تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.AWA2EL.net

الرياضيات

الفصل الأول

المراجعة الشاملة

النهايات والاتصال

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

079556244

نهايات الاقتران النسبي

١ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - س^٢ - ٤}{(س+١)^٢ - ٩}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)(س^٢ + س + ٢)}{(س+١ - ٣)(س+١ + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٢)(س^٢ + س + ٢)}{(س-٢)(س+٤)} = \frac{٤}{٣}$

٢ $\lim_{س \to -١} \frac{(س+٣)^٢ + ٤س}{١ - \sqrt{س^٣ + ٢}} \times \frac{١ + \sqrt{س^٣ + ٢}}{١ + \sqrt{س^٣ + ٢}}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٢(س^٢ + ٦س + ٩ + ٤س)}{١ - (س^٣ + ٢)}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٢(س^٢ + ١٠س + ٩)}{-(س^٣ + ١)}$

$= \lim_{س \to -١} \frac{٢(س+١)(س+٩)}{-(س+١)(س^٢ - س + ١)} = \frac{-١٦}{٣}$

٣ $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س}{٢} - \frac{٤}{س-٣}\right)\left(\sqrt{٧س^٢ + ٩س - ٦} - ٦\right)$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س - ٨}{٢(س-٣)} \times \left(\sqrt{٧س^٢ + ٩س - ٦} - ٦\right) \times \frac{\sqrt{٧س^٢ + ٩س + ٦} + ٦}{\sqrt{٧س^٢ + ٩س + ٦} + ٦}$ ⑯

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س - ٨}{٢(س-٣)} \times \frac{٧س^٢ + ٩س - ٣٦}{١٢}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+١٢)}{١٢} \times \frac{س^٢ - ٣س - ٨}{٢(س-٣)}$

$= -\frac{٨}{٤} \times \frac{١٥}{١٢} = \frac{-١٥}{٣}$

٤ $\lim_{س \to ٤} \left(\frac{\sqrt{س}}{س-٤} - \frac{٨}{س^٢ - ٤س}\right)$

$= \lim_{س \to ٤} \left(\frac{\sqrt{س}}{س-٤} - \frac{٨}{س(س-٤)}\right) \times \frac{س}{س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س\sqrt{س} - ٨}{س(س-٤)}$ ، $ص = \sqrt{س}$ ، $ص^٢ = س$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٢ \times ص - ٨}{ص^٢(ص^٢ - ٤)} = \lim_{ص \to ٢} \frac{ص^٣ - ٨}{ص^٢(ص^٢ - ٤)}$

$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-٢)(ص^٢ + ٢ص + ٤)}{(ص-٢)(ص^٢ + ٢ص)(ص+٢)} = \frac{١٢}{٤ \times ٤} = \frac{٣}{٤}$

٥ $\lim_{س \to ١٠} \frac{\sqrt[٣]{٩ - ٢\sqrt{س}} - ٢}{|س^٢ - ٤| - ٣} \times \frac{\sqrt[٣]{(٩-٢\sqrt{س})^٢} + ٢\sqrt[٣]{٩-٢\sqrt{س}} + ٤}{\sqrt[٣]{(٩-٢\sqrt{س})^٢} + ٢\sqrt[٣]{٩-٢\sqrt{س}} + ٤}$

↳ ⑨ ⑬

$= \lim_{س \to ١٠} \frac{٩ - ٢\sqrt{س} - ٨}{١٢(٤ - س^٢ - ٣)}$

$= \lim_{س \to ١٠} \frac{١ - \sqrt{س}}{١٢(١ - س^٢)}$ ، $= \lim_{س \to ١} \frac{١ - \sqrt{س}}{١٢(١-س)(١+س)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{١ - س}{١٢(١-س)(١+\sqrt{س})(١+س)} = \frac{١}{٤٨}$

٦ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٢\sqrt{س+١} - ٧}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٧ - ٢}{س-٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٢ - ٢\sqrt{س+١}}{س-٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س-٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٢ - ٢\sqrt{س+١}}{س-٣} \times \frac{٢ + ٢\sqrt{س+١}}{٢ + ٢\sqrt{س+١}}$ ⑤

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س-٣} + \lim_{س \to ٣} \frac{٤ - ٤(س+١)}{٤(س-٣)}$

$= ٦ + \lim_{س \to ٣} \frac{-س}{٤(س-٣)}$

$= ٦ - \frac{١}{٤} = \frac{٢٣}{٤}$

AWA2EL LEARN 2 BE
تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.AWA2EL.net

٧ $\lim_{س \to 1} \dfrac{(س-2)^3 + \frac{1}{س^2-3}}{1-س}$

$= \lim_{س \to 1} \dfrac{(س-2)^3 + 1}{1-س} + \lim_{س \to 1} \dfrac{\frac{1}{س^2-3} - 1}{1-س}$

$= \lim_{س \to 1} \dfrac{(س-3)(س-2)^2 - (س-2)^2 + (س-2)}{1-س}$

$= \lim_{س \to 1} \dfrac{(س-2)(س-3-س+2+1)}{1-س} = (-3)$

$\lim_{س \to 1} \dfrac{1-س^2+س}{(2-س^2)(1-س)} = \lim_{س \to 1} \dfrac{س^2-1}{(2-س^2)(1-س)}$

$= \lim_{س \to 1} \dfrac{(س-1)(س+1)}{(2-س^2)(1-س)} = (-2)$

∴ النهاية $= -3-2 = \boxed{-5}$

٨ $\lim_{س \to +2} \dfrac{\sqrt{س^2-3} - \sqrt{س-2}}{س^3-س^2-10}$

$= \lim_{س \to +2} \dfrac{\sqrt{(س-2)(س+2)} - \sqrt{س-2}}{(س-2)(3س+5)}$

$= \lim_{س \to +2} \dfrac{\sqrt{س-2}\sqrt{س+2} - \sqrt{س-2}}{(س-2)(3س+5)}$

$= \lim_{س \to +2} \dfrac{(\sqrt{س-2})(\sqrt{س+2}-1)}{(س-2)(3س+5)} = \dfrac{2}{11}$

٩ $\lim_{س \to 1} \dfrac{2 \times 9^{س} - 18}{27^{س} - 3^{س+2}}$

$= \lim_{س \to 1} \dfrac{2 \times 3^{2س} - 18}{3^{3س} - 3^{س} \times 3^2}$

$\left.\begin{array}{l} ص = 3^{س} \\ س \to 1 \\ ص \to 3 \end{array}\right\}$

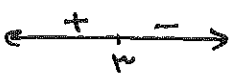
$= \lim_{ص \to 3} \dfrac{2ص^2 - 18}{ص^3 - 9ص}$

$= \lim_{ص \to 3} \dfrac{2(ص^2-9)}{ص(ص^2-9)} = \dfrac{2}{3}$

١٠ $\lim_{س \to -3} \dfrac{س^2 - س[2-س] + 6}{|6-2س|} =$

أ) $-\frac{3}{2}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $-\frac{1}{2}$

الحل:



$= \lim_{س \to -3} \dfrac{س^2 - 5س + 6}{6-2س}$

$= \lim_{س \to -3} \dfrac{(س-3)(س-2)}{2(3-س)} = \dfrac{-1}{2}$ **د**

نظريات النهايات

١١ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود باقي قسمته على $(2س-6)$ يساوي 7 فإن:

$\lim_{س \to 4} (3س + ق(1+\sqrt{س})) =$

أ) 12 ب) 19 ج) 15 د) 7

الحل:

$2س - 6 = 0 \leftarrow س = 3 \longrightarrow ق(3) = 7$

$\lim_{س \to 4} 3س + \lim_{س \to 4} ق(1+\sqrt{س})$

$\left.\begin{array}{l} ص = 1+\sqrt{س} \\ س \to 4 \\ ص \to 3 \end{array}\right\}$

$= 12 + \lim_{ص \to 3} ق(ص)$

$= 12 + ق(3) = 12 + 7 = 19$ **ب**

١٢ إذا كان $ق(س)$ متصلاً عند $س = 1$

$ق(1) = 4$ ، فإن $\lim_{س \to -1} \left(\dfrac{|1-س^2|}{س-1} + 3ق(س)\right)$

$=$

أ) 2 ب) 6 ج) 10 د) 14

الحل:

$= \lim_{س \to -1} \dfrac{|1-س^2|}{س-1} + 3\lim_{س \to -1} ق(س)$

$= \lim_{س \to -1} \dfrac{1-س^2}{1-س} + 3ق(1) = \lim_{س \to -1} \dfrac{(1-س)(1+س)}{1-س} + 12$

$= -2 + 12 = 10$ **ج**

١٣ إذا كان $ق(س)$ كثير حدود وكانت :

$$\text{نهـا}_{س \to 3} \frac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$$

$$\text{نهـا}_{س \to 3} (ق(س) - ٢س + ٣ب) = ٧$$

فإن الثابت ب =

أ) $\frac{١٤}{٣}$ ب) ٣ ج) $-\frac{٤}{٣}$ د) ٦

الحل :

$$\text{نهـا}_{س \to 3} (ق(س) + ٥) = \text{صفر} \leftarrow \text{نهـا}_{س \to 3} ق(س) = -٥$$

كذلك .

$$\text{نهـا}_{س \to 3} ق(س) - \text{نهـا}_{س \to 3} ٢س + ٣ب = ٧$$

$$-٥ - ٦ + ٣ب = ٧ \leftarrow ب = ٦$$ د

١٤ إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٦}{س^٢ - ٤} = ٢$

فجد :

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٢ ق(س) - ٤ق(س)}{س - ٢}$$

الحل :

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} (ق(س) - ٦) = \text{صفر} \leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٢} ق(س) = ٦$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{س^٢ ق(س) - ٤ق(س)}{س - ٢} + \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٤ق(س) - ٤ق(٢)}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س)(س^٢ - ٤)}{س - ٢} + \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٤(ق(س) - ٦)}{س - ٢} \times \frac{س + ٢}{س + ٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{ق(س)(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)} + \text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{٨(ق(س) - ٦)}{س^٢ - ٤}$$

$$= ٦ \times ١ \times ٤ + ٨ \times ٢ =$$

$$= ٢٤ - ١٦ = -٤٠$$

✱ إذا كانت $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ق(س) - جاس}{س} = ٣$

فأجب عن الفقرات ١٥ ، ١٦

١٥ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ٥س}{س^٢} =$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{٣}{٢}$ ج) $-\frac{١}{٢}$ د) ١

الحل : $\text{نهـا}_{س \to ٠} (ق(س) - جاس) = ٠ \leftarrow \text{نهـا}_{س \to ٠} ق(س) =$

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ق(س) - جاس}{س^٢} + \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{جاس - ٥س}{س^٢}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ق(س) - جاس}{س} \times \frac{١}{س} + \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} \times \frac{١}{س} - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٥س}{س^٢}$$

$$= ٣ \times \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} - \frac{٥}{٤} = -\frac{١}{٢}$$ ج

١٦ $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{جاس - ق(س)} =$

أ) -١ ب) ٣ ج) ١ د) صفر

الحل : $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{جاس - ق(س)} \times \frac{س}{س}$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{س}{جاس - ق(س)} \times \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{س}$$

$$= -\frac{١}{٣} \times ٣ = -١$$ أ

١٧ إذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٣} - ٧] & ، ١ \le س \le ٣ \\ [\frac{س}{٢} + ٥] & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$$

فإن : $\text{نهـا}_{س \to ٣} ق(س) =$

أ) ٥ ب) ٦ ج) ٧ د) غير موجودة

$$\text{نهـا}_{س \to ٣^+} [\frac{س}{٢} + ٥] = \text{نهـا}_{س \to ٣^+} ٦ = ٦$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٣^-} [\frac{س}{٣} - ٧] = \text{نهـا}_{س \to ٣^-} ٦ = ٦$$

$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٣} ق(س) = ٦$ ب

١٨ إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٨}{س - ٢} & ، س \notin صـ \\ ١٦ - س^٢ & ، س \in صـ \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to ٢} ق(س) =$

أ) ١٢ ب) -٨ جـ) -٤ د) ٨

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٨}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٨ -$

ب

١٩ إذا كان:

$ق(س) = \begin{cases} ٣ - س^٢ + ١ & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س + ٥ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

فإن: $\lim_{س \to ١^+} (ق(٣ - س) + ق^٢(س)) =$

أ) ١٧ ب) ١٩ جـ) ٢٥ د) ٢٩

$= \lim_{س \to ١^+} ق(٣ - س) + (\lim_{س \to ١^+} ق(س))^٢$

$ص = ٣ - س$

$س \to ١^+$

$ص \to ٢^-$

$= \lim_{ص \to ٢^-} ق(ص) + ١٦ = ١٣ + ١٦ = ٢٩$

د

إيجاد الثوابت من النهايات

٢٠ إذا كانت $\lim_{س \to ١} [ب - ٣س] = ٢$

فإن قيم الثابت ب =

أ) (٦،٥) ب) [٦،٥) جـ) (٦،٥] د) [٦،٥]

الحل: $[ب - ٣] = ٢$ لأن التعويض كسر

$[ب] = ٥ \leftarrow ٥ < ب < ٦$

$\therefore ب = (٦،٥)$

أ

٢١ إذا كانت $\lim_{س \to ٣^+} [\frac{١}{٢}س + ٣] = ٦$

فإن قيم الثابت ب =

أ) $(٨،٦)$ ب) $[٨،٦)$ جـ) $(٨،٦]$ د) $[٨،٦]$

الحل: $\lim_{س \to ٣^+} [\frac{١}{٢}س - ب] = ٣$

$[\frac{١}{٢}ب] = ٣ \leftarrow ٣ \leq \frac{ب}{٢} < ٤$

$\therefore ٦ \leq ب < ٨ \quad ، \quad ب = [٦،٨)$

ب

٢٢ إذا كانت $\lim_{س \to ب} [\frac{س}{٣} + ٤]$ غير موجودة

فإن قيم الثابت ب =

أ) صـ ب) $\frac{صـ}{٣}$ جـ) ٣صـ د) $\frac{صـ}{٤}$

الحل:

$\lim_{س \to ب} [\frac{س}{٣}] + ٤$ غير موجود.

