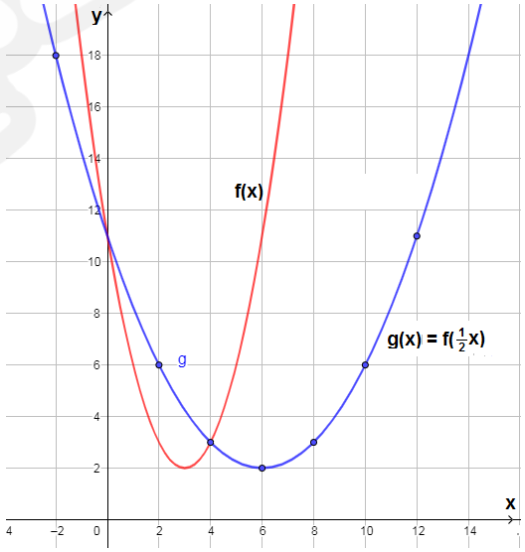
8

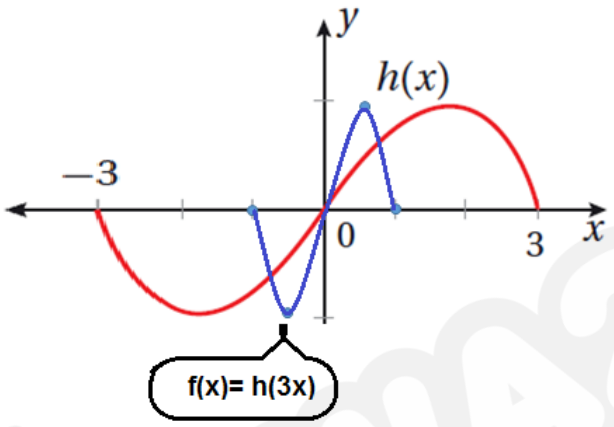
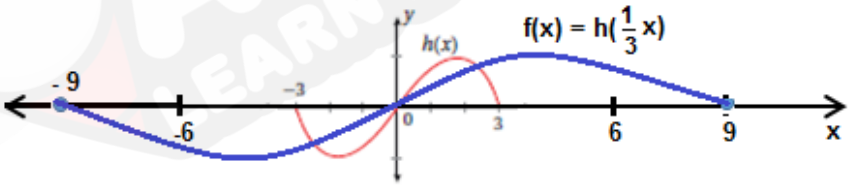
	 y x r(x) = $\sqrt{x+4}$ f(x) = $\sqrt{x}$ −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 1 2
9	 y x h(x) = $\sqrt{x-2}+5$ f(x) = $\sqrt{x}$
10	 y x f(x) = $\sqrt{x}$ p(x) = $\frac{1}{2}\sqrt{x+2}$ −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 −1 1 2

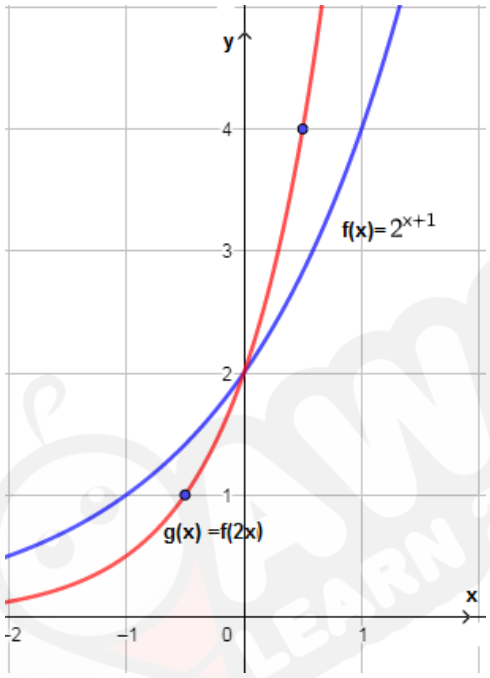
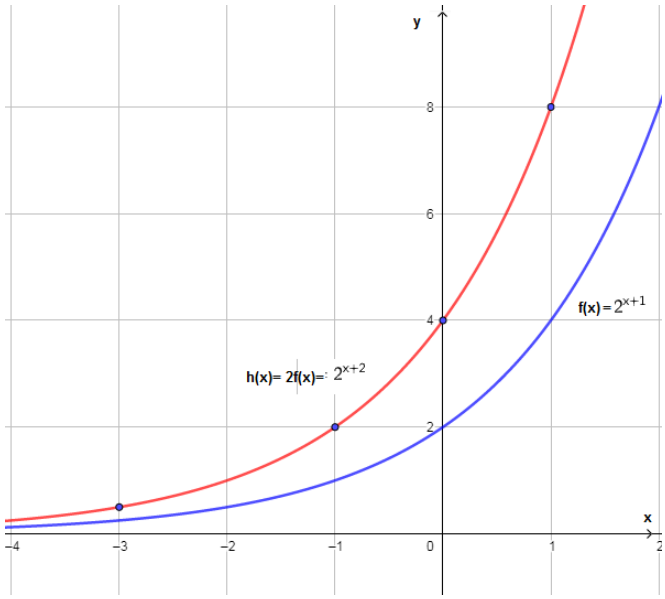
11	
12	
13	

14	
15	

16	
17	
18	
19	$g(x) = (x-2)^2$

20	$g(x)=x^3+3$
21	$g(x)=\|x+1\|+2$
22	$g(x)=2\|x\|$
23	$g(x)=-(x-2)^2+1$
24	$g(x)=-\sqrt{x+2}$
25	a) $g(x)\to 3$, b) $h(x)\to 1$, c) $g(x)\to 2$, d) $h(x)\to 4$
26	لرسم منحنى $f(2x)$ أضرب الإحداثي x لكل نقطة على منحنى $f(x)$ في $\frac{1}{2}$، ولرسم $f(\frac{1}{2}x)$ أضرب الإحداثي x لكل نقطة على منحنى $f(x)$ في 2،  
27	القيمة الصغرى للاقتران لكل من$g(x)$، وَ $h(x)$ هي 2 لأنه في التمدد الأفقي يبقى الإحداثيy كماهو.
28	يتقاطع منحنى كل من $g(x)$، وَ $h(x)$ مع المحور y في النقطة $(0, 11)$ لأنه عند ضرب الإحداثي x لهذه النقطة وهو 0 في2 أو في $\frac{1}{2}$ يكون الناتج 0 فتكون صورة النقطة $(0, 11)$ بالتمدد الأفقي هي نفسها $(0, 11)$، أي أن منحنيات$f(x), g(x), h(x)$ تقطع المحور y في النقطة $(0, 11)$.
29	تمدد (توسيع) رأسي معامله 2.9، وانسحاب إلى الأعلى بمقدار 20.1 وحدة.

30	متوسط الطول للاطفال بعمر 5 سنوات هو $h(5\times12) = h(60)$ $h(60) = 2.9\sqrt{60} + 20.1 \approx 42.6$ in
31	الثابت 20.1 يمثل متوسط أطوال الأطفال الذكور عند الولادة.
32	ضُرب الإحداثي x لكل نقطة في $\frac{1}{3}$ 
33	ضُرب الإحداثي x لكل نقطة في 3 
34	a) $h(x) = \sqrt{x} + 3$ b) $g(x) = \sqrt{x+5}$ c) $r(x) = \sqrt{x+5} + 2$ d) $p(x) = \sqrt{x-3} + 1$ e) $q(x) = \sqrt{x-1} - 4$
35	منحنى C(x) ناتج عن تضييق رأسي معامله $\frac{1}{2}$ لمنحنى T(x) متبوعًا بانسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
36	منحنى g(x) ناتج عن انعكاس f(x) حول المحور x وتضييق رأسي وانسحاب بمقدار وحدة واحدة للأسفل. فتكون قاعدته $g(x) = -c\sqrt{16-x^2} - 1$، وبتعويض إحداثيي النقطة $(0, -2)$ $g(0) = -c\sqrt{16-0^2} - 1$ $-2 = -c(4) - 1 \rightarrow c = \frac{1}{4}$ $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2} - 1$

37	$(-a,\ b)$ لأن منحنى $f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور y.
38	$(a,\ 2b)$ لأن منحنى $f(x)$ 2هو توسيع لمنحنى $f(x)$ معامله 2، لذلك يُضرب الإحداثي y في2
39	$(-a+3,\ b)$ لأن منحنى $f(3-x)$ هو انعكاس حول المحور y لمنحنى $f(x)$ ثم انسحاب إلى اليمين بمقدار 3 وحدات.
40	 يُضرب كل إحداثي x على منحنى $f(x)$ في$\frac{1}{2}$ فتتحول النقطة $(1,\ 4)$ إلى$(\frac{1}{2},\ 4)$، وتتحول $(-1,\ 1)$ إلى $(-\frac{1}{2},\ 1)$، والنقطة $(0,\ 2)$ تبقى$(0,\ 2)$ وتستبدل x بـ 2x في قاعدة الاقتران $f(x)$، فتكون قاعدة $g(x)$ هي: $g(x)= f(2x) = 2^{2x+1}$
41	 يُضرب كل إحداثي y في2 فتكون قاعدة $h(x)$ هي: $h(x) =2(\ 2^{x+1}) = 2^{x+2}$

الدرس 4

اتحقق من فهمي 1صفحة 146

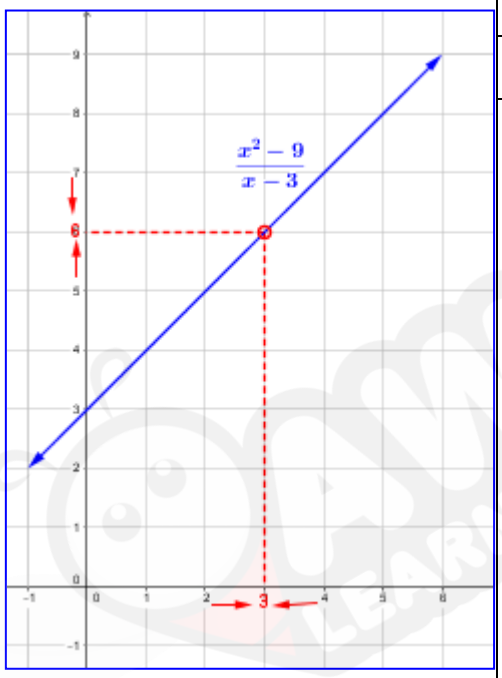
الحل عدديا

	اليمين ←				→ اليسار		
x	3.1	3.01	3.001	3	2.999	2.99	2.9
$f(x)$	6.1	6.01	6.001	6	5.999	5.99	5.9
	اليمين ←				→ اليسار		

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

الحل بيانيا



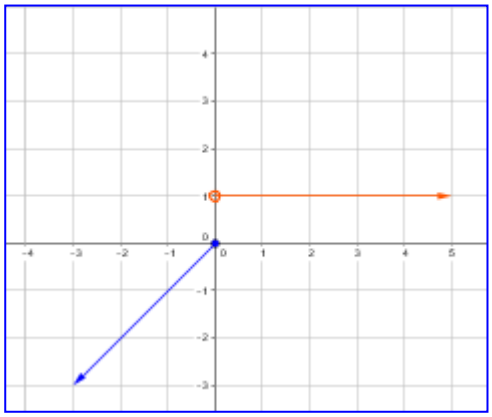
الحل عدديا:

	اليمين ←				→ اليسار		
x	0.1	0.01	0.001	0	-0.001	-0.01	-0.1
$f(x)$	1	1	1		-0.001	-0.01	-0.1
	اليمين 1			0	→ اليسار		

غير موجودة $\lim_{x\to 0} f(x)$

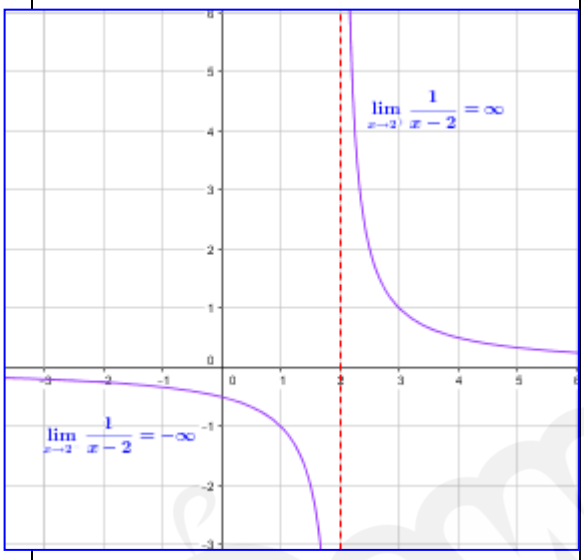
b) غير موجودة $\lim_{x\to 0} f(x)$

الحل بيانيا

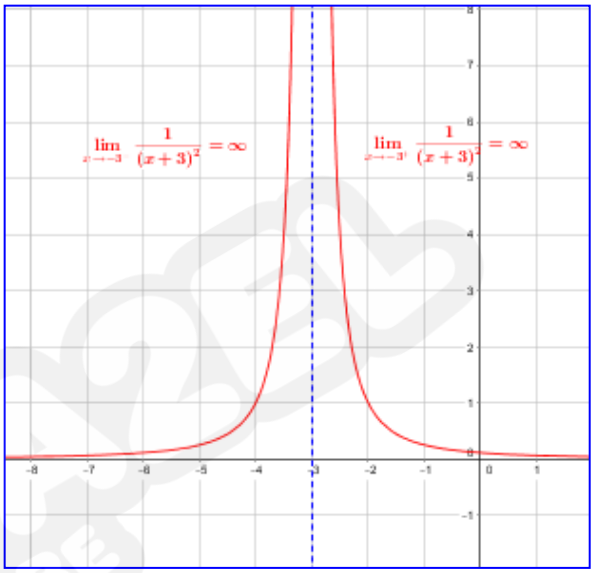


اتحقق من فهمي 2 صفحة 148

a) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ غير موجودة



b) $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+3)^2}=\infty$



اتحقق من فهمي 3 صفحة 150

a) $\lim_{x\to 1}(2x^3+3x^2-4)$

$\lim_{x\to 1}\left(2x^3+\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}4\right)$

$2\left(\lim_{x\to 1}x\right)^3+3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-4$

$=2(1)^3+3(1)^2-4=1$

b) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2}=\frac{\lim_{x\to 4}\sqrt{1+3(x)^2}}{\lim_{x\to 4}3(x)-2}$

$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to 4}1+3\left(\lim_{x\to 4}x\right)^2}}{3\lim_{x\to 4}x-\lim_{x\to 4}2}=\frac{\sqrt{1+3(4)^2}}{3(4)-2}$

$=\frac{\sqrt{49}}{10}=\frac{7}{10}$

اتحقق من فهمي 4 صفحة 151

a) $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)$

$=3(2)^2-5(2)+4=6$

b) $\lim_{x\to -1}\sqrt{1-4x^2}$

العدد 1− لايقع ضمن مجال الاقتران فلذلك لايمكن ايجاد النهاية بالتعويض المباشر

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x-6}{x^2-2}=\frac{3^3-5(3)-6}{3^2-2}=\frac{6}{7}$

d) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=8$

اتحقق من فهمي 5 صفحة 153

a) $\lim_{x\to 0}\frac{7x-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7-x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(7-x)=7$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}\times\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}$

	$= \lim_{x\to 0} \frac{4-(x+4)}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}$ $= \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2+\sqrt{x+4}} = \frac{-1}{4}$
c) $\lim_{x\to 5^+} \frac{x-5}{x-5} = 1$ $\lim_{x\to 5^-} \frac{5-x}{x-5} = -1$ $\Rightarrow \lim_{x\to 5} \frac{\lvert x-5\rvert}{x-5}$ غير موجودة	
اتحقق من فهمي 6 صفحة 155	
a) الاقتران متصل عند $x = 1$ لان: $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 6$	b) الاقتران غير متصل عند $x = 5$ لان الاقتران غير معرف عند $x = 5$
c) $h(3) = 5 - 3 = 2$ $\lim_{x\to 3^+} h(x) = 2$ $\lim_{x\to 3^-} h(x) = 2$ $\Rightarrow \lim_{x\to 3} h(x) = 2$ $\Rightarrow h(3) = \lim_{x\to 3} h(x) = 2$ إذن الاقتران متصل عند $x = 3$	d) $p(5) = 10$ $\lim_{x\to 5} p(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ $= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$ $= \lim_{x\to 5} (x+5) = 10$ $\Rightarrow p(5) = \lim_{x\to 5} p(x) = 10$ إذن الاقتران متصل عند $x = 5$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 156

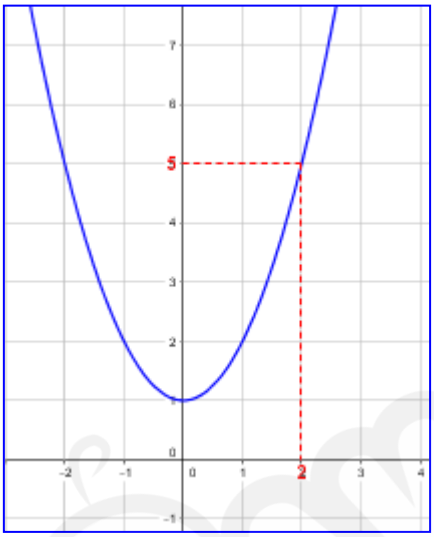
عدديا:

	اليسار ⟵			2	⟶ اليمين		
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	4.61	4.96	4.996		5.004	5.04	5.41
	اليسار ⟵			5	⟶ اليمين		

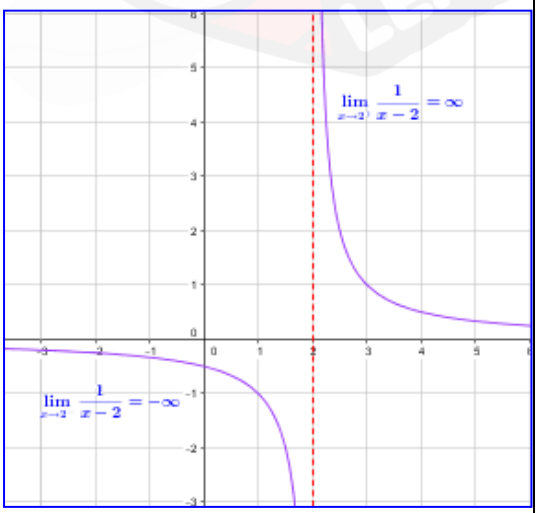
$$\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$$

1) $\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$

بيانيا

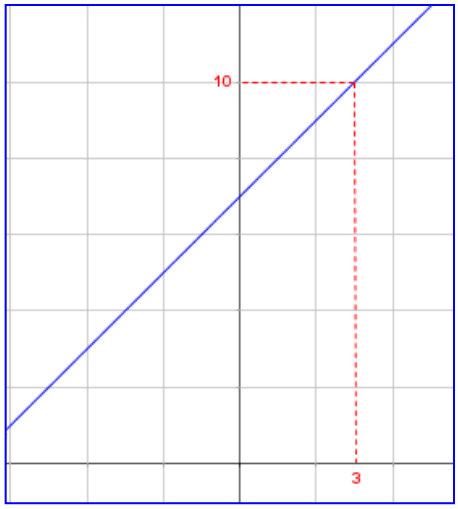


2) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$ **غير موجودة**



3) $\lim_{x\to 3}(x+7)=10$

بيانيا



عدديا:

	اليسار ←			3	→ اليمين		
x	2.9	2.99	2.99		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	9.7	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1
	اليسار ←			10	→ اليمين		

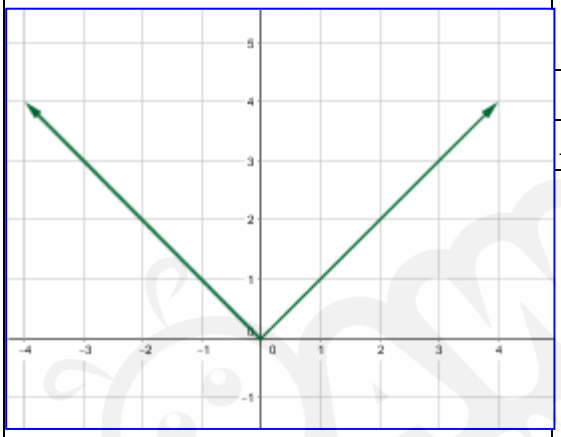
$\lim_{x\to 0}|x| = 0$

عدديا

	اليسار ←			0	→ اليمين		
x	−0.1	−0.01	−0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	−0.1	−0.01	−0.001		0.001	0.01	0.1
	اليسار ←			0	→ اليمين		

4) $\lim_{x\to 0}|x| = 0$

بيانيا



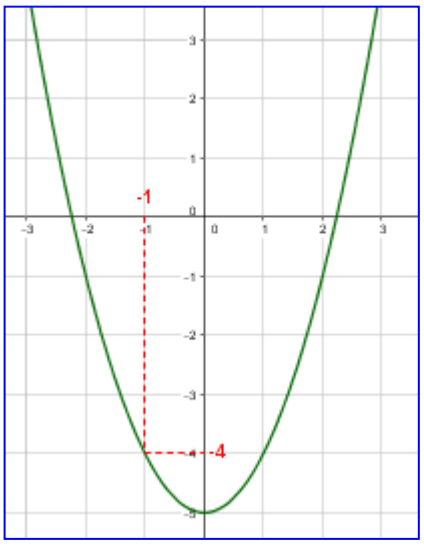
$\lim_{x\to -1}(x^2 - 5) = -4$

عدديا:

	اليسار ←			−1	→ اليمين		
x	−1.1	−1.01	−1.001		0.999−	−0.99	−0.9
$f(x)$	−3.79	−3.97	−3.99		−4.002	−4.02	−4.2
	اليسار ←			−4	→ اليمين		

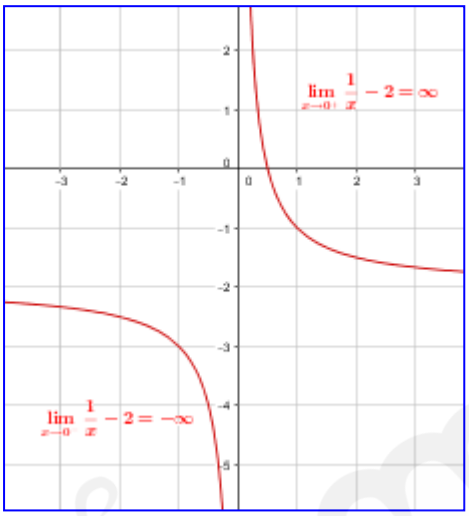
5) $\lim_{x\to -1}(x^2 - 5) = -4$

بيانيا:



6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-2\right)$ غير موجودة

بيانيا:

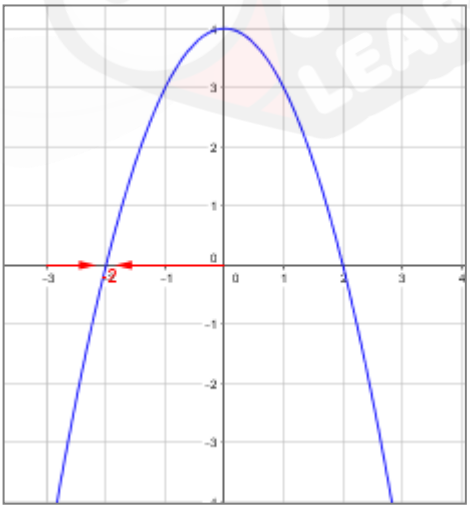


عدديا:

	اليمين ◄			0			► اليسار
x	0.01	0.001	0.0001		−0.0001	−0.001	−0.01
$f(x)$	98	998	9998		−9998	−998	−98
	اليمين ◄ ∞				−∞ ► اليسار		

7) $\lim\limits_{x\to -2}(4-x^2)=0$

بيانيا:

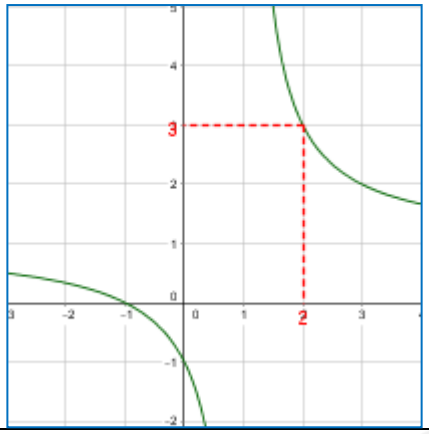


عدديا:

	اليمين ◄			−2			► اليسار
x	−1.9	−1.99	−1.999		−2.001	−2.01	−2.1
$f(x)$	0.39	0.039	0.0039		−0.004	0.04−	−0.41
	اليمين ◄			0	► اليسار		

8) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = 3$

بيانيا:

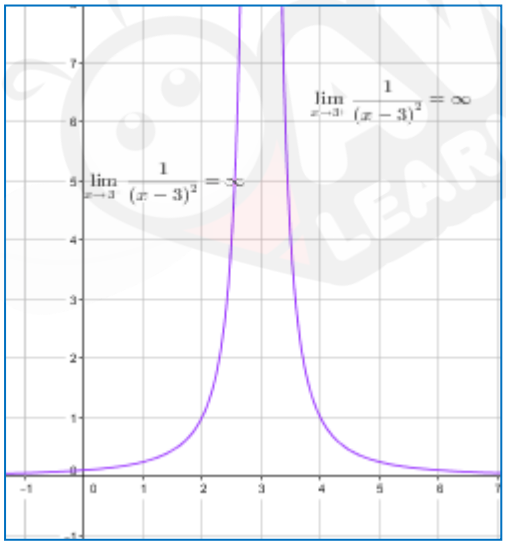


عدديا:

	اليسار ⟵			2		⟵ اليمين	
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.22	3.02	3.002		2.99	2.98	2.81
	اليسار ⟵			3		⟵ اليمين	

9) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

بيانيا:

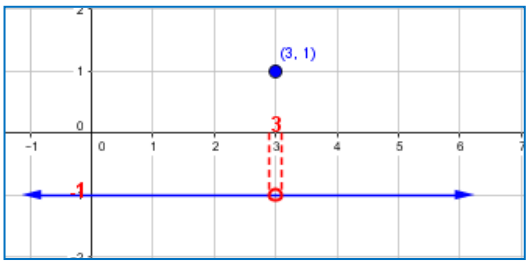


عدديا:

	اليسار ⟵			3		⟵ اليمين	
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100
	اليسار ⟵			∞		⟵ اليمين	

10) $\lim_{x\to 3} f(x) = -1$

بيانيا:

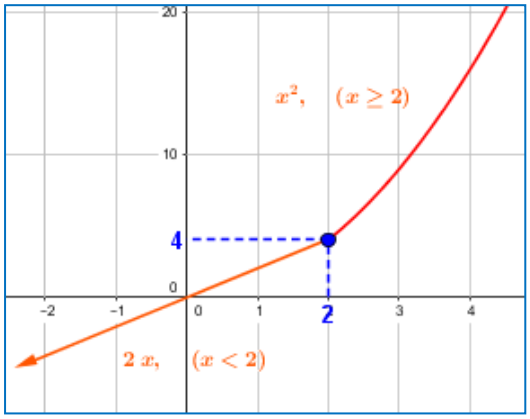


عدديا:

	اليسار ⟵			3		⟵ اليمين	
x	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	−1	−1	−1		−1	−1	−1
	اليسار ⟵			-1		⟵ اليمين	

11) $\lim_{x\to 2} h(x) = 4$

بيانيا:

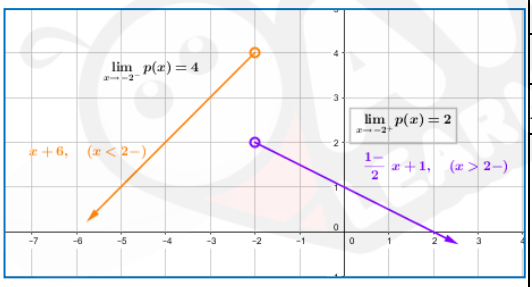


عدديا:

	اليسار ←			2	→ اليمين		
x	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.8	3.98	3.998		4.004	4.04	4.4
	اليسار ←			4	→ اليمين		

12) $\lim_{x\to -2} p(x)$ **غير موجودة**

بيانيا:

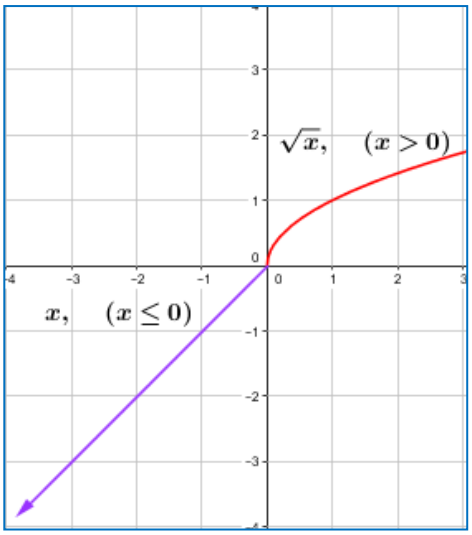


عدديا:

	اليسار ←			−2	→ اليمين		
x	−2.1	−2.01	−2.001		−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		1.999	1.995	1.95
	اليسار 4 ←				→ اليمين 2		

13) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

بيانيا:



عدديا:

	اليسار ←			0	→ اليمين		
x	−0.1	−0.01	−0.001		0.0001	0.001	0.1
$f(x)$	−0.1	−0.01	−0.001		0.01	0.031	0.3
	اليسار ←			0	→ اليمين		

14) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$	15) $\lim_{x\to -2} f(x)$ غير موجودة
16) $\lim_{x\to 1} h(x) = -1$	17) $\lim_{x\to 2} h(x)$ غير موجودة
18) $\lim_{x\to 3} h(x) = 2$	19) $\lim_{x\to 3}(x^2 - 4x + 7) = 9 - 12 + 7 = 4$
20) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{9-16}{3-4} = \frac{-7}{-1} = 7$	21) $\lim_{x\to 9} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$
22) $\lim_{x\to 2\pi}(x^3 + \pi x - 5\pi^3)$ $= 8\pi^3 + 2\pi^2 - 5\pi^3$ $= 3\pi^3 + 2\pi^2$	23) $\lim_{x\to -3} \sqrt{\frac{x-3}{2x+4}} = \sqrt{\frac{-6}{-2}} = \sqrt{3}$
24) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x^2 + 11}$ $= \sqrt[3]{16 + 11} = 3$	25) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$ $= \lim_{x\to 3}(x^2 + 3x + 9) = 27$
26) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+5x+3}{x+1}$ $= \lim_{x\to -1} \frac{(2x+3)(x+1)}{x+1}$ $= \lim_{x\to -1}(2x + 3) = 1$	27) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{\lvert x-2\rvert} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{\lvert x-2\rvert}$ $\lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+1) = 3$ $\lim_{x\to 2^-} \frac{(x+1)(x-2)}{2-x} = \lim_{x\to 2^+}(-1)(x+1) = -3$ $\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{\lvert x-2\rvert}$ غير موجودة
28) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ $= \lim_{x\to 3^+}(3x - 7) = 2$ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x - 1) = 2$ $\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 2$	29) $\lim_{t\to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{2}}{t-4} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}}$ $= \lim_{t\to 4} \frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{2}}{(t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{t\to 4} \frac{4-t}{4t} \times \frac{1}{(t-4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)} =$ $\lim_{t\to 4} \frac{-1}{4t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{16}$
30) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ $= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$ $= \lim_{x\to 3} \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} = \frac{1}{4}$	31) $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ بما أن الاقتران كثير حدود فإن $\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1) \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + 0 = 5$ $\Rightarrow a + b = 5$ $\lim_{x\to -2} f(x) = 8 = f(-2)$ $\Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + 0 = 8$ $\Rightarrow 4a - 2b = 8$ بحل نظام المعادلات الخطية الناتج بالحذف أو التعويض نجد ان $a = 3 \quad , b = 2$
32) $\lim_{x\to 2}\left(f(x) + g(x)\right)$ $= 2 + 0 = 2$	33) $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)}$ غير موجودة

34) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$

$=\sqrt{3+1}=2$

35) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\times g(x))=0\times\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$

36)

متصل لأنه كثير حدود

37)

متصل لأن الاقتران نسبي معرف عند $x=-5$

38) $h(0)=3$

$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=3$

$\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}h(x)$ غير موجودة

إذن الاقتران غير متصل عند $x=0$

39)

الاقتران متصل عند $x=3$ إذن

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)\Rightarrow 3+3=2+\sqrt{k}$

$\Rightarrow 4=\sqrt{k}\Rightarrow k=16$

40)

الاقتران متصل عند $t=60$ إذن

$\lim\limits_{t\to 60^+}T(t)=\lim\limits_{t\to 60^-}T(t)$

$\Rightarrow k-3(60)=2(60)$

$\Rightarrow k=300$

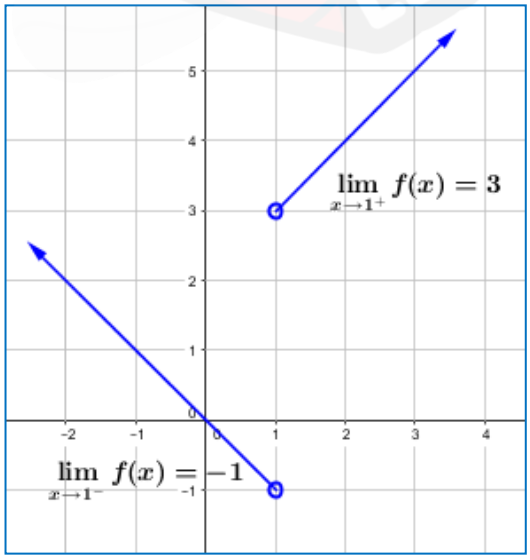
41)

يجب إن يكون الاقتران متصل عند$t=60$ حتى يكون التبريد في الفرن بالتدريج وليس بشكل مفاجئ كما أن الحرارة لا تنقطع عن الفرض حتى يكون فجوة في درجة الحرارة قبل 60 وبعدها

42) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$

غير موجودة

بيانيا:



جبريا:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-1-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-x+1-1}{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-x}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{1-x}=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}\neq\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+|x-1|-1}{|x-1|}$ غير موجودة

43)

بما أن المقام صفر والنهاية موجودة إذن البسط صفر

$$\sqrt{m(0)+b}-3=0$$

$$\sqrt{b}=3\Rightarrow b=9$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{mx+b}-3}{x}\times\frac{\sqrt{mx+b}+3}{\sqrt{mx+b}+3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{mx+b-9}{x\left(\sqrt{mx+b}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{mx+9-9}{x\left(\sqrt{mx+9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{m}{\left(\sqrt{mx+9}+3\right)}$$

$$=\frac{m}{3+3}=1\Rightarrow m=6$$

44) $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{a}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1-a(x-1)}{(x-1)(x^2-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1-ax+a}{(x-1)(x^2-1)}$$

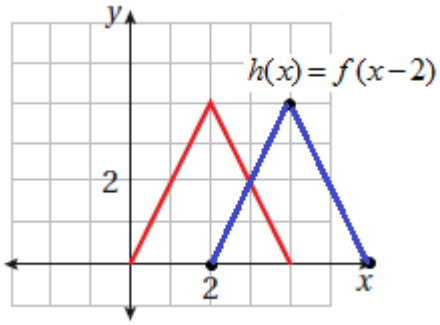
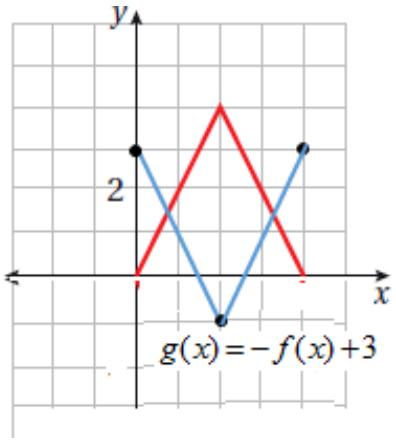
بتحليل البسط

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-a+1}{(x^2-1)}$$

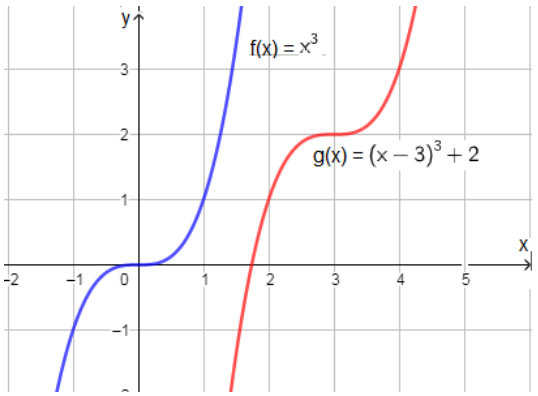
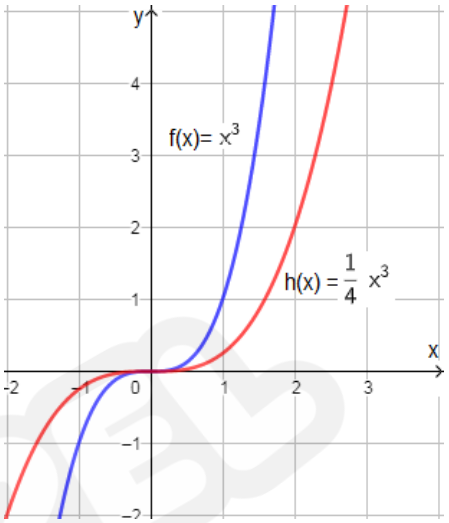
بما أن المقام عند $x=1$ صفر والنهاية موجودة إذن البسط عند $x=1$ يجب أن يكون صفر

$$\Rightarrow 1-a+1=0\Rightarrow a=2$$

اختبار نهاية الوحدة

رقم السؤال	الإجابة
1	a
2	d
3	c
4	d
5	b
6	$(x+1)(x-4)(3x-1)$
7	$(x-2)(x+3)(2x-1)(4x-1)$
8	$x=-1,\ x=2,\ x=3$
9	$x=1,\ x=-3,\ x=-9$
10	$m=5$
11	$\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+3}$
12	$\frac{-6}{x}+\frac{11}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$
13	$3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}$
14	$\frac{-1}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{x+10}{2(x^2+2)}$
15	
16)	

17	$\frac{1}{6}$
18	$\frac{3}{5}$
19	غير موجودة
20	$\frac{-2}{3}$
21	متصل، لأن النهاية تساوي قيمة$f(5)$ وتساوي 13
22	غير متصل لأنه غير معرف عند 0
23	غير متصل لأن النهاية غير موجودة
24	عرض الخزان 2 m، وطوله 5 m، وارتفاعه 3 m مساحة الحديد اللازم لصنعه $62\ m^2$
25	غير موجودة
26	1
27	غير موجودة
28	غير موجودة
29	1
30	0

31		 (32
33	c	
34	a	
35	d	

الوحدة الرابعة

الدرس الأول

P.10 أتحقق من فهمي:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(a) $y = 3x-2$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h)-2-(3\times 2-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+3h-2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

(b) $y = 4x^2+1$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(h-1)^2+1-(5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2-8h+4-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4h-8)}{h} = \lim_{h\to 0} (4h-8)$$

$$= -8$$

∴ $y'(-1) = -8$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -8$$

(a) $y = 8 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 - (x+h)^2 - 8 + x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 - x^2 - 2xh - h^2 - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h)}{h} = \lim_{h\to 0} (-2x - h)$$

$$= -2x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -2x}$$

(b) $y = \frac{3}{x+2}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{x+h+2} - \frac{3}{x+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{3(x+2) - 3(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{3x + 6 - 3x - 3h - 6}{(x+h+2)(x+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{-3h}{(x+h+2)(x+2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(x+h+2)(x+2)}$$

$$= \frac{-3}{(x+2)(x+2)} = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(x+2)^2}}$$

أتحقق من فهمي: P. 11

ⓐ $y = x^{-11}$, $x > 0$

$y' = (-11)(x)^{-12}$, $x > 0$

ⓑ $y = \frac{1}{x^5}$, $x > 0$

$y = x^{-5}$, $x > 0$

$y' = (-5)(x)^{-6} \Rightarrow y' = \frac{-5}{x^6}$, $x > 0$

ⓒ $y = \sqrt[3]{x^5}$

$y = x^{\frac{5}{3}}$

$y' = \frac{5}{3} x^{(\frac{5}{3}-1)}$

$y' = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{(x)^2}$

أتحقق من فهمي P. 12

ⓐ $y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$, $x > 0$

$y = x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + (-8) x^{-3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{8}{x^3}$, $x > 0$

ⓑ $y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}$, $x \neq 0$

$y = \frac{x^5}{4x} - \frac{8x^6}{4x} \Rightarrow y = \frac{1}{4} x^4 - 2x^5$

$y' = x^3 - 10x^4$, $x \neq 0$

P.13 أحقق من نظري:

$S = t^3 - \sqrt{t}$

$\frac{ds}{dt} = 3t^2 - \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 3(4)^2 - \frac{1}{2\sqrt{4}}$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4} = 47.75 \ m/s$

سرعة الجسم بعد 4 ثوانٍ من حركته هي $47.75 \ m/s$

تذكير: $y = a\sqrt{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$

P.14 أحقق من نظري:

$y = 8x - \frac{1}{x}$ $(0.25, -2)$

تذكير: $y = \frac{a}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = 8 + \frac{1}{x^2}$

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0.25} = 8 + \frac{1}{(0.25)^2} = 8 + \frac{1}{\frac{1}{16}}$

$= 8 + 16 = 24$

معادلة المماس عند $(0.25, -2)$ هي

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = 24(x - 0.25) \Rightarrow y + 2 = 24x - 6$

$y = 24x - 8$

ميل العمودي على المماس هو $\left(-\frac{1}{24}\right)$

معادلة العمودي على المماس عند $(0.25, -2)$

$y + 2 = \frac{-1}{24}(x - 0.25)$

$y + 2 = -\frac{1}{24}x + \frac{1}{96}$

$y = -\frac{1}{24}x - \frac{191}{96}$

① $y = x^2 + 3x + 1$, $x = 3$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 + 3(3+h) + 1 - (19)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 9 + 3h + 1 - 19}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h + 3h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(9+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (9+h) = 9$$

so, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 9$

② $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x = 2$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \left[\frac{1}{(2+h)^2+1} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \left[\frac{1}{5 + 4h + h^2} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \left[\frac{5 - 5 - 4h - h^2}{5(5+4h+h^2)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{h(-4-h)}{5(5+4h+h^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4-h}{5(5+4h+h^2)}$$

$$= \frac{-4}{5(5)} = \frac{-4}{25}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{-4}{25}$$

③ $y = (2x+3)^2$, $x = -1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h-1)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2h-2+3)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2h+1)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+4h+1-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4h+4)}{h} = \lim_{h\to 0} (4h+4)$$

$$= 4$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 4$$

④ $y = \frac{x-3}{x^2}$, $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \left[\frac{x+h-3}{(x+h)^2} - \frac{x-3}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x^3+x^2h-3x^2 - ((x-3)(x^2+2xh+h^2)}{x^2(x+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x^3+x^2h-3x^2 + [-x^3-2x^2h-xh^2+3x^2+6xh+3h^2]}{x^2(x+h)^2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{-x^2h-xh^2+6xh+3h^2}{x^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{h(-x^2-xh+6x+3h)}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x^2-xh+6x+3h}{x^2(x+h)^2} = \frac{-x^2+6x}{x^4}$$

P.15

⑤ $y = x(x+2)$

$y = x^2 + 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+2(x+h)-x^2-2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h-x^2-2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2+2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+2)$$

$$= 2x+2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2x+2}$$

⑥ $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\right) \times \left(\frac{1}{x+h-1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \left[\frac{x-1-x-h+1}{(x+h-1)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}}$$

⑦ $y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

$y = 10x - 6x^{-\frac{1}{2}}$, $x > 0$

$y' = 10 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$

$y' = 10 + 3x^{-3/2}$

$y' = 10 + \frac{3}{\sqrt{x^3}}$, $x > 0$

⑧ $y = x^8 - x^{-8}$, $x \neq 0$

$\frac{dy}{dx} = 8x^7 + 8x^{-9}$, $x \neq 0$

⑨ $y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$, $x > 0$

$y' = -18x^{-3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

⑩ $y = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$, $x > 0$

$y = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow y = x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = (-1)x^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(11) $y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$, $x \neq 0$ P.15

$y = 6x^{-3} + 2x^{-2} - 3$

$\frac{dy}{dx} = -18x^{-4} - 4x^{-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-18}{x^4} - \frac{4}{x^3}$ $x \neq 0$

(12) $y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$

$y = 20x^5 + 3x^{1/3} + 17$

$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + x^{-2/3}$

$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x \neq 0$

$y = x^2 - x$

(13) $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 2x - 1$ عندما $x=4$ $m = 2(4) - 1 = 7$

$x = 4 \Rightarrow y = 16 - 4 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow (4, 12)$ (x_1, y_1)

معادلة المماس :

$(y - 12) = 7(x - 4)$

$y - 12 = 7x - 28$

$y = 7x - 28 + 12 \Rightarrow y = 7x - 16$

(14) m (العمودي) $= \frac{-1}{7}$, $(4, 12)$

معادلة العمودي على المماس

$(y - 12) = -\frac{1}{7}(x - 4) \Rightarrow y - 12 = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$

$y = -\frac{1}{7}x + \frac{88}{7}$

(15) $f(x) = \frac{24}{x}$, $x \neq 0$

$f'(x) = \frac{-24}{x^2}$, $x \neq 0$

تذكرة $\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$

(16) $f'(x) = \frac{-24}{x^2}$ ← سالب ← موجب دائماً لكل $x \neq 0$

∴ بما أن $f'(x)$ هي سالبة لكل قيم x حيث $x \neq 0$ إذاً ميل المماس هو دائماً سالب.

