مكثف
التكامل وتطبيقاته

ماهر ضمرة
Maher Damrah

الأستاذ : ماهر ضمرة

مكثف : التكامل وتطبيقاته

أولا : قواعد الاشتقاق

ق(س)	قَ(س)	ملاحظات
$\int_{أ}^{ب} ق(س)\ د س$	صفر	التكامل المحدود ثابت
$\int ل(س)\ د س$	ل(س)	المشتقة تلغي التكامل
$لو_{هـ} ل(س)$	$\frac{لَ(س)}{ل(س)}$ ، ل(س) > ٠	المطلق لا يؤثر على المشتقة $\frac{د}{د س} لو_{هـ} \|س\| = \frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠
$هـ^{ل(س)}$	$هـ^{ل(س)} \times لَ(س)$	هـ العدد النيبيري ≃ ٢,٧
$أ^{ل(س)}$	$أ^{ل(س)} \times لو_{هـ} أ \times لَ(س)$	أ ثابت

مكثف : التكامل وتطبيقاته

الأسئلة

اختر الاجابة الصحيحة لما يلي :

١) إذا علمت أن ق(س) = $\frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$ + لو$_{هـ}$ $\sqrt{س + ١}$ ، س > -١ ، فإن ق$'$ (٠) =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{-٣}{٢}$

---

٢) إذا علمت أن ق(س) = (٤)$^{(٢س + ١)}$ × (٣)^{س} + هـ^{س} + لو$_{هـ}$ ٣ ، فإن ق$'$ (٠) =

أ) ٢٠ لو$^{٢}_{هـ}$ + ١ ب) ٤ لو$^{٢}_{هـ}$ + ١

ج) ٢ لو$^{٢}_{هـ}$ + ١ د) ١٢ لو$^{٢}_{هـ}$ + ١

---

٣) إذا علمت أن $\int$ س ق(س) د س = $\int$ ق(س) د س + جا س ، فإن ق$'$ (٠) =

أ) -٢ ب) صفر ج) -٦ د) -١

---

٤) إذا علمت أن ص = هـ^{أس} ، أ ≠ ٠ ، جد أ حيث ص$''$ + ص$'$ - ٦ص = ٠

أ) -٣ ب) -٢ ج) ٦ د) -١

---

٥) إذا علمت أن $\int$ (جا $\frac{\pi ٣}{٢}$ ق(س) + ظا^{٢} س) د س = ظا س + هـ$^{(٢ لو_{هـ} س + ١)}$ ، فإن ق$'$ (١) =

أ) -٢هـ ب) ٢هـ ج) ٢ د) -٢

---

٦) ق(س) = لو$_{هـ}$ | قا س + ظا س | فإن ق$'$ (٠) =

أ) -١ ب) صفر ج) ١ د) ٢

مكثف : التكامل وتطبيقاته

ثانياً : قواعد التكامل

القاعدة	جواب التكامل	ملاحظات
$\int س^{ن} \, د س$	$\frac{س^{ن+1}}{ن+1} + جـ$	$ن \neq -1$
$\int \frac{1}{س} \, د س$	$لو_{هـ} \| س \| + جـ$	$\int \frac{1}{س} \, د س = \int س^{-1} \, د س = لو_{هـ} \| س \| + جـ$
$\int هـ^{أس} \, د س$	$\frac{هـ^{أس}}{أ} + جـ$	الأس يجب أن يكون خطي ← هـ أسه ليس خطي (تعويض) كثير حدود × $هـ^{خطي}$ ← أجزاء
$\int جا أس \, د س$	$\frac{- جتا أس}{أ} + جـ$	
$\int جتا أس \, د س$	$\frac{جا أس}{أ} + جـ$	
$\int قا^{2} أس \, د س$	$\frac{ظا أس}{أ} + جـ$	$\int ظا أس \, د س = \frac{-1}{أ} لو_{هـ} \| جتا أس \| + جـ$
$\int قتا^{2} أس \, د س$	$\frac{- ظتا أس}{أ} + جـ$	$\int ظتا أس = \frac{1}{أ} لو_{هـ} \| جا أس \| + جـ$
$\int قا أس ظا أس \, د س$	$\frac{قا أس}{أ} + جـ$	
$\int قتا أس ظتا أس \, د س$	$\frac{- قتا أس}{أ} + جـ$	
$\int ق(س) \, د س$	$م(س) + جـ$	المعكوس
$\int (أ س + ب)^{ن} \, د س$ ، $ن \neq -1$	$\frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{(ن+1) أ} + جـ$	ما داخل القوس الخطي

التبديلات من المتطابقات

١) متطابقات = ١

١) جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١
٢) قا^{٢}س - ظا^{٢}س = ١ ، ظا^{٢}س - قا^{٢}س = -١
٣) قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س = ١ ، ظتا^{٢}س - قتا^{٢}س = -١

٢) ضعف الزاوية

١) جا ٢س = ٢ جا س جتا س
٢) جتا ٢س ← جتا^{٢}س - جا^{٢}س
← ١ - ٢ جا^{٢}س
← ٢ جتا^{٢}س - ١

في الجواب نصف الزاوية

٣) تبديل التربيع

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا ٢س)
جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢س)

نضاعف الزاوية

ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١
ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س - ١

نفس الزاوية

٣) تبديل الضرب

١) جا أ جتا أ = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ أ
٢) جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ (جا (أ + ب) + جا (أ - ب))
٣) جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ (جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب))
٤) جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ (جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب)
= $\frac{-١}{٢}$ (جتا (أ + ب) - جتا (أ - ب))

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net

مكثف : التكامل وتطبيقاته

الأسئلة

١) $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}^3 - 6\text{س}^2 + 9\text{س}}}$ ، س > ٣

الحل

$= \int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}(\text{س}-3)^2}}$

$= \int \text{س}^{-\frac{1}{2}} (\text{س}-3)^{-1} \, \text{د س}$

$= \int \text{س}^{-\frac{1}{2}} - \text{س}^{-\frac{1}{2}} \, \text{د س}$

$= 2\text{س}^{\frac{1}{2}} - 2\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$

$= 2\sqrt{\text{س}} - 2\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

---

٢) $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt[3]{\text{س}+1}\sqrt{9\text{س}+9}}$ ، س > -١

الحل

$\int (\text{س}+1)^{-\frac{1}{3}} + 3(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} (\text{س}+1)^{-\frac{1}{3}} \, \text{د س}$

$= \frac{(\text{س}+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + 3\int (\text{س}+1)^{\frac{1}{6}} \, \text{د س}$

$= \frac{3}{2}(\text{س}+1)^{\frac{2}{3}} + 3 \times \frac{6}{7}(\text{س}+1)^{\frac{7}{6}} + \text{ج}$

٣) $\int (1 + \text{ظا س})^2 \, \text{د س}$

الحل

$\int (1 + 2\text{ظا س} + \text{ظا}^2\text{س}) \, \text{د س}$

(متطابقة)

$= \int (2\text{ظا س} + \text{قا}^2\text{س}) \, \text{د س}$

$= -2\text{لو}_{\text{ه}}|\text{جتا س}| + \text{ظا س} + \text{ج}$

---

٤) $\int \frac{1 - \text{جتا}^2\text{س}}{1 + \text{جتا س}} \, \text{د س}$

الحل

$\int \frac{(1 - \text{جتا س})(1 + \text{جتا س})}{1 + \text{جتا س}} \, \text{د س}$

$= \int (1 - \text{جتا س}) \, \text{د س}$

$= \text{س} - \text{جا س} + \text{ج}$

---

٥) $\int \text{جا}^3\text{س} (\text{جا س} + \text{جتا س})^2 \, \text{د س}$

الحل : نفك التربيع

$\int \text{جا}^3\text{س} (\text{جا}^2\text{س} + 2\text{جا س جتا س} + \text{جتا}^2\text{س}) \, \text{د س}$

$= \int \text{جا}^3\text{س} (1 + \text{جا}2\text{س}) \, \text{د س}$

$= \int \text{جا}^3\text{س} \, \text{د س} + \int \frac{1}{2}(\text{جتا س} - \text{جتا}3\text{س}) \, \text{د س}$

$= -\frac{\text{جتا}^3\text{س}}{3} + \frac{1}{2}(\text{جا س} - \frac{\text{جا}3\text{س}}{3}) + \text{ج}$

مكثف : التكامل وتطبيقاته

٦) $\int \frac{\text{قا س + ظا س}}{\text{قا س - ظا س}}$ د س

الحل

$\int \frac{\text{قا س + ظا س}}{\text{قا س - ظا س}} \times \frac{\text{قا س + ظا س}}{\text{قا س + ظا س}}$ د س

$= \int \frac{(\text{قا س + ظا س})^2}{\text{قا}^2\text{س - ظا}^2\text{س}}$ د س

$= \int (\text{قا}^2\text{س + ٢ قا س ظا س + ظا}^2\text{س})$ د س

$= \int (\text{قا}^2\text{س + ٢ قا س ظا س + قا}^2\text{س - ١})$ د س

$= ٢\,\text{ظا س} + ٢\,\text{قا س} + \text{س} + \text{ج}$

---

٧) $\int \frac{\text{١ - جا ٢س}}{\text{جتا س - جا س}}$ د س

الحل

$\int \frac{\text{جا}^2\text{س + جتا}^2\text{س - ٢ جا س جتا س}}{\text{جتا س - جا س}}$ د س

$= \int \frac{(\text{جتا س - جا س})^2}{\text{جتا س - جا س}}$ د س

$= \text{جا س} + \text{جتا س} + \text{ج}$

---

٨) $\int \sqrt{\text{١ + جا ٢س}}$ د س ، ٠ < س < $\frac{\pi}{٣}$

الحل

$\int \sqrt{\text{جا}^2\text{س + جتا}^2\text{س + ٢ جا س جتا س}}$ د س

$= \int \sqrt{(\text{جا س + جتا س})^2}$ د س

$= \int |\text{جا س + جتا س}|$ د س

$= \int (\text{جا س + جتا س})$ د س

$= -\text{جتا س} + \text{جا س} + \text{ج}$

اختر الاجابة الصحيحة :

١) إن $\int (\text{جتا}^4\text{س - جا}^4\text{س})$ د س =

أ) س + ج ب) $\frac{\text{جتا ٢س}}{٢} + \text{ج}$

ج) $\frac{\text{جا ٢س}}{٢} + \text{ج}$ د) $\frac{\text{جتا ٢س}}{٢} + \text{ج}$

---

٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{\sqrt{\text{١ + جا ٢س}}}{\text{جا س + جتا س}}$ د س =

أ) صفر ب) π

ج) ١ د) $\frac{\pi}{٢}$

---

٣) إن $\int \frac{\text{س قا}^2\text{س - س ظا}^2\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$ د س =

أ) $\sqrt[٣]{\text{س}^2} + \text{ج}$ ب) $\frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^5} + \text{ج}$

ج) $\frac{\text{س}^2}{٢} + \text{ج}$ د) $\frac{٥}{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^5} + \text{ج}$

---

٤) إن $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\pi} \sqrt{\text{جا}^4\text{س + جتا ٢س}}$ د س =

أ) -١ ب) ١

ج) $\frac{\pi}{٢}$ د) صفر

مكثف : التكامل وتطبيقاته

إضافي

١) $\int$ جا^{٤}س جتا^{٤}س د س

الحل

$\int$ (جاس جتاس)^{٤} د س

$= \int (\frac{١}{٢}$ جا٢س$)^{٤}$ د س

$= \frac{١}{١٦} \int (\frac{١}{٢}(١ - $ جتا٤س$))^{٢}$ د س

$= \frac{١}{٦٤} \int (١ - ٢$ جتا٤س + جتا^{٢}٤س$)$ د س

$= \frac{١}{٦٤} \int (١ - ٢$ جتا٤س $+ \frac{١}{٢}(١ +$ جتا٨س$))$ د س

$= \frac{١}{٦٤} (س - \frac{١}{٢}$ جا٤س $+ \frac{١}{٢}(س + \frac{\text{جا}٨س}{٨})) + ج$

---

٢) $\int \frac{\text{جتا}^{٢}٧س - \text{جتا}^{٢}س}{\text{جا}٤س \text{ جا}٣س}$ د س

الحل :