$\therefore \frac{ب}{٣} = صـ \leftarrow ب = ٣صـ$

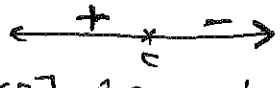
جـ

٢٣ إذا كانت $\lim_{س \to ب} \frac{١}{س^٢ - ٢٧س}$ غير موجودة

فإن قيم الثابت ب =

أ) $(-٥٥،٢)$ ب) $(٥٥،٢)$ جـ) $(-٥٥،٢]$ د) $[٥٥،٢)$

الحل: نبحث إشارة ما داخل الكبر



$\therefore$ النهاية غير موجودة في $[٥٥،٢)$

ب

٢٤ إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - س - ٦}$

فإن قيم ب التي تجعل $\lim_{س \to ب} ق(س)$ غير موجودة

أ) $\{٣\}$ ب) $\{-٢، ٣\}$ جـ) $\{-٣\}$ د) $\{-٢، ٣\}$

$\lim_{س \to ب} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} = \lim_{س \to ب} \frac{س - ٢}{س - ٣}$

$\therefore ب - ٣ = ٠ \leftarrow ب = ٣$

أ

٢٥ اذا كانت :

$$\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{٣س - ب} - ٢}{س - ١} = \frac{٣}{٤}$$

فجد الثوابت ٢ ، ب .

الحل : $\sqrt{٣ - ب} - ٢ = ٠ \leftarrow \sqrt{٣ - ب} = ٢$

$$\therefore ٣ - ب = ٤ \leftarrow ب = -١$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{\sqrt{٣س - ب} - \sqrt{٣ - ب}}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٣س - ب} + \sqrt{٣ - ب}}{\sqrt{٣س - ب} + \sqrt{٣ - ب}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{٣س - ب - ٣ + ب}{(س - ١)(\sqrt{٣س - ب} + \sqrt{٣ - ب})} = \frac{٣}{٤}$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{٣(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{٣س - ب} + \sqrt{٣ - ب})} = \frac{٣}{٤} \leftarrow \sqrt{٣ - ب} = ٢$$

$$٣ - ب = ٤ \leftarrow ب = -١ \quad \therefore ٢ = \sqrt{٣ - ب} = ٢$$

٢٦ اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٤س + ٤}{س - ٢} & ، \ ٠ < س < ٢ \\ \dfrac{س^٢ + ٢س - ب}{س - ٢} & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة .

فجد الثوابت ٢ ، ب .

$$\lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٤س + ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{(س - ٢)^٢}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢} = (١)$$

$$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ + ٢س - ب}{س - ٢} = \frac{٤ + ٤ - ب}{صفر}$$

$$\therefore ٤ + ٤ - ب = ٠$$

$$ب = ٤ + ٤$$

←

نكمل

$$\lim_{س \to -٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ + ٢س - ب}{س - ٢} = -١$$

$$\lim_{س \to ٢^+} \frac{(س + ٢)(س - ٢ + \frac{ب}{٤})}{س - ٢} = -١$$

$$٢ + \frac{ب}{٤} = -١ \leftarrow ب = -٦$$

$$\therefore ٤ + ٤ = -٦$$

$$٤ = -١٠ \leftarrow ٤ = -٥$$

نهايات الاقترانات المثلثية

٢٧

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣(\frac{\pi}{٤} + س)}{٢(\frac{\pi}{٤} + س)} =$$

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{١}{\pi}$ ج) $\frac{٤}{\pi}$ د) $\frac{١٠}{\pi}$

الحل : نعوض مباشرة $\leftarrow \frac{جا \frac{٣\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤} \times ٢} = \frac{-١}{\pi}$ د

٢٨

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س \ ظا^٢ س}{٢ س^٢ جا ٣س} =$$

أ) $\frac{٥}{٩}$ ب) $\frac{٥}{٦}$ ج) $\frac{٥}{٣}$ د) $\frac{٥}{٢}$

الحل :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س \ ظا^٢ س}{٢ س \times س \times جا ٣س}$$

$$= \frac{١}{٣} \times ١ \times \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٦}$$

ب

AWA2EL LEARN 2 BE
تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.AWA2EL.net

٢٩ $\lim_{س \to 0} ٦س (قتا س + ظتا ٢س) =$

أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ١٢

الحل :

$= \lim_{س \to 0} ٦س \left(\frac{١}{جا س} + \frac{١}{ظا ٢س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \left(\frac{٦س}{جا س} + \frac{٦س}{ظا ٢س} \right)$

$= ٦ + ٣ = ٩$ ج

٣٠ $\lim_{س \to 0} \frac{٢س جا ٣س + ظا^٢ س}{٤س^٢} =$

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٧}{٤}$ ج) $\frac{٥}{٢}$ د) $\frac{٣}{٤}$

الحل :

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢س جا ٣س}{٤س^٢} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢ س}{٤س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢س جا ٣س}{٢س \times س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا س \times ظا س}{٤س \times س}$

$= ١ \times \frac{١}{٤} + ٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٤}$ ب

٣١ $\lim_{س \to 0} \frac{س + جا ٤س - ظا ٣س}{٤س - جا س ظا ٢س} =$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ١ ج) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{١}{٣}$

الحل : نقسم البسط والمقام على س

ونوزع النهايه .

$= \frac{\lim_{س \to 0} \frac{س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{جا ٤س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{ظا ٣س}{س}}{\lim_{س \to 0} \frac{٤س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{جا س ظا ٢س}{س}}$

$= \frac{١ + ٤ - ٣}{٤ - ١ \times ٠} = \frac{٢}{٤}$

$= \frac{١}{٢}$ أ

٣٢ $\lim_{س \to 0} \frac{قا س - جتا س}{جتا ٣س - جتا ٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{١}{جتا س} - جتا س}{-٢ جا ٤س جا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^٢ س}{جتا س \; ٢ جا ٤س جا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س \times جا س}{٢ جا ٤س جا س جتا س}$

$= \frac{١}{٤} \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٨}$

٣٣ $\lim_{س \to 0} \frac{٣س ظا ٢س}{جتا^٢ س - جتا^٣ س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣س ظا ٢س}{جتا^٢ س (١ - جتا س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣س ظا ٢س}{جتا^٢ س \times ٢ جا^٢ \frac{١}{٢} س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٣س ظا ٢س}{٢ جتا^٢ س \times جا \frac{١}{٢} س \; جا \frac{١}{٢} س}$

$= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$

٣٤ $\lim_{س \to 0} \frac{جتا ٢س + ٥ جا^٢ س - جتا س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٢ جا^٢ س + ٥ جا^٢ س - جتا س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا س + ٣ جا^٢ س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢ جا^٢ \frac{١}{٢} س + ٣ جا^٢ س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢ جا^٢ \frac{١}{٢} س}{س^٢} + \lim_{س \to 0} \frac{٣ جا^٢ س}{س^٢} = \frac{١}{٢} + ٣ = \frac{٧}{٢}$

٣٥ $\lim_{س\to 0} \frac{جا٣س - جا٢س - جاس}{س^٣}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س - جاس - ٢جاس جتاس}{س^٣}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٢جتا٢س جاس - ٢جاس جتاس}{س^٣}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٢جاس(جتا٢س - جتاس)}{س^٣}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٢جاس \times -٢جا\frac{٣}{٢}س جا\frac{١}{٢}س}{س \times س \times س}$

$= ٢ \times ١ \times -٢ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٢} = -٣$

٣٦ $\lim_{س\to 0} \frac{٣ - ٢جتاس - جتا٣س}{س^٢}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٣ - ٢جتاس}{س^٢} + \lim_{س\to 0} \frac{١ - جتا٣س}{س^٢}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٢(١ - جتاس)}{س^٢} + \lim_{س\to 0} \frac{٣جا^٢\frac{٣}{٢}س}{س^٢}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{٢ \times ٣جا^٢\frac{١}{٢}س}{س^٢} + ٢ \times \frac{٩}{٤}$

$= ٤ \times \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٢} = \frac{١١}{٢}$.

٣٧ $\lim_{س\to ٢} \frac{جا(س^٢ - ٤)}{س^٢ + س - ٦} =$

أ) صفر ب) $\frac{٢}{٥}$ ج) $\frac{٤}{٥}$ د) غ.م.

$= \lim_{س\to ٢} \frac{جا(س^٢ - ٤)}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س\to ٢} \frac{جا(س^٢ - ٤)}{س^٢ - ٤} \times \lim_{س\to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

$= ١ \times \lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س+٣)(س-٢)} = \frac{٤}{٥}$ **ج**

٣٨ $\lim_{س\to ١} \frac{جا\pi س}{س^٢ + ٣س - ٤} =$

أ) $-\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٥}$ ج) $\frac{\pi}{٣}$ د) $-\frac{\pi}{٥}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{-جا(\pi س - \pi)}{(س-١)(س+٤)}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{-جا\pi(س-١)}{(س-١)(س+٤)} = \frac{١}{٥} \times -\pi = \frac{-\pi}{٥}$ **د**

٣٩ $\lim_{س\to \pi} \frac{س^٢ + \pi س - ٢\pi^٢}{ظاس}$

أ) π ب) ٢π ج) ٣π د) $-\pi$

$= \lim_{س\to \pi} \frac{(س-\pi)(س+٢\pi)}{ظا(س-\pi)} = ١ \times ٣\pi$

$= ٣\pi$ **ج**

٤٠ $\lim_{س\to ٢} \frac{س جتا\frac{\pi}{س}}{س - ٢}$

$= \lim_{س\to ٢} \frac{س جا(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س})}{س - ٢}$

$= \lim_{س\to ٢} \frac{س جا\frac{\pi}{٢}(١ - \frac{٢}{س})}{س(١ - \frac{٢}{س})} = \frac{\pi}{٢}$

٤١ $\lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جاس}{(٢س - \pi)^٢} \times \frac{١ + جاس}{١ + جاس}$ (٢)

$= \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جا^٢س}{٢(٢س - \pi)^٢}$

$= \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا^٢س}{٢(٢س - \pi)^٢} = \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا^٢(\frac{\pi}{٢} - س)}{٨(س - \frac{\pi}{٢})^٢}$

$= \frac{١}{٨} \times (-١)^٢ = \frac{١}{٨}$.

٤٢) $\lim_{س \to \pi^+} \frac{\sqrt{١+جتاس}}{س^٢ - \pi^٢} \times \frac{\sqrt{١-جتاس}}{\sqrt{١-جتاس}}$ (٢٧)

$= \lim_{س \to \pi^+} \frac{\sqrt{١-جتا^٢س}}{\sqrt{٢}(س^٢ - \pi^٢)}$

$= \lim_{س \to \pi^+} \frac{\sqrt{٢}جاس}{\sqrt{٢}(س^٢ - \pi^٢)} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{|جاس|}{(س^٢ - \pi^٢)}$

$= \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جاس}{(س^٢ - \pi^٢)} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{جا(س - \pi)}{(س + \pi)(س - \pi)}$

$= \frac{١}{٢\pi} \times ١ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{٢}\pi}$

٤٣) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا^٢س - ٢جتاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢جاس\,جتاس - ٢جتاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢جتاس(جاس - \frac{١}{\sqrt{٢}})}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢جتاس(جاس - جا\frac{\pi}{٤})}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢جتاس \times ٢جتا\frac{١}{٢}(س + \frac{\pi}{٤})\,جا\frac{١}{٢}(س - \frac{\pi}{٤})}{س - \frac{\pi}{٤}}$

$= ٤ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = ١$

٤٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٤جتا^٢س - ٣}{٦س - ٢\pi}$

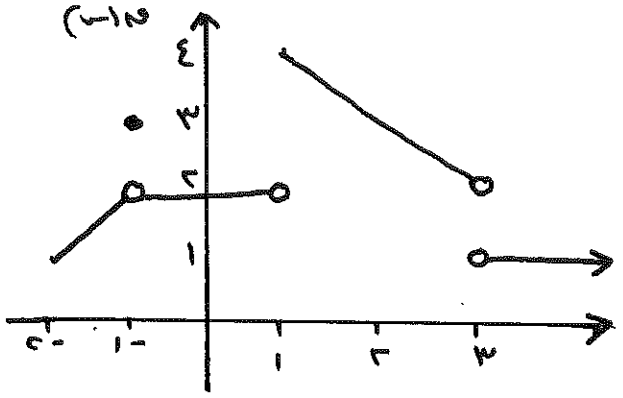
$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{(٢جتاس - \sqrt{٣})(٢جتاس + \sqrt{٣})}{٦س - ٢\pi}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢(جتاس - جتا\frac{\pi}{٦})}{٦س - ٢\pi} \times ٢\sqrt{٣}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \frac{٢ \times ٢جا\frac{١}{٢}(س + \frac{\pi}{٦})\,جا\frac{١}{٢}(س - \frac{\pi}{٦})}{٦(س - \frac{\pi}{٦})} \times ٢\sqrt{٣}$

$= -٣ \times \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٣} = \frac{-٣\sqrt{٣}}{٣}$

٤٥) إذا كان $د(س)$ كما في الشكل المرسوم.