(17) $\frac{dh}{dt} = 4t - 3t^2$, $0 < t < 20$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=10} = 4(10) - 3(10)^2 = 40 - 300$

$= -260$ m/s

(18) $y = (x-3)(x-5)$

$y = x^2 - 8x + 15$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 8$

$x = 3 \Rightarrow (3,0)$

$x = 5 \Rightarrow (5,0)$

المماس الأول:

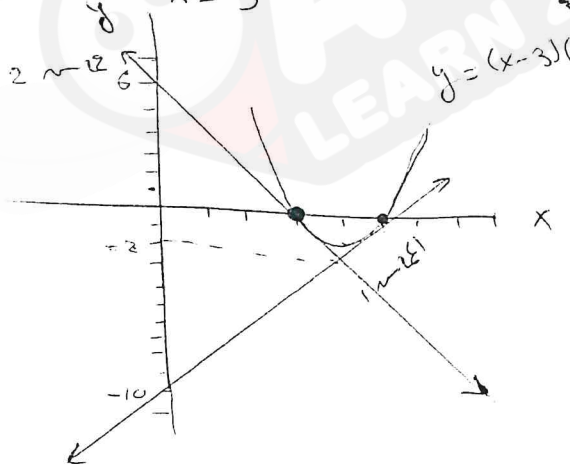
$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2(3) - 8 = -2 \Rightarrow y = -2(x-3)$

$y = -2x + 6$

المماس الثاني:

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = 2(5) - 8 = 10 \Rightarrow y = 2(x-5)$

$y = 2x - 10$



لاحظ المماس المحاور

(19) $S = 10\sqrt{t} + t + \pi$, $0 \le t \le 4$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{10}{2\sqrt{t}} + 1 \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{5}{\sqrt{t}} + 1 \quad 0 < t < 4$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = \frac{5}{\sqrt{1}} + 1 = 5 + 1 = 6 \text{ m/s}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{8x} \text{ , } x > 0$$

(20) $y = 2\sqrt[3]{x}$, $x > 0$

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad x > 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=125} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{2}{3\times\left(5^{3\times 2\times\frac{1}{3}}\right)}$$

$$= \frac{2}{3\times 25} = \frac{2}{75} \approx 0.03$$

(21) $y = 2\sqrt[3]{x}$

$$\frac{y}{2} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^3 = x \Rightarrow \frac{y^3}{8} = x$$

المنحنى هو $y = \frac{1}{8}x^3$

$$D' = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{8}x^2 \text{ , } Q = \left(10, \frac{125}{10}\right)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=10} = \frac{3}{8}(10)^2 = \frac{300}{8} \approx \frac{1}{0.03}$$

$$= \frac{300 \div 4}{8 \div 4} = \frac{75}{2} \Rightarrow \text{مقلوب } 2/75$$

لاحظ أن

D' عندما القطر Q تساوي مقلوب

C' عند القطر P .

$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$ مجالات التفكير العليا: P:16

(22) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$

(23) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x\to\infty} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$ → عندما $x \to \infty$ ، $\frac{2}{x^2} \to 0$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x\to\infty} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 0.5$

$y = x^2 + 4$

(24) $\frac{dy}{dx} = 2x$

$x = k \Rightarrow y = k^2 + 4$

(k, k^2+4)

x_1 , y_1

$m = 2k$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$y - k^2 - 4 = 2k(x - k)$

$y - k^2 - 4 = 2kx - 2k^2$

$y - k^2 - 4 - 2kx + 2k^2 = 0$

$y + k^2 - 4 - 2kx = 0$

$y - (2kx + 4) + k^2 = 0$

(25) $4y + x = 0$

$4y = -x \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x$

ميل العمودي هو $-\frac{1}{4}$ وعندها يكون ميل المماس هو 4

أي أننا نريد k التي تجعل المشتقة تساوي 4

$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \quad P(a, a^2) \quad y'(a) = 2a$

(26) معادلة المماس عند $P(a, a^2)$

$y - a^2 = 2a(x - a)$

$y - a^2 = 2ax - 2a^2 \Rightarrow y = 2ax - a^2$

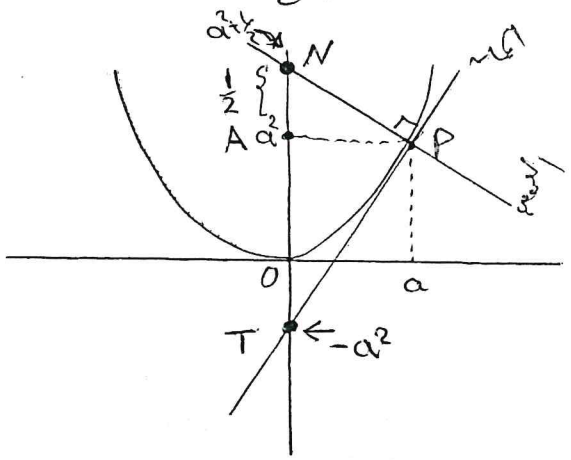
المقطع مع محور y للمماس

معادلة العمودي على المماس عند $P(a, a^2)$

$y - a^2 = \frac{-1}{2a}(x - a)$

$y = -\frac{1}{2a}(x) + (a^2 + \frac{1}{2})$

المقطع مع محور y للعمودي على المماس



$\overline{OA} = |a^2| = a^2$

$\overline{OT} = |-a^2| = a^2$

$\overline{OA} = \overline{OT}$

(27) $\overline{AN} = \overline{ON} - \overline{OA}$

$= a^2 + \frac{1}{2} - a^2 = \frac{1}{2}$

P.18 اتحقق من فهمي:

(a) $y = (4x+9)^7$

$$\frac{dy}{dx} = 7(4x+9)^6 \times (4) = 28(4x+9)^6$$

(b) $y = \sqrt[3]{1-10x}$

$$x = (1-10x)^{1/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\tfrac{1}{3})(-10)(1-10x)^{-2/3}$$

$$= \frac{-10}{3\sqrt{(1-10x)^2}}$$

(c) $y = \frac{1}{2x-7}$

$$x = (2x-7)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(2)(2x-7)^{-2} = \frac{-2}{(2x-7)^2}$$

ملاحظات يضعها الطالب:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{(f(x))^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{f(x)}\right) = \frac{-b \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$$

أ) أكمل ما يلي:

ⓐ $y = (2x^4 - 8)^{\frac{5}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = (\frac{5}{3})(2x^4-8)^{\frac{2}{3}}(8x^3)$

$\frac{dy}{dx} = (\frac{40}{3}x^3)(2x^4-8)^{\frac{2}{3}}$

ⓑ $y = \frac{13}{(x^2-8)^7}$; $x \neq \pm\sqrt{8}$

$y = 13(x^2-8)^{-7}$

$\frac{dy}{dx} = (13)(-7)(x^2-8)^{-8}(2x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(-182)x}{(x^2-8)^8}$

أ) أكمل ما يلي:

ⓐ $f(x) = \sqrt[7]{x^4+1}$, $x = -1$

$f(x) = (x^4+1)^{\frac{1}{7}} \Rightarrow f'(x) = (\frac{1}{7})(x^4+1)^{-\frac{6}{7}}(4x^3)$

$f'(x) = \frac{4x^3}{7(x^4+1)^{\frac{6}{7}}}$

$f'(-1) = \frac{-4}{7(2)^{\frac{6}{7}}} \Rightarrow f'(-1) \approx -0.492$

ⓑ $y = (2x-5)^{\frac{2}{3}}$, $x = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(2x-5)^{-\frac{1}{3}}(2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-5}}$

at $x=0$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{4}{3\sqrt[3]{-5}} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{5}}$

P.22

أحقق من فهمي : نفس فكرة معدل زيادة الحجم بالنسبة للزمن

أوجد $\frac{dr}{dt}$ عندما $r=4cm$ و $r=8cm$ علماً بأن $\frac{dV}{dt}=30\ cm^3/s$

حجم الكرة : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dr}=4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dr}\times\frac{dr}{dt}=\frac{dV}{dt}$$

$$(4\pi r^2)\times\frac{dr}{dt}=30 \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{30}{4\pi r^2} \qquad r\neq 0$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{15}{2\pi r^2}$$

(a) at $r=4cm$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=4}=\frac{15}{2\pi(4)^2}=\frac{15}{32\pi}\approx 0.149\ cm/s$$

(b) at $r=8cm$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=8}=\frac{15}{2\pi(8)^2}=\frac{15}{128\pi}\approx 0.037\ cm/s$$

P.23

أتدرب وأحل المسائل

(1) $f(x)=(4x+2)^2 \Rightarrow f'(x)=8(4x+2)$

(2) $y=(8-x)^{10} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-10(8-x)^9$

(3) $g(x)=(1+3x^2)^5 \Rightarrow g'(x)=(30x)(1+3x^2)^4$

(4) $y=(6x-5x^2)^{-8} \Rightarrow y'=(-8)(6x-5x^2)^{-9}(6-10x)$

$$y'=(80x-48)(6x-5x^2)^{-9}$$

$$y'=\frac{(80x-48)}{(6x-5x^2)^9}$$

⑤ $y=(\pi-x^2)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=3(\pi-x^2)^2(-2x)$ **P. 23**

$\frac{dy}{dx}=-6x(\pi-x^2)^2$

⑥ $h(x)=\sqrt{6x-1}$, $x>\frac{1}{6} \Rightarrow h'(x)=\frac{6}{2\sqrt{6x-1}}=\frac{3}{\sqrt{6x-1}}$

بديل $h(x)=(6x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}(6x-1)^{-\frac{1}{2}}\times 6$

$=3(6x-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{6x-1}}$

⑦ $y=\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3$, $x>0$

$y=\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 \Rightarrow y=\left(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)^3$

$\frac{dy}{dx}=3\left(x^{-\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{6}}\right)^2\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{-1}{6}x^{-\frac{7}{6}}\right)$

$\frac{dy}{dx}=\left(-2x^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{7}{6}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^2$

$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{-2}{\sqrt[3]{x^5}}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x^7}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^2$

⑧ $h(x)=(\sqrt{x}+x)^{-2}$, $x>0$ $\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$h'(x)=-2(\sqrt{x}+x)^{-3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

$h'(x)=\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}-2\right)(\sqrt{x}+x)^{-3}$

P: 23

⑨ $h(x) = \sqrt{(2-x)^5} + 16$, $x = -4$

$h(x) = (2-x)^{\frac{5}{2}} + 16 \Rightarrow \frac{dh}{dx} = -\frac{5}{2}(2-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{5}{2}\sqrt{(2-x)^3}$

$\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=-4} = -\frac{5}{2}\sqrt{(2+4)^3} = -\frac{5}{2}\sqrt{216}$

$= -5\sqrt{54}$

⑩ $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $x = \frac{1}{4}$

$y = (x^{\frac{1}{2}}-1)^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (-1)(x^{\frac{1}{2}}-1)^{-2}(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1)^{-2}$

$= \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}(\sqrt{\frac{1}{4}}-1)^2}$

$= \frac{-1}{2\times\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

⑪ $y = \frac{2}{(x^2-13)^{4/7}}$, $x = 1$

$y = 2(x^2-13)^{-4/7} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2)(\frac{-4}{7})(2x)(x^2-13)^{-11/7}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{16}{7}x(x^2-13)^{-11/7}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{16}{7}(-12)^{-11/7} \approx 0.046$

$(\frac{g}{f(x)})' = \frac{-gf'(x)}{(f(x))^2}$ بالمشتقة

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(\frac{4}{7})(2x)(x^2-13)^{-3/7}}{(x^2-13)^{8/7}}$ بالضرب

$= -\frac{16}{7}(x^2-13)^{-11/7}$

P.23

(12) $h(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$, $x=16$ العقه عرضنا سه مع السؤال

$h(x)=(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x)=(\frac{1}{2})(1-\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\cdot(\frac{-1}{2\sqrt{x}})$

$=\frac{-1}{4\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

$h'(16)=\frac{-1}{4\times4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4}}$

$h(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x=16$ (12) بدل السؤال

$h(x)=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$

$h'(x)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\cdot(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$

$=\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

$h'(16)=\frac{1}{4(4)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\frac{1}{16\sqrt{5}}$

$(\sqrt{f(x)})'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$h(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ طريقة ثانية

$h'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$h'(16)=\frac{1}{4\sqrt{16+4}}$

$=\frac{1}{4\sqrt{20}}$

$=\frac{1}{16\sqrt{5}}$

$$y = \frac{20}{2+x}, \quad x > -2$$

P.23

(13) $\frac{dy}{dx} = \frac{-20}{(2+x)^2}$ $\quad m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{-20}{16} = \frac{-5}{4}$

(14) $\frac{dy}{dx} = -0.2 \Rightarrow \frac{-20}{(2+x)^2} = \frac{-2}{10}$

$\Rightarrow 2(2+x)^2 = 200$

$(2+x)^2 = 100$

$2+x = \pm 10$ مرفوض

$2+x = -10$

$x = -12$ مرفوض $\because x > -2$

$2+x = 10$

$x = 8$ $\quad x > -2$

بديل

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=8} = \frac{-20}{(2+8)^2}$

$= \frac{-20}{100} = -0.2$

$y = \sqrt{2x+5}$

$y = (2x+5)^{\frac{1}{2}}$

(15) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}(2)$

$\frac{dy}{dx} = (2x+5)^{-\frac{1}{2}}$

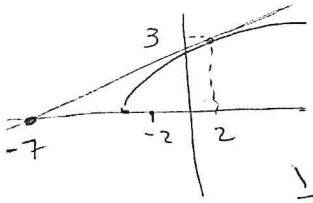
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

$= \frac{1}{y}$

(16) $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$, $(2,3)$ (x_1, y_1)

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{3}(x-2)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ معادلة المماس



يقطع محور الـ x عندما $y = 0$

$\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x = -\frac{7}{3} \Rightarrow x = -7$

$(-7, 0)$

$f(x) = \sqrt{100-x^2}$ $x \in [-10,10]$

P.23

(19) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$

$f'(-6) = \frac{+6}{\sqrt{100-36}} = \frac{6}{\sqrt{64}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

(20) slope $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $(0,0), (-6,8)$

$= \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{4} \text{ ميل العمودي}\right) \times \left(-\frac{4}{3} \text{ ميل المماس}\right) = -1$

إذا العمودي والمماس متعامدين

(21) $y = (2x^2-3x+1)^3$

P.24

$\frac{dy}{dx} = 3(2x^2-3x+1)^2(4x-3)$

$= 3((2x-1)\cdot(x-1))^2(4x-3)$

$= (3)(2x-1)^2(x-1)^2(4x-3)$

(22) $y = \sqrt{a+bx^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2b}{2\sqrt{a+bx^2}} = \frac{b}{\sqrt{a+bx^2}}$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{b}\frac{b}{\sqrt{a+bx^2}}$ $b>0$

$= \frac{1}{b}\frac{dy}{dx}$ $c = \frac{1}{b}$

$= c\frac{dy}{dx}$ ، c ثابت $\frac{1}{y} = c\frac{dy}{dx}$

(23) $V = \pi r^2 h$

$V = \pi (60)^2 . h$

$\frac{dV}{dh} = \pi (3600)\ cm^3$ ~~$= 3.6\pi L$~~

$\frac{dV}{dt} = 0.4\ L/s = 400\ cm^3/s$

$\frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt}$

$\frac{3600}{3.6} \times \frac{dh}{dt} = \frac{400}{0.4} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{\frac{400}{0.4}}{\frac{3.6}{3600}} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{9}\ cm/s$

(24) $V = x^3$, $A = 6x^2$

$\frac{dV}{dx} = 3x^2$

$\frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dt}$

$3x^2 \cdot \frac{dx}{dt} = 50 \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{50}{3x^2}}$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=5} = \frac{50}{3 \times 25} = \frac{2}{3}\ cm/s$

$A = 6x^2$

$\frac{dA}{dx} = 12x$

$\frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt} \Rightarrow 12x \cdot \frac{50}{3x^2} = \frac{dA}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{50(4)}{x}$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=5} = 40\ cm^2/s$

or $\frac{dA}{dt} = (5)(12)\left(\frac{2}{3}\right)$

$= 5 \times 2 \times 4$

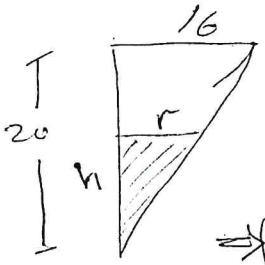
$= 40\ cm^2/s$

(25) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $\frac{dV}{dt} = 25\ cm^3/s$

$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4}{5}\right)^2 h^3$

$V = \frac{16}{3\times 5}\pi h^3$

$\frac{dV}{dh} = \frac{16}{5}\pi h^2$



$\frac{r}{16} = \frac{h}{20}$

$\Rightarrow r = \frac{4}{5}h$

$\frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \left(\frac{16}{5}\pi h^2\right) \cdot \frac{dh}{dt} = 25$

$\frac{dh}{dt} = 25 \cdot \frac{5}{16\pi h^2}$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=12} = \frac{125}{(16)(\pi)(12)^2}$

$\frac{dh}{dt} \approx 0.017\ cm/s$

(26) $u = 150 w^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{du}{dw} = \frac{100}{\sqrt[3]{w}}$

$w = 0.05t + 8 \Rightarrow \frac{dw}{dt} = 0.05$

$\frac{du}{dw} \times \frac{dw}{dt} = \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{100}{\sqrt[3]{w}} \times 0.05$

$\frac{du}{dt} = \frac{5}{\sqrt[3]{w}}$

$\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64} = \frac{5}{\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{4}$

(27) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad \frac{dV}{dt} = -0.6\ cm^3/s$ **p.24**

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dt} \Rightarrow (4\pi r^2)\cdot \frac{dr}{dt} = -0.6$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-0.6}{4\pi r^2}$$

$2.5m \Rightarrow 250_{cm}$

$$\Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=250_{cm}} = \frac{-0.6}{4\pi(250)^2} \approx -7.6\times10^{-7}\ cm/s$$

---

(28) $y = \frac{a}{1+x^2}$ مهارات التفكير العليا **p.24**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{-2a}{4} = -\frac{a}{2}$$

at $x=1 \Rightarrow y = \frac{a}{2} \Rightarrow (1, \frac{a}{2})$

$y - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{a}{2}x + a}$

معادلة المماس عند $x=1$ هي $y = -\frac{a}{2}x + a$ تقطع محور y عند $x=0$ أي $(0, a)$.

المنحنى $y = \frac{a}{1+x^2}$ يقطع محور y عندما $x=0 \Leftarrow y=a \Leftarrow (0,a)$

إذاً كلاً من المماس $y = -\frac{a}{2}x + a$ و المنحنى $y = \frac{a}{1+x^2}$ يقطعان محور y.

(29) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$, Let $w = x^2+4$

$f(w) = \frac{w-4}{w} = 1 - \frac{4}{w}$

$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dw} \times \frac{dw}{dx}$

$\frac{dw}{dx} = 2x$

$\frac{df}{dw} = \frac{4}{w^2}$

$= \frac{4}{(w)^2} \times (2x)$

$= \frac{4}{(x^2+4)^2} \cdot (2x) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$

(30) $y = (x^2+x-2)^3 + 3$

$\frac{dy}{dx} = 3(x^2+x-2)^2 \cdot (2x+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (6x+3)(x^2+x-2)^2$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = (9)(0) = 0 \Rightarrow$ مماس أفقي

عند $(1,3)$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$ or $x=-2$

$6x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

عندما $x=-2 \Leftarrow$ المقطعين $(-2,3)$ تشترك مع بقطع $(1,3)$

المماس عند $(-2,3)$

$y-3=0$

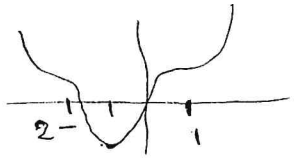
$y=3$

المماس عند $(1,3)$

$y-3=0$

$y=3$

المماس عند القطع $(1,3)$ هو نفسه عند القطع $(-2,3)$



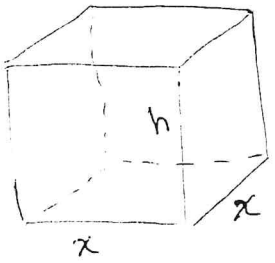
P.241

(31) $V = x^2 h$

$1000 = x^2 \cdot h$

$h = \frac{1000}{x^2}$

$\frac{dx}{dt} = 0.2 \text{ cm/s}$



$\frac{dh}{dx} = \frac{-200x}{x^4} = \frac{-200}{x^3}$

$\frac{dh}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dt}$

$\left(\frac{-200}{x^3}\right) \cdot 0.2 = \frac{dh}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{-40}{x^3}}$

عندما يصبح مكعب يكون $h = x \Leftarrow$

$1000 = x^3$

$x = 10$

$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=10} = \frac{-40}{1000} = -0.04 \text{ cm/s}$

لاحظ أنه الارتفاع يتناقص كلما زاد طول الضلع والحجم ثابت

AWAZEL
LEARN 2 BE

الوحدة الرابعة

الدرس الثالث

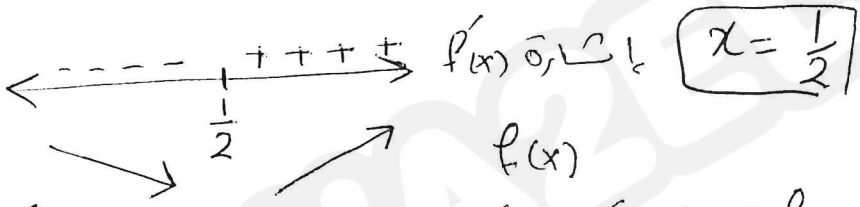
P. 28 أتحقق من فهمي:

(a) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

$f'(x) = 12x - 6$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x - 6 = 0$

$12x = 6$

$x = \frac{1}{2}$



$f(x)$ متزايدة في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$ ومتناقصة في الفترة $(-\infty, \frac{1}{2})$

(b) $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

$h'(x) = 3x^2 - 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 0$

$3x^2 - 6x + 4 = 0$

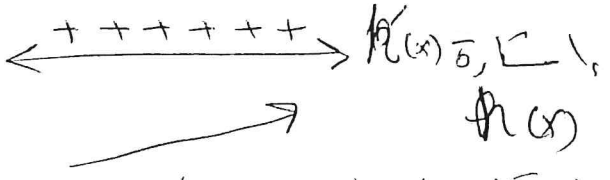
Δ: $a = 3$ $b = -6$ $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 36 - 4 \times 3 \times 4$

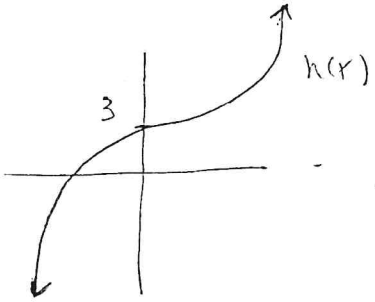
$= 36 - 48$

$= -12 < 0$

Since $\Delta < 0$ so $3x^2 - 6x + 4 \neq 0$



$h(x)$ متزايدة دائماً (متزايدة على $(-\infty, \infty)$)



$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$: أدرس تغيرات f P.29

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1$, $x = 3$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4$

$(-1, 4)$ النقطة الحرجة

$x = 3 \Rightarrow f(3) = -28$

$(3, -28)$ النقطة الحرجة

(b)

إشارة $f'(x)$

سلوك f

$(-1, 4)$ تقبل عظمى محلية عند النقطة $(3, -28)$ و تقبل صغرى محلية عند النقطة

$y = x^3 - 3x^2 + 1$: أدرس تغيرات f P.31

(a) $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$

$x = 0$, $y = 1 \Rightarrow (0, 1)$ نقطة حرجة

$x = 2$, $y = -3 \Rightarrow (2, -3)$ نقطة حرجة

(b) $y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow (0, 1)$ عظمى

$y''(2) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow (2, -3)$ صغرى

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$: أدرس تغيرات f (P.32)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$= 3(x^2 - 2x - 3)$

$= 3(x+1)(x-3) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}, \boxed{x=3}$

$x=-1,\ f(-1) = 9 \Rightarrow (-1, 9)$ قيمة حدية

$x=3,\ f(3) = -23 \Rightarrow (3, -23)$ قيمة حدية

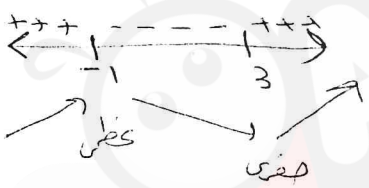
$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(-1) = -6-6 = -12 < 0$

$(-1, 9)$ عظمى

$f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0$

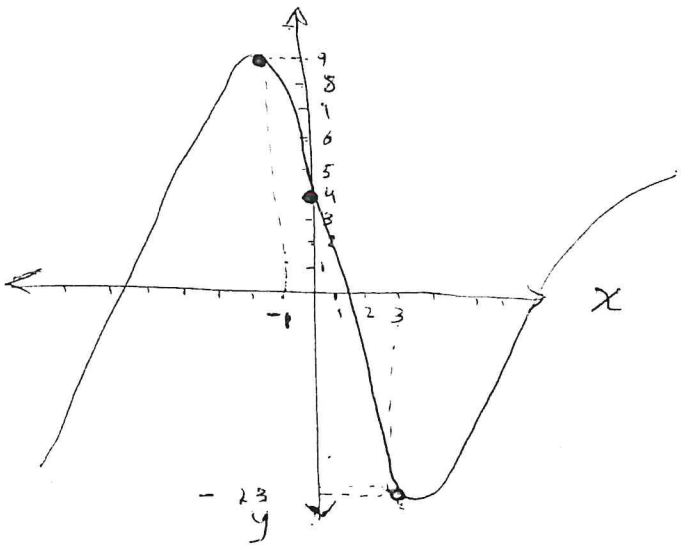
$(3, -23)$ صغرى

جدول التغيرات



نقاط إضافية

تقاطع $f(x)$ مع محور y : $f(0) = 4$ $(0, 4)$



P.34 أتحقق من فهمي

$f(t) = 0.001t^3 - 0.12t^2 + 3.6t + 10$

$0 \leq t \leq 70$

$f'(t) = 0.003t^2 - 0.24t + 3.6$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 20, \quad t = 60 \qquad 20, 60 \in [0, 70]$

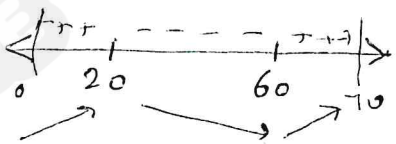
$f(20) = 42 \quad , \quad f(60) = 10$

$(20, 42) \quad , \quad (60, 10)$ النقاط الحرجة

$f(0) = 10 \quad , \quad f(70) = 17$

$(0, 10) \qquad (70, 17)$ نقاط إضافية

$f''(t) = 0.006t - 0.24$ ،

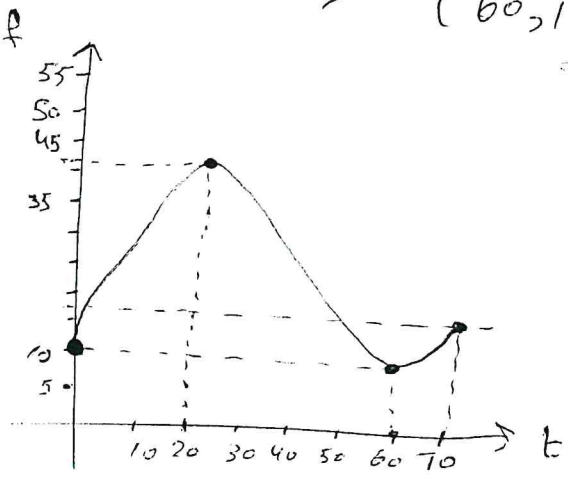


إشارة f''

سلوك f

$f''(20) = -0.12 < 0 \Rightarrow (20, 42)$ عظمى

$f''(60) = 0.12 > 0 \Rightarrow (60, 10)$ صغرى



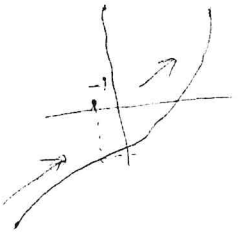
P.34

① $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$: أدرس رتابة الدالة

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

$= 3(x^2 + 2x + 1)$

$= 3(x+1)^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$



إشارة $f'(x)$	$+ + + \overset{0}{,} + + + +$	
	-1	
سلوك $f(x)$	↗	↗

f متزايدة على المجال $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

② $f(x) = (x^2 + 4)^3$

$f'(x) = (3)(2x)(x^2+4)^2$

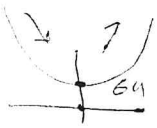
$= 6x(x^2+4)^2$

$f'(x) = 0$

$6x(x^2+4)^2 = 0$

$\boxed{x = 0}$

$x^2 + 4 \neq 0$



إشارة $f'(x)$	$- - - \overset{0}{,} + + + +$	
	0	
سلوك $f(x)$	↘	↗

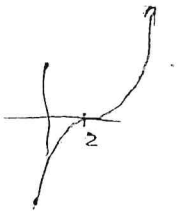
$f(x)$ متزايدة $(0, \infty)$

$f(x)$ متناقصة $(-\infty, 0)$

③ $f(x) = (x-2)^9$

$f'(x) = 9(x-2)^8$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 9(x-2)^8 = 0$

$\boxed{x = 2}$



إشارة $f'(x)$	$+ + + \overset{0}{,} + + + +$	
	-2	
سلوك $f(x)$	↗	↗

$f(x)$ متزايدة على $(-2, \infty)$ و متزايدة على $\mathbb{R} - \{-2\}$

④ $y = x^4 - 8x^2$

$y' = 4x^3 - 16x$

$= 4x(x^2 - 4)$

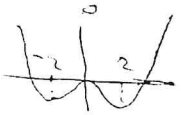
$= (4x)(x-2)(x+2)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$

إشارة y'	$- - - \overset{-2}{,} + + + \overset{0}{,} - - - \overset{2}{,} + + +$			
سلوك y	↘	↗	↘	↗

y متزايدة في $(-2, 0)$ ؛ $(2, \infty)$

y متناقصة في $(-\infty, -2)$ ؛ $(0, 2)$



P.34

(5) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$

$dy/dx = 3x^2 + 12x - 15$

$= 3(x^2 + 4x - 5) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x-1)(x+5) = 0$

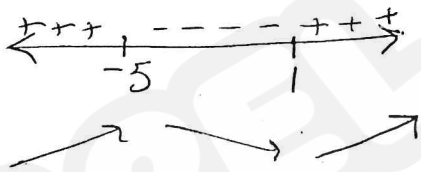
$x = 1$, $x = -5$

at $x = 1 \Rightarrow y = -98 \Rightarrow (1, -98)$ مرجع عند

at $x = -5 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (-5, 10)$ مرجع عند

$(-5, 10)$ توجد قيمة عظمى محلية عند

$(1, -98)$ توجد قيمة صغرى محلية عند



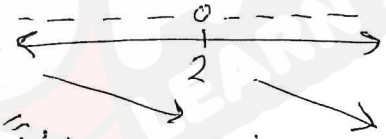
إشارة y'

سلوك y

(6) $y = -(x-2)^3 + 1$

$\frac{dy}{dx} = -3(x-2)^2 \Rightarrow dy/dx = 0$, $x = 2$ at $x = 2$, $y = 1$

مرجع عند $(2, 1)$



إشارة y'

سلوك y

$(2,1)$ عند y' بما أن إشارة y' لم تتغير حول وعند النقطة المرجع إذاً لا يوجد قيمة عظمى أو صغرى.

(7) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 144 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0$

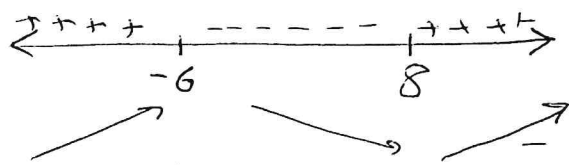
$3(x^2 - 2x - 48)$

$(x+6)(x-8) = 0$

$x = -6$, $x = 8$

$f(-6) = 540$, $f(8) = -832$ النقاط الحرجة هي

$(-6, 540)$ و $(8, -832)$



إشارة $f'(x)$

سلوك f

$(8, -832)$ و صغرى محلية عند $(-6, 540)$ توجد قيمة عظمى محلية عند

(8) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$

$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 48x$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$

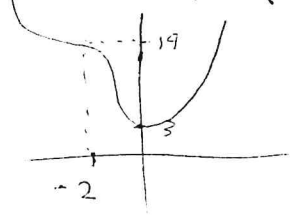
$= 12x[x^2 + 4x + 4]$ $\quad 12x(x+2)^2 = 0$

$= 12x(x+2)^2$ $\quad x = 0 \quad x = -2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

نقاط الحرجة هي

$(0,3)$, $(-2,19)$



يوجد قيمة صغرى محلية عند $(0,3)$

يوجد نقطة انعطاف أفقي عند $(-2,19)$

(9) $y = x^4 - 2x^2$, $y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

$y' = 4x^3 - 4x$

$= 4x(x^2 - 1)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ $\quad (0,0)$ نقطة حرجة

$x = 1 \Rightarrow y = -1$ $\quad (1,-1)$ نقطة حرجة

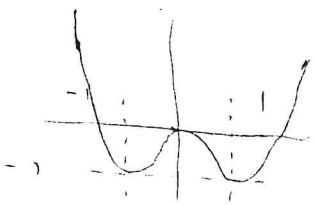
$x = -1 \Rightarrow y = -1$ $\quad (1,-1)$ نقطة حرجة

$y'' = 12x^2 - 4$

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ عند قيمة عظمى محلية

$y''(+1) = 8 > 0 \Rightarrow (1,-1)$ عند قيمة صغرى محلية

$y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow (1,-1)$ عند قيمة صغرى محلية



(10) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$

$= 12x(x^2 - 2x + 1)$

$= 12x(x-1)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

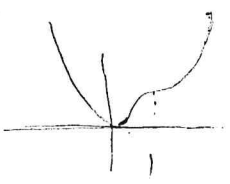
النقاط الحرجة $(0,0)$, $(1,1)$

$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$

$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow (0,0)$ عند قيمة صغرى محلية

$f''(1) = 0$ يفشل الاختبار $\longrightarrow$ نقطة انعطاف أفقي عند $(1,1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	



(11) $y = x^2(x-4) \Rightarrow y = x^3 - 4x^2$

$y' = 3x^2 - 8x = x(3x-8)$

$y'' = 6x - 8$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = \frac{8}{3}$

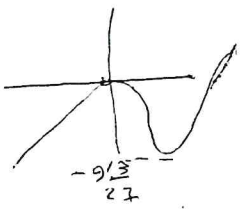
$y''(0) = -8 < 0$

نوجد قيمة عظمى محلية عند $(0,0)$

النقاط الحرجة $(0,0), \left(\frac{8}{3}, -9.48\right)$

$-9\frac{13}{27} \simeq -9.48$

$y''\left(\frac{8}{3}\right) = 6\left(\frac{8}{3}\right) - 8 = 16 > 0$ قيمة صغرى محلية عند $\left(\frac{8}{3}, -9.48\right)$



(12) $f(x) = x^5 - 5x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = \pm\sqrt{3}$

$f(0) = 0$

$(0,0)$ مرجة

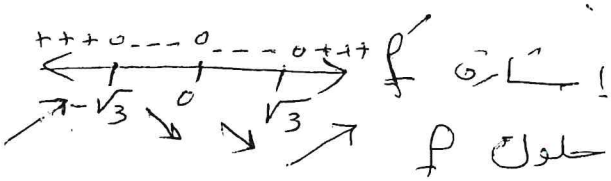
$f(\sqrt{3}) \simeq -10.4 \Rightarrow (\sqrt{3}, -10.4)$ مرجة

$f(-\sqrt{3}) \simeq 10.4 \Rightarrow (-\sqrt{3}, 10.4)$

$f''(x) = 20x^3 - 30x$

$f''(0) = 0$ لا يمكن الاختبار $\Rightarrow$

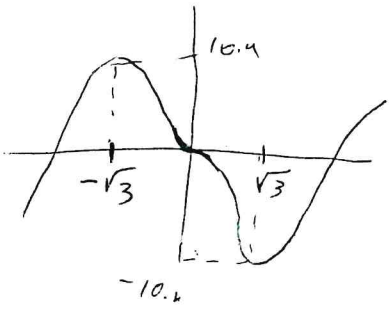
إشارة f' و حلول f



$f''(\sqrt{3}) = 60 - 30\sqrt{3} \simeq 8 > 0$ قيمة صغرى محلية عند $(\sqrt{3}, -10.4)$

$f''(-\sqrt{3}) = -60 + 30\sqrt{3} \simeq -8 < 0$ قيمة عظمى محلية عند $(-\sqrt{3}, 10.4)$

عند $(0,0)$ نقطة انعطاف أفقي



P. 35

(13) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$= 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

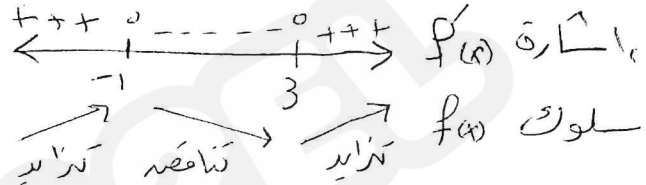
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$ or $x = -1$

$f(3) = -12$ $f(-1) = 20$

صغرى محلية $\rightarrow$ مرجه $(3, -12)$ عظمى محلية $\rightarrow (-1, 20)$ مرجه

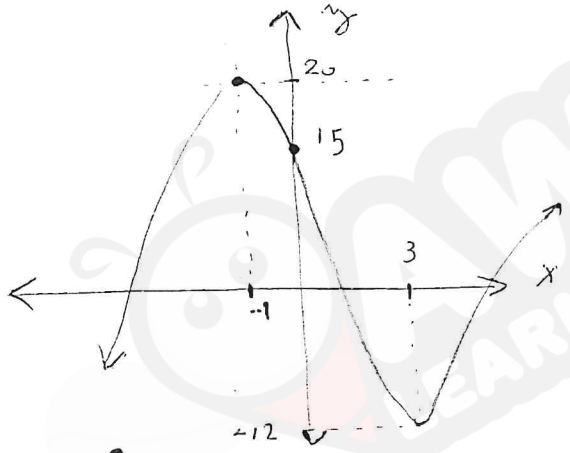
نقاط إضافية

$f(0) = 15$ $(0, 15)$



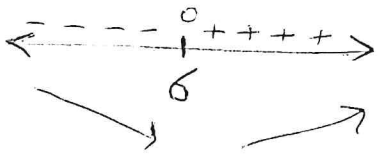
إشارة $f'(x)$

سلوك $f(x)$



1) $y = x^2 - 12x - 20 \Rightarrow y' = 2x - 12$

$y' = 0 \Rightarrow \boxed{x = 6}$



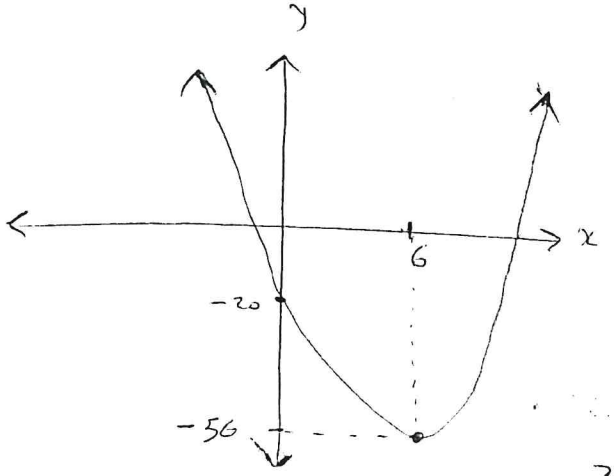
إشارة y'