$\int \frac{(\text{جتا}٧س - \text{جتا}س)(\text{جتا}٧س + \text{جتا}س)}{\frac{١}{٢}(\text{جتا}٨س - \text{جتا}٢س)}$ د س

$= -٢ (\frac{\text{جا}٧س}{٧} + \text{جا}س) + ج$

---

٣) $\int \sqrt{\text{هـ}^{٣س} + ٤\text{هـ}^{س} + ٤}$ د س

الحل

$\int \sqrt{(\text{هـ}^{س} + ٢)^{٢}}$ د س

$= \int |\text{هـ}^{س} + ٢|$ د س

$= \text{هـ}^{س} + ٢س + ج$

---

٤) $\int \frac{\text{هـ}}{(\text{هـ}^{س} + ١)(\text{هـ}^{س} + ٣)}$ د س

الحل

$\int \frac{\text{هـ}}{\text{هـ} \times \text{هـ}^{س} + ٣ \times \text{هـ}^{س}}$ د س

$= \int \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}(\text{هـ}^{س} + ٣\text{هـ}^{س})}$ د س

$= \int \text{هـ}^{-س} (\frac{١}{١ + ٣\text{هـ}^{س}})$ د س

$= \frac{-١}{١ + ٣\text{هـ}^{س}} \times \text{هـ}^{-س} + ج$

---

٥) إن قيمة $\int_{\text{هـ}^{٢}}^{\text{هـ}} \frac{١}{س \text{ لو}_{\text{هـ}} س^{٢}}$ د س =

الحل

$\frac{١}{٢} \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} \frac{\frac{١}{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} س}$ د س

$= \frac{١}{٢} [\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{لو}_{\text{هـ}} س|]_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٢}} = \frac{١}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - ٠)$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{٢}$

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net

ثالثاً : معكوس المشتقة

م(س) معكوس ق(س) المتصل
← م′(س) = ق(س)

ملاحظات وأفكار

١) يوجد ما لا نهاية من معكوس المشتقة م١ ، م٢ ، ....

٢) طرح معكوسين لهما نفس المعامل

العددي = ثابت
م١ - م٢ ليس ثابت
م١ - م٢ ثابت
٥م١ - ٥م٢ ثابت
س م١ - س م٢ ليس ثابت

٣) إذا كان لدينا معكوس١ وطلب معكوس٢ سيكون لهم نفس القسم المتغير لكن يختلفوا في الحد المطلق

مثلاً :

م معكوس ق
حيث م١ = ٣س٢ + ٥س + ١
م٢ = ٣س٢ + ٥س + أ

الأسئلة

اخترا الاجابة الصحيحة فيما يلي :

١) إذا كان م١ ، م٢ معكوسا المشتقة للاقتران المتصل ق وكان $\int_{-1}^{2} (م_1 - م_2)\, د س = ١٢$
فإن $\int_{0}^{7} (م_2 - م_1)\, س\, د س =$

أ) -٨ ب) ٤٨
ج) ١٤٤ د) -٤٨

٢) إذا علمت أن م(س) معكوس المشتقة للاقتران المتصل ق(س) وكان هـ م(س) + ٢س = أ س٣
جد أ حيث ق(س) يمر بالنقطة (١،٣)

أ) -٤ ب) ٤
ج) صفر د) ٨

---

٣) م(س) = ٢ جا س + جتا س + ١
معكوس ق(س) ، هـ(س) أيضاً معكوس ق(س) ، هـ(٠) = ٥ ، فإن هـ(π) =

أ) ٤ ب) ٣
ج) صفر د) ٢

---

٤) (٢٠٢٠ تكميلي) م ، هـ معكوساً المشتقة للاقتران المتصل ق(س) ، م(١) = ٣
هـ(س) = ٣س٢ + س + ٤ فإن
$\int$ (هـ(س) - م(س)) س٢ د س =

أ) س٣ + جـ ب) ٣س + جـ
ج) $\frac{١}{٣}$ س٢ + جـ د) $\frac{٥}{٣}$ س٣ + جـ

---

٥) م ، هـ معكوساً مشتقة للاقتران
ق ، م(١) = ٣ ، هـ(١) = ٦
فإن $\int$ (هـ - م) جا ٢س د س =

أ) -٣ جتا ٢س + جـ
ب) $\frac{-٣}{٢}$ جتا ٢س + جـ
ج) ٣ جا ٢س + جـ
د) $\frac{-٣}{٢}$ جا ٢س + جـ

مكثف : التكامل وتطبيقاته

٦) إذا علمت أن م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س) وكان
٢ م(س) + س^{٣} = $\int$ س ق(س) د س
جد ق(٤)

أ) -٦ ب) ١
ج) ٢٤ د) صفر

---

٤) خصائص التكامل المحدود

اختر الاجابة الصحيحة :

١) إذا علمت أن $\int_{١}^{٢}$ (ق(س) + ١) د س = ٣
$\int_{٣}^{٢}$ ($\frac{ق(س)}{٢}$ - ١) د س = ٤ فإن
$\int_{٠}^{١}$ ق (٣س + ١) د س =

أ) -٢ ب) -١
ج) -٤ د) -٦

---

٢) إذا علمت أن س ∈ [١ ، ٣]
-٤ ≤ ق(س) ≤ ٢ فإن
أكبر وأصغر قيمة على الترتيب للتكامل
$\int_{١}^{٣}$ (ق^{٢}(س) + ١) د س

أ) ١٠ ، ٣٤ ب) ٢ ، ٣٢
ج) ٣٤ ، ٣ د) ١ ، ٧

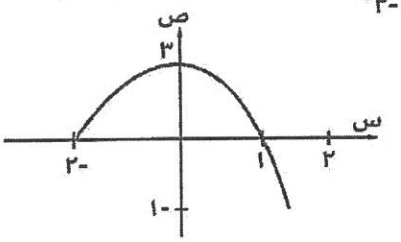
---

٣) إن أكبر وأصغر قيمة للتكامل
$\int_{٠}^{\pi}$ (٣ - ٢ جا س) د س

أ) π ، π٢ ب) π٢ ، π٣
ج) π ، π٥ د) π ، π٣

---

٤) من الشكل التالي لمنحنى ق(س) فإن م ، ن على الترتيب
م ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ (ق^{٢} (س) + ٢) د س ≤ ن



أ) ٣ ، ١١ ب) ١٢ ، ٨٨
ج) ٢ ، ١١ د) ٨ ، ٤٤

---

٥) من الشكل السابق فإن م ، ن على الترتيب
م ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ (٣ ق(س) + ١) د س ≤ ن

أ) -٢ ، -١ ب) ٢ ، ٢٠
ج) -٤ ، ٢٠ د) ١ ، ١٠

---

٦) منصة درسك
$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س + $\int_{ج}^{ب}$ ٢ق(س) د س + $\int_{د}^{ج}$ ق(س) د س = ٣٠
وكان $\int_{أ}^{ج}$ ق(س) د س = $\int_{ب}^{د}$ ٣ ق(س) د س
فإن قيمة $\int_{أ}^{ج}$ ق(س) د س =

أ) ٥ ب) ١٠
ج) ١٥ د) ٢٠

---

٧) إن $\int_{٢}^{٢}$ هـ^{٢س} د س + $\int_{٢}^{٠}$ (هـ^{٣س} - ٢) د س =

أ) $\frac{هـ^{٤}}{٢}$ - ٤ ب) هـ^{٤} - ٤
ج) -٤ د) ٤

٨) إن $\int_{1}^{3} |هـ^{س-1} - هـ| \, د س =$

أ) $هـ^{٢} + هـ^{-١} - ٢ هـ$
ب) $هـ^{٢} + هـ^{-١} + ٣هـ$
ج) $هـ^{٢} + هـ^{-١} + هـ$
د) $هـ^{-١} + هـ^{٢} - هـ$

---

٩) ق(س) = $\begin{cases} ٦ & ، أ \leq س < ٣ \\ ٣س & ، س = ٣ \\ ٢س & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

وكان $\int_{أ}^{4} ق(س) \, د س = ١٨$ ، فإن أ =

أ) ٦ ب) ١
ج) ٢ د) صفر

---

١٠) إن $\int_{1}^{4} \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١} \, د س =$

أ) $\frac{١٦}{٣}$ ب) ٧
ج) $\frac{١٤}{٣}$ د) ١

مكثف : التكامل وتطبيقاته

رابعاً : طرق التكامل

أ) تمييز الطرق

التعويض	الأجزاء	اللوغاريتم	الكسور الجزئية
* إذا لم تكن الزاوية خطية مثلاً : جا (س^{2}) ، قا^{2} √س (ص = الزاوية)	خطي × تربيعي (كثير حدود)	بسط / مقام مشتقة المقام في البسط يكون الجواب لوغاريتم المقام	بسط / مقام * البسط والمقام كلاهما كثير حدود أو يفرض ويحول لكثير حدود .
* اقتران اسي (أسه ليس خطي) (ص = الأس)	* (خطي)^{ن} * دائري (زاويته خطي) * هـ (أسه خطي) * لوغاريتم		* درجة البسط أقل من المقام .
* اللوغاريتم مركب ، أو في المقام (ص = لو)			* المقام يتحلل إلى أقواس خطية مختلفة .
* ضرب اقترانين احدهما مركب (ص = ما داخل المركب)	كذلك تكامل اللوغاريتم لوحده		
* جذر ما داخله خطي (ص = الجذر كله)			
* هـ (أسه خطي) في المقام (ص = الاسي كله)			

ب) حالات خاصة

* الأجزاء الدوري هـ (أس خطي) × جا (خطي) ، هـ (أس خطي) × جتا (خطي) ، جا (لو س) ، جتا (لو س)

* تكامل جذر تربيعي ما داخله مربع كامل يتحول إلى مطلق

مثلاً: تكامل $\sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩}$ = تكامل |س + ٣|

* تكامل $\sqrt{هـ^{س} + ١}$ نفرض ص = الجذر كله ثم يتحول إلى كسور جزئية .

ج) تكاملات تحتاج لتبسيط قبل الحل

* اقتران أسي من ضمن الأس ($هـ^{س}$ ، لو س) نفصل ثم نبسط ثم فرض

مثال : $هـ^{(س + ٢لو\ س)} = هـ^{س} \times هـ^{لو\ س^{٢}} = س^{٢} \times هـ^{س}$

* اللوغاريتم المركب لو $\sqrt{س} = \frac{١}{٢}$ لو س ، لو ظا $\sqrt[٥]{س} = ٥$ لو ظا س

* $\int \frac{(خطي)^{ن}}{س^{م}}$ نحول الأس الأكبر بقدر الأصغر ونفصل الباقي

مثال : $\int \frac{(٢س+١)^{٧}}{س^{٩}} = \int \frac{(٢س+١)^{٧}}{س^{٧} \times س^{٢}}$ د س

(٢٠١٧) $\int \frac{(س^{٢} - ٦س + ٩)^{\frac{٧}{٢}}}{س^{٩}}$ د س

* $هـ^{س}$ في المقام نضرب البسط والمقام $هـ^{-س}$

$\int \frac{١}{هـ^{س} + ١} \times \frac{هـ^{-س}}{هـ^{-س}}$

* عامل مشترك أكبر وأصغر $\int \sqrt{س^{٢} + س^{٤}}$ د س = $\int \sqrt{س^{٢}(١ + س^{٢})}$ د س س > ٠

$\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}$ د س = $\int \frac{\sqrt{س^{٤}(س^{-٢} - ١)}}{س^{٥}}$ د س س > ٠

* ادخال س داخل الجذر $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}$ د س = $\int \sqrt[٣]{٥ - س^{٣}}$ د س

* ضرب بالمرافق $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}$ د س

مكثف : التكامل وتطبيقاته

الأسئلة

جد التكاملات التالية :

١) $\int \frac{\text{ق}^{\text{س}}}{\log_{\text{هـ}}(\text{ق}^{\text{س}} + \text{ظ}^{\text{س}})}\, \text{د س}$

الحل

نفرض ص $= \log_{\text{هـ}}(\text{ق}^{\text{س}} + \text{ظ}^{\text{س}})$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ق}^{\text{س}} \ln \text{ق} + \text{ظ}^{\text{س}} \ln \text{ظ}}{\text{ق}^{\text{س}} + \text{ظ}^{\text{س}}} = \frac{\text{ق}^{\text{س}}(\ln \text{ق} + \ln \text{ظ})}{\text{ق}^{\text{س}} + \text{ظ}^{\text{س}}}$

