الرياضيات العلمي

وحدة التفاضل

جيل 2005

شرح مميز للوحدة كاملة

حلول جميع اسئلة الكتاب

حلول جميع اسئلة كتاب التمارين

اعداد الاستاذ

احمد الريالات

0788807123

الدرس الاول: الاشتقاق

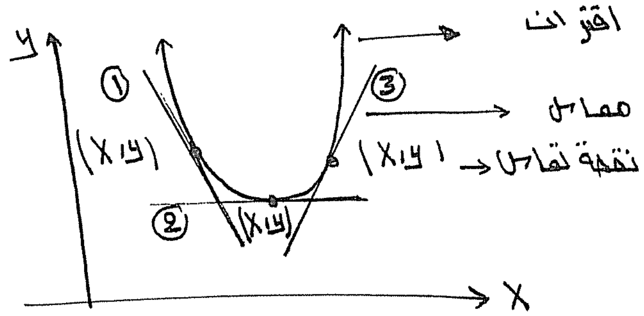
اولاً: المشتقة

① مشتقة الاقتران عند نقطة واقعة عليه هي ميل المنحنى عند هذه النقطة

② رمز المشتقة $\bar{F}(X)$

③ المماس خط مستقيم يمس الاقتران في نقطة واحدة فقط

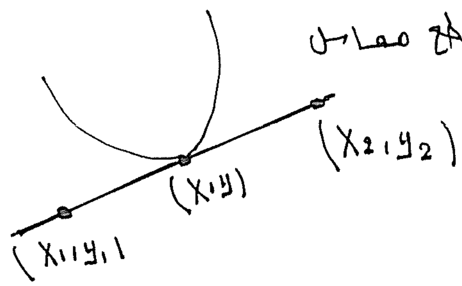
④ الاقتران مجموعة نقاط (X,Y) و التي يتم تمثيلها على المستوى البياني



* نلاحظ وجود 3 مماسات
* كل مماس له ميل خاص به
* لحساب الميل = المشتقة = $\bar{F}(X)$

$$m = \bar{F}(X) = \frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{X_2 - X_1}$$

مقطع مماس

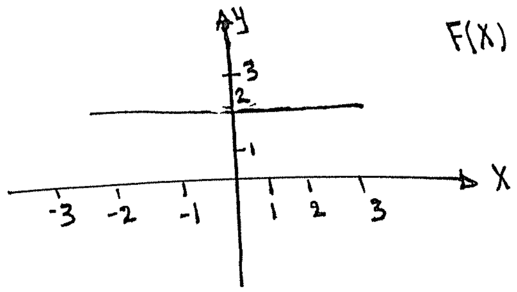


اختر ثم عوض نقطة تماس $= m = \bar{F}(X)$

$$\bar{F}(X) = m = \frac{y_2 - y_1}{X_2 - X_1}$$

مثال: جد $\bar{F}(X)$ عند نقطة التماس

$F(X) = 2$



$\bar{F}$

$F(X) = 2$

$\bar{F}(X) = 0$

او

نختار نقطتان على المماس

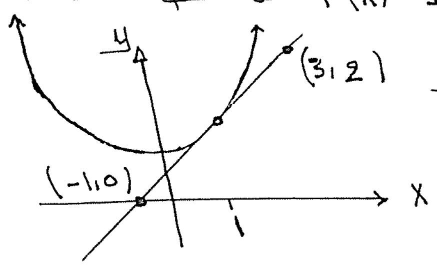
$(1,2)$ $(2,2)$

(X_1,y_1) (X_2,y_2)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{X_2 - X_1} = \frac{2-2}{2-1} = \frac{0}{1} = 0$$

مثال: جد $\bar{f}(X)$ عند نقطة التماس

$f(X) = X^2 + 1$



$f(X) = X^2 + 1$

$\bar{f}(X) = 2X$

$\bar{f}(1) = 2(1) = 2$

$(-1,0)$ $(3,2)$ $\bar{f}(1) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{3 - -1}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

ثانياً : شروط الاشتقاق

قبل البدء بعملية اشتقاق اي اقتران يجب البحث في الاتصال ثم الاشتقاق

[A] اقترانات دائماً متصلة

① كثيرات الحدود

② اقتران الجيب $\sin X$

③ اقتران الجتا $\cos X$

④ اقتران الجذر التكعيبي $F(X) = \sqrt[3]{X}$

⑤ اقتران القيمة المطلقة $F(X) = |X|$

عند القيمة التي تجعل داخل المطلق = 0
و تكون المشتقة عندها غير موجودة

$f(x) = |X - 7|$

$X - 7 = 0$

$X = 7$ المشتقة غير موجودة

[B] اقترانات نبحث اتصالها

① الاقتران الكسري

غير متصل عند القيم التي تجعل المقام = 0

② اقتران الجذر الزوجي

غير متصل عند القيم التي تجعل ما داخل الجذر سالباً

$F(X)$
- دائماً متصل
  1. اشتق مباشرة
  2. عوض
  3. احكم
- غير دائماً متصل
  - نبحث الاتصال
    - متصل
    - غير متصل

مثال: ضع (✓) او (X)

✓ ← يسمح الاشتقاق مباشرة

X ← يجب بحث الاتصال اولاً

① $F(X) = \sin X \,،\, X = \pi$ (   )

② $F(X) = \sqrt[3]{2X} \,،\, X = 2$ (   )

③ $f(X) = \sqrt{X} \,،\, X = 9$ (   )

④ $f(X) = \dfrac{1}{X-1} \,،\, X = 1$ (   )

الاشتقاق

① نشتق الاقتران و نعوض قيمة X

② الاقتران

* قابل الاشتقاق ← الناتج عدد
* غير قابل الاشتقاق ← $\dfrac{\text{عدد}}{0}$

جذر زوجي داخله سالبا

③ الاقتران المتشعب ←

الاقتران
- متصل
  - قابل
  - غير قابل
    - $\dfrac{\text{عدد}}{0}$
    - جذر زوجي داخله سالب
    - مشتقة يمين ≠ مشتقة يسار
- غير متصل
  - غير قابل الاشتقاق

مثال : جد $\bar{F}(X)$ لكل مايلي

① $F(X) = \sqrt{X}$ ، $X = -1$

عند تعويض $X = -1$ داخل الجذر فان الناتج سالب لا يسمح الاشتقاق

$\bar{F}(-1) =$ غير موجودة

② $F(X) = \dfrac{1}{X-2}$ ، $X = 2$

عند تعويض $X = 2$ داخل الكسر فان الناتج $\dfrac{1}{0}$ لا يسمح الاشتقاق

$\bar{F}(2) =$ غير موجودة

مثال: ضع اشارة (✓) او (X)

✓ ← المشتقة موجودة

X ← المشتقة غير موجودة

① $\bar{F}(X) = \dfrac{5}{X-7}$ ، $X = 7$

② $\bar{F}(X) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{X^2}}$ ، $X = 0$

③ $\bar{F}(X) = \dfrac{-1}{\sin X}$ ، $X = \pi$

④ $\bar{F}(X) = \dfrac{9}{\sqrt{X-4}}$ ، $X = 2$

مثال : جد $\bar{F}(1)$ لمايلي

$$F(X) = \begin{cases} X+1 & ، X < 1 \\ 3 & ، X \geq 1 \end{cases}$$

نبحث الاتصال اولاً

$F(1) = 3$

$\lim\limits_{X \to 1^+} F(X) = 3$

$\lim\limits_{X \to 1^-} F(X) = X+1 = 1+1 = 2$

$F(1) \neq \lim\limits_{X \to 1} F(X)$

$F(X)$ غير متصل $X=1$

$\bar{F}(1)$ غير موجودة

$$F(X) = \begin{cases} 2X^2 & ، X < 1 \\ 2 & ، X \geq 1 \end{cases}$$

$F(1) = \lim\limits_{X \to 1} F(X) = 2$

$$\bar{F}(X) = \begin{cases} 4X & ، X < 1 \\ 0 & ، X > 1 \end{cases}$$

$\bar{F}_+(1) = 0$

$\bar{F}_-(1) = 4(1) = 4$

$\bar{F}_+(1) \neq \bar{F}_-(1)$

$\bar{F}(1) =$ غير موجودة

* نهاية العدد لنهاية *

اولاً: الاستخدام

$$\lim_{X \to a} \frac{عدد}{0}$$

ناتج تعويض X داخل النهاية كان الناتج $\frac{عدد}{0}$

مثال:

$$\lim_{X \to 0} \frac{1}{X^2}$$

$$= \frac{1}{0}$$

ثانياً: خطوات الحل

[1] نجد النهاية من جهة اليمين واليسار لقيمة X

[2]

$$\frac{عدد}{\text{اكبر من صفر بقليل}} = +\infty$$

$$\frac{عدد}{\text{اقل من صفر بقليل}} = -\infty$$

[3] دائماً وابداً تكون النهاية والمشتقة غير موجودة عند كسور $\frac{عدد}{0}$

مثال: جد كل من النهايات التالية

① $\lim_{X \to 0} \frac{2}{X}$

$$\frac{2}{0}$$

ناتج التعويض $\frac{n}{0}$

1 نهاية يمين

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{2}{0^+} = \infty$$

لا

2 نهاية يسار

$$\lim_{X \to 0^-} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{X \to 0} \frac{2}{X} = \text{غير موجودة}$$

② $\lim_{X \to 0} \frac{6}{X^2}$

$$\frac{6}{0}$$

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{6}{(0^+)^2} = +\infty$$

$$\lim_{X \to 0^-} \frac{6}{(0^-)^2} = +\infty$$

لـ اقل من 0 اي سالب

عند تربيع السالب ينتج موجب

$$\lim_{X \to 0} \frac{6}{X^2} \quad \text{غير موجودة}$$

* ايجاد المشتقة باستخدام التعريف العام *

$$\bar{F}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h}$$

$F(X+h) \rightarrow$ عدد + h

((يتم التعويض داخل الاقتران))

$F(X) \rightarrow$ نعوض العدد فقط

$h \rightarrow$ تبقى كما هي

1. يتم تطبيق المعادلة الاساسية كاملة
2. نختصر (h) بسط مع (h) مقام
3. نعوض قيمة $h=0$ بعد الاختصار
4. ان لم يحدث الاختصار ننزل h البسط الى المقام و نطبق نهاية ∞

مثال: ابحث قابلية اشتقاق كل اقتران مما يلي عند قيمة X المعطاة

① $F(X) = X^2$ ، $X = 3$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{h}$$

$F(3+h)$

$F(X) = X^2$

$F(3+h) = (3+h)^2$

$F(3+h) = 9 + 6h + h^2$

$F(3)$

$F(X) = X^2$

$F(3) = (3)^2 = 9$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h + 9 - 9}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h}$$

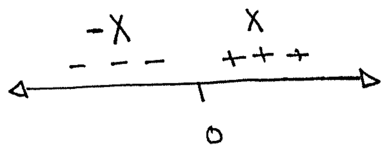
$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+6)}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} (0+6) = 6$$

② $F(X) = |X|$ ، $X = 0$

$|0|$ = اعادة تعريف

$X = 0$



$X > 0$

$F(X) = X$

$$F(X) = X \quad , \quad X > 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$$

$F(0+h)$

$F(X) = X$

$F(0+h) = h$

$F(0)$

$F(X) = X$

$F(0) = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$F(X) = -X \quad , \quad X < 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$$

$F(0+h)$

$F(X) = -X$

$F(0+h) = -h$

$F(0)$

$F(X) = -X$

$F(0) = -(0) = 0$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

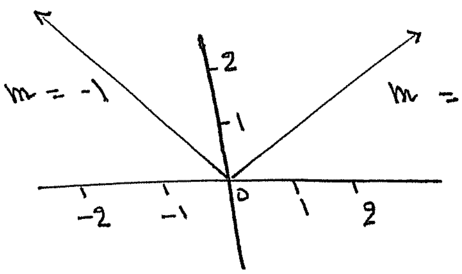
بما ان النهايتين من اليمين و اليسار
غير متساويتان

$F'(0)$ غير موجودة

$F(X)$ غير قابل اشتقاق عند $X=0$

الرسم البياني

$F(X)=|X|$



✓ يمثل الشكل تمثيل الاقتران $F(X)=|X|$

✓ لاحظ ان الاقتران متصل عند $X=0$

✓ لاحظ ان المشتقة غير موجودة عند $X=0$

✓ ميل المماس $X>0$ = 1

ميل المماس $X<0$ = -1

$\boxed{*}$ ملاحظة لاقتران القيمة المطلقة

قيمة X التي تجعل ما داخل المطلق صفر

الاتصال ← متصل عندها

الاشتقاق ← غير قابل اشتقاق عندها

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h * h^{-\frac{1}{3}}}$$

$$h^{1} * h^{-\frac{1}{3}} = h^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{h^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(0)^2}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{0}$$

نطبق النهاية ∞

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(0^+)^2}}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(0^-)^2}}$$

تربيع عدد اقل من صفر بقليل ← اكبر من صفر بقليل

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{0} = \infty$$

النهاية تؤول الى ما لا نهاية

$\bar{F}(X)$ غير موجودة عند $X = 0$

(2) $F(X) = X^{\frac{1}{3}}$ ، $X = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(X+h) - F(X)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$$

$$F(0+h) = F(h)$$

$$F(X) = \sqrt[3]{X}$$

$$F(h) = \sqrt[3]{h}$$

$F(0)$

$$F(X) = \sqrt[3]{X}$$

$$F(0) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

النهاية $\frac{0}{0}$ يجب اختصار

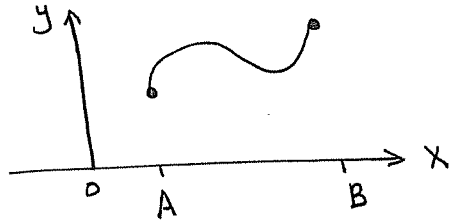
h بسط مع h مقام لكن لا يمكن الآن
↓ مباشرة

تنزيل h بسط الى المقام

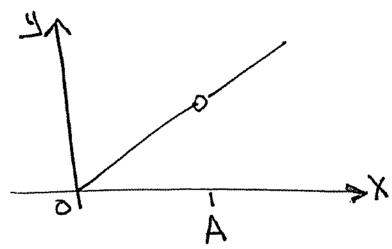
$$\sqrt[3]{h} = h^{\frac{1}{3}}$$

* رسمة F(X) لتحديد X غير قابلة الاشتقاق *

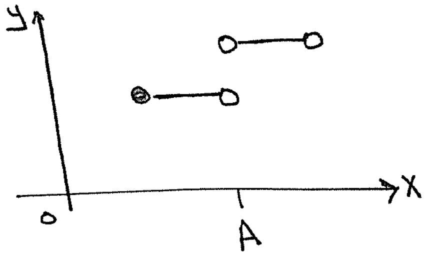
1 طرفي الاقتران ← اكبر واصغر عدد



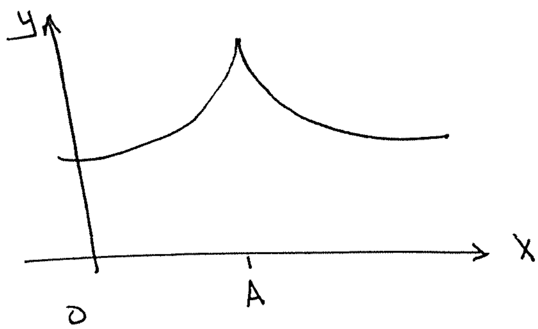
2 الثقب في الاقتران



3 القفزة ← انتقال لجزء من الرسم الى جزء اخر عن طريق فراغ

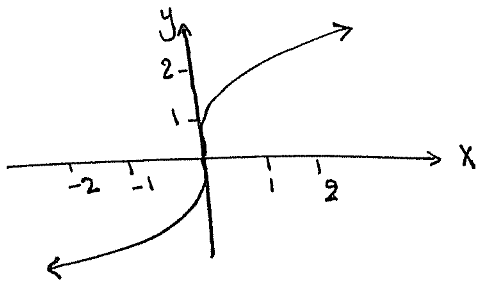


4 الزاوية // رأس حاد



※ نلاحظ الاقتران متصل X = A لكن غير قابل اشتقاق

5 مماس رأسيا



هو المماس الذي يقع على محور الصادات او يوازيه

ملخص قيم X التي عند F(X) قابل الاشتقاق

① المنحنى عند X متصل

② المنحنى عند X املس

غير ذلك غير قابل الاشتقاق

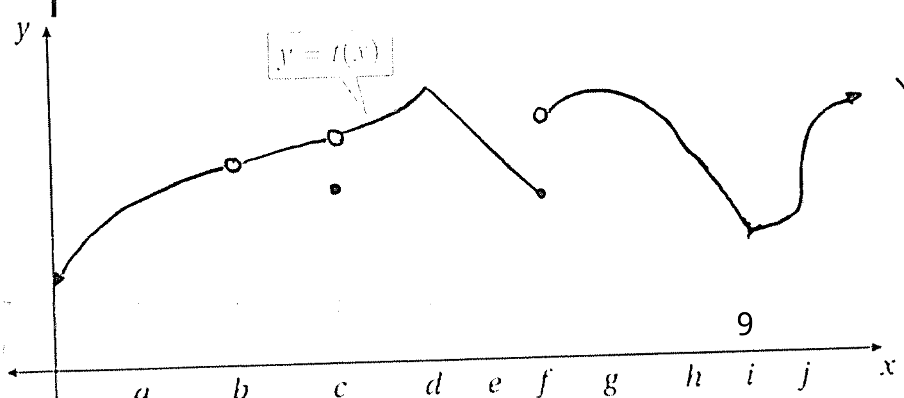
مثال: يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران t(X) احدد قيم X التي لا يكون عندها الاقتران t(X) قابلة الاشتقاق مبرراً اجابتي

$X = \{b, c, d, f, i, j\}$

b, c, f → الاقتران غير متصل

d, i → رأس حاد

j → مماس رأسي



* قابلية الاشتقاق على فترة *

① يكون الاقتران $f(x)$ قابلاً للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

② اذا كان قابلاً للاشتقاق على جميع قيم X التي تحوي الفترة

③ اما اذا كان $f(x)$ غير قابلاً للاشتقاق عند واحدة او اكثر من هذه القيم

④ فلا يمكن القول انه قابل للاشتقاق (a,b)

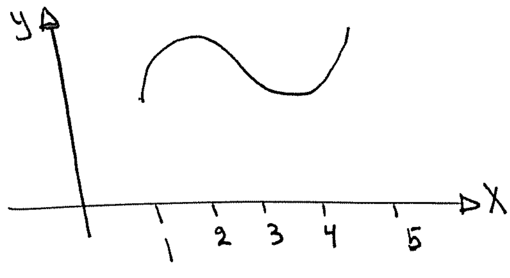
* ملاحظة : ✓ $(\, a \, , \, b \,)$

a ↓ اصغر عدد ، b ↓ اكبر عدد

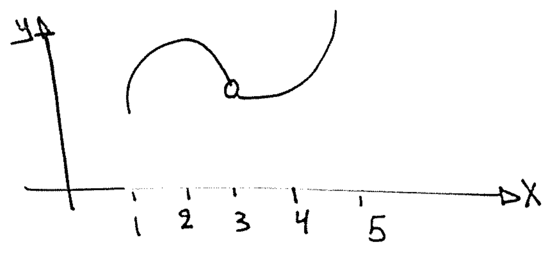
✓ المشتقة غير موجودة عند a,b لأنهما اطراف

✓ اي ان a,b كلاهما ← $(\ ,\ )$ خارج الفترة

مثال :



قابل الاشتقاق $(1,5)$



غير قابل الاشتقاق $(1,5)$

او قابل الاشتقاق $(1,5)-\{3\}$

* ملخص العلاقة بين الاتصال والاشتقاق *

$\boxed{A}$ الاقتران متصل ← يجب التأكد من قابلية الاشتقاق عند قيمة X يساوي عدد

$\boxed{B}$ الاقتران قابل الاشتقاق ← يكون متصل عند X يساوي عدد

$\boxed{C}$ الاقتران غير متصل ← يكون غير قابل الاشتقاق عند X يساوي عدد

* مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي *

أولاً: تعريف بالاقتران الاسي الطبيعي

① اقتران أساسه العدد النيبيري e

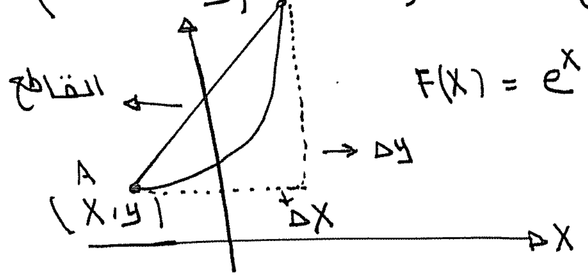
② e عدد غير نسبي قيمته التقريبية

$$e \approx 2.7$$

③ يسمى الاقتران $f(X) = e^X$ اقتران أسي طبيعي

ثانياً: اثبات مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي

① لدينا الاقتران $f(X) = e^X$ و كما نعلم ان الاقتران مجموعة نقاط (X, y) تقع على الاقتران $(X+\Delta X, y+\Delta y)$ B



$X \to F(x) = y$

② لايجاد قيمة y

نعوض قيمة X في النقطة A, B داخل الاقتران

$A\ (X, y)$

$$F(X) = e^X$$

$$F(X) = e^X = y_1$$

$B\ (X+\Delta X, y+\Delta y)$

$$F(X) = e^X$$

$$F(X+\Delta X) = e^{X+\Delta X} = y_2$$

③ نجد الفرق بين الاحداثي y للنقطتين

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta y = e^{X+\Delta X} - e^X$$

④ نجد ميل القاطع المار بالنقطتين

$(X, y)\ //\ (X+\Delta X, y+\Delta y)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{e^{X+\Delta X} - e^X}{\Delta X}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta X} = \frac{e^X(e^{\Delta X} - 1)}{\Delta X}$$

⑤ نجد ميل المماس عند النقطة (X, y)

$$m = f'(X) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta X}$$

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{e^X(e^{\Delta X} - 1)}{\Delta X}$$

$$e^X \lim_{\Delta X \to 0} \frac{e^{\Delta X} - 1}{\Delta X}$$

⑥ نجد قيمة $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx	0.1	0.01	0.001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1.0517	1.0050	1.0005

⑦ نلاحظ ان قيمة $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

⑧ ميل المماس عند النقطة (x, y)

$$m = \bar{f}(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

* اي ان ميل المماس لاي نقطة تقع على منحنى الاقتران الاسي الطبيعي الاحداثي y لهذه النقطة

ثالثاً: مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي

⊛ مشتقة الاس * الاقتران نفسه

$f(x) = e^x$ ، e عدد نيبيري

$\bar{f}(x) = 1 * e^x$

$\bar{f}(x) = e^x$

مثال: جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = 3e^x$

$\bar{f}(x) = 3 * 1 * e^x$

$\bar{f}(x) = 3e^x$

② $f(x) = x^2 + e^x$

$\bar{f}(x) = 2x + e^x$

③ $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2xe^x}{x}$

$y = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{2\cancel{x}e^x}{\cancel{x}}$

$y = x^{-\frac{2}{3}} - 2e^x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} - 2e^x$

تذكر

* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

* مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي *

أولاً : مراجعة عامة

① اللوغاريتم الطبيعي ← $\ln X$

② اساسه العدد الطبيعي e

③ يمكن كتابته على الصورة ← $\log_e X$

④ هو اقتران عكسي لاقتران اسي طبيعي $y = e^x$

(*) قوانين اللوغاريتمات

① قانون الضرب

$$\ln 1*2 = \ln 1 + \ln 2$$

② قانون القسمة

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2$$

③ قانون القوة

$\ln (\text{مقدار})^{\text{اس}}$ = اس $\ln$ المقدار

$$\ln X^a = a \ln X$$

$* \ln e = 1$

$* \ln 1 = 0$

$$\ln X^a \neq (\ln X)^a$$

الاس على داخل $\ln$ — الاس على كامل $\ln$

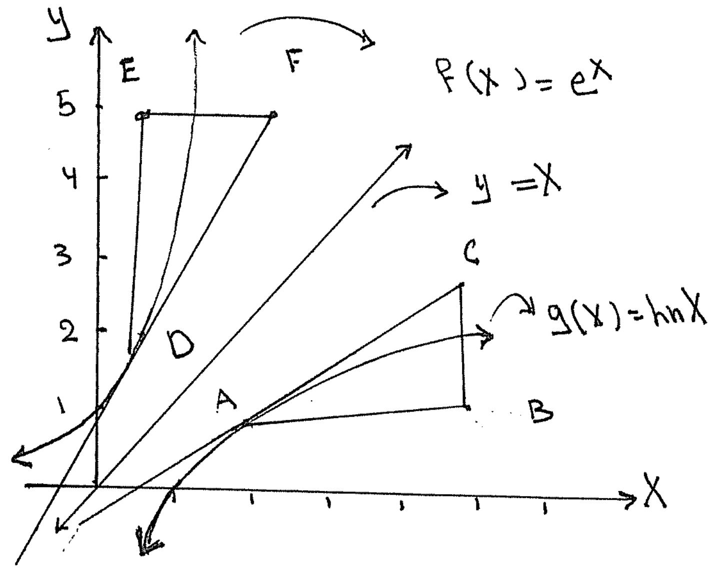
(*) $f(X) = e^{\ln g(X)}$

$$f(X) = g(X)$$

e و $\ln$ عند الالتقاء يحذفوا بعضهما

ثانياً : اثبات مشتقة الاقتران اللوغاريتمي

① نرسم منحنى الاقترانين $f(X) = e^X$ و $g(X) = \ln X$ و $y = X$



② ميل المماس عند النقطة A الواقعة على منحنى الاقتران $g(X) = \ln X$ هو $\frac{CB}{AB}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB}$$

③ المثلث DEF هو انعكاس للمثلث ABC حول المستقيم $y=X$ فان

$$\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$$

④ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(X)=e^X$ عند النقطة D

$$\frac{dy}{dX} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

② $f(x) = \ln(xe^x) + \ln 7x$

$f(x) = \ln x + \ln e^x + \ln 7x$

$f(x) = \ln x + x + \ln 7x$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{7}{7x}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1$

$\bar{f}(x) = \frac{2}{x} + 1$

* مشتقة اقتران الجيب وجيب التمام *

① sin زاوية ⟶ مشتقة زاوية * Cos زاوية

$f(x) = \sin x$

$\bar{f}(x) = \cos x$

② Cos زاوية ⟶ مشتقة زاوية * -Sin زاوية

$f(x) = \cos x$

$\bar{f}(x) = -\sin x$

(*) وجود C في $f(x)$ بعد الاشتقاق اضيف الاشارة السالبة

⑤ ميل المماس عند اي نقطة تقع على منحنى الاقتران الاسي الطبيعي هو الاحداثي y للنقطة D

⑥ بسبب الانعكاس فان الاحداثي y هو الاحداثي X للنقطة A

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

ثالثاً: قانون مشتقة الاقتران اللوغاريتمي

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$

* $f(x) = \ln x$ ، $x > 0$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{x}$

امثلة:

① $f(x) = \ln(x^4)$

$f(x) = 4\ln x$

$\bar{f}(x) = 4 * \frac{1}{x}$

$\bar{f}(x) = \frac{4}{x}$

مثال: اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = 3\sin x + 4$

$f'(x) = 3\cos x + 0$

$f'(x) = 3\cos x$

② $y = \frac{1}{2}e^{x} - 7\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} * 1 * e^{x} - 7 * -\sin x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^{x} + 7\sin x$

أمثلة على تطبيق معادلة المماس و العمودي

مثال ①: اذا كان الاقتران $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$

فجد كل من معادلة المماس و العمودي

عند النقطة $(1, -1)$

الحل: معادلة المماس

(x, y) ... m

$(1, -1)$

$m = f'(x)$

$f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$

$f(x) = \ln x - \cancel{\ln} e$

$f(x) = \ln x - 1$

$f(x) = \ln x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(1) = \frac{1}{(1)}$

$f'(1) = 1$

$(1, -1) \parallel m = 1$

معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -1 = 1(x - 1)$

$y + 1 = x - 1$

$y = x - 2$

معادلة العمودي

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - -1 = \frac{-1}{1}(x - 1)$

$y + 1 = -1(x - 1)$

$y + 1 = -x + 1$
$\quad -1 \qquad\quad -1$

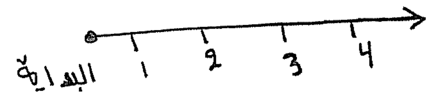
$y = -x$

* تطبيقات الحركة في خط مستقيم *

أولاً: مقدمة

① من امثلة الحركة في خط مستقيم حركة سيارة على طول جزء مستقيم من الطريق و سقوط كرة من مبنى لسطح او قذفها للأعلى

② عندما يتحرك جسم في مسار مستقيم نفترض انه يتحرك على خط اعداد انطلاقاً من موقع ابتدائي



ثانياً: اقتران الموقع والسرعة والتسارع

① اقتران الموقع $s(t)$

* يمثل موقع الجسم بعد زمن معين

* $s(t)$

موقع بعد زمن   زمن

* عند تعويض الزمن داخل اقتران الموقع فان الناتج يمثل موقع الجسم بالنسبة لنقطة الاصل $(0,0)$ بعد زمن معين

مثال: $s(t) = 2t + 5 \,,\; t = 1$

$s(1) = 2(1) + 5$

$s(1) = 7$

اي ان موقع الجسم 7 وحدات بالنسبة لنقطة الاصل

$s(t) = 4 - 10t \,,\; t = 1$

$s(1) = 4 - 10(1)$

$s(1) = -6$

اي ان موقع الجسم 6 وحدات بالنسبة لنقطة الاصل ، الاشارة السالبة تعبر عن الاتجاه السالب

$s(t) = 5t \,,\; t = 0$

$s(0) = 5(0)$

$s(0) = 0$

الجسم على نقطة الاصل

② اقتران السرعة المتجهة $V(t)$

* يمثل سرعة واتجاه الجسم بعد زمن معين

* $V(t)$

السرعة بعد زمن   زمن

* عند تعويض الزمن داخل اقتران السرعة فان الناتج يمثل سرعة الجسم بعد زمن معين

A السرعة المتجهة موجبة ← الجسم يتحرك بالاتجاه الموجب

$V = 5 \ m/s$

اي ان الجسم في كل ثانية يتحرك 5m في الاتجاه الموجب

B السرعة سالبة ← الجسم يتحرك اتجاه السالب
المتجهة

$V = -5\ m/s$

اي ان الجسم يتحرك في كل ثانية $5\ m$
في الاتجاه السالب

C السرعة صفر ← الجسم لا يتحرك
المتجهة

$V = 0\ m/s$

③ التسارع $a(t)$

* التسارع هو زيادة السرعة او نقصانها عند زمن معين

* مثلاً عندما تكون سرعة السيارة الظاهرة على المؤشر $60\ km/h$ و قيام السائق بالضغط على دعسة البنزين و ظهور $80\ km/h$ هذا زيادة سرعة او تخفيض السرعة الى $40\ km/h$ السرعة نقصت

* عند تعويض الزمن داخل اقتران التسارع فان الناتج يمثل زيادة السرعة او نقصانها ((التسارع)) عند زمن معين

A التسارع موجب ← السرعة زادت

$a(t) = 4\ m/s^2$

اي ان السرعة زادت في تلك الثانية
$4\ m$

فكر: ما الفرق بين
١) السرعة و السرعة المتجهة
٢) الموقع و المسافة

B التسارع سالب ← السرعة نقصت

$a(t) = -4\ m/s^2$

اي ان السرعة نقصت في تلك الثانية $4\ m$

C التسارع صفر ← السرعة ثابتة

$a(t) = 0\ m/s^2$

السرعة لم تزداد او تقل بقيت ثابتة

ثالثاً: الاشتقاق

$s(t) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} v(t) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} a(t)$

$s'(t) = v(t)$

$s''(t) = a(t)$

$v'(t) = a(t)$

* الزمن *
معطى — غير معطى

* كلمات مفتاحية لايجاد الزمن *
١) انعدام السرعة ← $V=0$
٢) سكون لحظي ← $V=0$
٣) الجسم بحالة سكون ← $V=0$
٤) عودة الجسم لموقع ابتدائي ← $s=0$
٥) انعدام التسارع ← $a=0$
٦) اقصى سرعة ← $v'(t)=0$
٧) اقصى تسارع ← $a'(t)=0$
* موقع ابتدائي للجسم ← $t=0$
* اتجاه حركة الجسم ← في V نجد
لتحدد ⊕ او ⊖

مثال: يمثل الاقتران $s(t) = 6t^2 - t^3$

$t \geq 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم

حيث (s) الموقع بالامتار (t) الزمن بالثواني

جد كل مايلي

① اجد سرعة الجسم المتجهة و تسارعه عندما $t = 2$

$$s(t) = 6t^2 - t^3$$

$$V(t) = 12t - 3t^2$$

$$V(2) = 12(2) - 3(2)^2$$

$$V(2) = 24 - 12$$

$$\boxed{V(2) = 12 \ m/s}$$

$$V(t) = 12t - 3t^2$$

$$a(t) = 12 - 6t$$

$$a(2) = 12 - 6(2)$$

$$a(2) = 12 - 12$$

$$a(2) = 0 \ m/s^2$$

② اجد قيم t التي يكون عند ها الجسم في حالة سكون لحظي

سكون لحظي ← $V = 0$

$$V(t) = 12t - 3t^2$$

$$0 = 12t - 3t^2$$

$$3t(4 - t)$$

$$\boxed{t = 0} \qquad \boxed{t = 4}$$

③ في اي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$

اتجاه الحركة ← يسأل عن السرعه مع الاتجاه الموجب او السالب

$$V(t) = 12t - 3t^2$$

$$V(5) = 12(5) - 3(5)^2$$

$$V(5) = 60 - 75$$

$$V(5) = -15 \ m/s$$

بما ان السرعة المتجهة سالبة فان الجسم يتحرك لليسار عند $t = 5$

④ متى يعود الجسم لموقعه الابتدائي

العودة للموقع الابتدائي ← $s = 0$

$$s(t) = 6t^2 - t^3$$

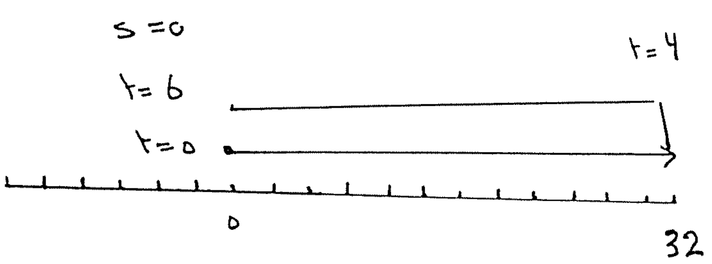
$$0 = t^2(6 - t)$$

$t = 0$ ↓ انطلاق

$t = 6$ ↓ العودة

الدعم البياني

يمثل المخطط اتجاهات حركة الجسم على طول الخط المستقيم

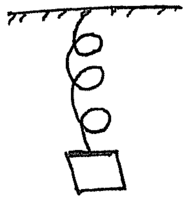


* الحركة التوافقية البسيطة *

أولاً : تعريفها

① حركة اهتزازية لأعلى و أسفل على مسار خط مستقيم

② من الأمثلة عليها تعليق جسم بزنبرك



ثانياً : معادلتها

لكل حركة جسيم هنالك معادلة رياضية تصف الحركة له

* $y = a \sin wt$
* $y = a \cos wt$

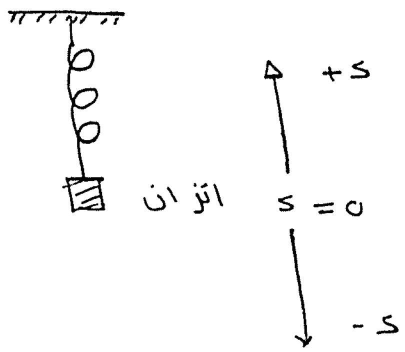
$a \rightarrow$ عدد ثابت

$wt \rightarrow$ زاوية

ثالثاً : وصف حركة الجسم

[A] الموقع

$\bar{A}$



✓ الموقع $s = 0$ اتزان الجسم قبل بدء الحركة

✓ أعلى الاتزان $\rightarrow +s$

أسفل الاتزان $\rightarrow -s$

✓ موقع $y = a \cos wt$ موقع $y = a \sin wt$

* أعلى و أقل قيمة $\sin wt = 1$

$\sin wt = -1$

لأن أعلى قيمة لاقتران $\sin$ هي ± 1 أقل

* أعلى و أقل قيمة $\cos wt = 1$

$\cos wt = -1$

لأن أعلى وأقل قيمة لاقتران $\cos$ هي ± 1

✓ لحساب أعلى و أقل قيمة لاقتران الموقع

معامل $\sin$ / $\cos$ $\Leftarrow \pm a$

مثال:

$s(t) = 5 \cos t$

أعلى الاتزان $s = 5$

أسفل الاتزان $s = -5$

* الإشارة الموجبة تعني أن الجسم أعلى الاتزان
* الإشارة السالبة تعني أن الجسم أسفل الاتزان

B السرعة المتجهة

* عند اشتقاق اقتران الموقع ينتج اقتران السرعة المتجهة

$S = \cos wt$ $S = \sin wt$

$V = -\sin wt$ $V = \cos wt$

السرعة اكبر ما يمكن ↓   السرعة اكبر ما يمكن ↓

$\sin wt = \pm 1$ $\cos wt = \pm 1$

$\cos wt = 0$ $\sin wt = 0$

لان

1 اكبر قيمة لـ $\sin, \cos = \pm 1$
اصغر

2 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

* تكون السرعة اكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان

مثال: $S(t) = 5 \cos t$

$V(t) = -5 \sin t$

① اكبر قيمة لاقتران السرعة ± 5
لانه اكبر واصغر قيمة $\sin t = \pm 1$

② عندما $\sin t = 1$ او $\sin t = -1$
فان $\cos t = 0$ لان $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

③ عندما $\cos t = 0$ فان $S = 0$
اي عندما الجسم بموقع الاتزان تكون السرعة اكبر ما يمكن