سلوك y

النقطة الحرجة $(6, -56)$

نوعها صغرى محلية عند $(6, -56)$

نقاط إضافية $y(0) = -20$



(15) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$ — p.35

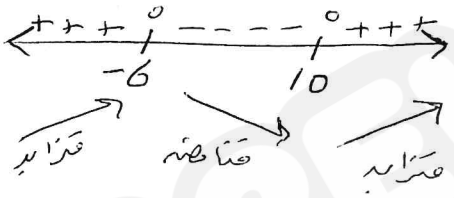
$f'(x) = 3x^2 - 12x - 180 = 3(x^2 - 4x - 60)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+6) = 0$

$x = 10$ $\quad$ $x = -6$

$f(10) = -1400 \Rightarrow (10, -1400)$ مرفوض

$f(-6) = 648 \Rightarrow (-6, 648)$ مرفوض



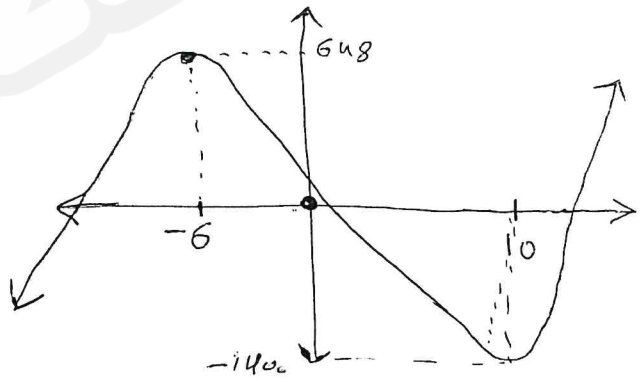
$f(x)$ إشارة

سلوك $f(x)$

$(10, -1400)$ صغرى محلية

$(-6, 648)$ عظمى محلية

$f(0) = 0$ $\quad (0,0)$



(16) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8$

$y' = 6x^2 - 18x + 12$

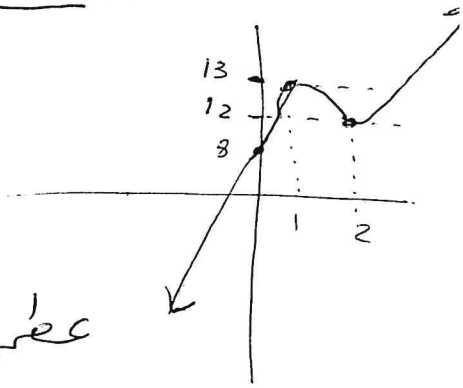
$= 6(x^2 - 3x + 2)$

$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$

$x = 1$ $\quad$ $x = 2$

$f(1) = 13 \Rightarrow (1, 13)$ مرفوض

$f(2) = 12 \Rightarrow (2, 12)$ مرفوض



$y'' = 12x - 18$

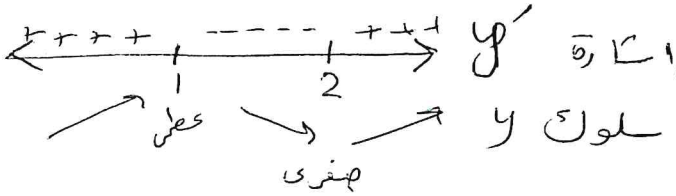
$y''(1) = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow (1, 13)$ عظمى محلية

$y''(2) = 24 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow (2, 12)$ صغرى محلية

نقطة انعطاف:

$y(0) = 8$

$(0, 8)$

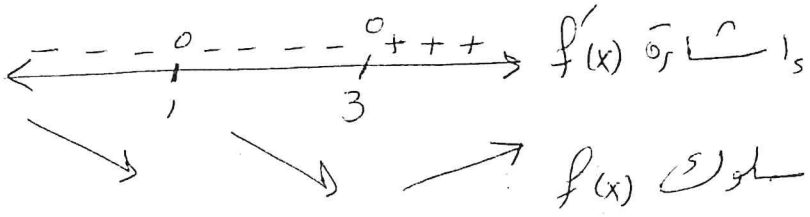


y' إشارة

سلوك y

(17) $f'(x) = (x-1)^2(x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}, \boxed{x=3}$



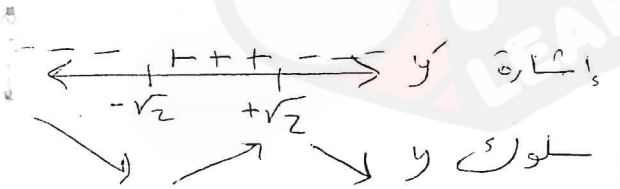
عند $x=1$ نقطه انقطاع عمقی

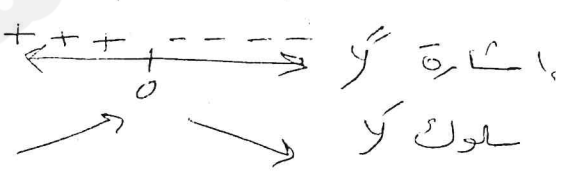
عندما $x=3$ یوجد قیمة صغری محلیة

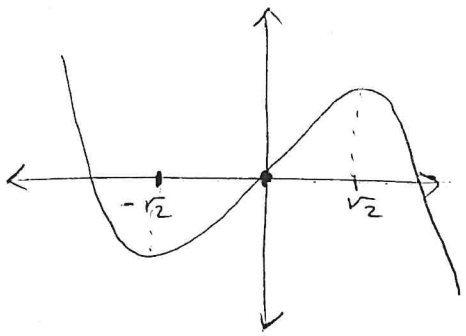
(18) $y = x(6-x^2) = 6x - x^3$

$\frac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$

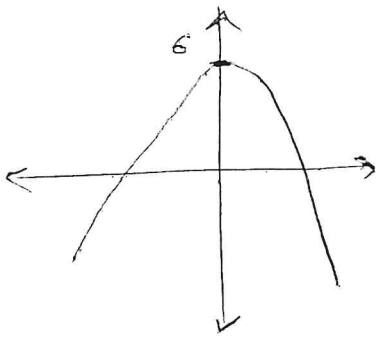
$y' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ | $y'' = 0 \Rightarrow x = 0$



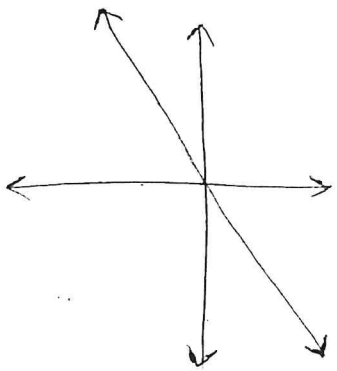




y



y'



y''

(19) اشارة y' یدل علی تزاید وتناقص y واصغار y' هي نفس حرصه لو
اشارة y'' یدل علی تزاید وتناقص y' واصغار y'' هي نفس حرصه لو

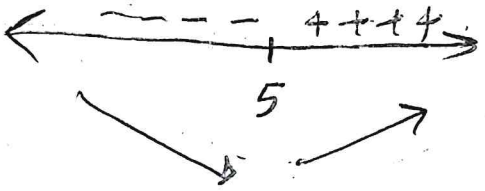
$S(t) = t^3 - 15t^2 - 63t$, $t > 0$ P. 35

☆

(20) $\frac{dS}{dt} = 3t^2 - 30t - 63$ المطلوب هو القيمة العظمى للسرعة

$\frac{d^2S}{dt^2} = 6t - 30$, $\frac{d^2S}{dt^2} = 0 \Rightarrow 6t - 30 = 0$

$6t = 30 \Rightarrow t = 5$



$\frac{d^2S}{ds^2}$ تحدد لنا

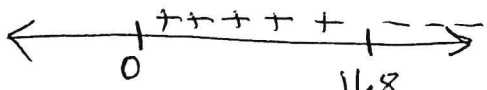
$\frac{ds}{dt}$ تسلون

☆

(2)

(21) $\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow -3t^2 + 30t + 63 = 0 \Rightarrow t \simeq 11.8$

$t \simeq -1.8 < 0$ نرفض

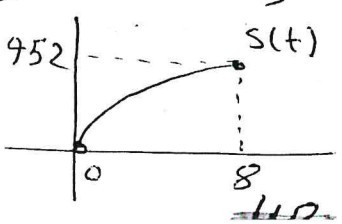


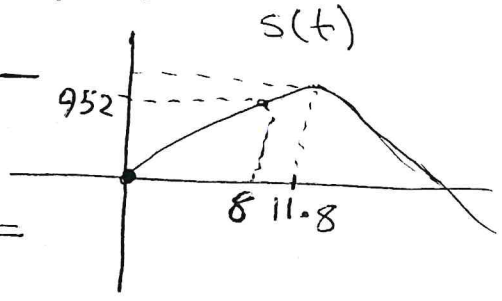
$\frac{dS}{dt}$ تحدد لنا

11.8

S(t) تسلون

$S(11.8) \simeq 1189\ m$





$$P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$$

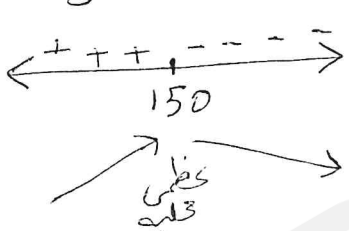
P·35

(22) $P'(t) = 120 - 0.8t$

$P'(t) = 0 \Rightarrow 120 = 0.8t$

$$t = \frac{120}{0.8} = 150$$

$(150, 10000)$ تمثل رأس القطع عند



إشارة $P'(t)$

سلوك $P(t)$

تزايد ثم تناقص

قيمة عظمى

يوصل فيه تناقص $P(t)$ (تزايد ثم تناقص) عندما $t = 150$ شهرًا

القيمة العظمى هي 10000

(23) $P(t) = 0 \Rightarrow -0.4t^2 + 120t + 1000 = 0$

$a = -0.4 \quad b = 120 \quad c = 1000$

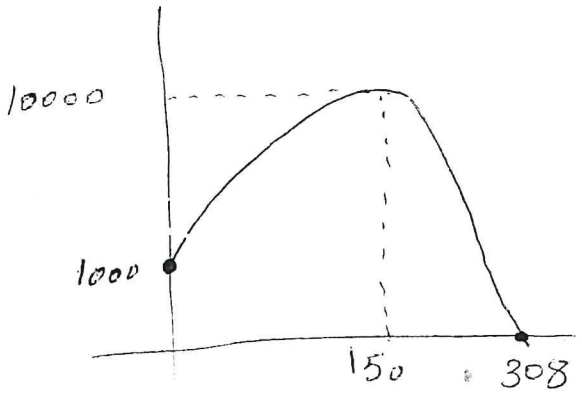
$\Delta = (120)^2 + 4 \times 0.4 \times 1000$

$\Delta = 16000 > 0$

$$t_1 = \frac{-120 + \sqrt{16000}}{-0.8} \simeq -8.11$$ مرفوضة لأنها تمثل الزمن

$$t_2 = \frac{-120 - \sqrt{16000}}{-0.8} \simeq 308.11 \simeq 308$$ شهرًا

(24) $P(0) = 1000$, $(150, 10000)$



$h(t) = 0.2t^2 - 0.01t^3$, $0 \le t \le 20$ P.35

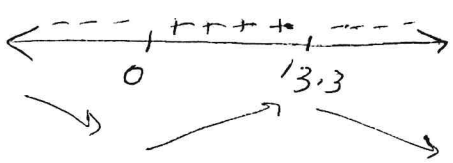
(25) $h'(t) = 0.4t - 0.03t^2$ نفضل تغير الارتفاع ليصبح إيجابي t طيب

$h'(t) = 0 \Rightarrow t(0.4 - 0.03t) = 0 \Rightarrow t = 0$, $t \approx 13.3$ ≈ 13

$h(13.3) = 11.83$

$h(0) = 0$

$h(20) = 0$



إشارة $h'(t)$

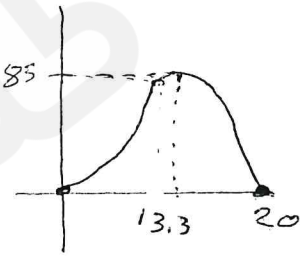
سلوك $h(t)$

يوصل فيه بحظى عند النقطة $(13.3 , 11.83)$

(26) الزمن اللازم للصعود الأعلى ارتفاع هو 13.3 ثانية

والزمن اللازم للصعود هو $20 - 13.3 = 6.7$

$13.3 - 13.4 \simeq 2 \times 6.7$ لدينا



---

(27) $y = ax^2 + bx + c$ P.36

$y' = 2ax + b$

$y'(7) = 0 \Leftrightarrow x = 7$ ال قمة حظى عند

$14a + b = 0$ — (1)

(2) — $c = -48 \Leftrightarrow (0, -48)$ بمرر بالنقطتين

(3) — $36a + 6b + c = 0 \Leftrightarrow (6, 0)$

عوض (2) في (3) للحصول على $36a + 6b - 48 = 0$

$-1 \times$ (1) مع معادلة $6a + b = 8$

$-14a + b = 0$

$-8a = 8 \Rightarrow \boxed{a = -1}$ عوض في (1) $\Rightarrow \boxed{b = 14}$

$\boxed{a = -1}$, $\boxed{b = 14}$, $\boxed{c = -48}$

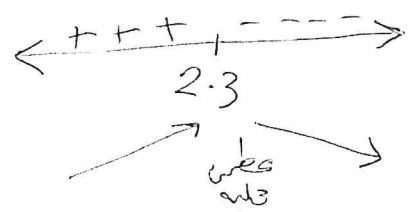
التأكد: $36(-1) + 6(14) - 48 = 0$ ✓

$y = 23t - 5t^2$, $0 \le t \le 4$ تطبيقات التفكير العليا P.36

(28) $y' = 23 - 10t \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 23 - 10t = 0$

$t = 2.3$ ثانية

$y(2.3) = 26.45$ مترا



في لحظة الارتفاع عندما $t = 2.3$ ثانية يصل إلى 26.45 مترا وهو أقصى ارتفاع

(29) من المعلوم أنه قوة المقاومة تخفف من سرعة الكرة
وبالتالي فإن أي إجابة لديه تقلل من أقصى ارتفاع
تصل إليه الكرة

$y = x^3 + ax^2 + b$ كوايت a, b

(30) $y' = 3x^2 + 2ax$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax = 0$

$x(3x + 2a) = 0 \Rightarrow x = 0$

$3x + 2a = 0$

$x = -\frac{2a}{3}$

$(0, b)$ ← التقاطع مع محور الـ y

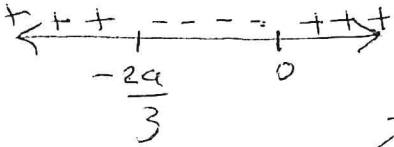
هو الذي تقعر عنده $x = 0$

(31) $y' = 3x^2 + 2ax$

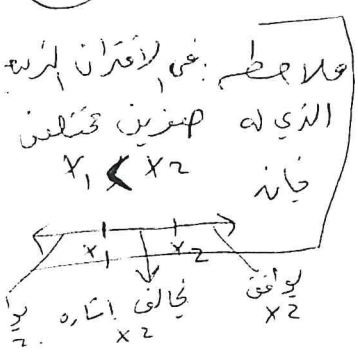
إذا كانت $a > 0$

$-a < 0$

$-\frac{2a}{3} < 0$

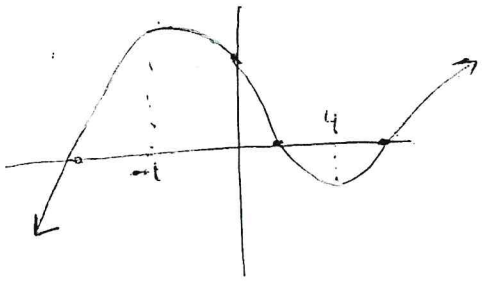


علامة عظمى: عن الاقتران إذا كان الذي له صفرين مختلفين $x_1 < x_2$ فإن



من إشارة y' وسلوك y فإن الاقتران فيه عظمى محلية عند $x = -\frac{2a}{3}$

(32)



من الرسم نلاحظ أنه

$f(x)$ متزايدة في $(-\infty, -1)$ وكذلك $(4, \infty)$

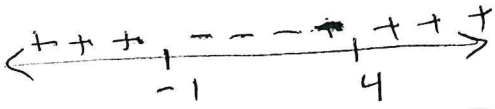
$f(x)$ متناقصة في $(-1, 4)$

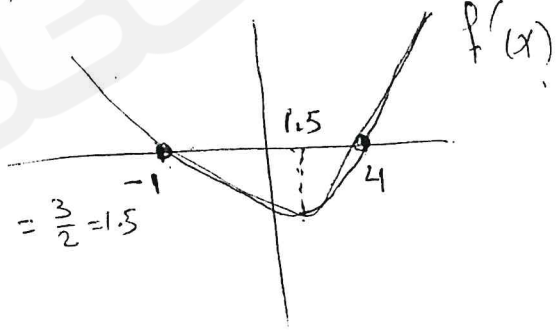
وبالتالي فإنه $f'(x) > 0$ في الفترتين $(-\infty, -1)$ و $(4, \infty)$

و $f'(x) < 0$ في الفترة $(-1, 4)$

وأنه $f' = 0$ عند $x = -1, 4$

إشارة f'





$f'(x) = (x+1)(x-4)$

$= x^2 - 3x - 4$

$a = 1$

$b = -3$

$c = -4$

$\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} = 1.5$

(33) $y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11$ ، $p > 0$

$y' = 3px^2 - 8px + 5$

حتى يكون المماسان تقطعانه مرتين فإنه يلزم لـ y' أن يكون جذريه مختلفان أي أنه مميز العبارة التربيعية $\Delta > 0$

$a = 3p \quad b = -8p \quad c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow (-8p)^2 - 4 \times 3p \times 5$

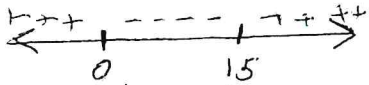
$64p^2 - 60p > 0$

$64p^2 - 60p = 0$

$4p(16p - 15) = 0$

$p = 0$ ، $p = \frac{15}{16}$

إشارة Δ

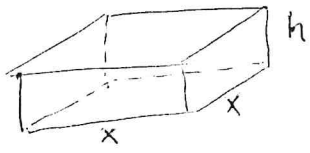


$p > 0$ تكون $\Delta > 0$ في الفترة $b > \frac{15}{16}$ فيكون b الذي يجعل y' موجبة

$b \in (\frac{15}{16}, \infty)$

الدرس الرابع أحقق من فهمي

P.39



$V = x^2 \cdot h$

$1000 = x^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}, \quad x \neq 0$

$A = 2x^2 + 4xh$

$A = 2x^2 + 4x \cdot \frac{1000}{x^2} \Rightarrow A(x) = 2x^2 + \frac{4000}{x}, \quad x \neq 0$

$A'(x) = 4x - \frac{4000}{x^2}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 4x = \frac{4000}{x^2}$

$x^3 = 1000$

$x = 10\,cm$

يوجد قيمة حرجة للمساحة تكافئ عند $x = 10\,cm$

$A''(x) = 4 + \frac{4000(2x)}{x^4} = 4 + \frac{8000}{x^3}$

$A''(10) = 4 + 8 = 12 > 0 \Rightarrow$ يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 10$

$h = \frac{1000}{100} = 10 \Rightarrow$ لارتفاع $10cm$ = 10cm تكون المواد عند أقل كمية من المواد أي أن الشكل مكعب.

P.40 أحقق من فهمي

$R = 8 + \frac{x^2}{2000}$ $\quad v = x\ km/h$

(a) $t = \frac{d}{v} = \frac{100}{x}, \quad x \neq 0,$ التكلفة C

$C = t \times R$

$C = \left(\frac{100}{x}\right)\left(8 + \frac{x^2}{200}\right)$

$C = \frac{800}{x} + \frac{x}{2}$ ← $100km$ أقدار تكلفة قيادة الدراجة مسافة بدلالة السرعة $x\ km/h$

$x > 0$

(b) $\frac{dC}{dx} = -\frac{800}{x^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{800}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 1600$

$x = \sqrt{1600}$

$x = 40\ km/h$

$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{1600}{x^3} \Rightarrow \left.\frac{d^2C}{dx^2}\right|_{x=40} = \frac{1600}{64000} > 0$

يوجد قيمة صغرى محلية للتكلفة عند $x = 40$

السرعة الأكثر اقتصاداً هي $40km/h$

P.42 أكمل ما يلي:

$S(x) = 1750 - 2x$ ، $C(x) = 2250 + 15x$

$R(x) = x\,S(x)$

$= x(1750 - 2x) = 1750x - 2x^2$ $\quad x > 0$

$P(x) = R(x) - C(x)$

$= 1750x - 2x^2 - 2250 - 15x$

$= -2x^2 + 1735x - 2250$

$P'(x) = -4x + 1745 \Rightarrow P'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{17.5}{4}$

$x = 433.75$

$x \simeq 434$

$P''(x) = -4 < 0 \Rightarrow$ يوجد قيمة عظمى للربح عند $x = 434$

$x = 434$ يوجد قيمة عظمى للربح عند

أكبر ربح عند إنتاج تقريباً 434 ثلاجة.

P.43 أكمل ما يلي:

$A(x) = (x)(10 - x)$

$A(x) = 10x - x^2$

$A'(x) = 10 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 10 = 2x$

$x = 5$ يوجد قيمة حرجة للمساحة عند $x = 5$

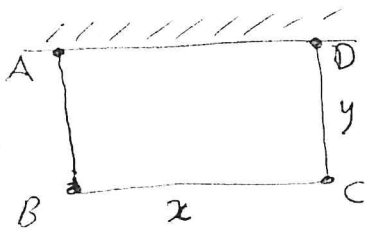
$A''(x) = -2 < 0 \quad \forall x$ يوجد قيمة عظمى عند $x = 5$

$A(5) = (5)(10 - 5) = 25\ cm^2$

لاحظ أن أكبر مساحة عندما يكون الشكل مربع طول ضلعه 5cm

P.43

أتدرب وأحل :



$\Rightarrow \quad x+2y=300$

$2y=300-x$

$y=150-\frac{1}{2}x$ (1)

(2) $A=x.y \Rightarrow A(x)=x(150-\frac{1}{2}x)$

$A(x)=150x-\frac{1}{2}x^2$

(3) $A'(x)=150-x \Rightarrow A'(x)=0 \Rightarrow 150=x$

$A''(x)=-1<0$ يوجد قيمة حرجة للمساحة عندما $x=150_m$

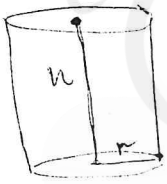
ويوجد قيمة عظمى للمساحة عندما $x=150_m$

$y=150-\frac{1}{2}(150)=75$.

أكبر مساحة للحديقة عندما $\overline{DC}=75_m$ / $\overline{BC}=150_m$

---

(4)



P.44

$V=\frac{1}{2}L=500cm^3$

$V=\pi r^2.h \Rightarrow h=\frac{500}{\pi r^2} \quad r\neq 0$

$A=2\pi r^2+2\pi rh$

$=2\pi r^2+2\pi r.\frac{500}{\pi r^2}$

$A(r)=2\pi r^2+\frac{100}{r} \quad r\neq 0$

$\frac{dA}{dr}=4\pi r-\frac{100}{r^2}$ ، $r\neq 0$ ، $\frac{dA}{dr}=0 \Rightarrow 4\pi r=\frac{100}{r^2}$

$r^3=\frac{100}{\pi}$

$r=\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\simeq 3.17_{cm}$

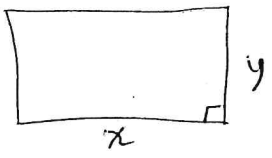
$\frac{d^2A}{dr^2}=4\pi+\frac{200}{r^3}>0 \quad \forall r>0$

يوجد قيمة حرجة للمساحة عند $r\simeq 3.17$

فيه قيمة صغرى للمساحة عند $r=3.17cm$

$A(3.17)=150(3.17)-\frac{1}{2}(3.17)^2\simeq 470.5\,cm^2$

أقل كمية لازمة من المواد لتصنيع العلبة هي $470.5\,cm^2$

(5) 

$2(x+y) = 54$ m

$x+y = 27$

$y = 27-x$

$A = x \cdot y$

$A(x) = x(27-x)$

$A(x) = 27x - x^2$

$\frac{dA}{dx} = 27 - 2x$ ، $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{27}{2} = 13.5$ cm

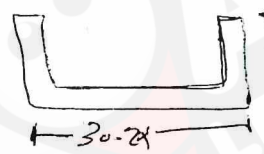
يوجد قيمة عظمى عند $x = 13.5$

$\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0$ عند $x = 13.5$ يوجد قيمة عظمى

وتكون أكبر مساحة هي

$A(13.5) = (13.5)(27-13.5) = 182.25$

لاحظ أن أكبر مساحة لمستطيل تكون عندما يصبح مربعاً.

(6) 

$A(x) = x(30-2x)$

$A(x) = 30x - 2x^2$

(7) $A'(x) = 30 - 4x$ ، $A'(x) = 0 \Rightarrow 30 = 4x \Rightarrow x = 7.5$ cm

يوجد قيمة عظمى عند $x = 7.5$ cm

$A''(x) = -4 < 0$ عند $x = 7.5$ يوجد قيمة عظمى

(8) $r + h = 60$

$h = 60 - r$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 (60-r)$

$V(r) = 20\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi r^3$ $\quad r > 0$

$V'(r) = 40\pi r - \pi r^2 \Rightarrow V'(r) = 0$ $\quad r \neq 0$

$r = 40$ cm

$V''(r) = 40\pi - 2\pi r$

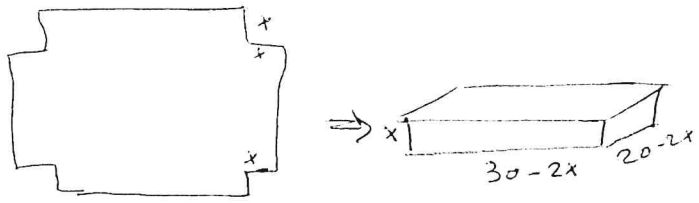
$V''(40) = 40\pi - 2\pi \cdot 40 = -40\pi < 0$

يوجد قيمة عظمى عند $r = 40$

$h = 60 - 40 = 20$

إذاً $h = 20$ و $r = 40$

P.44



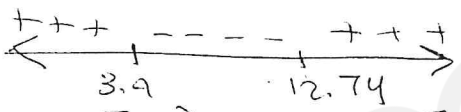
(9) $V(x) = (30-2x)(20-2x)(x)$

$= 4x^3 - 100x^2 + 600x$

(10) $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 200x + 600 = 0 \Rightarrow x \simeq 12.74$ cm

$x = 3.9$ cm



$V'(x)$ إشارة

سلوك $V(x)$

معامل

$V''(x) = 24x - 200$. $x = 3.9$ cm عندما يوجد قيمة عظمى

$V''(3.9) = -106.4 < 0 \Rightarrow$ عظمى ، $V''(12.74) = 105.76 > 0$ صغرى

(11)

$V = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \cdot h$

$500 = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{500}{x^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$

$h = \frac{2000}{\sqrt{3} x^2}$

$A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} x^2\right) + 3(x \cdot h)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 3x \cdot \frac{2000}{\sqrt{3} x^2}$

$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + \frac{(\sqrt{3})(2000)}{x}$

$x > 0$

$A'(x) = \sqrt{3} x - \frac{2000\sqrt{3}}{x}$, $A'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3} x = \frac{2000\sqrt{3}}{x}$

$x^2 = 2000$

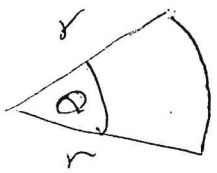
$A''(x) = \sqrt{3} + \frac{2000\sqrt{3}}{x^2}$ $x \simeq +44.72$ قيمة مرفوضة

$A''(x) > 0 \ \forall x$ $x = 44.72$ عند قيمة صغرى

$x = 44.72$ cm $\Rightarrow h \simeq 0.58$ cm

هي الأبعاد المطلوبة لكي تكون الكلفة أقل ما يمكن

(12) $A = \pi r^2 \left(\frac{\theta}{360}\right)$



محيط $S = 2r + \left(\frac{\theta}{360}\right) 2\pi r$

$200 = 2r + \frac{\theta}{360} \times 2\pi r \qquad r \neq 0$

$\frac{200 - 2r}{2\pi r} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow \boxed{\frac{\theta}{360} = \frac{100}{\pi r} - \frac{1}{\pi}} \qquad r \neq 0$

$A(r) = \pi r^2 \left[\frac{100}{\pi r} - \frac{1}{\pi}\right]$

$A(r) = 100r - r^2$

(13) $A'(r) = 100 - 2r = 0 \Rightarrow r = 50\,cm$

$A''(r) = -2 < 0$ at $r = 50$

يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $r = 50\,cm$

$A(50) = 100(50) - 2500 = 2500\,cm^2$

(14) $A = 4(3x \cdot h) + 2(9x^2 - x^2) \qquad x \neq 0$

$= 12x \cdot h + 16x^2$

$V = 9x^2 \cdot h - x^2 \cdot h$

$2000 = h(8x^2)$

$\frac{2000}{8x^2} = h \qquad x \neq 0$

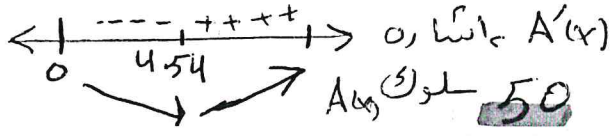
$0 < x$

$A(x) = 12x \cdot \frac{2000}{8x^2} + 16x^2$

$A(x) = \frac{3000}{x} + 16x^2$

(15) $A'(x) = \frac{-3000}{x^2} + 32x = 0 \Rightarrow 32x^3 = 3000 \Rightarrow x \simeq 4.54\,cm$

يوجد قيمة صغرى عند $x = 4.54\,cm$



(16) S الطول $= 2x + 2r\pi = 400$

$x + r\pi = 200 \Rightarrow \boxed{x = 200 - r\pi}$

A المساحة $= 2r \cdot x + \pi r^2$

$A(r) = 2r(200 - r\pi) + \pi r^2$

$A(r) = 400r - 2\pi r^2 + \pi r^2$

$A(r) = 400r - \pi r^2$

(17) $A'(r) = 400 - 2\pi r \Rightarrow A'(r) = 0$

$400 - 2\pi r = 0$

$A''(r) = -2\pi < 0$

$r = \frac{200}{\pi}$

$r = \frac{200}{\pi}$ يوجد عندها مساحة عظمى

وعندها تكون x تساوي

$x = 200 - \frac{200}{\pi} \cdot \pi$

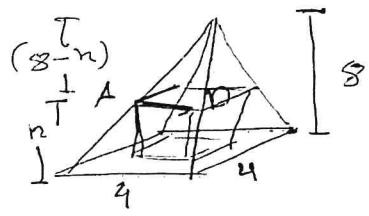
$x = 0$

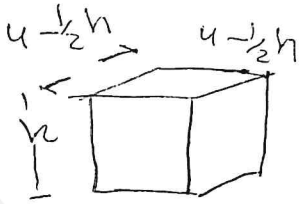
أي أنه عندما تكون القطعة المرنة بشكل المسار المستقيم فإن المساحة $A''(r) < 0$ فإنها تكون عظمى عندما $r = \frac{200}{\pi}$

P.45

(18) $\frac{\overline{AD}}{4} = \frac{(8-h)}{8}$

$\overline{AD} = \frac{1}{2}(8-h)$





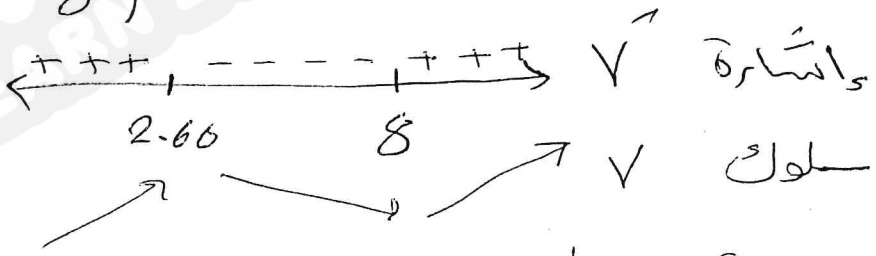
(19) $V = \frac{1}{4}(8-h)^2 \cdot h$

$V = 16h - 4h^2 + \frac{1}{4}h^3$

(20) $V' = 16 - 8h + \frac{3}{4}h^2$

$V' = 0 \Rightarrow h = 2.66,\ h = 8$

$(h-8)(3h-8) = 0$



يوجد قيمة عظمى وقيمتان عند $h = 2.66$

حجم خلوي يستطيع تكوين أكبر ما يمكن

عند $h = 2.66$

$= 8/3$

إجابات الوحدة 1 من كتاب الطالب

الدرس1

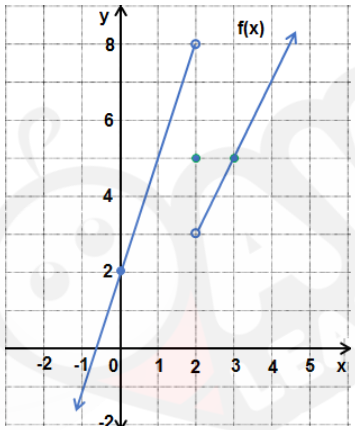
أتحقق من فهمي 1(ص 10)

a) مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

a) $f(5) = 2(5) - 1 = 9$

$f(2) = 5$

c)



مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

أتحقق من فهمي 2 (ص 11)

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x<1 \\ \frac{-1}{2}x+\frac{9}{2}, & 1 \le x \le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي 3 (ص12)

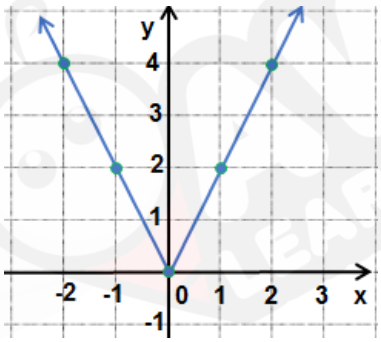
$$f(x) = \begin{cases} 1.2x, & x<400 \\ 1.1x, & 400 \le x < 600 \\ x+50, & x \ge 600 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي 4 (ص14)

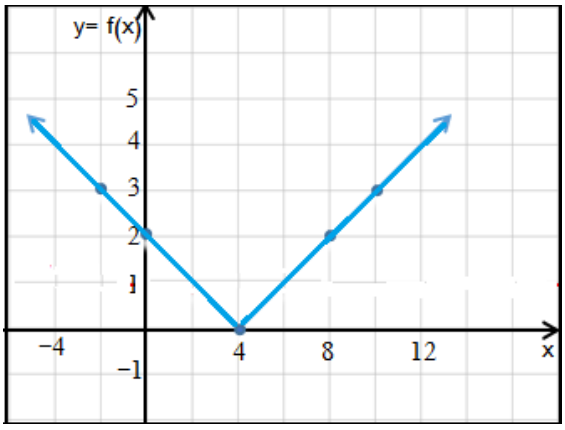
a) $f(x) = \begin{cases} -5x + 15, & x < 3 \\ 5x - 15, & x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, x \leq 2 \\ -x^2 + 5x - 6, 2 < x < 3 \\ x^2 - 5x + 6, x \geq 3 \end{cases}$

أتحقق من فهمي 5 (ص16)



a) المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، والمدى هو $y \geq 0$، أو الفترة $[0, \infty)$.



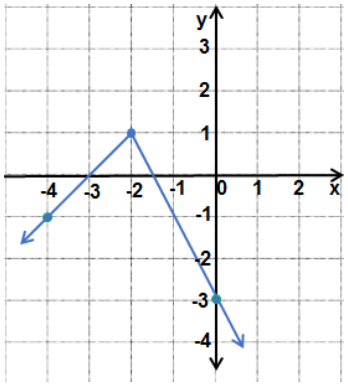
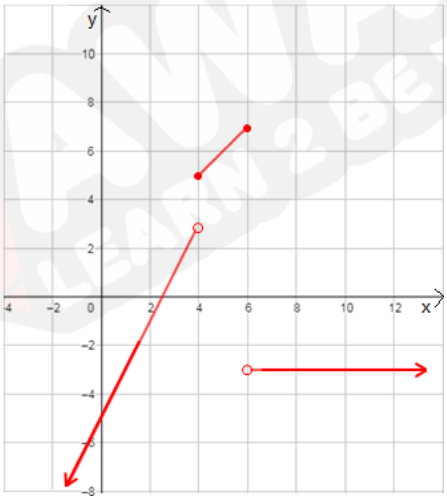
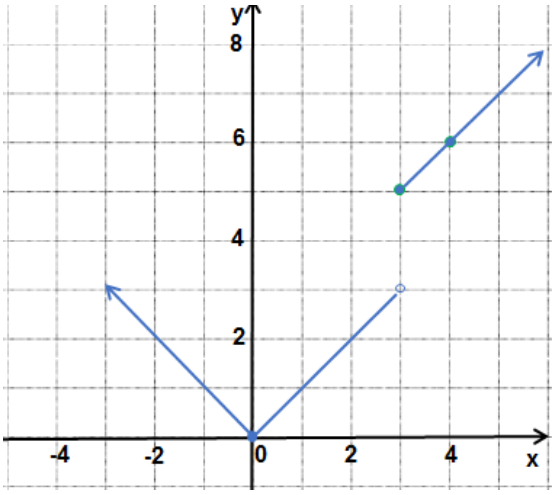
b)المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها، والمدى هو $y \geq 0$، أو الفترة $[0, \infty)$.

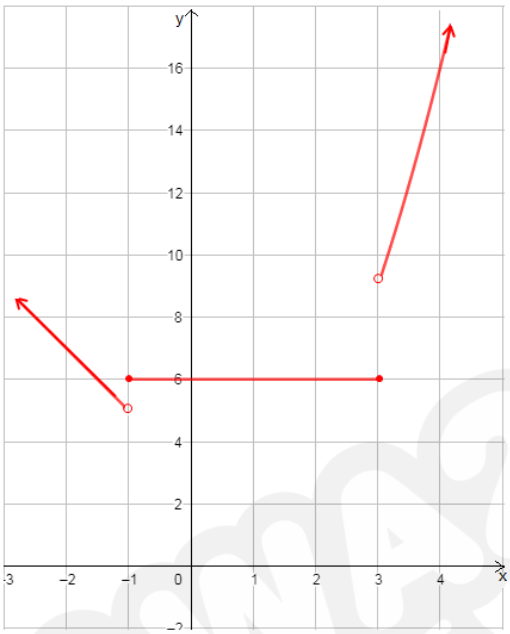
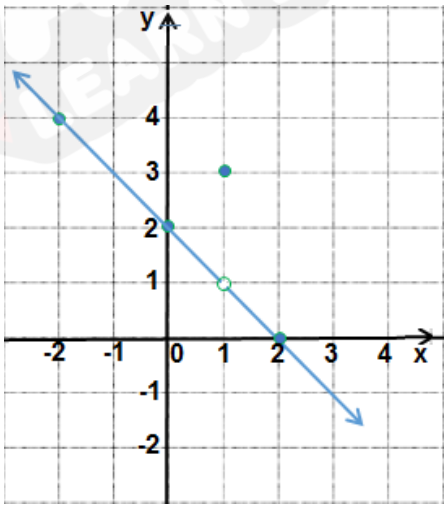
أتحقق من فهمي 6 (ص18)

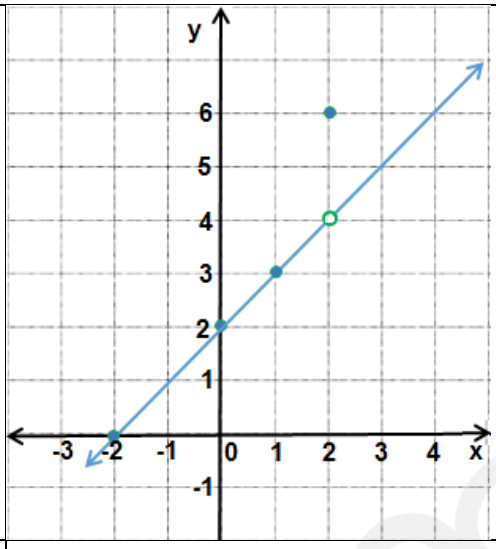
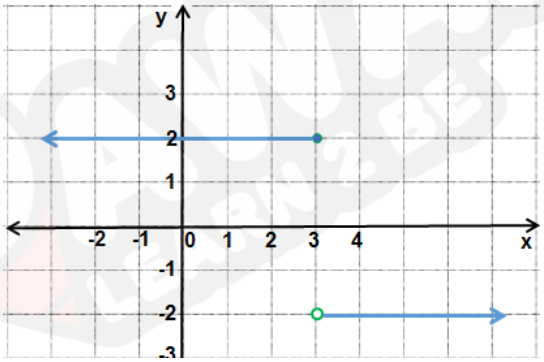
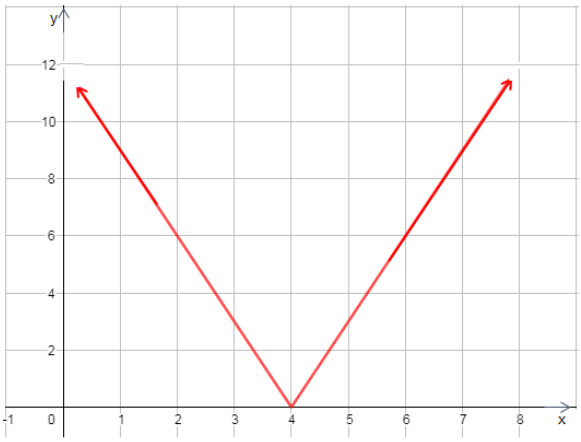
$f(x) = \left|\frac{4}{3}x + 4\right|$

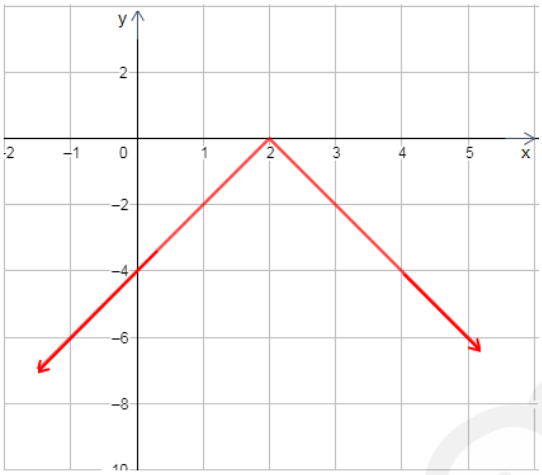
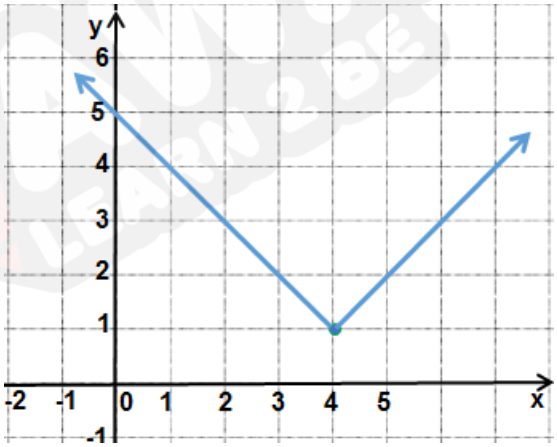
أتدرب وأحل المسائل

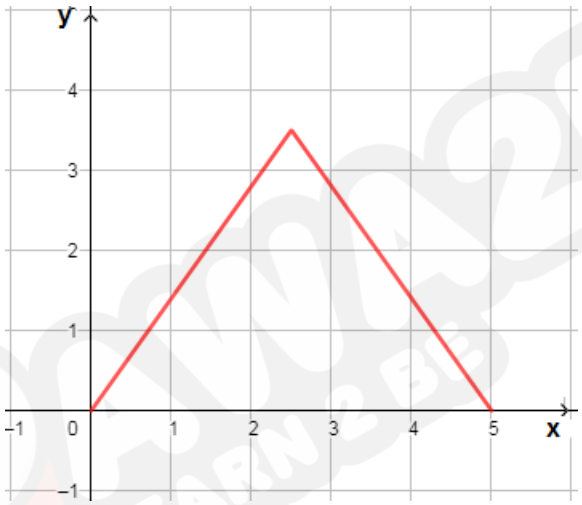
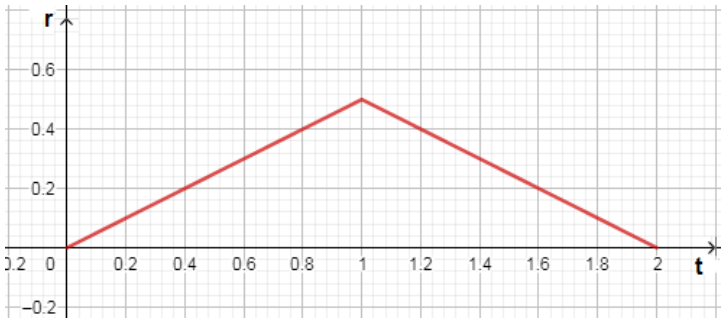
رقم السؤال	الإجابة
1	12
2	-7
3	-3
4	13
5	2
6	2
7	$f(x)=\begin{cases} -3x+6, & x<2 \\ 3x-6, & x\geq 2 \end{cases}$
8	$f(x)=\begin{cases} 5x^2+13x-8, x\leq -3 \\ -5x^2-13x+4, -3<x<\frac{2}{5} \\ x^2+9x+8, x\geq \frac{2}{5} \end{cases}$
9	$f(x)=\begin{cases} -7x+8, & x<\frac{5}{7} \\ 7x-2, & x\geq \frac{5}{7} \end{cases}$
10	$f(x)=\begin{cases} 5x^2+13x-8, x\leq -3 \\ -5x^2-13x+4, -3<x<\frac{2}{5} \\ x^2+9x+8, x\geq \frac{2}{5} \end{cases}$

11		المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y \leq 1$ أو الفترة $(-\infty, 1]$.
12		المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y \leq 7$ ، $5 \leq y$ أو $y < 3$ أو $(-\infty, 3) \cup [5, 7]$
13		المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$.