$\therefore \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{ق}^{\text{س}} \ln \text{ق}}$

$\int \frac{1}{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{ق}^{\text{س}} \ln \text{ق}} = \ln_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \ln_{\text{هـ}} |\ln \text{ق}^{\text{س}} + \ln \text{ظ}^{\text{س}}| + \text{جـ}$

---

٢) $\int \frac{1}{\text{٣س} \log_{\text{هـ}} \text{س} + \text{٤س} (\log \text{س})^{\text{٢}}}\, \text{د س}$

الحل نفرض ص $= \log_{\text{هـ}} \text{س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{د س} = \text{س}\, \text{د ص}$

$\int \frac{1}{\text{س}^{\text{٢}}(\text{ص} + \text{٣ص}^{\text{٢}})} \times \text{س}\, \text{د ص}$ كسور جزئية

$\frac{1}{(\text{ص}+\text{٣ص}^{\text{٢}})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{٣ص}+1}$

$1 = \text{أ}(1+\text{٣ص}) + \text{ب} \times \text{ص}$

ص $= 0 \leftarrow$ أ $= 1$

ص $= -\frac{1}{3} \leftarrow$ ب $= -1$

الجواب

$= \ln_{\text{هـ}} |\text{ص}| - \frac{1}{2} \ln_{\text{هـ}} |1+\text{٣ص}| + \text{جـ}$ نرجع ص

$= \ln_{\text{هـ}} |\log_{\text{هـ}} \text{س}| - \frac{1}{2} \ln_{\text{هـ}} |1+\text{٣}\log_{\text{هـ}} \text{س}| + \text{جـ}$

---

٣) $\int \text{جتا}(\log_{\text{هـ}} \text{س})\, \text{د س}$

الحل نفرض ص $= \log_{\text{هـ}} \text{س} \leftarrow \text{د س} = \text{س}\, \text{د ص}$

لكن س $= \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}}$ جتاص د ص

أجزاء دوري

$\text{د ن} = \text{هـ}^{\text{ص}} \leftarrow$ ن $= \text{هـ}^{\text{ص}}$ د ص

د هـ $=$ جتاص د ص $\leftarrow$ هـ $=$ جاص

$\text{ن} \times \text{هـ} - \int \text{هـ}\, \text{د ن}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}}$ جاص $- \int \text{هـ}^{\text{ص}}$ جاص د ص

ن $= \text{هـ}^{\text{ص}} \leftarrow$ د ن $= \text{هـ}^{\text{ص}}$ د ص

د هـ $=$ جاص د ص $\leftarrow$ هـ $= -$ جتاص

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}$ جتاص د ص $= \text{هـ}^{\text{ص}}$ جاص $- (\text{هـ}^{\text{ص}} \times -\text{جتاص}) - \int \text{هـ}^{\text{ص}}$ جتاص د ص

$\therefore 2 \int \text{هـ}^{\text{ص}}$ جتاص د ص $= \text{هـ}^{\text{ص}}$ جاص $+ \text{هـ}^{\text{ص}}$ جتاص $+$ جـ

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}$ جتاص د ص $= \frac{\text{هـ}^{\text{ص}} \text{جاص} + \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جتاص}}{2} + \text{جـ}$

(نرجع ص)

٤) $\int \frac{\text{هـ}^{(\text{جاس} + ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتاس})}}{\text{دس}}$

الحل نفصل ونبسط

$\int \text{هـ}^{\text{جاس}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جتا}^{٣}\text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}} \text{دس}$

$= \int \text{جتا}^{٣}\text{س} \; \text{هـ}^{\text{جاس}} \; \text{هـ}^{\text{س}} \text{دس}$

ص = جاس ← دص = $\frac{\text{دس}}{\text{جتاس}}$

$\int \text{جتا}^{٢}\text{س} \; \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int (١ - \text{جا}^{٢}\text{س}) \; \text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص}$

$= \int (١ - \text{ص}^{٢}) \; \text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص}$ أجزاء مرتين

$\text{هـ}^{\text{ص}}$	$١ - \text{ص}^{٢}$
$\text{هـ}^{\text{ص}}$	-٢ص
$\text{هـ}^{\text{ص}}$	-٢
$\text{هـ}^{\text{ص}}$	٠

$= (١ - \text{ص}^{٢}) \; \text{هـ}^{\text{ص}} + ٢\text{ص} \; \text{هـ}^{\text{ص}} - ٢ \; \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

ثم نرجع ص

---

٥) $\int \text{قا}^{٤}\text{س} \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظا}^{٣}\text{س} \; \text{دس}$

الحل بطل التكامل

$\int \text{قا}^{٤}\text{س} \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظاس} \; \text{دس}$

ص = ظاس ← دص = $\frac{\text{دس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} \; \text{دص}$

$= \int (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}) \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} \; \text{دص}$ أجزاء

ه = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص ← دﻫ = $\frac{١}{\text{ص}}$ دص

دﻫ = (١ + ص^{٢}) دص ← هـ = ظاس + $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$

الجواب

$\text{ظاس} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}) \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} - \int (\text{ظاس} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}) \; \text{دص}$

$= (\text{ظاس} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}) \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} - \text{ظاس} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٩} + \text{جـ}$

---

٦) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩} \; \text{دس}$

الحل ترتيب التكامل

$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{(\text{س} + ٣)^{٢}} \; \text{دس}$

ﻫ = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ← دﻫ = $\frac{١}{\text{س}}$ دس

دهـ = (س + ٣)$^{-٢}$ دس ← هـ = $\frac{-١}{\text{س} + ٣}$

$\Leftarrow \frac{-\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{س} + ٣} + \int \frac{١}{\text{س}(\text{س} + ٣)} \; \text{دس}$

$\frac{١}{\text{س}(\text{س} + ٣)} = \frac{\text{ﺃ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ٣}$

١ = ﺃ (س + ٣) + ب س

س = ٠ ← ﺃ = $\frac{١}{٣}$

س = −٣ ← ب = $-\frac{١}{٣}$

الجواب

$\frac{-\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\text{س} + ٣} + \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \frac{١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + ٣) + \text{جـ}$

٧) إذا علمت أن

$\int_1^{هـ} س^{ن} \ لو_{هـ} س \ دس = أ$ ، $ن \neq -1$

جد بدلالة أ، $\int_1^{هـ} س^{ن} (لو_{هـ} س)^2 \ دس$

الحل :

$ص = (لو_{هـ} س)^2 \longleftarrow د ص = 2 لو_{هـ} س \times \frac{1}{س} د س$

$د ه = س^{ن} د س \leftarrow ه = \frac{س^{ن+1}}{ن+1}$

$= \frac{س^{ن+1}}{ن+1} لو_{هـ} س \Big|_1^{هـ} - \frac{2}{ن+1} \int_1^{هـ} س^{ن} لو_{هـ} س \ د س$

$= \frac{هـ^{ن+1}}{ن+1} - \frac{2أ}{ن+1}$

---

٨) $\int ظتا س \ لو_{هـ} جا س \ دس$

الحل : $ص = لو_{هـ} جا س \leftarrow د ص = \frac{جتا س}{جا س} د س$

$د س = \frac{جا س}{جتا س} د ص$

$\Leftarrow \int ظتا س ص \times \frac{جا س}{جتا س} د ص$

$= \frac{ص^2}{2} + ج = \frac{1}{2} (لو_{هـ} جا س)^2 + ج$

طريقة ٢) $ص = جا س$

ثم نفرض ع $= لو_{هـ} ص$

---

٩) $\int هـ^{(هـ^{س} + 2س)} \ دس$

الحل : نفصل التكامل

$\int هـ^{هـ^{س}} \times هـ^{2س} \ د س$

$ص = هـ^{س} \longleftarrow د س = \frac{د ص}{هـ^{س}}$

$\int هـ^{ص} ص^{0} \frac{د ص}{ص} = \int ص هـ^{ص} د ص$

$ف = ص \longleftarrow د ف = د ص$

$د ه = هـ^{ص} د ص \leftarrow ه = هـ^{ص}$

الجواب $= ص هـ^{ص} - هـ^{ص} + ج$ (نرجع ص)

---

١٠) $\int \frac{1}{1 + هـ^{س}} \ دس$

الحل $\int \frac{1}{هـ^{س}(هـ^{س} + 1)} \ د س$ ×س عامل مشترك

$= \int \frac{\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}}}{\frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + 1} \ د س$

$= - لو_{هـ} |هـ^{-س} + 1| + ج$

---

١١) $\int \frac{هـ^{(2 + 2 لو_{هـ}(س+1))}}{س^3 + 3س^2 + 3س + 9} \ دس$

الحل : نفصل ونبسط

$\int \frac{هـ^{2} \times هـ^{لو_{هـ}(س+1)^2}}{س^3 + 3س^2 + 3س + 9} \ د س$

$= هـ^{2} \int \frac{س^2 + 2س + 1}{س^3 + 3س^2 + 3س + 9} \ د س$

$= \frac{هـ^{2}}{3} لو_{هـ} |س^3 + 3س^2 + 3س + 19| + ج$

١٢) $\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{هـ^{س}+٢}+هـ^{س}}$ دس

الحل : نفرض ص $= \sqrt{هـ^{س}+٢}$

$ص^{٢} = هـ^{س}+٢ \leftarrow$ دس $= \frac{٢ص \, د ص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{هـ^{س}}{ص+ص^{٢}-٢} \times \frac{٢ص \, د ص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{٢ص}{(ص+٢)(ص-١)} د ص$

$\frac{٢ص}{(ص+٢)(ص-١)} = \frac{م}{ص+٢} + \frac{ب}{ص-١}$

$٢ص = م(ص-١) + ب(ص+٢)$

$ص = ١ \leftarrow ٢ = ٣ب \leftarrow ب = \frac{٢}{٣}$

$ص = -٢ \leftarrow -٤ = -٣م \leftarrow م = \frac{٤}{٣}$

الجواب

$= \frac{٤}{٣}$ لو $|ص+٢| + \frac{٢}{٣}$ لو $|ص-١| + ج$ (بدلالة ص)

١٣) $\int \frac{س \, هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$ دس

الحل :

$ف = س \, هـ^{س} \leftarrow$ دف $= (س هـ^{س} + هـ^{س})$ دس

$= هـ^{س}(س+١)$ دس

$دهـ = (س+١)^{-٢}$ دس $\leftarrow هـ = \frac{-١}{س+١}$.