١) قيم $ب$ التي تجعل $\lim_{س \to ب} د(س)$ غير موجود

أ) $\{-١، ١، ٣\}$ ب) $\{-٢، ١، ٣\}$

ج) $\{١، ٣\}$ د) $\{-٢، -١، ١، ٢، ٣\}$

٢) قيم $ب$ التي تجعل $\lim_{س \to ب^+} د(س) = ٢$

أ) $(-١، ١)$ ب) $[-١، ١) \cup \{٣\}$

ج) $[-١، ١]$ د) $(-١، ١) \cup \{٣\}$

٣) قيم $ب$ التي تجعل $\lim_{س \to ب} د(س) = ١$

أ) $(٥، ٣)$ ب) $(٥، ٣) \cup \{-٢\}$

ج) $[٥، ٣)$ د) $[٥، ٣] \cup \{-٢\}$

٤) $\lim_{س \to -٣} (٥د(س) + ٦)(٧ - ٢س) =$

أ) ٨ ب) ٩ ج) ١٢ د) ١٤

الكل : $= 5 \lim_{س \to -3} ق(س) + \lim_{س \to -3} ق(-7-ص)$

$ص = -7 - س$

$س \to -3 \Leftarrow ص \to -4$

$= 5 \times 2 + \lim_{ص \to -4} ق(ص)$

$= 10 + 4 = 14$ ✓

٥) أوجد قيم $س$ التي يكون عندها $ق(س)$ غير متصل مع ذكر السبب .

الكل : $س = -1$ لأن $ق(-1) \neq \lim_{س \to -1} ق(س)$

$س = 1$ لأن $\lim_{س \to 1}$ غ م

$س = 3$ لأن $ق(3)$ غير معرفة .

الاتصال عند نقطة

٤٦ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{[7-س]س^2 - 36}{6-س^2} & ، س \neq 3 \\ 4س & ، س = 3 \\ \frac{|س^2-19|}{\sqrt{س^2-6س+9}} & ، س > 3 \end{cases}$

فأبحث اتصال $ق(س)$ عند $س = 3$

الكل :

$ق(3) = 12$ ①

$\lim_{س \to 3^+} \frac{|س^2-19|}{\sqrt{(س-3)^2}} = \lim_{س \to 3^+} \frac{|س^2-19|}{|س-3|}$

$= \lim_{س \to 3^+} \left| \frac{(س-3)(س+3)}{س-3} \right| = \lim_{س \to 3^+} |س+3|$ ⊕

$= \lim_{س \to 3^+} (س+3) = 6$ ②

$\lim_{س \to 3^-} \frac{[7-س]س^2 - 36}{6-س^2} = \lim_{س \to 3^-} \frac{4س^2 - 36}{6-س^2}$ ④

$= \lim_{س \to 3^-} \frac{4(س-3)(س+3)}{(3-س)(3+س)} = 12$ ③

$\therefore ق(س)$ غير متصل عند $س = 3$ لأن $\lim_{س \to 3}$ غ م

٤٧ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س^2-4|}{جا(3س-4)} & ، س < 2 ، س > 0 \\ س^3 - 10 & ، س \geq 2 \end{cases}$

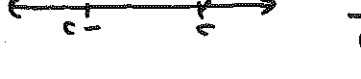
أبحث اتصال $ق(س)$ عند $س = 2$

الكل :

$ق(2) = -2$

$\lim_{س \to 2^+} (س^3 - 10) = 8 - 10 = -2$

$\lim_{س \to 2^-} \frac{|س^2-4|}{جا(3س-4)}$ ← منفرد



$= \lim_{س \to 2^-} \frac{4 - س^2}{جا(3س-4)}$

$= \lim_{س \to 2^-} \frac{(2-س)(2+س)}{جا(2-س)} = 4 \times \frac{1}{2}$

$= 2$

$\therefore ق(س)$ متصل عند $س = 2$

لأن $ق(2) = \lim_{س \to 2} ق(س)$

٤٨ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 + 2(ب-1)س - 4ب}{س-2} & ، س \neq 2 \\ 5 + س & ، س = 2 \end{cases}$

متصلا عند $س = 2$ فإن قيمة الثابت $ب =$

أ) 5 ب) $\frac{3}{2}$ ج) 7 د) $\frac{5}{2}$

الكل :

$ق(2) = 7$

$\therefore \lim_{س \to 2} \frac{س^2 + 2(ب-1)س - 4ب}{س-2} = 7$

$\lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(س+2ب)}{س-2} = 7$

$2 + 2ب = 7 \leftarrow ب = \frac{5}{2}$ د

٤٩ أي من الاقترانات التاليه متصلا عند س = ١ ؟

أ) $[\![س]\!]$ ب) $\frac{س^2}{س}$ جـ) $\sqrt{س-١}$ د) $|س|$

٥٠ اذا كان :

$ق(س) = جا\pi س$ ، $ك(س) = س^2 + س - ٦$

فأي من الاقترانات التاليه غير متصل عند س = ٢

أ) $(ق + ك)(س)$ ب) $(ق \times ك)(س)$

جـ) $(ق - ك)(س)$ د) $(\frac{ق}{ك})(س)$

٥١ اذا كان :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2}{س-١} & ، س \neq ١ \\ س^2 + ١ & ، س = ١ \end{cases}$$

$$ك(س) = \begin{cases} س^3 + س^2 - ٢ & ، س < ١ \\ س^2 - س & ، س > ١ \\ ٢س - ٧ & ، س = ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال $(ق \times ك)(س)$ عند س = ١

الحل : $ق(س)$ غير متصل عند س = ١

لان $\lim_{س \to ١} ق(س)$ غ م

∴ نفرض $ل(س) = ق(س) \times ك(س)$

$$ل(س) = \begin{cases} \frac{٢س(س^3 + س^2 - ٢)}{١ - س} & ، س < ١ \\ \frac{٢س(س^2 - س)}{١ - س} & ، س > ١ \\ (س^2 + ١)(٢س - ٧) & ، س = ١ \end{cases}$$

$ل(١) = ٢ \times ٢ - ٥ = -١٠$

$$\lim_{س \to ١^+} \frac{٢س(س - ١)(س + ٢)}{١ - س}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{٢س \times س(س + ٢)(س - ١)}{١ - س} = -٢$$

$$\lim_{س \to ١^+} \frac{٢س(س^3 + س^2 - ٢)}{١ - س}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{٢س(س - ١)(س^2 + ٣س + ٢)}{١ - س} = -١٠$$

∴ $ل(س)$ غير متصل عند س = ١ لان

$\lim_{س \to ١} ل(س)$ غير موجود .

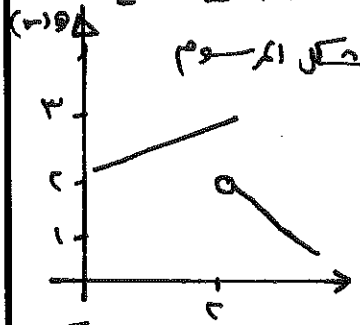
٥٢ اذا كان $ق(س) = س + [\![٣ - س]\!]$

$ك(س)$ كما في الشكل المرسوم

فابحث اتصال :

$(ق - ك)(س)$

عند س = ٢



الحل : $ك(س)$ غير متصل عند س = ٢ (من الشكل)

∴ نفرض $ل(س) = ق(س) - ك(س)$

$ل(٢) = ق(٢) - ك(٢) = ٣ - ٣ =$ صفر

$\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} (ق(س) - ك(س))$

$= \lim_{س \to ٢^+} (س + [\![٣ - س]\!]) - \lim_{س \to ٢^+} ك(س)$ ← ①

$= \lim_{س \to ٢^+} (س + ٠) - ٢ = ٢ - ٢ =$ صفر

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} (ق(س) - ك(س))$

$= \lim_{س \to ٢^-} (س + [\![٣ - س]\!]) - \lim_{س \to ٢^-} ك(س)$ ← ①

$= \lim_{س \to ٢^-} (س + ١) - ٣ = ٣ - ٣ =$ صفر

∴ $ل(س)$ متصل عند س = ٢

الاتصال على فترة

٥٣ اذا كان: $ق(س) = \begin{cases} س^2+3س & ، س < 1 \\ 3س\sqrt{س} & ، 1 \le س < 4 \\ س^2-1 & ، س = 4 \end{cases}$ على مجال ـــــ .

الحل: مجال $ق(س) = (-\infty, 4]$

اولا: النقط العادية

$س < 1$: $ق(س)$ متصل لانه كثير حدود

$1 < س < 4$: $ق(س)$ متصل لانه ضرب متصلين

ثانيا: نقط المـــاواه

$س = 1$ (تقول)

$ق(1) = 3 \times 1\sqrt{1} = 3$

$\lim_{س \to 1^+} 3س\sqrt{س} = 3 \times 1\sqrt{1} = 3$

$\lim_{س \to 1^-} (س^2+3س) = 1+3 = 4$

$ق(س)$ غير متصل عند $\boxed{س = 1}$

$س = 4$ (لطرف يسار)

$ق(4) = 16 - 1 = 15$

$\lim_{س \to 4^-} 3س\sqrt{س} = 3 \times 8 = 16$

$ق(س)$ غير متصل عند $\boxed{س = 4}$

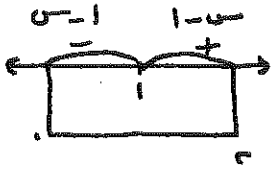
$\therefore ق(س)$ متصل على $(-\infty, 4] - \{1\}$

٥٤ اذا كان:

$ق(س) = \begin{cases} س + |س-1| & ، 0 \le س < 2 \\ \frac{2س - س^2}{س^2 - 5س + 6} & ، 2 < س < 5 \end{cases}$

فابحث اتصال $ق(س)$ على الفترة $[0, 5)$

الحل:



نعيد تعريف القيم المطلقة

$ق(س) = \begin{cases} س + 1 - س & ، 0 \le س < 1 \\ س + س - 1 & ، 1 \le س < 2 \\ \frac{2س - س^2}{س^2 - 5س + 6} & ، 2 < س < 5 \end{cases}$

$ق(س) = \begin{cases} 1 & ، 0 \le س < 1 \\ 2س - 1 & ، 1 \le س < 2 \\ \frac{2س - س^2}{س^2 - 5س + 6} & ، 2 < س < 5 \end{cases}$

اولا: النقط العادية

$0 < س < 1$: $ق(س)$ متصل لانه ثابت

$1 < س < 2$: $ق(س)$ متصل لانه كثير حدود

$2 < س < 5$: $ق(س)$ متصل ماعدا $\boxed{س = 3}$ صفر المقام

ثانيا: نقط المـــاواه

$س = 0$ (لطرف يمين) $\leftarrow ق(0) = 1$

$\lim_{س \to 0^+} 1 = 1 \leftarrow$ $ق(س)$ متصل عند $س = 0$

$س = 1$ (تقول) $\leftarrow ق(1) = \lim_{س \to 1} ق(س) = 1$

$ق(س)$ متصل عند $س = 1$

$س = 2$ (تقول) ، $ق(2) = 3$ ، $\lim_{س \to 2^+} (2-1)(2-س) = 3$

$\lim_{س \to 2} \frac{س(2-س)}{(س-3)(س-2)} = 2$ $\therefore ق(س)$ غير متصل عند $\boxed{س = 2}$

$\therefore ق(س)$ متصل على $[0, 5) - \{2, 3\}$

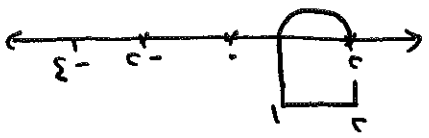
AWA2EL LEARN 2 BE
تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.AWA2EL.net

٥٥ اذا كان: $ق(س) = \begin{cases} س[\frac{1}{2}س+2] & ، \ 1 \le س < 2 \\ \sqrt{4-س^2} & ، \ 2 \le س \le 4 \end{cases}$

فابحث اتصال $ق(س)$ على الفترة $(1، 4)$

الحل: $ل = 2$

تعيد تعريف الصحيح: $\frac{1}{2}س+2 = 0 \leftarrow س = -4$

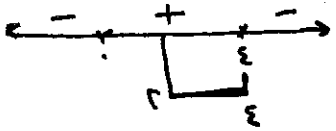


$$ق(س) = \begin{cases} 2س & ، \ 1 \le س < 2 \\ 3س & ، \ س = 2 \\ \sqrt{4-س^2} & ، \ 2 < س \le 4 \end{cases}$$

اولا: النقط العادية:

$1 < س < 2$: $ق(س)$ متصل لانه كثير حدود

$2 < س < 4$: $ق(س)$ متصل لان داخل الجذر > 0



ثانيا: نقط المـــواة

$س = 2$ (تحول)

$ق(2) = 6$ ، نهـــا $\sqrt{4-س^2}$ $س \to 2^+$ $= 2$

نهـــا $2س = 4$ $س \to 2^-$ $\therefore$ $ق(س)$ غير متصل عند $س = 2$

$\therefore$ $ق(س)$ متصل على $(1، 4) - \{2\}$

٥٦ $ق(س) = \frac{1}{\sqrt{2-س}}$ متصل على الفترة

أ) $[0، 2)$ ب) $(0، 2) - \{1\}$

ج) $[0، 2) - \{1\}$ د) $(0، 2)$

$\therefore$ متصل على $[0، 2) - \{1\}$ حيث $\sqrt{2-س} = 0 \leftarrow س = 2$

٥٧ اذا كانت: $ق(س) = \frac{5}{س^2+أس+ب}$ متصل على $ح - \{1\}$

فان قيم الثوابت أ، ب على الترتيب

أ) $\{-1، 2\}$ ب) $\{1، 2\}$

ج) $\{-2، 1\}$ د) $\{-2، -1\}$

الحل:

المقام $= (س-1)^2 = س^2+أس+ب$

$س^2-2س+1 = س^2+أس+ب$

$\therefore$ أ $= -2$ ، ب $= 1$ ج

٥٨ اذا كانت:

$ق(س) = \frac{س}{أس^2-2س+1}$ متصل على $ح$

فان قيم الثابت أ $=$

أ) $(1، \infty)$ ب) $(-\infty، 2)$

ج) $(2، \infty)$ د) $(-\infty، 1)$

الحل:

المقام $\neq 0$

$\Delta < 0$

$ب^2 - 4أجـ < 0$

$4 - 4 \times أ \times 1 < 0 \leftarrow 4 - 4أ < 0$

$\therefore 4أ > 4 \leftarrow أ > 1$

$\therefore أ = (1، \infty)$ أ

الرياضيات

الفصل الأول

المراجعة الشاملة

التفاضل

أ.عثمان حنفية

معهد مسار التفوق للتدريب

ت:0795562444

معدل التغير

[1] اذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٣س$
وكان معدل تغير $ق(س)$ في الفترة $[ب-١، ٢ب]$ يساوي ٨ فان قيمة الثابت ب =

أ) -١ ب) ١ ج) ٢ د) ٣

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٢ب) - ق(ب-١)}{(ب-١) - ٢ب}$$

$$٨ = \frac{(٢ب)^{٣} - ٦ب + ٤ب^{٢} - (ب-١)^{٢} - ٣(ب-١)}{ب+١}$$

$$٨ = \frac{٤ب^{٢} - ٦ب + ٤ب^{٢} - ب^{٢} + ٢ب - ١ - ٣ب + ٣}{ب+١}$$

$$٨ = \frac{٣ب^{٢} + ٥ب + ٢}{ب+١} = \frac{(٣ب+٢)(ب+١)}{ب+١}$$

$\therefore ٣ب + ٢ = ٨ \leftarrow ب = ٢$ ج

---

[2] اذا كان $ه(س) = ٣س - ٢ق(س) + ٥$
وكان معدل تغير الاقتران $ق(س)$ في $[١، ٤]$ يساوي -٩ ، فجد معدل تغير الاقتران $ه(س)$ في نفس الفترة .

$ه(س)$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(٤) - ه(١)}{٣}$$

$$-٩ = \frac{(١٢ - ٢ق(٤) + ٥) - (٣ - ٢ق(١) + ٥)}{٣}$$

$$-٢٧ = ٩ - ٢ق(٤) + ٢ق(١)$$

$$\therefore \boxed{ق(٤) - ق(١) = ١٨}$$

$ق(س)$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٣} = \frac{١٨}{٣} = ٦$$

---

[3] اذا كان التغير في الاقتران $ق(س)$ يساوي $\sqrt{٣}$ في الفترة $[٥، ٢٣]$ فان قياس الزاوية التي يصنعها القاطع لمنحنى ق في النقطتين : $(٢٣، ق(٢٣))$ ، $(٥، ق(٥))$ يساوي :

أ) $\frac{٣\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{\pi}{٣}$

الحل :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \text{ظاه} \leftarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢٣-٥} = \text{ظاه} .$$

$$\therefore \text{ظاه} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

$$\therefore ه = \frac{\pi}{٦}$$ ب

---

[4] يتمدد مستطيل بانتظام بحيث يبقى طوله مثلي عرضه دائماً . ما معدل تغير مساحته بالنسبة الى طوله عندما يكون عرضه ٣ سم

أ) ٦ ب) ٩ ج) ١٢ د) ٣

الحل : مساحته = م ، طوله = ل ، عرضه = ع

المطلوب : $\left| \frac{\Delta م}{\Delta ل} \right|_{ع=٣} = ؟$

$م = ل \times ع$ لكن $ل = ٢ع \leftarrow ع = \frac{ل}{٢}$

$\therefore م = ل \times \frac{ل}{٢} = \frac{١}{٢}ل^{٢}$ ، عندما ع = ٣ فان ل = ٦

$\therefore \frac{\Delta م}{\Delta ل} = ل = ٦$ أ

---

[5] ما معدل تغير مساحة مربع بالنسبة لطول قطره عندما يكون طول ضلعه ٢ سم .

أ) $\sqrt{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ج) ٢ د) $٢\sqrt{٢}$

مساحته = م ، طول قطره = ل ، طول ضلعه = س

المطلوب : $\left| \frac{\Delta م}{\Delta ل} \right|_{س=٢} = ؟$

$م = س^{٢}$ ، $ل = \sqrt{٢}س$

$\frac{\Delta م}{\Delta س} = ٢س = ٤$ ، $\frac{\Delta ل}{\Delta س} = \sqrt{٢}$

$\therefore \frac{\Delta م}{\Delta ل} = \frac{\Delta م}{\Delta س} \times \frac{\Delta س}{\Delta ل} = ٤ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٤}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}$

تعريف المشتقة

٦ اذا كان $ق(س) = ٣س + \frac{١}{\sqrt{س}}$ ، $س > ٠$

فجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة .

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع + \frac{١}{\sqrt{ع}} - ٣س - \frac{١}{\sqrt{س}}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع - ٣س}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{\sqrt{ع}} - \frac{١}{\sqrt{س}}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣(ع - س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{ع}}{(ع - س) \times \sqrt{ع س}}$$

$$= ٣ + \lim_{ع \to س} \frac{-١}{(\sqrt{ع} + \sqrt{س})(\sqrt{ع} - \sqrt{س})\sqrt{ع س}}$$

$$\therefore ق'(س) = ٣ - \frac{١}{٢س\sqrt{س}} .$$

٧ اذا تغيرت $س$ من $س$ الى $س + هـ$ وكان مقدار التغير في الاقتران $ق$ يساوي $س^٣ هـ - ٢س هـ^٢ + جا٥هـ$ ، فان $ق'(١) =$

أ) -١ ب) ٤ ج) ٨ د) ٦

الحل :

$$\Delta ص = س^٣ هـ - ٢س هـ^٢ + جا٥هـ .$$

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ص}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٣ هـ - ٢س هـ^٢ + جا٥هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٣ هـ}{هـ} - \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢س هـ^٢}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{جا٥هـ}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} هـ(س^٣ - ٢س هـ) + ٥$$

$$ق'(س) = س^٣ + ٥ \quad \therefore ق'(١) = ٦$$ د

٨ اذا كان معدل تغير الاقتران $ق(س)$ في الفترة $[١ ، ل]$ يساوي $\frac{ل^٢ + ل - ٣}{١ - ل}$

فان $ق'_+(١) =$

أ) -٤ ب) ٤ ج) صفر د) غير موجود

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$\Delta س = ل - ١$

$\Delta س \to ٠$

$ل \to ١$

$$= \lim_{ل \to ١^-} \frac{ل^٢ + ل - ٣}{١ - ل}$$

$$= \lim_{ل \to ١^-} \frac{(ل - ١)(ل + ٣)}{-(ل - ١)} = -٤$$ أ

٩ اذا كان :

$ق(س) = ظتا٢س$

فجد $ق'(\frac{\pi}{٦})$ باستخدام تعريف المشتقة

الحل :

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ظتا٢ع - ظتا٢س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ظا٢ع} - \frac{١}{ظا٢س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ظا٢س - ظا٢ع}{(ع - س)\, ظا٢ع\, ظا٢س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ظا(٢س - ٢ع)(١ + ظا٢س\, ظا٢ع)}{(ع - س)\, ظا٢ع\, ظا٢س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ظا(س - ع)(١ + ظا٢س\, ظا٢ع)}{(ع - س)\, ظا٢ع\, ظا٢س}$$

$$= ٢ \times \frac{١ + ظا^٢س}{ظا^٢س} = \frac{٢ قا^٢س}{ظا^٢س}$$

$$\therefore ق'(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٢ \times ٤}{٣} = \frac{٨}{٣} .$$

١٠ اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt[3]{٩س - ٨} & ، س > ١ \\ ٢س^{٢} - س & ، س \leq ١ \end{cases}$

ابحث قابلية $ق(س)$ للاشتقاق عند $س = ١$ باستخدام تعريف المشتقة .

$ق'(١) = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{٢ع^{٢} - ع - ١}{ع - ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{+}} \frac{(ع - ١)(٢ع + ١)}{ع - ١} = ٣$

$ق'(١) = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{\sqrt[3]{٩ع - ٨} - ١}{ع - ١} \times \frac{(\sqrt[3]{٩ع - ٨})^{٢} + \sqrt[3]{٩ع - ٨} + ١}{(\sqrt[3]{٩ع - ٨})^{٢} + \sqrt[3]{٩ع - ٨} + ١}$

$= \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٩ع - ٨ - ١}{٣(ع - ١)} = \lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٩(ع - ١)}{٣(ع - ١)}$ ③

$= ٣$

$\therefore ق'(١) = ٣$.

قواعد الاشتقاق

١١ اذا كان $ق(س) = (٢س + ٥)\sqrt{س^{٢} - ٣س}$

فان $ق'(-١) =$

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) $\frac{٧}{٤}$ د) $\frac{٣}{٤}\sqrt{٣}$

$ق'(س) = (٢س + ٥) \times \frac{٢س - ٣}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}} + ٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}$

$ق'(-١) = ٣ \times \frac{-٥}{٤} + ٢ \times ٢ = \frac{-١٥}{٤} + ٤ = \frac{١}{٤}$ [أ]

١٢ اذا كان $ص = \sqrt[3]{٣ظاس + ٥}$ فان $\left(\frac{د ص}{د س}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}} =$

أ) ١ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣ قا^{٢} س}{٣\sqrt[3]{(٣ظاس + ٥)^{٢}}} = \frac{٢}{٤}$

$= \frac{١}{٢}$ [ج]

١٣ اذا كان $ق(س) = (س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣}$

فان $ق'(١) =$

أ) ٦ ب) ١٢ ج) ٢٤ د) ١٨

$ق'(س) = ٣(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٢}(٢س - \frac{١}{س^{٢}})$

$ق'(٢) = ٣ \times ٤ \times ١ = ١٢$

١٤ اذا كان $ق(س) = \sqrt{ب + جاس}$

وكان $ق'(\frac{\pi}{٦}) = \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ فان الثابت $ب =$

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) ٢ ج) ١ د) $\frac{١}{٢}$

$ق'(س) = \frac{جتاس}{٢\sqrt{ب + جاس}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢\sqrt{ب + \frac{١}{٢}}}$

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤\sqrt{ب + \frac{١}{٢}}} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} \leftarrow \sqrt{ب + \frac{١}{٢}} = ١$

$\therefore ب + \frac{١}{٢} = ١ \leftarrow ب = \frac{١}{٢}$ [د]

١٥ اذا كان : $(ق \times ك)'(١) = ٧$ ، $(\frac{ق}{ك})'(١) = ٩$

$ق(١) = -١$ فان $ك'(١) =$

أ) -٨ ب) -٣ ج) ٢ د) ١٠

$ق(١)ك'(١) + ك(١)ق'(١) = ٧$

$ق(١)ك'(١) - ق'(١) = ٧$ .....①

$\frac{ك(١)ق'(١) - ق(١)ك'(١)}{(ك(١))^{٢}} = ٩$ بالجمع

$-ق'(١) - ق(١)ك'(١) = ٩$ ...④

$\therefore -٢ق'(١) = ١٦ \leftarrow ق'(١) = -٨$ [أ]

١٦ اذا كان :

$ق(س) = جتا^{٢}س \times \frac{ظاس}{قاس}$ فان $ق'(\frac{\pi}{٣}) =$

أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

$ق(س) = جتا^{٢}س \times قاس ظاس = جتا^{٢}س \times \frac{جاس}{جتا^{٢}س}$

$ق(س) = جاس \leftarrow ق'(س) = جتاس$

$\therefore ق'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{١}{٢}$ [ب]

١٧ إذا كان $ص = ظا^{٢}\frac{س}{٣}$ فإن $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٣}} =$