C التسارع

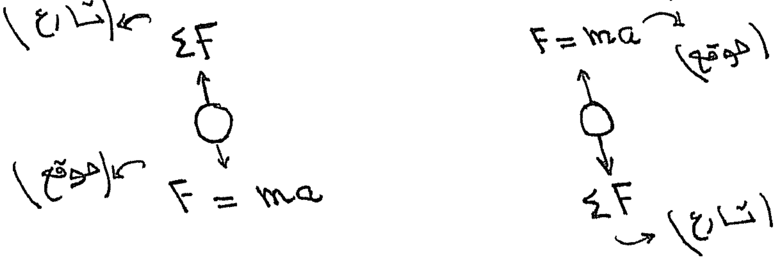
✓ عند اشتقاق اقتران السرعة المتجهة ينتج التسارع

$s = \cos wt$ $s = \sin wt$

$V = -\sin wt$ $V = \cos wt$

$a = -\cos wt$ $a = -\sin wt$

✓ الاحظ ان قيمة التسارع دائما نفس اقتران الموقع وعكس الاتجاه



✓ التسارع دائما يرتبط بمحصلة القوى

✓ هبوط الجسم لاسفل تكون محصلة القوى اعلى
صعود الجسم لاعلى تكون محصلة القوى اسفل
// قانون نيوتن الثاني //

✓ تكون قيمة التسارع صفر عند موقع الاتزان

✓ لان قوة الجاذبية والزنبرك تلغي احدهما الاخرى عند هذه النقطة

✓ لكن عند اي موقع آخر فان القوتين لا يتساويان وقيمة التسارع $\neq 0$

مثال: $s(t) = 5 \cos t$

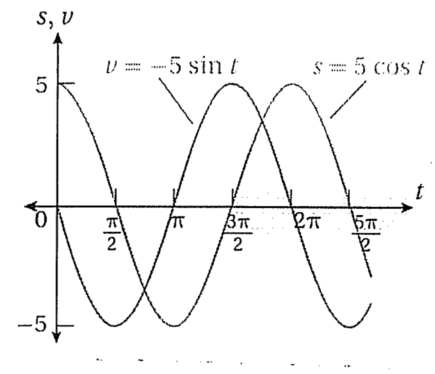
$v(t) = -5 \sin t$

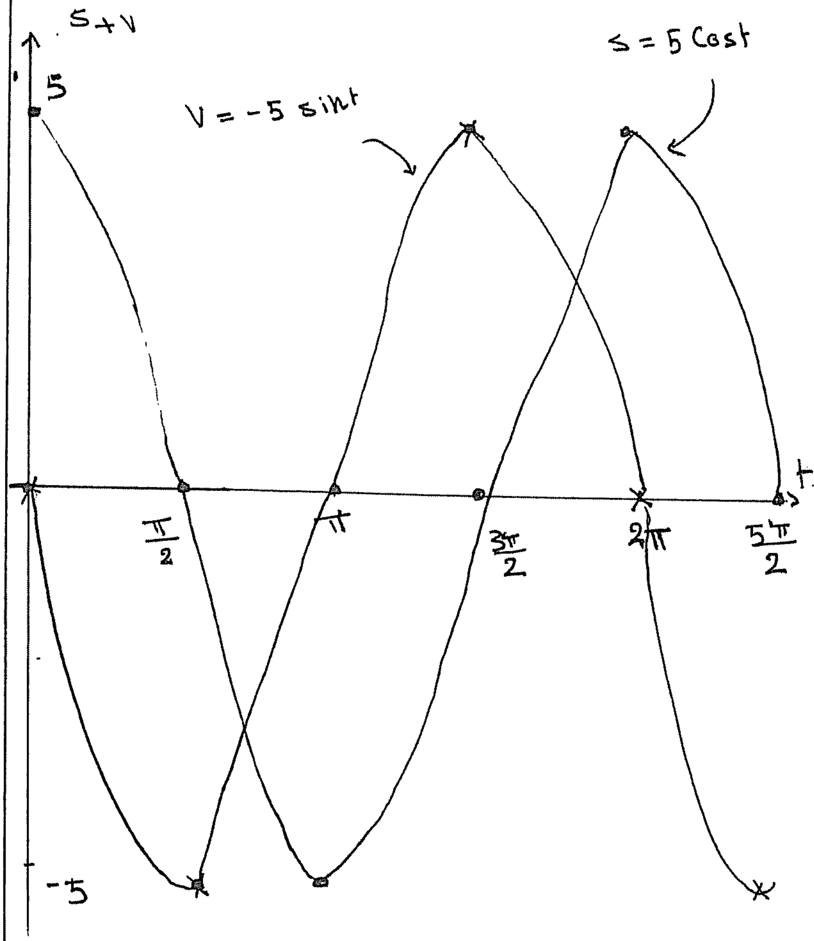
$a(t) = -5 \cos t$

الاحظ ان قيمة اقتران التسارع نفس قيمة اقتران الموقع وعكس الاتجاه

الدعم البياني

$s(t) = 5\,\text{Cos}\,t$





✓ موقع الجسم بالمتر يتراوح بين القيمتين

$S = -5\,m$ و $S = 5\,m$

✓ السرعة المتجهة تتراوح بين القيمتين

$V = -5\ m/s$ و $V = 5\ m/s$

✓ اقتران السرعة المتجهة يكون أكبر ما يمكن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع محور X

✓ لذلك تكون السرعة المتجهة أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان

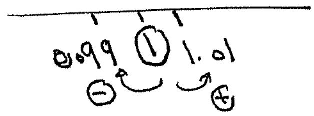
افكار متنوعة

فكرة (1) اشارة ($\neq$)

① اشارة ($\neq$) تمثل النهاية

② قيمة (X) لا تساوي 1 $\lim_{X \to 1} f(X)$

③



قيمة (X) اكبر او اقل من واحد

مثال:

$$f(X) = \begin{cases} 2X + 5 , & X \neq 3 \\ 10 , & X = 3 \end{cases}$$

ابحث في قابلية $f(X)$ الاشتقاق عند $X=3$

$$f(3) = 10$$

$$\lim_{X \to 3} f(X)$$

$$\lim_{X \to 3} (2X + 5)$$

$$2(3) + 5$$

$$6 + 5 = 1$$

$f(X)$ غير قابل الاشتقاق عند $X=3$

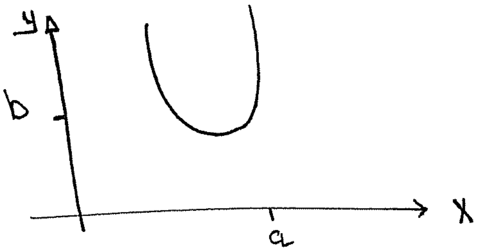
لان $f(X)$ غير متصل عند $X=3$

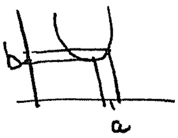
فكرة (2) كلمة قابل الاشتقاق و الثوابت

① قابل الاشتقاق ← النهاية = الصورة

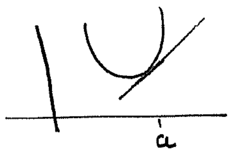
مشتقة يمين = مشتقة يسار

②





$$f(a) = \lim_{X \to a^+} f(X) = \lim_{X \to a^-} f(X)$$



$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

استطيع رسم مماس واحد فقط عند (a)

و هذا يعني ان المشتقة موجودة

مثال:

$$g(X) = \begin{cases} X^3 , & X \leq 1 \\ LX + b , & X > 1 \end{cases}$$

$g(X)$ قابل اشتقاق عند $X=1$ جد L, b

$$g(1) = \lim_{X \to 1} g(X)$$

$$1 = L(1) + b$$

$$1 = L + b$$

$$g'_+(1) = g'_-(1)$$

$$L = 3X^2$$

$$L = 3(1)^2$$

$$\boxed{L = 3}$$

$$1 = L + b$$

$$1 = 3 + b$$

$$-3 \quad -3$$

$$\boxed{b = -2}$$

فكرة (3) دمج المطلق

① $\boxed{\quad\quad}$ $\pm \times \div$ $|\quad|$

② يتم اعادة التعريف المطلق اولاً ثم تطبيق العملية الموجودة

مثال: $f(x) = |x-2| * x$

ابحث قابلية $f(x)$ الاشتقاق عند $x=2$

الحل:

المطلق اولاً

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

العملية ثانياً

$$\begin{array}{c|c} 2-x & x-2 \\ - & + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2} \end{array}$$

$$2^+ \rightarrow (2-x)\ \boxed{* x} = 2x - x^2$$
$$2^- \rightarrow (x-2)\ \boxed{* x} = x^2 - 2x$$

مثال: $f(x) = |9 - x^2| + 2x$

ابحث قابلية $f(x)$ الاشتقاق عند $x=3$

الحل:

المطلق اولاً

$$9 - x^2 = 0$$
$$9 = x^2$$
$$x = \pm 3$$

العملية ثانياً

$$\begin{array}{c|c|c} x^2-9 & 9-x^2 & x^2-9 \\ - & + & - \\ \hline & -3 \quad\quad 3 & \end{array}$$

$$3^+ \rightarrow x^2 - 9\ \boxed{+2x} = x^2 + 2x - 9$$
$$3^- \rightarrow 9 - x^2\ \boxed{+2x} = -x^2 + 2x + 9$$

فكرة (4)

1 الجسم بحالة سكون اول مرة بعد الانطلاقة

* الجسم بحالة سكون ← $v = 0$

* اول مرة بعد الانطلاقة ← الجسم اصبح ساكن بعدة محطات بعد الانطلاق اريد اول زمن توقف

مثال:

$$s(t) = \sin t$$
$$v(t) = \cos t$$
$$0 = \cos t$$

البداية الجسم ساكن $\quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2}$

اول زمن بعد الانطلاق

2

مثال: $s(t) = 2t^3 - 12t^2$

① باي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=1$

② اجد موقع الجسم عندما يصل لاقصى سرعة

الحل:

① $v(t) = 6t^2 - 24t$

$6(1)^2 - 24(1) = -18\,m/s$

الاتجاه السالب

② اقصى سرعة ← $\bar{v}(t) = 0$

$$\bar{v}(t) = 12t - 24$$
$$0 = 12t - 24$$
$$t = 2\,s$$
$$s(2) = 2(2)^3 - 12(2)^2 = -32\,m$$

تدريب : التحقق من فهمي ①

ⓐ ابحث قابلية الاقتران $f(x)=|x-2|$ للاشتقاق عند $x=2$

الحل:

$$f(x)=|x-2|$$

$$f(2)=|2-2|$$

$$f(2)=0$$

$$x-2=0$$

$$x=2$$

$$\begin{array}{c|c} 2-x & x-2 \\ - & + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{2} \end{array}$$

① $f(x)=x-2 \quad ، \ x>2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$f(x)=x-2$$

$$f(2+h)=(2+h)-2$$

$$f(2+h)=2+h-2$$

$$f(2+h)=h$$

$$f(2)=(2)-2=0$$

$$f(2)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=\frac{h}{h}=1$$

② $f(x)=2-x \quad ، \ x<0$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$f(x)=2-x$$

$$f(2+h)=2-(2+h)$$

$$f(2+h)=2-2-h$$

$$f(2+h)=-h$$

$$f(2)=2-2=0$$

$$f'(2)=\frac{-h-0}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند $x=2$

ⓑ ابحث قابلية الاقتران $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{5}}$ للاشتقاق عند $x=-1$

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$f(x)=\sqrt[5]{(x+1)}$$

$$f(-1+h)=\sqrt[5]{-1+h+1}$$

$$f(-1+h)=\sqrt[5]{h}$$

$$f(-1)=\sqrt[5]{-1+1}$$

$$f(-1)=\sqrt[5]{0}=0$$

$$\bar{f}(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$\bar{f}(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[5]{h} - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{5}}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h \times h^{-\frac{1}{5}}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{4}{5}}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{h^4}} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{0^+} = \infty$$

$f(X)$ غير قابل الاشتقاق عند $X = -1$

ملاحظة

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{h^4}}$$

$$\sqrt[5]{(0)} = (0^+)^4 = 0^+$$

$$\lim_{h \to 0^-} \sqrt[5]{(0)} = (0^-)^4 = 0^+$$

1 نعوض داخل الجذر

2 نطبق الاس مع الاتجاه

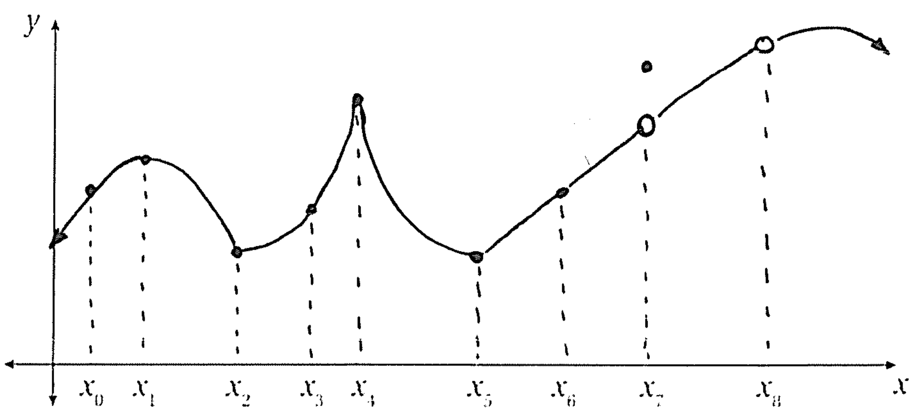
تدريب: التحقق من فهمي (2)

جد قيم (X) التي لا يكون عندها الاقتران $f(X)$ قابلاً الاشتقاق

$X = \{X_2, X_4, X_5, X_7, X_8\}$

$X_2, X_4, X_5 \rightarrow$ رأس حاد

$X_7, X_8 \rightarrow$ اقتران غير متصل



تدريب : التحقق من فهمي (3)

جد مشتقة كل اقتران مما يلي

ⓐ $f(X) = 5e^X + 3$

$\bar{f}(X) = 5 * e^X + 0$

$\bar{f}(X) = 5e^X$

ⓑ $f(X) = \sqrt{X} - 4e^X$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} - 4 * e^X$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} - 4e^X$

ⓒ $y = 8e^X + \frac{4}{\sqrt[5]{X}}$

$y = 8e^X + \frac{4}{X^{\frac{1}{5}}}$

$y = 8e^X + 4X^{-\frac{1}{5}}$

$y = 8e^X + 4X^{-\frac{1}{5}}$

$\frac{dy}{dX} = 8 * e^X + 4 * -\frac{1}{5} X^{-\frac{6}{5}}$

$\frac{dy}{dX} = 8e^X + \frac{-4}{5} X^{-\frac{6}{5}}$

$\frac{dy}{dX} = 8e^X + \frac{-4}{5} * \frac{1}{X^{\frac{6}{5}}}$

$\frac{dy}{dX} = 8e^X + \frac{-4}{5} * \frac{1}{\sqrt[5]{X^6}}$

$* \sqrt[N]{X^L} = X^{\frac{L}{N}}$

$* \quad X^{-N} = \frac{1}{X^N}$

التحقق من فهمي (4)

جد مشتقة كل اقتران مما يلي

ⓐ $F(X) = \sqrt{X} + \ln(4X)$

$\bar{F}(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} + \frac{4}{4X}$

$\bar{F}(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}} + \frac{1}{X}$

ⓑ $f(X) = \ln(2X^3)$

$\bar{f}(X) = \frac{6X^2}{2X^3} = \frac{3}{X}$

$* \quad \frac{\boxed{X\,X}}{\boxed{X\,X}X} =$

التحقق من فهمي (5)

جد مشتقة كل اقتران مما يلي

ⓐ $y = \frac{\sin X}{2} + 3\cos X$

$\frac{dy}{dX} = \frac{\cos X}{2} + 3 * -\sin X$

$\frac{dy}{dX} = \frac{\cos X}{2} - 3\sin X$

ⓑ $f(X) = X^2 + \cos X + \sin\frac{\pi}{2}$

$\bar{f}(X) = 2X + -\sin X + 0$

$\bar{f}(X) = 2X - \sin X$

$* \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$

مشتقة الثابت (1) = 0

التحقق من فهمي (6)

اذا كان الاقتران $f(x) = \ln\sqrt{x}$ فجد

(a) معادلة المماس عند النقطة $(e , \frac{1}{2})$

(b) معادلة العمودي على المماس عند $(e , \frac{1}{2})$

الحل: معادلة المماس

$m =$ $\quad x = e$

$y = \frac{1}{2}$

$f(x) = \ln\sqrt{x}$

$f(x) = \ln x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = \frac{1}{2}\ln x$

$f'(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{x}$

$f'(e) = \frac{1}{2} * \frac{1}{e}$

$f'(e) = \frac{1}{2e}$

$m = \frac{1}{2e}$ $\quad x = e$

$y = \frac{1}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$

معادلة المماس

$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$

معادلة العمودي

(*) $x \downarrow f(x) = y$ $\quad$ (*) $x \downarrow f'(x) = m$

التحقق من فهمي (7)

يمثل الاقتران $s(t) = t^2 - 7t + 8$ // $t \geq 0$

موقع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث

(s) الموقع بالامتار (t) الزمن بالثواني. جد

(a) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عند $t = 4$

(b) قيم t التي يكون عندها الجسم بحالة سكون لحظي

(c) بأي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$

(d) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي

الحل:

$V(t) = 2t - 7$

$a(t) = 2$

(a) $V(4) = 2(4) - 7$

$8 - 7 = 1 m/s$

$a(4) = 2 \ m/s^2$

(b) $V = 0 \leftarrow$ سكون لحظي

$V(t) = 2t - 7$

$0 = 2t - 7$

$2t = 7$

$t = \frac{7}{2} s$

(c) اتجاه الحركة ← v

$$v(t) = 2t - 7$$

$$v(2) = 2(2) - 7$$

$$v(2) = 4 - 7 = -3\ m/s$$

(d) الموقع الابتدائي ← $s = 0$

$$s(t) = t^2 - 7t + 8$$

$$0 = t^2 - 7t + 8$$

* لا تحلل بالطريقة المعروفة

* نستخدم المميز للتأكد انها تحلل ام لا

$$b^2 - 4ac$$

- 0 ← تحلل حل وحيد
- $\ominus$ ← لا تحلل X
- $\oplus$ ← تحلل حلان

a ← معامل التربيعي

b ← معامل الخطي

c ← الثابت

$a = 1 \parallel b = -7 \parallel c = 8$

$$b^2 - 4ac$$

$$(-7)^2 - 4(1)(8)$$

$$49 - 32 = 17$$

$$x \text{ أو } t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2(1)}$$

$$t = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \qquad t = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

التحقق من فهمي (8)

يتحرك جسم معلقاً بزنبرك الى الاعلى والاسفل و يمثل الاقتران: $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند اي زمن لاحق حيث (t) الزمن بالثواني و (s) الموقع بالامتار، جد ما يلي

(a) جد اقتران يمثل سرعة الجسم المتجهة و اقتران آخر يمثل تسارعه عند اي لحظة

(b) صف حركة الجسم

الحل:

(a) $s(t) = 7\sin t$

$$v(t) = 7\cos t$$

$$a(t) = -7\sin t$$

(b)

السؤال [1]

ابحث قابلية الاشتقاق كل اقتران مما يلي عند قيمة (X) المعطاه

① $f(X) = |X-5| \quad // \quad X = 5$

الحل:

$f(5) = |5-5|$

$f(5) = 0$

$X - 5 = 0$

$X = 5$

$5-X$ (−) | $X-5$ (+)

5

1 $f(X) = X - 5$ ، $X > 5$

$$\bar{f}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h}$$

$$\bar{f}(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$f(X) = X - 5$

$f(5+h) = (5+h) - 5$

$f(5+h) = 5 + h - 5$

$f(5+h) = h$

$f(5) = (5) - 5$

$f(5) = 0$

$$\bar{f}(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$\bar{f}(5) = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

2 $f(X) = 5 - X$ ، $X < 5$

$$\bar{f}(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$f(X) = 5 - X$

$f(5+h) = 5 - (5+h)$

$f(5+h) = 5 - 5 - h$

$f(5+h) = -h$

$f(5) = 5 - (5) = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to} \frac{-h}{h} = -1$$

$f(X)$ غير قابل للاشتقاق عند $X = 5$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{3}{5}}}$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{h^3}} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{(0^+)^3}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[5]{(0^-)^3}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$f(X)$ غير قابل الاشتقاق عند $X = 0$

② $f(X) = X^{\frac{2}{5}}$ // $X = 0$

$$\bar{f}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h}$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$f(X) = X^{\frac{2}{5}}$$

$$f(X) = \sqrt[5]{X^2}$$

$$f(h) = \sqrt[5]{h^2} = h^{\frac{2}{5}}$$

$$f(0) = \sqrt[5]{(0)^2}$$

$$f(0) = 0$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{2}{5}} - 0}{h}$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{2}{5}}}{h}$$

$$\bar{f}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h \times h^{-\frac{2}{5}}}$$

$$h \times h^{-\frac{2}{5}} = h^{\frac{3}{5}}$$

نفس المقدار ← نجمع الأسس

③ $f(X) = \begin{cases} X^2 & , X \leq 1 \\ X^2 - 2X & , X > 1 \end{cases}$

عند $X=1$

الحل:

$$f(1) = X^2$$
$$(1)^2 = 1$$

$$\lim_{X \to 1^+} f(X) = \lim_{X \to 1^+} X^2 - 2X$$
$$(1)^2 - 2(1) = -1$$

$$\lim_{X \to 1^-} f(X) = \lim X^2 = (1)^2 = 1$$

$f(X)$ غير متصل عند $X = 1$

$f(X)$ غير قابل الاشتقاق عند $X=1$

$$\bar{f}(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(16 + 4(0))}$$

$$\bar{f}(4) = \frac{-3}{16}$$

⊛ $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} \pm \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

$$\frac{\text{بسط} * \text{مقام} \pm \text{بسط} * \text{مقام}}{\text{مقام} * \text{مقام}}$$

⊛ $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} \to C$ مع ⊖ اشارة

---

⑤ $f(X) = (X-6)^{\frac{2}{3}}$ // $X = 6$

$$\bar{f}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h}$$

$$\bar{f}(6) = \lim_{h \to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h}$$

$$f(X) = \sqrt[3]{(X-6)^2}$$

$$f(6+h) = \sqrt[3]{6+h-6}$$

$$f(6+h) = \sqrt[3]{h} = h^{\frac{1}{3}}$$

$$f(6) = \sqrt[3]{(6-6)^2}$$

$$f(6) = 0$$

④ $f(X) = \frac{3}{X}$ // $X = 4$

$$\bar{f}(\;) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h}$$

$$\bar{f}(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$f(X) = \frac{3}{X}$$

$$f(4+h) = \frac{3}{4+h}$$

$$f(4) = \frac{3}{(4)} = \frac{3}{4}$$

$$\bar{f}(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$\bar{f}(4) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{4+h} - \frac{3}{4}}{h}$$

$$\frac{3}{4+h} - \frac{3}{4}$$

$$\frac{12 - 12 - 3h}{4(4+h)}$$

$$= \frac{-3h}{16+4h}$$

$$\bar{f}(4) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-3h}{16+4h}}{h}$$

$$\bar{f}(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}(16+4h)}$$

⑥ $f(X) = \begin{cases} X+1 , & X \neq 4 \\ 3 , & X = 4 \end{cases}$

$f(4) = 3$

$\lim_{X \to 4} f(X)$

$\lim_{X \to 4} X+1$

$(4) + 1 = 5$

$f(4) \neq \lim_{X \to 4} f(X)$

$f(X)$ غير قابل الاشتقاق عند $X = 4$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h * h^{-\frac{1}{3}}}$

$h * h^{-\frac{1}{3}} = h^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{h^2}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{0}$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$

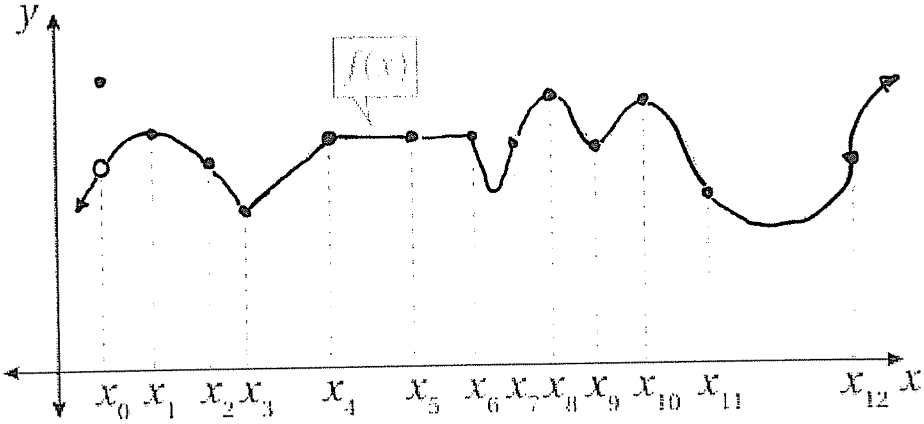
$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$

$f(X)$ غير قابل الاشتقاق عند $X = 6$

$0^+ =$ اكبر من صفر بقليل

$0^- =$ اقل من صفر بقليل

(7)



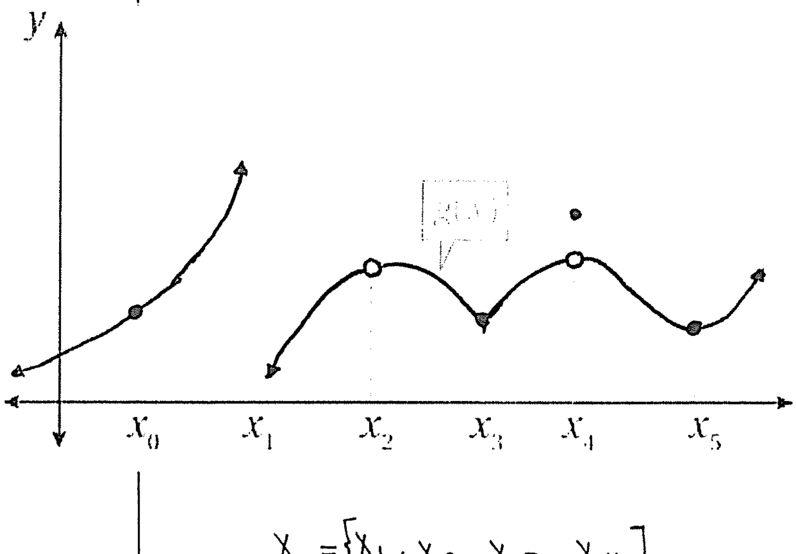
$X = \{X_0, X_3, X_4, X_6, X_{12}\}$

X_0 → غير متصل

X_3, X_4, X_6 → راس حاد

X_{12} → مماس راسي

(8)



$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$

X_1, X_2, X_4 → غير متصل

X_3 → راس حاد

السؤال الثاني: احدد قيمة (قيم) X التي لا يكون عندها كل اقتران مما يلي قابلاً للاشتقاق

① $f(X) = \dfrac{X-8}{X^2-4X-5}$

$X^2-4X-5=0$

$(X-5)(X+1)$

$\boxed{X=5}$ $\boxed{X=-1}$

② $f(X) = \sqrt[3]{3X-6} + 5$

$f(X) = (3X-6)^{\frac{1}{3}} + 5$

$f'(X) = \frac{1}{3}(3X-6)^{-\frac{2}{3}} + 0$

$f'(X) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(3X-6)^2}}$

$3X-6=0$

$3X=6$

$\boxed{X=2}$

※ كثير الحدود و الجذر التكعيبي متصلات لذلك تم الاشتقاق مباشرة

※ عند الاشتقاق ظهر $\dfrac{\text{مقدار}}{0}$

③ $f(X) = |X^2-9|$

$X^2-9=0$

$X^2=9$

$X=\pm 3$

※ قيم (X) التي تجعل ما داخل | | = 0 ← غير قابل اشتقاق

السؤال الثالث:

اذا كان $f(X)=X|X|$ أثبت ان $f'(0)$ موجودة

الحل:

$f'(X) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(X+h)-f(X)}{h}$

$|X| = |0| = 0$

$\boxed{X=0}$

$X \ast$ $\quad -X$ ($-$) | X ($+$), عند 0

$-X^2$ ($-$) | X^2 ($+$), عند 0

$-X \ast X = -X^2$

$X \ast X = X^2$

1. $f(X) = X^2$ ، $X>0$

2. $f(X) = -X^2$ ، $X<0$

1. $f'(0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$f(X)=X^2$

$f(h)=h^2$

$f(0)=0$

$\lim_{h\to 0^+} \dfrac{h^2-0}{h}$

$\lim_{h\to 0^+} \dfrac{h \ast \cancel{h}}{\cancel{h}} = h = 0$

2. $f'(0) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2-0}{h}$

$-\dfrac{h \ast \cancel{h}}{\cancel{h}} = -h$

$-(0)=0$

$f'_-(0) = f'_+(0)$ ← $f'(0)$ موجودة

السؤال الرابع : جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = 2\sin x - e^{x}$

$\bar{f}(x) = 2\cos x - e^{x}$

② $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

$\bar{f}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{4} - \pi * -\sin x$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{4x} + \pi \sin x$

* $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ * $\frac{a}{\frac{b}{c}}$

③ $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^{3}}\right) + x^{4}$

$f(x) = \ln 1 - \ln x^{3} + x^{4}$

$f(x) = \ln 1 - 3\ln x + x^{4}$

$\bar{f}(x) = 0 - 3 * \frac{1}{x} + 4x^{3}$

$\bar{f}(x) = \frac{-3}{x} + 4x^{3}$

* تطبيق قوانين ln لتبسيط السؤال
* $\ln 1 = 0$

④ $f(x) = e^{x+1} + 1$

$\bar{f}(x) = 1 * e^{x+1} + 0$

$\bar{f}(x) = e^{x+1}$

⑤ $f(x) = e^{x} + x^{e}$

$\bar{f}(x) = e^{x} + e\,x^{e-1}$

⑥ $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^{n}}\right)$

$f(x) = \ln 10 - \ln x^{n}$

$f(x) = \ln 10 - n \ln x$

$\bar{f}(x) = 0 - n * \frac{1}{x}$

$\bar{f}(x) = \frac{-n}{x}$

السؤال الخامس : اذا كان : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^{x}$

① جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$

② جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$

الحل :

① $m =$ $\qquad x = \pi$

$y = \frac{1}{2}e^{\pi}$

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$\bar{f}(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$\bar{f}(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$\bar{f}(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$\bar{f}(\pi) = \frac{1}{2}e^{\pi} - 1$$

$m = \frac{1}{2}e^{\pi} - 1 \qquad x = \pi$

$y = \frac{1}{2}e^{\pi}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{1}{2}e^{\pi} - 1 (x - \pi)$$

② $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{-1}{\frac{1}{2}e^{\pi} - 1}(x - \pi)$$

السؤال السادس : جد قيمة x التي يكون عندها المماس افقياً لمنحنى الاقتران

$$f(x) = e^{x} - 2x$$

الحل :

$$\bar{f}(x) = e^{x} - 2$$

$$0 = e^{x} - 2$$

$$e^{x} = 2$$

باخذ $\ln$ للطرفين

$$\ln e^{x} = \ln 2$$

$$x = \ln 2$$

⊛ مماس افقي ← $\bar{f}(x) = 0$

⊛ للحصول على x لوحدها من e او $\ln$

e ← أضيف $\ln$

$\ln$ ← اضيف e

السؤال السابع :

اختيار من متعدد : اي التالية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران

$f(X) = \sin X + \cos X \quad , \quad X = \pi$

a) $y = -X + \pi - 1$

b) $y = X - \pi - 1$

c) $y = X - \pi + 1$

d) $y = X + \pi + 1$

الاجابة : (b)

السؤال $\boxed{8}$

اذا كان : $f(X) = \ln kX$ حيث k عدد حقيقي موجب و $X > 0$ اثبت ان $f'(X) = \frac{1}{X}$

الحل:

$f(X) = \ln kX$

$f(X) = \ln k + \ln X$

$f'(X) = 0 + \frac{1}{X}$

$f'(X) = \frac{1}{X}$

$\ln AB = \ln A + \ln B$ ⊛

السؤال ال $\boxed{9}$

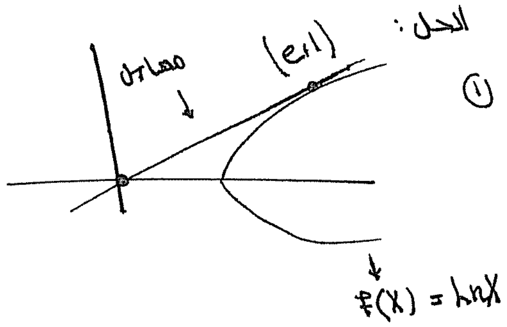
اذا كان الاقتران : $f(X) = \ln X$

① اثبت ان مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ يمر بنقطة الاصل

② اثبت ان المقطع X للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e,1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

الحل :

①



المماس يحتوي على عدد كبير من النقاط ، ان كانت احد النقاط تقع عليه نعوض النقطة المطلوبة داخل معادلة المماس ان تساوى طرفا المعادلة فانها تمر او تقع عليه

$m =$ $\qquad X = e$

$y = 1$

$f(X) = \ln X$

$f'(X) = \frac{1}{X}$

$f'(e) = \frac{1}{e}$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 1 = \frac{1}{e}(X - e)$

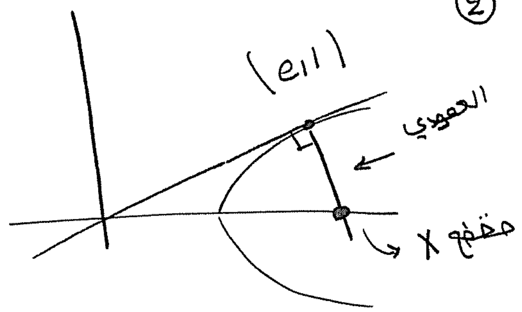
$(0,0)$

$0 - 1 = \frac{1}{e}(0 - e)$

$-1 = 0 - 1$

$-1 = -1$

2



المطلوب ايجاد المقطع (X) للعمودي على المماس

يجب اولاً ايجاد معادلة العمودي

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_2}(x - x_1)$$

$$y - 1 = -e(x - e)$$

مقطع $x \longleftarrow y = 0$

$$(0) - 1 = -e(x - e)$$

$$-1 = -ex + e^2$$

$$-1 - e^2 = -ex \qquad \div -1$$

$$\frac{e^2 + 1}{e} = \frac{ex}{e} \qquad \div e$$

$$x = \frac{e^2 + 1}{e}$$

$$x = \frac{e^2}{e} + \frac{1}{e}$$

$$x = e + \frac{1}{e}$$

$$\frac{A^L}{A^M} = A^{L-M} \qquad \circledast$$

$$\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

السؤال 15

يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$

$t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

حيث (s) الموقع بالامتار (t) الزمن بالثواني

① جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عند $t = 5$

② جد قيم t التي يكون عندها الجسم بحالة سكون لحظي

③ في اي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$

④ متى يعود الجسم لموقعه الابتدائي

الحل:

①

$$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$$

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$$

$$a(t) = 6t - 8$$

$$v(5) = 3(5)^2 - 8(5) + 5$$

$$v(5) = 75 - 40 + 5$$

$$v(5) = 40 \text{ m/s}$$

$$a(t) = 6t - 8$$

$$a(5) = 6(5) - 8$$

$$a(5) = 30 - 8$$

$$a(5) = 22 \text{ m/s}^2$$

② سكون لحظي $\rightarrow = 0$

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$$

$$0 = 3t^2 - 8t + 5$$

$$(3t - 5)(t - 1)$$

$$3t = 5 \qquad \boxed{t = 1 \text{ s}}$$

$$\boxed{t = \frac{5}{3} \text{ s}}$$

③

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$$

$$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$$

$$v(4) = 48 - 32 + 5$$

$$v(4) = +21 \text{ m/s}$$ الاتجاه الموجب

④ الموقع الابتدائي $\rightarrow s(t) = 0$

$$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$$

$$0 = t^3 - 4t^2 + 5t$$

$$t(t^2 - 4t + 5)$$

$$\boxed{t = 0} \qquad t^2 - 4t + 5$$

تهمل

$$b^2 - 4ac$$

$$(-4)^2 - 4(1)(5)$$

$$16 - 20 = -4$$

المميز سالب $\rightarrow$ لا يوجد قيم حقيقية

اي ان الجسم لن يعود لموقعه الابتدائي

السؤال 11

يمثل الاقتران : $s(t) = e^t - 4t \quad , t \geq 0$

موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم حيث

(s) الموقع بالامتار , (t) الزمن بالثواني جد

① أجد الموقع الابتدائي للجسيم

② أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً

الحل:

① الموقع الابتدائي ← $s(0)$

$$s(t) = e^t - 4t$$

$$s(0) = e^0 - 4(0)$$

$$s(0) = 1 - 0$$

$$s(0) = 1\,m$$

②

$$s(t) = e^t - 4t$$

$$V(t) = 1 * e^t - 4$$

$$\boxed{V(t) = e^t - 4}$$

$$a(t) = e^t - 0$$

$$\boxed{a(t) = e^t}$$

$$V(t) = 0$$

$$0 = e^t - 4$$

$$e^t = 4$$

$$\ln e^t = \ln 4$$

$$t = \ln 4$$

$$a(\ln 4) = e^{\ln 4}$$

$$a(\ln 4) = 4\ m/s^2$$

* e و ln يحذفوا بعضهم

السؤال 12

يتحرك جسم معلق بزنبرك الى الاعلى و الاسفل ويحدد الاقتران : $s(t) = 4\cos t$

موقع الجسم عند اي زمن لاحق حيث

(t) الزمن بالثواني (s) الموقع بالامتار

① أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة و اقتراناً آخر يمثل تسارعه عند اي لحظة

② اجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عند $t = \frac{\pi}{4}$

③ أصف حركة الجسم

①

$$s(t) = 4\cos t$$

$$V(t) = 4 * -\sin t$$

$$V(t) = -4\sin t$$

$$a(t) = -4\cos t$$

②

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4}$$

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 * \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4}{\sqrt{2}}\ m/s$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 * \cos\frac{\pi}{4}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 * \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}}\ m/s^2$$

السؤال $\boxed{13}$

اذا كان الاقتران : $y = e^{x} - ax$

حيث (a) عدد حقيقي فاجد معادلة المماس

عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y

مبرراً اجابتي

الحل :