الجواب

$\frac{-س \, هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}$ دس

$= \frac{-س \, هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + ج$

١٤) $\int$ قا^{ن}س ظا س دس $\quad ن \neq ٠$

الحل

ص = قاس $\leftarrow$ دس $= \frac{د ص}{قاس ظاس}$

$\int ص^{ن-١} \frac{د ص}{قاس ظاس} = \int ص^{ن-١} د ص$

$= \frac{ص^{ن}}{ن} + ج = \frac{قا^{ن}س}{ن} + ج$

---

١٥) $\int$ جتا$^{٥}\frac{١}{٢}$س دس

الحل :

$\int$ جتا$^{٤}\frac{١}{٢}$س (جتا$^{٢}\frac{١}{٢}$س) دس

$= \int$ جتا$^{٤}\frac{١}{٢}$س (١ - جا$^{٢}\frac{١}{٢}$س) دس

ص = جا$\frac{١}{٢}$س $\leftarrow$ دس $= \frac{د ص}{\frac{١}{٢}$ جتا$\frac{١}{٢}$س$}$

$\int$ جتا$^{٤}\frac{١}{٢}$س (١ - ص^{٢}) $\frac{د ص}{\frac{١}{٢}$ جتا$\frac{١}{٢}$س$}$

$= ٢\int (١ - ٢ص^{٢} + ص^{٤})$ د ص

$= ٢(ص - \frac{٢ص^{٣}}{٣} + \frac{ص^{٥}}{٥}) + ج$

نرجع ص

١٦) $\int$ جا^{٢} ٢س جتا^{٥}س دس

الحل

$\int$ (٢ جاس جتاس)^{٢} جتا^{٥}س دس

$= ٤\int$ جا^{٢}س جتا^{٧}س دس

ص = جاس ← دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$٤\int ص^{٢}$ جتا^{٦}س $\frac{دص}{جتاس}$

$= ٤\int ص^{٢}(١-جا^{٢}س)^{٣}$ دص

$= ٤\int ص^{٢}(١-ص^{٢})^{٣}$ دص

$= ٤\int ص^{٢}(١-٣ص^{٢}+٣ص^{٤}-ص^{٦})$ دص

$= ٤(\frac{ص^{٣}}{٣}-\frac{٣ص^{٥}}{٥}+\frac{٣ص^{٧}}{٧}-\frac{ص^{٩}}{٩})+ج$ نرجع ص

١٧) $\int$ قا^{٥}س ظا^{٣}س دس

الحل

ص = قاس ← دس = $\frac{دص}{قاس ظاس}$

$\int ص^{٣}$ ظا^{٣}س $\frac{دص}{قاس ظاس}$

$= \int ص^{٤}(قا^{٢}س-١)$ دص

$= \int (ص^{٦}-ص^{٤})$ دص

$= \frac{ص^{٧}}{٧}-\frac{ص^{٥}}{٥}+ج$

نرجع ص

١٨) $\int$ قتاس ظا^{٤}س دس

الحل

$\int \frac{١}{جاس} \times \frac{جا^{٤}س}{جتا^{٤}س}$ دس

ص = جتاس ← دس = $\frac{دص}{-جاس}$

$\int \frac{جا^{٣}س}{ص^{٤}} \times \frac{دص}{-جاس} = -\int ص^{-٤}(١-جتا^{٢}س)$ دص

$= -\int ص^{-٤}(١-ص^{٢})$ دص

$= -\frac{ص^{-٣}}{-٣}+\frac{ص^{-١}}{-١}+ج$ نرجع (ص)

١٩) $\int$ س قا$^{٢}\sqrt{س^{٢}-١}$ دس

الحل نفرض ص = $\sqrt{س^{٢}-١}$

$ص^{٢} = س^{٢}-١$ ← ٢ص دص = ٢س دس

دس = $\frac{ص\,دص}{س}$

$\int س$ قا$^{٢}ص \times \frac{ص\,دص}{س}$ أجزاء

ه = ص ← دﻫ = دص

دﻫ = قا^{٢}ص دص ← ﻫ = ظاص

$= ﻫه - \int ﻫ$ دﻫ

$= ص$ ظاص $- \int$ ظاص دص

$= ص$ ظاص $+$ لو|جتاص| $+ ج$

نرجع (ص)

مكثف : التكامل وتطبيقاته

٢٠) $\int جا^{٢}س\ جتا^{٤}س\ د س$

الحل $\int (جاس جتاس)^{٢} جتا^{٢}س\ د س$

$= \int (\frac{١}{٢} جا٢س)^{٢} جتا^{٢}س\ د س$

$= \frac{١}{٤} \int جا^{٢}٢س \times \frac{١}{٢}(١+جتا٤س) د س$

$= \frac{١}{٨} \int جا^{٢}٢س\ د س + \frac{١}{٨} \int جا^{٢}٢س\ جتا٤س\ د س$

$ص = جا٢س \leftarrow د س = \frac{د ص}{٢ جتا٢س}$

$= \frac{١}{٨} \int \frac{١}{٢}(١-جتا٤س) د س + \frac{١}{٨} \int ص^{٢} جتا٤س \frac{د ص}{٢ جتا٢س}$

$= \frac{١}{١٦}(س - \frac{جا٤س}{٤}) + \frac{١}{٤٨} ص^{٣} + جـ$

نرجع ص

٢١) $\int جتا٤س\ (جا٢س - جتا٢س)^{٥}\ د س$

الحل : نحل

$\int (جتا^{٢}س - جا^{٢}س)(جاس - جتاس)^{٥} د س$

$= \int (جتا^{٢}س - جا^{٢}س)(جتاس + جاس)(جاس - جتاس)^{٥} د س$

$= - \int (جتا^{٢}س + جا^{٢}س)(جاس - جتاس)^{٥} د س$

$ص = جاس - جتاس$

$د س = \frac{د ص}{جتاس + جاس}$

$\Leftarrow - \int (جتا^{٢}س + جا^{٢}س) ص^{٥} \frac{د ص}{(جتاس + جاس)}$

$= - \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

نرجع ص

٢٢) $\int \frac{جتاس}{-٦ جا^{٢}س - ٨ جتا^{٢}س}\ د س$

الحل $\int \frac{جتاس}{-٦جا^{٢}س - ٨(١-جا^{٢}س)} د س$

$= \int \frac{جتاس}{٢ جا^{٢}س - ٨} د س$

$ص = جاس \leftarrow د س = \frac{د ص}{جتاس}$

$\int \frac{جتاس}{٢ص^{٢} - ٨} \times \frac{د ص}{جتاس}$ كسور جزئية

$= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{(ص-٢)(ص+٢)} د ص$ ---- الخ

$= \frac{١}{٨} لو|ص-٢| - \frac{١}{٨} لو|ص+٢| + جـ$ نرجع ص

٢٣) $\int \frac{س + جاس جتاس + ١}{١ + جتا٢س}\ د س$

الحل : نفصل التكامل الى تكاملين

$\int \frac{س+١}{١+جتا٢س} + \frac{جاس جتاس}{١+جتا٢س} د س$

[١] اجزاء [٢] لوغاريتم مباشر

[١] $\int \frac{س+١}{٢ جتا^{٢}س} د س = \int \frac{١}{٢}(س+١) قا^{٢}س\ د س$

$و = \frac{١}{٢}(س+١) \leftarrow د و = \frac{١}{٢} د س$

$د ظ = قا^{٢}س د س \leftarrow ظ = ظاس$

$= \frac{١}{٢}(س+١) ظاس - \frac{١}{٤} لو|جتا٢س| + \frac{١}{٤} لو|١+جتا٢س| + جـ$

٢٤) $\int \frac{1}{3\,جا^2س - 12\,جتا^2س}\,د س$

الحل عامل مشترك

$= \int \frac{1}{3جتا^2س(ظا^2س - 4)}\,د س$

$= \int \frac{قا^2س}{3(ظا^2س - 4)}\,د س$

$ص = ظاس \leftarrow ى س = \frac{د ص}{قا^2س}$

$\int \frac{قا^2س}{3(ص^2 - 4)} \times \frac{د ص}{قا^2س}$ كسور جزئية

⋮

---

٢٥) $\int \frac{\sqrt[3]{س} + 1}{س + \sqrt[3]{س^2} - 2\sqrt[3]{س}}\,د س$

الحل $ص = \sqrt[3]{س} \leftarrow ص^3 = س$

$3ص^2\,د ص = د س$

$\int \frac{ص + 1}{ص^3 + ص^2 - 2ص} \times 3ص^2\,د ص$

$= \int \frac{ص + 1}{ص(ص^2 + ص - 2)} \times 3ص^2\,د ص$

$= \int \frac{3ص^2 + 3ص}{ص^2 + ص - 2}\,د ص$ قوس طويلة

$= 3\int د ص + \int \frac{6}{ص^2 + ص - 2}\,د ص$ كسور جزئية

$\frac{6}{(ص+2)(ص-1)} = \frac{أ}{ص+2} + \frac{ب}{ص-1}$

$6 = أ(ص-1) + ب(ص+2)$

$ص = 1 \leftarrow 6 = 3ب \leftarrow ب = 2$

$ص = -2 \leftarrow 6 = -3أ \leftarrow أ = -2$

اكمل ب

$3ص - 2\,لو_هـ|ص+2| + 2\,لو_هـ|ص-1| + ج$

نرجع ص

---

٢٦) $\int \frac{\sqrt{9س + 27} - 3}{\sqrt{4س + 12} + 2س + 6}\,د س$

الحل : $\int \frac{3\sqrt{س+3} - 3}{2\sqrt{(س+3)} + (س+3)}\,د س$

$= \frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{س+3} - 3}{\sqrt{س+3} + (س+3)}\,د س$

$ص = \sqrt{س+3} \leftarrow ص^2 = س + 3$

$2ص\,د ص = د س$

$\frac{3}{2}\int \frac{ص - 1}{ص + ص^2} \times 2ص\,د ص$

$= 3\int \frac{ص - 1}{ص(1 + ص)}\,د ص$

قوس طويلة

$= 3\int (1 + \frac{-2}{ص+1})\,د ص$

$= 3(ص - 2\,لو_هـ|ص+1|) + ج$ نرجع ص

٢٧) $\int \frac{د س}{س^{٢} \times \sqrt{س^{٢}+١}}$ ، س > ٠

الحل : حامل مشترك أكبر

$= \int \frac{د س}{س^{٤} \sqrt{س^{٢}(١+س^{٢})}}$

$= \int \frac{د س}{س^{٣}(١+س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$ ∵ س > ٠

ص = $١+س^{٢}$ ← $د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$\int \frac{١}{س^{٣} ص^{\frac{١}{٢}}} \times \frac{د ص}{٢ س}$

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{ص^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} + جـ = -(١+س^{٢})^{\frac{١}{٢}} + جـ$

٢٨) $\int \frac{(س^{٣}-٤س+٤)^{\frac{٥}{٢}}}{س^{٧}} د س$ ، س > ٢

الحل

$\int \frac{((س-٢)^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}{س^{٧}} د س$

$= \int \frac{(س-٢)^{٥}}{س^{٧}} د س$

$= \int \frac{(س-٢)^{٥}}{س^{٥} \times س^{٢}} د س$

$= \int (\frac{س-٢}{س})^{٥} \times س^{-٢} د س$

$= \int (١-٢س^{-١})^{٥} \times س^{-٢} د س$

ص = $١-٢س^{-١}$ ← $د س = \frac{د ص}{٢ س^{-٢}}$

$\int ص^{٥} \frac{د ص}{٢}$

$= \frac{١}{١٢} ص^{٦} + جـ$ (نرجع ص)

٢٩) إذا علمت أن

ع ن = $\int ظتا^{ن} س \, د س$ اثبت

أن ع ن = $\frac{- ظتا س^{ن-١}}{ن-١} - ع_{ن-٢} + جـ$ ، ن ≠ ١

الحل

ع ن = $\int ظتا^{٢} س \, ظتا^{ن-٢} س \, د س$

= $\int (قتا^{٢} س - ١) ظتا^{ن-٢} س \, د س$

= $\int قتا^{٢} س \, ظتا^{ن-٢} س \, د س - \int ظتا^{ن-٢} س \, د س$

ص = $ظتا س$ ← $د س = \frac{د ص}{-قتا^{٢} س}$

= $\int قتا^{٢} س \, ص^{ن-٢} \frac{د ص}{-قتا^{٢} س} - ع_{ن-٢}$

= $-\frac{ص^{ن-١}}{ن-١} - ع_{ن-٢} + جـ$

= $-\frac{١}{ن-١} ظتا^{ن-١} س - ع_{ن-٢} + جـ$

٣٠) $\int \frac{س}{س^{٤}+٣س^{٢}+٢} د س$

الحل

ص = $س^{٢}$ ← $د س = \frac{د ص}{٢ س}$

$\int \frac{س}{ص^{٢}+٣ص+٢} \times \frac{د ص}{٢ س}$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{(ص+٢)(ص+١)} د ص$

بسود جزئيًا

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ص+٢| + \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ص+١| + جـ$

(نرجع ص)

مكثف : التكامل وتطبيقاته

تدريبات (٢) للطالب

١) $\int \frac{د س}{س + ٦ س^{-١} + ٥}$

٢) إذا علمت أن ق(١) = ٤ ، ق(هـ) = ٢
وكان $\int_{١}^{هـ} ق(س)\, د س = ١$ ،
جد $\int_{١}^{٢} هـ^{س} \, ق'(\sqrt{هـ^{س}})\, د س$

٣) $\int ق(س) \, لو_{هـ} م'(س) \, د س$
م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س)

٤) $\int \frac{د س}{\sqrt{١ - \sqrt{س}}}$ ، س > ٠

٥) $\int \frac{س \, جا س}{قا س} \, د س$

٦) $\int قا^{٤} س \, لو_{هـ} ظا^{٥} س \, د س$

٧) إذا علمت أن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \geq -١ \\ ٧ - س & ، س < -١ \end{cases}$$

جد :

أ) $\int_{-١}^{١} ق(٣س + ٢) \, د س$

ب) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جا ٢س \, ق'(جا س) \, د س$

٨) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{قا^{٢} س \, جتا س - جتا س} \, د س$

٩) $\int \sqrt{١ + هـ^{س}} \, د س$

١٠) $\int جا ٢س \, لو_{هـ} \sqrt{جتا س} \, د س$

١١) $\int (قتا س + ظتا س)^{٧} \, قتا س \, د س$

١٢) أثبت أن

$$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س - ٢س + ١)^{\frac{ن}{٢}}}{س^{ن+٢}} \, د س = \frac{١}{ن + ١} \qquad ن \neq -١$$

خامساً : المساحات

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين
ص = س²، ص = س + ٢، ص = ٢ - س
في الربع الأول .