أ) $-٢\sqrt{٣}$ ب) $-٨\sqrt{٣}$

ج) $-٤\sqrt{٣}$ د) ٤

$\frac{د ص}{د س} = ٢ ظا\frac{س}{٣} \times \frac{١}{٣} \times -قتا^{٢}\frac{س}{٣}$

$= ٢ \times \sqrt{٣} \times \frac{١}{٣} \times -٤ = -٤\sqrt{٣}$ **ج**

١٨ إذا كان $ص = ع^{٢} - \frac{٨}{ع}$ ، $ع = ٢س^{٣} + ١$

فإن $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ١$ تساوي :

أ) ٦ ب) ١٢ ج) ١٥ د) ١٨

$\frac{د ص}{د ع} = ٢ع + \frac{٨}{ع^{٢}}$ ، $\frac{د ع}{د س} = ٣س^{٢} \times \frac{١}{٢\sqrt{٣س^{٣}+١}}$

عندما $س = ١ \leftarrow ع = ٢ \times ١ + ١ = ٣$

$\frac{د ص}{د ع} = ٢ + ٤ = ٦$ ، $\frac{د ع}{د س} = ١ + ٢ = ٣$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٦ \times ٣ = ١٨$ **د**

١٩ إذا كان $هـ(٢س+١) = [\frac{س^{٢}}{٤}+١] - س^{٢}$

فإن $ق'(٧) =$

أ) ٦ ب) ١٢ ج) ١٨ د) ٢٤

$٢س+١ = ٧ \leftarrow ٢س = ٦ \leftarrow س = ٣$

$\therefore هـ(٢س+١) = ٢ - س^{٢}$

$\therefore ق'(٢س+١) \times ٢ = ٤ - س$

$س = ٣ \leftarrow ٢ ق'(٧) = ١٢ \leftarrow ق'(٧) = ٦$

ب

٢٠ إذا كان

$ص = \frac{١٠}{|س^{٢}-٩|}$ فإن $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٢}$

أ) $-\frac{٢}{٥}$ ب) $\frac{٤}{٥}$ ج) $\frac{٨}{٥}$ د) $\frac{٢}{٥}$

$ص = \frac{١٠}{٩-س^{٢}} \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-١٠ \times -٢س}{(٩-س^{٢})^{٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤٠ \times ٢}{٢٥} = \frac{٨}{٥}$ **ب**

٢١ إذا كان $ق'(س) = \frac{١}{١+س^{٢}}$ ، $ق(س) = ظاس$

فإن $(ق \circ ق)'(س) =$

أ) ١ ب) $قا^{٢}س$ ج) -١ د) $-قا^{٢}س$

$(ق \circ ق)'(س) = ق'(ق(س)) \times ق'(س)$

$= ق'(ظاس) \times قا^{٢}س$

$= \frac{١}{١+ظا^{٢}س} \times قا^{٢}س = \frac{١}{قا^{٢}س} \times قا^{٢}س = ١$ **أ**

٢٢ إذا كان : $ص^{٢} + ٢س ص = ٥$

فإن $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(١، ٢)$ تساوي

أ) $-\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $-\frac{١}{٢}$

$٢ص ص' + ٢س ص' + ص \times ٢ = ٠$

$٢ص' + ٤ص' + ٢ = ٠ \leftarrow ٦ص' = -٢$

$\therefore ص' = -\frac{١}{٣}$ **أ**

٢٣ إذا كان $ص^{٣} = هـ(-٤ - ٥س)$

$هـ(-٤) = ٨$ ، $ق'(-٤) = ٣$ فإن $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} =$

أ) $-\frac{١}{٦}$ ب) $-\frac{١}{٤}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) $\frac{١}{٣}$

$٣ص^{٢}ص' = ق'(-٤-٥س) \times (-٥)$

$١٢ص' = ق'(-٤) \times -٣$

$\therefore ص' = \frac{-٣ \times ٢}{١٢}$

$ص' = -\frac{١}{٢}$

عندما $س = ١$

$ص^{٣} = هـ(-٤)$

$ص^{٣} = ٨$

$ص = ٢$

٢٤ إذا كان : $ص = \frac{١}{-٣س^{٢}+٩}$ ، فإن $ص'' =$

أ) $-٦ص^{٢}$ ب) $٦ص$ ج) $٦ص^{٢}$ د) $ص^{٢}$

$ص = (س-٣)^{-٢} \leftarrow ص' = -٢(س-٣)^{-٣}$

$ص'' = ٦(س-٣)^{-٤} = ٦((س-٣)^{-٢})^{٢}$

$= ٦ \times ص^{٢} = ٦ص^{٢}$ **ج**

٢٥ إذا كان $ص = ن + \text{قتا}\, ن$ ، $س = \text{ظا}\, ن$

وكان $\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{ن = \frac{\pi}{٤}} = ٣$ فإن الثابت $ب =$

أ) -٢ ب) ١ ج) ٢ د) -١

$\frac{د ص}{د ن} = ١ - ٢ \text{قتا}\, ن \text{ظا}\, ن$ ، $\frac{د س}{د ن} = ب$

$= ١ - ٢ \times ٢ \times ١$

$\frac{د ص}{د ن} = -٣$ ، $\frac{د ن}{د س} = \frac{١}{ب}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{-٣}{ب} = ٣ \longleftarrow ب = -١$ **د**

٢٦ إذا كان : $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = \sqrt{س + ص + ج}$

فإن $\frac{د ص}{د س} =$

أ) $\frac{١}{س}$ ب) $\frac{-١}{س^{٢}}$ ج) $\frac{١}{س^{٢}}$ د) $س^{٢}$

بتربيع الطرفين .

$س + ٢\sqrt{س ص} + ص = س + ص + ج$

$\sqrt{س ص} = ١ \longleftarrow س ص = ١ \longleftarrow ص = \frac{١}{س}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{س^{٢}}$ **ب**

٢٧ إذا كان : $ق(س) = ١ - س^{٢}$ ، $هـ(س) = \text{جتا}\, س$

فإن $(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{٦}) =$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ١ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) -١

$ق'(س) = -٢س$ ، $هـ'(س) = -\text{جا}\, س$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ق'(\text{جتا}\, س) \times -\text{جا}\, س$

$(ق \circ هـ)'(س) = -٢\text{جتا}\, س \times -\text{جا}\, س = \text{جا}\, ٢س$

$\therefore (ق \circ هـ)'(س) = ٢\text{جتا}\, ٢س$

$(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{٦}) = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$ **ب**

٢٨ إذا كان $ق(س) = هـ(س)$ ، $ق(س) = -هـ(-س)$

فإن $هـ^{(٤)}(س)$

أ) $ق(س)$ ب) $-ق(س)$ ج) $-هـ(س)$ د) $هـ(س)$

$ق(س) = ق(س) \longleftarrow ق'(س) = ق'(س) = -هـ(-س)$

$\therefore هـ''(س) = -ق(س) = -ق(س)$

$\therefore هـ^{(٤)}(س) = -ق'(س) = هـ(س)$ **د**

٢٩ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٤} - ١}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٢س & ، س = ١ \end{cases}$

فإن $ق'(١) =$

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٤ م

الانتقال : $ق(١) = ٢$ ، نهـا $\frac{س^{٤} - ١}{س - ١}$

$= \text{نهـا} \frac{(س^{٢} - ١)(س^{٢} + ١)}{س - ١} = ٢$

$ق$ متصل عند $س = ١$

$ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س \neq ١ \\ ٢س & ، س = ١ \end{cases}$

$ق'(س) = ١ \longleftarrow ق'(١) = ١$ **ب**

٣٠ إذا كان $\frac{د ص}{د س} = ٣ن^{٢}$ ، $\frac{د س}{د ن} = \frac{١}{٢ن}$

فإن $\left| \frac{د ص}{د س^{٢}} \right|_{ن = ٢} =$

أ) ٢ ب) ٨ ج) ١٢ د) ٤٨

$\frac{د ص}{د س} = ٣ن^{٢}$

$\frac{د ص}{د س^{٢}} = ٦ن \times ن' = ٦ن \times \frac{د ن}{د س}$

$= ٦ن \times ٢ن = ١٢ن^{٢}$

$\left| \frac{د ص}{د س^{٢}} \right| = ٤ \times ١٢$

$ن = ٢ = ٤٨$ **د**

٣١ اذا كان $س = ظا ص$ فان :
$ص'(1+س^2) =$
أ) $جا 2ص$ ب) 1 ج) $-جا 2ص$ د) -1

$1 = ص'$ قا^{2}ص ← $ص'$ = جتا^{2}ص .
$ص'' = -2$ ص' جتاص جاص $= -ص'$ جا2ص
$ص''(1+س^2) = -ص'$ جا2ص $(1+ظا^2ص)$
$= -$ جتا^{2}ص جا2ص $(1+ظا^2ص)$
$= -$ جتا^{2}ص جا2ص $\times$ قا^{2}ص
$= -$ جا2ص ✓ ج

٣٢ اذا كان $و(س) = 4س^2 + 8س$
فان $أ =$ $\lim_{ه \to 0} \frac{و(4) - و(4-ه)}{3ه} = 5$
أ) -13 ب) 17 ج) -17 د) 13

$و'(س) = 2أ + \frac{4}{\sqrt{س}}$
لكن : $\frac{1}{3} و'(4) = 5$ ← $و'(4) = 15$
$2أ + 2 = 15$ ← $أ = 13$ د

٣٣ اذا كان $و'(2) = 5$ ، $و'(9) = 2$
فان : $\lim_{س \to 2} \frac{و(س^3+1) - و(9)}{س - 2} =$
أ) 12 ب) 24 ج) 60 د) 48

نفرض $و(س^3+1) = ه(س)$
$س = 2$ ← $و(9) = ه(2)$
$\lim_{س \to 2} \frac{ه(س) - ه(2)}{س - 2} = ه'(2)$
لكن $ه'(س) = و'(س^3+1) \times 3س^2$
$ه'(2) = و'(9) \times 12$
$= 2 \times 12 = 24$ ✓ ب

٣٤ $\lim_{ه \to 0} \frac{جا^2(\frac{\pi}{4}+ه) - \frac{1}{2}}{2ه} =$
أ) $\frac{1}{2}$ ب) 1 ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ د) 2

$= \lim_{ه \to 0} \frac{جا^2(\frac{\pi}{4}+ه) - جا^2\frac{\pi}{4}}{2ه} = \frac{1}{2} و'(\frac{\pi}{4})$
$و(س) = جا^2س$
$و'(س) = 2جاس$ جتاس $=$ جا2س
$\frac{1}{2} و'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ ✓ أ

٣٥ $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{ظاس - ظا\frac{\pi}{3}}{3س - \pi} =$
أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{4}{3}$ د) $\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{ظاس - ظا\frac{\pi}{3}}{س - \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} و'(\frac{\pi}{3})$
$و(س) = ظاس$ ← $و'(س) = قا^2س$
$\frac{1}{3} و'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ ✓ ج

٣٦ اذا كان : $(و \circ و)(س) = 3س^2 - 6$
$و'(س) = 2س - 1$ ، فان $و'(2) =$
أ) 4 ب) $\frac{5}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

$و'(و(س)) \times و'(س) = 6س$
$و'(و(2)) \times و'(2) = 12$
$(2و(2) - 1) \times 3 = 12$
$2و(2) - 1 = 4$
$2و(2) = 5$ ← $و(2) = \frac{5}{2}$
ب ✓

٣٧ إذا كان $ق(س) = س^{٣}$ فإن :

$$\text{نهـا}_{ه \to ٠} \frac{ق(٢+٣ه) - ق(٢-٥ه)}{٤ه} =$$

أ) ٤ ب) -١ ج) ٨ د) -٤

$$\text{نهـا}_{ه \to ٠} \frac{ق(٢+٣ه) - ق(٢)}{٤ه} + \text{نهـا}_{ه \to ٠} \frac{ق(٢) - ق(٢-٥ه)}{٤ه}$$

$$= \frac{٣}{٤} ق'(٢) - \text{نهـا}_{ه \to ٠} \frac{ق(٢-٥ه) - ق(٢)}{٤ه}$$

$$= \frac{٣}{٤} ق'(٢) + \frac{٥}{٤} ق'(٢) = ٢ ق'(٢) = ٢ \times ٤ = ٨$$

ج

٣٨ إذا كانت :

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س ق(٤) - ٤ ق(س)}{٤ - س} = ٣ - س$$

$ق'(٢) = ٣$ ، فإن $ق(٢) =$

أ) ١ ب) ٥ ج) ٣ د) -٥

$$\text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س ق(٤) - س ق(س)}{٤ - س} + \text{نهـا}_{س \to ٤} \frac{س ق(س) - ٤ ق(س)}{٤ - س}$$

$$= \text{نهـا}_{س \to ٤} س \frac{(ق(٤) - ق(س))}{٤ - س} + \text{نهـا}_{س \to ٤} ق(س) \frac{(-١)}{(-(٤-س))} = ٣ - س$$

$$س ق'(س) - ق(س) = ٣ - س$$

$$\therefore ٢ ق'(٢) - ق(٢) = ١ \longrightarrow ٦ - ق(٢) = ١$$

$$\therefore ق(٢) = ٥$$

ب

٣٩ إذا كان :

$ق(جاس) = ظاس + جاس$ ، $س \in (\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٣})$