$x =$ $\quad$ $m =$

$y =$

تقاطع مع المحور y ⟵ $\boxed{x = 0}$

y ⟵ تنتج من تعويض x داخل y او $f(x)$

$$y = e^{0} - a(0)$$

$$y = 1 - 0$$

$$\boxed{y = 1}$$

m ⟵ المشتقة عوض داخلها (x)

$$y = e^{x} - ax$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^{x} - a$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{0} - a$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - a$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 1 - a(x - 0)$$

$$y - 1 = x - ax$$

$$y = x - ax + 1$$

السؤال $\boxed{14}$

اذا كان
$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \leq 2 \\ mx + b , & x > 2 \end{cases}$$

فاجد قيمة كل من m و b اللتين تجعلان f

قابلاً للاشتقاق عند جميع قيم x الحقيقية

مبرراً اجابتي

الحل :
$$f(2) = \lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} f(x)$$

$$f(2) = x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^{-}} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^{+}} mx + b =$$
$$m(2) + b$$
$$2m + b$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$\boxed{4 = 2m + b} \quad -①$$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 2x , & x < 2 \\ m , & x > 2 \end{cases}$$

$$\bar{f}_{+}(2) = \bar{f}_{-}(2)$$

$$m = 2x$$
$$m = 2(2) = 4$$
$$\boxed{m = 4}$$

$$4 = 2m + b$$
$$4 = 2(4) + b$$
$$\underset{-8}{4} = \underset{-8}{8} + b$$
$$\boxed{b = -4}$$

السؤال $\boxed{15}$

اثبت عدم وجود مماس ميله (2) لاقتران

$$y = 2e^x + 3x + 5x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2*e^x + 3 + 15x^2$$

$2e^x \rightarrow$ دائما موجب اقتران أسي

$15x^2 \rightarrow$ دائما موجب

$$3 + \left(2e^x + 15x^2\right) > 2$$

لا يوجد قيمة (x) اذا تم تعويضها داخل المشتقة
كان الناتج = 2

السؤال $\boxed{16}$

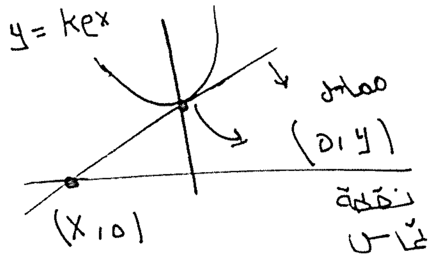
اذا كان الاقتران : $y = ke^x$ // $k > 0$

وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة p

① أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة p مع المحور x

② اذا كان العمودي على المماس عند النقطة p يقطع المحور x عند النقطة (100,0) جد قيمة (k)

الحل:

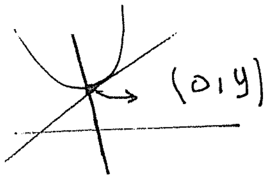


①

نقطة تقاطع المماس مع المحور x

يجب اولاً ايجاد معادلة المماس

$$y = ke^x$$



$$\frac{dy}{dx} = ke^x$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$$

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{m}$

$$\frac{dy}{dx} = ke^0 = k*1$$

$$\frac{dy}{dx} = k = m$$

$\boxed{y}$

$$y = ke^x$$

$$y = ke^0 = k*1$$

$$\boxed{y = k}$$

$(0,k)$

$m = k$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - k = k(x - 0)$$

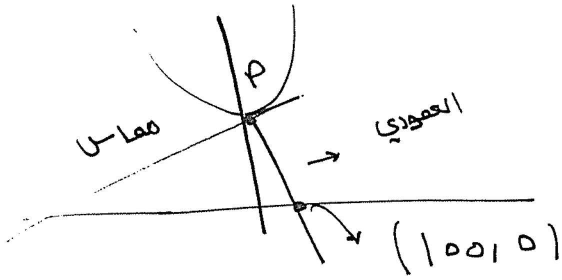
تقاطع مع محور x $\leftarrow$ $y = 0$

$$0 - k = k(x - 0)$$

$$\frac{-k}{k} = \frac{k}{k}x$$

$$\boxed{x = -1}$$

$(-1,0)$



المماس $y - k = k(x - 0)$

العمودي $y - k = \frac{-1}{k}(x - 0)$

نعوض (100,0) في معادلة العمودي

$$0 - k = \frac{-1}{k}(100 - 0)$$

$$-k = \frac{-100}{k}$$

$$-k^2 = -100$$

$$k^2 = 100$$

$$k = \pm 10$$

$$\boxed{k = 10}$$

لان $k > 0$

* عند اضافة الجذر التربيعي ناخذ القيمة الموجبة و السالبة لكن جذر وحده ناخذ فقط القيمة الموجبة

* $x^2 = 9$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

* $\sqrt{9} = 3$

السؤال [17]

اذا كان الاقتران $y = \log x$

① اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$

② معتمداً النتيجة من السؤال السابق اجد $\frac{dy}{dx}$ لاقتران $y = \log ax^2$ حيث (a) عدد حقيقي موجب

السؤال [18]

يمثل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t \quad , t \geq 0$

موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث

(s) الموقع بالامتار (t) الزمن بالثواني

① اجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

② اجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون اول مرة بعد انطلاقه

③ اجد موقع الجسيم عندما يصل لاقصى سرعة متجهة مبرراً اجابتي

الحل:

$s(t) = 4 - \sin t$

①

$v(t) = 0 - \cos t$

$a(t) = 0 - - \sin t$

$a(t) = \sin t$

②

حالة سكون ← $v = 0$

اول مرة بعد الانطلاق ← اول زمن

$v(t) = -\cos t$

$0 = -\cos t$

$\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} \quad , \quad t = \frac{3\pi}{2}$

اول مرة ←

$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2}$

$4 - 1 = 3m$

③ اقصى سرعة $v'(t) = 0$

$v(t) = -\cos t$

$v'(t) = + + \sin t$

$0 = \sin t$

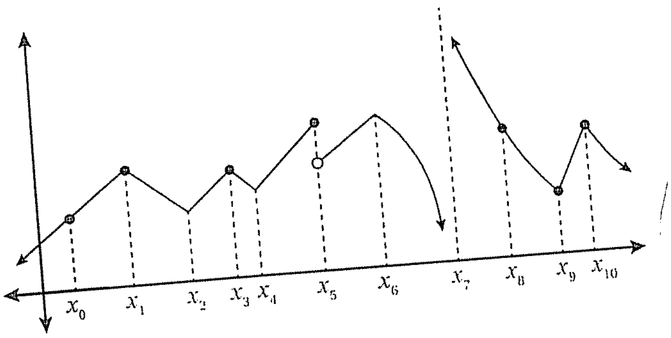
$t = 0, \pi, 2\pi$

$s(0) = 4 - \sin 0$

$s(0) = 4 - 0 = 4m$

اسئلة كتاب التمارين

السؤال 1 جد قيم (X) التي لا يكون عندها الاقتران f(X) قابلاً الاشتقاق



$$X = \{X_5, X_7, X_1, X_2, X_3, X_4, X_6, X_9, X_{10}\}$$

السؤال 2 : أجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = 9e^X + \frac{1}{3\sqrt{X}}$

$f(X) = 9e^X + \frac{1}{3X^{\frac{1}{2}}}$

$f(X) = 9e^X + \frac{1}{3}X^{-\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(X) = 9e^X + \frac{1}{3} * -\frac{1}{2} X^{-\frac{3}{2}}$

$\bar{f}(X) = 9e^X + \frac{-1}{6} X^{-\frac{3}{2}}$

$\bar{f}(X) = 9e^X + -\frac{1}{6\sqrt{X^3}}$

② $f(X) = 2e^X + \frac{1}{X^2}$

$f(X) = 2e^X + X^{-2}$

$\bar{f}(X) = 2e^X + -2X^{-3}$

$\bar{f}(X) = 2e^X + -\frac{2}{X^3}$

* يسمح برفع المقدار او انزاله بشرط عكس اشارة الاس

③ $f(X) = \frac{\pi}{2}\sin X - \cos X$

$\bar{f}(X) = \frac{\pi}{2}\cos X - -\sin X$

$\bar{f}(X) = \frac{\pi}{2}\cos X + \sin X$

السؤال 3

اثبت عدم وجود مماس افقي لمنحنى الاقتران

$f(X) = 3X + \sin X + 2$

$\bar{f}(X) = 3 + \cos X$

$3 + \cos X \qquad 1 \geq \cos X \geq -1$

$\cos X = 1 \qquad \cos X = -1$

$3 + 1 \neq 0$

$3 - 1 \neq 0$

لا يوجد قيمة (X) يتم تعويضها داخل $\bar{f}(X)$ يصبح الناتج صفراً

السؤال $\boxed{4}$

يمثل الاقتران : $s(t) = 3t^2 - t^3 \quad t \geq 0$

موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث

(s) الموقع بالامتار ، (t) الزمن بالثواني جد

① سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد (t) ثانية

② أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجسيم في حالة سكون

الحل: ①

$$s(t) = 3t^2 - t^3$$

$$v(t) = 6t - 3t^2$$

$$a(t) = 6 - 6t$$

② حالة سكون $\longleftarrow$ $v(t) = 0$

$$v(t) = 6t - 3t^2$$

$$0 = 3t(2 - t)$$

$$\boxed{t=0} \quad \boxed{t=2}$$

$$s(t) = 3t^2 - t^3$$

$$s(0) = 3(0)^2 - (0)^3$$

$$s(0) = 0 - 0 = 0\,m$$

$$s(2) = 3(2)^2 - (2)^3$$

$$s(2) = 12 - 8$$

$$s(2) = 4\,m$$

السؤال $\boxed{5}$

اذا كان $f(x) = \ln x^2$ حيث $x > 0$ جد

① أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند $x = e^2$

② أجد الاحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

الحل: $x = e^2$ $\quad m =$

$y =$

$\boxed{y}$

$$f(x) = \ln x^2$$

$$f(e^2) = \ln (e^2)^2$$

$$f(e^2) = \ln e^4$$

$$f(e^2) = 4 \ln e$$

$$f(e^2) = 4 * 1$$

$$f(e^2) = 4$$

$\boxed{m}$

$$f(x) = \ln x^2$$

$$f(x) = 2 \ln x$$

$$f'(x) = 2 * \frac{1}{x}$$

$$f'(e^2) = 2 * \frac{1}{e^2} = \frac{2}{e^2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2)$$

السؤال $\boxed{6}$

اذا كان الاقتران : $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$

1 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$
عند $x = 0$

2 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$
عندما $x = \frac{\pi}{2}$

الحل:

1
$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$
$$\bar{f}(x) = 2\cos x - 4 * -\sin x$$
$$\bar{f}(x) = 2\cos x + 4\sin x$$
$$\bar{f}(0) = 2\cos(0) + 4\sin(0)$$
$$\bar{f}(0) = 2*1 + 4*0$$
$$\bar{f}(0) = 2 + 0$$
$$\bar{f}(0) = 2$$

2
$$\bar{f}(x) = 2\cos x + 4\sin x$$
$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2}$$
$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2*0 + 4*1$$
$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 4$$
$$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

الدرس الثاني : مشتقتا الضرب و القسمة و المشتقات العليا

أولاً : مشتقة ضرب اقترانين

A القانون بالكلمات ←

* الاول X مشتقة الثاني + الثاني X مشتقة الاول

القانون بالرموز ←

* $$\overline{(fg)}(x) = f(x) * \bar{g}(x) + g(x) * \bar{f}(x)$$

B اثبات القانون

① $$A(x) = f(x)\, g(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \bar{A}(x)$$

$A(x+h)$

$$A(x) = f(x)\, g(x)$$

$$A(x+h) = f(x+h)\, g(x+h)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h}$$

② بطرح و اضافة $f(x+h)g(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

③ بفصل العوامل

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x+h)\, g(x)}{h} \quad P_1$$

$+$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x)}{h} \quad P_2$$

④ بتوزيع النهاية

$$P_1 \quad \lim_{h \to 0} f(x+h) * \frac{[\, g(x+h) - g(x) \,]}{h}$$

$+$

$$P_2 \quad \lim_{h \to 0} g(x) * \frac{[\, f(x+h) - f(x) \,]}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \bar{g}(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \bar{f}(x)$$

⑤ بالتبسيط

$$f(x)\, \bar{g}(x) + g(x) * \bar{f}(x)$$

تذكر : بما ان g , f قابلان الاشتقاق
فانهما متصلان كذلك

مثال: جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = (3X - 2X^2)(5 + 4X)$

$$\bar{f}(X) = (3X - 2X^2) * 4 + (5 + 4X) * (3 - 4X)$$

$$\bar{f}(X) = 12X - 8X^2 + 15 - 20X + 12X - 16X^2$$

$$\bar{f}(X) = -24X^2 + 4X + 15$$

② $f(X) = X e^X$

$$\bar{f}(X) = X * 1 * e^X + e^X * 1$$

$$\bar{f}(X) = X e^X + e^X$$

ثانياً: مشتقة قسمة اقترانين $\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

A القانون

بالكلمات ←

$$\frac{\text{المقام} * \text{مشتقة البسط} - [\text{البسط} * \text{مشتقة المقام}]}{(\text{المقام})^2}$$

بالرموز ←

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) * \bar{f}(x) - [f(x) * \bar{g}(x)]}{(g(x))^2}$$

B اثبات القانون

$$A(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$$

① التعريف العام للمشتقة

$$\bar{A}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{A(X+h) - A(X)}{h}$$

② بتعويض $A(X) = \dfrac{f(X)}{g(X)}$

$$\bar{A}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(X+h)}{g(X+h)} - \dfrac{f(X)}{g(X)}}{h}$$

③ بتوحيد المقامات

$$\bar{A}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{g(X) f(X+h) - f(X) g(X+h)}{g(X) * h * g(X+h)}$$

④ بطرح وإضافة $g(X) f(X)$

$$\bar{A}(X) = \lim_{h \to 0} \frac{g(X) f(X+h) - f(X) g(X) + f(X) g(X) - f(X) g(X+h)}{h}$$

⑤ بفصل العوامل

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X+h) g(X) - f(X) g(X)}{h} \quad (P_1)$$

$$+$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X) g(X) - f(X) g(X+h)}{h} \quad (P_2)$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-4X}{(1+X^2)^2}$$

② $$f(X) = \frac{\ln X}{X+1}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{(X+1) * \frac{1}{X} - [\ln X * 1]}{(X+1)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{1 + \frac{1}{X} - \ln X}{(X+1)^2}$$

بضرب كل من البسط والمقام بـ X
حتى نتخلص من $\frac{1}{X}$

$$\bar{f}(X) = \frac{X + 1 - X\ln X}{X(X+1)^2}$$

* معدل التغير *

① عندما يطلب ايجاد معدل التغير يكون
يطلب ايجاد المشتقة

جد معدل التغير = جد المشتقة

② كثير من المقادير الرياضية تتغير بالنسبة
الى الزمن لذلك نشتقها رمز $\frac{d}{dt}$

$$\lim_{h \to 0} g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \quad P_1$$

$g(x) * \bar{f}(x) \rightarrow$ مقام * مشتقة بسط

$$\lim_{h \to 0} f(x)\left[\frac{g(x) - g(x+h)}{h}\right] \quad P_2$$

$f(x) * -\bar{g}(x) \rightarrow$ بسط * مشتقة مقام
لأننا عكس الدمل

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \bar{g}(x)$$

$*\ g(x) = \lim g(x+h) = (g(x))^2$
(المقام)

⑥ بالترتيب

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)\bar{f}(x) - (f(x) * \bar{g}(x))}{(g(x))^2}$$

مثال: جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $$f(X) = \frac{1 - X^2}{1 + X^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{(1+X^2) * -2X - [(1-X^2) * 2X]}{(1+X^2)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-2X - 2X^3 - [2X - 2X^3]}{(1+X^2)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-2X - 2X^3 - 2X + 2X^3}{(1+X^2)^2}$$

مثال: تعطى درجة حرارة مريض اثناء مرضه بالاقتران $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$ حيث

(t) الزمن بالساعات بعد ظهور الاعراض

(T) درجة الحرارة بالفهرنهايت

① اجد معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة الى الزمن

$$T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.9$$

$$T'(t) = \frac{(1+t^2)\frac{d}{dt}4t - [4t * \frac{d}{dt}(1+t^2)]}{(1+t^2)^2}$$

$$T'(t) = \frac{(1+t^2) * 4 - [4t * 2t]}{(1+t^2)^2}$$

$$T'(t) = \frac{4+4t^2 - 8t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$T'(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

② اجد معدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t=2$ مفسراً معنى الناتج

$$T'(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$T'(2) = \frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}$$

$$\frac{4-16}{25} = -0.48$$

اي ان درجة حرارة المريض تقل بمعدل 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة عند الزمن $2h$

ثالثاً: مشتقة ثابت على اقتران

// مشتقة المقلوب //

$\boxed{A}$ القانون

بالكلمات ←

$$\frac{\text{- الثابت * مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^2}$$

بالرموز ←

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-1 * f'(x)}{(f(x))^2}$$

$\boxed{B}$ الاثبات

$$A(x) = \frac{1}{f(x)}$$

بتطبيق مشتقة قاعدة القسمة

$$A'(x) = \frac{f(x) * 0 - [1 * f'(x)]}{(f(x))^2}$$

$$A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال: أجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{-1 * 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

② $f(t) = \dfrac{1}{t + \frac{1}{t}}$

* للتخلص من $\frac{1}{t}$ نضرب كل من البسط و المقام بـ t

$$f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \quad \begin{matrix} *t \\ *t \end{matrix}$$

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

$$f'(t) = \frac{(t^2+1)*1 - [t * 2t]}{(t^2+1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{1 - t^2}{(t^2+1)^2}$$

رابعاً: مشتقة الاقترانات الدائرية

* مشتقة دائري ← مشتقة زاوية * مشتقة دائري لنفس الزاوية

① $\tan x \longrightarrow \sec^2 x$

② $\cot x \longrightarrow \ominus \csc^2 x$

③ $\sec x \longrightarrow \sec x \tan x$

④ $\csc x \longrightarrow \ominus \csc x \cot x$

ملاحظة: عند وجود (c) في الاقترانات الدائرية نضيف الاشارة السالبة $c = \ominus$

اثبات مشتقة الاقترانات الدائرية

① $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

بتطبيق قاعدة مشتقة القسمة

$$f'(x) = \frac{\cos x * \cos x - [\sin x * -\sin x]}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x - [-\sin^2 x]}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

④ $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1 * \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-\cos x}{\sin x \ \sin x}$$

$$\bar{f}(x) = -\cot x \ \csc x$$

$$\bar{f}(x) = -\csc x \ \cot x$$

⊛ بشكل عام

① نكتب $\csc x \ // \sec x \ // \cot x \ // \tan x$ على صورة $\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

② نطبق قاعدة مشتقة اقتران القسمة

تذكر

* $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

* $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

* $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

* $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

② $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{\sin x * -\sin x - [\cos x * \cos x]}{(\sin x)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin^2 x)}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1 * 1}{\sin^2 x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\bar{f}(x) = -\csc^2 x$$

③ $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1 * -\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{\sin x}{\cos x \ \cos x}$$

$$\bar{f}(x) = \tan x \ \sec x$$

$$\bar{f}(x) = \sec x \ \tan x$$

مثال: اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = x^2 \sec x$

$$f'(x) = x^2 * \sec x \tan x + \sec x * 2x$$

$$f'(x) = x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$$

② $f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\tan x) * -\csc x \cot x - [\csc x * \sec^2 x]}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$\cot x * \tan x = 1$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} * \frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

* مشتقة ضرب ثلاثة اقترانات *

$$L(x) = f(x) * g(x) * h(x)$$

$$L'(x) = f'(x) * g(x) * h(x)$$

$$+$$

$$f(x) * g'(x) * h(x)$$

$$+$$

$$f(x) * g(x) * h'(x)$$

* المشتقات العليا *

$$f \longrightarrow f' \longrightarrow f'' \longrightarrow f''' \longrightarrow f''''$$

f': مشتقة f ، f'': مشتقة f' ، f''': مشتقة f'' ، f'''': مشتقة f'''

✓ الترتيب مهم لعملية الاشتقاق

✓ رموز المشتقات العليا

الثانية ← $\frac{d}{dx} f'(x) \;//\; f^{(2)}(x) \;//\; \frac{d^2y}{dx^2} \;//\; y''$

الرابعة ← $\frac{d}{dx} f'''(x) \;//\; f^{(4)}(x) \;//\; \frac{d^4x}{dx^4} \;//\; y''''$

مثال: اجد المشتقات الاربع الاولى للاقتران

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

Sol:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{-1*1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{-1*2x}{x^4}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{-2}{x^3}$$

$$f'''(x) = 0 + \frac{2*3x^2}{x^6}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$f''''(x) = \frac{-6*4x^3}{x^8}$$

$$f''''(x) = \frac{-24}{x^5}$$

التحقق من فهمي ①

أجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3) * (14x - 4)$

$+ \; (7x^2 - 4x) * (3x^2 - 4x)$

② $f(x) = \ln x \cos x$

$f'(x) = \ln x * -\sin x + \cos x * \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$

التحقق من فهمي ②

أجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

$f'(x) = \frac{(2x+1) * 1 - [x+1] * 2}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x+1 - (2x+2)}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x+1 - 2x - 2}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$

② $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

$f'(x) = \frac{e^x * \cos x - [\sin x * e^x]}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{e^{2x}}$

$f'(x) = \frac{\cancel{e^x}(\cos x - \sin x)}{\cancel{e^x}\, e^x}$

$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$

التحقق من فهمي (3)

يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران

$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$ حيث (t) الزمن بالسنوات

(P) عدد السكان بالآلاف

1. اجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة الى الزمن

2. اجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ مفسراً الناتج

الحل:

1.
$$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$$

$$\bar{P}(t) = \frac{(2t+9)*1000t - [(500t^2)*2]}{(2t+9)^2}$$

$$\bar{P}(t) = \frac{2000t^2 + 9000t - 1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$\bar{P}(t) = \frac{1000t^2 + 9000t}{(2t+9)^2}$$

2.
$$\bar{P}(12) = \frac{1000(12)^2 + 9000(12)}{(2(12)+9)^2}$$

$$\bar{P}(12) = \frac{144000 + 108000}{1089}$$

$$\bar{P}(12) = 231.40 \approx 231$$

التحقق من فهمي (4)

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

1. $f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1*(5-2x)}{(5x-x^2)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$$

2. $f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1*\left(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(e^x+\sqrt{x})^2}$$

$$e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1+2e^x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{\frac{1+2e^x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(e^x+\sqrt{x})^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1+2e^x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(e^x+\sqrt{x})^2}$$

التحقق من فهمي (5)

أجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = x \cot x$

$f'(x) = x * -\csc^2 x + \cot x * 1$

$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$

② $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

$f'(x) = \dfrac{(1+\sin x) * \sec^2 x - [\tan x * \cos x]}{(1+\sin x)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \tan x \cos x}{(1+\sin x)^2}$

التحقق من فهمي (6)

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$f(x) = x^{-1}\sin x$

$f'(x) = x^{-1} * \cos x + \sin x * -1x^{-2}$

$f'(x) = \boxed{\underbrace{x^{-1}\cos x}_{P_1}} + \boxed{\underbrace{-x^{-2}\sin x}_{P_2}}$

$f''(x) = x^{-1} * -\sin x + \cos x * -1 * x^{-2}$ (P_1)

+

$-x^{-2}\cos x + \sin x * -1 * -2x^{-3}$ (P_2)

$f''(x) = -x^{-1}\sin x + \boxed{-x^{-2}\cos x}$ P_1

حذف

+

$\boxed{x^{-2}\cos x} + 2x^{-3}\sin x$

$f''(x) = \boxed{\underbrace{-x^{-1}\sin x}_{P_1}} + \boxed{\underbrace{2x^{-3}\sin x}_{P_2}}$

$f'''(x) = -x^{-1} * \cos x + \sin x * -1 * -1x^{-2}$ (P_1)

+

$2x^{-3}\cos x + \sin x * -6x^{-4}$ (P_2)

$f'''(x) = -x^{-1}\cos x + x^{-2}\sin x$ (P_1)

+

$2x^{-3}\cos x + -6x^{-4}\sin x$

اسئلة الكتاب

السؤال 1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-1}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{(2x-1) * 3x^2 - [x^3 * 2]}{(2x-1)^2}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{6x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(2x-1)^2}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{4x^3}{(2x-1)^2}$

② $f(x) = x^3 \sec x$

$\bar{f}(x) = x^3 * \sec x \tan x + \sec x * 3x^2$

$\bar{f}(x) = x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$

③ $f(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{\cos x * 1 - [(x+1) * -\sin x]}{(\cos x)^2}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{\cos x - [-x \sin x - \sin x]}{(\cos x)^2}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{\cos x + x \sin x + \sin x}{(\cos x)^2}$

④ $f(x) = e^x (\tan x - x)$

$\bar{f}(x) = e^x(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x) * e^x$

$\bar{f}(x) = e^x \sec^2 x - e^x + e^x \tan x - xe^x$

$\bar{f}(x) = e^x \sec^2 x + e^x \tan x - e^x - xe^x$

⑥ $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$\bar{f}(x) = x^3 * \cos x + \sin x * 3x^2$

⊕

$x^2 * -\sin x + \cos x * 2x$

$\bar{f}(x) = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + -x^2 \sin x + 2x \cos x$

$\bar{f}(x) = x^3 \cos x + 2x \cos x + 2x^2 \sin x$

⊛ $3x^2 \sin x - x^2 \sin x = 2x^2 \sin x$

⑤ $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$

$$\bar{f}(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x) - [(\sin x + \cos x)e^x]}{(e^x)^2}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - [e^x \sin x + e^x \cos x]}{e^{2x}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \sin x - e^x \cos x}{e^{2x}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-2e^x \sin x}{e^{2x}}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-2\cancel{e^x} \sin x}{\cancel{e^x}\, e^x}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-2 \sin x}{e^x}$$

⑨ $$f(X) = \frac{2 - \frac{1}{X}}{X - 3}$$

$$2 - \frac{1}{X} = \frac{2X-1}{X}$$

$$f(X) = \frac{\frac{2X-1}{X}}{X-3}$$

$$f(X) = \frac{2X-1}{X(X-3)}$$

$$f(X) = \frac{2X-1}{X^2-3X}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{(X^2-3X)*2 - [(2X-1)*(2X-3)]}{(X^2-3X)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{2X^2-6X - [4X^2-6X-2X+3]}{(X^2-3X)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{2X^2-6X-4X^2+6X+2X-3}{(X^2-3X)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-2X^2+2X-3}{(X^2-3X)^2}$$

⑦ $$\sqrt[3]{X}\,(\sqrt{X}+3)$$

$$X^{\frac{1}{3}}(X^{\frac{1}{2}}+3)$$

$$(X^{\frac{1}{3}} * X^{\frac{1}{2}} + 3X^{\frac{1}{3}})$$

$$X^{\frac{5}{6}} + 3X^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{5}{6}X^{-\frac{1}{6}} + 3*\frac{1}{3}X^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{5}{6X^{\frac{1}{6}}} + \frac{1}{X^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{5}{6\sqrt[6]{X}} + \frac{1}{\sqrt[3]{X^2}}$$

⑧ $$f(X) = \frac{1+\sec X}{1-\sec X}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{(1-\sec X)*\sec X\tan X - [(1+\sec X)*-\sec X\tan X]}{(1-\sec X)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\sec X\tan X - \sec^2 X\tan X - [-\sec X\tan X - \sec^2 X\tan X]}{(1-\sec X)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\sec X\tan X - \sec^2 X\tan X + \sec X\tan X + \sec^2 X\tan X}{(1-\sec X)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{2\sec X\tan X}{(1-\sec X)^2}$$

$* \quad -\sec^2 X\tan X + \sec^2 X\tan X = 0$

$* \quad \sec X\tan X + \sec X\tan X = 2\sec X\tan X$

السؤال $\boxed{2}$:

اذا كان $f(x)$ و $g(x)$ قابلين الاشتقاق عندما $x=0$ وكان :

$f(0)=5$ // $f'(0)=-3$ // $g(0)=-1$ // $g'(0)=2$

جد كلا مما يلي

① $(fg)'(0)$

$= f(0) * g'(0) + g(0) * f'(0)$

$5 * 2 + -1 * -3$

$10 + 3$

$= 13$

② $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$$= \frac{g(0) * f'(0) - [f(0) * g'(0)]}{(g(0))^2}$$

$$= \frac{-1 * -3 - [5 * 2]}{(-1)^2}$$

$$= \frac{3 - (10)}{1}$$

$= -7$

⑩ $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

$f'(x) = (3x^2 - 1) * (x^2 + 2) * (x^2 + x + 1)$

$+$

$(x^3 - x) * (2x) * (x^2 + x + 1)$

$(x^3 - x) * (x^2 + 2) * (2x + 1)$

⑪ $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

$f'(x) = -1(\csc x + \cot x)^{-2}(-\csc x \cot x - \csc^2 x)$

$f'(x) = (\csc x \cot x + \csc^2 x)(\csc x + \cot x)^{-2}$

$\circledast$ $f(x) = (g(x))^n$

$f'(x) = n\,(g(x))^{n-1} * g'(x)$

السؤال $\boxed{3}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يلي عند قيمة (X) المعطاة

① $f(X) = \dfrac{X^2 - 4}{X^2 + 4}$ ، $X = -2$

$$\acute{f}(X) = \frac{(X^2+4)*2X - [(X^2-4)*2X]}{(X^2+4)^2}$$

$$\acute{f}(X) = \frac{2X^3 + 8X - [2X^3 - 8X]}{(X^2+4)^2}$$

$$\acute{f}(X) = \frac{2X^3 + 8X - 2X^3 + 8X}{(X^2+4)^2}$$

$$\acute{f}(X) = \frac{16X}{(X^2+4)^2}$$

$$\ddot{f}(X) = \frac{(X^2+4)^2*16 - [16X*2(X^2+4)*2X]}{(X^2+4)^4}$$

$$\ddot{f}(-2) = \frac{((-2)^2+4)^2*16 - [16(-2)*2((-2)^2+4)\,2*(-2)]}{((-2)^2+4)^4}$$

$$\ddot{f}(-2) = \frac{64*16 - [-32*2*8*-4]}{4096}$$

$$\ddot{f}(-2) = \frac{1024 - (2048)}{4096} = -\frac{1}{4}$$

③ $(7f - 2fg)'(0)$

$= 7*\acute{f}(0) - (2f(0)*\acute{g}(0) + g(0)*2\acute{f}(0))$

$= 7*-3 - (2*5*2 + -1*2*-3)$

$= -21 - (20 + 6)$

$= -21 - 26$

$= -47$

⊛ عندما يأتي بعد الاشارة السالبة حاصل ضرب اقترانين يفضل التعامل مع الاقواس كالتالي

$-(f(X)*g(X))$

1 يتم تطبيق الاشتقاق

2 ثم يتم توزيع الاشارة السالبة

⊛ ملاحظة : عندما يطلب السؤال مشتقة عند عدد فاننا

1 نشتق

2 نعوض العدد مباشرة دون ترتيب المشتقة

③ $f(X) = \dfrac{1}{1+\sqrt{X}}$, $X = 4$

$$\bar{f}(X) = \frac{-1 * \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{X}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\bar{f}(X) \quad \frac{-1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-1}{2\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}+X\right)}$$

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}+2X+2X^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{\bar{f}}(X) = \frac{++1*\left(\cancel{2}*\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}+2+\cancel{2}*\frac{3}{\cancel{2}}X^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(2\sqrt{x}+2X+2\sqrt{X^3}\right)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(4) = \frac{1*\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+2+3*\sqrt{4}\right)}{\left(2\sqrt{4}+2(4)+2\sqrt{(4)^3}\right)^2}$$

$$\bar{\bar{f}}(4) = \frac{\frac{1}{2}+2+6}{\left(4+8+16\right)^2}$$

$$\frac{8.5}{784}$$

② $f(X) = \dfrac{1+X}{1+\sqrt[3]{X}}$, $X = 8$

$$f(X) = \frac{\cancel{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\left(1-\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right)}{\cancel{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}}$$

$$f(X) = 1-\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

$$f(X) = 1 - X^{\frac{1}{3}} + X^{\frac{2}{3}}$$

$$\bar{f}(X) = 0 - \frac{1}{3}X^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}X^{-\frac{1}{3}}$$

$$\bar{\bar{f}}(X) = -\frac{1}{3}*-\frac{2}{3}X^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}*-\frac{1}{3}X^{-\frac{4}{3}}$$

$$\bar{\bar{f}}(X) = \frac{2}{9\,X^{\frac{5}{3}}} + \frac{-2}{9\,X^{\frac{4}{3}}}$$

$$\bar{\bar{f}}(X) = \frac{2}{9\sqrt[3]{X^5}} + \frac{-2}{9\sqrt[3]{X^4}}$$

$$\bar{\bar{f}}(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^5}} + \frac{-2}{9\sqrt[3]{(8)^4}}$$

$$\bar{\bar{f}}(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{(2^3)^5}} + \frac{-2}{9\sqrt[3]{(2^3)^4}}$$

$$\frac{2}{9*32} + \frac{-2}{9*16}$$

$$\frac{2}{288} + \frac{-2}{144}$$

$$\frac{1}{144} - \frac{2}{144} = -\frac{1}{144}$$

السؤال 4

اجد معادلة المماس لكل اقتران ممايلي

عند النقطة المعطاه $\quad x = \quad y = \quad m =$

① $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
(x, y)

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)*1 - [1+x]*(0+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(1+e^0)*1 - [1+0]*(0+e^0)}{(1+e^0)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(1+1)*1 - [1]*(0+1)}{(1+1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0)$$

② $f(x) = e^x \cos x + \sin x$, $(0, 1)$

$$f'(x) = e^x * -\sin x + \cos x * e^x + \cos x$$

$$f'(0) = e^0 * -\sin 0 + \cos 0 * e^0 + \cos 0$$

$$f'(0) = 1 * 0 + 1 * 1 + 1$$

$$f'(0) = 0 + 1 + 1$$

$$f'(0) = 2 = m$$

$(x, y) \quad m = 2$
$(0, 1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0)$$

⊛ $\boxed{f'(x)} = m$, x

السؤال 5

اثبت صحة كل ممايأتي معتمداً

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \;||\; \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

① $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x * -\sin x - (\cos x * \cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x)^2}$$

$$\frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

⊛ $\frac{1}{\sin x} = \csc x$ ⊛ $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

السؤال $\boxed{6}$:

لاحظ المشتقة المعطاه لكل مايلي ثم أوجد المشتقة العليا المطلوبة

① $f'''(x) = 2 - \dfrac{2}{x} \quad // \quad f'''(x)$

$f'''(x) = 0 - \dfrac{-2*1}{x^2}$

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^2}$

② $f'''(x) = 2\sqrt{x} \quad // \quad f^{(4)}(x)$

$f^{(4)}(x) = 2 * \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

③ $f^{(4)}(x) = 2x + 1 \quad // \quad f^{(6)}(x)$

$f^{(5)}(x) = 2$

$f^{(6)}(x) = 0$

② $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \dfrac{-1 * -\sin x}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x \cos x}$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} * \dfrac{1}{\cos x}$

$\tan x \ \sec x$

③ $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = \dfrac{-1 * \cos x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{-\cos x}{\sin x \ \sin x}$

$= \dfrac{-\cos x}{\sin x} * \dfrac{1}{\sin x}$

$-\cot x * \csc x$

$= -\csc x \cot x$

السؤال $\boxed{7}$:

①

نباتات هجينة :- وجد فريق بحث زراعي
انه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مهجنة من
نبات تباع الشمس h بالأمتار باستعمال الاقتران

$$h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2} \quad // \; t \rightarrow$$ الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور

أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة للزمن

$$h'(t) = \frac{(4+t^2) * 6t - [3t^2 * 2t]}{(4+t^2)^2}$$

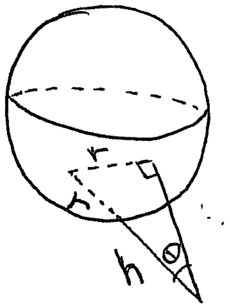
$$h'(t) = \frac{24t + 6t^3 - 6t^3}{(4+t^2)^2}$$

$$h'(t) = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

② اقمار صناعية: عندما ترصد الاقمار الصناعية
الارض فانه يمكنها مسح جزء فقط من سطح
الارض و بعض الاقمار الصناعيه تحتوي مستشعرات
لقياس الزاوية θ بالراديان اذا كان
(h) يمثل المسافة بين القمر الصناعي و سطح الارض
بالكيلو متر و (r) يمثل نصف قطر الارض
بالكيلو متر فاجب عما يلي

$\boxed{a}$ اثبت ان $h = r(\csc\theta - 1)$

$\boxed{b}$ اجد معدل تغير h بالنسبة الى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad افترض ان $((r = 6371 \text{ km}))$



الحل:

①

$$\sin\theta = \frac{r}{r+h}$$

$$\frac{1}{\csc\theta} = \frac{r}{r+h}$$

$$r + h = \csc\theta \, r$$

$$h = \csc\theta \, r - r$$

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

②

$$h = r(\csc\theta - 1)$$

$$\frac{dh}{dt} = r(-\csc\theta \cot\theta - 0)$$

$$\frac{dh}{dt} = 6371\left(\frac{-1}{\sin\theta} * \frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = 6371\left(\frac{-1}{\sin\frac{\pi}{6}} * \frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = 6371 * \left(\frac{-1}{\frac{1}{2}} * \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = 6371(-2\sqrt{3})$$

$$\frac{dh}{dt} = -12742\sqrt{3}$$

السؤال $\boxed{8}$:

اذا كان الاقتران $y = e^{x}\sin x$ فاجب عما يلي

① أجد $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = e^{x}\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} * \cos x + \sin x * e^{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{x}\cos x}_{P_1} + \underbrace{e^{x}\sin x}_{P_2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x} * -\sin x + \cos x * e^{x} \quad P_1$$

$$+$$

$$e^{x} * \cos x + \sin x * e^{x} \quad P_2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{x}\sin x + e^{x}\cos x + e^{x}\cos x + e^{x}\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x}\cos x + e^{x}\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{x}\cos x$$