الحل نجد التقاطعات ..

١) $س^2 = س + 2 \leftarrow س^2 - س - 2 = 0$

$(س - 2)(س + 1) = 0$

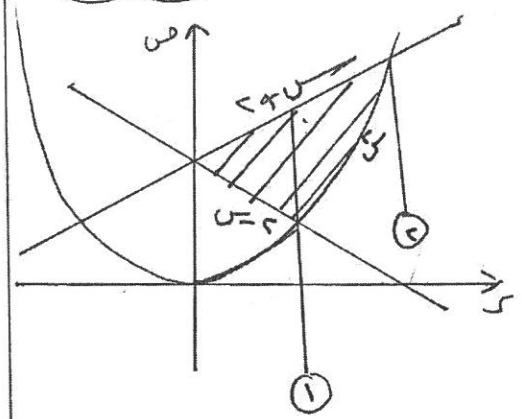
$س = 2$ ، $س = -1$ ✗ الأول

٢) $س^2 = 2 - س \leftarrow س^2 + س - 2 = 0$

$(س + 2)(س - 1) = 0$

$س = -2$ ✗ ، $س = 1$ الأول

٣) $س + 2 = 2 - س \leftarrow س = 0$



المساحة $= \int_0^1 (س + 2) - (2 - س) \, د س$

$+ \int_1^2 (س + 2) - س^2 \, د س$

$= \frac{13}{6}$ وحدة مربعة

٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين
ق(س) = - س ، هـ(س) = $\sqrt{2 - س}$
ومحور السينات

الحل نجد التقاطعات ..

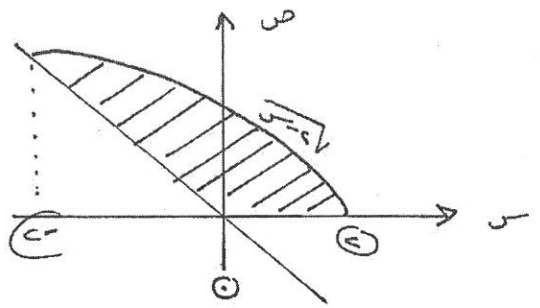
١) $ق = هـ \leftarrow س = \sqrt{2 - س}$ نربع

$س^2 = 2 - س \leftarrow س^2 + س - 2 = 0$

$(س + 2)(س - 1) = 0 \leftarrow س = 1 ، -2$

٢) $ق = 0 \leftarrow س = 0$

٣) $هـ = 0 \leftarrow س = 2$



المساحة $= \int_{-2}^{0} (2 - س)^{\frac{1}{2}} - (-س) \, د س$

$+ \int_{0}^{2} (2 - س)^{\frac{1}{2}} - 0 \, د س$

$= \left[\frac{(2 - س)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-س^2}{2} \right]_{0}^{2} + \left[\frac{(2 - س)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} \right]_{0}^{2}$

$= \frac{10}{3}$ وحدة مربعة

٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = $\sqrt{٨س}$ ، ل(س) = ٤

الحل

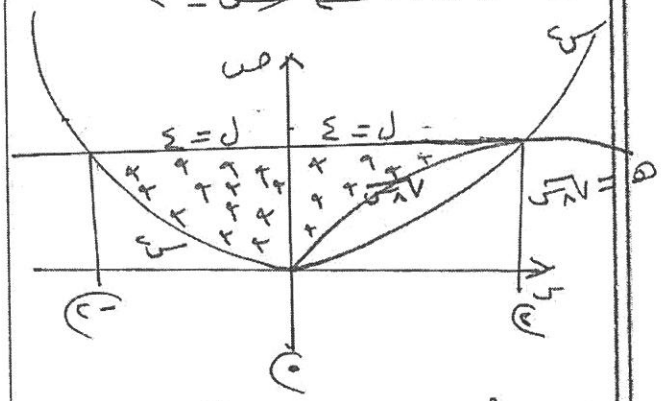
١) ق = هـ ← س^{٤} = $\sqrt{٨س}$ تربيع

س^{٤} − ٨س = ٠ ← س = ٠ ، ٢

٢) ق = ل ← س^{٤} = ٤ ← س = −٢ ، ٢

٣) هـ = ل ← $\sqrt{٨س}$ = ٤ تربيع

٨س = ١٦ ← س = ٢



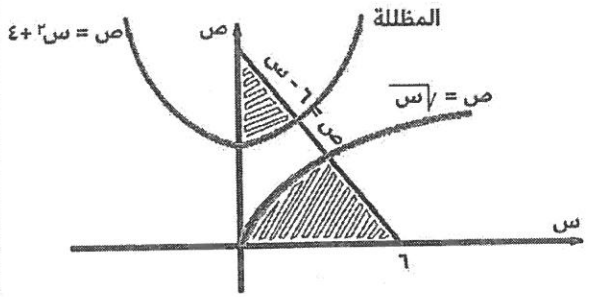
$$م = \int_{-٢}^{٠} (٤ - س^{٤}) د س + \int_{٠}^{٢} (٤ - \sqrt{٨س}) د س$$

$$= ٨ - \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{(٨س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٨} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= ٨ - (٠ + \frac{٨}{٣}) + ٨ - \frac{٦٤}{١٢}$$

= ٨ وحدة مربعة

٤) احسب مساحة المنطقة المظللة



الحل : نجد التقاطعات ..

١) س^{٢} + ٤ = ٦ − س ← س^{٢} + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠ ← س = −٢ ، ١

٢) $\sqrt{س}$ = ٦ − س تربيع ← س = ٣٦ − ١٢س + س^{٢}

س^{٢} − ١٣س + ٣٦ = ٠

(س − ٤)(س − ٩) = ٠

س = ٤ ✓ ، س = ٩ ✗ أقل من ٦

٣) س + ٦ = ٠ ← س = −٦

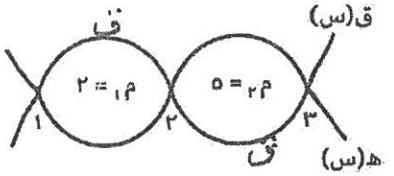
المساحة

$$م = \int_{٠}^{٤} (٦ - س) - (س^{٢} + ٤) د س + \int_{٤}^{٦} (٦ - س) - ٠ د س$$

$$= \frac{١٧}{٣}$$ وحدة مربعة

مكثف : التكامل وتطبيقاته

٥) من الشكل المجاور



جد $\int_{-٣}^{١}$ (هـ(س) - ق(س)) دس

الحل

$م_١ = ٢ = \int_{١}^{٢}$ (هـ(س) - ق(س)) دس

$\therefore \int_{١}^{٢}$ (هـ(س) - ق(س)) دس = -٢

$م_٢ = ٥ = \int_{٢}^{٣}$ (هـ(س) - ق(س)) دس

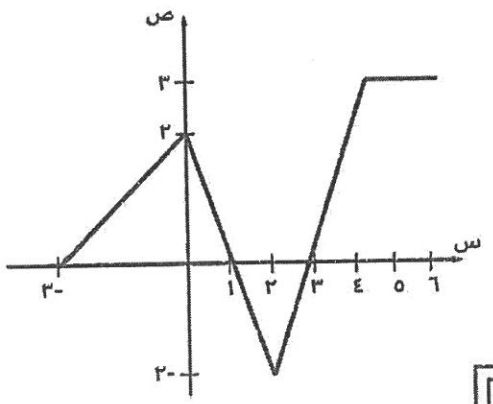
$\therefore \int_{١}^{٣}$ هـ - ق = $\int_{١}^{٢}$ هـ - ق + $\int_{٢}^{٣}$ هـ - ق

= -٢ + ٥ = ٣

$\therefore \int_{-٣}^{١}$ (هـ - ق) دس = -٣

---

٦) من الشكل المجاور لمنحنى ق(س)



جد:

١) $\int_{-٣}^{٦}$ ق(س) دس

الحل نحسب مساحة الأشكال

$م_١ = \frac{١}{٢}$ (١ - -٣)(٢) = ٤

$م_٢ = \frac{١}{٢}$ (٣ - ١)(٢) = ٢

$م_٣ = \frac{١}{٢}$ (٤ - ٣)(٣) = $\frac{٣}{٢}$

$م_٤$ = (٦ - ٤)(٣) = ٦

$\int_{-٣}^{٦}$ ق(س) دس = ٤ - ٢ + ٥و١ + ٦

= ٩,٥

٢) $\int_{-٣}^{٦}$ |ق(س)| دس

الحل

= ٤ + ٢ + $\frac{٣}{٢}$ + ٦

= ١٣و٥

٣) قيمة أ حيث $\int_{-٣}^{أ}$ ق(س) دس = ٣,٥
أ ∈ {١، ٣، ٤، ٦}

بالتجريب

$\int_{-٣}^{٤} = \int_{١}^{٢}$ + $\int_{٣}^{٤}$

= ٤ - ٢ + ١و٥ = ٣,٥

∴ (م = ٤)

٤) $\int_{-3}^{3} س^3 \, ق'(س^2 - 3) \, د س$

الحل :

$ص = س^2 - 3 \longleftarrow د ص = د س$

تغير الحدود

$س = -3 \longleftarrow ص = 6$

$س = 3 \longleftarrow ص = 6$

$\int_{-3}^{3} س^3 \, ق'(ص) \, \frac{د ص}{د س} = \int_{-3}^{6} \frac{1}{2}(ص+3) \, ق'(ص) \, د ص$

بالأجزاء

$ق = \frac{1}{2}(ص+3) \longleftarrow د ق = \frac{1}{2} د ص$

$د هـ = ق'(ص) د ص \longleftarrow هـ = ق(ص)$

$= \frac{1}{2}(ص+3) ق(ص) \Big]_{-3}^{6} - \int_{-3}^{6} \frac{1}{2} ق(ص) \, د ص$

$= \frac{27}{2} - \frac{19}{2} - \frac{35}{4}$

تدريبات (٣) للطالب

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين

$ق(س) = \frac{1}{س^2}$ ، $هـ(س) = س^2$ ، $ل(س) = 4$

أ) في الربع الثاني
ب) في الأول ومحور الصادات

---

٢) المساحة بين $ق(س) = س^3$
$هـ(س) = س^2 + 4$ ، $ل(س) = -4س$

٣) $ق(س) = س^2 - 1$ ، $هـ(س) = س + 5$
$ل(س) = س + 1$ ومحور الصادات في الربع الثاني

---

٤) $ق(س) = س^2 - 4$ ، $هـ(س) = 2س + 4$
والمحورين في الربع الأول

---

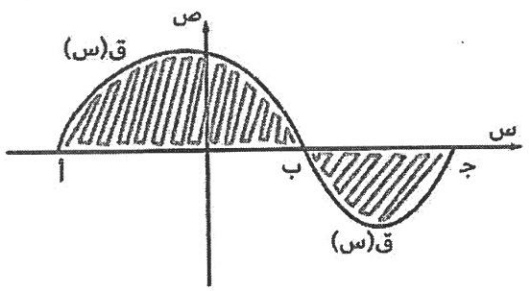
٥) $ق(س) = 3س^2 - 4س$
$هـ(س) = 3س^2 + 4س$
والمستقيم ص = -٢

---

٦) المساحة بين $ق(س) = جا س$
$هـ(س) = جتا س$
والمستقيم ص = ٢ في الفترة $[0 ، \pi]$