فإن $ق'(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) =$

أ) $\frac{٧}{٢}$ ب) -٧ ج) -٩ د) ٩

$$ق'(جاس) \times جتاس = قا^{٢}س + جتاس$$

$$ق'(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) \times جتا\frac{\pi}{٣} = قا^{٢}\frac{\pi}{٣} + جتا\frac{\pi}{٣}$$

$$ق'(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) \times \frac{١}{٢} = ٤ - \frac{١}{٢}$$

$$ق'(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = \frac{٧}{٢} \times ٢ = -٧$$

جاس $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٣}$ (لانتهاء الربع الثاني)

٤٠ إذا كان :

$ق(س) = \frac{١}{ج} س^{ن}$ ، $ق^{(٣)}(س) = (ج+٢) س$

فإن قيمة (قيم) الثابت ج =

أ) -٦ ب) $-٤، ٦$ ج) ٤ د) $-٦، ٤$

$$ق'(س) = \frac{ن}{ج} س^{ن-١}$$

$$ق''(س) = \frac{ن}{ج}(ن-١) س^{ن-٢}$$

$$ق^{(٣)}(س) = \frac{ن}{ج}(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣} = (ج+٢) س$$

$\therefore ن - ٣ = ١ \longrightarrow ن = ٤$

كذلك $\frac{٤}{ج} \times ٣ \times ٢ = ج + ٢$

$\frac{٢٤}{ج} = ج + ٢ \longrightarrow ج^{٢} + ٢ج = ٢٤$

$ج^{٢} + ٢ج - ٢٤ = ٠ \longrightarrow (ج+٦)(ج-٤) = ٠$

$\therefore ج = -٦$ ، $ج = ٤$

د

٤١ إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٧س & ، ٠ \leq س < ١ \\ ١ - س^{٢} - ٤س + ١ & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

فجد $ق'(س)$

نعيد تعريف القيم المطلقة

$س^{٢} - ٤ = ٠$

$س = \pm ٢$

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٧س & ، ٠ \leq س < ١ \\ ٥ - س^{٢} & ، ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

الاتصال : عند $س = ١$

$ق(١) = ٤$ ، $\text{نهـا}_{س \to ١^{+}} (٥ - س^{٢}) = ٤$

$\therefore ق$ غير متصل عند $س = ١$ $\text{نهـا}_{س \to ١^{-}} (س^{٢} + ٧س) = ٢$

الاشتقاق :

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س + ٧ & ، ٠ < س < ١ \\ -٢س & ، ١ < س < ٢ \end{cases}$$

غير معرف $س = ١، ٠$

٤٢ إذا كان $ه(س) = \begin{cases} أس^2 + ب س - ٣٠ & ، س \le ٢ \\ ٤ب - ٢س & ، س > ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند $س = ٢$ ، فجد $أ$ ، $ب$

الاتصال: $ه(س)$ متصل عند $س = ٢$

$ه(٢) = ٤ب - ٤$

$\lim_{س \to ٢^+} (٤ب - ٢س) = ٤ب - ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} (أس^2 + ب س - ٣٠) = ٤أ + ٢ب - ٣٠$

$\therefore ٤ب - ٤ = ٤أ + ٢ب - ٣٠ \leftarrow ٤أ - ٢ب = ١٦$

$\therefore ٢أ - ب = ٨ \quad ....①$

الاشتقاق:

$ه'(س) = \begin{cases} ٢أس + ب & ، س < ٢ \\ -٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

$ه'(٢) = ه'_+(٢)$

$\leftarrow ٤أ + ب = -٢ \quad ....②$

بجمع المعادلتين $\leftarrow ٦أ = ٦ \leftarrow أ = ١ \leftarrow ب = -٦$

٤٣ إذا كان:

$ه(٣س - ٥) = س \, جتا(\pi ه(س))$

$ه(١) = ٢$ ، $ه'(١) = \frac{١}{٣}$ ، فجد $ه'(-٢)$

$ه'(٣س - ٥) \times ٣ = س \times \pi ه'(س) جا(\pi ه(س)) + جتا(\pi ه(س)) \times ١$

لكن $٣س - ٥ = -٢ \leftarrow س = ١$

$ه'(-٢) \times ٣ = -\pi ه'(١) جا \pi ه(١) + جتا \pi ه(١)$

$٣ ه'(-٢) = -\pi ٢ جا \frac{\pi}{٣} + جتا \frac{\pi}{٣}$

$= -\pi ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$

$٣ ه'(-٢) = -\pi \sqrt{٣} + \frac{١}{٢}$

$\therefore ه'(-٢) = \frac{-\pi}{\sqrt{٣}} + \frac{١}{٦}$

٤٤ إذا كان:

$ص = ظا(س ص^2)$

فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$

$ص' = (س \times ٢ ص ص' + ص^2 \times ١) قا^2(س ص^2)$

عند $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$

$ص' = (\frac{\pi}{٤} \times ٢ ص' + ١) قا^2 \frac{\pi}{٤}$

$ص' = (\frac{\pi}{٢} ص' + ١) \times ٢$

$ص' = \pi ص' + ٢ \leftarrow ص' - \pi ص' = ٢$

$ص'(١ - \pi) = ٢ \leftarrow ص' = \frac{٢}{١ - \pi}$

٤٥ إذا كان:

$ق(س) = قأس$ ، $ه(س) = \frac{ع}{\sqrt{٤س + ١}}$

$(ه \circ ق)'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-٨}{٣}$

فجد الثابت $ع$.

$ق'(س) = ٢ قأس ظا س$

$ه'(س) = \frac{-ع \times \frac{٤}{٢\sqrt{٤س+١}}}{٤س + ١} = \frac{-٢ع}{(٤س+١)\sqrt{٤س+١}}$

$(ه \circ ق)'(\frac{\pi}{٤}) = ه'(ق(\frac{\pi}{٤})) \times ق'(\frac{\pi}{٤})$

$ه'(٢) \times ق'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{-٨}{٣}$

$\frac{-٢ع}{٣ \times ٩} \times ٤ = \frac{-٨}{٣}$

$\frac{-٨ع}{٩} = -٨ \leftarrow \frac{ع}{٩} = ١$

$\therefore ع = ٩$.

٤٦ اذا كان : $س = جا\theta$ = ١

فأثبت أن : $\frac{د\theta}{دس} = ظا\theta - قا\theta$

$س \times ظا\theta \times قا\theta + جا\theta = 0$

$س ظا\theta قا\theta = -جا\theta$

$\therefore ظا\theta = \frac{-جا\theta}{س ظا\theta}$

بكده :

$س = \frac{1}{جا\theta}$

$\therefore ظا\theta = \frac{-جا\theta}{\frac{1}{جا\theta} \times ظا\theta} = \frac{-جا^2\theta}{ظا\theta}$

$ظا\theta = \frac{جا^2\theta - 1}{ظا\theta} = \frac{جا^2\theta}{ظا\theta} - \frac{1}{ظا\theta}$

$\therefore ظا\theta = ظا\theta - قا\theta$

٤٧ اذا كان : $ص = \sqrt{2س - س^2}$

فأثبت أن : $1 + ظ^2 = \frac{1}{ص^2}$

بتربيع الطرفين :

$ص^2 = 2س - س^2$

$2ص ص = 2 - 2س$ /

$ص ظ = 1 - س \leftarrow ظ = \frac{1-س}{ص}$

$\therefore ظ^2 = \frac{(1-س)^2}{ص^2} = \frac{1-2س+س^2}{ص^2}$

باضافة ١ للطرفين .

$1 + ظ^2 = \frac{1-2س+س^2}{ص^2} + 1$

$= \frac{1-2س+س^2+ص^2}{ص^2}$

$= \frac{1-ص^2+ص^2}{ص^2}$ ← بكده $2س - س^2 = ص^2$ ، $-2س + ص = -ص^2$

$= \frac{1}{ص^2}$.

٤٨ اذا كان :

$س - ص = ظا\theta - ظا\theta$ فأثبت أن :

$ظ = \frac{ظ^2(1+جا\theta)}{س - ص}$

$1 - ظ = -ظ ظا\theta$

$-ظ = -ظ \times ظ ظا\theta + جا\theta \times -ظ$

$-ظ = -ظ^2 ظا\theta - ظ جا\theta$

$ظ جا\theta - ظ = -ظ^2 ظا\theta$

$ظ(جا\theta - 1) = -ظ^2 ظا\theta$

$ظ = \frac{-ظ^2 جا\theta}{جا\theta - 1} \times \frac{جا\theta + 1}{جا\theta + 1}$

$ظ = \frac{-ظ^2 ظا\theta (جا\theta + 1)}{جا^2\theta - 1}$

$ظ = \frac{-ظ^2 ظا\theta (جا\theta + 1)}{-ظا^2\theta}$

$\therefore ظ = \frac{ظ^2(1+جا\theta)}{س - ص}$

AWA2EL
LEARN 2 BE
تم تحميل الملف من موقع الأوائل
www.AWA2EL.net

الرياضيات /الفصل الأول

المراجعة الشاملة

تطبيقات التفاضل

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق

ت0795562449

تطبيقات فيزيائية

١ انطلق جسمان للحركة معاً من نفس النقطة فتحرك الأول حسب العلاقة $ف_1(ن) = \frac{1}{3}ن^3 + ٨$ والثاني حسب العلاقة $ف(ن) = ٢ن^2 + ٥ن + ٦$ فما تسارع الأول عندما يكون لهما نفس السرعة

أ) ٢ ب) ٥ جـ) ٦ د) ١٠

$ع_1(ن) = ن^2$ ، $ع(ن) = ٤ن + ٥$

$ت_1(ن) = ٢ن$

وعندما $ع_1 = ع$ ⟵ $ن^2 = ٤ن + ٥$

$ن^2 - ٤ن - ٥ = ٠$ ⟵ $(ن-٥)(ن+١) = ٠$

$ن = ٥$ ، $ن \neq -١$

$\therefore ت_1(٥) = ٢ \times ٥ = ١٠$ ✓ د

٢ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ع(ن) = ف(ن) = ن$ ، إذا كانت سرعته $= ٣\sqrt{ث}$ بعد ٣ ثانية فما تسارعه في تلك اللحظة .

أ) -١٢ ب) ٨ جـ) ١٢ د) -٨

$ع \times ع + ف ت = ١$

$\therefore ع^2 + ف ت = ١$

$٩ + \frac{2}{3} ت = ١$ ⟵ $ت = -١٢$

عندما $ع = ٣$ ، $ن = ٣$ ، $٣ف = ٢$ ، $ف = \frac{2}{3}$

ب

٣ يتحرك جسم حسب العلاقة : $ن^2 - ن = ف^2 + ف$ فما سرعة الجسم عندما يقطع مسافة ٢م .

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٢ د) $\frac{5}{4}$

$٢ن - ١ = ٢ف ع + ع$

$٢ \times ٣ - ١ = ٤ع + ع$

$٥ = ٥ع$ ⟵ $ع = ١$

ب

$ف = ٢$	
$ن^2 - ن = ٦$	
$ن^2 - ن - ٦ = ٠$	
$(ن-٣)(ن+٢) = ٠$	
$\therefore ن = ٣$	

٤ قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح بناية فتحركه حسب العلاقة $ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^2$ إذا علمت أنه قضى ارتفاع وصل إليه الجسم عن سطح الأرض يساوي ١٠٠ م ، فإن ارتفاع البناية =

أ) ٤٥ ب) ٣٥ جـ) ٥٥ د) ٦٥

$ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن^2 + ل$

$ع(ن) = ٣٠ - ١٠ن = ٠$ ⟵ $ن = ٣$

$١٠٠ = ٣٠ \times ٣ - ٥ \times ٩ + ل$

$١٠٠ = ٩٠ - ٤٥ + ل$

$\therefore ل = ٣٥$ م ج

٥ قذف جسم رأسياً لأسفل من سطح برج ارتفاعه ٧٥ م عن الأرض فتحرك حسب العلاقة $ف(ن) = ٢٠ن + ٥ن^2$. فما ارتفاع الجسم عن الأرض عندما يكتسب نصف السرعة التي قذف بها

أ) ٢٥ ب) ٣٠ جـ) ٤٥ د) ٥٠

$ع(ن) = ٢٠ + ١٠ن$

$ع(٠) = ٢٠ + ٠ = ٢٠$

عندما يكتسب $\frac{1}{2}$ السرعة الابتدائية

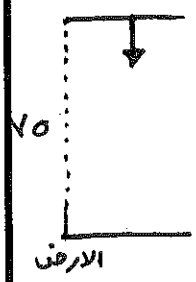
$ع = ٢٠ + ١٠ = ٣٠$

$٣٠ = ٢٠ + ١٠ن$ ⟵ $ن = ١$

$ف(١) = ٢٠ + ٥ = ٢٥$

$\therefore$ ارتفاع الجسم عن الأرض $= ٧٥ - ٢٥$

$= ٥٠$ م د



٦ يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = جا²ن . ما العامل المقطوع عندما يكون تسارع الجسم = $\frac{3}{4}$ م/ث² .