14	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y > 5$ أو الفترة $(5, \infty)$. 
15	المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى مجموعة الأعداد الحقيقية 

16		المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى مجموعة الأعداد الحقيقية
17		المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية المدى: $\{2 , -2\}$
18		المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$.

19	 المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y \leq 0$ أو الفترة $(-\infty, 0]$.
20	 المجال مجموعة الأعداد الحقيقية المدى $y \geq 1$ أو الفترة $[1, \infty)$.
21	$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -2 \\ x, & -2 < x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$
22	$f(x) = \begin{cases} 1, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x+1, & -1 < x \leq 2 \\ -2, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$
23	$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$
24	$f(x) = \lvert x \rvert - 2$

25	$f(x) = -\|3x\|$
26	$f(x) = -\frac{1}{3}\|x-2\| + 6$
27	$f(x) = \begin{cases} 0.361x, & 0 \le x \le 18 \\ 0.450x - 1.602, & 18 < x \le 36 \\ 0.550x - 5.202, & 36 < x \le 54 \\ x - 29.502, & 54 < x \le 72 \end{cases}$
28	 **أرجو الانتباه لهذا التعديل على نص السؤال:** **ويُمثّل العمود الذي يتوسّط الوجه الأمامي للخيمة محور التماثل.**
29	مجال هذا الاقتران هو [0, 5]، ومداه [0, 3.5]
30	$f(x) = \begin{cases} 500 + 0.01x, & x \le 20000 \\ 400 + 0.015x, & x > 20000 \end{cases}$
31	
32	استمر الهطل ساعتان لأنه توقف بعد ساعتين، يقطع المنحنى المحور الأفقي عند 0، وَ 2
33	كان أعلى معدل هطل بعد ساعة من بدئه، يبين الرسم أن القيمة العظمى عند(1, 0.5)

34	a، لأن الرأس عند (2.5, 0)، ومفتوح للأعلى
35	لا تشكل اقترانًا بسبب تداخل المجالين الجزئيين، فالفترة [1, 2] تقع في كل من (−∞, 2] وَ[1, ∞) فسيكون للعدد 1 مثلًا صورتان هما 2− وَ 1 وهذا يناقض تعريف الاقتران.
36	$f(x) = \|x^2 - 4\|$ لأن الرسم هو لقطع مكافئ يقطع المحور x عند 2−، وَ2، وعُكس الجزء الواقع تحت المحور x حول المحور x .
37	إجابة محتملة: $f(x) = \|x+2\|-11$
38	$p = -5 , q = -6$
39	إحداثيا نقطتي تقاطع منحنى f(x) مع المحور x هما (2, 0), (3, 0)

الدرس2

أتحقق من فهمي 1(ص 23)

a) $x = -3, \quad x = -1$

b) عند حل هذه المعادلة جبريًا ينتج حلان هما $x = 3$، وَ $x = \frac{1}{3}$

لكن عند التحقق نجد أن 3 فقط تحقق المعادلة الأصلية. الحل هو $x = 3$

$$2|x+1| - x = 3x - 4$$

$$2|\frac{1}{3} + 1| - \frac{1}{3} = 3(\frac{1}{3}) - 4$$

$$2\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 - 4$$

$$2\frac{1}{3} = -3 \times$$

c) $x = 3.25, \quad x = 3.75$

أتحقق من فهمي 2(ص 24)

$x = 0 \ , \ x = 4$

أتحقق من فهمي3(ص 25)

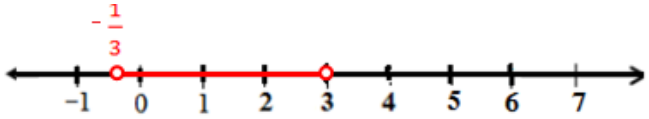
$$|x - 300^\circ| = 25^\circ$$

$x = 325^\circ, x = 275^\circ$

أتحقق من فهمي4(ص26)

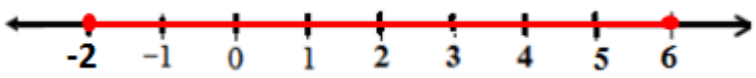
a) $-\frac{1}{3} < x < 3$

مجموعة الحل: الفترة $(-\frac{1}{3}, 3)$



b) $-2 \leq x \leq 6$

مجموعة الحل: الفترة $[-2, 6]$

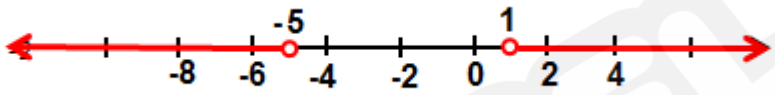


c) ليس لهذه المتباينة حل لأن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي أكبر من صفر أو تساويه.

أتحقق من فهمي5(ص 28)

a) $x < -5$ or $x > 1$

مجموعة الحل: $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$



b) $-2|3x+4| < -8$

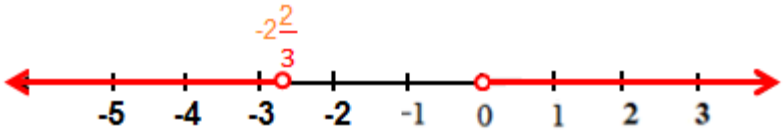
$|3x+4| > 4$ (بقسمة الطرفين على -2)

$3x + 4 < -4$ or $3x+4 > 4$

$x < \frac{-8}{3}$ or $x > 0$

$x < -2\frac{2}{3}$ or $x > 0$

مجموعة الحل: $(-\infty, -2\frac{2}{3}) \cup (0, \infty)$



أتحقق من فهمي 6 (ص 31)

a) $x < -3$ or $x > -1$

مجموعة الحل: $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$

b) $-5 \leq x \leq -\frac{1}{7}$

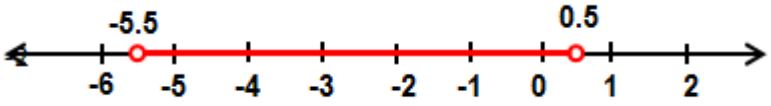
مجموعة الحل : الفترة $[-5, -\frac{1}{7}]$

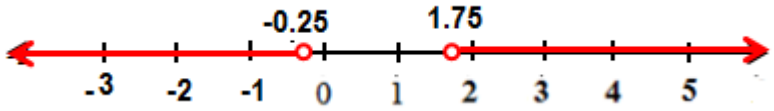
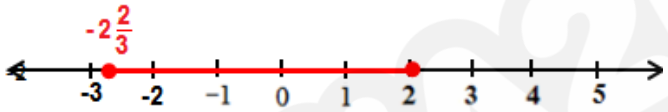
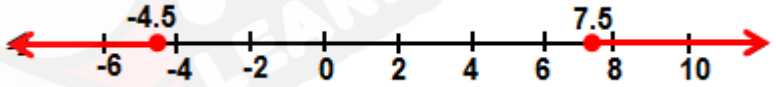
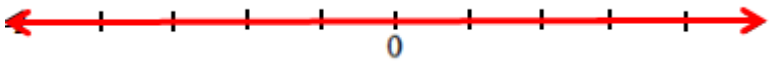
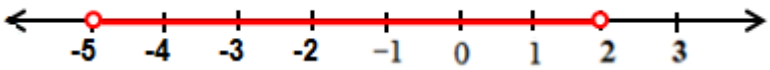
أتحقق من فهمي 7 (ص 31)

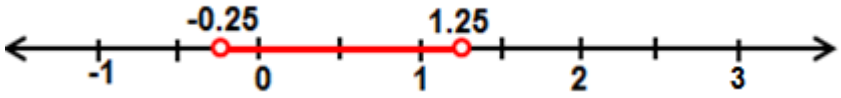
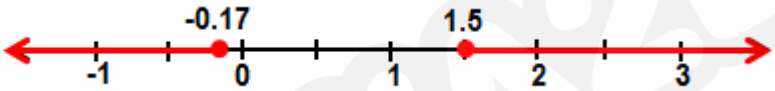
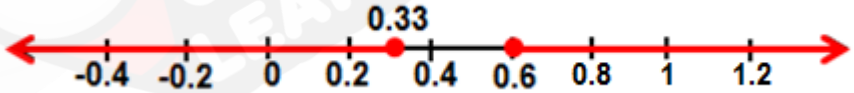
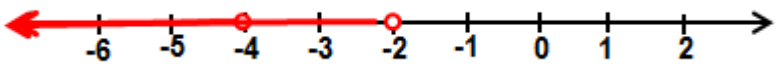
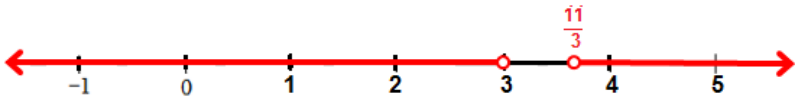
$|x-88\ mg| > 38\ mg$

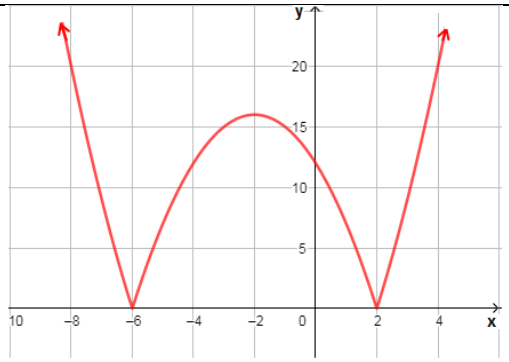
$x < 50\ mg$ or $x > 126\ mg$

أتدرب وأحل المسائل

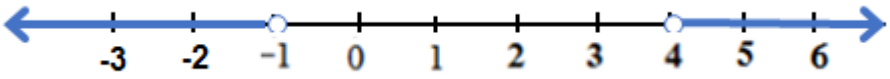
رقم السؤال	الإجابة
1	$\frac{2}{3}, 2$
2	$-10, 18$
3	$0, 3$
4	$-0.4, 0.8$
5	0
6	$3.5, 5$
7	$-4, 0$
8	$\left\|\frac{3x+3}{2x-5}\right\| - 4 = 6$ $\left\|\frac{3x+3}{2x-5}\right\| = 10$ $\frac{3x+3}{2x-5} = 10$ or $\frac{3x+3}{2x-5} = -10$ $3x+3 = 20x-50$ or $3x+3 = -20x+50$ $x = \frac{53}{17}$ or $x = \frac{47}{23}$
9	-4
10	$-5.5 < x < -0.5$ مجموعة الحل : الفترة $(-5.5, -0.5)$ 

11	$x < -0.25$ or $x > 1.75$ مجموعة الحل: $(-\infty, -0.25) \cup (1.75, \infty)$ 
12	$\frac{-8}{3} \leq x \leq 2$ مجموعة الحل: الفترة $(\frac{-8}{3}, 2)$ 
13	$x \leq -4.5$ or $x \geq 7.5$ مجموعة الحل: $(-\infty, -4.5) \cup (7.5, \infty)$ 
14	مجموعة الحل هي مجموعة الأعداد الحقيقية لأن القيمة المطلقة لأي مقدار هي أكبر من صفر ومن جميع الأعاد السالبة دائمًا. 
15	ليس لها حل، مجموعة حلها هي ϕ
16	$\|-4x - 6\| < 14$ $-14 < -4x - 6 < 14$ $-8 < -4x < 20$ $2 > x > -5$ $-5 < x < 2$ مجموعة الحل:الفترة $(-5, 2)$ 

17	$-0.25 < x < 1.25$ مجموعة الحل:الفترة $(-0.25,\ 1.25)$ 
18	$x \leq -0.17$ or $x \geq 1.5$ مجموعة الحل: $(-\infty,\ -0.17) \cup (1.5,\ \infty)$ 
19	$x \leq 0.33$ or $x \geq 0.6$ مجموعة الحل: $(-\infty,\ 0.33] \cup [0.6,\ \infty)$ 
20	$x < -2$ or $x < -4$ عند تمثيل الحلين على خط الأعداد تلاحظ أنها متداخلان، ويكون اتحاد الحلين هو المجموعة الأوسع وهي $x < -2$ أي أن حل هذه المتباينة هو $(-\infty,\ -2)$ 
21	$x < 3$ or $x > \frac{11}{3}$ مجموعة الحل: $(-\infty\ ,\ 3) \cup (\frac{11}{3},\ \infty)$ 
22	**$-4 < x < -2$** **مجوعة الحل هي الفترة : $(-4, -2)$**

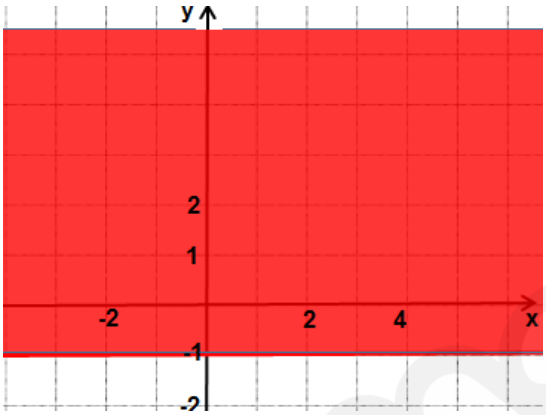
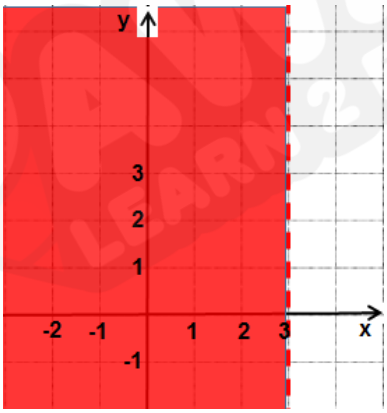
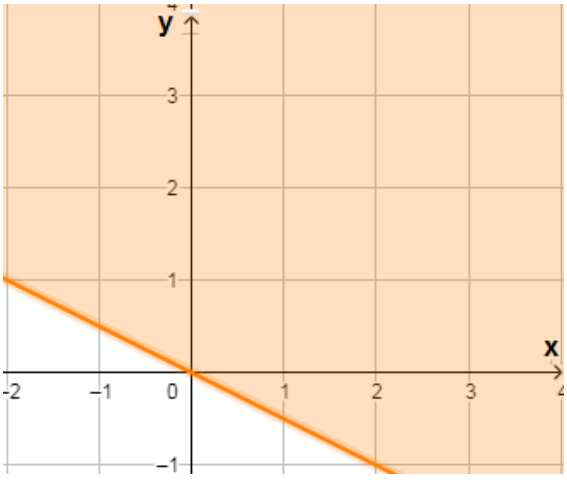
23	**$x < 0.5$** **مجوعة الحل هي الفترة : $(-\infty, 0.5)$**
24	**$x < -5$ or $x > -\frac{1}{3}$** **مجوعة الحل هي : $(-\infty, -5) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$**
25	**$x < -\frac{2}{7}$ or $x > \frac{4}{3}$** **مجوعة الحل هي: $(-\infty, -\frac{2}{7}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$**
26	$-3.5 < x < 0.75$ مجوعة الحل هي الفترة : $(-3.5, 0.75)$
27	**$x \leq \frac{5}{3}$ or $x \geq 9$** **مجوعة الحل هي: $(-\infty, \frac{5}{3}] \cup [9, \infty)$**
28	إجابة محتملة: $\lvert x+1 \rvert \geq 2$
29	إجابة محتملة: $\lvert x-1 \rvert < 5$
30	إذا كان $c > 0$ فإن للمعادلة $\lvert ax+b \rvert = c$ حلين، وإذا كان $c = 0$ فلها حل واحد، وإذا كان $c < 0$ فليس لها حل لأن القيمة المطلقة لا تكون سالبة أبدًا.
31	إذا توقف الطالب عن القراءة عند الصفحة x فإن المعادلة هي: $\lvert x-304 \rvert = 10$ ولها الحلان $x = 294, x = 314$ يمكن أن يتوقف الطلبة عن القراءة عند أي صفحة من 294 إلى 314
32	إذا كان طول المسمار x، فإن المعادلة هي: $\lvert x-5 \rvert = 0.02$ ولها الحلان: $x = 4.98, x = 5.02$ الحد الأعلى لطول المسمار التي تنتجه هذه الآلة هو 5.02 cm، والحد الأدنى هو 4.98 cm
33	

34	$k = 16$، لأن المستقيم $y = 16$ يلاقي منحنى القيمة المطلقة الممثل في السؤال السابق في 3 مواقع عند الرأس ونقطتين على الجزأين الجانبيين من المنحنى.لاحظ أنه عندما تكون $k > 16$ يصبح للمعادلة حلان فقط، وإذا كانت $0 < k < 16$، فإن للمعادلة 4 حلول.
35	إذا كانت درجة الحرارة هي x، فإن قيم x المقبولة هي المظللة بالأزرق، وقيم x التي لا تعيش فيها الأفاعي مظللة بالأحمر. لإيجاد المتباينة التي حلها هو الجزء المظلل بالأحمر أجد منتصف الفترة المظللة بالأزرق. متوسط 75، و90 هو 82.5، فالدرجات التي لا تعيش فيها الأفاعي هي التي تزيد عن 82.5 أو تقل عنها بأكثر من 7.5°، كما يظهر في الرسم. المتباينة التي تصف ذلك هي: $\|x - 82.5°\| > 7.5°$
36	ليكن إيجار الشقة x دينار، تكون المتباينة التي تصف حدود الإيجار هي: $\|x - 250\| \leq 55$ وحلها هو: $195 \leq x \leq 305$ مدى إيجار شقة في هذا الحي هو من 195 دينار إلى 305 دنانير
37	لتكن كتلة القدم المكعب من الرخام x رطل، فتكون كتلة 20 قدم مكعب 20x رطل المتباينة التي تصف المسألة هي: $\|20x - 3400\| \leq 100$ وحلها هو: $165 \leq x \leq 175$ كتلة القدم المكعب من الرخام تتراوح ما بين 165 رطل إلى175 رطل.
38	كلا، ليس لهما الحل نفسه. حلا المعادلة $\|x+a\| = b$ هما $b - a, -b - a$ بينما حلا المعادلة $\|x\| + a = b$ هما $a - b , b - a$، فهما تشتركان في أحد الحلين $b-a$، وتختلفان في الآخر.
39	لحل هذه المعادلة ناخذ 4 حالات الحالة 1: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة موجب في الطرفين) $2x+1 + 5 = 7 - 3x \Rightarrow x = 0.2$ 0.2 تحقق المعادلة الأصلية لأن $\|2(0.2)+1\| + 5 = \|7 - 3(0.2)\|$ $6.4 = 6.4$ الحالة2: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة سالب في الطرفين) $-(2x+1) + 5 = -(7 - 3x) \Rightarrow x = 2.2$ 2.2 لا تحقق المعادلة الأصلية لأن $\|2(2.2)+1\| + 5 \neq \|7-3(2.2)\|$ $10.4 \neq 0.4$

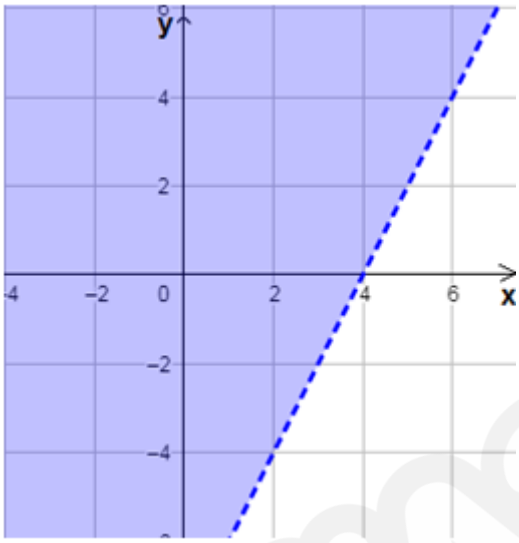
الحالة 3: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة موجب في الطرف الأيمن وسالب في الأيسر) $x = 3 \Rightarrow -(2x+1) + 5 = 7 - 3x$ 3 لا تحقق المعادلة الأصلية لأن $\lvert 2(3)+1\rvert + 5 \neq \lvert 7-3(3)\rvert$ $2 \neq 12$ الحالة 4: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة موجب في الطرف الأيسر وسالب في الأيمن) $x = 13 \Rightarrow 2x+1 + 5 = -(7 - 3x)$ 13 تحقق المعادلة الأصلية لأن $\lvert 2(13)+1\rvert + 5 = \lvert 7-3(13)\rvert$ $32 = 32$ إذن، لهذه المعادلة حلان هما: 0.2, 13	
المتباينة المختلفة هي $\lvert 4x+1\rvert - 5 \leq 8$ التي تتحول إلى $\lvert 4x + 1\rvert \geq -3$، وبذلك تكون مجموعة حلها هي R مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة، بينما بقية المتباينات حلولها مجموعات جزئية من R.	40
إجابة مريم غير صحيحة، فالتمثيل المعطى هو للمتباينتين $x > 4$، أو $x > -1$ بينما حل المتباينة المعطاة هو $x < -1$ or $x > 4$، ويكون تمثيله على خط الأعداد على النحو الآتي:  	41
لطفًا! تعدل المتباينة على النحو التالي: **تحدّ:** أحلّ المتباينة $\lvert x + 3\rvert - 2 < -\lvert x + 4\rvert + 8$ لحل هذه المتباينة نأخذ 4 حالات الحالة 1: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة موجب في الطرفين وتحويلها إلى معادلة) $x+3 -2 = -x -4 +8 \rightarrow x = 1.5$ الحالة 2: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة موجب في الطرف الأيمن وسالب في الأيسر وتحويلها إلى معادلة) $-x-3 -2 = -x -4 +8 \rightarrow -5 = 4$ × الحالة 3: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة سالب في الطرفين وتحويلها إلى معادلة) $-x-3 -2 = x +4 +8 \rightarrow x = -8.5$	42

الحالة 4: (اعتبار ما بداخل القيمة المطلقة سالب في الطرف الأيمن وموجب في الأيسر وتحويلها إلى معادلة) $x+3-2 = x+4+8 \rightarrow 1 = 12$ × أختار عددًا بين الحلين 8.5−، وَ 1.5 وليكن 0 أعوضه في المتباينة الأصلية $\|x+3\|-2 < -\|x+4\|+8$ $\|0+3\|-2 < -\|0+4\|+8$ $1 < 4$ ✓ العدد 0 حقق المتباينة الأصلية إذن مجموعة الحل هي الأعداد الواقعة بين الحلين أي $-8.5 < x < 1.5$، أو الفترة $(-8.5, 1.5)$.	

الدرس3

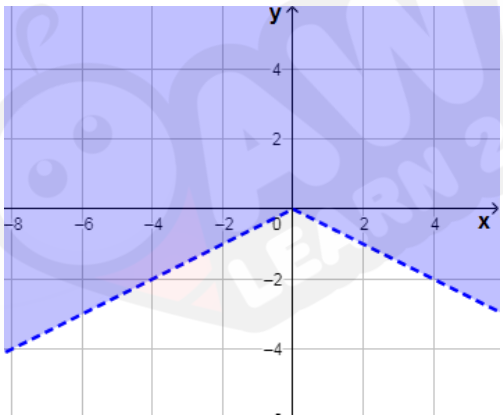
	أتحقق من فهمي1(ص 37) (a
	(b
	(c

(d

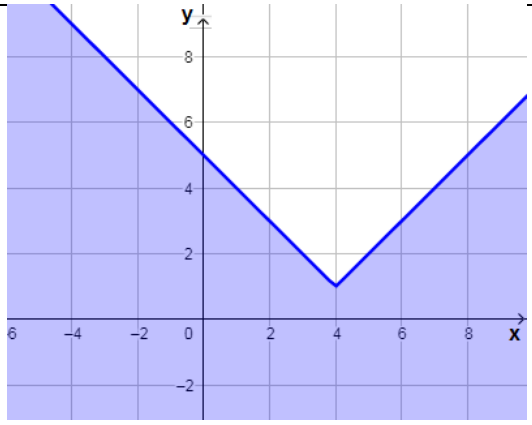


أتحقق من فهمي2(ص38)

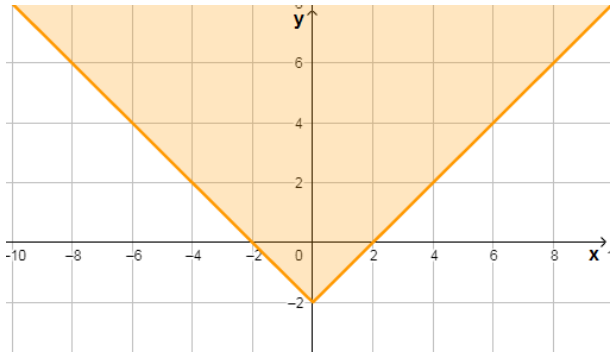
(a



(b

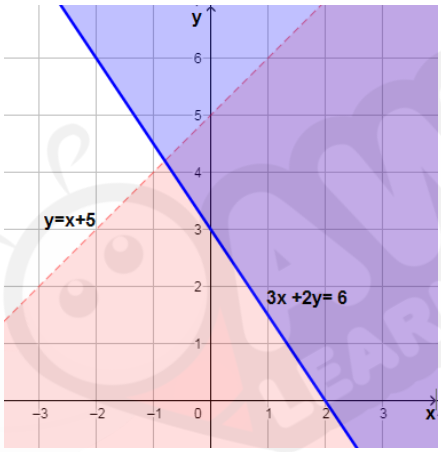


(c



أتحقق من فهمي3(ص40)

(a



للتحقق أختار نقطة في منطقة الحل ولتكن (1, 3) أعوض إحداثييها في المتباينتين.

$y \leq x+5$

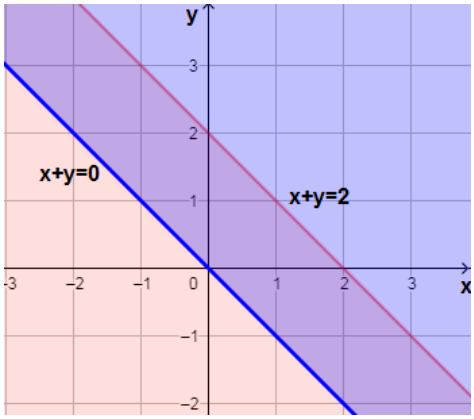
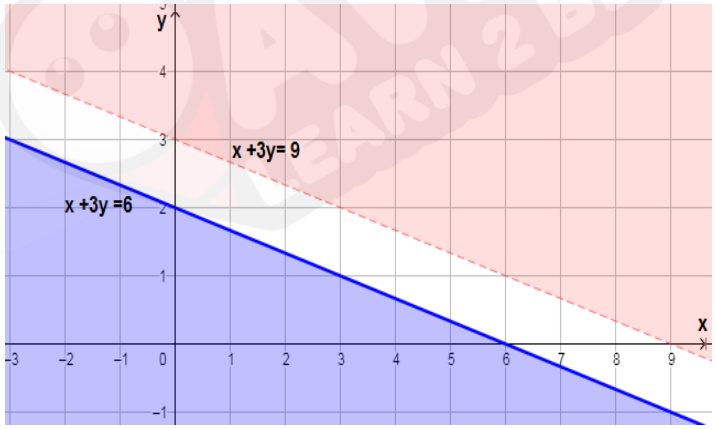
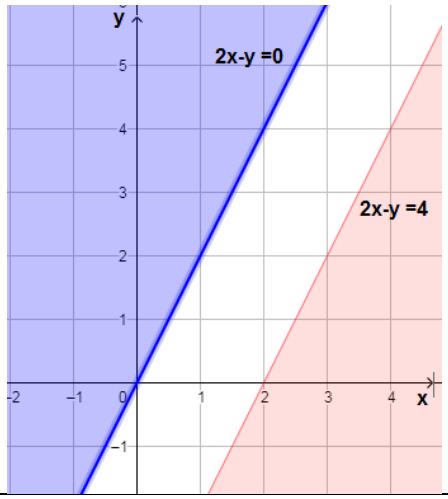
$3 \leq 1+5$

$3 \leq 6$ ✓

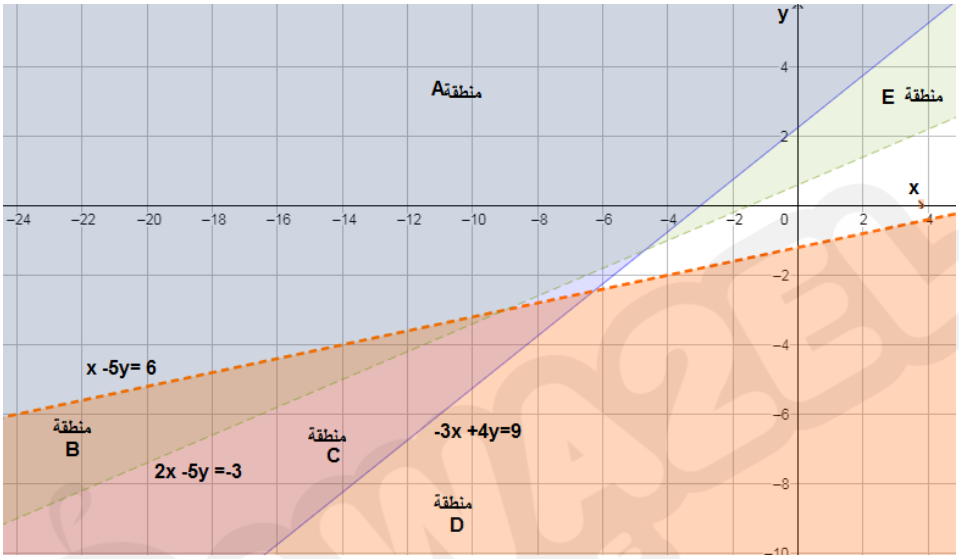
$3x + 2y \geq 6$

$3(1) + 2(3) \geq 6$

$9 \geq 6$ ✓

(b	لتحقق أختار نقطة في منطقة الحل ولتكن $(-1, 2)$ أعوض إحداثييها في المتباينتين.  $x + y \leq 2$ $\quad$ $x+ y \geq 0$ $-1+2 \leq 2$ $\quad$ $-1 + 2 \geq 0$ $1 \leq 2$ ✓ $\quad$ $1 \geq 0$ ✓
(a	أتحقق من فهمي4(ص40)  ليس له حل
(b	 ليس له حل

أتحقق من فهمي 5 (ص 41)



- حل المتباينة

$-3x + 4y \geq 9$

هو المناطق A, B, C

- حل المتباينة

$x - 5y > 6$

هو المناطق B, C, D

- حل المتباينة

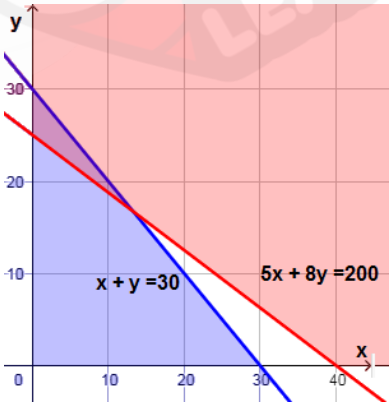
$2x - 5y < -3$

هو المناطق A, B, E

المنطقة المشتركة بين جميع الحلول هي المنطقة B

إذن، منطقة حل هذا النظام هي المنطقة B.

أتحقق من فهمي (ص 43)



أفرض أن كمية الكتان $x\ m^2$، وكمية الصوف $y\ m^2$،

فيكون نظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو:

$x + y \leq 30$

$5x + 8y \geq 200$

$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$

ومنطقة حله ممثلة بالرسم المجاور بالمثلث الذي يتمازج فيه اللونين.

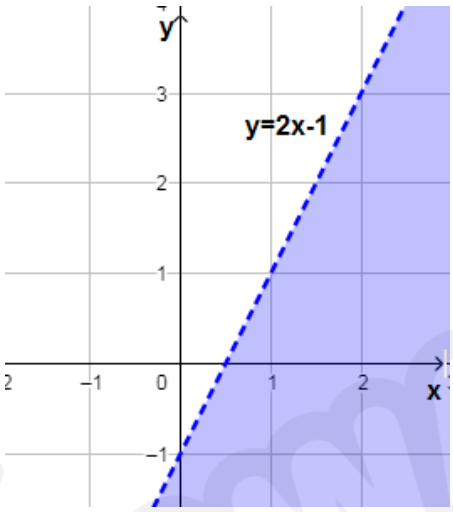
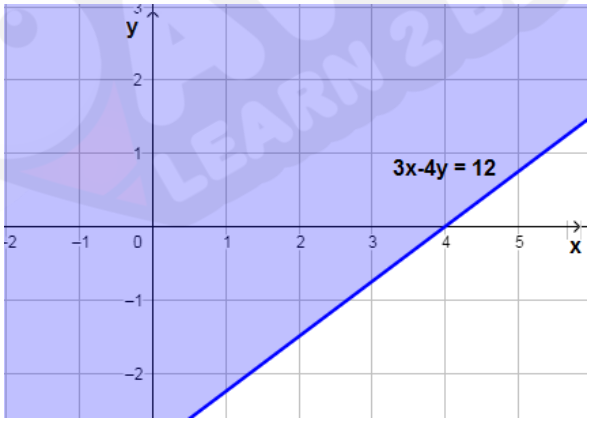
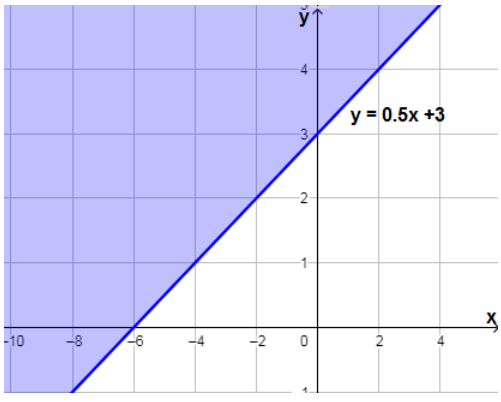
الكميات التي يمكنه شراؤها هي إحداثيات النقاط الواقعة في منطة الحل.