② أثبت ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

$$2e^{x}\cos x = 2 * (e^{x}\cos x + e^{x}\sin x) - 2(e^{x}\sin x)$$

$$2e^{x}\cos x = 2e^{x}\cos x + 2e^{x}\sin x - 2e^{x}\sin x$$

$$2e^{x}\cos x = 2e^{x}\cos x$$

السؤال $\boxed{9}$:

اذا كان $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$

اثبت ان $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

الحل:

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f'(x) = 9 * \frac{1}{x} + \frac{-1 * 4x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} + \frac{-4x}{4x\, x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} + \frac{-1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9x^3 - x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}(9x^2 - 1)}{\cancel{x}\, x^3}$$

$$f'(x) = \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

⊛ $9x^2 - 1 \rightarrow$ فرق مربعين

$(3x-1)(3x+1)$ $\quad$ $3x$ ①

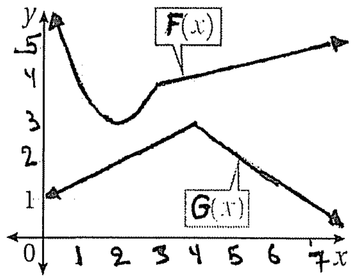
⊛ $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{BC + AD}{BD}$

السؤال ١٥

يمثل الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $F(X)$ و $G(X)$ اذا كان

$$P(X) = F(X) * G(X)$$

$$Q(X) = \frac{F(X)}{G(X)}$$



جد كل مما يلي

① $\bar{P}(2)$

② $\bar{Q}(7)$

الحل:

①

$$P(X) = F(X) * G(X)$$

$$\bar{P}(X) = F(X) * \bar{G}(X) + G(X) * \bar{F}(X)$$

$$\bar{P}(2) = F(2) * \bar{G}(2) + G(2) * \bar{F}(2)$$

$F(2) = 3$

$G(2) = 2$

$\bar{F}(2) = 0$

* القاعدة القمة والقاع $\bar{F}(X) = 0$ $\cap$ $\cup$

$\bar{G}(2) \rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ (0, & 1) \\ (2, & 2) \\ x_2 & y_2 \end{matrix}$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{2-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{P}(2) = F(2) * \bar{G}(2) + G(2) * \bar{F}(2)$$

$$\bar{P}(2) = 3 * \frac{1}{2} + 2 * 0$$

$$\bar{P}(2) = \frac{3}{2}$$

②

$$Q(X) = \frac{F(X)}{G(X)}$$

$$\bar{Q}(X) = \frac{G(X) * \bar{F}(X) - [F(X) * \bar{G}(X)]}{(G(X))^2}$$

$$\bar{Q}(7) = \frac{G(7) * \bar{F}(7) - [F(7) * \bar{G}(7)]}{(G(7))^2}$$

$F(7) = 5$

$G(7) = 1$

$\bar{F}(7) \rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ (7, & 5) \\ (3, & 4) \\ x_2 & y_2 \end{matrix}$

$$\bar{F}(7) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-5}{3-7} = \frac{-1}{-4}$$

$$\bar{F}(7) = \frac{1}{4}$$

$\bar{G}(7) \rightarrow$ $\begin{matrix} (7, & 1) \\ (4, & 3) \end{matrix}$

$$\bar{G}(7) = \frac{3-1}{4-7} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\bar{Q}(7) = \frac{1 * \frac{1}{4} - \left(5 * -\frac{2}{3}\right)}{(1)^2}$$

$$\frac{1}{4} - \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{43}{12}$$

السؤال $\boxed{11}$

اذا كان $y = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ فأجب عمايلي

① أجد ميل المماس عند نقطة الاصل

② أبين عدم وجود مماس افقي لاقتران y مبرراً اجابتي

الحل

①

$$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+e^{-x}) * (0 - -1e^{-x}) - [(1-e^{-x}) * -1e^{-x}]}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+e^{-x}) * e^{-x} - [(1-e^{-x}) * -e^{-x}]}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+e^{-(0)})\, e^{-(0)} - [(1-e^{-(0)}) * -e^{-(0)}]}{(1+e^{-(0)})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+1)*1 - [(1-1)*1]}{(1+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2*1 - [0*1]}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

②

السؤال $\boxed{12}$

اذا كان $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ حيث $x \neq 1$ فجد

① أجد $\dfrac{dy}{dx}$

② اعيد كتابة المعادلة بالنسبة للمتغير (x) (x اقتران بالنسبة الى y) ثم اجد $\dfrac{dx}{dy}$

③ ابين ان $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

①

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)*1 - [(x+1)*1]}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1 - [x+1]}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1 \quad -x-1}{(x-1)^2}$$

السؤال $\boxed{13}$

اذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ فاجب عمايلي

① اثبت ان $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$

② اجد قيمة المقدار

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

الحل:

①

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 * \frac{1}{x} - [\ln x * 2x]}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x - (2x\ln x)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{\cancel{x}\, x^3}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x^3 * \left(-2 * \frac{1}{x}\right) - [1 - 2\ln x] * 3x^2}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{x^3 * \frac{-2}{x} - (3x^2 - 6x^2\ln x)}{x^6}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\ln x}{x^6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

②

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1)*1 - [(y+1)*1]}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - 1 - y - 1}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

③

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1 - x + 1}{x-1}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2(x-1)^2}{4} = \frac{(x-1)^2}{-2} \rightarrow \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

أسئلة كتاب التمارين

السؤال [1]

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f'(x) = \frac{x * \cos x - [\sin x * 1]}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

---

② $f(x) = -\csc x - \sin x$

$f'(x) = - - \csc x \cot x - \cos x$

$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$

---

③ $f(x) = x \cot x$

$f'(x) = x * -\csc^2 x + \cot x * 1$

$f'(x) = -x \csc^2 x + \cot x$

$f''(x) = \frac{\cancel{x^2}(-2 - 3 + 6 \ln x)}{\cancel{x^2} \; x^4}$

$f''(x) = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$

② $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$

$\cancel{x^4} * \frac{6 \ln x - 5}{\cancel{x^4}} + 4\cancel{x^3} * \frac{1 - 2 \ln x}{\cancel{x^3}}$

$+ 2\cancel{x^2} * \frac{\ln x}{\cancel{x^2}} + 1$

$6 \ln x - 5 + 4(1 - 2 \ln x) + 2 \ln x + 1$

④ $$f(X) = \frac{X + C}{X + \frac{C}{X}}$$

نضرب كل من البسط و المقام ب (X) لتسهيل الاختصار و يمكن بدلا من ذلك توحيد المقامات

$$f(X) = \frac{X + C \quad * X}{X + \frac{C}{X} \quad * X}$$

$$f(X) = \frac{X^2 + CX}{X^2 + C}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{(X^2+C) * (2X + C) - [(X^2 + CX) * 2X]}{(X^2 + C)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{2X^3 + 2CX + X^2C + C^2 - [2X^3 + 2CX^2]}{(X^2 + C)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{2X^3 + 2CX + X^2C + C^2 - 2X^3 - 2CX^2}{(X^2 + C)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{X^2C - 2X^2C + 2CX + C^2}{(X^2 + C)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-X^2C + 2CX + C^2}{(X^2 + C)^2}$$

⑤ $$f(X) = 4X - X^2 \tan X$$

$$\bar{f}(X) = 4 - (X^2 \sec^2 X + \tan X * 2X)$$

$$\bar{f}(X) = 4 - X^2 \sec^2 X - 2X \tan X$$

⑥ $$f(X) = \frac{\cos X}{X^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{X^2 * -\sin X - [\cos X * 2X]}{X^4}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-X^2 \sin X - 2X \cos X}{X^4}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\cancel{X}(-X \sin X - 2 \cos X)}{\cancel{X} X^3}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-X \sin X - 2 \cos X}{X^3}$$

⑦ $f(X) = X\left(1 - \dfrac{4}{X+3}\right)$

$$f(X) = X - \frac{4X}{X+3}$$

$$\bar{f}(X) = 1 - \left[\frac{(X+3)*4 - (4X)*1}{(X+3)^2}\right]$$

$$\bar{f}(X) = 1 - \left[\frac{4X+12 - 4X}{(X+3)^2}\right]$$

$$\bar{f}(X) = 1 - \frac{12}{(X+3)^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{(X+3)^2 - 12}{(X+3)^2}$$

⑧ $f(X) = \dfrac{3(1 - \sin X)}{2\cos X}$

$$f(X) = \frac{3}{2} * \frac{1 - \sin X}{\cos X}$$

$$f(X) = \frac{3}{2} * \frac{1}{\cos X} - \frac{\sin X}{\cos X}$$

$$f(X) = \frac{3}{2} * (\sec X - \tan X)$$

$$\bar{f}(X) = \frac{3}{2} * (\sec X \tan X - \sec^2 X)$$

$$\bar{f}(X) = \frac{3}{2}\sec X \tan X - \frac{3}{2}\sec^2 X$$

⊛ $\dfrac{A * \text{بسط}}{B * \text{مقام}} = \dfrac{A}{B} * \dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

حسب ثوابت البسط والمقام لتسهيل الحل

ملاحظة: يمكن الاشتقاق مباشرة دون الترتيب و سيكون نفس الحل

⑨ $f(X) = (X+1)e^X$

$$\bar{f}(X) = (X+1) * e^X + e^X * 1$$

$$\bar{f}(X) = Xe^X + e^X + e^X$$

$$\bar{f}(X) = Xe^X + 2e^X$$

السؤال $\boxed{2}$:

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة

① $f(x) = x^2 \cos x \quad // \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

② $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} \quad // (\pi, -1)$

الحل:

① $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad m =$

$y = 0$

$f(x) = x^2 \cos x$

$\bar{f}(x) = x^2 * -\sin x + \cos x * 2x$

$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 * -\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} * 2 * \frac{\pi}{2}$

$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} * -1 + 0 * 2 * \frac{\pi}{2}$

$\bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

② $x = \pi$ $\quad m =$

$y = -1$

$f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{\cos x * \cos x - [(1+\sin x) * -\sin x]}{(\cos x)^2}$

$\bar{f}(\pi) = \dfrac{\cos\pi * \cos\pi - [(1+\sin\pi) * -\sin\pi]}{(\cos\pi)^2}$

$\bar{f}(\pi) = \dfrac{-1 * -1 - [(1+0) * 0]}{(-1)^2}$

$\bar{f}(\pi) = \dfrac{1 - 0}{1} = 1 = m$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -1 = 1(x - \pi)$

$y + 1 = x - \pi$

السؤال $\boxed{3}$

اجد احداثي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مماس افقي

① $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{x^2 * 2 - [(2x-1) * 2x]}{x^4}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{2x^2 - [4x^2 - 2x]}{x^4}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$

$0 = \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^4}$

$-2x^2 + 2x = 0$

$2x - 2x^2 = 0$

$2x(1 - x)$

$x = 0 \qquad x = 1$

② $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$\bar{h}(x) = \dfrac{(x^2+1)*2x - [x^2 * 2x]}{(x^2+1)^2}$

$\bar{h}(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2}$

$\bar{h}(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$0 = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$2x = 0$

$\boxed{x = 0}$

③ $g(x) = \dfrac{8(x-2)}{e^x}$

$g(x) = \dfrac{8x - 16}{e^x}$

$\bar{g}(x) = \dfrac{e^x * 8 - [(8x-16) * e^x]}{e^{2x}}$

$\bar{g}(x) = \dfrac{8e^x - [8xe^x - 16e^x]}{e^{2x}}$

$\bar{g}(x) = \dfrac{8e^x - 8xe^x - 16e^x}{e^{2x}}$

$0 = \dfrac{-8e^x - 8xe^x}{e^{2x}}$

$-8e^x - 8xe^x = 0$

$8e^x(-1 - x)$

$8e^x \neq 0$ $\boxed{x = -1}$

السؤال 4 :

يمثل الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ اذا كان

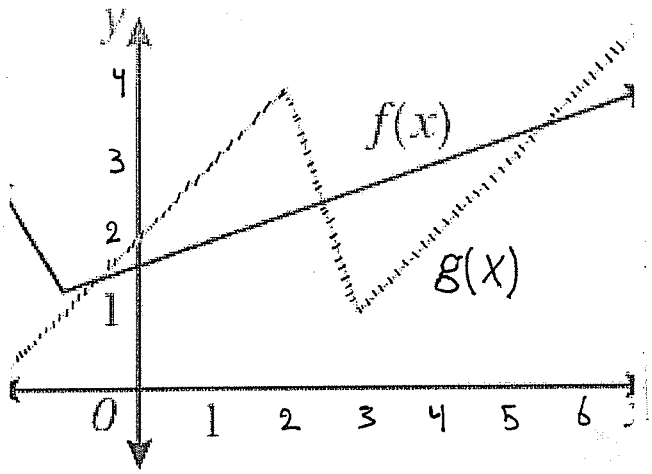
$u(x) = f(x)\, g(x)$

$v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

فاجد كلاً مما يلي

① $\bar{u}(1)$

② $\bar{v}(4)$



الحل:

$u(x) = f(x)\, g(x)$

$\bar{u}(x) = f(x) * \bar{g}(x) + g(x) * \bar{f}(x)$

$\bar{u}(1) = f(1) * \bar{g}(1) + g(1) * \bar{f}(1)$

$f(1) = 2$

$g(1) = 3$

$\bar{G}(1) \rightarrow \underset{x_1\ \ y_1}{(1, 3)} \quad \underset{x_2\ \ y_2}{(0, 2)}$

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

السؤال $\boxed{5}$:

اذا كان $f(X)=X\sec X$ فاثبت ان

$$\bar{f}(X) = \sec X(1 + X\tan X)$$

$$f(X) = X\sec X$$

$$\bar{f}(X) = X * \sec X\tan X + \sec X * 1$$

$$\bar{f}(X) = X\sec X\tan X + \sec X$$

$$\bar{f}(X) = \sec X(X\tan X + 1)$$

$$\bar{f}(X) = \sec X(1 + X\tan X)$$

السؤال $\boxed{6}$

اذا كان : $f(X)=\frac{\ln X}{X}$ حيث $X > 0$ جد.

① $\bar{f}(X)$

$$f(X) = \frac{\ln X}{X}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{X * \frac{1}{X} - [\ln X * 1]}{X^2}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{1 - \ln X}{X^2}$$

$$\bar{G}(1) \rightarrow \underset{X_1\ y_1}{(1,3)}\ \underset{X_2\ y_2}{(0,2)}$$

$$\bar{G}(1) = \frac{2-3}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\bar{G}(1) = 1$$

$$\bar{G}(1) \rightarrow \underset{X_1\ y_1}{(1,2)}\ \underset{X_2\ y_2}{(4,3)}$$

$$\bar{f}(1) = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{u}(1) = f(1) * \bar{g}(1) + g(1) * \bar{f}(1)$$

$$\bar{u}(1) = 2 * 1 + 3 * \frac{1}{3}$$

$$\bar{u}(1) = 2 + 1 = 3$$

② $\bar{V}(4)$

$$V(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$$

$$\bar{V}(X) = \frac{g(X) * \bar{f}(X) - [f(X) * \bar{g}(X)]}{(g(X))^2}$$

$$\bar{V}(4) = \frac{g(4) * \bar{f}(4) - [f(4) * \bar{g}(4)]}{(g(4))^2}$$

$$f(4) = 3$$

$$g(4) = 2$$

$\bar{f}(4) \rightarrow (4,3) \quad (1,2)$
$\quad x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$$\bar{f}(4) = \frac{2 - 3}{1 - 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{f}(4) = \frac{1}{3}$$

$\bar{g}(4) \rightarrow (4,2) \quad (5,3)$
$\quad x_1 \; y_1 \quad x_2 \; y_2$

$$\bar{g}(4) = \frac{3 - 2}{5 - 4} = \frac{1}{1}$$

$$\bar{g}(4) = 1$$

$f(4) = 3 \qquad g(4) = 2$

$\bar{f}(4) = \frac{1}{3} \qquad \bar{g}(4) = 1$

$$\bar{V}(4) = \frac{g(4) * \bar{f}(4) - [f(4) * \bar{g}(4)]}{(g(4))^2}$$

$$\bar{V}(4) = \frac{2 * \frac{1}{3} - [3 * 1]}{(2)^2}$$

$$\bar{V}(4) = \frac{\frac{2}{3} - 3}{4}$$

$$\bar{V}(4) = \frac{-\frac{7}{3}}{4}$$

$$\bar{V}(4) = -\frac{7}{12}$$

② $f''(x)$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2 * \left(0 - \frac{1}{x}\right) - \left[(1 - \ln x) * 2x\right]}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x - \left[2x - 2x\ln x\right]}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x\ln x - 3x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{x}(2\ln x - 3)}{\cancel{x}\, x^3}$$

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

السؤال $\boxed{7}$

يمثل الاقتران $v(t) = \dfrac{10}{2t+5}$ ، $t > 0$

السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم حيث تقاس (v) بالقدم لكل ثانية. جد

① تسارع السيارة عندما $t=5$

② تسارع السيارة عندما $t=20$

الحل:

$$a(t) = \frac{-10 * 2}{(2t+5)^2}$$

$$a(t) = \frac{-20}{(2t+5)^2}$$

$$a(5) = \frac{-20}{(2(5)+5)^2}$$

$$a(5) = \frac{-20}{225}$$

$$a(20) = \frac{-20}{(2(20)+5)^2}$$

$$a(20) = \frac{-20}{2025}$$

السؤال $\boxed{8}$:

يعطى طول مستطيل بالمقدار $(6t+5)$ ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ حيث (t) الزمن بالثواني

اجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة للزمن

$A =$ العرض * الطول

$$A = (6t+5) * \sqrt{t}$$

$$A(t) = (6t+5) * t^{\frac{1}{2}}$$

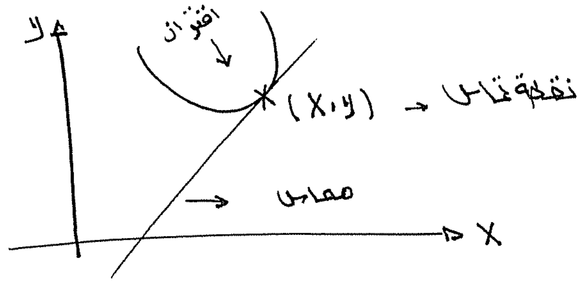
$$A(t) = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$A'(t) = 6 * \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} + 5 * \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$$

$$A'(t) = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}}$$

* جد معدل التغير ← جد المشتقة

* التطبيقات الهندسية *



* المماس: خط مستقيم يمس الاقتران في نقطة واحدة فقط

[1] معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

* m ← ميل المماس
* (x,y) ← نقطة التماس

[٢] معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

* ميل العمودي ← اقلب و اعكس ميل المماس

معادلة المماس

- الميل (m) ← m
- نقطة تماس ← (x,y) ← (x,y)

اولاً: الميل

① اقتران ← اشتق الاقتران

② زاوية ← $m = \tan\theta$

③ x,y ← $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

m:
- $f(x) \rightarrow f'(x)$
- $\theta \rightarrow \tan\theta$
- $x,y \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}$

* ملاحظات

① تعويض (x) داخل $f(x) = y$

$$x \rightarrow \boxed{f(x)} = y$$

مثال: $f(x) = 7x + 2$

جد قيمة y عند $x = 1$

$$f(1) = 7(1) + 2$$
$$f(1) = 9$$

② تعويض (x) داخل $f'(x) = m$

$$x \rightarrow \boxed{f'(x)} = m$$

مثال: $f(x) = x^2 + 4$

جد قيمة الميل عند $= 5$

$$f'(x) = 2x$$
$$f'(5) = 2(5) = 10$$

③ اذا اعطى علاقة ضمنية نشتقها ضمنيا

مثال: $x^2 + y^2 = 1$

جد قيمة الميل عند $(3,4)$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x = -2y\frac{dy}{dx}$$
$$x = -y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

مثال: جد معادلة المماس والعمودي على المماس لكل مما يلي

① $f(x) = x^2 + 3$

$(1,4)$

② $\theta =$ ، $\theta = 45^\circ$ مع X الموجب

$(3,5)$

③ $A(1,2)$

$B(3,4)$

ثانياً: نقطة التماس

(x,y)

- معطى
- غير معطى ← 8 كلمات

كلمات:

- يوازي: $m_1 = m_2$
- يعامد: $m_1 * m_2 = -1$
- يمس: $m_1 = m_2$ ، $f_1(x) = f_2(x)$
- يقطع: $f_1(x) = f_2(x)$

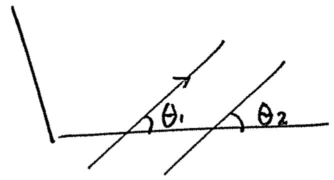
كلمات:

- محور سينات ← $\boxed{y = 0}$
- محور صادات $\boxed{x = 0}$
- مماس افقي $\boxed{f'(x) = 0}$

θ مع X موجب $\rightarrow m = \tan\theta$

① يوازي

ميل الاول = ميل الثاني // $m_1 = m_2$



$\theta_1 = \theta_2$

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

② يعامد

ميل الاول × ميل الثاني = -1 // -1 $m_1 * m_2 = -1$

$m_2 =$

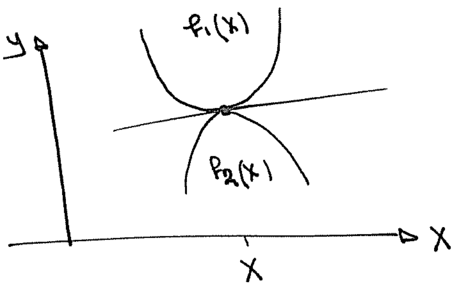
$m_1 = 2$

$m_1 * m_2 = -1$

$2 * m_2 = -1$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

③ يمس // مماس مشترك //



١ نلاحظ ان المماس عند الاقتران الاول هو نفسه عند الاقتران الثاني

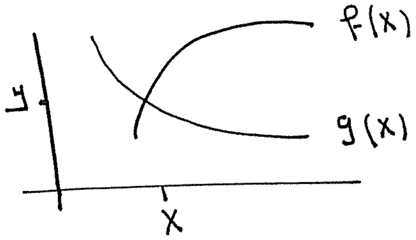
٢ نلاحظ ان (x,y) موجودة على كل من الاقتران الاول و الثاني

$m_1 = m_2$

$f_1(x) = f_2(x)$

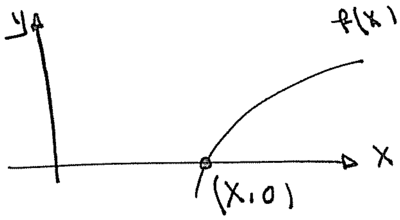
④ يقطع $f_1(x) = f_2(x)$

قاعدة الاول = قاعدة الثاني



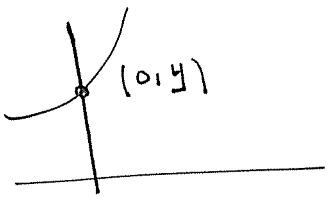
* نلاحظ ان (x,y) موجودة على $f(x)$ و $g(x)$

⑤ محور السينات ← $\boxed{y = 0}$



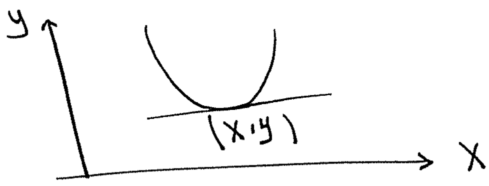
النقطة تحركت بشكل افقي ولم تتحرك بشكل عمودي

⑥ محور الصادات ← $\boxed{x = 0}$



النقطة تحركت بشكل عمودي و لم تتحرك بشكل افقي

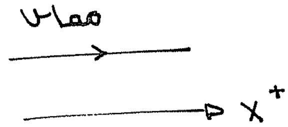
$\boxed{7}$ مماس افقي ← $\bar{f}(x) = 0$



1) المماس الافقي يوازي محور السينات

2) زاوية محصورة بين المماس و الاتجاه الموجب لـ X هي ميل المماس

3) نلاحظ ان الزاوية بين المماس والاتجاه الموجب تساوي صفر



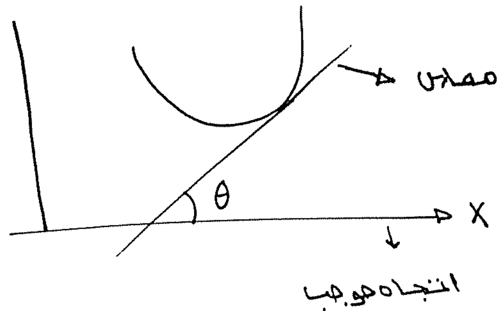
$m = \tan\theta$

$m = \tan 0$

$m = 0$

$\boxed{8}$ زاوية (θ) ← $\bar{f}(x) = \tan\theta$

θ : زاوية محصورة بين مماس و الاتجاه الموجب لمحور X



مثال ①: اذا كان $f(x)$ يصنع زاوية قدرها 135° مع الاتجاه السالب لمحور X جد احداثيا نقطة التماس علما ان

$f(x) = x^2 + 3x + 1$

مثال ②: اذا كان لمنحنى الدقتر ان

$f(x) = x^2 - 6x + 12$

مماساً افقيا جد احداثيا نقطة التماس

مثال③ : اذا كان

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 1$$

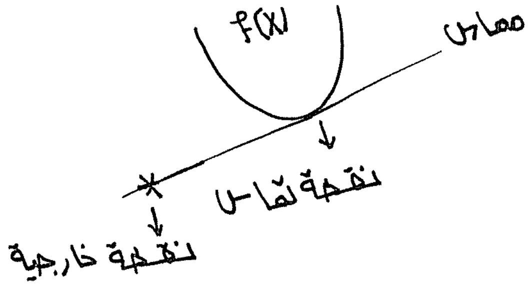
جد النقطة التي يكون عندها مماسا منحنيا الاقترانين متعامدين

مثال② : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$y = (x-3)(x-5)$$

عند نقطتي تقاطعه مع محور x

* النقطة الخارجية *



تمييزها

نعوض (X) داخل الاقتران

1) $f(X) = y$ ← مماس

2) $f(X) \neq y$ ← خارجية

مثال: $f(X) = X^2$ اي النقاط التالية مماس و ايها خارجية

① $(1,1)$

$$f(X) = X^2$$

$$f(1) = (1)^2$$

$$1 = 1$$ مماس

② $(1,2)$

$$f(X) = X^2$$

$$f(1) = (1)^2$$

$$2 \neq 1$$ خارجية

* من الحرف يمكن التمييز

1) عند النقطة ← مماس

2) من النقطة ← خارجية

* خطوات الحل *

① $y - y_1 = m(X - X_1)$

$y \rightarrow$ الاقتران المعطى

$m \rightarrow X$ المشتقة دون تعويض

$(X_1, y_1) \rightarrow$ نقطة خارجية

② نتوحد الرموز ونجد X ثم y ثم m

مثال: جد معادلتي المماس لمنحنى الاقتران $f(X) = X^2 + 1$ المرسومين من النقطة $(0,0)$

الحل:

$$f'(X) = 2X$$

$$f(0) = (0)^2 + 1$$

$$f(0) = 1$$

$0 \neq 1$ خارجية

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$X^2 + 1 - 0 = 2X(X - 0)$$

$$X^2 + 1 = 2X^2$$

$$1 = X^2$$

$$X^2 = 1$$

$$X = \pm 1$$

$$X = 1$$

$$f(X) = X^2 + 1$$

$$f(1) = (1)^2 + 1$$

$$f(1) = 2$$

$$f'(X) = 2X$$

$$f'(1) = 2(1) = 2$$

$X = 1$

$y = 2$

$m = 2$

⊛ العلاقة الضمنية و النقطة الخارجية ⊛

① $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y \downarrow$ تبقى كما هي

② نرجع للفرضا // العلاقة الضمنية //
بعد تطبيقها لـ

③ نجد x, y, m

مثال: جد معادلة المماس المرسوم من النقطة $(6,0)$ لمنحنى العلاقة $x^2+y^2=18$

الحل:

$$x^2 + y^2 = 18$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{x}{y}(x - 6)$$

$$y^2 = -x^2 + 6x$$

$$y^2 + x^2 = 6x$$

$$18 = 6x$$

$$\boxed{x = 3}$$

$$x^2 + y^2 = 18$$

$$(3)^2 + y^2 = 18$$

$$9 + y^2 = 18$$

$$x = -1$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

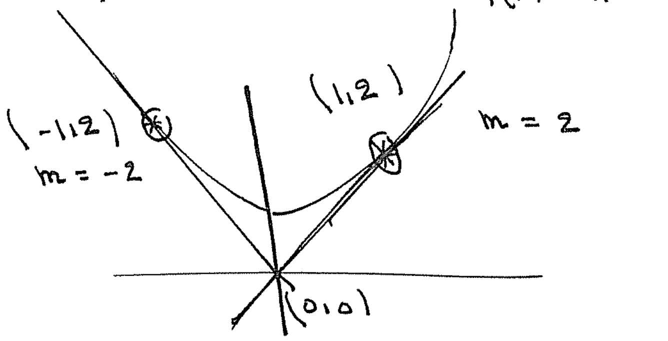
$$f(-1) = (-1)^2 + 1$$

$$f(-1) = 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(-1) = -2$$

$x = -1 \quad m = -2$
$y = 2$



$(1,2) \; // \; m = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$(-1,2) \; // \; m = -2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -2(x - -1)$$

$$y - 2 = -2(x + 1)$$

$\boxed{y = \pm 3}$

$(3, 3)$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-X}{y}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-3}{3}$$

$$\frac{dy}{dX} = -1 = m$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - 3 = -1(X - 3)$$

$(3, -3)$

$$\frac{dy}{dX} = -\frac{X}{y}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-3}{-3}$$

$$\frac{dy}{dX} = 1 = m$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - -3 = 1(X - 3)$$

$$y + 3 = 1(X - 3)$$

مساحة المثلث

⊛ $A = \frac{1}{2} * \Delta X * \Delta y$

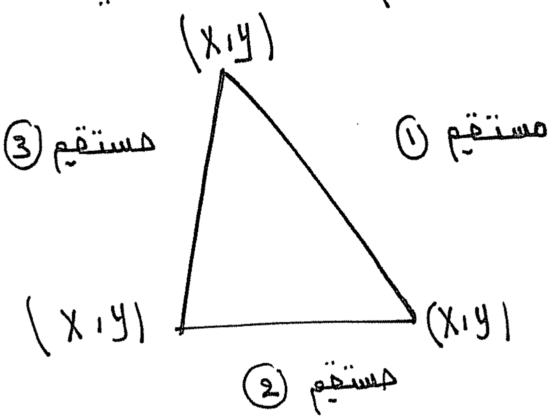
طول القاعدة ← $\Delta X = X_2 - X_1$

الارتفاع ← $\Delta y = y_2 - y_1$

1- يتكون المثلث من ثلاث مستقيمات و(رؤوس)

2- نقطة التقاء كل مستقيمين هي (X, y)

3- المستقيم معادلة معطاه في السؤال



المعطى ← ٣ معادلات

المطلوب ← مساحة المثلث

خطوات الحل

$\boxed{1}$ نجد معادلة كل مستقيم

* المماس : معادلة المماس
* العمودي : معادلة العمودي
* محور X : $y = 0$ دائماً
* محور y : $X = 0$ دائماً

$\boxed{2}$ نساوي كل معادلتان ببعض لإيجاد (X, y)

$\Delta 1$ و $\Delta 2$ = (X, y)

$\Delta 1$ و $\Delta 3$ = (X, y)

$\Delta 2$ و $\Delta 3$ = (X, y)

$\boxed{3}$ نمثل بيانياً جميع (X, y) ونجد المساحة

مثال: جد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع محور السينات و المماس و العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=x^2+1$ عند $(1,2)$

① معادلة المماس // العمودي على المماس // محور x

1 معادلة المماس

$x=1$ $m=$

$y=2$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2(1) = 2 = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 2(x-1)$$

$$y - 2 = 2x - 2$$

$$+2 \qquad +2$$

$\boxed{y = 2x}$ المماس

2 معادلة العمودي

$x=1$ $m_\perp = -\frac{1}{2}$

$y=2$

$$y - y_1 = m_\perp (x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$+2 \qquad +2$$

العمودي على المماس $\boxed{y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x}$

3 محور x ← $\boxed{y=0}$

② ايجاد (x,y)

1 مع 2

$y = 2x$ $y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x$

$$2x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$+\frac{1}{2}x \qquad +\frac{1}{2}x$$

$\frac{2}{5}*$ $\frac{5}{2}x = \frac{5}{2}$

$$x = 1$$

$$y = 2x = 2(1) = 2$$

$(1,2)$ 1

1 مع 3

$y = 2x$ $y = 0$

$2\div$ $2x = 0$

$x = 0$

$y = 0$

$(0,0)$ 2

2 مع 3

$y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x$ $y = 0$

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x = 0$$

$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}x$ $*2$

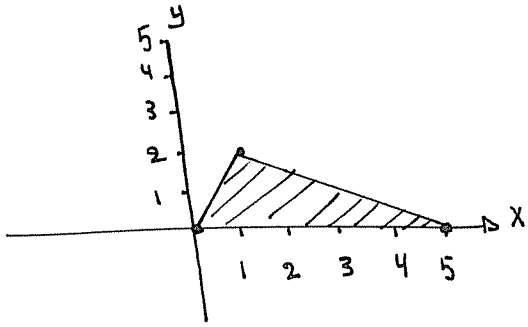
$x = 5$

$y = 0$

$(5,0)$ 3

③ التمثيل البياني

(1,2) // (0,0) // (5,0)



$$A = \frac{1}{2} * \Delta X * \Delta y$$

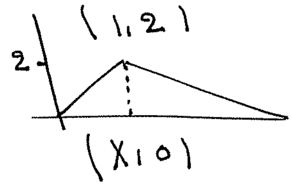
$\Delta X \rightarrow$

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

$$\Delta X = 5 - 0$$

$$\boxed{\Delta X = 5}$$

$\Delta y \rightarrow$



$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta y = 2 - 0$$

$$\boxed{\Delta y = 2}$$

$$A = \frac{1}{2} * \Delta X * \Delta y$$

$$A = \frac{1}{2} * 5 * 2$$

$$A = 5 \text{ unit}^2$$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

أولاً: قاعدة السلسلة

* تمييزها ← معادلتان بينهما رمز مشترك

$u = g(x)$ $\qquad$ $y = f(u)$

((معادلتان و الرمز المشترك u))

* خطوات حلها

① اشتق المعادلة الاولى ثم الثانية

② اكتب القانون

③ الاستبدال او التعويض

✓ الاشتقاق ← $\frac{d\ \text{قبل}}{d\ \text{بعد}}$

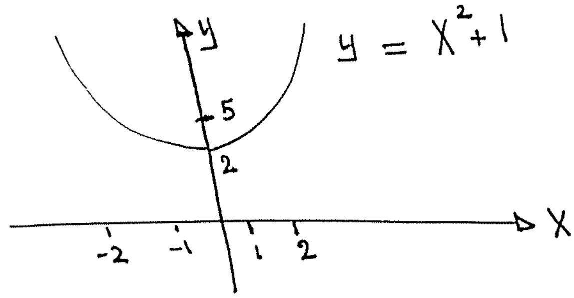
• الرمز الموجود قبل اشارة المساواة يمثل اقتران

• الرمز الموجود بعد اشارة المساواة يمثل رمز داخل اقتران

رمز = اقتران

$y = x^2 + 1$

y ← اقتران $\qquad$ x ← رمز داخل y



((جميع قيم x داخل y))

✓ كتابة القانون

$y = f(u)$ $\qquad$ $u = g(x)$

جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$\frac{d\ \text{قبل}}{d\ \text{بعد}}$ $\qquad$ $\frac{d\ \text{قبل}}{d\ \text{بعد}}$

✓ التعويض او الاستبدال

• التعويض ← عند اعطاء رمز اعوضه مباشرة

• الاستبدال ← نستبدل حسب الرمز الموجود داخل الاقتران $\frac{d\ \text{قبل}}{*d\ \text{بعد}*}$

مثال: $z = 5x$ $\qquad$ $y = z^2$

جد $\frac{dy}{dx}$ $\qquad$ $\frac{dz}{dx} = 5$ $\qquad$ $\frac{dy}{dz} = 2z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} * \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2z * 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 10z$$

$z = 5x$

يجب ان يكون الرمز بعد اشارة المساواة x

$$\frac{dy}{dx} = 10 * z$$

$$\frac{dy}{dx} = 10 * 5x$$

$$\frac{dy}{dx} = 50x$$

* مشتقة تركيب اقترانين *

$$(f \circ g)'(x)$$

مشتقة الثاني * ثاني كما هو اشتق الأول

$$f'\ g(x) * g'(x)$$

مثال:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 1 - 6x$$

جد $(f \circ g)'(1)$

الحل:

$$f'(g(1)) * g'(1)$$

$$g(1) = 1 - 6(1)$$

$$g(1) = 1 - 6$$

$$g(1) = -5$$

$$g(x) = 1 - 6x$$

$$g'(x) = -6$$

$$g'(1) = -6$$

$$f'(-5) * g'(1)$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(-5) = 2 * -5$$

$$f'(-5) = -10$$

$$f'(-5) * g'(1)$$

$$-10 * -6 = 60$$

* مشتقة الجذر التربيعي *

مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة ما داخل الجذر
* نفس الجذر