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) ١

ع(ن) = ٢ جان جتان = جا٢ن

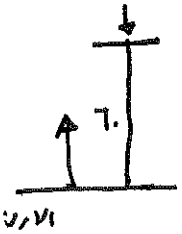
ت(ن) = ٢ جتا٢ن = $\frac{3}{4}$ ← جتا٢ن = $\frac{3}{8}$

١ − ٢ جا²ن = $\frac{3}{4}$ ← جا²ن = $\frac{1}{8}$

∴ ف = جا²ن = $\frac{1}{8}$ ج

٧ قذف جسم رأسيا لأعلى من سطح الأرض فتحرك حسب العلاقة ف(ن) = ٤٠ن − ٥ن² اذا علمت أنه سقط على سطح بناية ارتفاعها ٦٠ م عن الأرض فان سرعة اصطدام بسطح البناية تساوي :

أ) −١٠ م/ث ب) ٣٠ م/ث ج) ١٠ م/ث د) −٣٠ م/ث



ع(ن) = ٤٠ − ١٠ن

٦٠ = ٤٠ن − ٥ن²

٥ن² − ٤٠ن + ٦٠ = ٠ /٥

ن² − ٨ن + ١٢ = ٠

(ن − ٦)(ن − ٢) = ٠

ن = ٦ ، ن = ٢

ع(٦) = ٤٠ − ٦٠ = −٢٠

ع(٢) = ٤٠ − ٢٠ = ٢٠ ×

٥

٨ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{1}{3}$ (ن − ٣)³ − ٢ن² + ١١

ما الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسم سالبة .

ع(ن) = (ن − ٣)² − ٤ن

= ن² − ٦ن + ٩ − ٤ن

= ن² − ١٠ن + ٩ = ٠

(ن − ٩)(ن − ١) = ٠ ← ن = ٩ ، ن = ١

السرعة سالبة في الفترة (١ ، ٩)

ويقيس الجسم اتجاه حركته مرتين : عند ن = ١ ، ن = ٩

٩ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = $\frac{1}{3}$ جا³ن − جان ، ن ∈ [٠ ، ٢π]

ما تسارع الجسم عندما سرعته = $\frac{1}{8}$ م/ث

ع(ن) = جا²ن جتان − جتان

= جتان (جا²ن − ١) = جتان × − جتا²ن

∴ ع(ن) = − جتا³ن

ت(ن) = ٣ جتا²ن جان

لكن $\frac{1}{8}$ = − جتا³ن ← جتان = $-\frac{1}{2}$

∴ ن = $\frac{2\pi}{3}$ ، ن = $\frac{4\pi}{3}$

ت($\frac{2\pi}{3}$) = ٣($-\frac{1}{2}$)² × $\frac{3}{2}$ = $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

ت($\frac{4\pi}{3}$) = ٣($-\frac{1}{2}$)² × $-\frac{3}{8}$ = $\frac{-3\sqrt{3}}{8}$

تطبيقات هندسية .

١ ما احداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى $ق(س) = \sqrt{٥ - ٢س}$ يساوي $\frac{١}{٣}$.

أ) $(١، ٢)$ ب) $(\frac{٣}{٢}، ٢)$ ج) $(١، \sqrt{٣})$ د) $(-١، \sqrt{٧})$

$ق'(س) = \frac{-١}{\sqrt{٥ - ٢س}}$

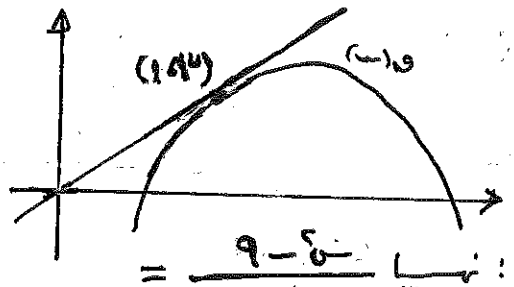
ميل المماس $= \frac{١}{٣}$ $\therefore \frac{-١}{\sqrt{٥-٢س}} = \frac{١}{٣}$

$\sqrt{٥-٢س} = ٣ \leftarrow ٥ - ٢س = ٩ \leftarrow س = -٢$

$ص = \sqrt{٥ + ٤} = ٣$ $\therefore$ النقطة $(-٢، ٣)$

ب

٢ اذا كان $ق(س)$ كما في الشكل المرسوم



فان : نهـا $\frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} \times \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$ =

أ) ٩ ب) ١٨ ج) ٦ د) ١٢

ميل المماس $= ق'(٣) = \frac{١ - ٠}{٣ - ٠} = \frac{١}{٣}$

نهـا $\frac{(س-٣)(س+٣)}{ق(س) - ق(٣)} \times \frac{١}{س - ٣}$ $= ٦ \times \frac{١}{ق'(٣)} = \frac{٦}{\frac{١}{٣}}$

$= ١٨$

ب

٣ اذا كان المستقيم $٣س + ص = جـ$ يمس منحنى $ق(س) = ٥ - س - ٣س^٢ + ١$

فان قيمة الثابت جـ =

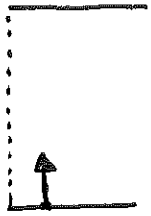
أ) ٢ ب) ٦ ج) ٧ د) ٩

$٣ + ق' = ٠ \leftarrow ق' = -٣ =$ ميل المماس

$ق'(س) = ٥ - ٤س = -٣ \leftarrow س = ٢$

$ص = ١٠ - ٨ + ١ = ٣ \leftarrow ٣ + ٦ = جـ \leftarrow جـ = ٩$

١٠ حفرة عمقها ٥٥ م تحت سطح الارض . قذف فيها جسم راسيا لاعلى حسب العلاقة $ف(ن) = ٢ن - ٥ن^٢$. اذا علمت أن سرعة الجسم لحظة وصوله سطح الارض هي ٥٠ م/ث فما قيمة الثابت P .



$ع(ن) = P - ١٠ن$

$٥٠ = P - ١٠ن$ ... ①

لحظة وصوله الارض $ف = ٥٥$

$٥٥ = Pن - ٥ن^٢$ ... ②

بحل المعادلتين بالتعويض . $P = ١٠ن + ٥٠$

$\therefore ٥٥ = (١٠ن + ٥٠)ن - ٥ن^٢$

$٥٥ = ١٠ن^٢ + ٥٠ن - ٥ن^٢$

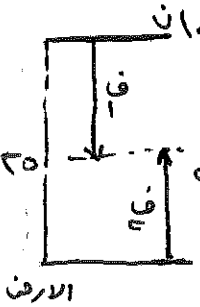
$\therefore ٥ن^٢ + ٥٠ن - ٥٥ = ٠$ / ٥

$ن^٢ + ١٠ن - ١١ = ٠ \leftarrow (ن + ١١)(ن - ١) = ٠$

$\therefore ن = ١ \leftarrow P = ١٠ \times ١ + ٥٠ = ٦٠$

١١ سقط جسم من سطح برج ارتفاعه ١٢٥ م عن الارض فتحرك حسب العلاقة $ف_١(ن) = ٥ن^٢$ وبعد ثانية واحدة قذف جسم آخر رأسيا لاعلى من سطح الارض فتحرك حسب العلاقة $ف_٢(ن) = ٥٠ن - ٥ن^٢$. ما سرعة كل منهما عندما يكون لهما نفس الارتفاع عن الارض .

$ع_١(ن) = ١٠ن$ ، $ع_٢(ن) = ٥٠ - ١٠ن$



$ف_١(ن+١)$ $ف_٢(ن) = ١٢٥$

$٥(ن+١)^٢ + ٥٠ن - ٥ن^٢ = ١٢٥$ / ١٢٥

$ك^٢ + ٢ن + ١ + ١٠ن - ك^٢ = ٢٥$

$١٢ن = ٢٤ \leftarrow ن = ٢$

$\therefore ع_١(٢) = ١٠ \times ٣ = ٣٠$ م/ث

$ع_٢(٢) = ٥٠ - ١٠ \times ٢ = ٣٠$ م/ث

٤ اذا كان لمنحنى ق(س) مماساً أفقياً عند النقطة (١، ٣) فان معادلة العمودي على هذا المماس عند تلك النقطة هي :

أ) س = ١ ب) ص = ٠ ج) ص = ٣ د) س = ٠

ميل المماس = صفر ← ميل العمودي غير معرف

∴ معادلته : س = ١ [أ]

أو : المماس أفقي ← العمودي عليه رأسي .

٥ اذا كان :

ق(س) = أ س² + ١ ، ك(س) = ٢ س² + ب س

مماساً مشتركاً عند س = ١ فان أ ، ب على الترتيب

أ) ٢ ، ٣ ب) ٣ ، ٤ ج) ٣ ، ٢ د) ٤ ، ٢

ق'(س) = ٢ أ س ، ك'(س) = ٤ س + ب

ق'(١) = ك'(١) ← ٢ أ = ٤ + ب ... ①

ق(١) = ك(١) ← أ + ١ = ٢ + ب

أ = ١ + ب ... ② بحل المعادلتين

٢(١ + ب) = ٤ + ب ← ٢ + ٢ ب = ٤ + ب

∴ ب = ٢ ← أ = ٣ [أ]

٦ ما احداثيات النقطة الواقعة على منحنى

ق(س) = س² + ٥ س + ٦ والتي يكون عندها العمودي على المماس موازياً للمستقيم الذي معادلته ص = $\frac{٢ - س}{٣}$

أ) (١، ٢) ب) (-١، ٢) ج) (-١، ١) د) (-١، $\frac{٣}{٢}$)

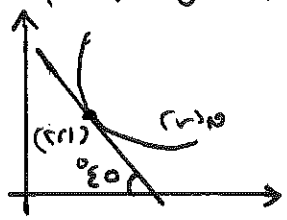
ق'(س) = ٢ س + ٥ = ميل المماس .

ميل العمودي = $-\frac{١}{٣}$ ← ميل المماس = ٣

٢ س + ٥ = ٣ ← س = -١

ص = ١ - ٥ + ٦ = ٢ ∴ النقطة (-١، ٢) [ب]

٧ اذا كان ق(س) كما في الشكل المرسوم وكان :



ق(س) ك(س) = ٢٠

فان ه' (١) =

أ) ٥ ب) -١٠ ج) -٥ د) ١٠

ه'(س) = $\frac{٢٠}{ق(س)}$

ه'(س) = $\frac{-٢٠ ق'(س)}{(ق(س))^٢}$ = $\frac{-٢٠ \times -١}{٤}$ = ٥

لكن ق(١) = ٢

ق'(١) = - ظا ٤٥

= -١

[أ]

٨ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) = س² + ١ عند نقطة تقاطع منحنى ق مع المستقيم ص - س - ٧ = ٠

نقطة المماس = نقطة تقاطع الاقترانين .

ص = س + ٧

∴ س² + ١ = س + ٧ ← س² - س - ٦ = ٠

(س - ٣)(س + ٢) = ٠ ← س = ٣ ، -٢

∴ يوجد مماسان :

الاول : نقطة المماس (٣، ١٠)

ق'(س) = ٢ س ← م = ٢ × ٣ = ٦

معادلته : ص - ١٠ = ٦ (س - ٣)

الثاني : نقطة تماس (-٢، ٥)

ق'(س) = ٢ س ← م = -٤

معادلته : ص - ٥ = -٤ (س + ٢)

٩ اذا كان :

$ق(س) = (س-٣)^٢$ ، $ك(س) = \frac{٢س-٤}{س}$

فما احداثيات النقطة التي يكون عندها المماسان المرسومان للاقترانين ق ، ك متعامدين ، وما معادلة المماس المرسوم لمنحنى ك(س) عند هذه النقطة .

$ق'(س) = ٢(س-٣)$

$ك'(س) = \frac{س \times ٢ - (٢س-٤)}{س^٢} = \frac{٤}{س^٢}$

نكن

$ق'(س) \times ك'(س) = -١ \leftarrow ٢(س-٣) \times \frac{٤}{س^٢} = -١$

$\frac{٤س-١٢}{س^٢} = -١ \leftarrow س^٢ = -٤س+١٢$

$س^٢+٤س-١٢ = ٠ \leftarrow (س+٦)(س-٢) = ٠$

$\therefore س = -٦$ او $س = ٢$

$ق(-٦) = ٨١$ $ك(-٦) = \frac{٧}{٣}$ (غير متساويين)

$ق(٢) = ١$ $ك(٢) = ١$

$\therefore$ نقطة التقاطع : $(٢،١)$

ميل المماس لمنحنى $ك(س) = ك'(٢) = \frac{١}{٤}$

معادلته : $ص - ١ = \frac{١}{٤}(س-٢)$

١٠ بيّن أن لمنحنى $ق(س) = ٣ظاس + ظا^٣س$ مماساً أفقياً في الفترة $(٠، \frac{\pi}{٢})$ وجد معادلته

$ق'(س) = -٣قا^٢س + ٣قا^٢س = ٠$

$\frac{١}{قتا^٢س} = \frac{٣}{جا^٢س} \leftarrow جا^٢س = ٣قتا^٢س$

$١ - قتا^٢س = ٣قتا^٢س \leftarrow قتا^٢س = \frac{١}{٤}$

$\therefore قتاس = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore$ يوجد مماس أفقي عند النقطة $(\frac{\pi}{٣}، ٣\sqrt{٣})$

ومعادلته : $ص = ٣\sqrt{٣}$.