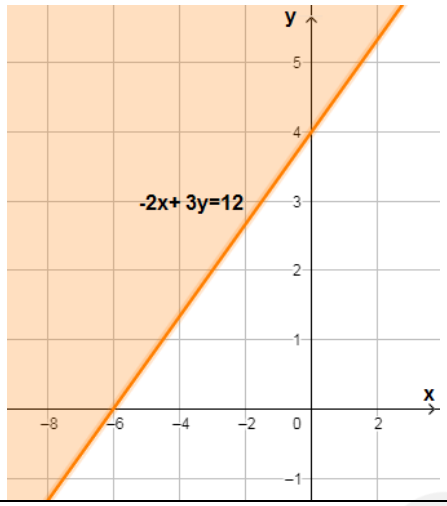
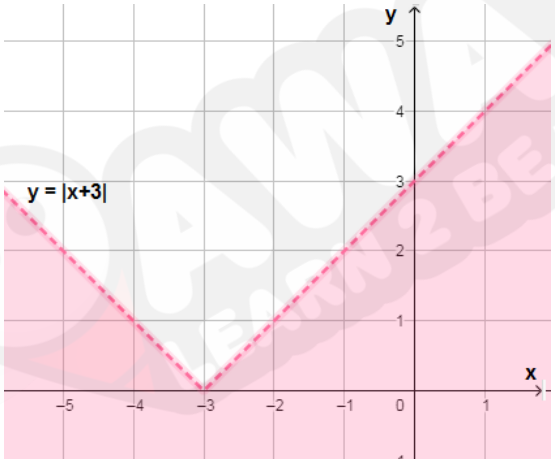
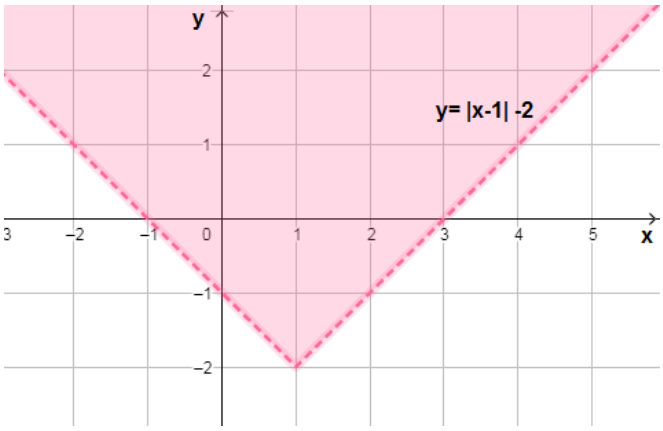
أكبر كمية كتان هي أكبر إحداثي x لنقاط منطقة الحل، وهو هنا الإحداثي x لنقطة تقاطع المستقيمين

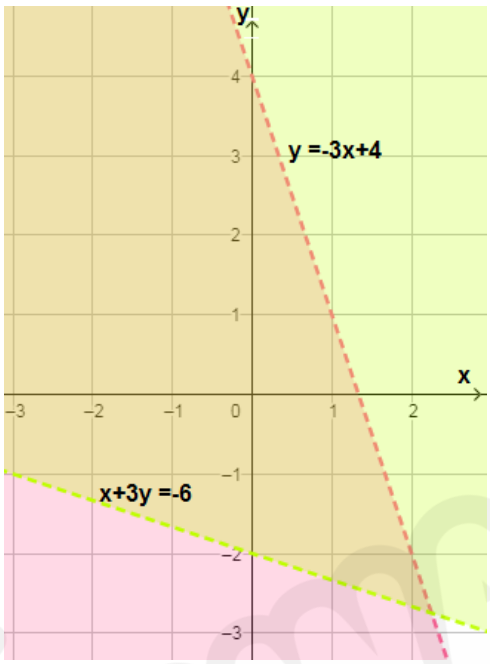
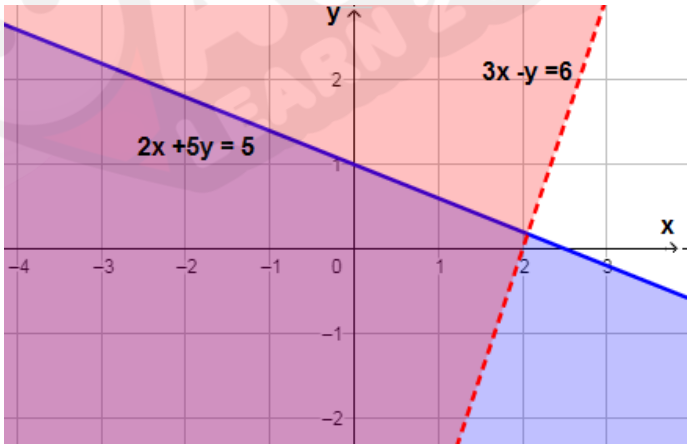
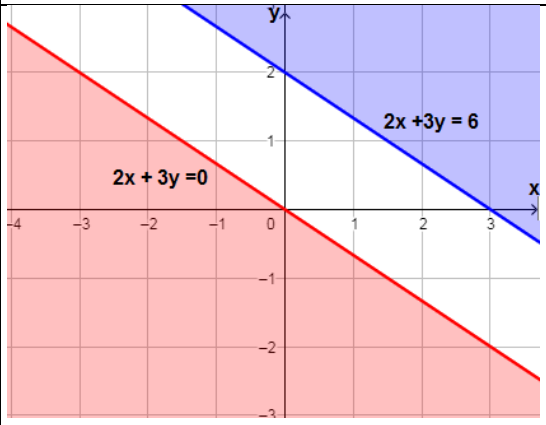
$5x + 8y = 200,\ x + y = 30$

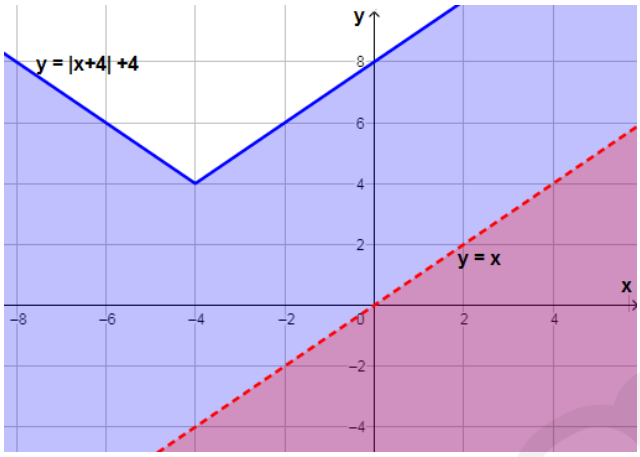
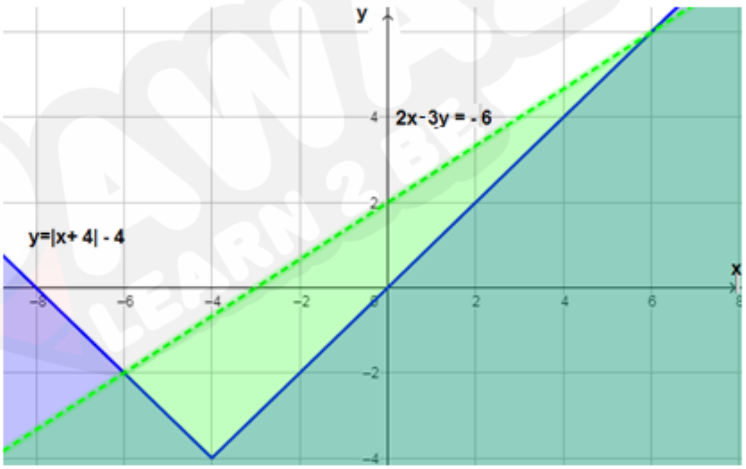
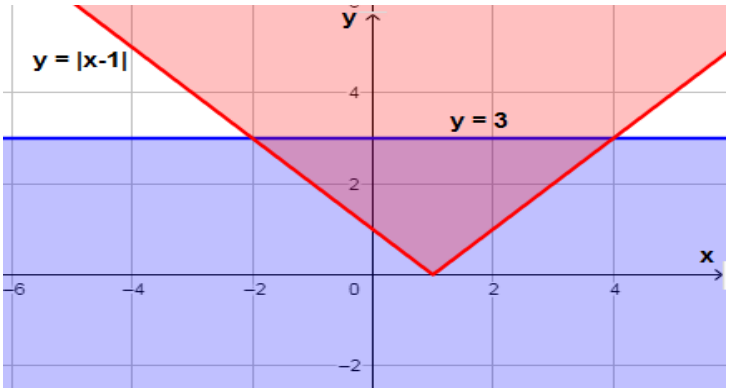
بضرب المعادلة الثانية في 8 وطرح الأولى ينتج أن $3x = 40$ ومنها $x = 13\frac{1}{3}\ m$

اتدرب وأحل المسائل

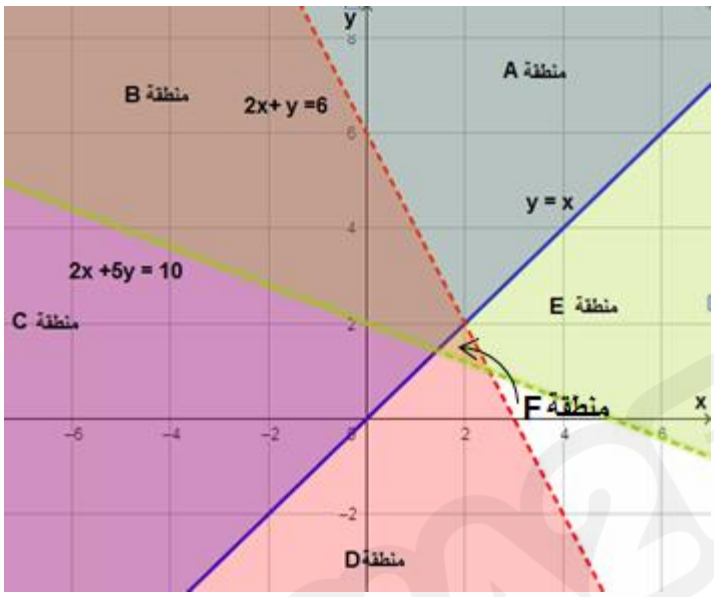
رقم السؤال	الإجابة
1	
2	
3	

4	
5	
6	

7		منطقة الحل هي المنطقة التي فيها المزيج من اللونين الأخضر والأحمر.
8		منطقة الحل هي المنطقة التي فيها المزيج من اللونين الأزرق والأحمر.
9		لا يوجد لهذا النظام حل منطقتا الحل لا تتقاطعان. مجموعة الحل في هذه الحالة هي φ.

10	 منطقة حل هذا النظام هي المنطقة التي فيها مزيج من اللونين الأزرق والأحمر في أسفل يمين الشكل وهي حل المتباينة $y < x$، فكل زوج يحقق $y < x$هو في الوقت ذاته يحقق $y \leq \|x + 4\| + 4$.
11	منطقة الحل هي المنطقة التي فيها مزيج من اللونين الأزرق والأخضر. 
12	 منطقة الحل هي المثلث الذي فيه مزيج من اللونين الأحمر والأزرق ورؤوسه $(-2, 3), (4, 3), (1, 0)$

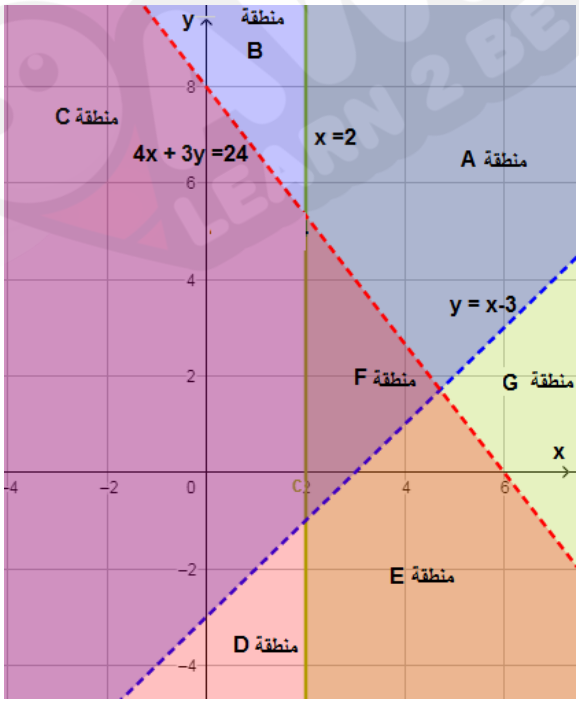
13



منطقة حل هذا النظام هي المنطقةB

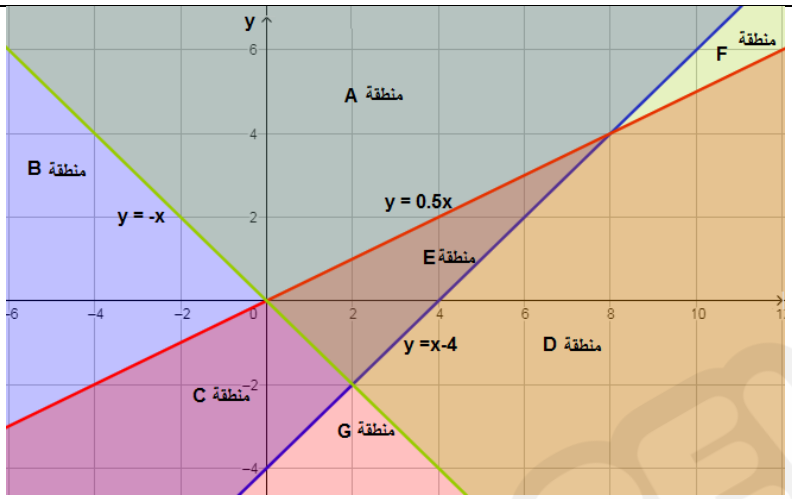
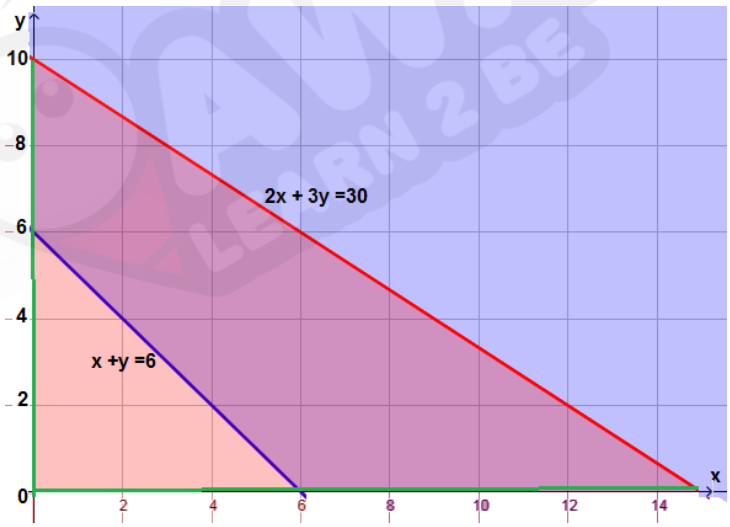
لأن حل المتباينة $y \geq x$ هو المناطق A, B, C؛ و حل المتباينة $2x+y<6$ هو المناطق B, C, D, F؛ و حل المتباينة $2x+5y>10$هو المناطق A, B, E,F؛ المنطقة المشتركة بين كل الحلول هي B.

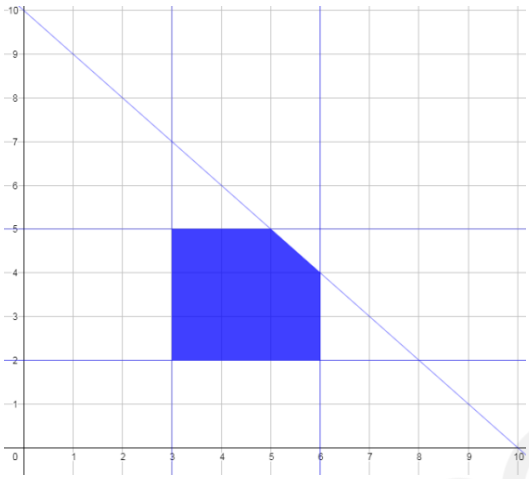
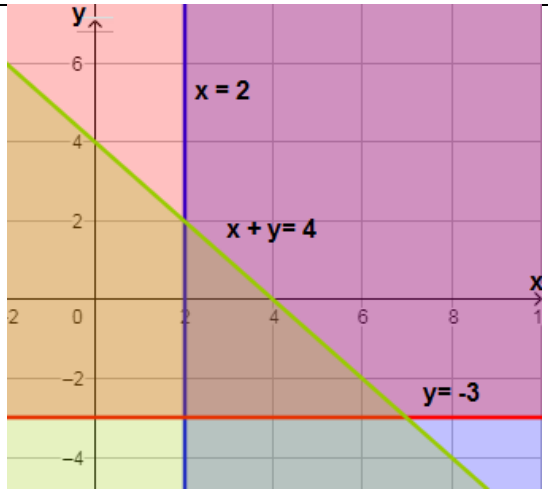
14



منطقة حل هذا النظام هي المنطقةF

لأن حل المتباينة $x \geq 2$ هو المناطق A, F, G, E؛ وحل المتباينة $4x+3y<24$ هو المناطق C, D, E, F؛ وحل المتباينة $y>x-3$ هو المناطق A, B, C,F؛ المنطقة المشتركة بين كل الحلول هي F.

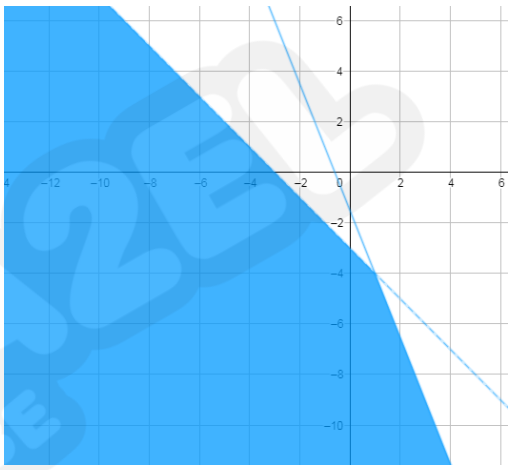
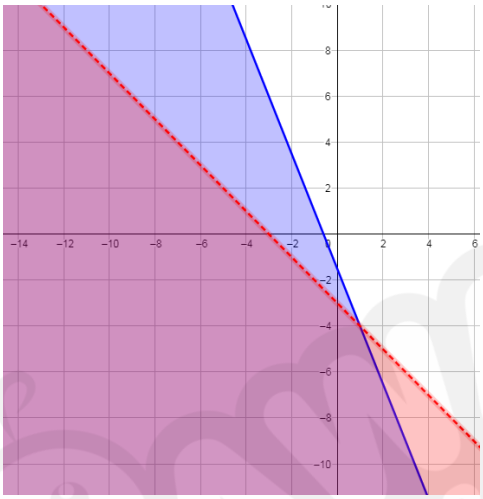
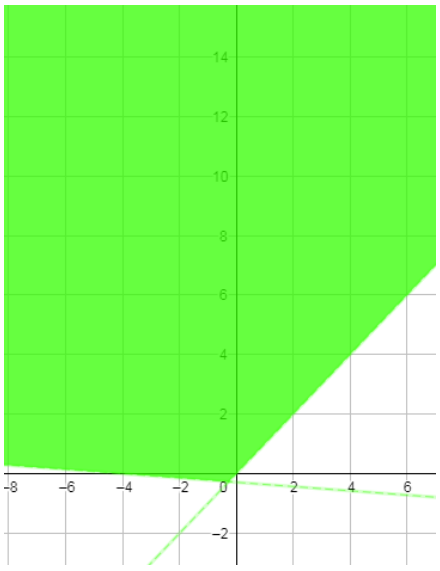
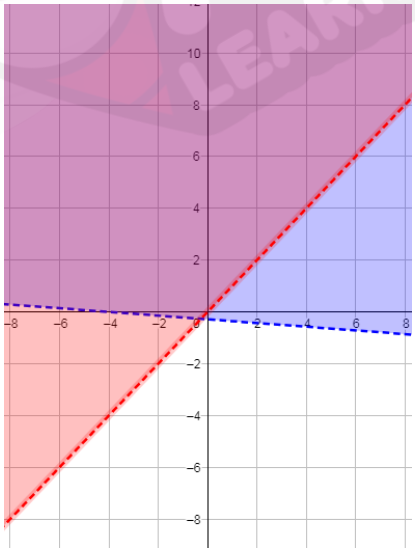
15	 منطقة حل هذا النظام هي المنطقة E لأن حل المتباينة $y \geq x-4$ هو المناطق A, B C, E؛ وحل المتباينة $y \leq 0.5x$ هو المناطق C, D, E, G؛ وحل المتباينة $y \geq -x$ هو المناطق A, D, E,F؛ المنطقة المشتركة بين كل الحلول هي المنطقة E.
16	أفرض أن عدد لفات ورق الزينة الأزرق x، وأن عدد لفات ورق الزينة الذهبي y.  نظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو: $x+ y \geq 6$ $2x + 3y \leq 15$ $x \geq 0, y \geq 0$ منطقة حل هذا النظام هي المنطقة التي يمتزج فيها اللونين الأحمر والأزرق. إحداثيات نقاط منطقة الحل تمثل عدد اللفات التي يمكن لتغريد شراؤها، ومنها (4, 2), (4, 4), (4. 6), (6, 2) , (6, 4), (6, 6), (10, 2), (12, 2)
17	$2y > -3x$
18	$y \geq -2x +3$
19	$y \geq 1.5 \|x -2\|$
20	أفرض أن رامي يقود الحافلةعلى نحو متواصل x ساعة في اليوم، وأن خليل يقودها y ساعة في اليوم نظام المتباينات هو:

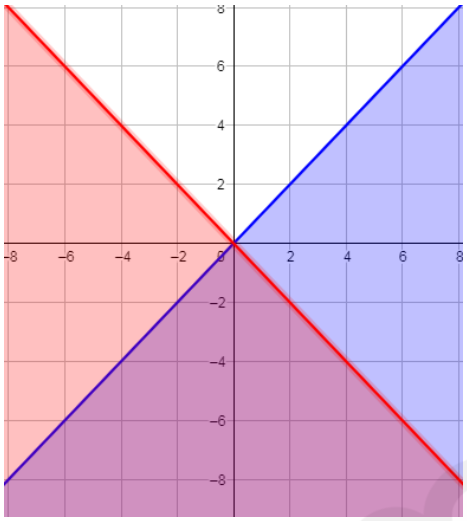
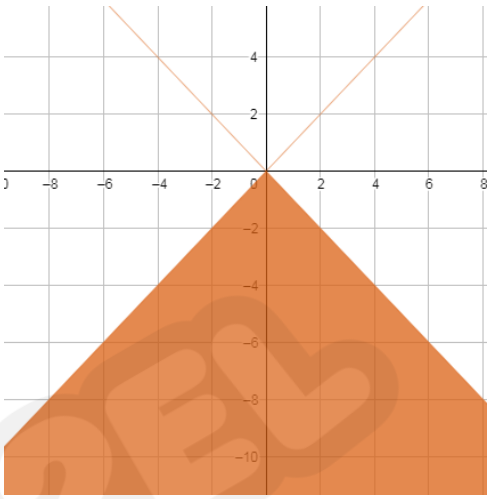
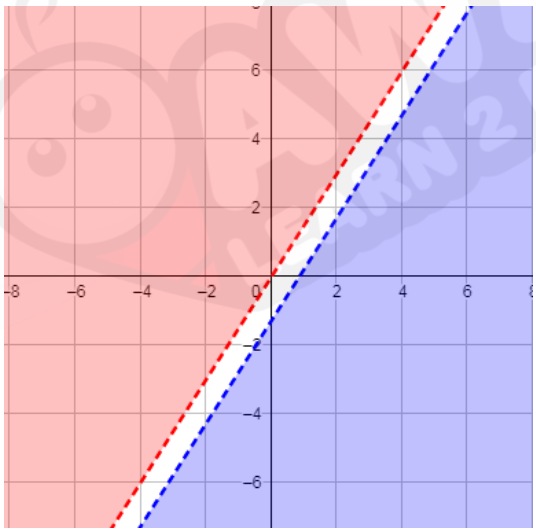
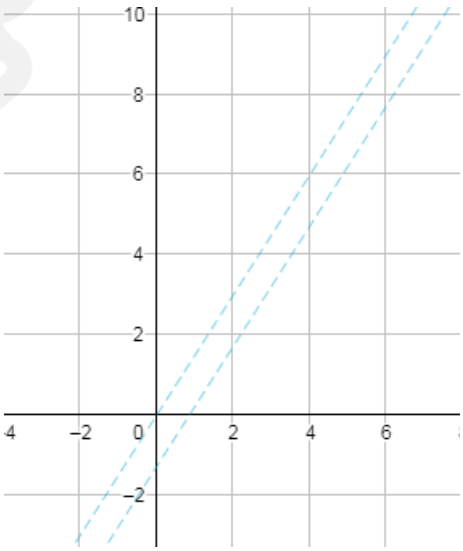
	$3 \le x \le 6$ $3 \le y \le 9$ $x+ y \le 10$ وتمثيله في الرسم المجاور. 
21	أفرض أن عدد الطاولات المستديرة x، وأن عدد الطاولات المستطيلة y عدد الجالسين حول الطاولات المستديرة 8x؛ وعدد الجالسين حول الطاولات المستطيلة 6y عدد الحضور 264 على الأقل المتباينة التي تصف الموقف هي: $8x + 6y \ge 264$ إذا كانت $x = 18$ ، فإن $8(18) + 6y \ge 264$ $144 + 6y \ge 264$ $6y \ge 120$ $y \ge 20$ يلزم 20 طاولة مستطيلة على الأقل.
22	منطقة حل النظام هي المثلث القائم الزاوية الذي تحده المستقيمات الثلاث: $x=2.\ y = -3,\ x+y =4$ 

23	12.5 وحدة مربعة
24	$x + y \geq 3$, $y \leq \frac{1}{2}x + 3$, $y \geq 5x - 15$
25	9
26	3
27	إجابة محتملة: $x + y \geq 5$ $x + y \leq 5$
28	إجابة محتملة: $y \geq 3x$ $x \leq 2x$
29	صحيحة أحيانًا. النظام $4x+3y \leq 10,\ 4x+3y \geq 12$ ليس له حل، وأما النظام $4x+3y \geq 10,\ 4x+3y \geq 12$ فله حل هو منطقة حل المتباينة $4x+3y \geq 12$
30	بما أن النقطة (3, 2) تحقق المتباينة، فإن $2 > 3m + b$ النقطة (1, 2) لا تحقق المتباينة، فإن $2 \leq m+b$ بإضافة $2m$ لطرفي هذه المتباينة ينتج أن $2+ 2m \leq 3m +b$ ولكن $3m +b < 2$ فستنتج أن $2+ 2m < 2$ $2m < 0$ $m < 0$ إذن، ميل المستقيم الحدودي سالب.
31	$y \leq \|x\|$ $y \geq - \|x\|$
32	$-2 \leq x \leq 5$ $y \geq x -2$ $y \leq x + 2$

معمل برمجية جيو جبرا

أتدرب (ص47)

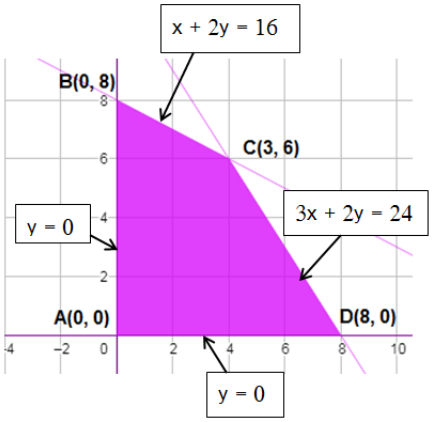
رقم السؤال	الإجابة	
1		
2		

3		
4	 لا يوجد له حل	 لا يوجد له حل

الدرس4

أتحقق من فهمي1(ص49)

التمثيل البياني لنظام المتباينات هو



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	T =4x +5y
A(0, 0)	4(0) + 5(0) = 0
B(0, 8)	4(0) + 5(8) = 40
C(3, 6)	4(3) + 5(6) = 42
D(8, 0)	4(8) + 5(0) = 32

النقطة التي يكون للاقتران T =4x +5y أكبرقيمة عندها هي C(3, 6).

أتحقق من فهمي2(ص51)

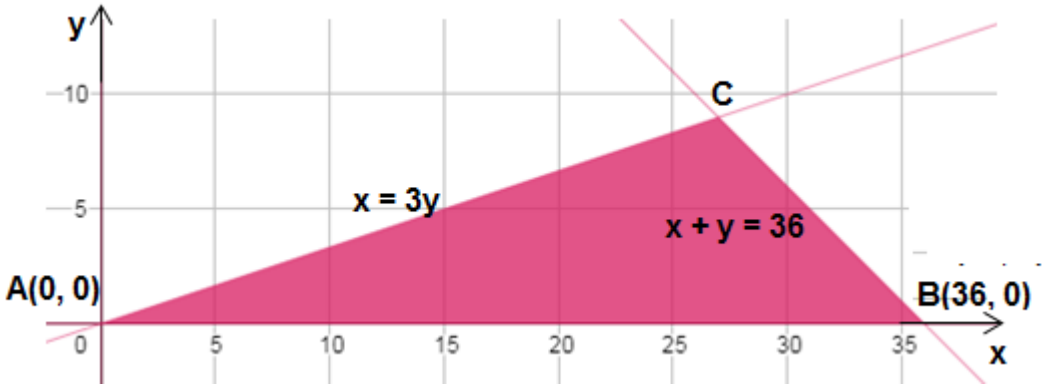
أفرض أن عدد الخزائن التي ينتجها المشغل من النوع A هو x، ومن النوع B هو y

اقتران الهدف هو الربح المتوقع وهو: P = 35x + 45y

القيود التي تحكم عمل المشغل هي:

$x + y \leq 36,\ x \geq 3y, x \geq 0, y \geq 0$

يبين الشكل الآتي التمثيل البياني لنظام المتباينات الذي تكونه هذه القيود.



أجد إحداثيي النقطة C بحل المعادلتين $x+y = 36$,$x =3y$ بالتعويض.

فتكون $C(27, 9)$

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 35x + 45y$
$A(0, 0)$	$35(0) + 45(0) = 0$
$B(36, 0)$	$35(36) + 45(0) = 1260$
$C(27, 9)$	$35(27) + 45(9) = 1350$

يحقق المشغل أكبر ربح عندما ينتج 27 خزانة من النوعA ، و9 خزائن من النوع B.

<u>أتحقق من فهمي 3 (ص53)</u>

أفرض أن عدد الحافلات الكبيرة المستأجرة لنقل الطلبة هو x، والصغيرة هو y

تكلفة استئجار هذه الحافلات هي: $C = 560x + 420y$

عدد ركاب هذه الحافلات 400 طالب على الأقل ← $50x + 40y \geq 400$

بالقسمة على 10 تصبح $5x + 4y \leq 40$

عدد السائقين 9← $x + y \leq 9$

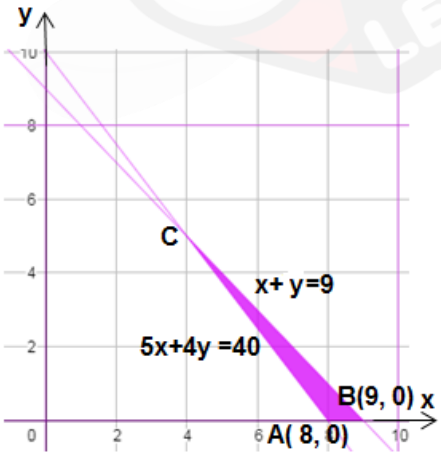
عدد الحافلات الكبيرة لدى الشركة 10 ← $0 \leq x \leq 10$

عدد الحافلات الصغيرة لدى الشركة 8 ← $0 \leq y \leq 8$

يبين الرسم المجاور التمثيل البياني لنظام المتباينات السابقة:

أجد إحداثيي C بحل المعادلتين $5x+4y =40$, $x+y =9$

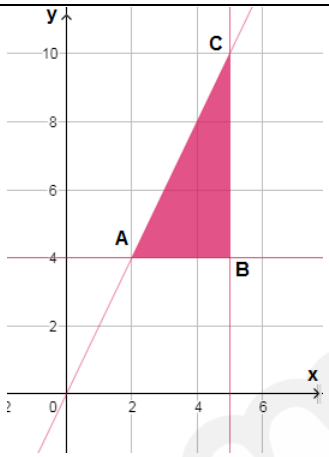
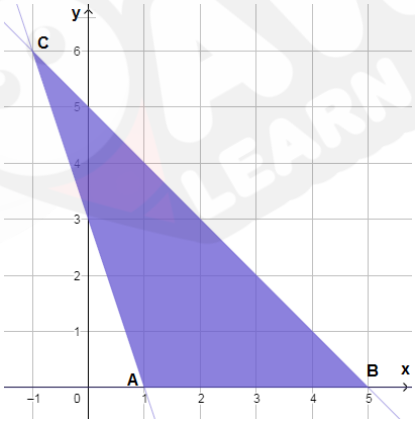
فأجد أن إحداثيي C هما $(4, 5)$



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$C = 560x + 420y$
$A(8, 0)$	$560(8) + 420(0) = 4480$
$B(9, 0)$	$560(9) + 420(0) = 5040$
$C(4, 5)$	$560(4) + 420(5) = 4340$

إذن، أقل تكلفة لاستئجار الحافلات لهذه الرحلة هي 4340 دينار عند استئجار 4 حافلات كبيرة ، و6 صغيرة.

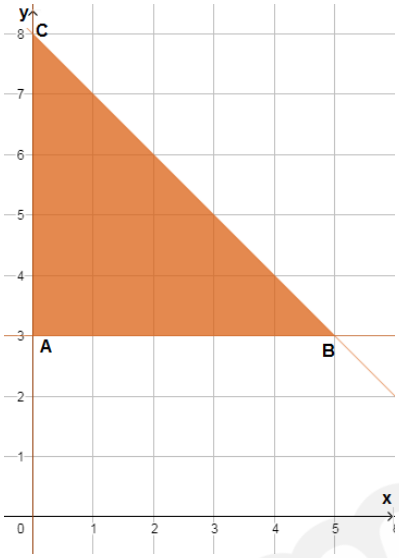
أتدرب وأحل المسائل

رقم السؤال	الإجابة
1	 أصغر قيمة لاقتران الهدف هي18 عند النقطة A(2, 4).
2	 أصغر قيمة لاقتران الهدف هي2 عند النقطة A(1, 0)

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	T= 5x +2y
A(2, 4)	T = 5(2) + 2(4) = 18
B(5, 4)	T = 5(5) + 2(4) = 33
C(5, 10)	T = 5(5) + 2(10) = 45

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	P=2x +4y
A(1, 0)	P = 2(1) + 4(0) = 2
B(5, 0)	P = 2(5) + 4(0) = 10
C(−1, 6)	P = 2(−1) + 4(6) = 22

3



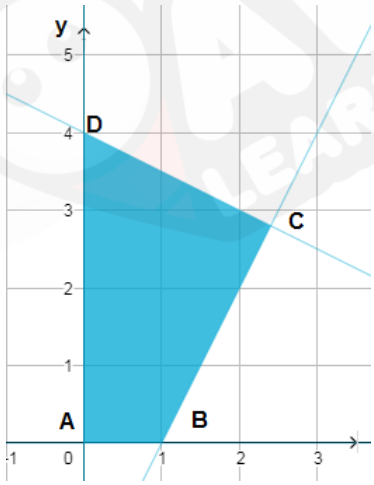
رؤوس منطقة الحلول الممكنة	Z=3x +2y
A(0, 3)	Z=3(0) +2(3) =6
B(5, 3)	Z=3(5) +2(3) =21
C(0, 8)	Z=3(0) +2(8) =16

أصغر قيمة لاقتران الهدف هي6 عند النقطة A(0, 3)

4

بعد تمثيل نظام المتباينات، أجد إحداثيي C بحل المعادلتين

x+2y=8, 2x−y= 2

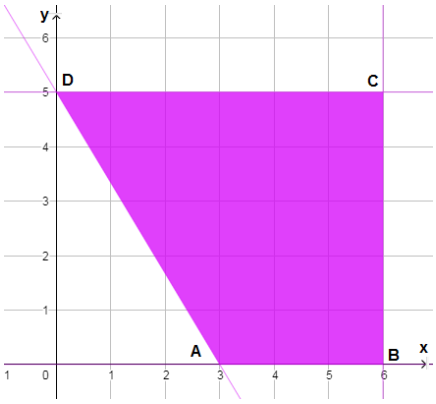


فأجد أن إحداثيي C هما(2.4, 2.8)

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	T=5x −2y
A(0, 0)	T = 5(0) − 2(0) = 0
B(1, 0)	T = 5(1) − 2(0) = 5
C(2.4, 2.8)	T =5(2.4) − 2(2.8) = 6.4
D(0, 4)	T =5(0) − 2(4) = −8

أكبر قيمة لاقتران الهدف هي6.4 عند النقطة C(2.4, 2.8)

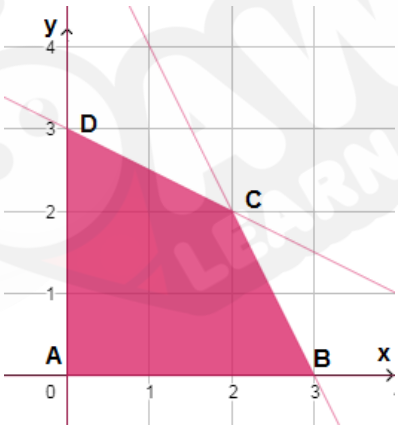
5



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	Q=3x +y
A(3, 0)	Q = 3(3) + 0 = 9
B(6, 0)	Q = 3(6) + 0 = 18
C(6, 5)	Q = 3(6) + 5 = 23
D(0, 5)	Q = 3(0) + 5 = 5

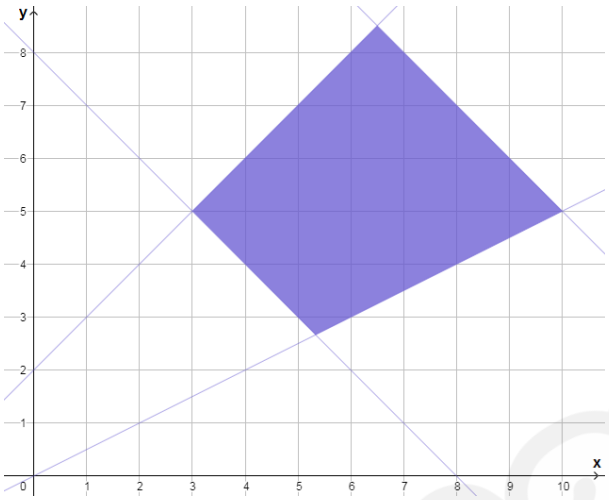
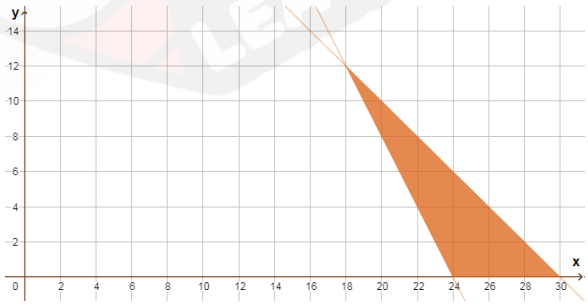
أكبر قيمة لاقتران الهدف هي23عند النقطة C(6, 5)

6

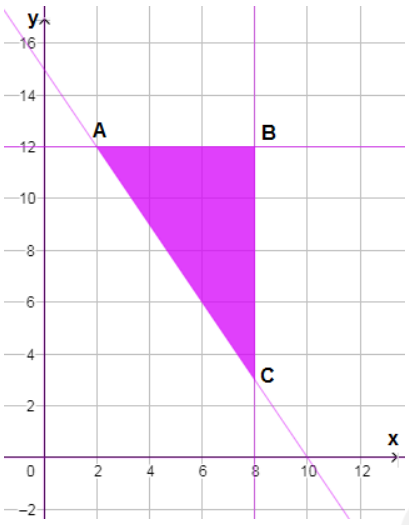


رؤوس منطقة الحلول الممكنة	K=x +2y
A(0, 0)	K = 0 + 2(0) = 0
B(3, 0)	K = 3 + 2(0) = 3
C(2, 2)	K = 2 + 2(2) = 6
D(0, 3)	K = 0 + 2(3) = 6

أكبر قيمة لاقتران الهدف هي6 وتتحقق عند النقطتين C(2, 2), D(0, 3)

7	أفرض أن عدد الحافلات الكبيرة x، والمتوسطة y فيكون نظام المتباينات هو: $x + y \leq 15$ $x + y \geq 8$ $y \geq 0.5x$ $y \leq x + 2$ $x \geq 0, y \geq 0$ 
8	إذا كان لدى الشركة 6 حافلات كبيرة، فيمكن أن يكون لديها 3 أو4 أو 5 أو 6 أو 7 أو 8 حافلات متوسطة.(نأخذ الإحداثيات y الصحيحة لجميع النقاط التي الإحداثي x لها 6 وتقع في منطقة الحلول الممكنة لنظام المتباينات).
9	أفرض أن عدد الكبار x، وعدد الأطفال y، فنظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو: $x+ y \leq 30$ $20x + 10y \geq 480 \rightarrow 2x + y \geq 48$ $x \geq 0, y \geq 0$  أقل عدد للكبار الذين يحملهم القارب هو أقل قيمة للإحداثيx للنقاط الواقعة في منطة الحلول الممكنة وهو هنا 18
10	أفرض أن عدد خزائن النوع A هو x، وعدد خزائن النوع B هو y تكلفة شراء هذه الخزائن هي: $C = 90x + 75y$ نظام المتباينات الذي يصف هذاالموقف هو: $3x + 2y \geq 30$ $0 \leq x \leq 8$ $0 \leq y \leq 12$

11



رؤوس منطقة الحل هي:

A(2 12), B(8, 12), C(8, 3)

12

أحسب قيمة اقتران التكلفة عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	C=90x +75y
A(2, 12)	C=90(2) +75(12) =1080
B(8, 12)	C=90(8) +75(12) =1620
C(8, 3)	C=90(8) +75(3) =945

أقل تكلفة ممكنة هي 945 دينارًا عند شراء 8 خزائن من النوع A، و3 خزان من النوع B.

13

أفرض أن عدد الدراجات التي ينتجها المصنع أسبوعيًا من النوع الأولx، ومن النوع الثانيy .

نظام المتباينات الذي يصف المسألة هو:

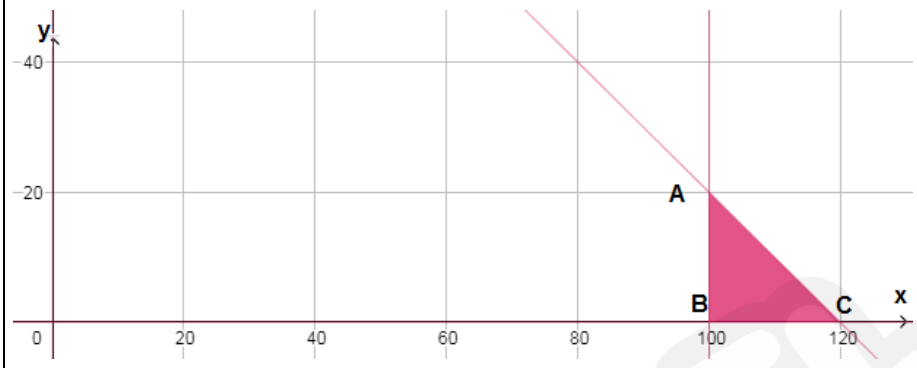
$$x + y \leq 120$$

$$x \geq 100$$

$$y \leq 200$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

اقتران الهدف هو دخل المصنع من بيع الدراجات وهو: $R = 60x + 75y$



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	R=60x +75y
A(100, 20)	R=60(100) +75(20) =7500
B(100, 0)	R=60(100) +75(0) =6000
C(120, 0)	R=60(120) +75(0) =7200

يكون الدخل أكبر ما يمكن عند انتاج 100دراجة من النوع الأول، و20 دراجة من النوع الثاني.

14

أفرض أن المزارع يشتري x kg من النوع A، وy kg من النوع B

اقتران التكلفة هو: $C = 1x+1.5y$

نظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو:

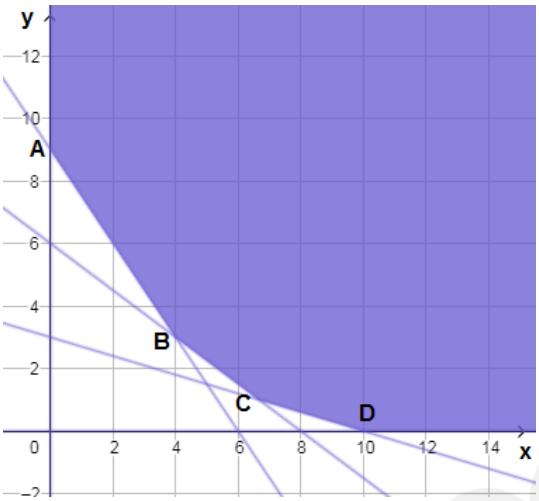
كمية الفوسفات: $6x +4y \geq 36 \leftarrow 3x + 2y \geq 18$

كمية النيترات: $3x + 4y \geq 24$

كمية الأمونيا: $3x +10y \geq 30$

عدم السالبية: $x \geq 0, y \geq 0$

15



أجد إحداثيي C بحل المعادلتين

$3x + 4y = 24,\ 3x + 10y = 30$

فأجد أن $C(\frac{20}{3}, 1)$

رؤوس منطقة الحلول الممكنة هي:

$A(0, 9),\ B(4, 3),\ C(\frac{20}{3}, 1),\ D(10, 0)$

16

أحسب قيمة اقتران التكلفة عند رؤوس منطقة الحلول.

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$C = x + 1.5y$
$A(0, 9)$	$C = 0 + 1.5(9) = 13.5$
$B(4, 3)$	$C = 4 + 1.5(3) = 8.5$
$C(\frac{20}{3}, 1)$	$C = \frac{20}{3} + 1.5(1) = 7\frac{1}{6} \approx 7.16$
$D(10, 0)$	$C = 10 + 1.5(0) = 10$

أقل تكلفة هي JD7.16 عند شراء $\frac{20}{3} \approx 6.67$ kg من السماد A، و 1 kg من السماد B.