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

مثال:

$$f(x) = \sqrt{4x+1}$$

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}$$

(*) إشتقاق ما داخل f ليس x لوجودها (*)
① ②

$f(\quad)$

x له ليس

مشتقة الداخلي * الثاني كما هو * اشتق الأول

(*) ما داخل f' = ما داخل $f \rightarrow x$

مثال:

$$f(3x) = 6x^2 + 9x$$

جد $f'(3)$

$$f'(3x) * 3 = 12x + 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$f'(3*1) * 3 = 12(1) + 9$$

$$f'(3) * 3 = 21$$

$$f'(3) = 7$$

* قاعدة السلسلة و الاقترانات الدائرية *

① تعلمنا لاشتقاق اي اقتران دائري

مشتقة الزاوية * مشتقة الدائري لنفس زاوية

② كذلك يمكن تطبيق قاعدة السلسلة الناتجة عن تركيب اقترانين

① $\sin g(x) \xrightarrow{\text{اشتق}} \cos g(x) * \bar{g}(x)$

② $\cos g(x) \rightarrow -\sin g(x) * \bar{g}(x)$

③ $\tan g(x) \rightarrow \sec^2 g(x) * \bar{g}(x)$

④ $\cot g(x) \rightarrow -\csc^2 g(x) * \bar{g}(x)$

⑤ $\sec g(x) \rightarrow \sec g(x) \tan g(x) * \bar{g}(x)$

⑥ $\csc g(x) \rightarrow -\csc g(x) \cot g(x) * \bar{g}(x)$

تذكر

① $e^{g(x)} \rightarrow \bar{g}(x) * e^{g(x)}$

② $\ln g(x) = \dfrac{\bar{g}(x)}{g(x)}$

أمثلة : جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \cos 2x$

$\bar{f}(x) = 2 * -\sin 2x$

$\bar{f}(x) = -2\sin 2x$

أو

$\bar{f}(x) = -\sin 2x * 2$

$\bar{f}(x) = -2\sin 2x$

② $f(x) = e^{(x+x^2)}$

$\bar{f}(x) = (1+2x) * e^{x+x^2}$

③ $f(x) = \ln \sin x$

$\bar{f}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\bar{f}(x) = \cot x$

قاعدة سلسلة القوة

* مشتقة $(\text{اقتران})^{\text{أس}} =$

الاس * $(\text{اقتران})^{\text{أس}-1}$ * مشتقة الاقتران

$(g(x))^n \rightarrow n * (g(x))^{n-1} * \bar{g}(x)$ ✓

$\boxed{\text{ملاحظات}}$ //تجهيز الاشتقاق//

① كل جذر يحول لاس

② كل اس في المقام يرفع للبسط

③ دائري$^{\text{أس}}$ ← $(\text{الدائري})^{\text{أس}}$

مثال: جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

$\bar{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} * 2x$

$\bar{f}(x) = \frac{4x}{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$

$\bar{f}(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)}}$

② $f(x) = \tan^4 x$

$f(x) = (\tan x)^4$

$\bar{f}(x) = 4(\tan x)^3 \sec^2 x$

③ $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} * \frac{1}{x}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

* $f(x) = \ln x^{\frac{1}{2}}$

$f(x) = \frac{1}{2}\ln x$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$

* الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة *

① تعلمنا ان قاعدة السلسلة يكون لدينا معادلتان

② ان طلب اشتقاق ثلاث معادلات و اكثر نشتق على طريقة المعادلتان كل معادلة على حدة

* $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ ، $x = h(t)$

فان $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx} * \frac{dx}{dt}$$

مثال: جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = e^{\csc 4x}$

$\bar{f}(x) = 4 * -\csc 4x \cot 4x * e^{\csc 4x}$

$\bar{f}(x) = -4 e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$

② $f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$

$\bar{f}(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}} \sec^2(\tan\sqrt{3x^2+4}) * \cos(\tan\sqrt{3x^2+4})$

$\bar{f}(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}} \sec^2(\tan\sqrt{3x^2+4}) * \cos(\tan\sqrt{3x^2+4})$

مثال: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = e^{-0.2x} \sin 4x$$

عند $x = \frac{\pi}{8}$

$$f'(x) = e^{-0.2x} * 4\cos 4x + \sin 4x * -0.2 * e^{-0.2x}$$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{5}x} * 4\cos 4x + -0.2 e^{-\frac{1}{5}x} \sin 4x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = e^{-\frac{1}{5} * \frac{\pi}{8}} * 4\cos 4 * \frac{\pi}{8} + -0.2 e^{-\frac{1}{5} * \frac{\pi}{8}} \sin 4 * \frac{\pi}{8}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = e^{-\frac{\pi}{40}} * 4\cos\frac{\pi}{2} + -0.2 e^{-\frac{\pi}{40}} \sin\frac{\pi}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 + -0.2 e^{-\frac{\pi}{40}}$$

لأن $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.2 e^{-\frac{\pi}{40}}$$

مثال: جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$$

عند $x = 0$

الحل:

ميل العمودي

1- ميل المماس

2- اقلب و اعكس

$$m_{\perp} = \frac{-1}{m}$$

$$f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$$

$$f'(x) = 2 * \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right) * \frac{(x^2+3)*3 - [(3x-1)*2x]}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(0) = 2 * \left(\frac{3(0)-1}{(0)^2+3}\right) * \frac{(0^2+3)*3 - (3(0)-1)*2(0)}{((0)^2+3)^2}$$

$$f'(0) = 2 * -\frac{1}{3} * \frac{9-(0)}{9}$$

$$f'(0) = -\frac{2}{3} * \frac{9}{9}$$

$$f'(0) = -\frac{2}{3} * 1 = -\frac{2}{3}$$

$$m_{\perp} = \frac{3}{2}$$

مثال: طرحت احدى الشركات منتجاً جديداً في الاسواق ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه اذا مثّل الاقتران

$$N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2} \quad , \quad t > 0$$

$N(t)$ عدد القطع ، t الزمن بالاسابيع

جد

1) معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة للزمن

2) جد $N'(52)$ مفسراً معنى الناتج

$$N(t) = \frac{250000\, t^2}{(2t+1)^2}$$

$$\bar{N}(t) = \frac{(2t+1)^2 * 500000 - [250000t^2 * 2(2t+1)*2]}{(2t+1)^4}$$

$$\bar{N}(t) = \frac{500000(2t+1)^2 - (1000000t^2(2t+1))}{(2t+1)^4}$$

$$\bar{N}(t) = \frac{(2t+1)[500000t(2t+1) - 1000000t^2]}{(2t+1)(2t+1)^3}$$

$$\bar{N}(t) = \frac{1000000t^2 + 500000t - 1000000t^2}{(2t+1)^3}$$

$$\bar{N}(t) = \frac{500000t}{(2t+1)^3}$$

② $\bar{N}(52)$

$$\bar{N}(52) = \frac{500000*52}{(2(52)+1)^3}$$

$$\approx 22$$

اي ان معدل الزيادة تقريباً 22 قطعة كل اسبوع بعد مرور 52 اسبوعاً

* مشتقة $a^{g(x)}$ *

((الاسي العادي))

اولاً: مقدمة

① تعلمنا في الدرس السابق كيفية ايجاد مشتقة الاقتران الاسي $f(x)=e^x$ حيث الاساس (e)

② سنتعلم في هذا الدرس كيفية ايجاد مشتقة الاقتران الاسي $f(x)=a^x$ حيث عدد ثابت (a) موجب و $a \neq 1$

ثانياً: الاشتقاق

$\boxed{A}$ المشتقة بالكلمات

الاس ln * مشتقة الاس * الاقتران

$\boxed{B}$ المشتقة بالرموز

$$a^{g(x)} \xrightarrow[\text{اشتق}]{} \bar{g}(x) * a^{g(x)} * \ln a$$

ثالثاً: اثبات الاشتقاق

① نستعمل خصائص اللوغاريتمات

$$a^x = e^{\ln a^x}$$

② قانون القوة في اللوغاريتم

$$a^x = e^{x \ln a}$$

③ نشتق

$$= \ln a * e^{x \ln a}$$

$$\ln a * e^{\ln a^x}$$

④ مقدار ذلك ln اصله اس

$$\ln a * a^x$$

* التقاء e و ln ← يحذفوا بعضهم

مثال : جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = 8^{5x}$

$f'(x) = 5 * 8^{5x} * \ln 8$

$f'(x) = 8^{5x} * 5 * \ln 8$

② $f(x) = 6^{x^2}$

$f'(x) = 6^{x^2} * 2x * \ln 6$

③ $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f'(x) = 3 * e^{3x} + 2^{3x} * 3 * \ln 2$

$f'(x) = 3e^{3x} + 3\ln 2 * 2^{3x}$

*

* مشتقة $\log_a g(x)$ *

((اللوغاريتمي العادي))

أولاً : مقدمة

① تعلمنا كيفية ايجاد مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $\ln$

② سنتعلم كيفية اشتقاق اللوغاريتم العادي

③ يكتب اللوغاريتم الاعتيادي ← $\log$

④ يكون الاساس ١٠ ان لم يكتب ذلك

$\log = \log_{10}$ الاساس

ثانياً : المشتقة

A بالكلمات ← $\dfrac{\text{مشتقة ما داخله}}{\text{الاساس } \ln * \text{ ما داخله}}$

B بالرموز

$$\log_a g(x) = \frac{g'(x)}{g(x) * \ln a}$$

* ملاحظات

① الاساس دائماً $\neq 1$

② الاساس دائماً قيمة موجبة

ثالثاً: الدبات

① استعمل صيغة تغيير الاساس لكتابة $\log_a X$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي

$$\log_a X = \frac{\ln X}{\ln a}$$

② نشتق الطرفين

$$\frac{d}{dx}(\log_a X) = \frac{1}{\ln a} * \frac{d}{dx}(\ln X)$$

ثابت وراء المشتقة

$$= \frac{1}{\ln a} * \frac{1}{X}$$

$$= \frac{1}{X \ln a}$$

مثال: جد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = \log \cos X$

$$\bar{f}(X) = \frac{-\sin X}{\cos X * \ln 10}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-\tan X}{\ln 10}$$

② $f(X) = \log_2 \left(\frac{X^2}{X-1}\right)$

$$f(X) = \log_2 X^2 - \log_2 X - 1$$

$$\bar{f}(X) = \frac{2X}{X^2 \ln 2} - \frac{1}{(X-1)\ln 2}$$

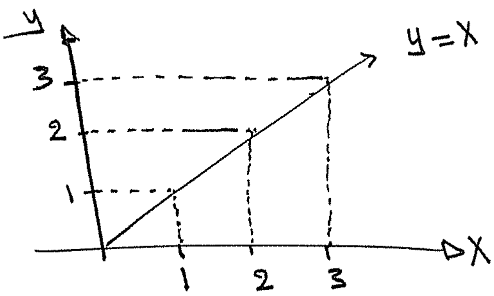
$$\bar{f}(X) = \frac{2}{X \ln 2} - \frac{1}{\ln 2 (X-1)}$$

* مشتقة المعادلات الوسيطية *

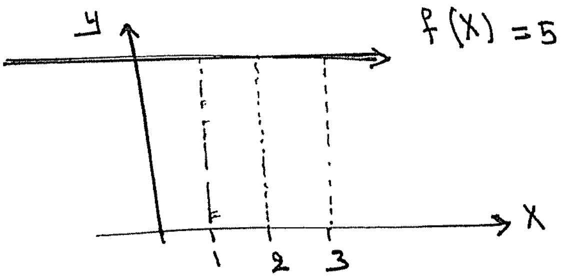
اولاً: البداية

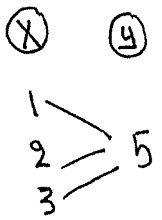
① الاقتران ← كل عنصر X يرتبط فقط بعنصر y

مثال:



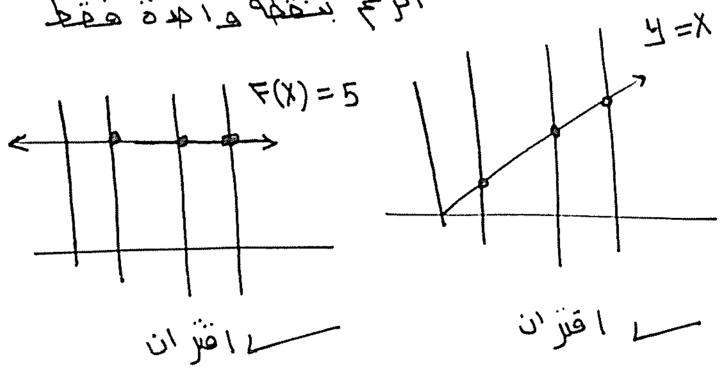
(X)		(y)
1	—	1
2	—	2
3	—	3





التأكد من الرسم ← نرسم خطوط عمودية كامل الرسم

إذا الخط العمودي يقطع كامل الرسم بنقطة واحدة فقط



* مشتقة المعادلة الوسيطية *

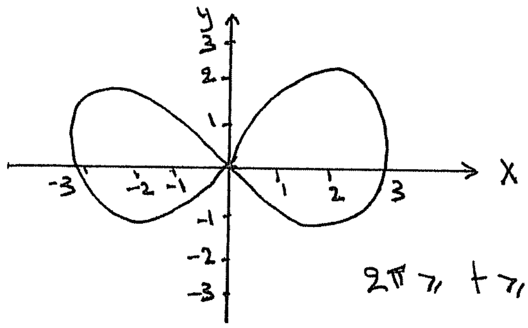
$X = h(t) \qquad y = g(t)$

① اشتقا المعادلة الدوالح ع الثانية $\frac{d_{\text{قبل}}}{d_{\text{بعد}}}$

② المشتقة

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}} \quad , \quad \frac{dX}{dt} \neq 0$$

مثال: جد $\frac{dy}{dX}$ للمعادلة الوسيطية



$2\pi \geq t \geq 0$

$X = 3\cos t \qquad y = 2\sin 2t$

$\frac{dX}{dt} = -3\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = 2*2\cos 2t$

$\frac{dX}{dt} = -3\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = 4\cos 2t$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$$

مثال: جد معادلة المماس لمنحنى المعادلة الوسيطية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$X = 2\sin t \quad , \quad y = 3\cos t$

$2\pi \geq t \geq 0$

$\frac{dX}{dt} = 2\cos t \qquad \frac{dy}{dt} = -3\sin t$

$$\left.\frac{dy}{dX}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-3\sin t}{2\cos t}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-3 * \sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-3 * \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 * \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{3}{2}$$

$X = 2\sin t \qquad y = 3\cos t$

$X = 2\sin\frac{\pi}{4} \qquad y = 3\cos\frac{\pi}{4}$

$X = 2 * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad y = 3 * \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

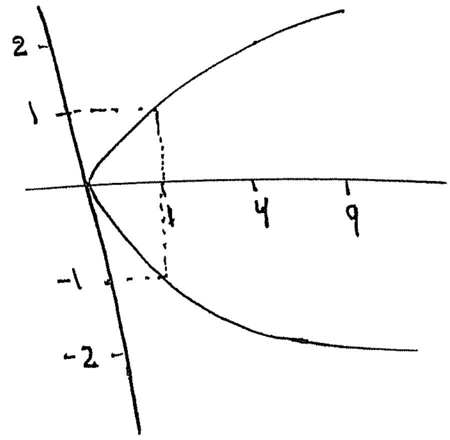
$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}\left(X - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

② معادلة وسيطية ← ارتباط (X) بأكثر من عنصر (y)

!! ليس اقتران !!

مثال:

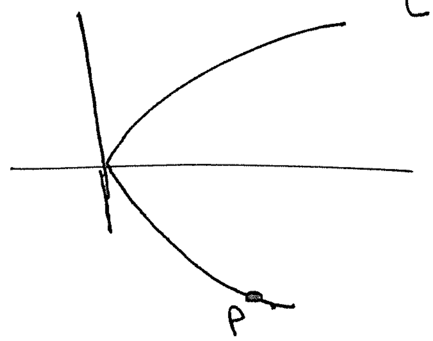


X	y		X	y
1	→ 1		4	→ 2
	↘ -1			→ -2

⊛ الاقتران ← اختفاء مباشرة

⊛ المعادلة الوسيطية ⊛

منحنى C



① نفترض ان الجسم P بدأ التحرك على المنحنى C

② المنحنى C لا يمثل اقتران على فرضا

$y = X^2 +$ ثابت

* عند تعويض اي قيمة (X) سيكون لدي قيمتان y

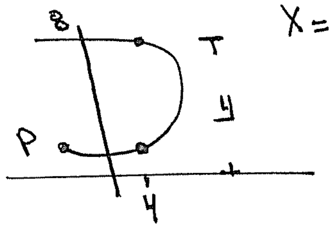
③ نستخدم المعادلة الوسيطية لايجاد (X,y)

$X = h(t) \qquad y = g(t)$

⊛ عند تعويض (t) داخل X و y فانه يعطي قيمة كل منهما

مثال: $X = 2t \quad y = 4t$

$t = 2s$



$X = 2(2) = 4$

$y = 4(2) = 8$

اي بعد ثانيتين من تحرك الجسم P تكون $y = 8 \,//\, X = 4$

④ يشكل $X = h(t) \,//\, y = g(t)$ معادلة وسيطية للمنحنى C

⑤ يسمى (t) المتغير الوسيط لان كل قيمه له تحدد قيمة X وقيمة y

⑥ عند تمثيل الازواج المرتبة (X,y) ينتج C

مجال الوسيط

① فترة تنحصر بين اقل و اعلى زمن

$\underset{\text{اعلى}}{t_2} \geq t \geq \underset{\text{اقل}}{t_1}$

② يتم الحصر لان النقاط على المنحنى قد تتكرر بعد هذه الفترة

$3 \geq t \geq 1$

$t = 2 \rightarrow (1,5)$

$t = 8 \rightarrow (1,5)$

خروج قيم t عن الفترة تكرر نفس النقطة

التحقق من فهمي ①

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \tan 3x^2$

$f'(x) = 6x \sec^2 3x^2$

② $f(x) = e^{\ln x}$

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

* e // Ln ← يحذف بعضهم الاخر

③ $f(x) = \ln(\cot x)$

$f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$

التحقق من فهمي ②

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$

$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}} * 2x$

$f'(x) = \frac{4x}{5} * (x^2-1)^{-\frac{3}{5}}$

$f'(x) = \frac{4x}{5} * \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{5}}}$

$f'(x) = \frac{4x}{5} * \frac{1}{\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

* الجذور 3 فافوه تحول لاس قبل الاشتقاق

② $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

③ $f(x) = (\ln x)^5$

$f'(x) = 5(\ln x)^4 * \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{5(\ln x)^4}{x}$

* $(\ln x)^5 \neq \ln x^5$

الاس على كامل Ln | الاس فقط لداخل Ln

التحقق من فهمي (3)

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

(1) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$

$$f(x) = \left(\cos(7x^3+6x-1)\right)^2$$

$$f'(x) = 2\left(\cos(7x^3+6x-1)\right)^1 * (21x^2+6)$$

$$* -\sin(7x^3+6x-1)$$

* أس دائري ← (الدائري)^الاس
* زاوية دائري

(2) $f(x) = \left(2+(x^2+1)^4\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(2+(x^2+1)^4\right)^2 * \left(0 + 4(x^2+1)^3 * 2x\right.$$

التحقق من فهمي (4)

(1) اجد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = (2x+1)^5 (x^3-x+1)^4$$

عند $x=1$

$$f'(x) = (2x+1)^5 * 4(x^3-x+1)^3 * (3x^2-1)$$

$$+$$

$$(x^3-x+1)^4 * 5(2x+1)^4 * 2$$

$$f'(1) = (2(1)+1)^5 * 4((1)^3-1+1)^3 (3(1)^2-1)$$

$$+$$

$$((1)^3-1+1)^4 * 5(2(1)+1)^4 * 2$$

$$= 2754$$

(2) اجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}} \quad // \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} * 2\cos x * -\sin x - \left[(\cos x)^2 * 2e^{2x}\right]}{(e^{2x})^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{2*\frac{\pi}{2}} * 2*\cos\frac{\pi}{2} * -\sin\frac{\pi}{2} - \left[\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 * 2e^{2*\frac{\pi}{2}}\right]}{e^{4x}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\pi}*2*0*-1 - \left[(0)^2 * 2e^{\pi}\right]}{e^{4\frac{\pi}{2}}}$$

$$\frac{0 - 0}{e^{2\pi}} = \frac{0}{e^{2\pi}} = 0$$

التحقق من فهمي (5)

تحسب قيمة بدل الخدمة لاحد المنتجات

بالدينار باستعمال الاقتران

$$U(X) = \sqrt{\frac{2X+1}{3X+4}}$$

① اجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة الى عدد القطع المبيعة من المنتج

② اجد $\bar{U}(20)$ مفسراً معنى الناتج

الحل:

①

$$u(X) = \left(\frac{2X+1}{3X+4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{u}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{2X+1}{3X+4}\right)^{-\frac{1}{2}} * \frac{\left((3X+4)*2 - [(2X+1)*3\right)}{(3X+4)^2}$$

$$\bar{u}(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{3X+4}{2X+1}\right) * \left[\frac{(3X+4)*2 - (2X+1)*3}{(3X+4)^2}\right]$$ ②

$$\bar{u}(20) = \frac{1}{2}\left(\frac{3(20)+4}{2(20)+1}\right)^{\frac{1}{2}} * \left[\frac{(3(20)+4)*2 - (2(20)+1)*3}{(3(20)+4)^2}\right]$$

$\bar{u}(20) =$

التحقق من فهمي (6)

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = \pi^{\pi X}$

$$\bar{f}(X) = \pi^{\pi X} * \pi * \ln\pi$$

② $f(X) = 6^{1-X^3}$

$$\bar{f}(X) = 6^{1-X^3} * -3X^2 * \ln 6$$

③ $f(X) = e^{4X} + 4^{2X}$

$$\bar{f}(X) = 4*e^{4X} + 4^{2X} * 2 * \ln 4$$

$$\bar{f}(X) = 4e^{4X} + 2 * 4^{2X} * \ln 4$$

التحقق من فهمي 7

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = \log \sec X$

$$f'(X) = \frac{\sec X \tan X}{\sec X \ln 10}$$

② $f(X) = \log_8 (X^2 + 3X)$

$$f'(X) = \frac{2X + 3}{(X^2 + 3X)\ln 8}$$

* يكون الاساس = 10 ان لم تتم كتابته

التحقق من فهمي 8

اجد معادلة مماس المعادلة الوسيطية الآتية

عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$X = \sec t \qquad Y = \tan t$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$X = \sec \frac{\pi}{4} \qquad Y = \tan \frac{\pi}{4}$

$X = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} \qquad Y = 1$

$X = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

$X = \sec t \qquad Y = \tan t$

$\frac{dX}{dt} = \sec t \tan t \qquad \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$

$$\frac{dX}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{\cos t} * \tan t$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} * \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} * 1$$

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{2} * 1 = \sqrt{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{4})^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$X = \sqrt{2} \qquad m = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$y = 1$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}}(X - \sqrt{2})$$

اسئلة الكتاب

السؤال $\boxed{1}$

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = e^{4X+e}$

$\bar{f}(X) = 4 * e^{4X+e}$

② $f(X) = 50\, e^{2X-10}$

$\bar{f}(X) = 50 * 2 * e^{2X-10}$

$\bar{f}(X) = 100\, e^{2X-10}$

③ $f(X) = \cos(X^2 - 3X - 4)$

$\bar{f}(X) = (2X-3) * -\sin(X^2 - 3X - 4)$

$\bar{f}(X) = -(2X-3)\sin(X^2 - 3X - 4)$

④ $f(X) = 10X^2\, e^{-X^2}$

$\bar{f}(X) = 10X^2 * -2X e^{-X^2} + e^{-X^2} * 20X$

$\bar{f}(X) = -20X^3 e^{-X^2} + 20X\, e^{-X^2}$

⑤ $f(X) = \sqrt{\dfrac{X+1}{X}}$

$f(X) = \left(\dfrac{X+1}{X}\right)^{\frac{1}{2}}$

$f(X) = \left(1 + \dfrac{1}{X}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(X) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{X}\right)^{-\frac{1}{2}} * \left(0 + -\dfrac{1}{X^2}\right)$

⑥ $f(X) = X^2 \tan\dfrac{1}{X}$

$\bar{f}(X) = X^2 * -\dfrac{1}{X^2}\sec^2\dfrac{1}{X} + \tan\dfrac{1}{X} * 2X$

$\bar{f}(X) = -\sec^2\dfrac{1}{X} + 2X\tan\dfrac{1}{X}$

⑦ $f(X) = 3X - 5\cos(\pi X)^2$

$\bar{f}(X) = 3 - 5 * 2(\pi X)\pi * -\sin(\pi X)^2$

$\bar{f}(X) = 3 + 10\pi^2 X \sin(\pi X)^2$

(11) $f(X) = \sqrt[5]{X^2 + 8X}$

$f(X) = \left(X^2 + 8X\right)^{\frac{1}{5}}$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{5}\left(X^2 + 8X\right)^{-\frac{4}{5}} * (2X + 8)$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{5\sqrt[5]{(X^2 + 8X)^4}} + 2X + 8$

(12) $f(X) = \frac{3^{2X}}{X}$

$\bar{f}(X) = \frac{X * 3^{2X} * 2 * \ln 3 - \left[3^{2X} * 1\right]}{X^2}$

$\bar{f}(X) = \frac{2X * 3^{2X} * \ln 3 - 3^{2X}}{X^2}$

(13) $f(X) = 2^{-X} \cos \pi X$

$\bar{f}(X) = 2^{-X} * \pi * -\sin \pi X + \cos \pi X * 2^{-X} * -1 * \ln 2$

$\bar{f}(X) = -2^{-X} * \pi * \sin \pi X + -2^{-X} * \ln 2 * \cos \pi X$

(8) $f(X) = \ln\left(\frac{1 + e^X}{1 - e^X}\right)$

$f(X) = \ln(1 + e^X) - \ln(1 - e^X)$

$\bar{f}(X) = \frac{e^X}{1 + e^X} - \frac{-e^X}{1 - e^X}$

$\bar{f}(X) = \frac{e^X}{1 + e^X} + \frac{e^X}{1 - e^X}$

(9) $f(X) = (\ln X)^4$

$\bar{f}(X) = 4(\ln X)^3 * \frac{1}{X}$

$\bar{f}(X) = \frac{4(\ln X)^3}{X}$

(10) $f(X) = \sin \sqrt[3]{X} + \sqrt[3]{\sin X}$

$f(X) = \sin \sqrt[3]{X} + (\sin X)^{\frac{1}{3}}$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{3\sqrt[3]{X^2}} * \cos \sqrt[3]{X} + \frac{1}{3}(\sin X)^{-\frac{2}{3}} * \cos X$

* الاشتقاق السريع ←

$f(X) = \sqrt[3]{X}$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{3\sqrt[3]{X^2}}$

(16) $f(X) = \log_3 (1 + X \ln X)$

$$\bar{f}(X) = \frac{0 + X * \frac{1}{X} + \ln X * 1}{(1 + X\ln X)\ln 3}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{1 + \ln X}{\ln 3 (1 + X \ln X)}$$

---

(17) $f(X) = e^{\sin 2X} + \sin(e^{2X})$

$$\bar{f}(X) = 2\cos 2X * e^{\sin 2X} + 2e^{2X}\cos(e^{2X})$$

$$\bar{f}(X) = 2e^{\sin 2X}\cos 2X + 2e^{2X}\cos(e^{2X})$$

---

(18) $f(X) = \tan^4(\sec(\cos X))$

$$f(X) = (\tan(\sec(\cos X)))^4$$

$$\bar{f}(X) = 4*(\tan \sec(\cos X))^3 \quad \underline{1}$$

$*$

$$-\sin X * \sec(\cos X)\tan(\cos X) \quad \underline{2}$$

$*$

$$\sec^2(\sec(\cos X)) \quad \underline{3}$$

(*) $(\boxed{\tan}\ \boxed{\sec(\cos X)})$

$\underset{\text{دالأي}}{\tan}$ $\underset{\text{زاوية}}{\sec(\cos X)}$

---

(14) $f(X) = \frac{10 \log_4 X}{X}$

$$f(X) = 10 * \frac{\log_4 X}{X}$$

$$\bar{f}(X) = 10 * \frac{X * \frac{1}{X \ln 4} - \log_4 X * 1}{X^2}$$

$$\bar{f}(X) = 10 * \frac{\frac{1}{\ln 4} - \log_4 X}{X^2}$$

---

(15) $f(X) = \left(\frac{\sin X}{1 + \cos X}\right)^2$

$$\bar{f}(X) = 2 * \left(\frac{\sin X}{1 + \cos X}\right)^{(1)} * (2)$$

$$\frac{(1 + \cos X) * \cos X - [\sin X * -\sin X]}{(1 + \cos X)^2}$$

$$\frac{\cos X + \cos^2 X - [-\sin^2 X]}{(1 + \cos X)^2}$$

$$\frac{\cos X + \cos^2 X + \sin^2 X}{(1 + \cos X)^2}$$

$$\frac{1 + \cos X}{(1 + \cos X)^2} = \frac{1}{\cos X + 1}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{2\sin X}{1 + \cos X} * \overset{(2)}{\frac{1}{\cos X + 1}} = \frac{2\sin X}{(\cos X + 1)^2}$$

السؤال $\boxed{2}$

1. جد معادلة المماس لكل اقتران مما يلي عند قيمة (X) المعطاه

① $f(X) = X + \cos 2X \;\; // \;\; X = 0$

$m =$ $\quad\quad$ $X = 0$

$y =$

$f(0) = 0 + \cos 2(0)$

$f(0) = 0 + \cos 0$

$f(0) = 0 + 1 = 1 = y$

$\bar{f}(X) = 1 + 2 * -\sin 2X$

$\bar{f}(0) = 1 + 2* -\sin 2(0)$

$\bar{f}(0) = 1 + 2 * 0 = 1 = m$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 1 = 1(X - 0)$

② $f(X) = 2^X \;\; // \;\; X = 0$

$X = 0$ $\quad\quad$ $m =$

$y =$

$f(0) = 2^0 = 1$ $\quad\quad$ $y = 1$

$\bar{f}(X) = 2^X * 1 * \ln 2$

$\bar{f}(0) = 2^0 * 1 * \ln 2$

$\bar{f}(0) = 1 * 1 * \ln 2 = \ln 2$

$m = \ln 2$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 1 = \ln 2 (X - 0)$

③ $f(X) = 4e^{-0.5X^2} \;\; // \;\; X = -2$

$X = -2$ $\quad\quad$ $m =$

$y =$

$f(-2) = 4 * e^{-\frac{1}{2}(-2)^2}$

$f(-2) = 4 * e^{-2}$

$f(-2) = \dfrac{4}{e^2} = y$

$f(X) = 4e^{-\frac{1}{2}X^2}$

$\bar{f}(X) = 4 * -\dfrac{1}{2} * 2X * e^{-\frac{1}{2}X^2}$

$\bar{f}(-2) = -2 * 2(-2) * e^{-\frac{1}{2}(-2)^2}$

$\bar{f}(-2) = 8e^{-2}$

$\bar{f}(-2) = \dfrac{8}{e^2} = m$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}(X - -2)$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}(X + 2)$

$X \downarrow f(X) = y$ $\quad\quad$ $X \downarrow \bar{f}(X) = m$

3 السؤال

اذا كان : $A(X) = f(g(X))$ وكان

$f(-2) = 8$ || $\bar{f}(-2) = 4$ ||

$g(5) = -2$ || $\bar{g}(5) = 6$ || $\bar{f}(-2) = 4$

فأجد $\bar{A}(5)$

$$A(X) = f(g(X))$$

$$\bar{A}(X) = \bar{f}(g(X)) * \bar{g}(X)$$

$$\bar{A}(5) = \bar{f}(g(5)) * \bar{g}(5)$$

$$\bar{A}(5) = \bar{f}(-2) * \bar{g}(5)$$

$$\bar{A}(5) = 4 * 6$$

$$\bar{A}(5) = 24$$

4 $f(X) = \sqrt{X+1}\ \sin\frac{\pi X}{2}$ || $X = 3$

$X = 3$ $\qquad m =$

$y =$

$$f(3) = \sqrt{(3)+1} * \sin\frac{3\pi}{2}$$

$$f(3) = 2 * -1$$

$$f(3) = -2 = y$$

$$f(X) = \sqrt{X+1}\ \sin\frac{\pi X}{2}$$

$$\bar{f}(X) = \sqrt{X+1} * \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi X}{2}$$

$$+$$

$$\sin\frac{\pi X}{2} * \frac{1}{2\sqrt{X+1}}$$

$$\bar{f}(3) = \sqrt{3+1} * \frac{\pi}{2} * \cos\frac{3\pi}{2}$$

$$+$$

$$\sin\frac{3\pi}{2} * \frac{1}{2\sqrt{3+1}}$$

$$\bar{f}(3) = 2 * \frac{\pi}{2} * 0$$

$$+$$

$$-1 * \frac{1}{4}$$

$$\bar{f}(3) = -\frac{1}{4} = m$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - -2 = -\frac{1}{4}(X - 3)$$

$$y + 2 = -\frac{1}{4}(X - 3)$$

السؤال [4]

اذا كان :
$$f(X) = \frac{X}{\sqrt{X^2+1}}$$

اثبت ان
$$\bar{f}(X) = \frac{1}{\sqrt{(X^2+1)^3}}$$

$$f(X) = \frac{X}{\sqrt{X^2+1}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\sqrt{X^2+1} * 1 - X * \frac{2X}{2\sqrt{X^2+1}}}{X^2+1}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\sqrt{X^2+1} - \frac{X^2}{\sqrt{X^2+1}}}{X^2+1}$$

$$\sqrt{X^2+1} - \frac{X^2}{\sqrt{X^2+1}}$$

$$\frac{X^2+1-X^2}{\sqrt{X^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{X^2+1}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\frac{1}{(X^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(X^2+1)}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{1}{(X^2+1) * (X^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{1}{(X^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{1}{\sqrt{(X^2+1)^3}}$$

السؤال [5]

يمثل الاقتران $A(t) = N e^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري

① اجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N

② اذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خليه لكل ساعة فما قيمة k بدلالة الثابت N

سؤال : يمثل الاقتران : $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد (t) ساعة في مجتمع بكتيري

① اجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N

② اذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة فما قيمة k بدلالة الثابت N

الحل:

① $A(t) = Ne^{0.1t}$

$$\bar{A}(t) = N * 0.1 * e^{0.1t}$$

$$\bar{A}(3) = N * 0.1 * e^{0.1(3)}$$

$$\bar{A}(3) = 0.1Ne^{0.3}$$

② $\bar{A}(t) = N * 0.1 * e^{0.1t}$

$$0.2 = N * 0.1 * e^{0.1k}$$

$$0.2 = 0.1 * N * e^{0.1k} \qquad \div 0.1$$

$$\frac{0.2}{0.1} = Ne^{0.1k}$$

$$2 = Ne^{0.1k} \qquad \div N$$

$$\frac{2}{N} = e^{0.1k} \qquad \text{اضافة } \ln$$

$$\ln\left(\frac{2}{N}\right) = \ln e^{0.1k}$$

$$\ln\left(\frac{2}{N}\right) = 0.1k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{2}{N}\right)}{\frac{1}{10}} = 10\ln\left(\frac{2}{N}\right)$$

سؤال : يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20g من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$

اجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عند $t=2$

الحل:

$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$\bar{A}(t) = 20 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}} * \frac{1}{140} * \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{A}(2) = \frac{1}{7} * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(2)}{140}} * \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{A}(2) = \frac{1}{7} * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{70}} * \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

السؤال $\boxed{6}$

أجد المشتقة العليا المطلوبة لكل ما يلي

① $f(x) = \sin \pi x \quad // \quad f'''(x)$

$f'(x) = \pi * \cos \pi x$

$f''(x) = \pi * \pi * -\sin \pi x$

$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$

$f'''(x) = -\pi^2 * \pi * \cos \pi x$

$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$

② $f(x) = \cos(2x+1) \quad // \quad f^{(5)}(x)$

$f'(x) = 2 * -\sin(2x+1)$

$f'(x) = -2 \sin(2x+1)$

$f'' = -2 * 2 * \cos(2x+1)$

$f''(x) = -4 \cos(2x+1)$

$f'''(x) = -4 * 2 * -\sin(2x+1)$

$f'''(x) = 8 \sin(2x+1)$

$f''''(x) = 8 * 2 * \cos(2x+1)$

$f''''(x) = 16 \cos(2x+1)$

$f'''''(x) = 16 * 2 * -\sin(2x+1)$

$f^{(5)}(x) = -32 \sin(2x+1)$

③ $f(x) = \cos x^2 \quad // \quad f''(x)$

$f'(x) = 2x * -\sin x^2$

$f'(x) = -2x \sin x^2$

$f''(x) = -2x * 2x \cos x^2 + \sin x^2 * -2$

$f''(x) = -4x^2 \cos x^2 + -2 \sin x^2$

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$ ①

$$V(t) = 0.1 * 2.4 * \cos 2.4t$$

$$V(t) = 0.24 * \cos 2.4t$$

$$V(1) = 0.24 * \cos 2.4(1)$$

$$V(1) = 0.24 * 0.99$$

$$V(1) = 0.23 \text{ Cm/s}$$

②

$$V(t) = 0.24 \cos 2.4t$$

$$0 = 0.24 \cos 2.4t \quad \div 0.24$$

$$\cos 2.4t = 0$$

$$2.4t = \frac{\pi}{2} \qquad 2.4t = \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{4.8} \qquad t = \frac{3\pi}{4.8}$$

$$s\left(\frac{\pi}{4.8}\right) = 0.1 \sin 2.4 * \frac{\pi}{4.8}$$

$$s\left(\frac{\pi}{4.8}\right) = 0.1 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$s\left(\frac{\pi}{4.8}\right) = 0.1 * 1 = 0.1 \text{ cm}$$

③

$$V(t) = 0.24 * \cos 2.4t$$

$$a(t) = 0.24 * 2.4 * -\sin 2.4t$$

$$\frac{0}{0.24 * 2.4} = \frac{0.24 * 2.4 * -\sin 2.4t}{0.24 * 2.4}$$

$$0 = -\sin 2.4t$$

السؤال 7

اذا كان الاقتران : $y = e^{\sin x}$

فاجد ميل مماس منحنى الاقتران عند (0,1)

$$y = e^{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x * e^{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 0 * e^{\sin 0}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 * e^{0}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 * 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

السؤال 8

زنبرك : تتحرك كرة معلقة بزنبرك الى الاعلى و الى الاسفل ويحدد الاقتران

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$

موقع الكره عند اي زمن لدقيقة حيث (t) الزمن بالثواني و (s) الموقع بالسنتيمرات

① اجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t=1$

② اجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً

③ اجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً

$$0 = -\sin 2.4t$$

$$0 = \sin 2.4t$$

$$2.4t = 0$$

$$\boxed{t = 0}$$

$$2.4t = \pi$$

$$t = \frac{\pi}{2.4}$$

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$

$$s(0) = 0.1 * \sin 2.4(0)$$

$$s(0) = 0.1 * \sin 0$$

$$s(0) = 0 \text{ Cm}$$

تكملة فرع (2)

$$s\left(\frac{3\pi}{4.8}\right) = 0.1 * \sin 2.4 * \frac{3\pi}{4.8}$$

$$0.1 * \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$0.1 * -1 = -0.1 \text{ cm}$$