---

٧) يعبر عن المساحة الموضوعة بالشكل التالي :



أ) $2 \int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س$

ب) $\int_{أ}^{ب} \vec{ق}(س) \, د س$

جـ) $\int_{أ}^{ب} |\vec{ق}(س)| \, د س$

د) $2 \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, د س$

سادساً : المعادلات التفاضلية

١) يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة
ت(ن) = $\frac{1}{\sqrt[3]{ن}}$ جد المسافة المقطوعة بعد
مرور ٨ ثوان علماً بأن الجسيم تحرك من
السكون وأن ف(١) = $\frac{9}{10}$ م

الحل

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{1}{ن^{\frac{1}{3}}} \leftarrow ع = \int ن^{-\frac{1}{3}} د ن$

$ع = \frac{3}{2} ن^{\frac{2}{3}} + ج$ ، $ع(0) = 0 \Leftarrow ج = 0$

$ف = \int \frac{3}{2} ن^{\frac{2}{3}} د ن$

$ف(ن) = \frac{9}{10} ن^{\frac{5}{3}} + ج$ ، $ف(1) = \frac{9}{10}$

$ج = 0 \Leftarrow ف(8) = \frac{144}{5}$ م

---

٢) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة
ع = $\frac{1}{ت^2}$ ع ، ت > ٠
إذا كانت السرعة الابتدائية = ١ م/ث وأن الموقع
الابتدائي = $\frac{2}{3}$ م ، جد ف(٣)

الحل

$ن = \frac{1}{ع^2} \Leftarrow ع^2 = ن \Leftarrow ع = \sqrt{ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{1}{2\sqrt{ن}}$

$\int 2ع \, د ع = \int د ن$

تكامل $\Leftarrow ع^2 = ن + ج$

$ع(0) = 1 \leftarrow ج = 1$

$ع^2 = ن + 1 \Leftarrow ع = \sqrt{ن + 1}$

$\int د ف = \int (ن + 1)^{\frac{1}{2}} د ن$

$ف(ن) = \frac{2}{3}(ن + 1)^{\frac{3}{2}} + ج$

$ف(0) = \frac{2}{3} \leftarrow ج = 0$

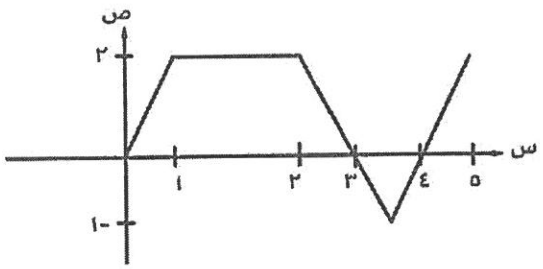
$ف(ن) = \frac{2}{3}(ن + 1)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore ف(3) = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{16}{3}$ م

---

٣) الشكل التالي يمثل العلاقة بين السرعة والزمن
لجسم يتحرك على خط مستقيم



أ) جد المسافة المقطوعة في الفترة [٠ ، ٥]

الحل

$ع_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$ع_2 = (2 - 1)(2) = 2$

$ع_3 = \frac{1}{2}(3 - 2)(2) = 1$

$ع_4 = \frac{1}{2}(4 - 3)(1) = 0.5$

$ع_5 = \frac{1}{2}(5 - 4)(2) = 1$

المسافة دائماً موجبة = |١ + ٢ + ١ + ٠٫٥| + |١ + ٠٫٥|
= ٥ و٥

ب) الإزاحة في الفترة [٠ ، ٥]

الإزاحة = ١ + ٢ + ١ − ٠٫٥ + ١

= ٤٫٥

---

٤) جد حل المعادلة التفاضلية
(س − ص٢ س) د س = (ص − س٢ ص) د ص

الحل

س (١ − ص٤) ﻫس = ص (١ − س٤) ﻫص

$$\frac{س\ ﻫ^{س}}{١ - س^{٤}} = \frac{ص}{١ - ص^{٤}}\ ﻫص$$

$$-\frac{١}{٢} \log_{ﻫ} |١ - ص^{٢}| = -\frac{١}{٢} \log_{ﻫ} |١ - س^{٢}| + جـ$$

× −٢ ← $\log_{ﻫ} |١ - ص^{٢}| = \log_{ﻫ} |١ - س^{٢}| + جـ$

---

٥) جد حل المعادلة التفاضلية
ﻫ^س ظا ص د س + (١ − ﻫ^س) قا٢ ص د ص = ٠

الحل

ﻫ^س ظا ص ﻫس = (ﻫ^س − ١) قا٢ ص ﻫص

$$\frac{ﻫ^{س}}{ﻫ^{س} - ١}\ ﻫس = \frac{قا^{٢} ص}{ظا ص}\ ﻫص$$

$\log_{ﻫ} |ﻫ^{س} - ١| + جـ = \log_{ﻫ} |ظا ص|$

٦) تصب حنفية في خزان وفق العلاقة

$$\frac{د ع}{د ن} = أ ع$$

حيث ع : كمية الماء في الخزان بعد ن ساعة
ن : الزمن بالساعة
أ : ثابت ≠ ٠

فإذا زادت كمية الماء من ٤٠٠ لتر إلى ١٢٠٠ لتر خلال ساعتين جد كمية الماء في الخزان بعد مرور ٦ ساعات .

الحل :

نحل المعادلة التفاضلية :

$$\left.\frac{د ع}{ع}\right\} = أ\ د ن$$

$$\log_{ﻫ} |ع| = أ ن + جـ$$

ع (٠) = ٤٠٠ ← $\log_{ﻫ}$ ٤٠٠ = جـ

$$ع = ﻫ^{(أ ن + \log_{ﻫ} ٤٠٠)} = ٤٠٠\ ﻫ^{أ ن}$$

ع (٢) = ١٢٠٠ ⟸ ١٢٠٠ = ٤٠٠ $ﻫ^{٢أ}$

$ﻫ^{٢أ} = ٣$

∴ ع (٦) = ٤٠٠ $ﻫ^{٦أ}$ = ٤٠٠ $(ﻫ^{٢أ})^{٣}$

= ٤٠٠ × $(٣)^{٣}$

= ١٠٨٠٠ لتر

مكثف : التكامل وتطبيقاته

٧) يذوب الملح بالماء بمعدل يتناسب مع كمية الملح المتبقية وفق العلاقة $\frac{د ع}{د ن} = أ ع$

فإذا وضع ١٠ كغم من الملح فذاب نصفه بعد ربع ساعة جد كمية الملح المتبقية بعد $(\frac{٣}{٤})$ ساعة علماً بأن :

ع : كمية الملح المتبقية (لم تذوب)

ن : الزمن بالساعة ، أ : ثابت

الحل :

حل المعادلة التفاضلية ..

$\frac{د ع}{ع} = أ د ن$

$\ln ع = أ ن + جـ$

$ع(٠) = ١٠ \Leftarrow \ln ١٠ = جـ$

$\ln ع = أ ن + \ln ١٠ \Leftarrow ع = ١٠ e^{أ ن}$

$ع(١) = ١٠ e^{أ}$

$ع(\frac{١}{٤}) = ٥ \Leftarrow ٥ = ١٠ e^{\frac{١}{٤} أ}$

$e^{\frac{١}{٤} أ} = \frac{١}{٢}$

$ع(\frac{٣}{٤}) = ١٠ e^{\frac{٣}{٤} أ} = ١٠ (e^{\frac{١}{٤} أ})^{٣}$

$= ١٠ (\frac{١}{٢})^{٣} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ كغم

تدريبات (٤) للطالب

١) يتحرك جسيم في المستوى الديكارتي وفق العلاقة ت = $\frac{١٠}{أ ع}$ أ ، ع > ٠

جد أ حيث الجسم تحرك من السكون مبتدأً من نقطة الأصل وأن ف(٢) = $\frac{٨}{٣}$ وحدة

---

٢) يتحرك جسم في خط مستقيم وفق العلاقة ت = ع ، ع > ٠ ، فإذا كانت سرعته الابتدائية ٢ م/ث وأن ف ($\ln_{هـ}$ ٢) = ٥ م ، جد المسافة المقطوعة بعد $\ln_{هـ}$ ٣ ثانية .

---

٣) إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى علاقة يعطى $\frac{١}{\ln_{هـ}(س + ص - ١)}$

جد قاعدة العلاقة علماً بأن منحناها يمر (١ ، ٠)

موقع الأوائل

AWA2EL LEARN 2 BE

www.awa2el.net

مكثف/التكامل وتطبيقاته

أ. ماهر ضمرة

أسئلة ص(٢)

١) $ق(س) = \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{1}{هـ^{س}} + \frac{1}{2} لو_{هـ}(1+س)$

$ق(س) = 1 + هـ^{-س} + \frac{1}{2} لو_{هـ}(1+س)$

$ق'(س) = -هـ^{-س} + \frac{1}{2(1+س)}$

$ق'(٠) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (ب)

٢) $ق(س) = (3)^{2س+4} \times (2)^{س} + هـ^{س} + لو_{هـ}3$

$ق(س) = 3^{(2س+4)} + 2^{س} + لو_{هـ}3$

$ق'(س) = 3^{(2س+4)} \times لو_{هـ}3 \times 2 + 2^{س} + 0$

$ق'(٠) = 2 لو_{هـ}3 + 1$ (أ)

٣) نشتق الطرفين.

$ق(ق(س)) = جتاس$

$ق'(ق(س)) \times ق'(س) = -جتاس$

$ق'(ق(س)) = \frac{-جتاس}{ق'(س)}$

$ق'(٠) = \frac{-1}{1} = -1$ (د)

٤) $ص = م هـ^{مس}$

$ص' = م^{2} هـ^{مس}$ نطبق

$م^{2} هـ^{مس} + م هـ^{مس} - 6 هـ^{مس} = ٠$

$هـ^{مس}(م^{2} + م - 6) = ٠$

$هـ^{مس} \neq ٠ \Leftarrow (م+3)(م-2) = ٠$

$م = -3$ ، $م = 2$ (أ)

٥) نشتق الطرفين.

$ق(س) + ظاس \cdot ق'(س) = قاس + \frac{ق'(س)}{ق(س)} (هـ^{ق(س)} + 1)$

$ق(س) + ظاس \cdot ق'(س) = قاس + ق'(س) \times هـ^{ق(س)} \times جاس$

$ق(س) = 1 + هـ^{ق(س)} جاس$ نشتق

$ق'(س) = هـ^{ق(س)} جاس + هـ^{ق(س)} جتاس$

$ق'(١) = هـ + هـ = 2هـ$ (أ)

٦) المطلق لا يؤثر

$ق(س) = \frac{قاس ظاس + قاس}{قاس + ظاس}$

$ق(س) = \frac{قاس(ظاس + قاس)}{قاس + ظاس}$

$ق(س) = قاس$

$ق(٠) = 1$ (ج)

مكثف/التكامل وتطبيقاته

أ. ماهر ضمرة

ص٦

١) $\int (\text{ظتا}^2 س - \text{جا}^2 س)(\text{ظتا}^2 س + \text{جا}^2 س)\, د س$

$= \int \text{ظتا}^2 س \, د س = \frac{1}{2}\text{جا} 2س + ج$ (ج)

٢) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\text{جا} س + \text{جتا} س|}{\text{جا} س + \text{جتا} س} \, د س$

$= \frac{\pi}{2}$ (د)

٣) $\int \frac{س(\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س)}{س^3} \, د س$

$= \int س^{-\frac{4}{3}} \, د س = \frac{3}{5} س^{\frac{5}{3}} + ج$ (ب)

٤) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\text{جا} س + 1 - 2\text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جا}^2 س} \, د س$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\text{جتا} س| \, د س$

$= -\text{جا} س \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(0 - 1) = 1$ (ب)

ص٨

١) $(م_1 - م_2)(3) = 12$

$(م_1 - م_2 = 4)$

$\therefore \int_0^{\sqrt{7}} -4 س \, د س = -ع س^2 \Big]_0^{\sqrt{7}} = -48$ (د)

٢) $م(س) = \int م'(س) \, د س$ (لو للطرفين)