17

أحسب قيمة الاقتران الهدف عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	P= 5x +6y
(0, 0)	P = 5(0) + 6(0) = 0
(0, 45)	P = 5(0) + 6(45) = 270
(30, 45)	P = 5(30) + 6(45) = 420
(60, 20)	P = 5(60) + 6(20) = 420
(60, 0)	P = 5(60) + 6(0) = 300

أكبر قيمة لاقتران الهدف هي 420 وتتحقق عند الرأسين(60, 20) ,(30, 45)، وذلك لأن المستقيم الحدودي المار بهاتين النقطتين يوازي المستقيم الذي يمثل اقتران الهدف فميلاهما متساويان$\frac{-5}{6}$ وجميع النقاط الواقعة على هذا الحد تعطي القيمة نفسها لاقتران الهدف ومنها (48, 30) ,(36, 40) وغيرها، لأن معادلة هذا الحد هي 5x + 6y = 420

18

تتنوع الإجابات. المسألة الآتية مثال لإجابة:

ينتج مصنع أثاث طاولات وخزائن. يتطلب صنع الطاولة الواحدة ساعتان من العمل الآلي وساعة عمل يدوي، بينما يتطلب صنع الخزانة الواحدة ساعة عمل آلي وساعتا عمل يدوي. ويمكن أن تعمل الآلات في المصنع مدة 180 ساعة أسبوعيًا، ويمكن تنفيذ 270 ساعة عمل يدوي أسبوعيًا. إذا كان المصنع يربح 5 دنانير في كل طاولة، و8 دنانير في كل خزانة، فكم طاولة وخزانة ينتج المصنع أسبوعيًا ليحقق أكبر ربح؟

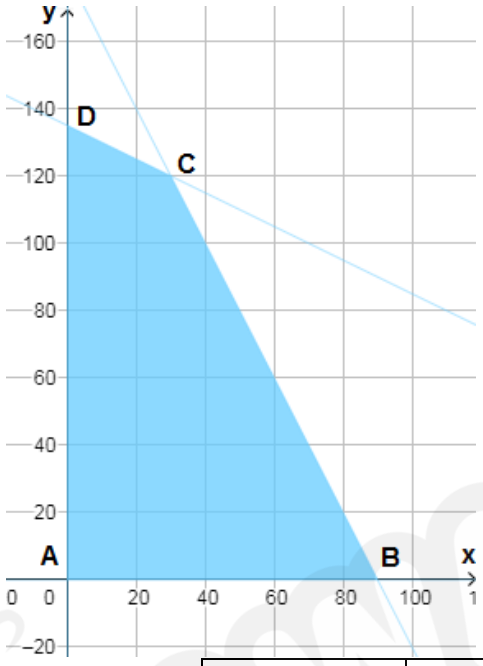
أفرض أن عدد الطاولات x، والخزائن y

نظام المتباينات الذي يصف هذه المسألة هو:

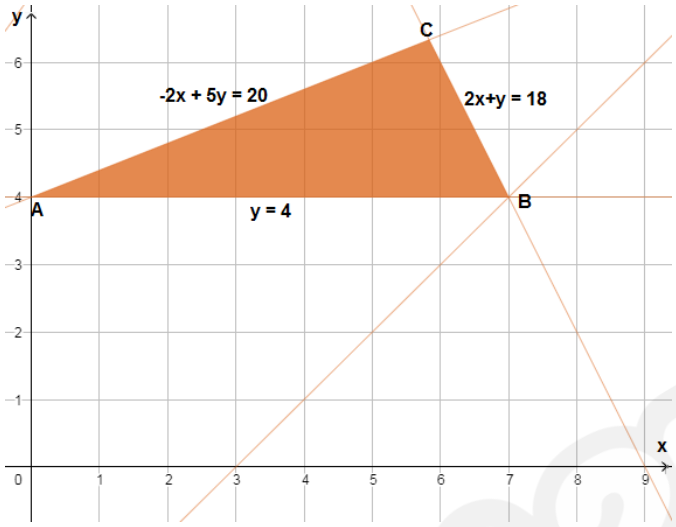
عدد ساعات العمل الآلي المتاحة: $2x + y \leq 180$

عدد ساعات العمل اليدوي المتاحة: $x + 2y \leq 280$

عدم السالبية: $x \geq 0 , y \geq 0$

	 أحل المعادلتين $2x+y=180$,$x+2y=270$ فأجد أن إحداثيي C هما $(30, 120)$ لإيجاد إحداثيي B أعوض $y=0$ في المعادلة $2x+y=180$ فينتج أن: $x=90$ لإيجاد إحداثيي B أعوض $x=0$ $x+2y=270$ فينتج أن $y=135$ اقتران الهدف هو الربح $P=5x+8y$ أحسب قيمة اقتران الهدف عند رؤوس منطقة الحل. | رؤوس منطقة الحلول الممكنة | $P=5x+8y$ | |---|---| | $A(0, 0)$ | $P=5(0)+6(0)=0$ | | $B(90, 0)$ | $P=5(90)+6(0)=450$ | | $C(30, 120)$ | $P=5(30)+6(120)=870$ | | $D(0, 135)$ | $P=5(0)+6(135)=810$ | يحقق المصنع أكبر ربح أسبوعي قدره 870 دينارًا عندما ينتج 30 طاولة، و120 خزانة.
19	قد تكون موجبة وقد تكون غير ذلك لأن الأمر يعتمد على المعاملين a، و b بالإضافة إلى قيمة x، و y.

20



التمثيل البياني لنظام المتباينات مبين في الرسم المجاور.

أجد إحداثيي C بحل المعادلتين $-2x+5y=20,\ 2x+y=18$

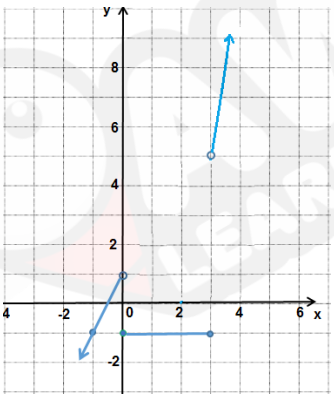
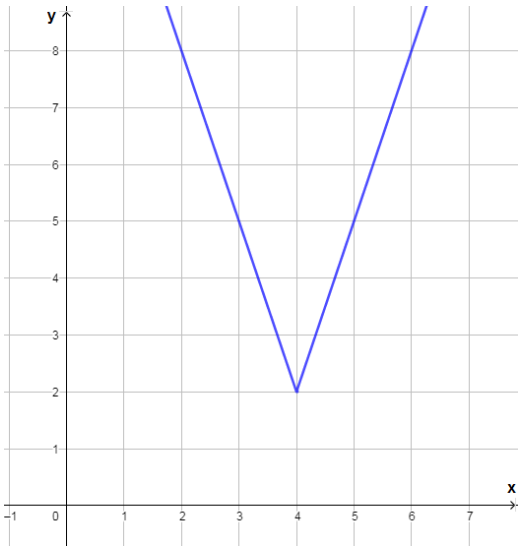
فأجد أن $C(4.5,\ 6.75)$

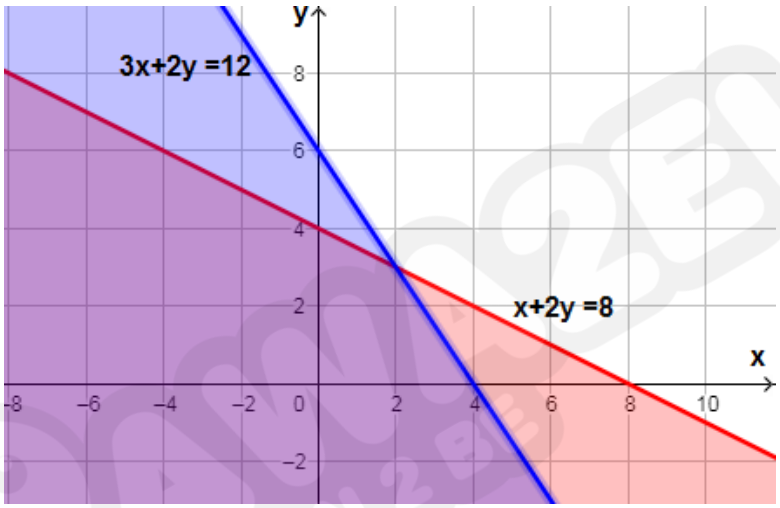
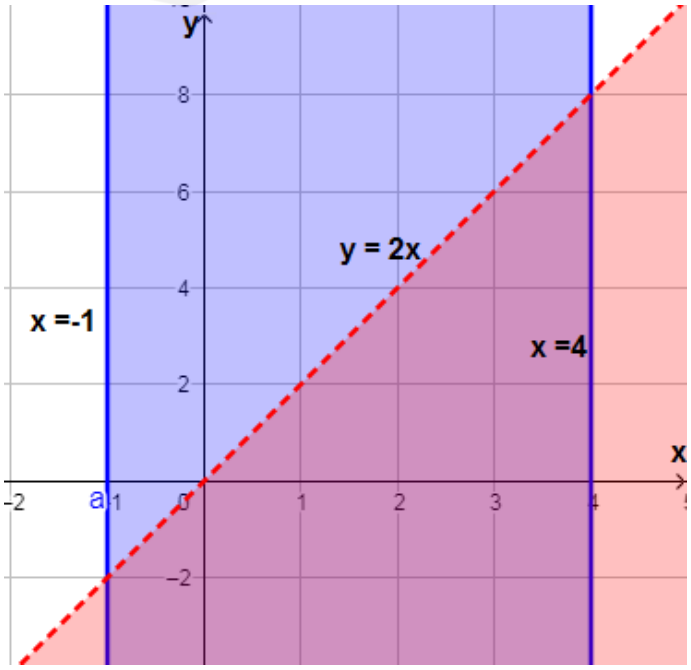
ثم أحسب قيمة اقتران الهدف عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

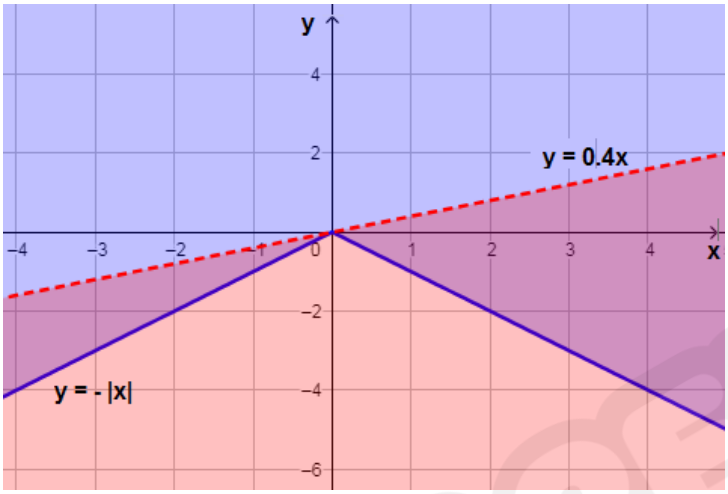
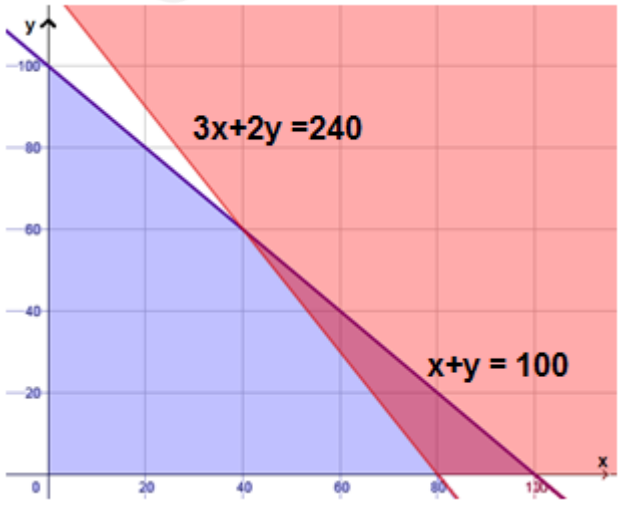
رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$T=-3x+5y$
$A(0,\ 4)$	$T=-3(0)+5(4)=20$
$B(7,\ 4)$	$T=-3(7)+5(4)=-1$
$C(4.5,\ 6.75)$	$T=-3(4.5)+5(6.75)=20.25$

القيمة العظمى هي 20.25 ، والقيمة الصغرى -1

اختبار نهاية الوحدة

رقم السؤال	الإجابة
1	d
2	c
3	d
4	a
5	d
6	a
7	c
8	b
9	
10	

11	$x = -3.5,\ x = 0.5$
12	$x = -6,\ x = -0.25$
13	$x \leq -3$ or $x \geq 6$: $(-\infty, -3] \cup [6, \infty)$
14	$0.5 \leq x \leq 8$:$[0.5, 8]$
15	منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق. 
16	منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق. 

17	 منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق.
18	أفرض أن عدد تذاكر المقاعد القريبة المنصة x، وعدد تذاكر المقاعد الخلفية y عدد التذاكر: $x + y \leq 100$ الإيردات: $15x + 10y \leq 1200$ (بالقسمة على5) $3x + 2y \leq 240$
19	 منطقة الحل هي المظللة بمزيج من اللونين الأحمر والأزرق.
20	أكبر قيمة ممكنة لعدد تذاكر المقاعد الخلفية هو أعلى إحداثيy للنقاط الواقعة في منطقة حل النظام. ويلاحظ من الرسم أن أكبر قيمة لِـ y في منطقة الحلول هي 60 أي أن عدد تذاكر المقاعد الخلفية المبيعة هو 60 على الأكثر.

21

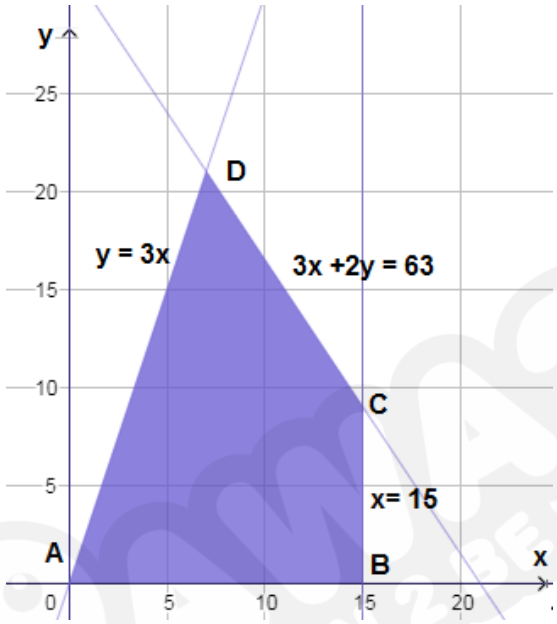
أفرض أن عدد العمال المهرة هو x، والعمال المبتدئين هو y، فيكون نظام المتباينات هو:

مجموع الأجور: $3x + 2y \leq 63 \rightarrow 30x + 20y \leq 630$

عدد العمال المهة المتوفرين: $x \leq 15$

النسبة بين العمال: $x \geq \frac{y}{3} \rightarrow y \leq 3x$

عدم السالبية: $x \geq 0, y \geq 0$



الرسم المجاور هو التمثيل البياني لنظام المتباينات.

22

اقتران الهدف هو عدد الطرود المجهزة في الساعة وهو: $K= 25x + 18y$

إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة هي $A(0, 0), B(0, 0)$ ويتعين إيجاد إحداثيات C بحل المعادلتين $x= 15, 3x+2y = 63$

فيكون إحداثيي C هما $(15, 9)$

ولإيجاد إحداثيي D أحل المعادلتين $y = 3x, 3x +2y = 63$

فيكون إحداثيي D هما $(9, 27)$

أحسب قيمة اقتران الهدف عند رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

رؤوس منطقة الحلول	$K= 25x +18y$
$A(0, 0)$	$K = 25(0) + 18(0) = 0$
$B(15, 0)$	$K = 25(15) + 18(0) = 375$
$C(15, 9)$	$K = 25(15) + 18(9) = 537$
$D(9, 27)$	$K = 25(9) + 18(27) = 711$

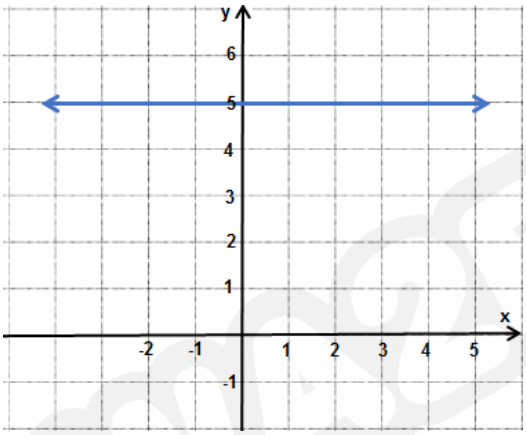
إذن، لتجهيز أكبر عدد من الطرود يجب تشغيل 9 عمال مهرة، و27 عاملًا مبتدئًا.

23	b
24	d
25	a

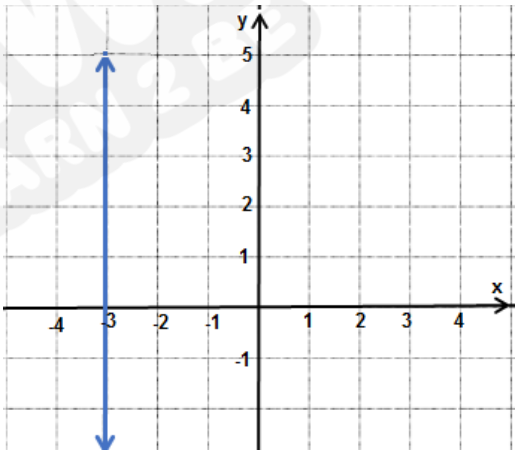
إجابات كتاب التمارين
الصف 11 علمي
الوحدة الاولى

أستعد لدراسة الوحدة
تمثيل المعادلات الخطية بيانيًا

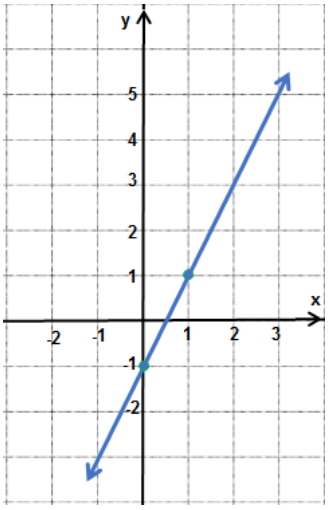
(1



(2



(3

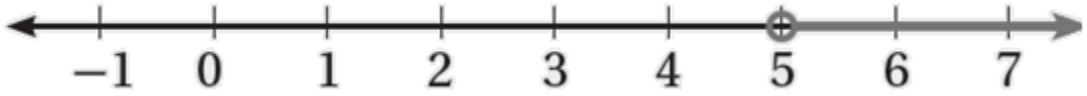


x	0	1
y= 2x-1	-1	1

حلّ متباينات خطّية بمتغيّر واحد، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد

1) $x > 5$

مجموعة الحل: الفترة $(5, \infty)$

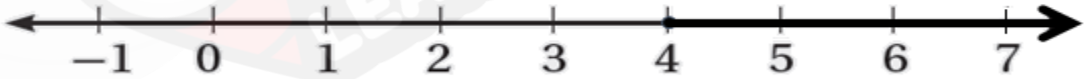


2) $x < 5$

مجموعة الحل: الفترة $(-\infty, 5)$

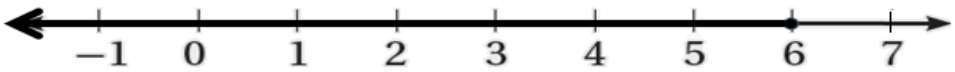
3) $x \geq 4$

مجموعة الحل: الفترة $[4, \infty)$



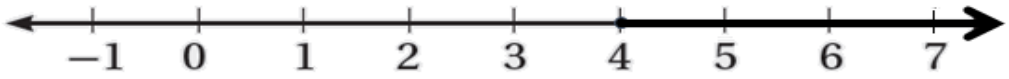
4) $x \leq 6$

مجموعة الحل: الفترة $(-\infty, 6]$



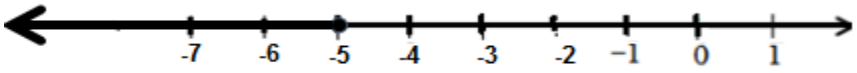
5) $x \geq 4$

مجموعة الحل: الفترة $[4, \infty)$



6) $x \leq -5$

مجموعة الحل: الفترة $(-\infty, -5]$



حلّ نظام مكوّن من معادلتين خطّيتين

1) $x= 5,\ y = 2$

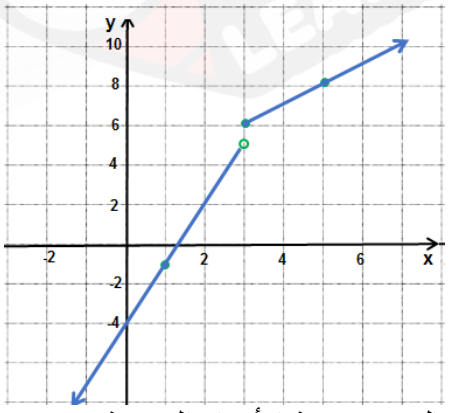
2) $x= 2,\ y = -1$

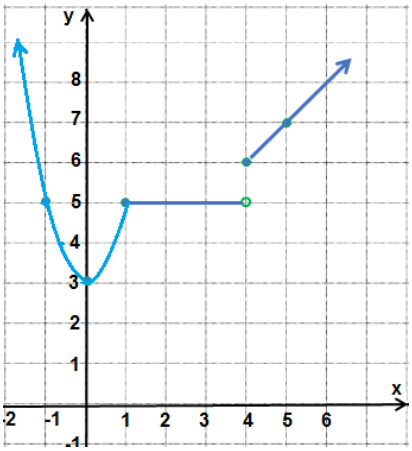
3) $x= 3,\ y = 5$

الدرس 1 الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة

ملاحظة:

نبه الطلبة إلى مسح التظليل في الدائرة عند نقطة الأصل في السؤال الرابع لتصبح دائرة مفتوحة.

<table>
<tr><th>الرقم</th><th>الإجابة</th><th>الرقم</th><th>الإجابة</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$f(x)=\begin{cases}4-5x, & x<0.8\\ 5x-4, & x\geq 0.8\end{cases}$</td><td>2</td><td>$f(x)=\begin{cases}-2x-3, & x<1.5\\ 2x-9, & x\geq 1.5\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>f(x) = 1.5|x+2|</td><td>4</td><td>$f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ \frac{1}{3}x+2, & x\geq 0\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-1</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td></tr>
</table>


المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: $(-\infty, 5)\cup[6, \infty)$
</td><td>6</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>y</td><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>


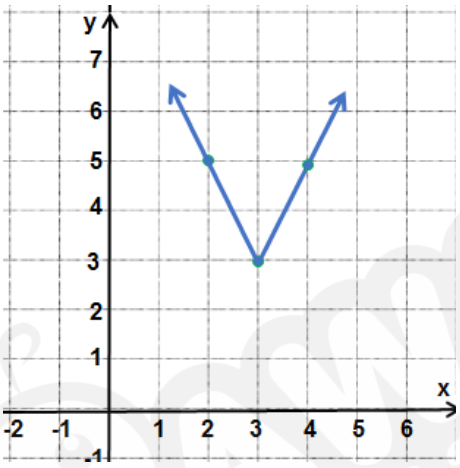
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى: $y\geq 3$ أو الفترة $[3, \infty)$
</td></tr>
</table>

7

إحداثيا الرأس $(\frac{6}{2}, 3)$ ، أختار نقطة قبله ونقطة بعده لأكون الجدول:

x	2	3	4
y	5	3	5

وأعين النقاط وأرسم شكل V.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

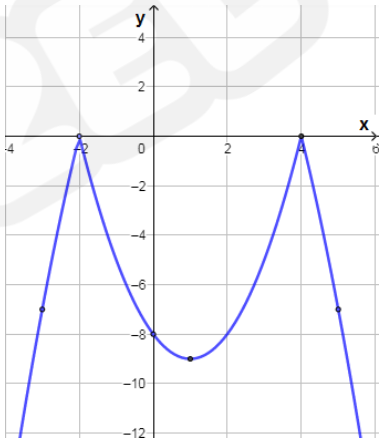
المدى: $y \geq 3$ أو الفترة $[3, \infty)$

8

أجد الإحداثي x لرأس القطع المكافئ ومقاطعه من المحورين وقيمتين أخريين أعوضها في معادلة الاقتران لأكون الجدول:

x	-3	-2	0	1	4	5
y	-7	0	-6	-9	0	-7

وأعين النقاط وأرسم المنحنى.



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: $y \leq 0$ أو الفترة $(-\infty, 0]$

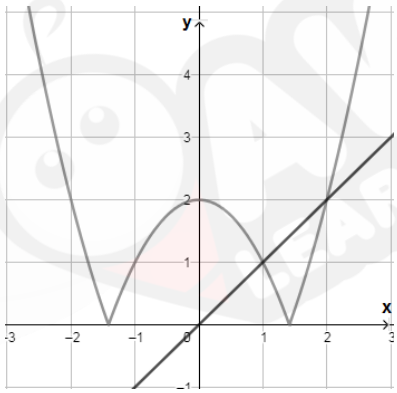
9

$$f(x) = \begin{cases} 1.20 + 0.121x, & 0 \leq x \leq 2000 \\ 0.176x - 108.80, & x > 2000 \end{cases}$$

الدرس2 حلّ معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

الإجابة	الرقم	الإجابة	الرقم
x= 1, x= -5 الحلان يحققان المعادلة الأصلية	2	x= 1.6, x= -0.8 الحلان يحققان المعادلة الأصلية	1
بإعادة ترتيب المعادلة تتحول إلى: |x-2| = -2 ليس لها حل لأن القيمة المطلقة غير سالبة	4	x= 1, x= -3 الحلان يحققان المعادلة الأصلية	3
x= 1.2, x= 4 الحلان يحققان المعادلة الأصلية	6	$x = \frac{5}{7}$ عند حل المعادلة جبريًا، نجد لها حلين هما $\frac{5}{7}$ وَ $\frac{1}{5}$ ، ولكن $\frac{1}{5}$ لا يحقق المعادلة الأصلية، فيكون لهذه المعادلة حل واحد هو $\frac{5}{7}$.	5

7



يمكن حل المعادلة $x = |x^2-2|$ بتمثيل طرفيها في المستوى البياني نفسه كما في الرسم المجاور، وملاحظة الاحداثي x لنقطتي التقاطع. لهذه المعادلة حلان هما $x= 1, x =2$
ويمكن حلها جبريًا على النحو التالي:

الحالة1:

$x^2 -2 =x$

$x^2-x -2 =0$

$(x-2)(x+1) =0 \rightarrow x =-1 , x = 2$

الحالة2:

$x^2 -2 =-x$

$x^2+x -2 =0$

$(x+2)(x-1) =0 \rightarrow x =1 , x = -2$

الحلان السالبان لا يحققان المعادلة الأصلية لأن طرفها الأيمن عند التعويض يكون عددًا سالبًا والأيسر موجبًا (قيمة مطلقة) فلا تكون العبارة صحيحة.

وبتعويض x =1 ينتج	وبتعويض x =2 ينتج
|1- 2| = 1	|4- 2| = 2
|-1| =1 ✓	|2| =2 ✓

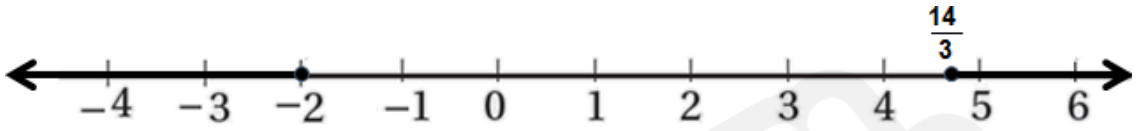
إذن، لهذه المعادلة حلان هما $x =1 , x = 2$

8	$x= 0.5\ ,\ x = -6$ الحلان يحققان المعادلة الأصلية	9	$x = 2, x = -\frac{6}{7}$ الحلان يحققان المعادلة الأصلية

10

$x \leq -2$ or $x \geq \frac{14}{3}$

مجموعة الحل:$(-\infty, -2] \cup [\frac{14}{3}, \infty)$



11

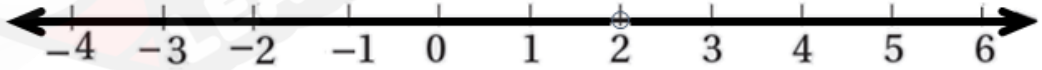
$-2.25 < x < 1.25$

مجموعة الحل:الفترة $(-2.25, 1.25)$

12

$x < 2$ or $x > 2$

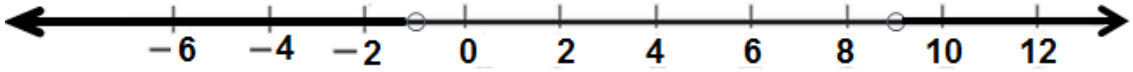
مجموعة الحل:$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$



13

$x < -1$ or $x > 9$

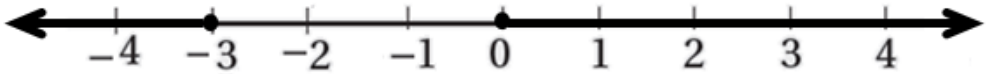
مجموعة الحل:$(-\infty, -1) \cup (9, \infty)$

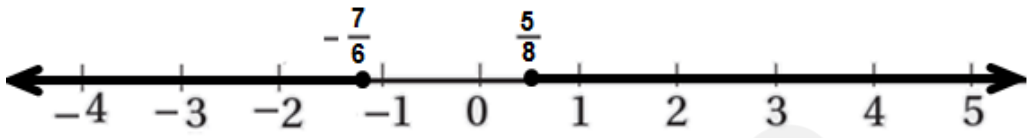


14

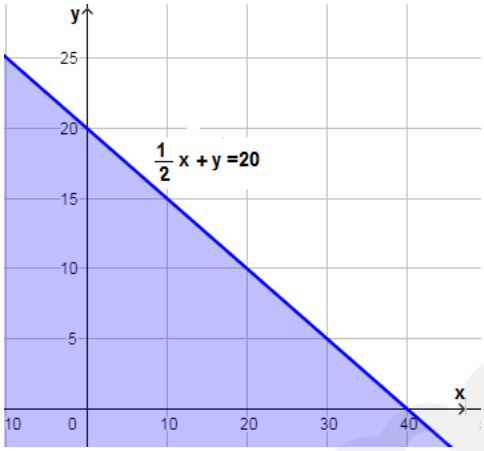
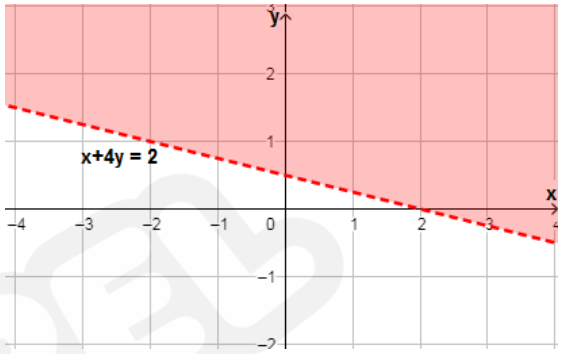
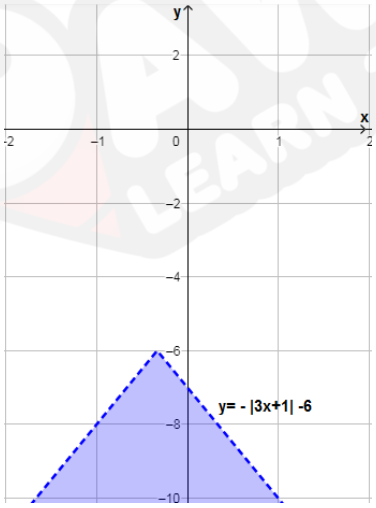
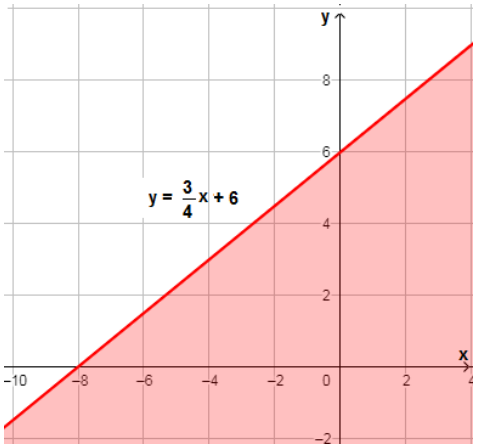
$x \leq -3$ or $x \geq 0$

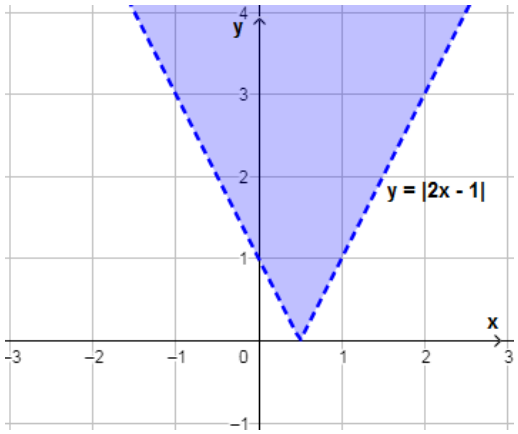
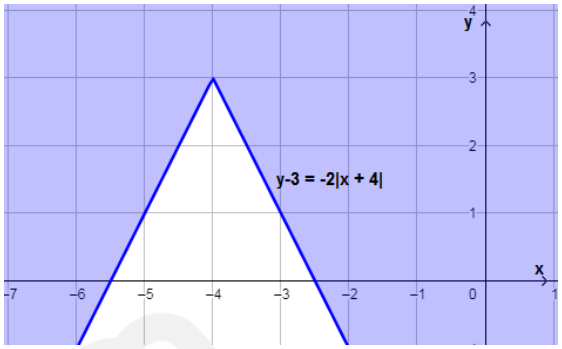
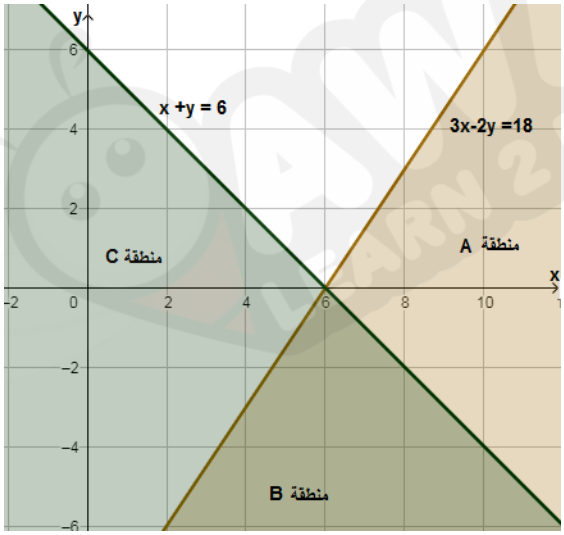
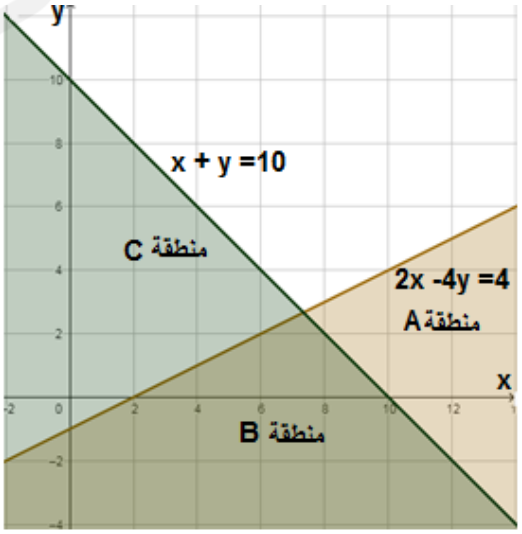
مجموعة الحل:$(-\infty, -3] \cup [0, \infty)$

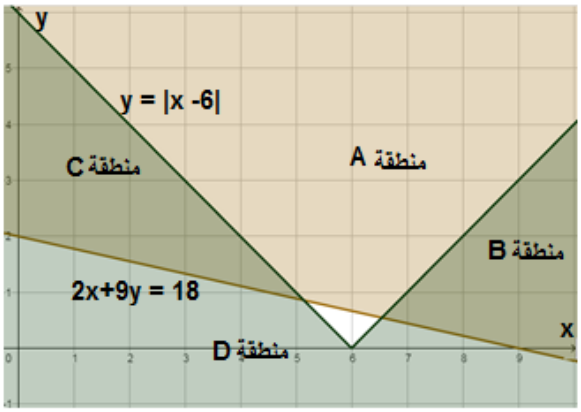
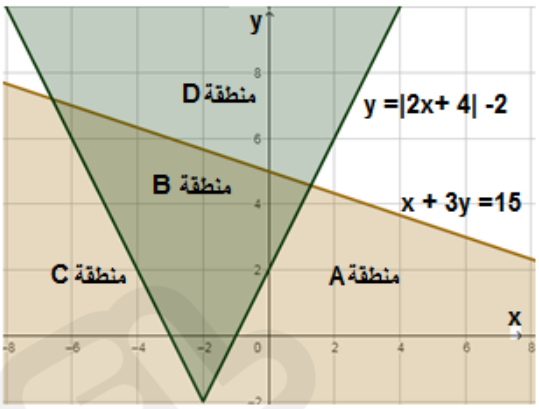
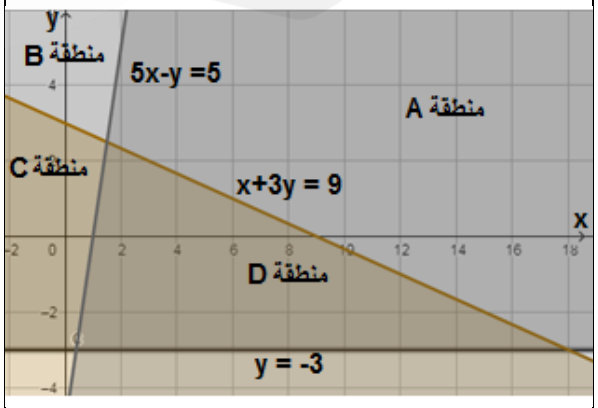
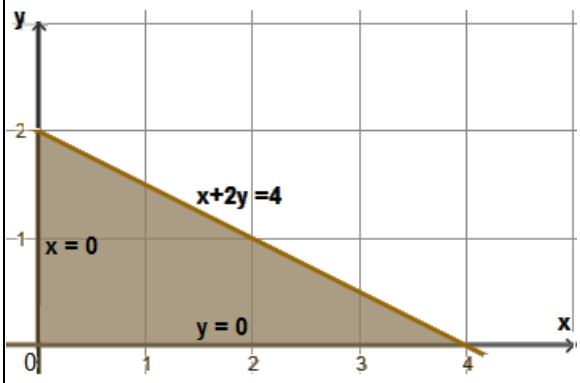


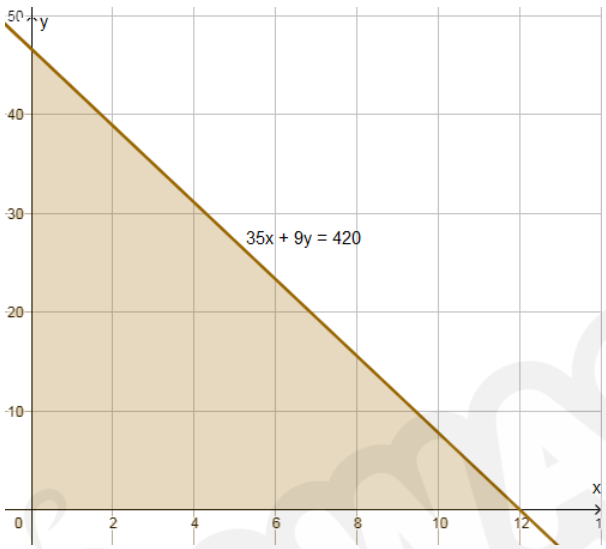
15	$x \leq -\frac{7}{6}$ or $x \geq \frac{5}{8}$ مجموعة الحل:$(-\infty, -\frac{7}{6}] \cup [\frac{5}{8}, \infty)$ 
16	إجابة محتملة: $\|x-5\| \leq 3$
17	إجابة محتملة: $\|2x-1\| \geq 5$
18	أفرض أن بعد الأرض عن الشمس هو x مليون ميل، فيكون الفرق المطلق بين x والمتوسط أقل من 1.55مليون ميل أو يساويها. أي أن: $\|x - 92.95\| \leq 1.55$ $-1.55 \leq x - 92.95 \leq 1.55$ $92.95 - 1.55 \leq x \leq 92.95 + 1.55$ $91.4 \leq x \leq 94.5$ إذن، يتراوح بعد الأرض عن الشمس خلال العام ما بين 91.4، وَ94.5 مليون ميل.

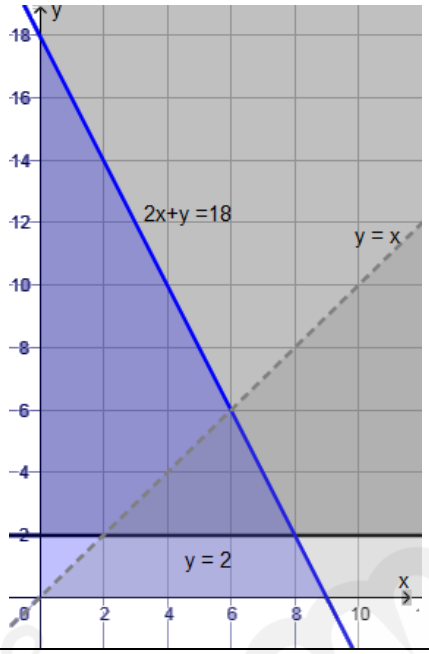
الدرس3 حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

الرقم	الإجابة	الرقم	الإجابة
1		2	
3		4	

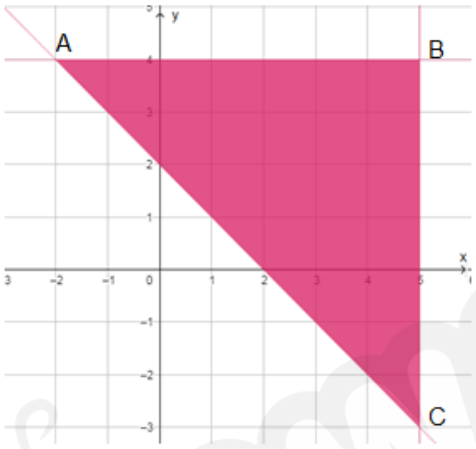
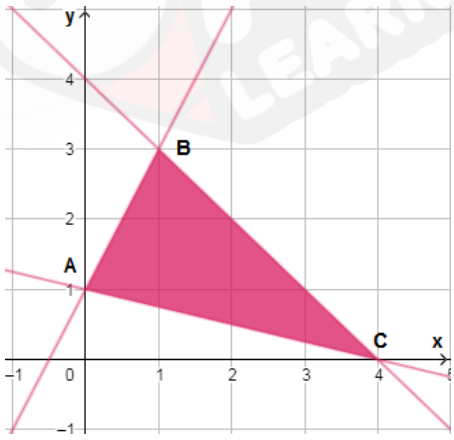
5		6	
7	 مناطق حل المتباينة $3x - 2y \leq 18$ هي A, B مناطق حل المتباينة $x + y \leq 6$ هي C, B منطقة حل النظام هي المنطقة المشتركة B.	8	 مناطق حل المتباينة $2x - 4y \geq 4$ هي A, B مناطق حل المتباينة $x + y \leq 10$ هي C, B منطقة حل النظام هي المنطقة المشتركة B.