السؤال [9]

اجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية عند النقطة المحددة بقيمة (t) المعطاة

① $X = t + 2 \quad , \quad y = t^2 - 1 \qquad t = 1$

$X = (1) + 2 \qquad y = (1)^2 - 1$

$X = 3 \qquad y = 0$

$\frac{dX}{dt} = 1 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dX}{dt} = 1 \qquad \frac{dy}{dt} = 2(1) = 2$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{2}{1} = 2 = m$$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 0 = 2(X - 3)$

② $X = \frac{t}{2} \quad , \quad y = t^2 - 4 \qquad t = -1$

$X = \frac{(-1)}{2} \qquad y = (-1)^2 - 4$

$X = -\frac{1}{2} \qquad y = 1 - 4 = -3$

$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$

$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{2} \qquad \frac{dy}{dt} = 2(-1) = -2$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4 = m$$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y + 3 = -4\left(X - \frac{1}{2}\right)$

③ $X = t - \sin t \quad , \quad y = 1 - \cos t \qquad t = \frac{\pi}{3}$

$X = \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \qquad y = 1 - \cos\frac{\pi}{3}$

$X = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = 1 - \frac{1}{2}$

$X = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = \frac{1}{2}$

$X = t - \sin t$

$\frac{dX}{dt} = 1 - \cos t$

$\frac{dX}{dt} = 1 - \cos\frac{\pi}{3}$

$\frac{dX}{dt} = 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{2}$

$y = 1 - \cos t$

$\frac{dy}{dt} = 0 - - \sin t$

$\frac{dy}{dt} = \sin t$

$\frac{dy}{dt} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$X = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = \frac{1}{2} \qquad m = \sqrt{3}$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y = \tan t$

$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\cos t)^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{4})^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\boxed{\frac{dy}{dt} = 2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}}$ $\boxed{x = 1}$ $\boxed{y = 1}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

(4) $x = \sec^2 t - 1 \quad y = \tan t$

$x = \frac{1}{(\cos t)^2} - 1$

$x = \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{4})^2} - 1$

$x = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

$\boxed{x = 1}$

$y = \tan t$

$y = \tan \frac{\pi}{4}$

$\boxed{y = 1}$

$x = \sec^2 t - 1$

$\frac{dx}{dt} = 2 \sec t * \sec t * \tan t$

$\frac{dx}{dt} = 2 \sec^2 t \tan t$

$\frac{dx}{dt} = 2 * \frac{1}{(\cos t)^2} * \tan t$

$\frac{dx}{dt} = 2 * \frac{1}{(\cos \frac{\pi}{4})^2} * \tan \frac{\pi}{4}$

$\frac{dx}{dt} = 2 * \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} * 1$

$\frac{dx}{dt} = 2 * \frac{1}{\frac{1}{2}} * 1$

$\frac{dx}{dt} = 2 * 2 * 1$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = 4}$

السؤال 15

يعطى منحنى المعادلة الوسيطية

$X = 2(t - \sin t)$ و $y = 2(1 - \cos t)$

حيث $2\pi \geq t \geq 0$

اثبت ان ميل المماس و ميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1 + \sqrt{2}$ // $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب

الحل:

$$X = 2(t - \sin t)$$

$$\frac{dX}{dt} = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dX}{dt} = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dX}{dt} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2}\,\sqrt{2}$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 - \sqrt{2}$$

$$y = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(\,\cdot\, - - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(0 + \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\left(0 + \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(4) $X = \sec^2 t - 1$ و $y = \tan t$ $\quad t = -\frac{\pi}{4}$

$$X = \sec^2 t - 1$$

$$X = \frac{1}{(\cos t)^2}$$

$$X = \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$X = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$y = \tan t$$

$$y = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$y = 1$$

$$X = (\sec t)^2 - 1$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 \sec t * \sec t \tan t$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 \sec^2 t \tan t$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 * \frac{1}{(\cos t)^2} * \tan t$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 * \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2} * \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dX}{dt} = 2 * \frac{1}{\frac{1}{2}} * 1 = 4$$

$$y = \tan t$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 + \sqrt{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} * \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$m_{\perp} = \frac{-1}{m}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2} + 1} * \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\frac{-\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = -\sqrt{2} + 1$$

$$= 1 - \sqrt{2}$$

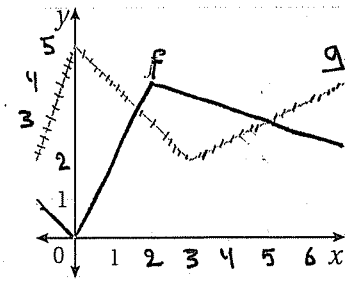
السؤال [١١]

يمثل الشكل المجاور منحنيي $f(x)$ و $g(x)$

اذا كان

$$h(x) = f(g(x))$$

$$p(x) = g(f(x))$$



فجد

① $h'(1)$

② $p'(1)$

الحل:

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$h'(1) = f'(g(1)) * g'(1)$$

$$h'(1) = f'(4) * g'(1)$$

p $\quad (2, 4)$ (x_1, y_1)

$(5, 3)$ (x_2, y_2)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{3 - 4}{5 - 2} = \frac{-1}{3}$$

$$f'(4) = \frac{-1}{3}$$

$$\boxed{\bar{g}(2) = -1}$$

$$\bar{f}(1) \rightarrow \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ (1, & 2) \\ (0, & 0) \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\boxed{\bar{f}(1) = 2}$$

$$\bar{p}(1) = \bar{g}(2) * \bar{f}(1)$$

$$\bar{p}(1) = -1 * 2 = -2$$

$$\bar{g}(1) \rightarrow \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ (1, & 4) \\ (3, & 2) \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2-4}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\bar{g}(1) = -1$$

$$\bar{h}(1) = \bar{f}(4) * \bar{g}(1)$$

$$\bar{h}(1) = \frac{-1}{3} * -1 = \frac{1}{3}$$

② $p(x) = g(f(x))$

$$\bar{p}(x) = \bar{g}(f(x)) * \bar{f}(x)$$

$$\bar{p}(1) = \bar{g}(f(1)) * \bar{f}(1)$$

$$\bar{p}(1) = \bar{g}(2) * \bar{f}(1)$$

$$\bar{g}(2) \rightarrow \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ (2, & 3) \\ (0, & 5) \\ x_2 & y_2 \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{5-3}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

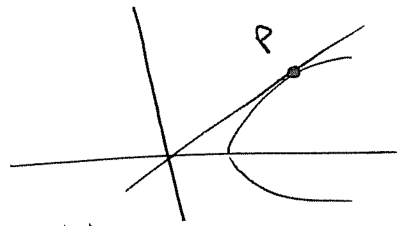
السؤال $\boxed{12}$

اذا كان الاقتران $y = \ln(ax+b)$ حيث a, b ثابتان موجبان وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 فاجد

① اثبت ان الاحداثي x للنقطة P اقل من 1

② اجد احداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها $\frac{1}{2}$ علماً ان P هي النقطة $(0,2)$

الحل:



$$y = \ln(ax+b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

$$1 = \frac{a}{ax+b}$$

* $\frac{b}{a}$ ← موجب

سالب = عدد ـ 1

$$ax + b = a$$

$$ax = a - b$$

$$x = \frac{a-b}{a} = \boxed{1 - \frac{b}{a} < 1}$$

② اي ان هناك نقطة (x,y) تقع على الاقتران ميل المماس عندها $\frac{1}{2}$

$P(0,2)$

$$y = \ln(ax+b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{ax+b}$$

* يجب ايجاد a, b لايجاد x

* اعطى السؤال معلومتان يمكن ايجاد مجهولان

$$y = \ln(ax+b) \,//\, (0,2)$$

$$2 = \ln(a(0)+b)$$

$$e^{2} = e^{\ln b}$$

$$\boxed{b = e^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

$$1 = \frac{a}{a(0)+b} \Rightarrow 1 = \frac{a}{b}$$

$$a = b = e^2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{ax+b}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{e^2}{e^2(x) + e^2}$$

$$2e^2 = e^2 x + e^2$$

$$e^2 = e^2 x \rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$y = \ln(ax+b)$$

$$y = \ln(e^2(1) + e^2)$$

$$y = \ln(e^2 + e^2)$$

$$y = \ln 2e^2$$

السؤال $\boxed{13}$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية

$$x = t^2 \quad و \quad y = 2t$$

① اجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

② اجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$

③ اثبت ان مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس و المحورين الاحداثيين

$$\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$$

الحل: ① $x = t^2 \qquad y = 2t$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

② $x = t^2$, $y = 2t$

$m_\perp =$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} = m$$

$$m_\perp = -t$$

$$y - y_1 = m_\perp(x - x_1)$$

$$y - 2t = -t(x - t^2)$$

③ عمودي على المماس و محورين احداثيين

معادلة العمودي $\qquad x = 0 \qquad y = 0$

1 معادلة العمودي // $x = 0$

$$y - 2t = -t(x - t^2)$$

$$y - 2t = -t(0 - t^2)$$

$$y - 2t = t^3$$

$$\boxed{y = 2t + t^3}$$

2 معادلة عمودي // $y = 0$

$$y - 2t = -t(x - t^2)$$

$$0 - 2t = -t(x - t^2)$$

$$-2t = -tx + t^3$$

$$tx = 2t + t^3$$

$$\boxed{x = 2 + t^2}$$

3 $x = 0$ // $y = 0$ نقطة الاصل

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2}(2+t^2)(2t+t^3)$$

$$A = \frac{1}{2}(4t + 2t^3 + 2t^3 + t^5)$$

$$A = \frac{1}{2}(4t + 4t^3 + t^5)$$

$= \downarrow$

$$\frac{1}{2}t(2+t^2)$$

$$\frac{1}{2}t(4 + 4t^2 + t^4)$$

$$\frac{1}{2}(4t + 4t^3 + t^5)$$

السؤال 14

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

① $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

$$y = \left(\sin \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sin \sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}} * \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}} * \frac{1}{\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \cos \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\ \sqrt{\sin \sqrt{x}}}$$

② $y = e^{x} \sin^{2} x \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} * \sin^{2} x * \cos x$$

$$+$$

$$e^{x} * 2 \sin x \cos x * \cos x$$

$$+$$

$$e^{x} * \sin^{2} x * -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} \sin^{2} x \cos x + 2e^{x} \sin x \cos^{2} x + -e^{x} \sin^{3} x$$

السؤال 15

يمثل الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية

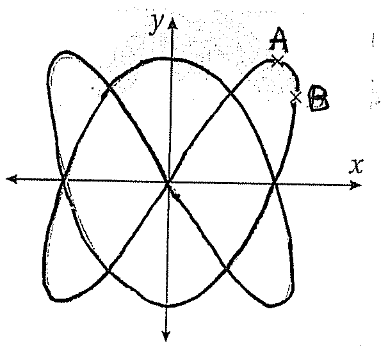
$$x = \sin 2t \qquad y = \sin 3t$$

علماً أن $2\pi \geq x \geq 0$ جد كل مما يلي

① اذا كان مماس منحنى المعادلة افقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الاول فاجد احداثيي A

② اذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B فاجد احداثيي B

③ اذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الاصل فاجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة



① $y = \sin 3t \qquad x = \sin 2t$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos 3t \qquad \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

$$3\cos 3t = 0$$

$$\cos 3t = 0$$

$$3t = \frac{\pi}{2} \qquad 3t = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{1}{3} * 3t = \frac{\pi}{2} * \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} * 3t = \frac{3\pi}{2} * \frac{1}{3}$$

$$t = \frac{\pi}{6} \qquad t = \frac{\pi}{2}$$

لاحظ موقع (A) على الرسم

$$X = \sin 2t \qquad y = \sin 3t$$

$$X = \sin 2 * \frac{\pi}{6} \qquad y = \sin 3 * \frac{\pi}{6}$$

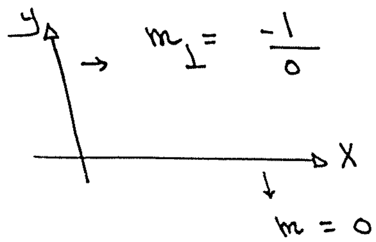
$$X = \sin\frac{\pi}{3} \qquad y = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$X = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y = 1$$

(2) المماس يوازي المحور y

ميل المماس = ميل المحور y

$$\frac{-1}{0} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$



$$\frac{-2\cos 2t}{-2} = \frac{0}{-2}$$

$$\cos 2t = 0$$

$$2t = \frac{\pi}{2} \qquad 2t = \frac{3\pi}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{4} \qquad t = \frac{3\pi}{4}$$

لاحظ موقع B على الرسم

$$X = \sin 2t$$

$$X = \sin 2 * \frac{\pi}{4}$$

$$X = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$X = 1$$

$$y = \sin 3t$$

$$y = \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3)

$$X = \sin 2t$$

$$0 = \sin 2t$$

$$2t = 0 \qquad 2t = \pi \qquad 2t = 2\pi \qquad 2t = 3\pi \qquad 2t = 4\pi$$

$$\boxed{t = 0} \qquad t = \frac{\pi}{2} \qquad \boxed{t = \pi} \qquad t = \frac{3\pi}{2} \qquad \boxed{t = 2\pi}$$

$$y = \sin 3t$$

$$0 = \sin 3t$$

$$3t = 0 \;||\; 3t = \pi \;||\; 3t = 2\pi \;/\; 3t = 3\pi$$

$$\boxed{t = 0} \qquad t = \frac{\pi}{3} \qquad t = \frac{2\pi}{3} \qquad \boxed{t = \pi}$$

$$3t = 4\pi \;||\; 3t = 5\pi \;||\; 3t = 6\pi$$

$$t = \frac{4\pi}{3} \qquad t = \frac{5\pi}{3} \qquad \boxed{t = 2\pi}$$

تمثل قيم (t) السابقة الاوقات التي مر بها المنحنى لنقطة الاصل لكن الوقت المطلوب مرور كلا فرعي المنحنى

عند $X=0$ ، $y=0$

$t = 0 , \pi , 2\pi$

اوقات (قيم) كلا Xو y تساوي 0

$$\frac{dy}{dX} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

$$\left.\frac{dy}{dX}\right|_{t=0 \text{ او } t=2\pi} \quad \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)}$$

$$\frac{3*1}{2*1} = \frac{3}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dX}\right|_{t=\pi} \quad \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi}$$

$$\frac{3*-1}{2*1} = -\frac{3}{2}$$

السؤال 16

يمثل الاقتران : $s(t)=\ln(t^2-2t+9)$

حيث $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم

حيث (s) الموقع بالامتار ، (t) الزمن بالثواني اجد

1 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه بعد (t) ثانية

2 اجد موقع الجسم وتسارعه عندما سرعته صفراً

3 متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي

1

$$s(t) = \ln(t^2-2t+9)$$

$$v(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+9}$$

$$a(t) = \frac{(t^2-2t+9)*2 - [(2t-2)*(2t-2)]}{(t^2-2t+9)^2}$$

2

$$s(0) = \ln((0)^2 - 2(0) + 9)$$

$$s(0) = \ln(0 - 0 + 9)$$

$$s(0) = \ln 9$$

$$a(0) = \frac{(0^2-2(0)+9)*2 - [(2(0)-2)*(2(0)-2)]}{}$$

$$a(0) = \frac{(9)*2 - [-2 * -2]}{(9)^2}$$

$$a(0) = \frac{18-4}{81} = \frac{14}{81}\ m/s^2$$

3

$$s(t) = \ln(t^2-2t+9)$$

$$0 = \ln(t^2-2t+9)$$

اضافة e e e

$$1 = t^2 - 2t + 9$$

$$t^2 - 2t + 8 = 0$$

$$b^2 - 4ac$$

$$4 - 4*1*8 = -28$$

لا يوجد قيم حقيقية الجسم لا يعود لموقعه الابتدائي

* اسئلة كتاب التمارين *

السؤال 1

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = 100e^{-0.1X}$

$f'(X) = 100 * -\frac{1}{10} * e^{-0.1X}$

$f'(X) = -10e^{-0.1X}$

② $f(X) = \sin(X^2+1)$

$f'(X) = 2X\cos(X^2+1)$

③ $f(X) = \cos^2 X$

$f(X) = (\cos X)^2$

$f'(X) = 2\cos X * -\sin X$

$f'(X) = -2\sin X\cos X$

④ $f(X) = \cos 2X - 2\cos X$

$f'(X) = 2 * -\sin 2X - 2 * -\sin X$

$f'(X) = -2\sin 2X + 2\sin X$

⑤ $f(X) = \log 2X$

$$f'(X) = \frac{2}{2X \ln 10}$$

$$\frac{1}{X \ln 10}$$

⑥ $f(X) = \log_3 \frac{X\sqrt{X-1}}{2}$

$f(X) = \frac{1}{2}\log_3 X\sqrt{X-1}$

$f(X) = \frac{1}{2} * \left(\log_3 X + \log_3 \sqrt{X-1}\right)$

$f(X) = \frac{1}{2}\left(\log_3 X + \log_3 (X-1)^{\frac{1}{2}}\right)$

$f(X) = \frac{1}{2}\left(\log_3 X + \frac{1}{2}\log_3 (X-1)\right)$

$f'(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{X\ln 3} + \frac{1}{2} * \frac{1}{(X-1)\ln 3}\right)$

⑨ $f(x) = \ln(x^3+2)$

$$\bar{f}(x) = \frac{3x^2}{x^3+2}$$

⑦ $f(x) = 2\cot^2(\pi x+2)$

$$f(x) = 2\left(\cot(\pi x+2)\right)^2$$

$$\bar{f}(x) = 2*2\left(\cot(\pi x+2)\right) * \pi * -\csc^2(\pi x+2)$$

$$\bar{f}(x) = -4\pi\left(\cot(\pi x+2)\right)\csc^2(\pi x+2)$$

⑩ $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

$$\bar{f}(x) = \frac{e^{x^2} * 2 * \cos(2x+1) - \left[\sin(2x+1) * 2xe^{x^2}\right]}{\left(e^{x^2}\right)^2}$$

⑧ $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

$$\bar{f}(x) = 2\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right) *$$

$$\frac{(x^3+2) * 2x - \left[x^2 * 3x^2\right]}{(x^3+2)^2}$$

$$\frac{2x^4 + 4x - 3x^4}{(x^3+2)^2}$$

$$\bar{f}(x) = 2\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)\left(\frac{4x - x^4}{(x^3+2)^2}\right)$$

$$\bar{f}(x) = \frac{8x^3 - 2x^6}{(x^3+2)^3}$$

⑪ $f(x) = 3^{\cot x}$

$\bar{f}(x) = 3^{\cot x} * -\csc^2 x * \ln 3$

⑫ $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$

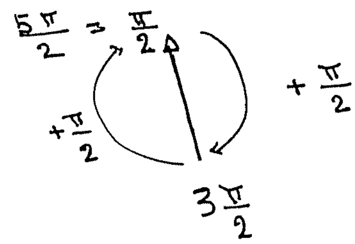
$f(x) = \sqrt{20x^4 - x^5}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{80x^3 - 5x^4}{2\sqrt{20x^4 - x^5}}$

⊛ نربع المقدار عند دخوله الجذر التربيعي

⊛ نكعب المقدار عند دخوله الجذر التكعيبي

⊛



السؤال $\boxed{2}$

اجد معادلة المماس لكل اقتران مما يلي عند قيمة (X) المعطاه

① $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x \quad // \quad x = \frac{\pi}{2}$

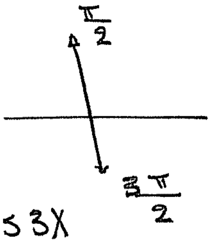
$y = 2\sin 5\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$y = 2\sin\frac{5\pi}{2} - 4\cos\frac{3\pi}{2}$

$y = 2 * 1 - 4 * 0$

$y = 2 - 0$

$\boxed{y = 2}$



$y = 2\sin 5x - 4\cos 3x$

$\frac{dy}{dx} = 2 * 5 * \cos 5x - 4 * 3 * -\sin 3x$

$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$

$\frac{dy}{dx} = 10\cos\frac{5\pi}{2} + 12\sin\frac{3\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 10 * 0 + 12 * -1$

$\frac{dy}{dx} = -12 = m$

$x = \frac{\pi}{2} \qquad y = 2 \qquad m = -12$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

③ $f(X) = \tan 3X \quad || \quad X = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \tan \frac{3\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = -1$

$\bar{f}(X) = 3 * \sec^2 3X$

$\bar{f}(X) = \frac{3}{(\cos 3X)^2}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right)^2}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 = m$

$X = \frac{\pi}{4} \qquad m = 6$

$y = -1$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - -1 = 6\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$

$y + 1 = 6\left(X - \frac{\pi}{4}\right)$

② $f(X) = (X^2 + 2)^3 \quad || \quad X = -1$

$f(-1) = ((-1)^2 + 2)^3$

$f(-1) = (1 + 2)^3$

$f(-1) = (3)^3$

$f(-1) = 27$

$f(X) = (X^2 + 2)^3$

$\bar{f}(X) = 3(X^2 + 2)^2 * 2X$

$\bar{f}(-1) = 3((-1)^2 + 2)^2 * 2(-1)$

$\bar{f}(-1) = 3 * 9 * -2$

$\bar{f}(-1) = -54$

$X = -1 \qquad m = -54$

$y = 27$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 27 = -54(X - -1)$

$y - 27 = -54(X + 1)$

السؤال [3]

اذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$

فاجب عما يلي

① اثبت ان $f'(x) = 3\cos^3 x$

② أجد $f''(x)$

الحل

①

$$f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$$

$$f(x) = 3\sin x - (\sin x)^3$$

$$f'(x) = 3 * \cos x - 3(\sin x)^2 \cos x$$

$$f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x \cos x$$

$$f'(x) = 3\cos x(1 - \sin^2 x)$$

$$f'(x) = 3\cos x * \cos^2 x$$

$$f'(x) = 3\cos^3 x$$

②

$$f'(x) = 3(\cos x)^3$$

$$f''(x) = 3 * 3(\cos x)^2 * -\sin x$$

$$f''(x) = -9\sin x \cos^2 x$$

السؤال [5]

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

حيث $0 \le t \le 2\pi$

اجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a, b

الحل:

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

$$x = a\cos\frac{\pi}{4} \qquad y = b\sin\frac{\pi}{4}$$

$$x = a * \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = b * \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{b * \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{a * \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(0 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = +\frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{2b}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,b$$

السؤال ⑤

اذا كان الاقتران : $y = e^{ax}$ حيث

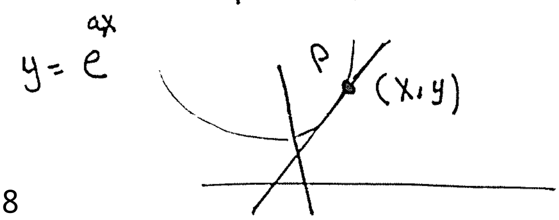
a ثابت و $a > 0$ فاجب عما يلي

① اجد احداثيا النقطة p التي تقع على منحنى الاقتران و يكون ميل المماس عندها ١

② اثبت انه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة p في صورة

$$X + y = k$$

ثم اجد قيمة الثابت k



①

$$y = e^{ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = a e^{ax}$$

$$1 = a e^{ax} \qquad \div a$$

$$\frac{1}{a} = e^{ax} \qquad \text{اضافة } \ln$$

$$\ln \frac{1}{a} = \ln e^{ax}$$

$$\ln 1 - \ln a = ax$$

$$0 - \ln a = ax$$

$$X = \frac{-\ln a}{a}$$

$$y = e^{ax}$$

$$y = e^{a \cdot -\frac{\ln a}{a}}$$

$$y = e^{-\ln a}$$

$$y = e^{\ln \frac{1}{a}}$$

$$y = \frac{1}{a}$$

②

$$X = -\frac{\ln a}{a} \qquad y = \frac{1}{a}$$

$$m_{\perp} = -1 \quad \dots$$

$$y - y_1 = m_{\perp}(X - X_1)$$

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(X + \frac{\ln a}{a}\right)$$

$$y - \frac{1}{a} = -X - \frac{\ln a}{a}$$

$$y + X = \underbrace{\frac{1}{a} - \frac{\ln a}{a}}_{k}$$

$$k = \frac{1 - \ln a}{a}$$

السؤال [7]

$$h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$$

$$f(1) = 7 \quad // \quad f'(1) = 4$$

فأجد $h'(1)$

$$h'(x) = \frac{0 + 3f'(x)}{2\sqrt{4 + 3f(x)}}$$

$$h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4 + 3f(1)}}$$

$$h'(1) = \frac{* \, 4}{2\sqrt{4 + 3 * 7}}$$

$$h'(1) = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

السؤال [8]

$$f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

اثبت ان $f''(x) = 4f(x)$

$$f'(x) = 2e^{2x} + -2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 2 * 2e^{2x} + -2 * -2 * e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$4f(x) \rightarrow 4(e^{2x} + e^{-2x})$$

$$4f(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4f(x)$$

السؤال [9]

$$f(x) = \sin 4x + \cos 4x$$

اثبت ان

$$f''(x) + 16f(x) = 0$$

$$f(x) = \sin 4x + \cos 4x$$

$$f'(x) = 4\cos 4x + -4\sin 4x$$

$$f''(x) = 4 * 4 * -\sin 4x + -4 * 4\cos 4x$$

$$\boxed{f''(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x}$$

$$16f(x) \rightarrow 16(\sin 4x + \cos 4x)$$

$$\boxed{16f(x) = 16\sin 4x + 16\cos 4x}$$

بالجمع

$$f''(x) + 16f(x) = \cancel{-16\sin 4x} + \cancel{16\sin 4x} \cancel{-16\cos 4x} + \cancel{16\cos 4x} = 0$$

السؤال [10]

يمثل الاقتران $V(t) = 15t\,e$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيارة تتحرك في مسار مستقيم حيث $10 \geq t \geq 0$

اجد السرعة المتجهة للسيارة عندما يكون تسارعها صفراً

$$V(t) =$$

$$V(t) = 15t\, e^{-0.05t^2}$$

$$V(t) = 15t\, e^{-\frac{1}{20}t^2}$$

$$a(t) = 15t * -\frac{1}{20} * 2t * e^{-\frac{1}{20}t^2} + e^{-\frac{1}{20}t^2} * 15$$

$$a(t) = \frac{-15t^2}{10}\, e^{-\frac{1}{20}t^2} + 15\, e^{-\frac{1}{20}t^2}$$

$$0 = 15e^{-\frac{1}{20}t^2}\left(\frac{-t^2}{10} + 1\right) \div 15e^{-\frac{1}{20}t^2}$$

$$0 = \frac{-t^2}{10} + 1$$

$$\frac{t^2}{10} = 1$$

$$t^2 = 10$$

$$t = \sqrt{10} \text{ s}$$

$$V(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10} * e^{-\frac{1}{20}*(\sqrt{10})^2}$$

$$V(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}\, e^{-\frac{1}{2}} \text{ m/s}$$

السؤال 11

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية

$x = \sin^2\theta \qquad y = 2\cos\theta$

حيث $0 \le \theta \le 2\pi$

① اجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ

② اجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$

③ اجد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمحور y

الحل:

$x = (\sin\theta)^2 \qquad y = 2\cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos\theta}$$

② $m = \sqrt{2}$

$x =$

$y =$

السؤال $\boxed{12}$

اجد $(f\circ g)'(x)$ عند قيم (x)

المعطاه لمايلي

① $f(u) = u + \dfrac{1}{\cos^2 u}$, $u = g(x) = \pi x$

$x = \dfrac{1}{4}$

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$= f'(\pi x) * \pi$$

$$f(\pi x) = \pi x + \frac{1}{(\cos \pi x)^2}$$

$$f(\pi x) = \pi x + (\sec \pi x)^2$$

$$f'(\pi x) * \pi = \pi + 2(\sec \pi x) * \pi * \sec \pi x \tan \pi x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi = \pi + 2 * \sec\frac{\pi}{4} * \pi * \sec\frac{\pi}{4} \tan\frac{\pi}{4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi = \pi + 2 * \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} * \pi * \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} \tan\frac{\pi}{4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi = \pi + 2 * \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} * \pi * \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} * 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi = \pi + 2 * \sqrt{2} * \pi * \sqrt{2} * 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi = \pi + 2 * 2 * \pi * 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi = \pi + 4 \qquad \div \pi$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) * \pi$$

$$5 * \pi = 5\pi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos\theta}$$

$$\sqrt{2} = \frac{-1}{\cos\theta}$$

$$\sqrt{2}\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

((نفس الناتج عند التعويض هنا))

$x = (\sin\theta)^2$ $\qquad$ $y = 2\cos\theta$

$x = \left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)^2$ $\qquad$ $y = 2 * \cos\frac{3\pi}{4}$

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ $\qquad$ $y = 2 * \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{-2}{\sqrt{2}}$

$$m = \sqrt{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - -\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

③ ميل المحور y = ميل المماس

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{0}$$

$$\frac{-1}{\cos\theta} = \frac{-1}{0}$$

$$-\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

((نفس الناتج عند التعويض هنا)) $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$x = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2$ $\qquad$ $y = 2\cos\frac{\pi}{2}$

$x = (1)^2$ $\qquad$ $y = 2 * 0$

$x = 1$ $\qquad$ $y = 0$

① ② $f(u) = u^5 + 1$, $u = g(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$= \boxed{\quad} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^5 + 1$$

$$f(\sqrt{x}) = x^{\frac{5}{2}} + 1$$

$$f'(\sqrt{x}) * \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(1) * \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{5}{2} * \sqrt[3]{1}$$

$$f'(1) * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{f'(1) = 5}$$

$$(f \circ g)'(x) = 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

⊛ نشتق الاقتران الاصلي
⊛ نعوض (x) بعد الاشتقاق كاملاً

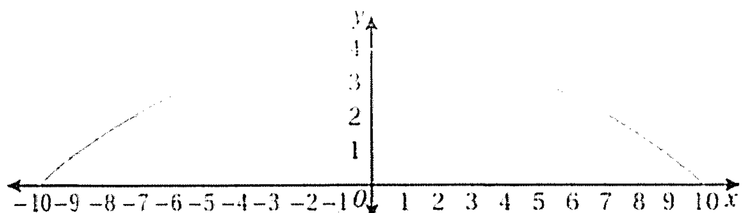
السؤال $\boxed{13}$

يمثل التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة مصمم للتخفيف من سرعة السيارات على احد الطرق وفيه يمثل المحور (x) سطح الارض وتقاس جميع الاطوال بالسنتيمترات اذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب $x = 10\sin t$, $y = 2 + 2\cos 2t$

$$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

① اجد ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t

② قيمة t عند اعلى نقطة على منحنى المطب



$$x = 10\sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = 10\cos t$$

$$y = 2 + 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 + 2 * 2 * -\sin 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{4}\,2\sin t\cos t}{10\cos t} = \frac{-4}{5}\sin t$$

②

اعلى نقطة $(0, 4)$

$y = 4$ او $x = 0$

$$x = 10\sin t$$

$$0 = 10\sin t$$

$$\sin t = 0$$

$$t = 0,\ \pi,\ 2\pi$$

لان $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{t = 0}$$

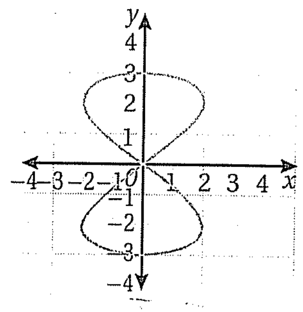
السؤال [14]

يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية

$x = 2\sin 2t$ و $y = 3\cos t$

حيث $0 \leq t \leq 2\pi$

اجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الاصل مبرراً اجابتي



$x = 2\sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = 2 * 2\cos 2t$

$\frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$

$y = 3\cos t$

$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$

يجب ايجاد قيمة (t)

$x = 0$
$y = 0$ ← نقطة الاصل

$x = 2\sin 2t$

$0 = 2\sin 2t \quad \div 2$

$\sin 2t = 0$

$2t = 0 \rightarrow t = 0$ $\qquad 2t = \pi \rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{2}}$

$2t = 2\pi \rightarrow t = \pi$ $\qquad 2t = 3\pi \rightarrow \boxed{t = \frac{3\pi}{2}}$

$y = 3\cos t$

$0 = 3\cos t$

$\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} \qquad t = \frac{3\pi}{2}$

عند الزمن $t = \frac{\pi}{2}$ و $t = \frac{3\pi}{2}$ كانت كل قيمة x و y تساوي صفر

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3 * \sin\frac{\pi}{2}}{4\cos 2 * \frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} \rightarrow \frac{3}{4}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} \quad \frac{-3 * \sin\frac{3\pi}{2}}{4 * \cos 2 * \frac{3\pi}{2}}$

$\frac{-3 * -1}{4 * -1} = -\frac{3}{4}$

الدرس الرابع : الاشتقاق الضمني

اولاً : البداية

* الاشتقاق العادي *

① تكون $f(x)$ او y مكتوبة بشكل صريح

1) $y = x^3 - 8x$

2) $y = \dfrac{7x}{x^2+9}$

3) $y = \sqrt[3]{x-1}$

② يمكن جعل y او $f(x)$ احد طرفي المعادلة

$$2y + 4x^3 = 8$$

$$2y = 8 - 4x^3 \qquad \div 2$$

$$y = 4 - 2x^3$$

* الاشتقاق الضمني *

① معادلة تحتوي y || x من الصعوبة جعل y لوحدها احد طرفي المساواة

② جعل y لوحدها يجعل المسألة اكثر تعقيداً

$$-3x^3 + 5y^4 = 0$$

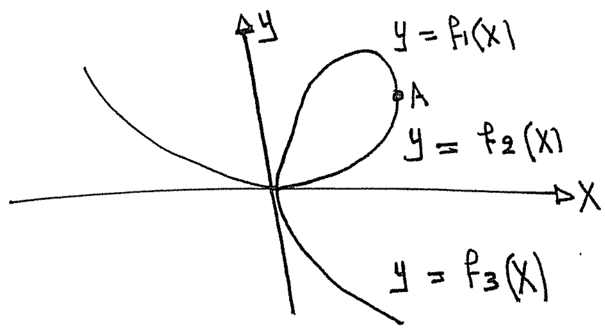
$$5y^4 = 3x^3$$

$$y^4 = \frac{3}{5}x^3$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{3}{5}x^3}$$

③ توجد معادلات لا يمكن ابداً جعل $f(x) = y$ احد طرفي المعادلة لانها تحتوي بداخلها اكثر من اقتران

مثال : $x^3 + y^3 - 9xy = 0$



* ملاحظات على الاشتقاق الضمني *

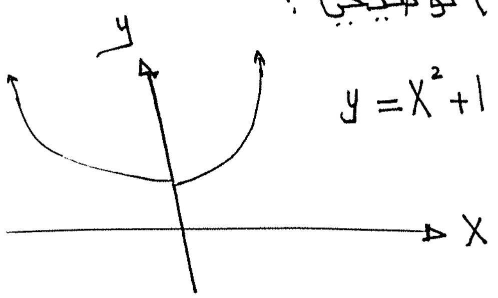
① معنى ان نشتق ضمنياً اي ان نشتق الاقتران حسب الرمز الموجود داخل الاقتران

$$\frac{d\ \text{قبل}}{d\ \text{بعد}} = \frac{d\ \text{اقتران}}{d\ \text{الرمز}}$$

رمز = اقتران

$$\underset{\text{اقتران}}{y} = \underset{x\ \text{رمز داخل}\ y}{x^2} + 1$$

رسم توضيحي :



جميع قيم (x) تكون داخل (y)

مثال: اشتق كلاً من الاقترانات التالية

① $y = 4x^3 + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2$$

② $L = m^2 - 7$

$$\frac{dL}{dm} = 2m$$

③ $g = 2h + 1$

$$\frac{dg}{dh} = 2$$

ملاحظة: سنتعامل فقط ودائماً

$y \rightarrow$ اقتران

$x \rightarrow$ رمز داخل y

② خطوة الاشتقاق الضمني

1- نشتق y كما نشتق اي رمز

2- نضيف بعد الاشتقاق $\frac{dy}{dx}$ أو $\bar{y}$

$\frac{dy}{dx} *$ مشتقة y

* لان y هو اقتران $f(x)$ يعامل كاقتران مركب
وتعلمنا عند اشتقاق اقتران مركب نشتق $f(x)$
ثم نشتق الداخل

$$f^2(x)$$

$$(f(x))^2 = 2\,f(x) * \bar{f}(x)$$

$$y^2 = 2y\,\frac{dy}{dx}$$

$y = f(x) =$ اقتران

⊛ خطوات ايجاد $\frac{dy}{dx}$ لعلاقة ضمنية ⊛

① اشتق طرفي المعادلة بالنسبة الى x

$x \rightarrow$ اشتقها كرمز

$y \rightarrow \frac{dy}{dx} *$ اشتق y

② انقل جميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ في الطرف الايسر و بقية الحدود في الطرف الايمن

③ اخرج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً

④ اقسم على معامل $\frac{dy}{dx}$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ما يلي

① $x^2 + y^2 = 4$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \div \quad 2y\frac{dy}{dx} = -2x \quad \div 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

④ $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

$$\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y) = y^2 * -\sin x + \cos * 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x + 2y\cos x\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\cos(x+y) - 2y\cos x\right) = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$

② $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\cos x - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} + \cos x = 2$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3 - \sin y\right) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

③ $2xy - y^3 = 1$

$$2x\frac{dy}{dx} + y * 2 - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2x - 3y^2\right) = -2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{2x - 3y^2}$$

مثال: جد ميل المماس لمنحنى العلاقة ①

$e^{2x} \ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1,1)$

الحل: ميل المماس ← $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)}$

$e^{2x} \ln y = x + y - 2$

$e^{2x} * \frac{\bar{y}}{y} + \ln y * 2e^{2x} = 1 + \bar{y} - 0$

$e^{2(1)} * \frac{\bar{y}}{1} + \ln 1 * 2e^{2(1)} = 1 + \bar{y}$

$e^{2} * \bar{y} + 0 = 1 + \bar{y}$

$e^{2}\bar{y} = 1 + \bar{y}$

$e^{2}\bar{y} - \bar{y} = 1$

$\bar{y}(e^{2} - 1) = 1$

$\bar{y} = \frac{1}{e^{2} - 1}$

② $y^2 = x \quad // \quad x = 4$

الحل:

$y^2 = 4$

$\sqrt{y^2} = \sqrt{4}$

$\boxed{y = \pm 2}$

$(4,2)$

$y^2 = x$

$2y \frac{dy}{dx} = 1$

$2(2) \frac{dy}{dx} = 1$

$4 \frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$

$(4, -2)$

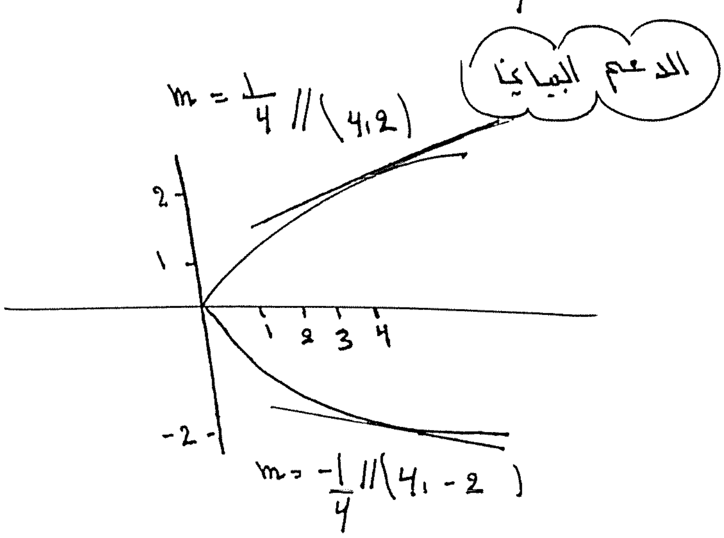
$y^2 = x$

$2y \frac{dy}{dx} = 1$

$2(-2) \frac{dy}{dx} = 1$

$-4 \frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$



مثال: جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1,2)$

الحل: معادلة المماس

m ، (x,y)

$(-1,2)$

$$x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y*1\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(-1) - (-1)\frac{dy}{dx} - (2) + 2(2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2 + \frac{dy}{dx} - 2 + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$5\frac{dy}{dx} - 4 = 0$$

$$5\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{4}{5}(x - -1)$$

$$y - 2 = \frac{4}{5}(x + 1)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$

(*) عند طلب $\frac{dy}{dx}$ لنقطة (x,y) ← نشتق ثم نعوض (x,y) مباشرة

* المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية * $\frac{d^2y}{dx^2}$

① نشتق اول مرة $\frac{dy}{dx}$ كما تعلمنا

② نشتق ثاني مرة $\frac{d^2y}{dx^2}$

③ بعد الاشتقاق ثاني مرة سيظهر لنا $\frac{dy}{dx}$ نقوم باستبدال قيمته كما ظهر معنا باول خطوة

مثال: جد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$2x^3 - 3y^2 = 8$$

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-6y\frac{dy}{dx} = -6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y*2x - \left(x^2 * \frac{dy}{dx}\right)}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - \left(x^2 * \frac{x^2}{y}\right)}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - \frac{x^4}{y}}{y^2}$$

$2xy - \frac{x^4}{y}$ → توحيد مقامات

$$\frac{2xy}{1} - \frac{x^4}{y}$$

$$\frac{2xy^2 - x^4}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2xy^2 - x^4}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

*** المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية ***

① نجد المشتقة الاولى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

② نجد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\text{مشتقة الناتجة } \frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$$

③ عوضنا قيمة t المعطاه

تذكر:

* المعادلة الوسيطية معادلتان بينهما رمز مشترك

$$x = h(t) \xrightarrow{\text{اشتق}} \frac{dx}{dt} \qquad y = g(t) \xrightarrow{\text{اشتق}} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مثال: جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عند $t=1$

$$x = t^3 + 3t^2 \quad // \quad y = t^4 - 8t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t \quad // \quad \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t(t^2 - 4)}{3t(t+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\cancel{t}(t-2)\cancel{(t+2)}}{3\cancel{t}\cancel{(t+2)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t - 8}{3} = \frac{4t}{3} - \frac{8}{3}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{3}$$

اشتقاق بالنسبة الى t
المشتقة الاولى

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{\frac{4}{3}}{3t^2 + 6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{4}{3}}{3(1)^2 + 6(1)} = \frac{4}{27}$$

* الاشتقاق اللوغاريتمي *

اولاً : البداية

① هنالك اقترانات معقده لا يمكن اشتقاقها الا باستخدام اضافة اللوغاريتم وتكون هذه الاقترانات بالاصل غير لوغاريتمية

مثال :

$$y = X^X$$

||الاس و الاساس متغيران لا يمكن الاشتقاق||

② نضيف اللوغاريتم للطرفين ثم نشتق

ثانياً : خطوات الاشتقاق اللوغاريتمي

① أخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة $y = f(X)$

② نستخدم قوانين اللوغاريتمات للتبسيط

③ نشتق المعادلة ضمنياً بالنسبة الى X

④ حل المعادلة الناتجة $\frac{dy}{dX}$

⑤ نضع $f(X)$ بدلاً من y

مثال: اشتق كل اقتران مما يلي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي

① $y = X^X$

$$\ln y = \ln X^X$$

$$\ln y = X \ln X$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = X * \frac{1}{X} + \ln X * 1$$

$$y * \frac{\bar{y}}{y} = (1 + \ln X) * y$$

$$\bar{y} = y + y \ln X$$

$$\bar{y} = X^X + X^X \ln X$$

$$\frac{dy}{dX} = X^X + X^X \ln X$$

② $y = \dfrac{(X-1)^2}{\sqrt{X^2+9}}$

$$\ln y = \ln \frac{(X-1)^2}{\sqrt{X^2+9}}$$

$$\ln y = \ln (X-1)^2 - \ln \sqrt{X^2+9}$$

$$\ln y = 2\ln(X-1) - \ln (X^2+9)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = 2\ln(X-1) - \frac{1}{2}\ln(X^2+9)$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = 2 * \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2} * \frac{2X}{X^2+9}$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{2}{X-1} - \frac{X}{X^2+9}$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{2X^2+18-X^2+X}{(X-1)(X^2+9)}$$

$$y * \frac{\bar{y}}{y} = \frac{X^2+X+18}{(X-1)(X^2+9)} * y$$

$$y = \frac{(X-1)^2}{\sqrt{X^2+9}}$$

$$\bar{y} = \frac{(X^2+X+18)(X-1)^2}{\sqrt{X^2+9}\,(X-1)(X^2+9)}$$

$$\bar{y} = \frac{(X^2+X+18)\cancel{(X-1)}(X-1)}{\sqrt{X^2+9}\,\cancel{(X-1)}(X^2+9)}$$

$$\bar{y} = \frac{(X^2+X+18)(X-1)}{\sqrt[2]{(X^2+9)^3}}$$

$$(X^2+9)^{\frac{1}{2}} * (X^2+9) = (X^2+9)^{\frac{3}{2}}$$

التحقق من فهمي ①

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مايلي

① $x^2 + y^2 = 13$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \qquad \div 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

② $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = -2$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

التحقق من فهمي ②

اجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي

① $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3x * 2y\frac{dy}{dx} + y^2 * 3 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(6xy + 3y^2) = -3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{6xy + 3y^2}$$

② $\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$

$$\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)\sec^2(x - y) = 2x * 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3 * 2 + 0$$

$$\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$-6xy^2\frac{dy}{dx} - \sec^2(x - y)\frac{dy}{dx} = -\sec^2(x - y) + 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-6xy^2 - \sec^2(x - y)\right) = -\sec^2(x - y) + 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sec^2(x - y) + 2y^3}{-6xy^2 - \sec^2(x - y)}$$

التحقق من فهمي ③

① اجد ميل مماس منحنى العلاقة $y^2=\ln X$
عند النقطة $(e,1)$

$(e,1)$
$X\ y$

$$y^2=\ln X$$

$$2y\frac{dy}{dX}=\frac{1}{X}$$

$$2(1)\frac{dy}{dX}=\frac{1}{(e)}$$

$$2\frac{dy}{dX}=\frac{1}{e}\qquad *\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dX}=\frac{1}{2e}$$

② اجد ميل مماس منحنى العلاقة
$(y-3)^2=4(X-5)$
عندما $X=6$

الحل:

$$(y-3)^2=4(6-5)$$

$$(y-3)^2=4$$

$$y-3=2 \qquad y-3=-2$$

$$y=5 \qquad y=1$$

$(6,5)$

$$(y-3)^2=4(X-5)$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dX}=4$$

$$2(5-3)\frac{dy}{dX}=4$$

③ $$X^2=\frac{X-y}{X+y}$$

بالضرب التبادلي

$$X^2(X+y)=X-y$$

$$X^3+X^2y=X-y$$

$$3X^2+X^2\frac{dy}{dX}+y*2X=1-\frac{dy}{dX}$$

$$X^2\frac{dy}{dX}+\frac{dy}{dX}=-3X^2-2Xy+1$$

$$\frac{dy}{dX}(X^2+1)=-3X^2-2Xy+1$$

$$\frac{dy}{dX}=\frac{-3X^2-2Xy+1}{X^2+1}$$

$$21\frac{dy}{dx} + 21 = 0$$

$$21\frac{dy}{dx} = -21 \qquad \div 21$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$m = -1 \qquad x = 2$

$y = 3$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -1(x - 2)$$

$$2 * 1 * \frac{dy}{dx} = 4$$

$$2\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$(6, 1)$

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$2(1-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$-4\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

التحقق من فهمي (4)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17$$

عند النقطة $(2, 3)$

الحل: $\quad x = 2 \quad y = 3 \qquad m =$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \left(3x\frac{dy}{dx} + y * 3\right) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$3(2)^2 + 3(3)^2\frac{dy}{dx} - 3(2)\frac{dy}{dx} + 3(3) = 0$$

$$12 + 27\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} + 9 = 0$$

التحقق من فهمي (5)

$$xy + y^2 = 2x$$

فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$xy + y^2 = 2x$$

$$x\frac{dy}{dx} + y * 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - y}{x + 2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y) * -\frac{dy}{dx} - \left[(2 - y) * 1 + 2\frac{dy}{dx} \right.}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y) * -\frac{2-y}{x+2y} - \left[(2 - y) * \left(1 + 2 * \frac{2-y}{x+2} \right.\right.}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 2y) * \frac{-(2-y)}{x+2y} - \left[2 - y + \frac{2(2-y)}{x+2y} \right.}{(x + 2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(2-y) - \left[2 - y + \frac{2(2-y)^2}{x+2y}\right]}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2 + y - 2 + y - \frac{2(2-y)^2}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4 + 2y - \frac{2(2-y)^2}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{(x+2y)(-4+2y) - 2(2-y)^2}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(-4+2y) - 2(2-y)^2}{(x+2y)^3}$$

التحقق من فهمي (6)

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية التالية عندما $t = 2$

$$x = 3t^2 + 1 \qquad y = t^3 - 2t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 4t}{6t}$$

التحقق من فهمي ⑦

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي

① $y = x^{\sqrt{x}} \quad \| \quad x > 0$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \sqrt{x} * \frac{1}{x} + \ln x * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$*y \quad \frac{\bar{y}}{y} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \quad *y$$

$$\bar{y} = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

---

② $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

$$y = \left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \ln\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x^4+1}\right)$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\left(\ln (x-1)\right) - \left(\ln (x^4+1)\right)$$

$$y* \quad \frac{\bar{y}}{y} = \frac{1}{2} * \frac{1}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+1} \quad *y$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{4x^3}{x^4+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{t}(3t-4)}{6\cancel{t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t-4}{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=2} = \frac{\frac{1}{2}}{6t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{6(2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{12}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{24}$$

اسئلة الكتاب

السؤال $\boxed{1}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

① $x^2 - 2y^2 = 4$

$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$

$-4y\frac{dy}{dx} = -2x \qquad \div -4y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-4y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$

② $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} = \frac{1}{10}$

$10x^2 + 10y^2 = x^2 y^2$

$20x + 20y\frac{dy}{dx} = x^2 * 2y\frac{dy}{dx} + y^2 * 2x$

$20x + 20y\frac{dy}{dx} = 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2$

$20y\frac{dy}{dx} - 2x^2y\frac{dy}{dx} = 2xy^2 - 20x$

$\frac{dy}{dx}(20y - 2x^2y) = 2xy^2 - 20x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2 - 20x}{20y - 2x^2y}$

③ $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 50x^2 - 50y^2$

$4x^3 + 2x^2 * 2y\frac{dy}{dx} + y^2 * 4x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$

$4x^3 + 4x^2y\frac{dy}{dx} + 4xy^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$

$4x^2y\frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx} + 100y\frac{dy}{dx} = 100x - 4x^3 - 4xy^2$

$\frac{dy}{dx}(4x^2y + 4y^3 + 100y) = 100x - 4x^3 - 4xy^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{100x - 4x^3 - 4xy^2}{4x^2y + 4y^3 + 100y}$

④ $e^x y = x e^y$

$e^x * \frac{dy}{dx} + y * e^x = x * \frac{dy}{dx}e^y + e^y * 1$

$e^x\frac{dy}{dx} + e^x y = xe^y\frac{dy}{dx} + e^y$

$e^x\frac{dy}{dx} - xe^y\frac{dy}{dx} = e^y - e^x y$

$\frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - e^x y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - e^x y}{e^x - xe^y}$

⑦ $x = \sec\frac{1}{y}$

$$1 = \frac{-1 * \bar{y}}{y^2} * \sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}$$

$$1 = \frac{-\bar{y}}{y^2}\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y} \qquad * y^2$$
الطرفين

$$y^2 = -\bar{y}\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y} \qquad \div$$

$$\bar{y} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}}$$

---

⑧ $(\sin\pi x + \cos\pi y)^2 = 2$

$$2(\sin\pi x + \cos\pi y) * \pi\cos\pi x - \pi\bar{y}\sin\pi y = 0$$

$$(2\sin\pi x + 2\cos\pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\,\bar{y}) = 0$$

$$\overset{1}{2\pi\sin\pi x\cos\pi x} - \overset{2}{2\pi\sin\pi x\sin\pi y\,\bar{y}}$$
$$+\ \overset{3}{2\pi\cos\pi x\cos\pi y} - \overset{4}{2\pi\cos\pi y\sin\pi y\,\bar{y}} = 0$$

$$-2\pi\sin\pi x\sin\pi y\,\bar{y} - 2\pi\cos\pi y\sin\pi y\,\bar{y} = -2\pi\sin\pi x\cos\pi x - 2\pi\cos\pi x\cos\pi y$$

$$\bar{y}(2\pi\sin\pi x\sin\pi y - 2\pi\cos\pi y\sin\pi y) = -2\pi\sin\pi x\cos\pi x - 2\pi\cos\pi x\cos\pi y$$

$$\bar{y} = \frac{-2\pi\sin\pi x\cos\pi x - 2\pi\cos\pi x\cos\pi y}{2\pi\sin\pi x\sin\pi y - 2\pi\cos\pi y\sin\pi y}$$

---

⑤ $3^x = y - 2xy$

$$3^x * 1 * \ln 3 = \frac{dy}{dx} - \left(2x\frac{dy}{dx} + y * 2\right)$$

$$3^x\ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$2x\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -3^x\ln 3 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 1) = -3^x\ln 3 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3^x\ln 3 - 2y}{2x - 1}$$

---

⑥ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\bar{y}}{2\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-\bar{y}}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{-2\bar{y}\sqrt{x}}{-2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{y}}{-2\sqrt{x}}$$

$$\bar{y} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

(11) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2\ln(x+y)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2 * \frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2 + 2\frac{dy}{dx}}{(x+y)}$$

$$2x(x+y) + 2y(x+y)\frac{dy}{dx} = 2 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$2y(x+y)\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 2 - 2x(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y(x+y) - 2\right) = 2 - 2x(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2x(x+y)}{2y(x+y) - 2}$$

(12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$\sin x * \bar{y} * -\sin y + \cos y * \cos x = 2x - 5\bar{y}$$

$$-\sin x \sin y\, \bar{y} + \cos x \cos y = 2x - 5\bar{y}$$

$$5\bar{y} - \sin x \sin y\, \bar{y} = 2x - \cos x \cos y$$

$$\bar{y}(5 - \sin x \sin y) = 2x - \cos x \cos y$$

$$\bar{y} = \frac{2x - \cos x \cos y}{5 - \sin x \sin y}$$

(9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$$x^2 + y^4 = 5xy^2 \qquad * xy^2$$

$$2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 5x * 2y\frac{dy}{dx} + y^2 * 5$$

$$2x + 4y^3\frac{dy}{dx} = 10xy\frac{dy}{dx} + 5y^2$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 10xy\frac{dy}{dx} = 5y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(4y^3 - 10xy\right) = 5y^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y^2 - 2x}{4y^3 - 10xy}$$

(10) $x + y = \cos(xy)$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \left(x\frac{dy}{dx} + y * 1\right) * -\sin(xy)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin(xy)x\frac{dy}{dx} - y\sin(xy)$$

$$\sin(xy)x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -1 - y\sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\sin(xy)x + 1\right) = -1 - y\sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - y\sin(xy)}{\sin(xy)x + 1}$$

السؤال $\boxed{2}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي عند القيمة المعطاة

① $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \quad , \quad x = \frac{1}{2}$

الحل:

$$2y^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)y - 1 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1)$$

$$y = \frac{1}{2} \qquad y = -1$$

1) $x = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{1}{2}$

$$2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + y * 2 - 0 = 0$$

$$\boxed{4y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0}$$

$$4\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

$$2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$3\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$$

2) $x = \frac{1}{2} \quad , \quad y = -1$

$$4(-1)\frac{dy}{dx} + 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx} + 2(-1) = 0$$

$$-4\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + -2 = 0$$

$$-3\frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$$

② $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , \quad y = 1$

$$(1)^3 + 2x^2 = 11y$$

$$1 + 2x^2 = 11$$

$$2x^2 = 10$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

$x = \sqrt{5} \qquad y = 1$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 4x = 11\frac{dy}{dx}$$

$$3(1)^2\frac{dy}{dx} + 4\sqrt{5} = 11\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} + 4\sqrt{5} = 11\frac{dy}{dx}$$

$$4\sqrt{5} = 8\frac{dy}{dx} \qquad \div 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{5}}{8}$$

$x = -\sqrt{5} \qquad y = 1$

$$3(1)^2\frac{dy}{dx} + 4(-\sqrt{5}) = 11\frac{dy}{dx}$$

$$-4\sqrt{5} = 8\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sqrt{5}}{8}$$

السؤال [3]

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة مما يلي عند النقطة المعطاه

① $x^2 + y^2 = 25 \quad (3, -4)$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(3) + 2(-4)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6 + -8\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8\frac{dy}{dx} = -6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

② $x^2 y = 4(2 - y) \quad (2, 1)$

$8 - 4y$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y*2x = -4$$

$$(2)^2\frac{dy}{dx} + (1)*2(2) = -4$$

$$4\frac{dy}{dx} + 4 = -4$$

$$4\frac{dy}{dx} = -8$$

$$\frac{dy}{dx} = -2$$

③ $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1 \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x\, e^{\sin x} + \bar{y} * -\sin y = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{2} * e^{\sin\frac{\pi}{2}} + \bar{y} * -\sin\frac{\pi}{2} * e^{\cos\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$0 * e^{1} + \bar{y} * -1 * e^{0} = 0$$

$$0 + -\bar{y} = 0$$

$$\boxed{\bar{y} = 0}$$

④ $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \quad (8, 1)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5 \quad (8, 1)$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} * \bar{y} = 0$$

$$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2\bar{y}}{3y^{\frac{1}{3}}} = 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2\bar{y}}{3\sqrt[3]{y}} = 0$$

$$\frac{2}{3 * \sqrt[3]{8}} + \frac{2\bar{y}}{3\sqrt[3]{(1)}} = 0$$

$$\frac{2}{6} + \frac{2\bar{y}}{3} = 0$$

$$\frac{2\bar{y}}{3} = -\frac{2}{6}$$

$$12\bar{y} = -6 \rightarrow \bar{y} = -\frac{1}{2}$$

السؤال 4

اجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة

① $X^2 + Xy + y^2 = 13 \quad (-4, 3)$

$$2X + X\frac{dy}{dX} + y*1 + 2y\frac{dy}{dX} = 0$$

$$2(-4) + -4\frac{dy}{dX} + 3*1 + 2(3)\frac{dy}{dX} = 0$$

$$-8 + -4\frac{dy}{dX} + 3 + 6\frac{dy}{dX} = 0$$

$$2\frac{dy}{dX} = 5$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{5}{2} = m \qquad X = -4, \quad y = 3$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(X + 4)$$

② $X + y - 1 = \ln(X^2 + y^2) \quad (1, 0)$

$$1 + \frac{dy}{dX} - 0 = \frac{2X + 2y\frac{dy}{dX}}{X^2 + y^2}$$

$$1 + \frac{dy}{dX} = \frac{2(1) + 2(0)}{(1)^2 + (0)^2}$$

$$1 + \frac{dy}{dX} = \frac{2}{1}$$

$$1 + \frac{dy}{dX} = 2$$

$$\frac{dy}{dX} = 1 \qquad X = 1 \;\; || \;\; y = 0$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - 0 = 1(X - 1)$$

$$y = X - 1$$

السؤال 5

أجد $\frac{d^2y}{dX^2}$ لكل مما يلي

① $X + y = \sin y$

$$1 + \frac{dy}{dX} = \frac{dy}{dX}\cos y$$

$$\frac{dy}{dX} - \cos y\frac{dy}{dX} = -1$$

$$\frac{dy}{dX}(1 - \cos y) = -1$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-1}{1 - \cos y}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{1}{\cos y - 1}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{-1 * \frac{dy}{dX} * -\sin y}{(\cos y - 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{-1 * \frac{1}{\cos y - 1} * -\sin y}{(\cos y - 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{\frac{\sin y}{\cos y - 1}}{(\cos y - 1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{\sin y}{(\cos y - 1)^3}$$

③ $xy + e^y = e$

$$x\frac{dy}{dx} + y*1 + \frac{dy}{dx}e^y = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + e^y\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + e^y) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+e^y) * -\frac{dy}{dx} - \left[-y * \left(1 + \frac{dy}{dx}e^y\right)\right]}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+e^y) * \frac{y}{x+e^y} - \left[-y + -ye^y * \frac{-y}{x+e^y}\right]}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y + y - \frac{y^2e^y}{x+e^y}}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y - \frac{y^2e^y}{x+e^y}}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2xy + 2ye^y - y^2e^y}{x+e^y}}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$$

② $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$12y^2\frac{dy}{dx} = 12x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x}{12y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2*1 - x*2y\frac{dy}{dx}}{y^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy * \frac{x}{y^2}}{y^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - \frac{2x^2}{y}}{y^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{y^3 - 2x^2}{y}}{y^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

السؤال $\boxed{6}$

اجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x-6)(y+4)=2$ عند النقطة $(7,-2)$

$$(x-6)(y+4)=2$$

$$(x-6)*\frac{dy}{dx}+(y+4)*1=0$$

$$(7-6)*\frac{dy}{dx}+(-2+4)*1=0$$

$$\frac{dy}{dx}+2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2$$

$$m_{\perp}=\frac{1}{2}$$

السؤال $\boxed{7}$

اثبت ان لمنحنى العلاقة: $3x^2+2xy+y^2=6$ مماسين افقيين ثم اجد احداثيا نقطتي التماس

الحل:

$$3x^2+2xy+y^2=6$$

$$6x+2x\frac{dy}{dx}+y*2+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$6x+2x(0)+2y+2y(0)=0$$

$$6x+2y=0$$

$$6x+2y=0$$

$$2y=-6x$$

$$y=-3x$$

$$3x^2+2xy+y^2=6$$

$$3x^2+2x(-3x)+(-3x)^2=6$$

$$3x^2+-6x^2+9x^2=6$$

$$6x^2=6$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$x=1$

$$3x^2+2xy+y^2=6$$

$$3(1)^2+2(1)y+y^2=6$$

$$3+2y+y^2=6$$

$$y^2+2y-3=0$$

$$(y+3)(y-1)$$

$$\boxed{y=-3} \quad \boxed{y=1}$$

$x=-1$

$$3+-2y+y^2=6$$

$$y^2-2y-3=0$$

$$\boxed{y=3} \quad \boxed{y=-1}$$

$$6x+2x\frac{dy}{dx}+2y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=-2x-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2y-6x}{2x+2y}$$

$(1,-3)$

$(-1,3)$

نقطتي التماس

السؤال [8]

اجد احداثيا نقطة على المنحنى : $X + y^2 = 1$

بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم

$X + 2y = 0$

الحل : يوازي ← $m_1 = m_2$

m_1 : $X + y^2 = 1$

$$1 + 2y\frac{dy}{dX} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dX} = -1$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-1}{2y}$$

m_2 : $X + 2y = 0$

$$1 + 2\frac{dy}{dX} = 0$$

$$2\frac{dy}{dX} = -1$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-1}{2}$$

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{-1}{2y} = -\frac{1}{2}$$

$$2y = 2$$

$$\boxed{y = 1}$$

$$X + y^2 = 1$$

$$X + (1)^2 = 1$$

$$X + 1 = 1$$

$$\boxed{X = 0}$$

السؤال [9]

اجد احداثيا نقطة (نقاط) على المنحنى : $y = X^2$

بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً

على المستقيم $y + 3X - 5 = 0$

الحل : عمودي ← $m_1 * m_2 = -1$

m_1:

$$y = X^2$$

$$\frac{dy}{dX} = 2X$$

m_2:

$$y + 3X - 5 = 0$$

$$\frac{dy}{dX} + 3 - 0 = 0$$

$$\frac{dy}{dX} = -3$$

$$m_1 * m_2 = -1$$

$$2X * -3 = -1$$

$$-6X = -1$$

$$X = \frac{1}{6}$$

$$y = X^2$$

$$y = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{36}$$

السؤال ١٥

اذا كان : $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$ $\quad y \neq 0$, $x \neq 0$

اثبت ان $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

الحل:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$$

$$\frac{x}{y} + 2 * \sqrt{\frac{x}{y}} * \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + 2 * \frac{x}{y} * \frac{y}{x} + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 98$$

$$\frac{y*1 - x\bar{y}}{y^2} + \frac{x\bar{y} - y*1}{x^2} = 0$$

$$\frac{y - x\bar{y}}{y^2} + \frac{x\bar{y} - y}{x^2} = 0$$

$$\frac{y - x\bar{y}}{y^2} = \frac{y - x\bar{y}}{x^2}$$

$$x^2 y - x^3 \bar{y} = y^3 - x y^2 \bar{y}$$

$$x y^2 \bar{y} - x^3 \bar{y} = y^3 - x^2 y$$

$$\bar{y}(x y^2 - x^3) = y^3 - x^2 y$$

$$\bar{y} = \frac{y^3 - x^2 y}{x y^2 - x^3}$$

$$\bar{y} = \frac{y(y^2 - x^2)}{x(y^2 - x^2)} \Rightarrow \bar{y} = \frac{y}{x}$$

السؤال ١١

اجد احداثي النقطة على منحنى الاقتران $y = x^{\frac{1}{x}}$ حيث $x > 0$ التي يكون عندها ميل المماس صفراً

$$y = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{1}{x} * \frac{1}{x} + \ln x * \frac{-1}{x^2}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{-\ln x}{x^2} \right) x^{\frac{1}{x}}$$

$$0 = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$1 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 1 \rightarrow x = e \quad y = e^{\frac{1}{e}}$$

السؤال ١٢

اجد احداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = 100$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$

الحل:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y * \frac{3}{4} = 0$$

$$2x + \frac{3}{2} y = 0 \qquad * 2$$

$$4x + 3y = 0$$

$$3y = -4x$$

$$y = -\frac{4}{3} x$$

السؤال $\boxed{13}$

يمثل الاقتران : $s(t) = t^{\frac{1}{t}}$ حيث $t > 0$

موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث

(s) الموقع بالامتار (t) الزمن بالثواني

① اجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه

② اجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً

الحل:

①

$$s(t) = t^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln s(t) = \ln t^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln s(t) = \frac{1}{t} \ln t$$

$$\frac{\bar{s}(t)}{s(t)} = \frac{1}{t} * \frac{1}{t} + \ln t * \frac{-1}{t^2}$$

$$s(t) * \quad \frac{\bar{s}(t)}{s(t)} = \frac{1}{t^2} + \frac{-\ln t}{t^2}$$

$$\bar{s}(t) = \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) * t^{\frac{1}{t}}$$

$$v(t) = \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) * t^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln v(t) = \ln \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) * t^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln v(t) = \ln \left(\frac{1 - \ln t}{t^2}\right) + \ln t^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln v(t) = \ln(1 - \ln t) - \ln t^2 + \frac{1}{t} \ln t$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100$$

$$\frac{9x^2}{9} + \frac{16}{9}x^2 = 100$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 100 \qquad * \frac{9}{25}$$

$$x^2 = \frac{900}{25}$$

$$x = \pm \frac{30}{5}$$

$$\boxed{x = \pm 6}$$

$$y = -\frac{4}{3}x$$

$$x = 6 \qquad y = -8$$

$$x = -6 \qquad y = 8$$

$$(6, -8) \ // \ (-6, 8)$$

$$\ln v(t) = \ln(1-\ln t) - 2\ln t + \frac{1}{t}\ln t$$

$$\frac{\bar{v}(t)}{v(t)} = \frac{0-\frac{1}{t}}{1-\ln t} - 2 * \frac{1}{t} + \frac{1}{t} * \frac{1}{t} + \ln t * \frac{-1}{t^2}$$

$$\frac{\bar{v}(t)}{v(t)} = \frac{\frac{-1}{t}}{1-\ln t} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-\ln t}{t^2} \quad * \; v(t)$$

$$\bar{v}(t) = \frac{\frac{-1}{t}}{1-\ln t} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-\ln t}{t^2} * \left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) t^{\frac{1}{t}}$$

$$a(t) = \left(\frac{-1}{t} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-\ln t}{t^2}\right) * \left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) t^{\frac{1}{t}}$$

$$v(t) = \left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) * t^{\frac{1}{t}} \qquad (2)$$

$$0 = \left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) * t^{\frac{1}{t}}$$

$$t^{\frac{1}{t}} \neq 0$$

$$0 = \frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$1 - \ln t = 0$$

$$\ln t = 1$$

$$t = e$$

$$a(e) = \left(\frac{-1}{e} - \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{-\ln e}{e^2}\right) * \left(\frac{1-\ln e}{e^2}\right) e^{\frac{1}{e}}$$

$$a(e) = -e^{\frac{1}{e}-3}$$

السؤال $\boxed{14}$

اذا كان : $y = \ln X$ حيث $X > 0$

اثبت ان $\frac{dy}{dX} = \frac{1}{X}$ باستعمال الاشتقاق الضمني

اضافة e

$$y = \ln X$$

$$e^y = e^{\ln X}$$

$$e^y = X$$

$$\frac{dy}{dX} e^y = 1$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{1}{e^y} \qquad e^y = X$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{1}{X}$$

السؤال $\boxed{15}$

اجد مشتقة كل من الاقترانات التالية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي

(1) $$y = (X^2+3)^X$$

$$\ln y = \ln (X^2+3)^X$$

$$\ln y = X \ln (X^2+3)$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = X * \frac{2X}{X^2+3} + \ln(X^2+3) * 1$$

$$y * \frac{\bar{y}}{y} = \frac{2X^2}{X^2+3} + \ln(X^2+3) * y$$

$$\bar{y} = \left(\frac{2X^2}{X^2+3} + \ln(X^2+3)\right) * (X^2+3)^X$$

(2) $$y = \frac{(X^4+1)\sqrt{X+2}}{2X^2+2X+1}$$

$$\ln y = \ln \frac{(X^4+1)\sqrt{X+2}}{2X^2+2X+1}$$

$$\ln y = \ln (X^4+1)\sqrt{X+2} - \ln 2X^2+2X+1$$

$$\ln y = \ln (X^4+1) + \ln (X+2)^{\frac{1}{2}} - \ln 2X^2+2X+1$$

$$\ln y = \ln (X^4+1) + \frac{1}{2}\ln(X+2) - \ln 2X^2+2X+1$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{4X^3}{X^4+1} + \frac{1}{2} * \frac{1}{X+2} - \frac{4X+2}{2X^2+2X+1}$$

④ $y = x^{\sin x}, \quad x > 0$

$\ln y = \ln x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \ln x$

$\frac{\bar{y}}{y} = \sin x * \frac{1}{x} + \ln x * \cos x$

$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \quad * y$

$\bar{y} = \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x \right) * x^{\sin x}$

السؤال

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يلي

عند قيمة (t) المعطاه

① $x = \sin t \qquad y = \cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

$\frac{dx}{dt} = \cos t \qquad \frac{dy}{dt} = -\sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan t$$

$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} \quad * y$

$\bar{y} = \left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} \right) * \frac{x^4+1 \sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

③ $y = \sqrt{x^2 (x+1)(x+2)}$

$\ln y = \ln \left(x^2 (x+1)(x+2) \right)^{\frac{1}{2}}$

$\ln y = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 (x+1)(x+2) \right)$

$\ln y = \frac{1}{2} * \left(\ln x^2 + \ln (x+1) + \ln (x+2) \right)$

$= \frac{1}{2} * \left(\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right)$

$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) * y$

$\bar{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) * \sqrt{x^2 (x+1)(x+2)}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sec^2 t}{-\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin t \cos^2 t} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

② $x = e^{-t}$, $y = t^3 + t + 1$, $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = -1e^{-t} \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{d}{dt}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-e^{-t} * 6t - \left[(3t^2+1) * -e^{-t}\right]}{(-e^{-t})^2}}{-e^{-t}}$$

$t = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-e^{-(0)} * 6(0) - \left[(3(0)^2+1) * -e^{0}\right]}{(-e^{-0})^2}}{-e^{-(0)}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

السؤال $\boxed{16}$

اذا كانت العلاقة : $x^3 + y^3 = 6xy$ فاجد

① اجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الاول

② اجد احداثيا نقطة على منحنى العلاقة في الربع الاول بحيث يكون عندها مماس المنحنى افقياً

الحل:

① $m =$ $\qquad x =$

$y =$

$$x^3 + y^3 = 6xy$$
$$x^3 + (x)^3 = 6x(x)$$
$$x^3 + x^3 = 6x^2$$
$$2x^3 = 6x^2$$
$$2x^3 - 6x^2 = 0$$
$$2x^2(x - 3)$$
$$x = 0 \qquad x = 3$$
$$y = x$$
$$y = 3 \qquad (3,3)$$

$$x^3 + y^3 = 6xy$$
$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + y*6$$
$$3(3)^2 + 3(3)^2\frac{dy}{dx} = 6(3)\frac{dy}{dx} + (3)*6$$
$$27 + 27\frac{dy}{dx} = 18\frac{dy}{dx} + 18$$
$$9\frac{dy}{dx} = -9 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 = m$$

$x = 3$ $\qquad m = -1$

$y =$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = -1(x - 3)$

$x^3 + y^3 = 6xy$ (2)

$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6x \frac{dy}{dx} + y * 6$

$3x^2 + 3y^2(0) = 6x(0) + 6y$

$3x^2 = 6y \qquad \div 6$

$y = \frac{1}{2}x^2$

$x^3 + y^3 = 6xy$

$x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x * \left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$

$*8 \qquad \frac{1}{8}x^6 = 2x^3$

$x^6 = 16x^3$

$16x^3 - x^6 = 0$

$x^3(16 - x^3)$

$x^3 = 16$

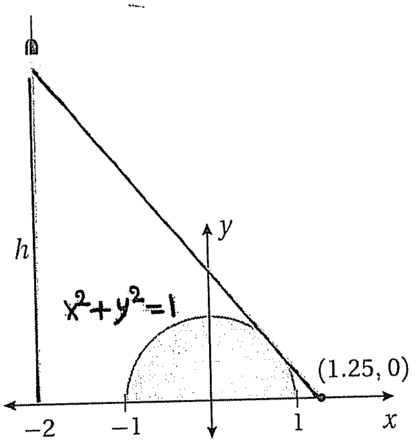
$x = \sqrt[3]{16}$

$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{16}\right)^2$

السؤال $\boxed{17}$

يبين الشكل المجاور مصباحاً على ارتفاع (h) وحدة من المحور x اذا وقعت النقطة (1.25,0) في نهاية الشعاع الصادر من المصباح الذي يلمس منحنى العلاقة $x^2 + y^2 = 1$ فاجد ارتفاع المصباح h



الحل:

ميل المماس $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$

∴ ميل المماس عند نقطة التماس

$x^2 + y^2 = 1$

$2x + 2y\bar{y} = 0$

$2y\bar{y} = -2x$

$\bar{y} = \frac{-x}{y}$

يجب ايجاد نقطة التماس (x, y)

$y - y_1 = m(x - x_1)$

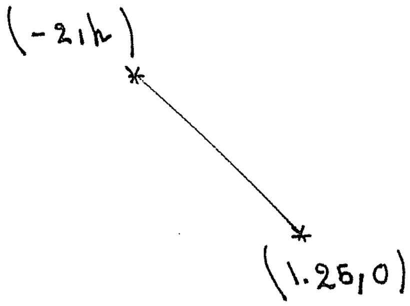
$$\bar{y} = \frac{-X}{y}$$

$$\bar{y} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\bar{y} = -\frac{4}{5} * \frac{5}{3}$$

$$\boxed{\bar{y} = -\frac{4}{3}}$$

$x_1 \quad y_1$
$(-2, h)$
$(1.25, 0)$
$x_2 \quad y_2$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{0 - h}{1.25 - -2} = \frac{-h}{3.25}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{-h}{3.25}$$

$$13 = 3h$$

$$\boxed{h = \frac{13}{3} \text{ units}}$$

$$y - 0 = -\frac{X}{y}(X - 1.25)$$

$$y^2 = -X^2 + 1.25X$$

$$y^2 + X^2 = 1.25X$$

$$1 = 1.25X \qquad 1 \quad \frac{1}{4}$$

$$1 = \frac{5}{4}X \qquad * \frac{4}{5}$$

$$\boxed{X = \frac{4}{5}}$$

$$X^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{16}{25} + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{16}{25}$$

$$y^2 = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$$

$$y^2 = \frac{9}{25}$$

$$y = \pm\frac{3}{5}$$

$$\boxed{y = \frac{3}{5}}$$

لان نقطة التقاطع في الربع الاول

السؤال 18

اذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ فاجب عما يلي

① اجد $\frac{dy}{dx}$

② يمكن التعبير عن منحنى العلاقة $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية $x = \sec t$, $y = \tan t$ حيث $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ استعمل هذه الحقيقة لايجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