$م(س) = \text{لو}_{هـ} (م س^2 - ع س)$ نشتق

$م'(س) = \frac{م 2س - ع}{م س^2 - ع س}$

$م'(1) = \frac{2م - ع}{م - ع} = 3$

$3م - 3ع = 2م - ع \leftarrow م = 2ع$ (ب)

٣) $هـ(س) = 2\text{جا} س + \text{جتا} س + ج$

$هـ(0) = 1 + ج = 5 \leftarrow ج = 4$

$هـ(\pi) = 0 - 1 + 4 = 3$ (ب)

٤) $م(س) = 3س^2 + س + م$

$م(1) = 3 \leftarrow م = 3$

$\therefore هـ - م = 4 - 3 = 1$

$\int س^2 \, د س = \frac{س^3}{3} + ج$ (ج)

٢٠ (٥×ب) ٦ (د)

مكثف/التكامل وتطبيقاته

أ. ماهر ضمرة

خصائص التكامل المحدد

١) $\int_{٢}^{٢} f(س)\,دس = ٢$

$\int_{٣}^{١} f(س)\,دس = ٦$

$ص = ٢س + ١ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢}$

$١ \leftarrow ١ \quad ٣ \leftarrow ٣$

$= \frac{١}{٢}\left(\int_{١}^{٣} f(ص)\,دص + \int_{٢}^{٣} f(ص)\,دص\right)$

$= \frac{١}{٢}(٦ - ٢) = ٢$ ✓

٢) $f(س) \geq ٠ \Rightarrow f^{٢}(س) \geq ١٦$

$f^{٢}(س) + ١ \geq ١٧$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} (f^{٢}(س) + ١)\,دس \geq ٣٤$ ✓

٣) $جاس \geq ١ \quad ٠ \leq ٢س \leq ٣\pi$

$٣ - ٢جاس \geq ١$

$\therefore \int_{٠}^{٣\pi} (٣ - ٢جاس)\,دس \geq ٣\pi$ ✓

٤) $f(س) \geq ٣ \Rightarrow f(س) \geq ١ \Rightarrow f^{٢}(س) \geq ٩$

$\int_{-٢}^{٢} ٣\,دس \leq \int_{-٢}^{٢} f^{٢}(س) + ٢\,دس \leq \int_{-٢}^{٢} ١١\,دس$

$٢٤ \leq$ ✓ ≤ ٤٤

$٨ \leq$

٥) $f(س) \geq ٠$ على $[-٢، ٢]$

نفرض $٣ث^{٣} + ١ = ٣f(س) + ١ \geq ١$

$\Leftarrow$ تكامل $\geq$ ✓ ≥ ٠

٦) $\int_{م}^{ب} f(س)\,دس + \int_{ب}^{ج} f(س)\,دس + \int_{ج}^{د} f(س)\,دس = ٢٠$

$\int_{م}^{ب} f(س)\,دس + \int_{ب}^{د} f(س)\,دس = ٠$

$\int_{م}^{ب} f(س)\,دس = ٣\int_{ب}^{د} f(س)\,دس$

$\therefore ٤\int_{ب}^{د} f(س)\,دس = ٢٠ \Leftarrow \int_{ب}^{د} f(س)\,دس = ٥$

$\therefore \int_{م}^{ب} f(س)\,دس = ١٥$ ✓

٧) نفرض

$\int_{٠}^{٢} هـ^{س}\,دس + \int_{٢}^{٤} هـ^{س}\,دس = ٤ + ٤$

✓

٨) نفرب التعريف

	١		٣	
	−	−	+	+

$س = ٢$

$\int_{١}^{٣} (هـ - هـ^{س-١})\,دس + \int_{٣}^{٤} (هـ^{س-١} - هـ)\,دس$

$= هـ - \left[\frac{هـ^{س-١}}{١}\right]_{١}^{٣} + \left[\frac{هـ^{س-١}}{١}\right]_{٣}^{٤} - هـ$

$= هـ - (هـ^{٢} - هـ^{٠}) + (هـ^{٣} - هـ^{٢}) - هـ$

$= هـ^{٣} + هـ^{٠} - هـ$ ✓

٩) الصورة $س = ص$ ، $ع$ تخارج

$$\int_{م}^{ك} 6 ص + ص^{2} \, د ص = 18$$

$$\int_{ك}^{ع} (ك - م) 6 + ص^{2} \, د ص = 18$$

$$\left[6 ص (ك - م) + \frac{ص^{3}}{3} \right]_{ك}^{ع} = 18$$

$$6 (ع - م) + \frac{ع^{3}}{3} - 12 + 6م = 18$$

$$2ع^{3} + 36ع - 72 + 36م = 54$$

$$2ع^{3} + 36ع + 36م = 126$$

$$ع^{3} + 18ع + 18م = 63$$

$$ع^{3} + 18ع + 18 = 63$$

$$ع^{3} + 18ع - 45 = 0$$

$$(ع + 3)(ع^{2} - 3ع + 15) = 0$$

$$ع = -3$$

$$م = 1$$

ب)

١٠) $\int_{1}^{ع} \frac{ص^{3} (ص^{3} - 1)}{ص^{3} - 1} \, د ص$

$$= \int_{1}^{ع} ص^{3} \, د ص = \frac{3}{4} ص^{4} \Big]_{1}^{ع} = \frac{3}{4} (ع^{4} - 1)$$

$$= \frac{15}{4}$$

تدريبات (٢١) (ص ٢١)

١) $\int \frac{د س}{س^{3} + 6س^{2} + 5س} \times \frac{س}{س}$

$$= \int \frac{س}{س^{3} + 6س^{2} + 5} \, د س$$

جزئيات

$$\frac{س}{(س + 3)(س + 2)} = \frac{م}{س + 3} + \frac{ب}{س + 2}$$

$$س = م(س + 2) + ب(س + 3)$$

$$س = -2 \Leftarrow ب = -2$$

$$س = -3 \Leftarrow -3 = -م \Leftarrow م = 3$$

$$م = 3$$

$$\therefore \int \frac{س}{س^{3} + 6س^{2} + 5} \, د س = \int \frac{3}{س + 3} \, د س + \int \frac{-2}{س + 2} \, د س$$

$$= 3 \ln|س + 3| - 2 \ln|س + 2| + ح$$

٢) نفرض ص

ص = $\sqrt{هـ^{س}}$ ← ص^{٢} = هـ^{س}

٢ ص ص = هـ^{س} ص س

∴ ص س = $\frac{٢ ص ص}{هـ^{س}}$

س = صفر ← ص = ١

س = ٢ ← ص = هـ

$\int_{١}^{هـ} \frac{هـ^{س}}{ص} \times ٢ ص \, ص$

= $\int_{١}^{هـ} ٢ ص \times \frac{١}{ص} ص$ أجزاء

ع = ٢ ص ← ص ع = ٢ ص

ص هـ = ص^{٢} ← هـ = ص

= [٢ ص^{٢}]$_{١}^{هـ}$ − $\int_{١}^{هـ} ٢ ص \, ص$

= ٢ هـ^{٢} − ٢ ص^{٢}]$_{١}^{هـ}$

= ٢ هـ^{٢} − ٢ − ٢ = ٢ هـ^{٢} − ٤

= ٢ هـ^{٢} − ٨ − ٢ = ٢ هـ^{٢} − ١٠

---

٣) نشط التكامل

$\int$ ٢ هـ^{س} لو$_{هـ}$ ٣ س ص س

ع = لو$_{هـ}$ ٣ س ← ص ع = $\frac{هـ(س)}{م(س)}$ ص س

ص هـ = ٢ هـ^{س} ص س ← هـ = ٢ م(س)

= ٢ م(س) لو$_{هـ}$ ٣ س − $\int$ ٢ هـ^{س} ص س

= ٢ م(س) لو$_{هـ}$ ٣ س − ٢ م(س) + جـ

---

٤) نفرض أ

ص = ١ − $\sqrt{س}$ ← $\frac{ص ص}{ص س}$ = $\frac{-١}{٢\sqrt{س}}$

ص س = −٢ $\sqrt{س}$ ص ص

$\int \frac{-٢\sqrt{س}}{٣\sqrt{س}} ص ص$

لكن $\sqrt{س}$ = ١ − ص

= $\int \frac{-٢(١-ص)}{٣\sqrt{س}} ص ص$

= −٢ $\int$ (ص$^{-\frac{١}{٢}}$ − ص$^{\frac{٢}{٣}}$) ص ص

= −٢ (٣ ص$^{\frac{١}{٢}}$ − $\frac{٣}{٥}$ ص$^{\frac{٥}{٣}}$) + جـ

نرجع ص

٥) $\int$ جا س جتا س د س

$= \int \frac{1}{2}$ جا ٢س د س

$ه = \frac{1}{2}$ س $\Rightarrow$ د ه $= \frac{1}{2}$ د س

د ه $=$ جا ٢س د س $\Rightarrow$ ه $= -\frac{\text{جتا ٢س}}{2}$

$= -\frac{1}{4}$ س جتا ٢س $+ \frac{\text{جا ٢س}}{8} + ج$

٦) $\int$ قا^4 س ظا س د س

نفرض ص $=$ ظا س $\Rightarrow$ د ص $=$ قا^2 س د س

$= \int$ قا^2 س قا^2 س د س

$= \int (1 + ص^2)$ د ص

$= ص + \frac{ص^3}{3} + ج$

٧) أ) ص $= ٣س + ٢ \Rightarrow$ د س $= \frac{\text{د ص}}{3}$

$-١ \longleftarrow -١$	$\int_{-١}^{٥} ه(ص)$ د ص $= \int_{-١}^{٥} \frac{ص - ٢}{3}$ د ص
$٥ \longleftarrow ١$	$= \frac{1}{3} \left[\frac{ص^2}{2} - ٢ص\right]_{-١}^{٥} = ٨$

ب) ص $=$ جا س $\Rightarrow$ د س $= \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$

$٠ \longleftarrow ٠$	$\int_{٠}^{١}$ ٢جا س جتا س ه(ص) $\frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}}$
$\frac{\pi}{2} \longleftarrow ١$	$= \int_{٠}^{١}$ ٢ص ه(ص) د ص

ه $= ٢ص \Rightarrow$ د ه $= ٢$ د ص

ه $=$ ه(ص) د ص $\Rightarrow$ ه $=$ ه(ص)

$= ٢ص$ ه(ص) $- \int_{٠}^{١}$ ٢ ه(ص) د ص

$= ٢ \times ١ \times ٢ - ٢ \int_{٠}^{١}$ ٢ص د ص

$= ٤ - ٢ص^2 \Big]_{٠}^{١} = ٢$

٨) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا س ظا س (قا س -١) د س

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا س ظا س قا س د س $-$ الأول

ص $=$ جتا س $\Rightarrow$ د س $= \frac{\text{د ص}}{\text{جا س}}$

$= \int_{١}^{\frac{1}{2}} ص^2 \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{د ص}}{-\text{جا س}}$

$= \int_{١}^{\frac{1}{2}} \frac{ص^2}{ص}$ د ص $= ص^2 \Big]_{١}^{\frac{1}{2}} = ٢$

9) $ص = \sqrt{هـ^{س}+1} \Leftarrow ص^2 = هـ^{س}+1$

$2ص\,د ص = هـ^{س}\,د س \Leftarrow د س = \frac{2ص\,د ص}{هـ^{س}}$

$\int \frac{ص}{ص^2-1} \times \frac{2ص\,د ص}{هـ^{س}} = \int \frac{2ص^2}{ص^2-1}\,د ص$

$\int \left(2 + \frac{2}{ص^2-1}\right) د ص$ ← متوازية

$\frac{2}{(ص-1)(ص+1)} = \frac{م}{ص-1} + \frac{ن}{ص+1}$

$2 = م(ص+1) + ب(ص-1)$

$ص = 1 \Leftarrow 2 = 2م \Leftarrow م = 1$

$ص = -1 \Leftarrow 2 = -2ب \Leftarrow ب = -1$

$= 2ص + لو|ص-1| - لو|ص+1| + ج$

10) $\int \frac{1}{2} جا س \, لو_{هـ} جتاس \, د س$

$ص = جتاس \Leftarrow د س = \frac{د ص}{-جاس}$

$-\frac{1}{2}\int جاس \, لو_{هـ} ص \, د ص$ ← بالأجزاء

$= -\int ص \, لو_{هـ} ص \, د ص$ ← أجزاء

$ع = لو_{هـ} ص \Leftarrow د ع = \frac{1}{ص} د ص$

$د هـ = ص \, د ص \Leftarrow هـ = \frac{ص^2}{2}$

$= -\frac{1}{2} ص^2 لو_{هـ} ص + \frac{1}{4} ص^2 + ج$

نرجع لـ ص

11) $ص = ظتاس + ظتاس$

$د س = \frac{د ص}{-متاس - متاس ظتاس} = \frac{د ص}{-متاس(1+ظتاس ظتاس)}$

$\int ص^{\frac{1}{2}} \times متاس \times \frac{د ص}{-متاس \times ص^{\frac{1}{2}}}$