9	 مناطق حل المتباينة $2x+9y \geq 18$ هي A,B,C مناطق حل المتباينة $y \leq \|x-6\|$ هي C, B, D منطقتا حل النظام هما المنطقتان المشتركتان B, C	10	 مناطق حل المتباينة $x+3y \leq 15$ هي A,B,C مناطق حل المتباينة $y \geq \|2x+4\|-2$ هي B, D منطقة حل النظام هي المنطقة المشتركة B.
11	 مناطق حل المتباينة $x+3y \leq 9$ هي C, D مناطق حل المتباينة $5x-y \geq 5$ هي A, D مناطق حل المتباينة $y \geq -3$ هي A, B, C, D منطقة حل النظام هي المنطقة المشتركة D.	12	 منطقة حل النظام هي المثلث المظلل.

13	أفرض أن عدد الطاولات هو x، وعدد الكراسي هو y، فتكون المتباينة المطلوبة هي: $35x + 9y \leq 420$
14	
15	يمكنه شراء 6 طاولات، و 20 كرسيًا؛ أو 4 طاولات ، و30 كرسيًا؛ أو 8 طاولات، و15 كرسيًا، أو غير ذلك من الأزواج من قيم x, y الصحيحة الواقعة في منطقة حل المتباينة.
16	$2x+y \leq 18$ $x > y$ $y \geq 2$

17	 منطقة الحل هي المثلث المحدود بالمستقيمات الثلاثة $y = 2, y = x, 2x + y = 18$
18	عدد مرات فوز الفريق وعدد مرات تعادله الممكنة هي أزواج الإحداثيات الصحيحة للنقاط الواقعة في منطقة الحل وهي: (3, 2), (4, 2), (4, 3), (5, 2),(5, 3) (5, 4), (6, 2), (6, 3),(6 4), (6, 5), (7, 2), (7, 3), (7, 4), (8, 2)

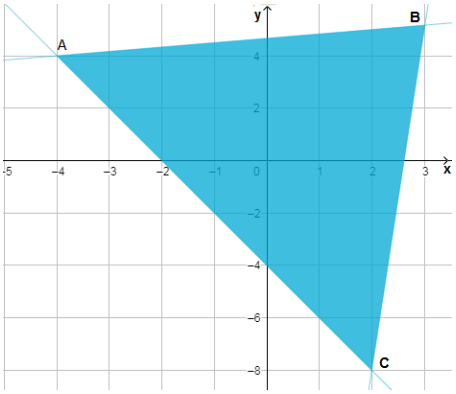
الدرس4 البرمجة الخطّية

رقم السؤال	الإجابة
1	 أصغر قيمة لاقتران الهدف هي2− عند النقطة A(−2, 4).
2	 أصغر قيمة لاقتران الهدف هي2 عند النقطة A(0, 1)

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	T=3x +y
A(−2, 4)	T = 3(−2) + 4 = −2
B(5, 4)	T = 3(5) + 4 = 19
C(5, −3)	T = 3(5) + (−3) = 12

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	P=5x +2y
A(0, 1)	P = 5(0) + 2(1) = 2
B(1, 3)	P = 5(1) + 2(3) = 11
C(4, 0)	P = 5(4) + 2(0) = 20

3

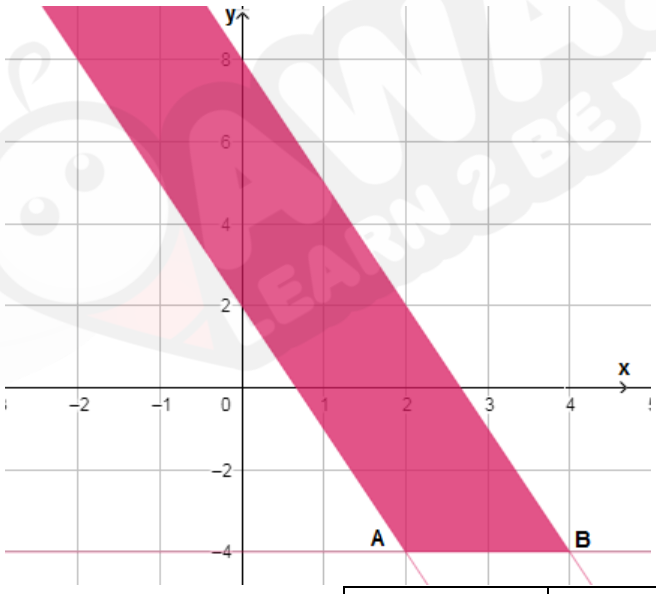


رؤوس منطقة الحلول الممكنة	R=10x−3y
A(−4, 4)	R=10(−4) −3(4) =−52
B(3, 5)	R=10(3) −3(5) =15
C(2, −8)	R=10(2) −3(−8) =44

إحداثيا النقطة B هما تقريبًا (3, 5)

أصغر قيمة لاقتران الهدف هي52− عند النقطة A(−4, 4)

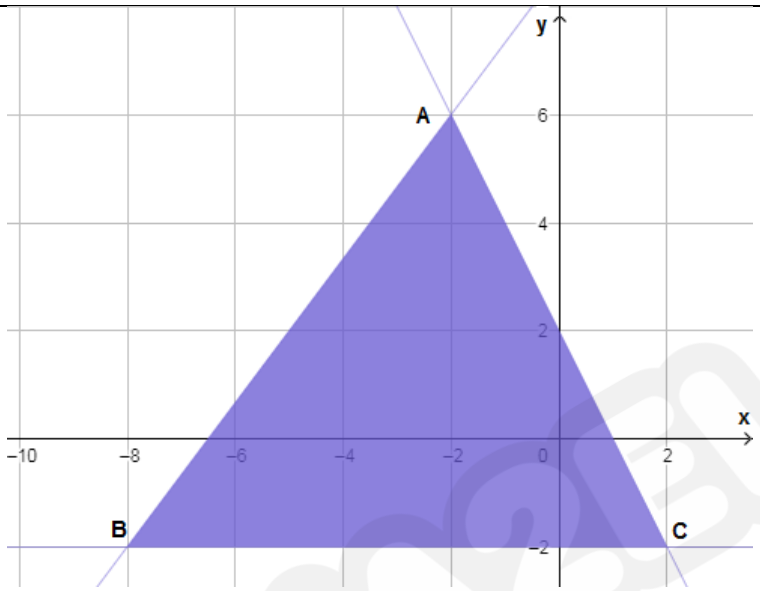
4



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	S=2x +14y
A(2, −4)	S = 2(2) + 14(−4) = −52
B(4, −4)	S = 2(4) + 14(−4) = −48

لايوجد لهذا الاقتران قيمة عظمى لأنه يأخذ قيمًا أكبر من 48−، فمثلًا عند (−2, 8) الواقعة في منطقة الحل تكون قيمته108 ويأخذ قيمًا أكبر من ذلك عند نقاط أخرى في منطقة الحل.

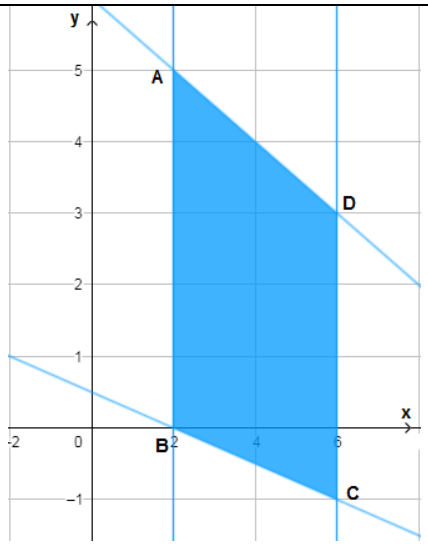
5



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	W = −3x − 6y
A(−2, 6)	W = −3(−2) + −6(6) = −30
B(−8, −2)	W = −3(−8) + −6(−2) = 36
C(2, −2)	W = −3(2) + −6(−2) = 6

أكبر قيمة لاقتران الهدف هي36عند النقطة B(−8, −2)

6



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	M=6x +7y
A(2, 5)	M = 6(2) + 7(5) = 47
B(2, 0)	M = 6(2) + 7(0) = 12
C(6, −1)	M = 6(6) + 7(−1) = 29
D(6, 3)	M = 6(6) + 7(3) = 57

أكبر قيمة لاقتران الهدف هي57 وتتحقق عند النقطة D(6, 3)

7

أفرض أن عدد الآلات العادية التي تصنعها الشركة هو x، وأن عدد الآلات العلمية هو y.

اقتران التكلفة هو:

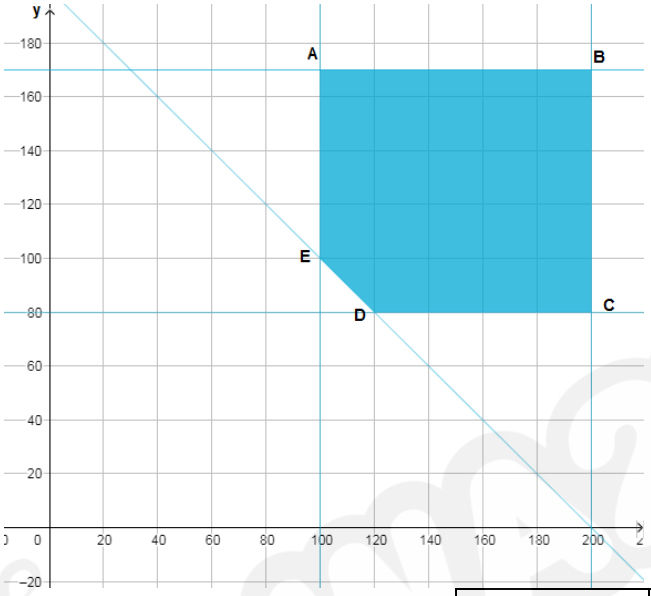
$C = 3.5x + 5y$

ضمن القيود الآتية:

$100 \leq x \leq 200$

$80 \leq y \leq 170$

$x + y \geq 200$



رؤوس منطقة الحلول الممكنة	C=3.5x +5y
A(100, 170)	C = 3.5(100) + 5(170) = 1200
B(200, 170)	C = 3.5(200) + 5(170) = 1550
C(200, 80)	C = 3.5(200) + 5(80) = 1100
D(120, 80)	C = 3.5(120) + 5(80) = 820
E(100, 100)	C = 3.5(100) + 5(100) = 850

تكون التكلفة أقل ما يمكن عندما تصنع الشركة 120 آلة حاسبة عادية، و80 آلة حاسبة علمية يوميًا.

8

اقتران الربح هو $P = 0.5x+ 3y$

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	P=0.5x +3y
A(100, 170)	P = 0.5(100) + 3(170) = 560
B(200, 170)	P = 0.5(200) + 3(170) = 610
C(200, 80)	P = 0.5(200) + 3(80) = 340
D(120, 80)	P = 0.5(120) + 3(80) = 300
E(100, 100)	P = 0.5(100) + 3(100) = 350

تحقق الشركة أكبر ربح يومي قدره 610 دنانير عندما تنتج 200 آلة عادية، و170 آلة علمية يوميًا.

9

أفرض أن عدد بيوت النوع الأول x، وعدد بيوت النوع الثاني y

اقتران الربح هو: $P = 4300x + 6400y$

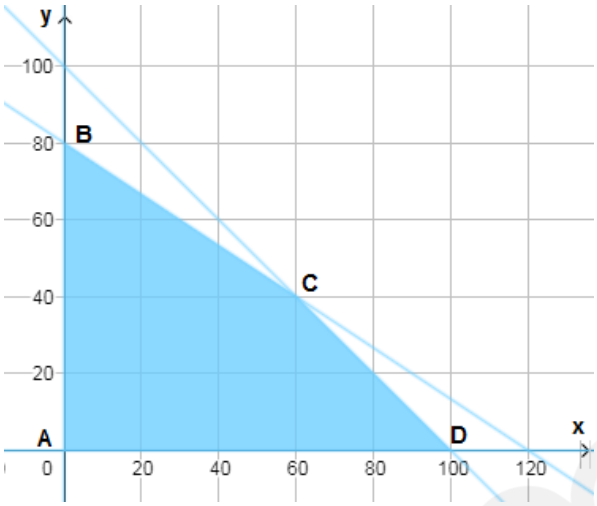
يخضع للقيود الآتية:

$x + y \leq 100$

$30000x + 45000y \leq 3600000$

$\rightarrow 2x + 3y \leq 240$

$x \geq 0, y \geq 0$

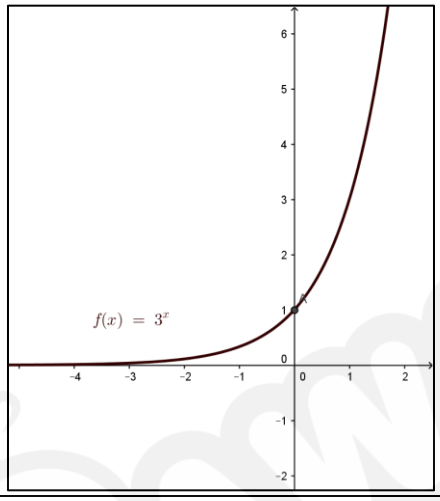


رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 4300x + 6400y$
A(0, 0)	$P = 4300(0) + 6400(0) = 0$
B(0, 80)	$P = 4300(0) + 6400(80) = 512000$
C(60, 40)	$P = 4300(60) + 6400(40) = 514000$
D(100, 0)	$P = 4300(100) + 6400(0) = 430000$

تحقق الشركة أكبر ربح وقدره 514000 دينار عندما تبني 60 بيتًا من النوع الأول، و40 بيتًا من النوع الثني.

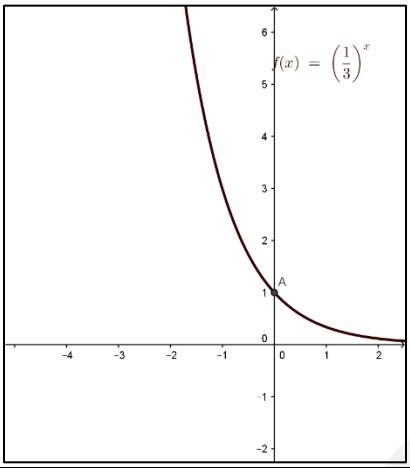
الوحدة الثانية: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

الدرس الأول: الاقترانات الأسية

اتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 61
a)    مجال الاقتران هو الاعداد الحقيقية ومداه الفترة $(0,\infty)$ وله خط تقارب افقي هو المحور x
b) ليس للإقتران مقطع x وله مقطع y هو 1 عند x=0
c) الاقتران متزايد
d) الاقتران واحد لواحد

اتحقق من فهمي مثال 2 صفحة 63

a)



مجال الاقتران هو الاعداد الحقيقية ومداه الفترة $(0,\infty)$
وله خط تقارب افقي هو المحور x

b)

ليس للإقتران مقطع x وله مقطع y هو 1 عند x=0

c)

الاقتران متناقص

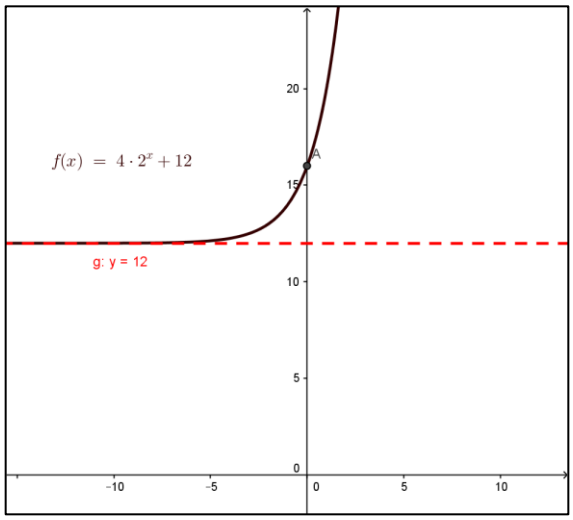
d)

الاقتران واحد لواحد

اتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 65

a)

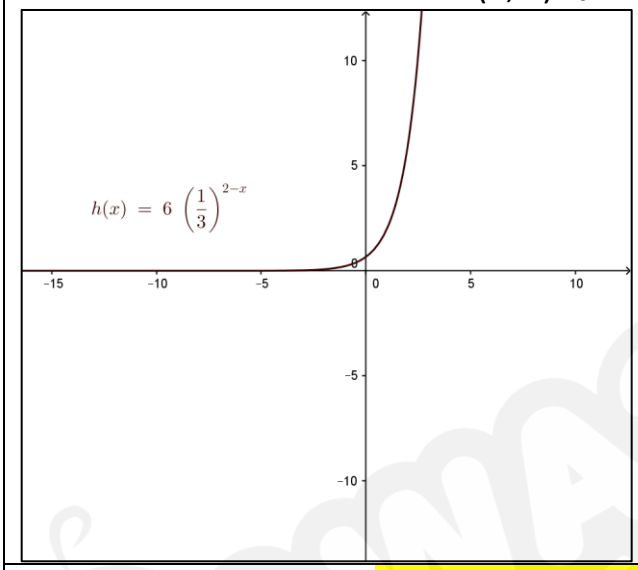
خط التقارب الافقي y=12
مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R
المدى في الفترة $(12,\infty)$



b)

خط التقارب الافقي هو محور x

مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(0,\infty)$



اتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 66

a)

$$N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow N(30) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{30}} = \frac{1}{2}$$

كمية السيزيوم 137المتبقية بعد 30 سنة هي $\frac{1}{2}g$

b)

$$N(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\Rightarrow 0.25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\Rightarrow (0.5)^2 = (0.5)^{\frac{t}{30}}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{t}{30} \Rightarrow t = 60$$

إذن بعد 60 سنة يتبقى من (السيزيوم 137) $0.25g$

اتحقق من فهمي مثال 5 صفحة 67

a)

$$r = 2.4\% \Rightarrow r = 0.024$$

$$\Rightarrow 1 + r = 1.024$$

$$\Rightarrow A(t) = 84370(1.024)^t$$

b)

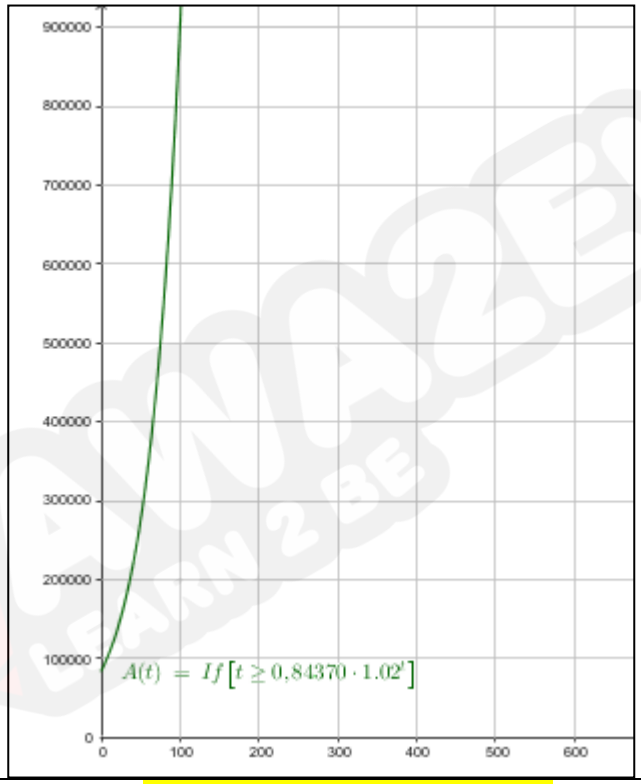
عام 2015 هو القيمة الابتدائية أي عند t=0 فعند عام 2050 تكون قيمة t=35

$$\Rightarrow A(t) = 84370(1.024)^t$$

$$A(35) = 84370(1.024)^{35} \approx 193502$$

فيكون عدد السكان عام 2050 تقريبا 193502 نسمة

c)



اتحقق من فهمي مثال 6 صفحة 69

a)

$$r = 10\% \Rightarrow r = 0.1$$

$$\Rightarrow 1 - r = 0.9$$

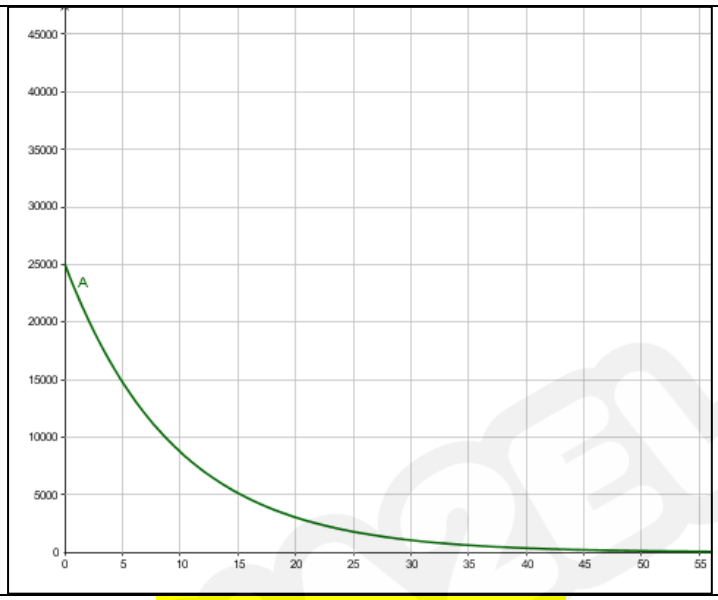
$$\Rightarrow A(t) = 25000(0.9)^t$$

b)

$$A(t) = 25000(0.9)^t$$

$$\Rightarrow A(5) = 25000(0.9)^5 = 14762.25\ JD$$

c)



اتحقق من فهمي مثال 7 صفحة 70

a)

$$P(t) = 34.706e^{0.0097t}$$

عام 2015 تكون t=0

$$\Rightarrow P(0) = 34.706e^{0} = 34.706$$

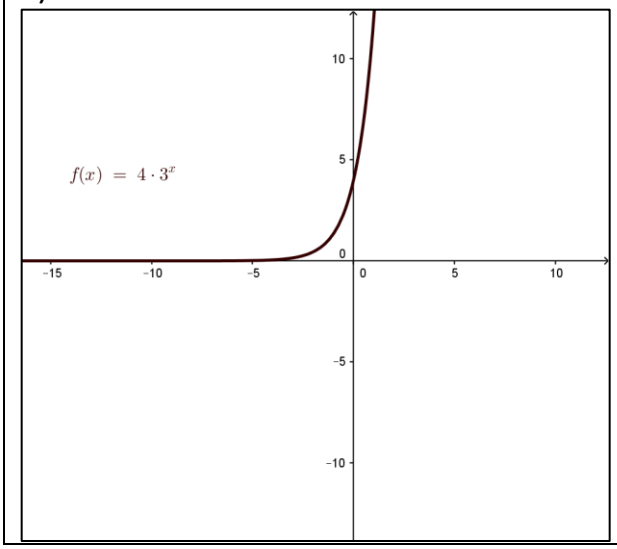
b)

عام 2030 تكون t=15

$$\Rightarrow P(15) = 34.706e^{0.0097\times 15}$$
$$= 34.706e^{0.1455}$$
$$\approx 40$$

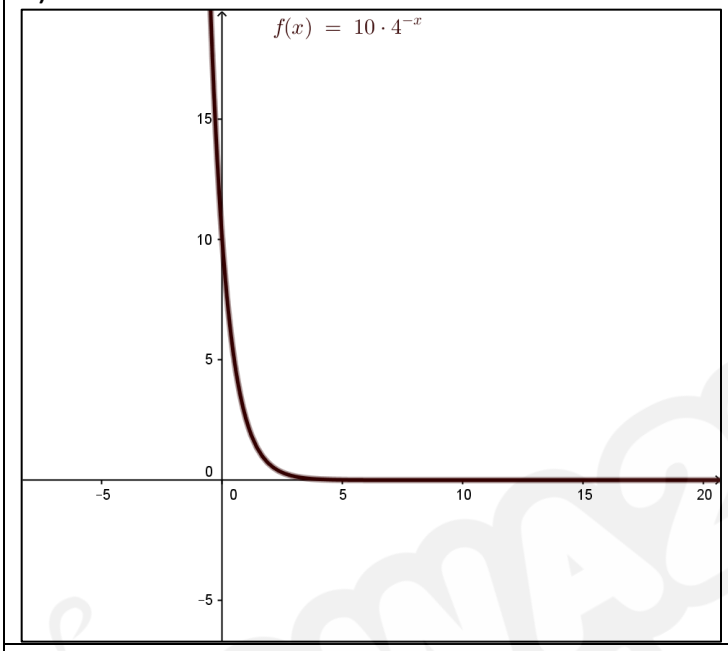
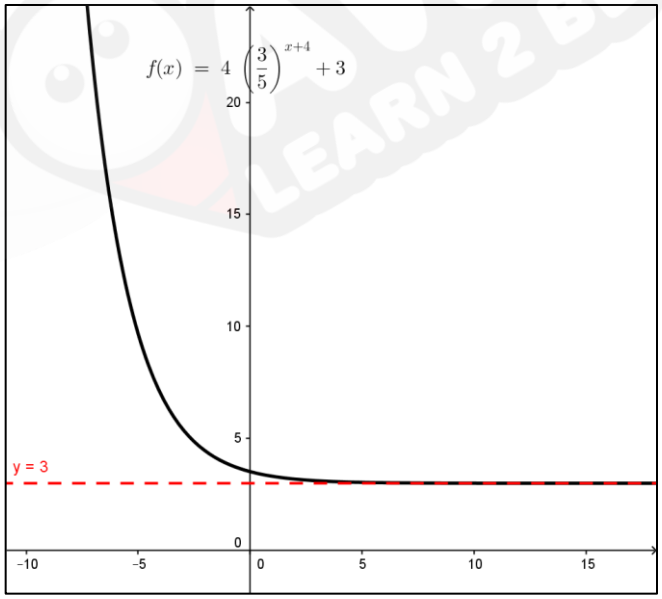
اتدرب وأحل المسائل صفحة 71

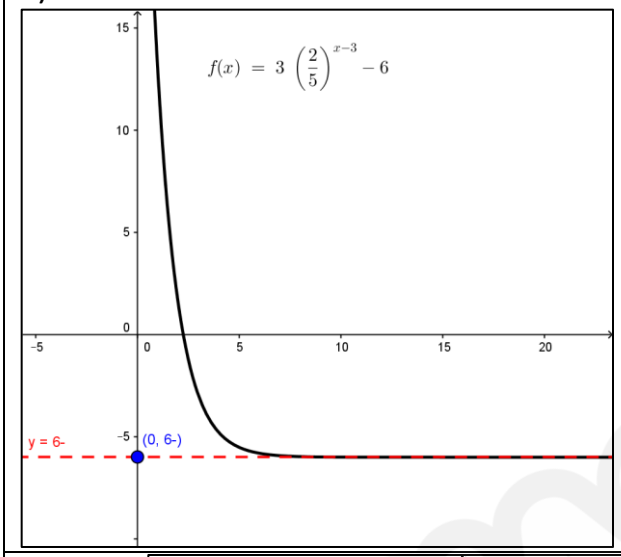
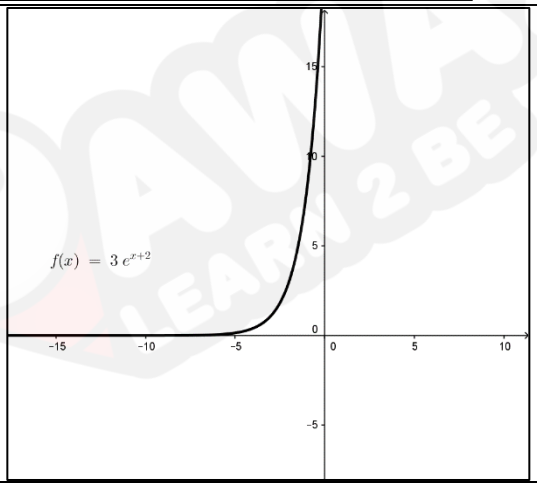
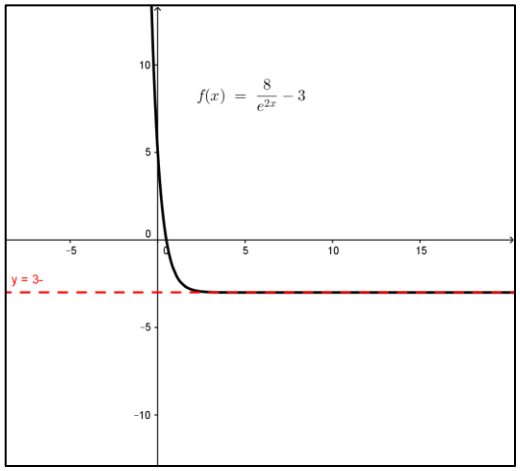
1)



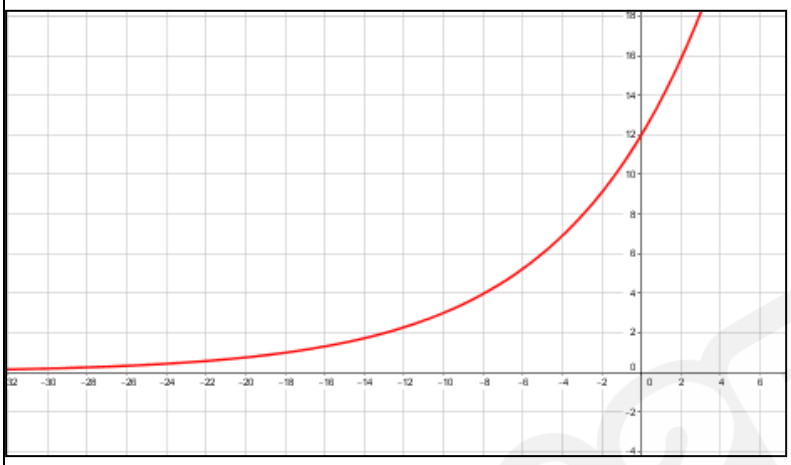
مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R

المدى في الفترة $(0,\infty)$

2)  	مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(0,\infty)$
3)  	مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة $(3,\infty)$

4)  	مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة (∞,6-)
5)  	مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة (∞,0)
6)  	مجال الإقتران الاعداد الحقيقية R المدى في الفترة (∞,3-)

7)



خط التقارب الافقي هو محور x

8)

أجد المقطع y

$$f(x) = 12(2)^{\frac{x}{5}}$$
$$\Rightarrow f(0) = 12(2)^{\frac{0}{5}}$$
$$= 12 \Rightarrow y = 12$$

وهذا يعني أن طول الشجرة الحالي هو 12 قدم لأن x=0 تمثل الوقت الحاضر

9)

من الرسم البياني يتضح أن عدد الخلايا في البداية (عند h=0) هو a=200 خلية

10)

من الرسم البياني أجد أن قيمة عدد خلايا البكتيريا A عند h=2 هو 440 خلية وهو إقتران نمو أسي إذن:

$$A(2) = 440$$
$$a = 200$$
$$A(h) = a(1+r)^h$$
$$\Rightarrow 440 = 200(1+r)^2$$

بالقسمة على 200

$$\Rightarrow 2.2 = (1+r)^2$$
$$\Rightarrow 1 + r \approx 1.48$$
$$\Rightarrow r \approx 0.48 = 48\%$$

11)

$$A(h) = a(1.48)^h$$

12)

$$a = 200 \Rightarrow 3a = 600$$

من الرسم نجد قيمة h عند A=600 فيكون تقريبا 2.8 ساعة

13)

$$y = k(2)^x + c$$
$$(0,10) \Rightarrow 10 = k(2)^0 + c$$
$$\Rightarrow 10 = k + c \Rightarrow k = 10 - c \ldots\ldots 1$$
$$(-1,7) \Rightarrow 7 = k(2)^{-1} + c$$
$$\Rightarrow 7 = \frac{k}{2} + c$$
$$\Rightarrow 14 = k + 2c \ldots\ldots 2$$

بتعويض المعادلة 1 في 2

$$14 = 10 - c + 2c \Rightarrow c = 4$$
$$\Rightarrow k = 10 - 4 = 6$$

14)

$$y = k(2)^x + c$$
$$k = 6\ , c = 4$$
$$\Rightarrow y = 6(2)^x + 4$$

بتعويض x=3

$$\Rightarrow y = 6(2)^3 + 4$$
$$\Rightarrow y = 52$$

15)

ثمن الدراجة عند شرائها أي عند t=0 وهو 1000JD

16)

من الرسم أجد أن ثمن الدراجة عند t=2 هو P(2)=500
وبما أن الثمن عند t=0 هو a=1000 إذن:

$$P(t) = a(1 - r)^t$$
$$\Rightarrow 500 = 1000(1 - r)^2$$

بالقسمة على 1000

$$\Rightarrow 0.5 = (1 - r)^2 \Rightarrow 1 - r \approx 0.7$$
$$\Rightarrow r \approx 0.3 = 30\%$$

17)

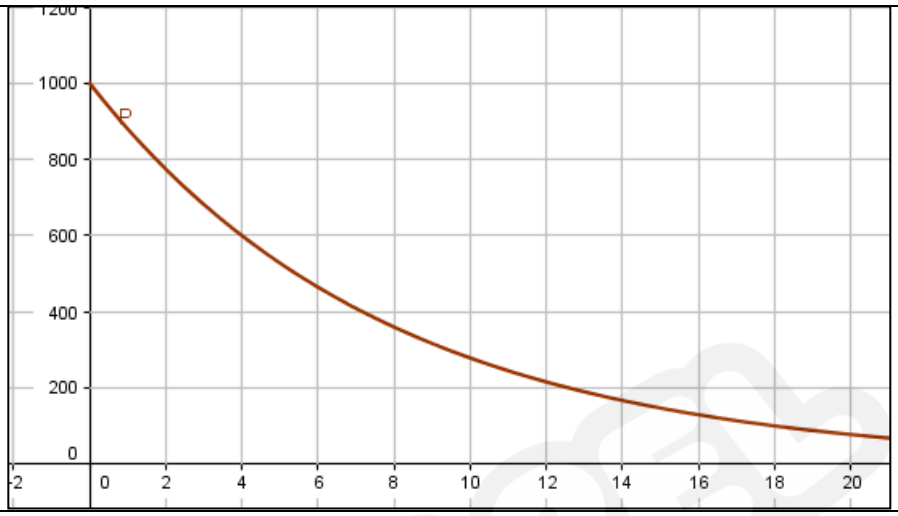
$$P(t) = 1000(0.7)^t$$

18)

عند سطح البحر تكون h=0 أي أن الضغط عند البداية يكون 1000

$$P(h) = a(1 - r)^h$$
$$P(h) = 1000(1 - 0.12)^h$$
$$P(h) = 1000(0.88)^h$$

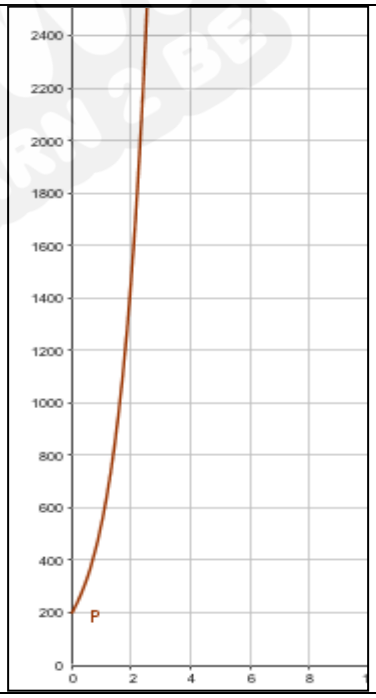
19)



20)

$$P(t) = 200(e)^t$$
$$P(3) = 200(e)^3 \approx 4017$$

21)



22)

$$r = 40\% = 0.4$$
$$\Rightarrow 1 - r = 0.6$$
$$\Rightarrow M(t) = m(0.6)^t$$

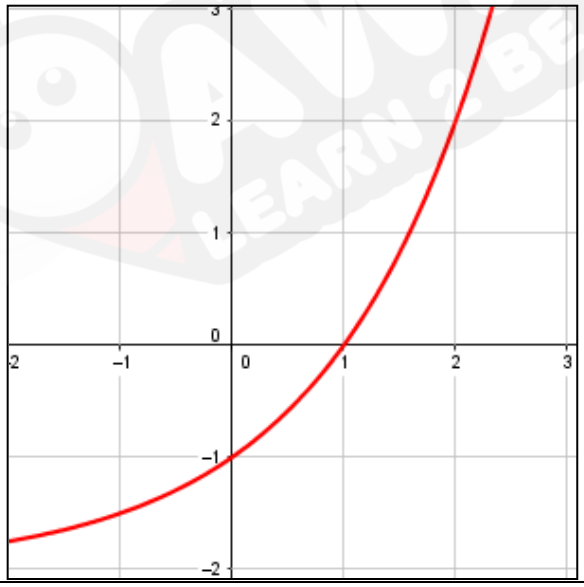
23)

خطأ، لأن الرسم البياني ليس على شكل الإقتران الأسي حيث أن الإقتران الأسي المتزايد يكون مقعرا للأعلى وليس للأسفل

24)

$$P = e^{2x}$$
$$\Rightarrow P = (e^{x})^{2}$$
$$\Rightarrow e^{x} = \sqrt{P} = P^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow e^{3x} = P^{\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow e^{-2x} = P^{-1} = \frac{1}{P}$$
$$\Rightarrow e^{-x} = P^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow e^{2x+1} = P \times e \approx 2.7P$$
$$\Rightarrow e^{4x} = P^{2}$$

25)



الإقتران الأسي يقطع محور x إذا كان على صورة $f(x) = ab^{x} + c$ حيث $c < 0$ مثل $f(x) = 2^{x} - 2$ حيث يكون تمثيله البياني كما في الشكل المجاور:

26)

$$g(x) = \frac{1}{16}(4)^{x} = \frac{4^{x}}{4^{2}} = 4^{x-2} = fx)$$
$$\Rightarrow g(x) = f(x)$$

الدرس الثاني: الاقترانات اللوغاريتمية

اتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 74
a) $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$
b) $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$
c) $\log_4 \frac{1}{256} = -4 \Leftrightarrow 4^{-4} = \frac{1}{256}$
d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$
اتحقق من فهمي مثال 2 صفحة 74
a) $25^2 = 625 \Leftrightarrow \log_{25} 625 = 2$
b) $81^{\frac{1}{2}} = 9 \Leftrightarrow \log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
c) $10^{-4} = \frac{1}{10000} \Leftrightarrow \log_{10} \frac{1}{10000} = -4$
d) $19^0 = 1 \Leftrightarrow \log_{19} 1 = 0$
اتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 75
a) $\log_8 64 = y \Rightarrow 8^y = 64$ $\Rightarrow 8^y = 8^2 \Rightarrow y = 2$ $\Rightarrow \log_8 64 = 2$
b) $\log_{11} \sqrt{11} = y \Rightarrow 11^y = 11^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\log_{11} \sqrt{11} = \frac{1}{2}$
c) $\log_{25} 5 = y$ $\Rightarrow 25^y = 5 \Rightarrow 5^{2y} = 5$ $\Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

d)

$$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = y \Rightarrow 2^y = 2^{-3} \Rightarrow y = -3$$

اتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 76

a)

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

b)

$$\log_{19} \sqrt{19} = \log_{19} 19^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

c)

$$\log_{18} 18 = 1$$

d)

$$4^{\log_4 15} = 15$$

اتحقق من فهمي مثال 5 صفحة 78

a)

$$\log 1200 \approx 3.08$$

b)

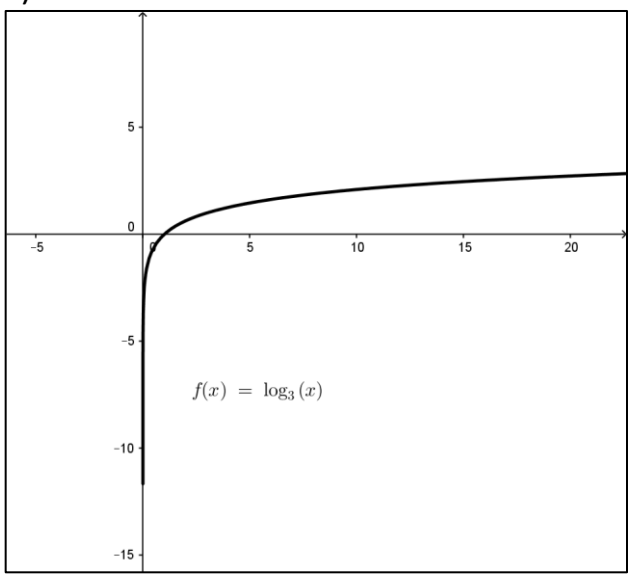
$$\log(6.3 \times 10^5) \approx 5.8$$

c)

$$\ln 0.00025 \approx -8.29$$

اتحقق من فهمي مثال 6 صفحة 80

a)



المجال في الفترة $(0,\infty)$

المدى الاعداد الحقيقية R

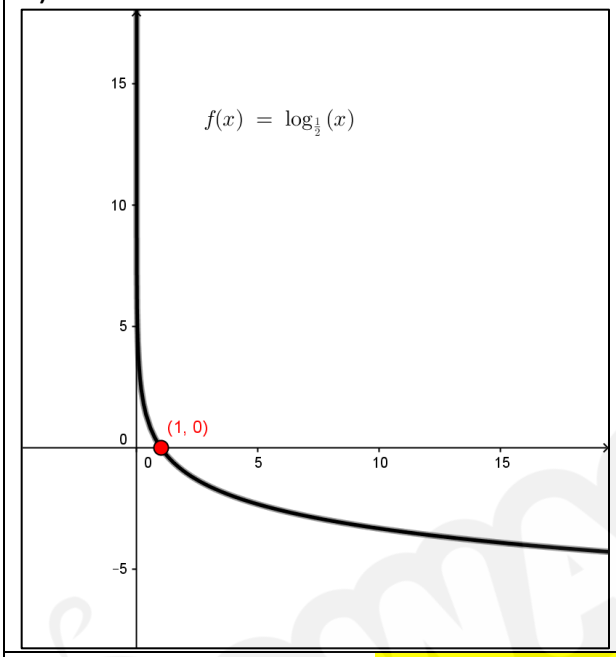
الإقتران متزايد

ليس له مقطع y

مقطع x هو x=1

له خط تقارب رأسي هو محورy

b)