③ اثبت ان المقدارين الجبريين الذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان مبرراً اجابتي

④ اجد احداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2

الحل :

①
$$x^2 - y^2 = 1$$
$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x = 2y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

②
$$x = \sec t \qquad y = \tan t$$
$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t \qquad \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t \sec t}{\sec t \tan t}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

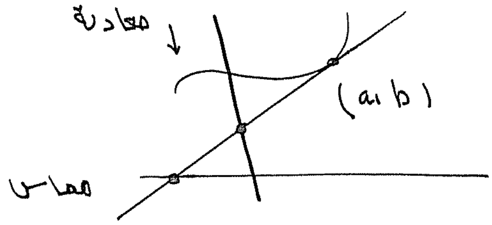
③
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = \frac{\sec t \to x}{\tan t \to y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

④
$$\frac{dy}{dx} = 2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$
$$2 = \frac{x}{y}$$
$$2y = x$$
$$x^2 - y^2 = 1$$
$$(2y)^2 - y^2 = 1$$
$$4y^2 - y^2 = 1$$
$$3y^2 = 1$$
$$y^2 = \frac{1}{3}$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

السؤال $\boxed{19}$

اذا مثل (L) اي مماس لمنحنى المعادلة $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ حيث (k) عدد حقيقي موجب فاثبت ان مجموع المقطع (x) و المقطع (y) للمستقيم (L) يساوي k مبرراً اجابتي

الحل :



نفرض ان (a,b) نقطة تماس

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\bar{y}}{2\sqrt{y}}=0$$

$$\frac{\bar{y}}{2\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad * \, 2\sqrt{y}$$

$$\bar{y}=\frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$\bar{y}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$\bar{y}=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-b=\frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a)$$

المقطع $x \leftarrow y=0$

$$0-b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a) \qquad * \, -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=x-a$$

$$x=\frac{\sqrt{b}\sqrt{b}\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+a$$

$$x=\sqrt{a}\sqrt{b}+a$$

المقطع $y \leftarrow \boxed{x=0}$

$$y-b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(0-a)$$

$$y-b=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

$$y=\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+b$$

$$y=\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

$$x+y=a+\sqrt{a}\sqrt{b}+b+\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$x+y=a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

$$a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

كما نعلم $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{k}$

عند تعويض $(a,b) \leftarrow$

$$\left(\sqrt{k}\right)^2=k$$

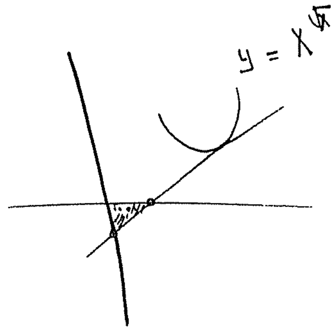
السؤال $\boxed{20}$

اذا كان مماس منحنى الاقتران $y = x^{\sqrt{x}}$

عند النقطة $(4,16)$ يقطع المحور x في النقطة

B و المحور y في النقطة C فاجد مساحة

ΔOBC حيث O نقطة الاصل



$$y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \sqrt{x} * \frac{1}{x} + \ln x * \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad *y$$

$$\bar{y} = \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) * x^{\sqrt{x}}$$

$$\bar{y} = \left(\frac{\sqrt{4}}{4} + \frac{\ln 4}{2\sqrt{4}}\right) * 4^{\sqrt{4}} \qquad 4^2 = 16$$

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln 4}{4}\right) * 16$$

$$\bar{y} = 8 + 4\ln 4$$

$$\bar{y} = 13.5$$ //استخدام الحاسبة//

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 16 = 13.5(x - 4)$$

محور $x \leftarrow y = 0$

$$0 - 16 = 13.5(x - 4)$$

$$-16 = 13.5x - 54.18$$

$$+54.18 \qquad\qquad +54.18$$

$$\frac{38.18}{13.5} = \frac{13.5x}{13.5}$$

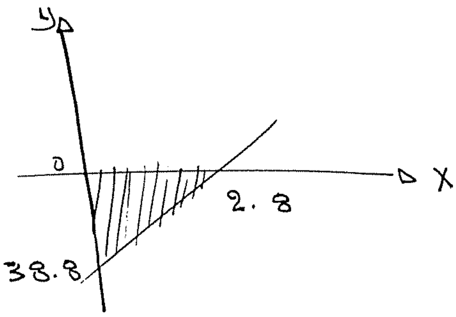
$$x = 2.8$$

محور $y \leftarrow x = 0$

$$y - 16 = 13.5(0 - 4)$$

$$y - 16 = -54$$

$$y = -38$$



$$A = \frac{1}{2} * \Delta x * \Delta y$$

$$A = \frac{1}{2} * 2.8 * 38.8$$

$$A = 53.76 \text{ unit}^2$$

أسئلة كتاب التمارين

السؤال $\boxed{1}$

أجد $\frac{dy}{dX}$ لكل مايلي

① $X^3 y^3 = 144$

$$X^3 * 3y^2 \frac{dy}{dX} + y^3 * 3X^2 = 0$$

$$3X^3 y^2 \frac{dy}{dX} + 3X^2 y^3 = 0$$

$$3X^3 y^2 \frac{dy}{dX} = -3X^2 y^3$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-3X^2 y^3}{3X^3 y^2}$$

$$\frac{dy}{dX} = -\frac{y}{X}$$

② $Xy = \sin(X+y)$

$$X\frac{dy}{dX} + y*1 = \left(1 + \frac{dy}{dX}\right)\cos(X+y)$$

$$X\frac{dy}{dX} + y = \cos(X+y) + \cos(X+y)\frac{dy}{dX}$$

$$X\frac{dy}{dX} - \cos(X+y)\frac{dy}{dX} = \cos(X+y) - y$$

$$\frac{dy}{dX}\left(X - \cos(X+y)\right) = \cos(X+y) - y$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\cos(X+y) - y}{X - \cos(X+y)}$$

③ $y^4 - y^2 = 10X - 3$

$$4y^3\frac{dy}{dX} - 2y\frac{dy}{dX} = 10$$

$$\frac{dy}{dX}(4y^3 - 2y) = 10$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{10}{4y^3 - 2y}$$

④ $X\sin y - y\cos X = 1$

$$X * \bar{y}\cos y + \sin y * 1 - (y * -\sin X + \cos X * \bar{y}) = 0$$

$$X\cos y\,\bar{y} + \sin y + \sin X\, y - \cos X\,\bar{y} = 0$$

$$X\cos y\,\bar{y} - \cos X\,\bar{y} = -\sin y - \sin X\, y$$

$$\bar{y}(X\cos y - \cos X) = -\sin y - \sin X\, y$$

$$\bar{y} = \frac{-\sin y - \sin X\, y}{X\cos y - \cos X}$$

السؤال $\boxed{2}$

اجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مماثلة عند النقطة المعطاه

① $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad (2, -1)$

$2x + 3x * \bar{y} + y*3 + 2y\bar{y} = 1 + 3\bar{y}$

$2x + 3x\bar{y} + 3y + 2y\bar{y} = 1 + 3\bar{y}$

$2(2) + 3(2)\bar{y} + 3(-1) + 2(-1)\bar{y} = 1 + 3\bar{y}$

$4 + 6\bar{y} + -3 + -2\bar{y} = 1 + 3\bar{y}$

$4\bar{y} + 1 = 1 + 3\bar{y}$

$-3\bar{y} \quad -1 \quad -1 \quad -3\bar{y}$

$\bar{y} = 0$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -1 = 0(x - 2)$

$y + 1 = 0$

② $xe^y + y\ln x = 2 \quad (1, \ln 2)$

$x * \frac{dy}{dx} e^y + e^y * 1 + y * \frac{1}{x} + \ln x * \frac{dy}{dx} = 0$

$xe^y \frac{dy}{dx} + e^y + \frac{y}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} = 0$

$(1) e^{\ln 2} \frac{dy}{dx} + e^{\ln 2} + \frac{\ln 2}{1} + \ln 1 * \frac{dy}{dx} = 0$

$2\frac{dy}{dx} + 2 + \ln 2 + 0 * \frac{dy}{dx} = 0$

$2\frac{dy}{dx} + 2 + \ln 2 = 0$

⑤ $\cot y = x - y$

$\frac{dy}{dx} * -\csc^2 y = 1 - \frac{dy}{dx}$

$-\csc^2 y \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} - \csc^2 y \frac{dy}{dx} = 1$

$\frac{dy}{dx}(1 - \csc^2 y) = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \csc^2 y}$

⑥ $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

$\frac{x\bar{y} + y*1}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\bar{y} = 0$

$\frac{x\bar{y} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\bar{y} = 0 \quad *2\sqrt{xy}$

$x\bar{y} + y + 2\sqrt{xy} + 4y\sqrt{xy}\,\bar{y} = 0$

$x\bar{y} + 4y\sqrt{xy}\,\bar{y} = -y - 2\sqrt{xy}$

$\bar{y}(x + 4y\sqrt{xy}) = -y - 2\sqrt{xy}$

$\bar{y} = \frac{-y - 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$

④ $\frac{X^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \quad (1,2)$

الحل: بضرب طرفي المعادلة بـ 16

$$8X^2 + 2y^2 = 16$$

$$16X + 4y\frac{dy}{dX} = 0$$

$$16(1) + 4(2)\frac{dy}{dX} = 0$$

$$16 + 8\frac{dy}{dX} = 0$$

$$8\frac{dy}{dX} = -16$$

$$\boxed{\frac{dy}{dX} = -2}$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - 2 = -2(X - 1)$$

$$2\frac{dy}{dX} = -2 - \ln 2$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-2 - \ln 2}{2}$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - \ln 2 = \frac{-2 - \ln 2}{2}(X - 1)$$

③ $4Xy = 9 \quad (1, \frac{9}{4})$

$$y = \frac{9}{4X}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-9 * 4}{(4X)^2}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-36}{(4(1))^2}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{-36}{16}$$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - \frac{9}{4} = \frac{-36}{16}(X - 1)$$

السؤال $\boxed{3}$: اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل ما يلي

① $x^2y - 4x = 5$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y*2x - 4 = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = 4 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2xy}{x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(0 - \left[2x\frac{dy}{dx} + y*2\right]\right) - (4 - 2xy)*2x}{(x^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-2x\frac{dy}{dx} + 2y\right) - 8x + 4x^2y}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x^3\frac{dy}{dx} + 2x^2y - 8x + 4x^2y}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x^3 * \frac{4-2xy}{x^2} + 2x^2y - 8x + 4x^2y}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2x(4 - 2xy) + 2x^2y - 8x + 4x^2y}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8x + 4x^2y + 2x^2y - 8x + 4x^2y}{x^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{10x^2y}{x^4} = \frac{10y}{x^2}$$

② $x^2 + y^2 = 8$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y*-1 - \left[-x*\frac{dy}{dx}\right]}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y - \left[-x*\frac{-x}{y}\right]}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-x^2 - y^2}{y}}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x^2 - y^2}{y^3}$$

③ $y^2 = X^3$

$$2y \frac{dy}{dX} = 3X^2$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{3X^2}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{2y * 6X - \left[3X^2 * 2 * \frac{dy}{dX}\right]}{(2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{12Xy - \left(6X^2 \frac{dy}{dX}\right)}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{12Xy - 6X^2 * \frac{3X^2}{2y}}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{12Xy - \frac{9X^4}{y}}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{\frac{12Xy^2 - 9X^4}{y}}{4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} = \frac{12Xy^2 - 9X^4}{4y^2}$$

السؤال 4

اجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $y = X^{X^2}$
عندما $X = 2$

$X = 2$

$y = (2)^{(2)^2}$

$y = (2)^4$

$y = 16$

$y = X^{X^2}$ اضافة Ln

$\ln y = \ln X^{X^2}$

$\ln y = X^2 \ln X$

$y * \quad \frac{\bar{y}}{y} = X^2 * \frac{1}{X} + \ln X * 2X \quad * y$

$\bar{y} = (X + 2X \ln X)\, X^{X^2}$

$\bar{y} = (2 + 2(2)\ln 2)\,(2)^{(2)^2}$

$\bar{y} = (2 + 4\ln 2) * 16$

$\bar{y} = 32 + 64\ln 2 = m$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 16 = 32 + 64\ln 2\,(X - 2)$

السؤال $\boxed{5}$

اجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1,0)$

$x = 1$ $\qquad$ $m =$

$y = 0$

$$(x+y)^3 = x^2 + y$$

$$3(x+y)^2 * \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2x + \frac{dy}{dx}$$

$$3(1+0)^2 * \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2(1) + \frac{dy}{dx}$$

$$3 * \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} = m$$

$$m_{\perp} = 2$$

$$y - y_1 = m_{\perp}(x - x_1)$$

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

السؤال $\boxed{6}$

اجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$

$x = e$ $\qquad$ $m =$

$y =$

$$y = x(\ln x)^x$$

$$y = e(\ln e)^e$$

$$y = e * (1)^e$$

$$y = e * 1$$

$$\boxed{y = e}$$

$$y = x(\ln x)^x$$

$$\frac{dy}{dx} = x * x(\ln x)^{x-1} * \frac{1}{x} + (\ln x)^x * 1$$

$$\frac{dy}{dx} = e * e(\ln e)^{e-1} * \frac{1}{e} + (\ln e)^e * 1$$

$$\frac{dy}{dx} = e * e * 1 * \frac{1}{e} + 1^e * 1$$

$$\frac{dy}{dx} = e + 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - e = e + 1(x - e)$$

السؤال $\boxed{7}$

اجد مشتقة كل من الاقترانات التالية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي

① $y = (x-2)^{x+1}$

$$\ln y = \ln (x-2)^{x+1}$$

$$\ln y = (x+1) \ln (x-2)$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = (x+1) * \frac{1}{x-2} + \ln(x-2) * 1$$

$$\bar{y} = \left(\frac{x+1}{x-2} + \ln(x-2) \right) * (x-2)^{x+1}$$

② $y = \dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

$$\ln y = \ln \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$$

$$\ln y = \ln x^{10}\sqrt{x^2+5} - \ln \sqrt[3]{8x^2+2}$$

$$\ln y = \ln x^{10} + \ln \sqrt{x^2+5} - \ln \sqrt[3]{8x^2+2}$$

$$\ln y = \ln x^{10} + \ln (x^2+5)^{\frac{1}{2}} - \ln (8x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln y = 10 \ln x + \frac{1}{2} \ln (x^2+5) - \frac{1}{3} \ln (8x^2+2)$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = 10 * \frac{1}{x} + \frac{1}{2} * \frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{3} * \frac{16x}{8x^2+2}$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+2)} \quad * y$$

$$\bar{y} = \left(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+2)} \right) * \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$$

③ $y = (\cos x)^x$

$$\ln y = \ln (\cos x)^x$$

$$\ln y = x \ln (\cos x)$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = x * \frac{-\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x) * 1$$

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{-x \sin x}{\cos x} + \ln \cos x \quad * y$$

$$\bar{y} = \left(\frac{-x \sin x}{\cos x} + \ln \cos x \right) * (\cos x)^x$$

السؤال $\boxed{8}$

اجد معادلتي مماس منحنى العلاقة

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

اللذين يمران بالنقطة $(4,0)$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad * 36$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

النقطة $(4,0)$ ليست نقطة تماس

$$18x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8y\frac{dy}{dx} = -18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-18x}{8y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-9x}{4y}(x - 4)$$

$$4y^2 = -9x^2 + 36x$$

$$4y^2 + 9x^2 = 36x$$

$$36 = 36x$$

$$x = 1$$

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$9(1)^2 + 4y^2 = 36$$

$$4y^2 = 25$$

$$y^2 = \frac{27}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{27}{2}}$$

$$\left(1, \sqrt{\frac{27}{2}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{4y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9(1)}{4 * \sqrt{\frac{27}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9}{4\sqrt{\frac{27}{2}}} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{-9}{4\sqrt{\frac{27}{2}}}(x - 1)$$

$$\left(1, -\sqrt{\frac{27}{2}}\right) \qquad m = \frac{9}{4\sqrt{\frac{27}{2}}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{9}{4\sqrt{\frac{27}{2}}}(x - 1)$$

السؤال [٩]

اجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة $x^2+xy+y^2=7$ مع المحور x ثم اثبت ان مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان

الحل: تقاطع مع المحور x ← $y=0$

$$x^2+xy+y^2=7$$

$$x^2+x(0)+(0)^2=7$$

$$x^2=7$$

$$x=\pm\sqrt{7}$$

$$(\sqrt{7},0) \quad || \quad (-\sqrt{7},0)$$

١ $(\sqrt{7},0)$

$$x^2+xy+y^2=7$$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y*1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\sqrt{7}+\sqrt{7}\frac{dy}{dx}+0*1+2(0)\frac{dy}{dx}=0$$

$$2\sqrt{7}+\sqrt{7}\frac{dy}{dx}+0+0=0$$

$$\sqrt{7}\frac{dy}{dx}=-2\sqrt{7}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_1=-2$$

$$m_1=-2$$

٢ $(-\sqrt{7},0)$

$$x^2+xy+y^2=7$$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y*1+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2(-\sqrt{7})+-\sqrt{7}\frac{dy}{dx}+(0)*1+2(0)\frac{dy}{dx}=0$$

$$-2\sqrt{7}+-\sqrt{7}\frac{dy}{dx}+0+0=0$$

$$-\sqrt{7}\frac{dy}{dx}=2\sqrt{7}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_2=-2$$

$$m_2=-2$$

$$m_1=m_2=-2$$

اسئلة الوحدة

السؤال 1

اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل مايلي

① يمثل الاقتران $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسم احدى الاتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم صفراً

a) $t=0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$

c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

الاجابة: c

② اذا كان $y = u * v$ وكان

$u(1) = 2 \;//\; u'(1) = 3 \;//\; v(1) = -1 \;//\; v'(1) = 1$

فان $y'(1)$ تساوي

a) 1 b) -1

c) 1 d) 4

الاجابة: b

③ اذا كان $f(x) = x - \frac{1}{x}$ فان $f''(x)$ هي

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $\frac{-2}{x^3}$

الاجابة: d

④ اذا كان $y = \tan 4t$ فان $\frac{dy}{dt}$

a) $4\sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$

c) $\sec^2 4t$ d) $4\sec^2 4t$

الاجابة: d

⑤ اذا كان $y^2 - x^2 = 1$ فان ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو

a) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

الاجابة: c

⑥ اذا كان $f(x) = \log(2x - 3)$ فان $f'(x)$

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{2x-3}$

c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{2x-3}$

الاجابة: c

⑦ اذا كان $y = 2^{1-x}$ فان ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x=2$ هو

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

الاجابة: d

السؤال $\boxed{2}$

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي

① $f(X) = e^{X}\left(X + X\sqrt{X}\right)$

$$f(X) = e^{X} * \left(X + X^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\bar{f}(X) = e^{X} * \left(1 + \frac{3}{2}X^{\frac{1}{2}}\right) + \left(X + X^{\frac{3}{2}}\right) * e^{X}$$

$$\bar{f}(X) = e^{X} + \frac{3}{2}e^{X}X^{\frac{1}{2}} + Xe^{X} + e^{X}X^{\frac{3}{2}}$$

② $f(X) = \dfrac{X}{\tan X}$

$$\bar{f}(X) = \frac{\tan X * 1 - \left[X * \sec^{2} X\right]}{(\tan X)^{2}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\tan X - X\sec^{2} X}{(\tan X)^{2}}$$

③ $f(X) = \dfrac{1}{X} - 12\sec X$

$$\bar{f}(X) = \frac{-1 * 1}{X^{2}} - 12 * \sec X \tan X$$

$$\bar{f}(X) = \frac{-1}{X^{2}} - 12\sec X \tan X$$

④ $f(X) = \dfrac{e^{x}}{\ln X}$

$$\bar{f}(X) = \frac{\ln X * e^{X} - \left[e^{X} * \frac{1}{X}\right]}{(\ln X)^{2}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\ln X\, e^{X} - \dfrac{e^{X}}{X}}{(\ln X)^{2}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{\dfrac{X\ln X\, e^{X} - e^{X}}{X}}{(\ln X)^{2}}$$

$$\bar{f}(X) = \frac{X\ln X\, e^{X} - e^{X}}{X(\ln X)^{2}}$$

⑧ $f(X) = \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}\right)^3 \left(X + \frac{1}{X}\right)^2$

⑤ $f(X) = \frac{\ln X}{X^4}$

$\bar{f}(X) = \frac{X^4 * \frac{1}{X} - \ln X * 4X^3}{(X^4)^2}$

$\bar{f}(X) = \frac{X^3 - 4X^3 \ln X}{X^8}$

$\bar{f}(X) = \frac{\cancel{X^3}(1 - 4\ln X)}{\cancel{X^3}\, X^5}$

$\bar{f}(X) = \frac{1 - 4\ln X}{X^5}$

⑨ $f(X) = e^{-1.5X} \cos X^2$

$\bar{f}(X) = e^{-1.5X} * 2X * -\sin X^2 + \cos X^2 * -1.5 * e^{-1.5X}$

$\bar{f}(X) = -2X e^{-1.5X} \sin X^2 + -1.5 \cos X^2 e^{-1.5X}$

⑥ $f(X) = 5^{2-X}$

$\bar{f}(X) = 5^{2-X} * -1 * \ln 5$

$\bar{f}(X) = -5^{2-X} * \ln 5$

⑦ $f(X) = 10 \sin 0.5X$

$\bar{f}(X) = 10 * \frac{1}{2} * \cos \frac{1}{2} X$

$\bar{f}(X) = 5 \cos \frac{1}{2} X = 5 \cos 0.5X$

السؤال $\boxed{3}$

اذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين الاشتقاق عندما $X=2$ و كان

$f(2)=3 \,||\, f'(2)=-4 \,||\, g(2)=1 \,||\, g'(2)=2$

فجد كل مايلي

① $(fg)'(2)$

② $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

③ $(3f-4fg)'(2)$

الحل:

① $(fg)'(2)$

$$f(2) * g'(2) + g(2) * f'(2)$$

$$3 * 2 + 1 * -4$$

$$6 + -4 = 2$$

② $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

$$\frac{g(2) * f'(2) - [f(2) * g'(2)]}{(g(2))^2}$$

$$\frac{1 * -4 - [3 * 2]}{(1)^2}$$

$$\frac{-4-6}{1} = \frac{-10}{1} = -10$$

③ $(3f-4fg)'(2)$

$$3f'(2) - (4f(2) * g'(2) + g(2) * 4f'(2))$$

$$3 * -4 - (4 * 3 * 2 + 1 * 4 * -4)$$

$$-12 - (24 + -16)$$

$$-12 - (8)$$

$$-12 - 8$$

$$= -20$$

السؤال $\boxed{4}$:

اجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يلي

(1) $f(x) = x^7 \ln x$

$$f'(x) = x^7 * \frac{1}{x} + \ln x * 7$$

$$f'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$$

$$f''(x) = 6x^5 + 7x^6 * \frac{1}{x} + \ln x * 42x^5$$

$$f'''(x) = 6x^5 + 7x^5 + 42x^5 \ln x$$

$$f''(x) = 13x^5 + 42x^5 \ln x$$

(2) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x * -\sin x - (\cos x * 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$f'(x) = -\underset{(1)}{\frac{\sin x}{x}} - \underset{(2)}{\frac{\cos x}{x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{x * -\cos x - (-\sin x * 1)}{x^2} \quad (1)$$

$$f''(x) = \frac{-x\cos x + \sin x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{x} = -\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$f''(x) = \frac{x * \sin x - (-\cos x * 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} \quad (2)$$

$$f''(x) = \frac{-x\cos x + \sin x + x\sin x + \cos x}{x^2}$$

(3) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x}) * 1 - \left[x * \left(0 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} * \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 1 - x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x}(1 + 2\sqrt{x} + x)}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x} + 2x + 2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{\left(2\sqrt{x} + 2x + 2x^{\frac{3}{2}}\right) * 1 - \left[(x+1) * 2 * \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 + 3x^{\frac{1}{2}}\right]}{\left(2\sqrt{x} + 2x + 2x^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

$$④\quad f(X) = \frac{1 - X^2}{1 + X^2}$$

$$f'(X) = \frac{(1+X^2)*-2X - [(1-X^2)*2X]}{(1+X^2)^2}$$

$$f'(X) = \frac{-2X - 2X^3 - [2X - 2X^3]}{(1+X^2)^2}$$

$$f'(X) = \frac{-2X - 2X^3 - 2X + 2X^3}{(1+X^2)^2}$$

$$f'(X) = \frac{-4X}{(1+X^2)^2}$$

$$f''(X) = \frac{(1+X^2)*-4 - [-4X*2(1+X^2)*2X]}{((1+X^2)^2)^2}$$

$$f''(X) = \frac{-4(1+X^2) + 16X^2(1+X^2)}{(1+X^2)^4}$$

$$f''(X) = \frac{(1+X^2)[16X^2 - 4]}{(1+X^2)(1+X^2)^3}$$

$$f''(X) = \frac{16X^2 - 4}{(1+X^2)^3}$$

السؤال 5

اجد معادلة المماس لكل اقتران مما يلي عند القيمه المعطاه

$$①\quad f(X) = \frac{X^2}{1+X}, \quad X = 1$$

$$f(1) = \frac{(1)^2}{1+(1)}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} = y$$

$$f(X) = \frac{X^2}{1+X}$$

$$f'(X) = \frac{(1+X)*2X - [X^2*1]}{(1+X)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1+1)*2(1) - [(1)^2*1]}{(1+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{2*2 - (1)}{4}$$

$$f'(1) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = m$$

$X = 1$ $\qquad$ $m = \frac{3}{4}$

$y = \frac{1}{2}$

$$y - y_1 = m(X - X_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(X - 1)$$

③ $f(X) = \ln(X+5)$, $X = 0$

$f(0) = \ln(0+5)$

$f(0) = \ln 5 = y$

$\bar{f}(X) = \frac{1}{X+5}$

$\bar{f}(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5} = m$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - \ln 5 = \frac{1}{5}(X - 0)$

④ $f(X) = \sin X + \sin 3X$, $X = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = y = \sqrt{2}$

$f(X) = \sin X + \sin 3X$

$\bar{f}(X) = \cos X + 3\cos 3X$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} + 3 * \cos\frac{3\pi}{4}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 * -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = m = -\sqrt{2}$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - \sqrt{2} = -\sqrt{2}(X - \frac{\pi}{4})$

② $f(X) = \frac{X^2}{\cos X}$, $X = \frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{(\frac{\pi}{4})^2}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}$ $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{\pi^2}{16}}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16} * 2 = \frac{\pi^2}{8} = y$

$f(X) = \frac{X^2}{\cos X}$

$\bar{f}(X) = \frac{\cos X * 2X - [X^2 * -\sin X]}{(\cos X)^2}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\cos\frac{\pi}{4} * 2 * \frac{\pi}{4} - [(\frac{\pi}{4})^2 * -\sin\frac{\pi}{4}]}{(\cos\frac{\pi}{4})^2}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} * 2 * \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi^2}{16} * -\frac{1}{\sqrt{2}})}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{2\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{8\pi}{16\sqrt{2}} + \frac{\pi^2}{16\sqrt{2}}) * 2$

$\bar{f}(\frac{\pi}{4}) = \frac{8\pi + \pi^2}{8\sqrt{2}}$

$y - \frac{\pi^2}{8} = \frac{8\pi + \pi^2}{8\sqrt{2}}(X - \frac{\pi}{4})$

السؤال $\boxed{6}$

اجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يلي عند النقطة المحددة بقيمة (t) المعطاة ,

① $X = t^2 \qquad y = t+2 \quad , \; t = 4$

$X = (4)^2 \qquad y = 4+2$

$\boxed{X = 16} \qquad \boxed{y = 6}$

$X = t^2 \qquad y = t+2$

$\frac{dX}{dt} = 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 1$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}}$$

$$\left.\frac{dy}{dX}\right|_{t=4} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$$

$\boxed{m = \frac{1}{8}}$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - 6 = \frac{1}{8}(X - 16)$

② $X = 4\cos t \qquad y = 3\sin t \qquad t, \frac{\pi}{4}$

$X = 4\cos\frac{\pi}{4} \qquad y = 3 * \sin\frac{\pi}{4}$

$X = 4 * \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y = 3 * \frac{1}{\sqrt{2}}$

$X = \frac{4}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$X = 4\cos t$

$\frac{dX}{dt} = -4\sin t$

$\frac{dX}{dt} = -4 * \sin\frac{\pi}{4}$

$\frac{dX}{dt} = -4 * \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{dX}{dt} = \frac{-4}{\sqrt{2}}$

$y = 3\sin t$

$\frac{dy}{dt} = 3\cos t$

$\frac{dy}{dt} = 3 * \cos\frac{\pi}{4}$

$\frac{dy}{dt} = 3 * \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dX}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dX} = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{-\frac{4}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} * -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\frac{dy}{dX} = -\frac{3}{4} = m$

$X = \frac{4}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$y - y_1 = m(X - X_1)$

$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}\left(X - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$

السؤال [7]

اذا كان $y = x\ln x$ حيث $x > 0$ فاجب عما يلي

① اجد معادلة المماس عند النقطة $(1,0)$

② اجد احداثيا النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2

الحل:

①

$m =$ $\quad x = 1$, $y = 0$

$$y = x\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = x * \frac{1}{x} + \ln x * 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 = m \qquad x = 1,\ y = 0$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

②

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$$2 = 1 + \ln x$$

$$1 = \ln x$$

$$\boxed{x = e}$$

$$y = x\ln x$$

$$y = e * \ln e$$

$$y = e * 1 \qquad \boxed{y = e}$$

السؤال [8]

اجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

① $x(x + y) = 2y^2$

$$x^2 + xy = 2y^2$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y * 1 = 4y\frac{dy}{dx}$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y = 4y\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - 4y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 4y) = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x - 4y}$$

② $x = \dfrac{2y}{x^2 - y}$

$$x^3 - xy = 2y \qquad \text{ضرب تبادلي}$$

$$3x^2 - \left(x\frac{dy}{dx} + y * 1\right) = 2\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 2\frac{dy}{dx}$$

$$-x\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(-x - 2) = y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{-x - 2}$$

③ $y\cos x = x^2 + y^2$

$$y * -\sin x + \cos x * \frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$-y\sin x + \cos x\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\cos x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 2x + y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - 2y) = 2x + y\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{\cos x - 2y}$$

④ $2xe^{y} + ye^{x} = 3$

$$2x * \frac{dy}{dx}e^{y} + e^{y} * 2 + y * e^{x} + e^{x} * \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xe^{y}\frac{dy}{dx} + 2e^{y} + e^{x}y + e^{x}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xe^{y}\frac{dy}{dx} + e^{x}\frac{dy}{dx} = -e^{x}y - 2e^{y}$$

$$\frac{dy}{dx}(2xe^{y} + e^{x}) = -e^{x}y - 2e^{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{x}y - 2e^{y}}{2xe^{y} + e^{x}}$$

السؤال [٩]

اجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1, -1)$

$$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$$ ضرب تبادلي

$$2y^2 - xy^2 = x^3$$

$$4y\frac{dy}{dx} - \left(x * 2y\frac{dy}{dx} + y^2 * 1\right) = 3x^2$$

$$4y\frac{dy}{dx} - 2xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 3x^2$$

$$4(-1)\frac{dy}{dx} - 2(1)(-1)\frac{dy}{dx} - (-1)^2 = 3(1)^2$$

$$-4\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} - 1 = 3$$

$$-2\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 = m$$

$$m_{\perp} = \frac{1}{2}$$

* يمكن الحل مباشرة دون البدء بالضرب التبادلي

السؤال ١٥

اجد مشتقة كل اقتران مما يلي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي

① $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

$\ln y = \ln \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

$\ln y = \ln (x+1)(x-2) - \ln (x-1)(x+2)$

$\ln y = \ln (x+1) + \ln(x-2) - [\ln(x-1) + \ln(x+2)]$

$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}\right]$

$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \quad * y$

$\bar{y} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) * \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$

② $y = x^{\ln x}, x > 0$

$\ln y = \ln x^{\ln x}$

$\ln y = \ln x * \ln x$

$\ln y = (\ln x)^2$

$\frac{\bar{y}}{y} = 2(\ln x) * \frac{1}{x} \quad * y$

$\bar{y} = \frac{2}{x} \ln x * x^{\ln x}$

السؤال ١١

اجد معادلة المماس لكل علاقة مما يلي عند النقطة المعطاة

① $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y \quad (2,-1)$

$2x + 3x * \frac{dy}{dx} + y * 3 + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$

$2(2) + 3(2)\frac{dy}{dx} + (-1)*3 + 2(-1)\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$

$4 + 6\frac{dy}{dx} + -3 + -2\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 0 = m \qquad x = 2 \,//\, y = -1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - -1 = 0(x - 2)$

$y + 1 = 0$

② $x^2 e^y = 1 \quad (1,0)$

$x^2 * \frac{dy}{dx} e^y + e^y * 2x = 0$

$(1)^2 * \frac{dy}{dx} * e^0 + e^0 * 2(1) = 0$

$1 * \frac{dy}{dx} * 1 + 1 * 2 = 0$

$\frac{dy}{dx} + 2 = 0$

$\frac{dy}{dx} = -2 = m \qquad x = 1 \,//\, y = 0$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -2(x - 1)$

السؤال 12

يمثل الشكل المجاور منحنيي الاقترانين

$f(x)$ ، $g(x)$ اذا كان

$$P(x) = f(x)\, g(x)$$

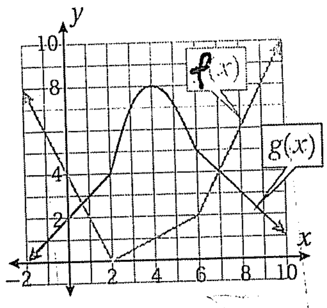
$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

فاجد كل مايلي

① $\bar{P}(1)$

② $\bar{P}(4)$

③ $\bar{q}(7)$



①

$$P(x) = f(x)\, g(x)$$

$$\bar{P}(x) = f(x) * \bar{g}(x) + g(x) * \bar{f}(x)$$

$$\bar{P}(1) = f(1) * \bar{g}(1) + g(1) * \bar{f}(1)$$

$f(1) = 2$ // $g(1) = 3$

$\bar{f}(1) \rightarrow \overset{x_1\ y_1}{(1, 2)}$, $\underset{x_2\ y_2}{(0, 4)}$

$$m = \bar{f}(1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{4 - 2}{0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\bar{f}(1) = -2$$

$\bar{g}(1) \rightarrow \overset{x_1\ y_1}{(1, 3)}$, $\underset{x_2\ y_2}{(0, 2)}$

$$m = \bar{g}(1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{2 - 3}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\bar{g}(1) = 1$$

$f(1) = 2$ // $g(1) = 3$ // $\bar{f}(1) = -2$ // $\bar{g}(1) = 1$

$$\bar{P}(1) = f(1) * \bar{g}(1) + g(1) * \bar{f}(1)$$

$$\bar{P}(1) = 2 * 1 + 3 * -2$$

$$\bar{P}(1) = 2 + -6 = -4$$

②

$\bar{P}(4) \Rightarrow$

$$P(x) = f(x)\, g(x)$$

$$\bar{P}(x) = f(x) * \bar{g}(x) + g(x) * \bar{f}(x)$$

$$\bar{P}(4) = f(4) * \bar{g}(4) + g(4) * \bar{f}(4)$$

$f(4) = 1$ // $g(4) = 8$

$\bar{f}(4) \rightarrow \overset{x_1\ y_1}{(4, 1)}$, $\underset{x_2\ y_2}{(2, 0)}$

$$\bar{f}(4) = \frac{0 - 1}{2 - 4} = \frac{-1}{-2}$$

$$\bar{f}(4) = \frac{1}{2}$$

$$g'(4) = 0$$

$$p'(4) = f(4) * g'(4) + g(4) * f'(4)$$

$$1 * 0 + 8 * \frac{1}{2}$$

$$0 + 4$$

$$p'(4) = 4$$

(3)

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$q'(x) = \frac{g(x) * f'(x) - [f(x) * g'(x)]}{(g(x))^2}$$

$$q'(7) = \frac{g(7) * f'(7) - [f(7) * g'(7)]}{(g(7))^2}$$

$$f(7) = 4 \quad || \quad g(7) = 4$$

$$f'(7) \rightarrow \begin{matrix} (7,4) \\ (8,6) \end{matrix}$$

$$f'(7) = \frac{6-4}{8-7} = 2$$

$$g'(7) \rightarrow \begin{matrix} (7,4) \\ (9,2) \end{matrix}$$

$$g'(7) = \frac{2-4}{9-7} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$q'(7) = \frac{4 * 2 - [4 * -1]}{(4)^2}$$

$$q'(7) = \frac{8 + 4}{16} = \frac{12}{16}$$

السؤال $\boxed{13}$

مواد مشعة: يمكن نمذجة الكمية (R) بالغرام المتبقية من عينة كتلتها 200 g من عنصر مشع بعد (t) يوماً باستعمال الاقتران

$$R(t) = 200(0.9)^t$$

أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t=2$

$$R(t) = 200(0.9)^t$$

$$\frac{dR}{dt} = 200 * (0.9)^t * 1 * \ln 0.9$$

$$\frac{dR}{dt} = 200 * (0.9)^2 * \ln 0.9$$

$$\frac{dR}{dt} = 200 * 0.81 * -0.10$$

$$\frac{dR}{dt} = -17.06$$

السؤال $\boxed{14}$

يمثل الاقتران $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$

جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث (s)

الموقع بالسنتيمترات اجد سرعة الجسم

المتجهة وتسارعه بعد (t) ثانية

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

$$V(t) = 0 + \frac{1}{4} * 10\pi * \cos(10\pi t)$$

$$V(t) = \frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$$

$$a(t) = \frac{5\pi}{2} * 10\pi * -\sin(10\pi t)$$

$$a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$$