$= -ص + ج$ ← نرجع لـ ص

12) $\int \frac{1}{\sqrt{س}} \frac{((س-1)^{\frac{ن}{2}})}{س^{ن+2}}\,د س$

$= \int \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن+2}}\,د س$

$= \int \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}} \frac{(س-1)^{ن}}{س^{ن}} \times \frac{1}{س^2}\,د س$

$= \int \frac{1}{س^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{س-1}{س}\right)^{ن} \times \frac{1}{س^2}\,د س$

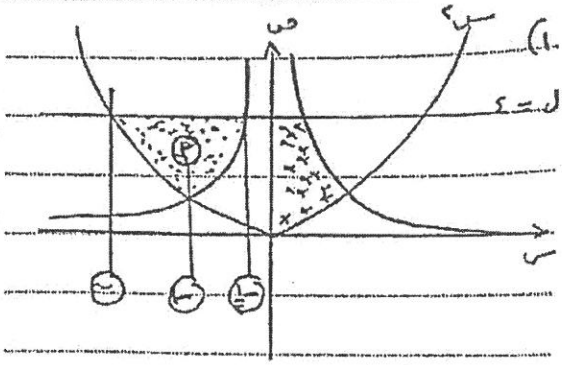
$ص = س^{-1} - 1 \Leftarrow د س = \frac{د ص}{-ص^2}$

$\frac{1}{2} \Leftarrow 1 \Leftarrow 0$

$\int_0^1 ص^{ن} \times س^{\frac{1}{2}} \times \frac{د ص}{-ص^2} = \int_0^1 ص^{ن} د ص$

$= \left[\frac{ص^{ن+1}}{ن+1}\right]_0^1 = \frac{1}{ن+1}$ *

تدريبات (٣)

١) 

$\frac{1}{ص} = ٤ \leftarrow س = \frac{1}{ص} \leftarrow ص = \frac{1}{س}$

$\frac{1}{ص} = س^{٢} \leftarrow س = ص^{\frac{1}{٢}}$

$س^{٢} = ٤ \leftarrow س = ٢ \leftarrow ص = ٢ - س$

$$م = \int_{-١}^{٢} (٤ - س^{٢}) \, د س + \int_{٢}^{٤} (٤ - \frac{1}{ص}) \, د ص$$

$$= ٤ - \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-١}^{٢} + ٢ + \left[٤ ص - \ln ص \right]_{٢}^{٤}$$

$$= ٤ - \frac{١}{٣} (٨ + ١) + ٢ + (١٦ - \ln ٤) - (٨ - \ln ٢)$$

$$= ٥ = \frac{١٥}{٣} = \frac{٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

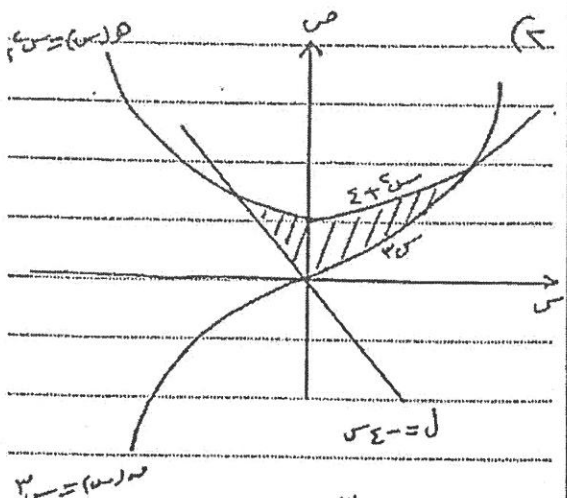
ب) $$م = \int_{\frac{1}{٤}}^{١} (٤ - س^{٢}) \, د س + \int_{١}^{٤} (\frac{1}{س} - س^{٢}) \, د س$$

$$= ٢ \left[٤ س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{\frac{1}{٤}}^{١} + \left[\ln س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{١}^{٤}$$

$$= ٢ \left(\frac{١}{٨} - ٤ \right) = (١ - ٢) - \frac{١}{٣} (١ - \frac{١}{٨})$$

$$= ٣ - \frac{١}{٤٨} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢٤}$$

$$= \frac{٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

٢) 

$س^{٢} + ٤ = س^{٣}$

$س^{٣} - س^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow$ (س = ٢)

$س^{٢} - س \cdot س^{٢} + ٤$

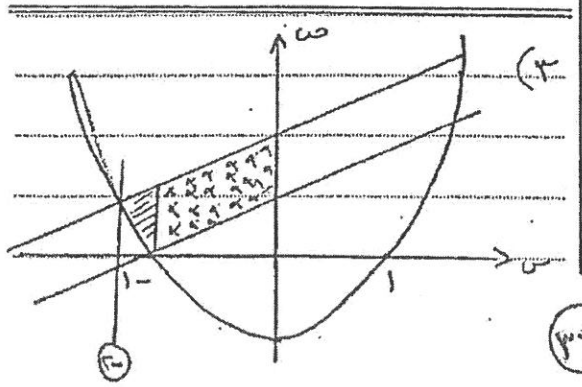
$س^{٢} + ٤ س + ٤ = ٠ \leftarrow$ (س = -٢)

$$م = \int_{-٢}^{٢} (س^{٢} + ٤ - س^{٣}) \, د س$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} + ٤ س - \frac{س^{٤}}{٤} \right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \frac{٨}{٣} + ٨ - ٤ + \frac{٨}{٣} + ٨ + ٤$$

$$= \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{٢٨}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

٣) 

$س^2 - 1 = س + 5 \Leftarrow س^2 - س - 6 = 0$

$(س - 3)(س + 2) = 0$

$س = 3 ، س = -2$

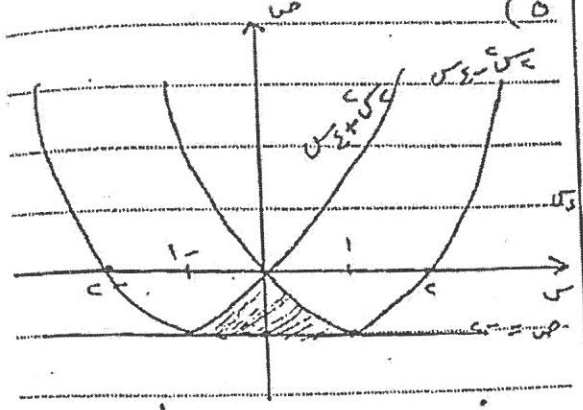
$م = \int_{-1}^{3} (5 + س) - (س^2 - 1) \, دس = \int_{-1}^{3} (6 + س - س^2) \, دس$

$= \left[6س + \frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{3} \right]_{-1}^{3}$

$= \left(18 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left(-6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$

$= 10 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{60 + 9 + 2}{6} = \frac{71}{6}$ وحدة مربعة

٥)



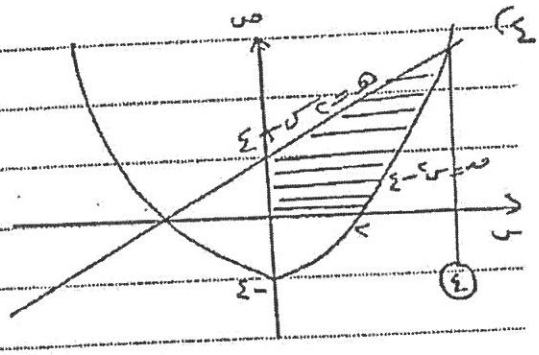
$م = \int_{0}^{1} (4س - س^2) - (س^2 - 4س) \, دس + \int_{1}^{2} (س^2 - 4س) - (4س - س^2) \, دس$

$= \left[2س^2 - \frac{س^3}{3} \right]_{0}^{1} + \left[\frac{2س^3}{3} - 4س^2 \right]_{1}^{2}$

$= 2 - \frac{1}{3} + \frac{16}{3} - 8 - \frac{2}{3} + 4$

$= 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ وحدة مربعة

٤)



$س^2 - 4 = 4س - س^2 \Leftarrow ص = ص$

$2س^2 - 4س - 8 = 0$

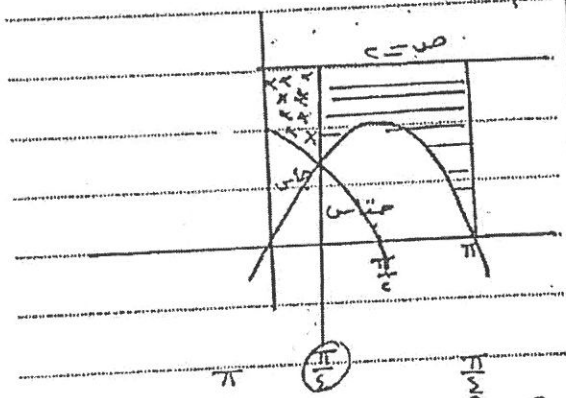
$(س - 2)(س + 2) = 0 \Leftarrow س = 2$

$م = \int_{-2}^{2} (4س - س^2) - (س^2 + 4) \, دس + \int_{2}^{4} (4س - س^2) - (س^2 + 4) \, دس$

$\therefore = \left[2س^2 - \frac{2س^3}{3} - 4س \right]_{-2}^{2} + \left[\frac{2س^3}{3} - 4س^2 + 4س \right]_{2}^{4}$

$= \frac{56}{3} - 40 = \frac{64}{3}$ وحدة مربعة

٦)



$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (جتاس - جاس) \, دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (جاس - جتاس) \, دس$

$= \left[جاس + جتاس \right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \left[-جاس - جتاس \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 \right) + \left(-1 - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$= \frac{4}{\sqrt{2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$ وحدة مربعة

٧) ج

تدريبات ... (٤)

١) $\frac{dع}{dس} = \frac{1}{ع^{\frac{4}{3}}} \Leftarrow ع \, dع = \frac{1}{4} \, dس$

بتكامل $\Leftarrow \frac{ع^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{4}س + ج$

$ع(0) = 0 \Leftarrow ج = 0$

$ع^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{4}س \Leftarrow |ع| = |\frac{5}{4}س|^{\frac{3}{5}}$

$\frac{dف}{dس} = 7|\frac{5}{4}س|^{\frac{1}{5}} \Leftarrow dف = 7|\frac{5}{4}س|^{\frac{1}{5}} dس$

$ف(س) = 7 \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} س^{\frac{8}{3}} + ج$

$ف(0) = 0 \Leftarrow ج = صفر$

$\frac{8}{3} = \frac{5}{4}|ك|^{\frac{8}{3}}$

$8 = 2 \times \frac{4}{ك^{\frac{4}{3}}} \Leftarrow \boxed{ك = 1}$

٢) $\frac{dع}{dس} = ع \Leftarrow \frac{dع}{ع} = dس$

$\ln|ع| = س + ج \quad ع(0) = 2$

$\ln 2 = 0 + ج$

$ع = هـ^{(س + \ln 2)} = 2هـ^{س}$

٣) $\frac{dص}{dس} = \frac{(س-1)}{هـ^{ص}} = (س-1) هـ^{-ص}$

$هـ^{ص} dص = (س-1) dس$ بتكامل

$هـ^{ص} = س(س-1) + ج$

$س = 1 ، ص = 0$

$1 = 1 + ج \Leftarrow ج = 0$

$هـ^{ص} = س(س-1)$

$هـ^{ص} = 0 \Leftarrow س = 0 \text{ أو } س = 1$

$ص = \ln|س(س-1)|$

$dف = |2هـ^{س}| dس$

$ف(س) = 2هـ^{س} + ج$

$ف(\ln 3) = 2 \times 3 + 1 = 7$ م