المجال في الفترة $(0,\infty)$

المدى الاعداد الحقيقية R

الإقتران متناقص

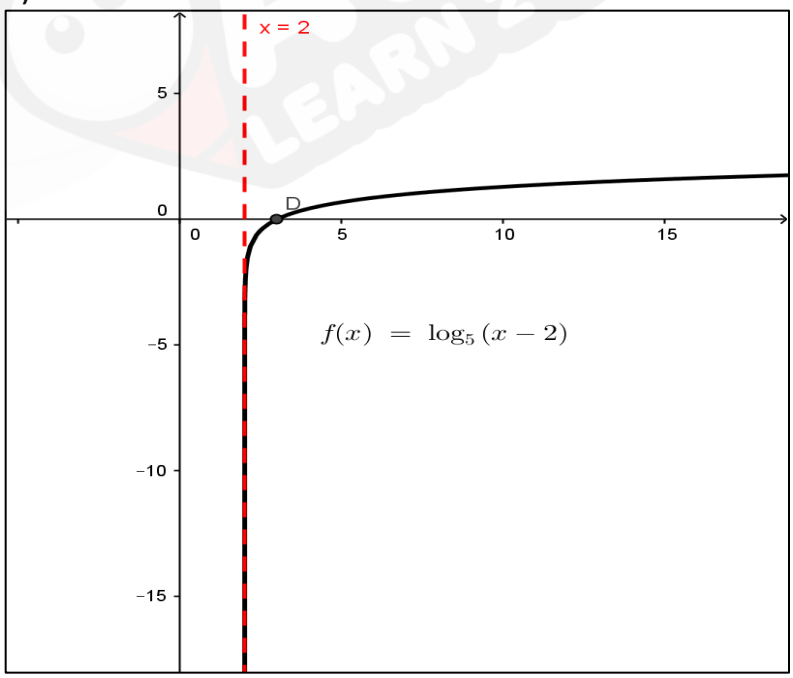
ليس له مقطع y

مقطع x هو x=1

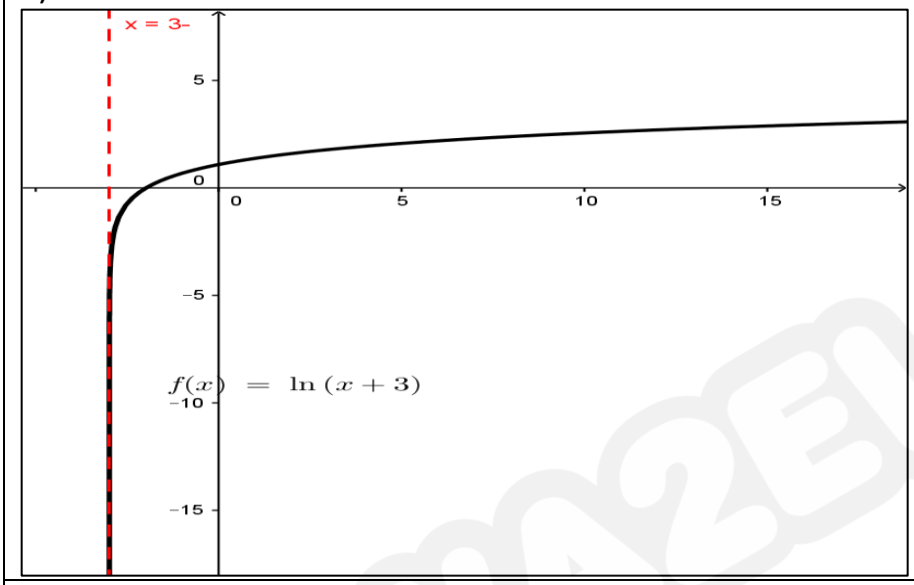
له خط تقارب رأسي هو محور y

اتحقق من فهمي مثال 7 صفحة 82

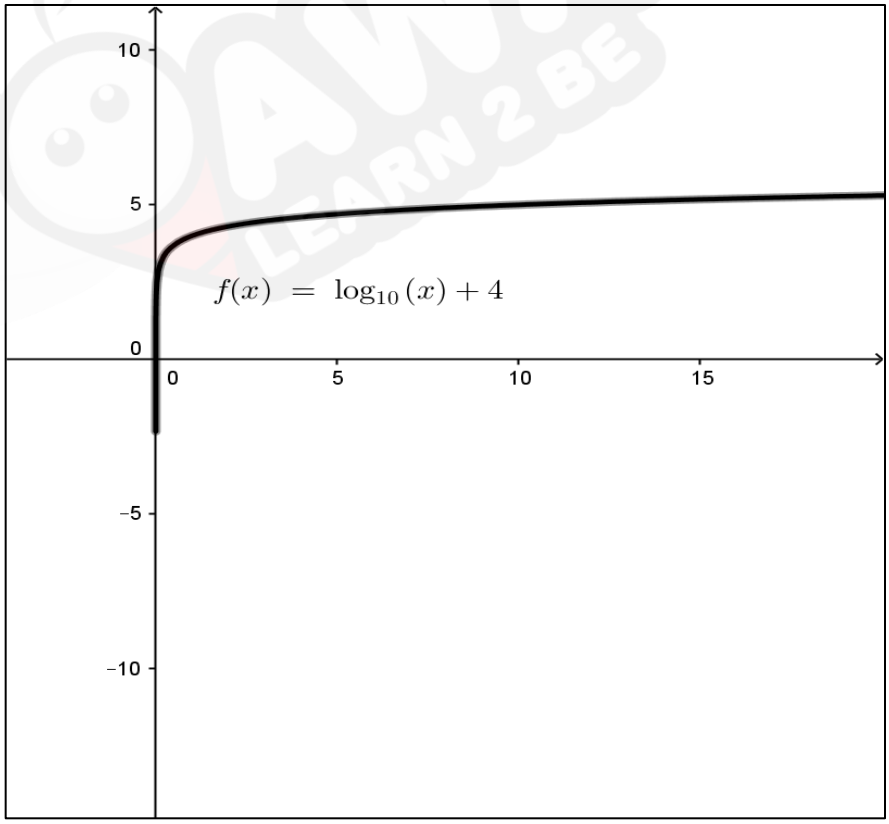
a)



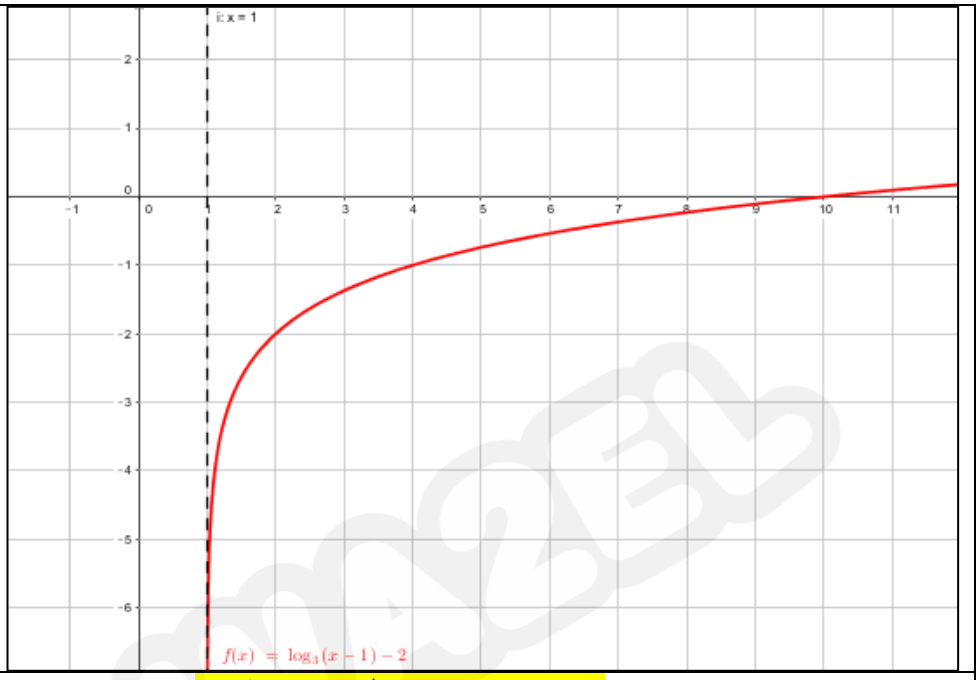
b)



c)



d)



اتحقق من فهمي مثال 8 صفحة 83

$$p^H = -\log[H^+]$$
$$p^H = -\log(5.88 \times 10^{-7}) \approx 6.23$$

إذن الشامبو حمضي

أتدرب وأحل المسائل صفحة 84

1)
$$\log_4 1025 = 5 \Leftrightarrow 4^5 = 1025$$

2)
$$\log_3 729 = 6 \Leftrightarrow 3^6 = 729$$

3)
$$\log_8 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

4)
$$\log_{25} 5 = 0.5 \Leftrightarrow 25^{0.5} = 5$$

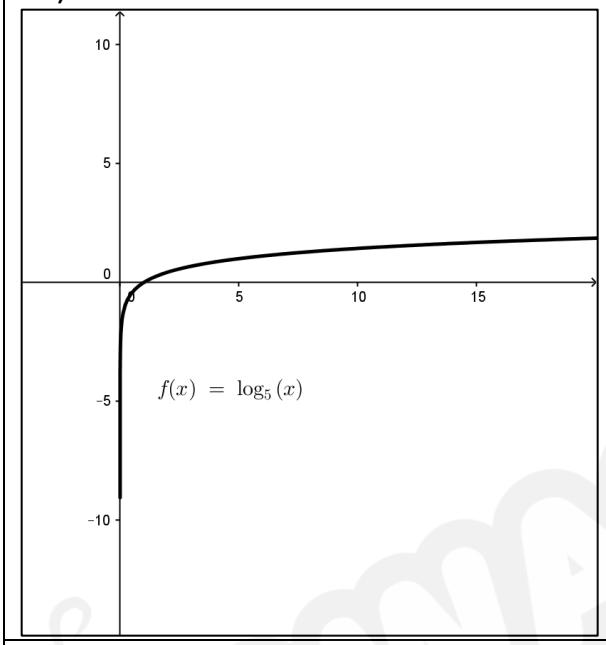
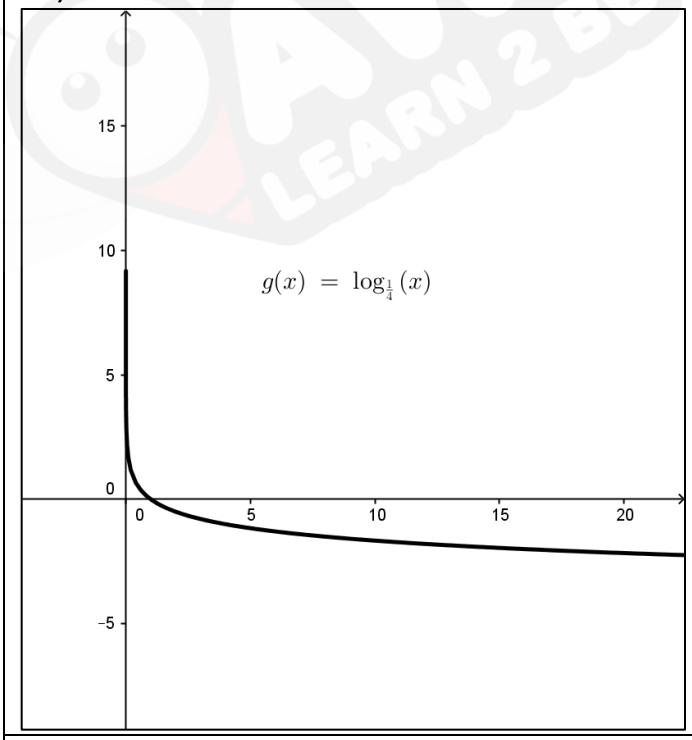
5)
$$6^3 = 216 \Leftrightarrow \log_6 216 = 3$$

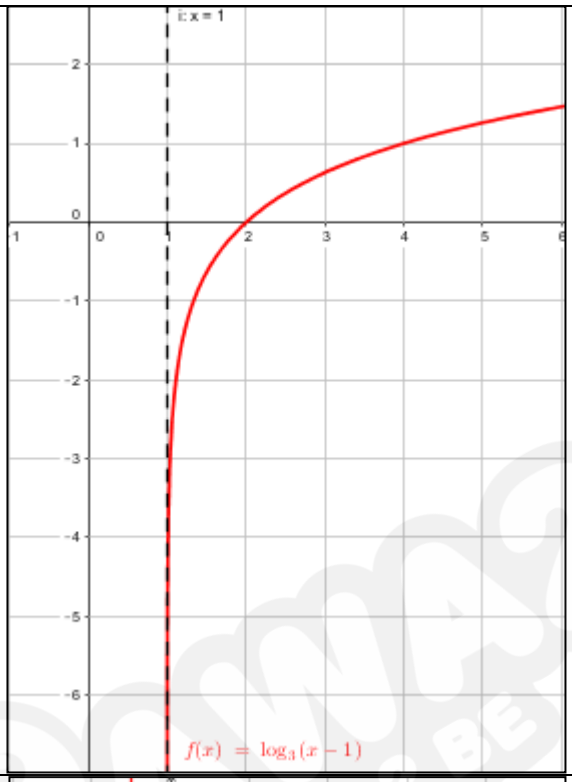
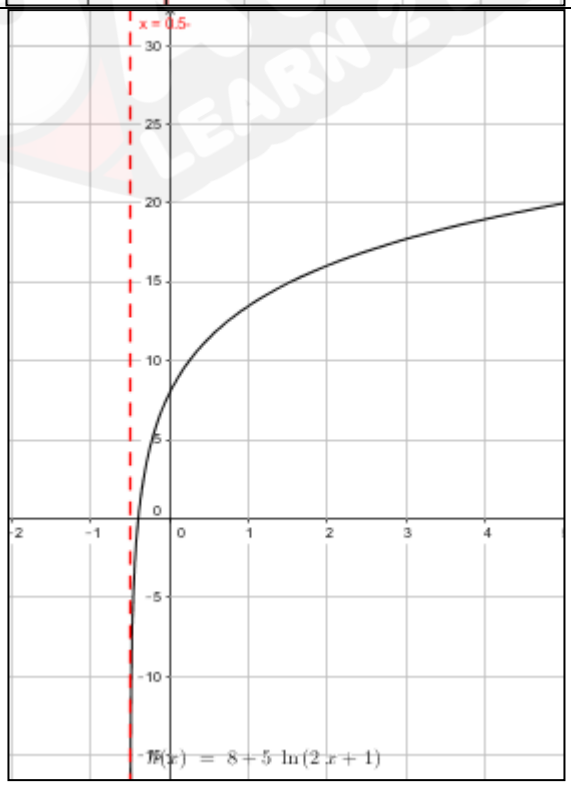
6)
$$3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$$

7)
$$5^4 = 625 \Leftrightarrow \log_5 625 = 4$$

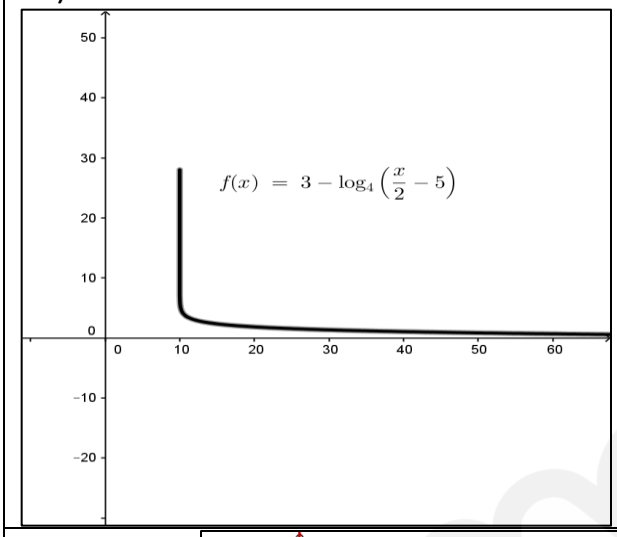
8)
$$2^{-3} = 0.125 \Leftrightarrow \log_2 0.125 = -3$$

9) $\log_2 256 = \log_2 2^8 = 8$
10) $\log_9 27 = y \Rightarrow 9^y = 27$ $3^{2y} = 3^3 \Rightarrow 2y = 3$ $\Rightarrow y = \frac{3}{2}$
11) $\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1$
12) $\log_{\frac{7}{2}} 1 = 0$
13) $e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
14) $\log_y \sqrt[3]{y} = \log_y y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$
15) $\log(0.1 \times 10^{-6}) = \log(10^{-1} \times 10^{-6}) = -7$
16) $6^{\log_6 2.8} = 2.8$
17) $\log\frac{1}{32} \approx -1.5$
18) $\log(2.77 \times 10^{-4}) \approx -3.6$
19) $\ln 0.000062 \approx -9.7$
20) $\ln \pi \approx 1.1$

21)  	المجال في الفترة (0,∞) المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متزايد ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y
22)  	المجال في الفترة (0,∞) المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متناقص ليس له مقطع y مقطع x هو x=1 له خط تقارب رأسي هو محور y

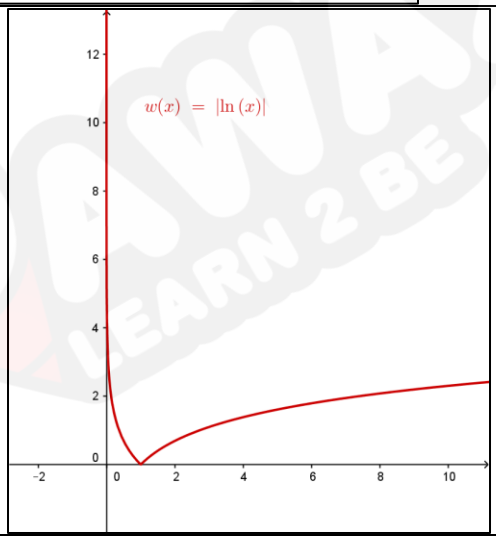
23)		المجال في الفترة (1,∞) المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متزايد ليس له مقطع y مقطع x هو x=2 له خط تقارب رأسي هو x=1
24)		المجال في الفترة (0.5-,∞)المدى الاعداد الحقيقية R الإقتران متزايد له مقطع y هو y=8 مقطع x هو x=-0.4 له خط تقارب رأسي هو x=-0.5

25)



المجال في الفترة (∞,10)المدى
الاعداد الحقيقية R
الإقتران متناقص
ليس له مقطع y
ليس له مقطع x
له خط تقارب رأسي هو x=10

26)



المجال في الفترة (0,∞)
المدى الاعداد الحقيقية R
الإقتران متناقص في الفترة (0,1)
ومتزايد في الفترة (1,∞)
ليس له مقطع y
مقطع x هو x=1
له خط تقارب رأسي هو محور y

27)

$$S(t) = 78 - 15\log(t+1)$$
$$S(0) = 78 - 15\log 1 = 78$$

28)

$$S(t) = 78 - 15\log(t+1)$$
$$S(4) = 78 - 15\log(5) \approx 67.5$$

29)

$$f(x) = \log_a x$$
$$2 = \log_a 2$$
$$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

30)

$$f(x) = \log_c x$$
$$-4 = \log_c \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c^{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow c^4 = 2 \Rightarrow c = 2^{\frac{1}{4}}$$

31)

$$A = 2 - \log 100T$$
$$A = 2 - \log(100 \times 0.72) \approx 0.143$$

32)

$$A = 2 - \log 100T$$
$$0.174 = 2 - \log 100T$$
$$\log 100T = 2 - 0.174 = 1.826$$
$$\Rightarrow 100T = 10^{1.826} \Rightarrow T = \frac{10^{1.826}}{100} \approx 0.67$$

33)

التمثيل البياني له هو الرسم b لأن مجاله في الفترة $(1,\infty)$

34)

التمثيل البياني له هو الرسم c لأن مقطع x هو x=3 والاقتران متزايد

35)

التمثيل البياني له هو الرسم a لأن مقطع x له هو x=3 والاقتران متناقص

36)

مقطع x عندما f(x)=0

$$f(x) = \log(x - k)$$
$$0 = \log(x - k)$$
$$x - k = 1 \Rightarrow x = k + 1$$

37)

عبارة صحيحة لأن الاقتران اللوغاريتمي يجب أن يكون ما بداخله قيمة موجبة

38)

عبارة صحيحة لأن مدى الاقتران اللوغاريتمي دائما الاعداد الحقيقية

39)

عبارة صحيحة لأن مجال الاقتران يكون دائما محدد بنقطة بداية وتشكل خط التقارب الرأسي للاقتران

40)

$$\log_5 28 = h \Rightarrow 5^h = 28 \Rightarrow h > 2$$
$$\log_6 32 = y \Rightarrow 6^y = 32 \Rightarrow y < 2$$
$$\log_7 40 = z \Rightarrow 7^z = 40 \Rightarrow z < 2$$

إذن الاقتران الاكبر هو $\log_5 28$

الدرس الثالث: قوانين اللوغاريتمات

اتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 88
a) $\log_b 12 = \log_b 3 \times 4 = \log_b 3 + \log_b 4$ $\approx 0.68 + 0.86 = 1.54$
b) $\log_b 9 = \log_b 3^2$ $= 2\log_b 3 \approx 2 \times 0.68 = 1.36$
c) $\log_b 0.75 = \log_b \frac{3}{4}$ $\log_b 3 - \log_b 4$ $\approx 0.68 - 0.86 = -0.18$
d) $\log_b \frac{1}{3} = \log_b 1 - \log_b 3$ $\approx 0 - 0.68 = -0.68$
اتحقق من فهمي مثال 2 صفحة 89
a) $\log_3 a^2 bc^3$ $= \log_3 a^2 + \log_3 b + \log_3 c^3$ $= 2\log_3 a + \log_3 b + 3\log_3 c$
b) $\ln a^2\sqrt{a-1} = \ln a^2 + \ln(a-1)^{\frac{1}{2}}$ $= 2\ln a + \frac{1}{2}\ln(a-1)$
c) $\log\left(\frac{x^2-1}{x^3}\right) = \log(x^2-1) - \log x^3$ $= \log(x^2-1) - 3\log x$
d) $\log_b\left(\frac{x^2 y}{b^3}\right) = \log_b x^2 + \log_b y - \log_b b^3$ $= 2\log_b x + \log_b y - 3$
اتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 91
a) $\ln 25 + \ln 4 = \ln 25 \times 4 = \ln 100 = 2\ln 10$

b)

$$\ln(3x+1)-\ln(3x^2-5x-2)$$
$$=\ln\left(\frac{3x+1}{3x^2-5x-2}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{3x+1}{(3x+1)(x-2)}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)=\ln 1-\ln(x-2)$$
$$=-\ln(x-2)$$

c)

$$\frac{1}{2}(\log_2(a^2+ab)-\log_2 a)$$
$$=\frac{1}{2}(\log_2 a(a+b)-\log_2 a)$$
$$=\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2(a+b)-\log_2 a)=\frac{1}{2}\log_2(a+b)$$

d)

$$\frac{1}{3}(\log_2 x+\log_2(x-4))$$
$$=\frac{1}{3}(\log_2 x(x-4))$$
$$\log_2(x^2-4x)^{\frac{1}{3}}$$
$$=\log_2\sqrt[x]{x^2-4x}$$

اتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 92

a)

$$\log_2 89=\frac{\log 89}{\log 2}\approx 6.48$$

b)

$$\log_5 19=\frac{\ln 19}{\ln 5}\approx 1.83$$

c)

$$\log_{\frac{1}{2}} 12=\frac{\ln 12}{\ln\frac{1}{2}}\approx -3.58$$

d)

$$\log_8 e^2=\frac{\ln e^2}{\ln 8}\approx\frac{2}{2.08}\approx 0.96$$

اتحقق من فهمي مثال 5 صفحة 96

a)

$$5^x = 8$$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

$$\log 5^x = \log 8 \Rightarrow x \log 5 = \log 8$$
$$\Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 5} \approx 1.2920$$

b)

$$4e^{2x} - 3 = 2$$
$$4e^{2x} = 5$$
$$e^{2x} = \frac{5}{4}$$
$$\ln e^{2x} = \ln 1.25$$
$$2x \approx 0.2231$$
$$x \approx 0.1116$$

c)

$$2^{x-1} = 3^{3x+2}$$
$$2^x \times 2^{-1} = 3^{3x} \times 3^2$$
$$\frac{2^x}{2} = 27^x \times 9$$
$$\left(\frac{2}{27}\right)^x = 18$$
$$x \log\left(\frac{2}{27}\right) = \log 18$$
$$x = \frac{\log 18}{\log\left(\frac{2}{27}\right)} \approx -1.8128$$

d)

$$9^x + 3^x - 20 = 0$$

بفرض $y = 3^x$

$$y^2 + y - 20 = 0$$
$$(y + 5)(y - 4) = 0$$
$y = -5 \Rightarrow 3^x = -5$ مرفوض

Or

$$y = 4 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow \log_3 4 = x$$
$$\Rightarrow x \approx 1.2619$$

اتحقق من فهمي مثال 6 صفحة 97

a)

$$5 + 2\ln x = 4$$
$$\ln x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = e^{-1}$$
$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

b)

$$\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1$$
$$\log_5(x+6)(x+2) = 1$$
$$x^2 + 8x + 12 = 5^1$$
$$x^2 + 8x + 7 = 0$$
$$(x+1)(x+7) = 0$$
$$x = -7 \text{ مرفوض}$$
$$or\ x = -1$$

اتحقق من فهمي مثال 7 صفحة 98

$$A(p) = \frac{\ln p}{-0.000121}$$
$$4000 = \frac{\ln p}{-0.000121}$$
$$\ln p = -0.484$$
$$p = e^{-0.484} \approx 0.62 = 62\%$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 98

1)

$$\log_a \frac{7}{11} = \log_a 7 - \log_a 11 \approx -0.196$$

2)

$$\log_a 77 = \log_a 7 \times 11 = \log_a 7 + \log_a 11 \approx 1.886$$

3)

$$\frac{\log_a 11}{\log_a 7} \approx 1.232$$

4)

$$\log_a \frac{1}{7} = \log_a 1 - \log_a 7 \approx 0 - 0.845 = -0.845$$

5)

$$\log_a 539 = \log_a 7^2 \times 11 = 2\log_a 7 + \log_a 11 \approx 2.731$$

6)

$$\log_7 11 = \frac{\log_a 11}{\log_a 7} \approx 1.232$$

7)

$$\log_a 11a^2 = \log_a 11 + 2\log_a a \approx 3.041$$

8)

$$\log_a \sqrt[3]{121} = \log_a 11^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_a 11 \approx 0.694$$

9)

$$\log_a \left(\frac{xy}{z}\right) = \log_a x + \log_a y - \log_a z$$

10)

$$\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$$

11)

$$\ln \sqrt[3]{5x^2} = \ln 5^{\frac{1}{3}} + \ln x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\ln 5 + \frac{2}{3}\ln x \approx 0.536 + \frac{2}{3}\ln x$$

12)

$$\log \sqrt{\frac{m^8 n^{12}}{a^3 b^5}} = \log \frac{m^4 n^6}{a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}}}$$
$$= 4\log m + 6\log n - \frac{3}{2}\log a - \frac{5}{2}\log b$$

13)

$$\ln 75 + \ln 2 = \ln 150$$

14)

$$\log x + \log(x^2 - 1) - \log 7 - \log(x + 1)$$
$$= \log\left(\frac{x(x^2 - 1)}{7(x + 1)}\right) = \log\left(\frac{x(x + 1)(x - 1)}{7(x + 1)}\right)$$
$$= \log\left(\frac{x(x - 1)}{7}\right) = \log\left(\frac{x^2 - x}{7}\right)$$

15)

$$\log_a \frac{a}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{ax}$$
$$= \log_a a - \log_a x^{\frac{1}{2}} - \log_a a^{\frac{1}{2}} - \log_a x^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - 2\log_a x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$
$$= 1 - \log_a x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \log_a x$$

16)

$$\frac{2}{3}(\ln(x^2-9)-\ln(x+3)+\ln(x+y))$$
$$=\frac{2}{3}(\ln(x-3)+\ln(x+3)-\ln(x+3)+\ln(x+y))$$
$$=\frac{2}{3}(\ln(x-3)+\ln(x+y))$$
$$=\ln\sqrt[3]{(x^2-3x-3y+xy)^2}$$

17)

$$\log_4 17=\frac{\log 17}{\log 4}\approx 2.0437$$

18)

$$\log_4\frac{1}{100}=\frac{\ln 0.01}{\ln 4}\approx -3.3219$$

19)

$$\log_9 0.0006=\frac{\log 0.0006}{\log 9}\approx -3.3763$$

20)

$$\log_8 120=\frac{\log 120}{\log 8}\approx 2.3022$$

21)

$$H=15500(5-\log p)$$
$$8850=15500(5-\log p)$$
$$0.57=5-\log p$$
$$\log p=5-0.57$$
$$\log p=4.43\Rightarrow p=10^{4.43}\approx 26915.35$$

22)

$$5^{x+2}=4^{1-x}$$
$$\Rightarrow 5^x\times 5^2=\frac{4^1}{4^x}$$
$$\Rightarrow 5^x\times 4^x\times 25=4$$
$$\Rightarrow 20^x=\frac{4}{25}$$
$$\Rightarrow \ln 20^x=\ln 0.16$$
$$\Rightarrow x=\frac{\ln 0.16}{\ln 20}\approx -0.6117$$

23)

$$e^x + e^{-x} - 6 = 0$$

بالضرب في e^x

$$e^{2x} + 1 - 6e^x = 0$$

بفرض $y = e^x$

$$y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$y = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$e^x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \approx 1.7627$$

$$or$$

$$e^x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \approx -1.7627$$

24)

$$3^{x^2+4x} = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow 3^{x^2+4x} = 3^{-3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = -3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \ \ or \ \ x = -3$$

25)

$$25^x - 3(5^x) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 5^{2x} - 3(5^x) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (5^x - 2)(5^x - 1) = 0$$

$$5^x = 2 \Rightarrow \log_5 2 = x$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 5} \approx 0.4307$$

$$or$$

$$5^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

26)

$$\log(x + 5) - \log(x - 3) = \log 2$$

$$\log\left(\frac{x + 5}{x - 3}\right) = \log 2$$

$$\frac{x + 5}{x - 3} = 2$$

$$x + 5 = 2x - 6 \Rightarrow x = 11$$

27)

$$\ln(x+8)+\ln(x-1)=2\ln x$$
$$\ln(x+8)(x-1)=\ln x^2$$
$$(x+8)(x-1)=x^2$$
$$x^2+7x-8=x^2 \Rightarrow 7x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{7}$$

28)

$$\log_3(\log_4 x)=0 \Rightarrow \log_4 x=3^0$$
$$\Rightarrow \log_4 x=1 \Rightarrow x=1$$

29)

$$\ln x^2=(\ln x)^2$$
$$2\ln x-(\ln x)^2=0$$
$$\ln x\,(2-\ln x)=0$$
$$\Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$$
$$or$$
$$\ln x=2 \Rightarrow x=e^2$$

30)

$$2\log 50=3\log 25+\log(x-2)$$
$$2(\log 5+\log 10)=3\log 5^2+\log(x-2)$$
$$2\log 5+2=6\log 5+\log(x-2)$$
$$2=4\log 5+\log(x-2)$$
$$\log(x-2)\,(5^4)=2$$
$$(x-2)(625)=10^2$$
$$625x-1250=100 \Rightarrow x=\frac{1350}{625}=2.16$$

31)

$$T=27+219e^{-0.032t}$$
$$100=27+219e^{-0.032t}$$
$$73=219e^{-0.032t}$$
$$\frac{1}{3}=e^{-0.032t} \Rightarrow \ln\frac{1}{3}=-0.032t \Rightarrow t=\frac{\ln\frac{1}{3}}{-0.032}\approx 34.332$$

32)

$$7e^{3k}-7e^{-3k}-48=0$$

بالضرب في e^{3k}

$$7e^{6k}-7-48e^{3k}=0$$

بفرض $y=e^{3k}$

$$7y^2-48y-7=0$$

$$y = \frac{48 \pm \sqrt{2108}}{14}$$

$$e^{3k} = \frac{48 + \sqrt{2108}}{14} \Rightarrow e^{3k} \approx 6.7 \Rightarrow 3k = \ln 6.7 \Rightarrow k \approx 0.634$$

$$or$$

$$e^{3k} = \frac{48 - \sqrt{2108}}{14} \Rightarrow e^{3k} \approx 0.15 \Rightarrow 3k = \ln 0.15 \Rightarrow k \approx -0.634$$

33)

$$\left|2^{x^2} - 8\right| = 3$$

$$2^{x^2} - 8 = 3 \qquad or \qquad 2^{x^2} - 8 = -3$$

$$2^{x^2} - 8 = 3 \Rightarrow 2^{x^2} = 11 \Rightarrow x^2 \log 2 = \log 11 \Rightarrow x^2 \approx 3.459 \Rightarrow x \approx 1.86$$

$$or$$

$$2^{x^2} - 8 = -3 \Rightarrow 2^{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 \log 2 = \log 5 \Rightarrow x^2 \approx 2.322 \Rightarrow x \approx 1.52$$

34)

$$\log_3 x = k \log_2 x$$

$$\frac{\log x}{\log 3} = k \frac{\log x}{\log 2}$$

$$\Rightarrow k = \left(\frac{\log x}{\log 3}\right)\left(\frac{\log 2}{\log x}\right) \Rightarrow k = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$$

35)

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f(x) = y$$

$$\Rightarrow y = e^x - e^{-x}$$

$$e^x(y) = e^{2x} - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(e^{2x} - 1) - \ln(e^x)$$

$$\Rightarrow \ln y = 2x - 1 - x$$

$$\Rightarrow \ln y = x - 1$$

$$\Rightarrow x = \ln y + 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x + 1$$

اختبار نهاية الوحدة صفحة 100

1) a	2) b	3) a	4) b	5) d	6) d

7)

$$\log_3 15 = \log_3 5 + \log_3 3 = c + 1$$

8)

$$\log_3 0.2 = \log_3 \frac{1}{5} = \log_3 1 - \log_3 5 = -c$$

9)

$$\log_3 125 = \log_3 5^3 = 3c$$

10)

$$\log_9 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 9} = \frac{c}{2}$$

11)

$$\frac{1}{4}\log_3(x-3) = \log_3 6$$

$$\log_3(x-3)^{\frac{1}{4}} = \log_3 6$$

$$\Rightarrow (x-3)^{\frac{1}{4}} = 6$$

$$\Rightarrow x - 3 = 1296 \Rightarrow x = 1299$$

12)

$$\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$$

$$\Rightarrow \log_4(x+3)(x-3) = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

13)

$$e^x + e^{-x} = 5 \Rightarrow e^{2x} + 1 = 5e^x$$

بفرض $y = e^x$

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow y \approx 4.791 \quad or \quad y \approx 0.209$$

$$\Rightarrow e^x = 4.791 \Rightarrow x = \ln 4.791 \approx 1.57$$

$$or$$

$$\Rightarrow e^x = 0.209 \Rightarrow x = \ln 0.209 \approx -1.57$$

14)

$$27 = 9^{x^2} \times 3^{5x}$$

$$3^3 = 3^{2x^2} \times 3^{5x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x = 3$$

$$(2x-1)(x+3)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \quad or\ x=-3$$

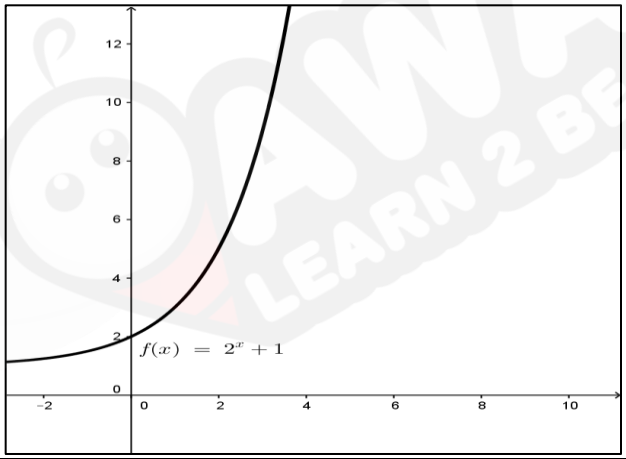
15)

$$T=18+12e^{0.002t}$$
$$T=18+12e^{0.002\times 5}$$
$$T\approx 30.121$$

16)

$$T=18+12e^{0.002t}$$
$$50=18+12e^{0.002t}$$
$$32=12e^{0.002t} \Rightarrow e^{0.002t}\approx 2.7$$
$$\Rightarrow e^{0.002t}=e \Rightarrow t=\frac{1}{0.002}=500$$

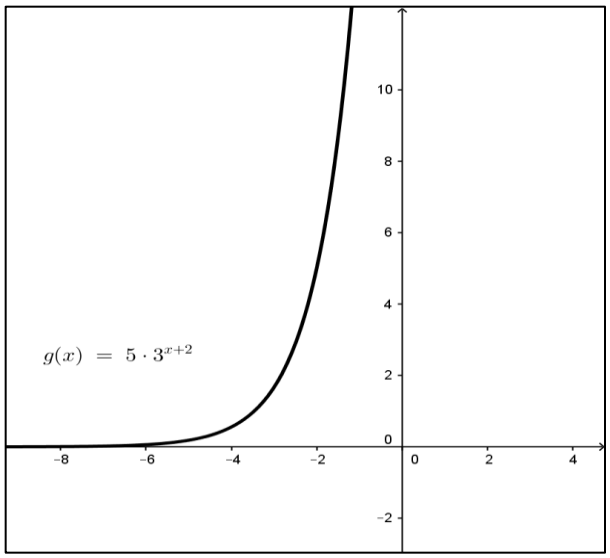
17)



المجال الاعداد الحقيقية R

المدى $(1,\infty)$

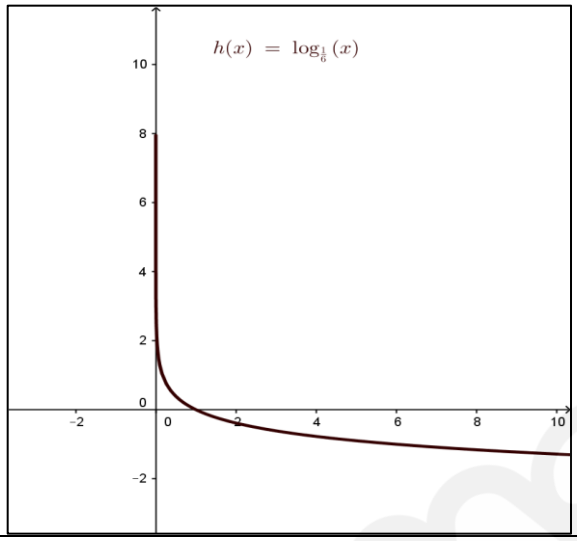
18)



المجالالأعداد الحقيقية R

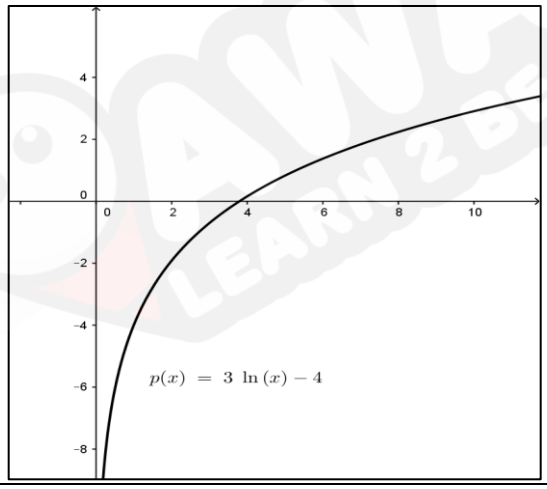
المدى $(0,\infty)$

19)



المجال $(0,\infty)$
المدى الأعداد الحقيقية R

20)



المجال $(0,\infty)$
المدى الأعداد الحقيقية R

21)

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$L = 10 \log\left(\frac{5500\, I_0}{I_0}\right)$$

$$L = 10 \log 5500 \approx 37.404$$

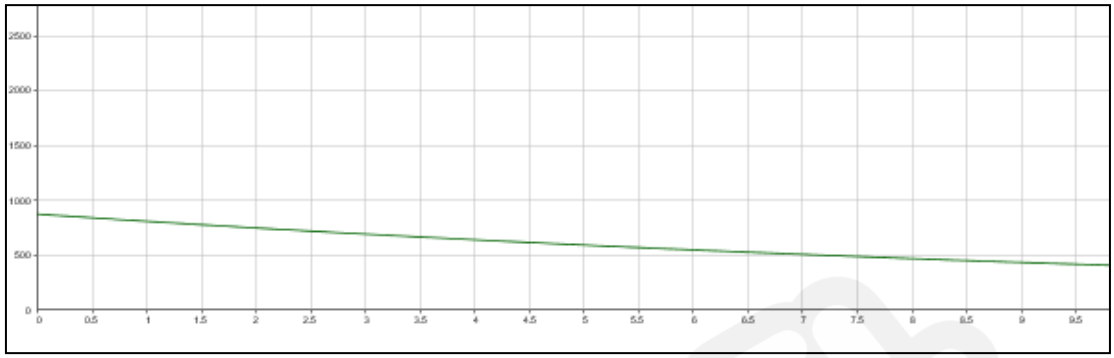
22)

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$32 = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$3.2 = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow 10^{3.2} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = 10^{3.2} I_0$$

23)



24)

$$N = 873e^{-0.078t}$$
$$N = 873e^{-0.078\times 10} \approx 400$$

25)

$$\log_a \sqrt{xyz} = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y + \log_a z)$$

26)

$$\ln\left(\frac{2}{3x^3y}\right) = \ln 2 - \ln 3 - 3\ln x - \ln y$$

27)

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

28)

$$\log_a x\sqrt{y} = \log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$$

29)

$$2\log x - \log(x+1) = \log\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

30)

$$\log(x^2-5x-14) - \log(x^2-4)$$
$$= \log\left(\frac{x^2-5x-14}{x^2-4}\right)$$
$$= \log\left(\frac{(x-7)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\right) = \log\left(\frac{x-7}{x-2}\right)$$

31) $4\log_b x - 2\log_b 6 - \frac{1}{2}\log_b y$ $= \log_b x^4 - \log_b 36 - \log_b \sqrt{y}$ $\log_b\left(\frac{x^4}{36\sqrt{y}}\right)$		
32) b	33) a	34) c