١١ اذا رسم من النقطة $(٢،٠)$ مماساً لمنحنى العلاقة $٤س^٢ + ص^٢ = ١$ فجد معادلته

$٨س + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠ \quad /\ د$

$٤س + ص \frac{دص}{دس} = ٠ \leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-٤س}{ص}$

نكن

ميل المماس $= \frac{ص-٠}{س-٢} = \frac{-٤س}{ص}$

$ص^٢ - ٢ص = -٤س^٢$ لكن $٤س^٢ = ١ - ص^٢$

$ص^٢ - ٢ص = ص^٢ - ١$

$\therefore ص = \frac{١}{٢}$

$\therefore ٤س^٢ = ١ - \frac{١}{٤} \leftarrow ٤س^٢ = \frac{٣}{٤}$

$\therefore س^٢ = \frac{٣}{١٦} \leftarrow س = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

$\therefore$ يوجد مماسان :

الاول : نقطة تماس $(\frac{\sqrt{٣}}{٤}، \frac{١}{٢})$

$م_١ = -٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ٢ = -٢\sqrt{٣}$

معادلته : $ص - \frac{١}{٢} = -٢\sqrt{٣}(س - \frac{\sqrt{٣}}{٤})$

الثاني : نقطة تماس $(-\frac{\sqrt{٣}}{٤}، \frac{١}{٢})$

$م_٢ = -٤ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٤} \times ٢ = ٢\sqrt{٣}$

معادلته : $ص - \frac{١}{٢} = ٢\sqrt{٣}(س + \frac{\sqrt{٣}}{٤})$

١٢ جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ - ٢ص = ٦٧$ والتي يكون عندها المماس يعامد المستقيم $س + ٤ص + ٢ = ٠$

$٢س + ٢ص \frac{دص}{دس} - ٢\frac{دص}{دس} = ٠ \quad /\ د$

$س + ص\frac{دص}{دس} - \frac{دص}{دس} = ٠$

لكن $١ + ٤\frac{دص}{دس} = ٠ \leftarrow \frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٤}$

$\therefore$ ميل المماس $= ٤ = \frac{دص}{دس}$

$\therefore س + ٤ص - ٤ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٤ - ٤ص}$

بالتعويض في قاعدة العلاقة :

$(٤-٤ص)^{٢} + ص^{٢} - ٢ص = ٦٧$

$١٦ - ٣٢ص + ١٦ص^{٢} + ص^{٢} - ٢ص = ٦٧$

$١٧ص^{٢} - ٣٤ص - ٥١ = ٠ \quad / \div ١٧$

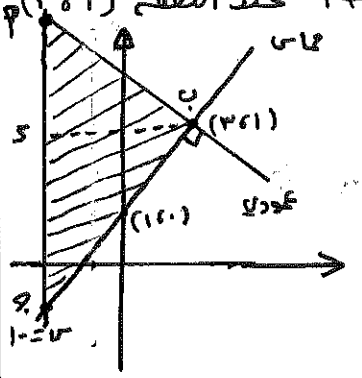
$ص^{٢} - ٢ص - ٣ = ٠ \leftarrow (ص-٣)(ص+١) = ٠$

$\therefore ص = ٣ \quad ، \quad ص = -١$

$س = ٨ \quad س = -٨$

$\therefore$ النقط هي : $(٨، ٣)$ ، $(-٨، -١)$

١٣ جد مساحة المثلث المكون من المستقيم $س = -١$ والمماس والعمودي عليه المرسومين لمنحنى $ق(س) = س^{٢} + ١$ عند النقطة $(١، ٣)$



$ق'(س) = ٢س$

$م = ٢ \times ١ = ٢$

معادلته :

$ص - ٣ = ٢(س - ١)$

$س = ٠ \leftarrow ص = ١$

$\therefore (١، ٠)$ نقطة أخرى على المماس

نجد احداثيات رؤوس .

$(-١، ج)$ تقع على المماس $\leftarrow م_{\text{المماس}} = \frac{ج-٣}{-١-١}$

$\therefore \frac{ج-٣}{-٢} = ٢ \leftarrow ج = -١$

$(-١، م)$ تقع على العمودي $\leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{م-٣}{-١-١}$

$\frac{م-٣}{-٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow م = ٤$

$\therefore$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ع ب \times ع م$

$= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢$

$= ٥$ وحدات مربعة .

خصائص المشتقات .

١ إذا كان $ق(س) = \sqrt{س^{٢}+٢س}$ فإن قيم $س$ الحرجة هي :

أ) $\{-١\}$ ب) $\{-٢، ٠\}$

ج) $\{-٢، -١\}$ د) $\{-٢، -١، ٠\}$

نجد مجال أولاً :

$ق'(س) = \frac{٢س+٢}{٢\sqrt{س^{٢}+٢س}} = \frac{س+١}{\sqrt{س^{٢}+٢س}}$

$س + ١ = ٠ \leftarrow س = -١$ ✗ لا يحقق المجال .

$س^{٢} + ٢س = ٠ \leftarrow س(س+٢) = ٠ \leftarrow س = ٠ ، -٢$

ب

٢ عدد النقط الحرجة للاقتران :

$ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$ ، $س \in [-١، ٣]$ هو :

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥

$ق'(س) = \frac{٢س}{٣\sqrt[٣]{(س^{٢}-٤)^{٢}}}$

$٢س = ٠$ | $س^{٢} - ٤ = ٠$

$س = ٠$ | $س = ٢$ ، $س = -٢$ ✗

الأطراف | $س = -١$ ، $س = ٣$

ج

٣ إذا كان $ق(س) = (١ - س^{٢})^{٣}$ فإن $ق(س)$ متناقص في الفترة :

أ) $[٠، ٠.٥]$ ب) $(-٠.٥، -١]$

ج) $[١، ٠.٥]$ د) $(-٠.٥، ٠]$

$ق'(س) = ٣(١-س^{٢})^{٢} \times -٢س = -٦س(١-س^{٢})^{٢}$

$ق'(س) = ٠ \leftarrow -٦س(١-س^{٢})^{٢} = ٠ \leftarrow س = ٠ ، ١ ، -١$

$ق(س)$ متناقص في

$[٠، ٠.٥]$ أ

٤) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^2+1 & ، -2 \le س < 3 \\ 3س+1 & ، 3 \le س \le 5 \end{cases}$$

فإن ق(س) تزايدي في الفترة :

أ) $[0, 3]$ ب) $[-2, 3]$

ج) $[-2, 0]$ د) $[0, 5]$

ق(س) متصل عند س = 3

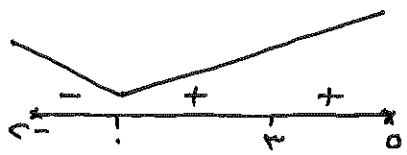
$$ق'(س) = \begin{cases} 2س & ، -2 < س < 3 \\ 3 & ، 3 < س < 5 \end{cases}$$

ق'(3+) = 3

ق'(3−) = 6

ق'(س) = 0 ← 2س = 0 ← س = 0

ق(س) تزايدي في الفترة $[0, 5]$



د

٥) إذا كان

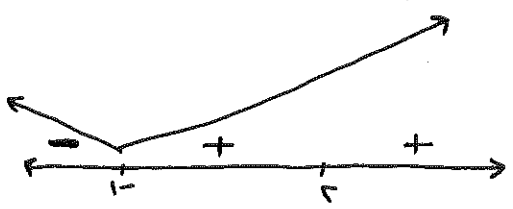
ق(س) = (س+1)(2−س)^2 فإن لمنحنى ق(س)

قيم :

أ) عظمى محلية عند س = −1 ب) صغرى محلية عند س = 2

ج) عظمى محلية عند س = 2 د) صغرى محلية عند س = −1

ق'(س) = 0 ← س = −1 ، س = 2



ق(س) تزايدي عند س = −1

د

٦) إذا كان

ق(س) = جا س − جتا س ، س ∈ $[0, 2\pi]$

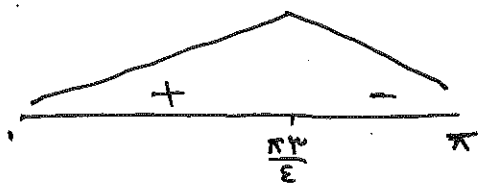
فإن أكبر قيمة للاقتران ق =

أ) 1 ب) $\sqrt{2}$ ج) $\frac{3\pi}{4}$ د) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ق'(س) = جتا س + جا س = 0

جا س = − جتا س ÷ جتا س

ظا س = −1 ← س = $\frac{3\pi}{4}$



∴ أكبر قيمة = ق($\frac{3\pi}{4}$) = $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ب

٧) إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (3، 3) فإن للاقتران :

ك(س) = (1 − ق(س))^3 قيمة :

أ) عظمى محلية عند النقطة (3، 3)

ب) صغرى محلية عند النقطة (3، 3)

ج) عظمى محلية عند النقطة (3، −8)

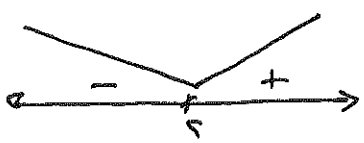
د) صغرى محلية عند النقطة (3، −8)

إشارة ق(س)

ك'(س) = 3(1 − ق(س))^2 × − ق'(س)

= − 3 ق'(س) (1 − ق(س))^2

إشارة ك'(س)



∴ للاقتران ك(س)

قيمة صغرى محلية عند (3، ق(3)) = (3، −8)

د

٨ اذا كان $ق(س) = ٢ + \sqrt[٣]{س^{٤}}$

فان $ق(س)$ متزايدة على ع المجموعة :

أ) $[٠ ، \infty)$ ب) $(-\infty ، ٠]$

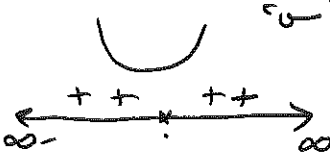
ج) $[١ ، \infty)$ د) $(-\infty ، \infty)$

المجال = ح

$ق'(س) = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}}$ ← $ق''(س) = \frac{٤}{٩} س^{-\frac{٢}{٣}}$

$ق''(س) = \frac{٤}{٩ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$

ع.م ← $س = ٠$



صفر ← x

$ق(س)$ متزايدة على ع $(-\infty ، \infty)$ **د**

٩ اذا كان $ق(س) = (م-٢) س^{٣} + ٣س - ٥$

فان $ق(س)$ يقع تحت جميع مماساته عندما م =

أ) $(٢ ، \infty)$ ب) $(-\infty ، ٢)$

ج) $[٢ ، \infty)$ د) $(-\infty ، ٢]$

$ق(س)$ متقعر للاسفل ← $ق''(س) < ٠$

$ق'(س) = (٣م - ٤) س$

$ق''(س) = ٣م - ٤ < ٠$ ← $م < ٢$

$\therefore م = (-\infty ، ٢)$ **ب**

١٠ اذا كان :

$ق(س) = \frac{١}{٢} س + جتا س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

فان نقطة الانقطاف لمنحنى $ق(س)$ هي :

أ) $(١ ، ٠)$ ب) $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

ج) $(\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٤})$ د) $(٠ ، \frac{١}{٢})$

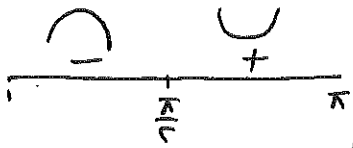
$ق''(س) = \frac{١}{٢} - جا س$

$ق''(س) = - جا س$

ع.م ← $س = ٠ ، ٢\pi$

صفر ← جا $س = ٠$ ← $س = \frac{\pi}{٢}$

∴ نقطة الانقطاف



هي $(\frac{\pi}{٢} ، ق(\frac{\pi}{٢}))$

$= (\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٤})$ **ج**

١١ اذا كان لمنحنى $ق(س) = (٣س - ٢)^{٣} + ٤$

نقطة انقطاف عند $س = ٥$ فان الثابت م =

أ) ٢ ب) ١٠ ج) ٥ د) ٤

$ق''(س) = ٣(٣س-٢)^{٢} \times ٣ = ٦(٣س-٢)^{٢}$

$ق'(س) = ٤(٣س-٢)$

لكن $ق'(٥) = ٠$ ← $٤(١٠ - م) = ٠$

$\therefore م = ١٠$ **ب**

١٢ اذا كان $ق(س)$ كثير حدود وكانت

اشارة $ق'(س)$ كما في الشكل

$ق'(٣) =$ صفر ، فأي العبارات التالية صحيحة؟

أ) $ق'(٣) = ٠$ ب) $ق(٣)$ عظمى محلية

ج) $(٣ ، ق(٣))$ نقطة انقطاف

د) $ق(٣)$ صغرى محلية .

بما أن : $ق'(٣) =$ صفر

$ق'(٣) < ٠$ (من الشكل)

$\therefore ق(٣)$ عظمى محلية **ب**

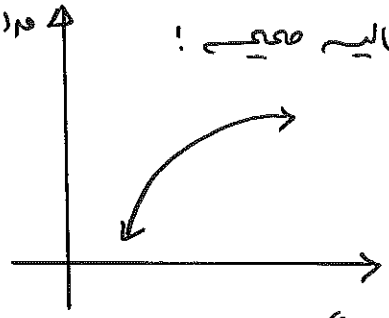
١٣ اذا كان ق(-١) = ق(٢) = صفر وكان :
ق(س) > ٠ عندما س > ١
ق(س) < ٠ عندما س < ١
فان ق(س) متناقص في الفترة :
أ) [-١، ٢] ب) (-∞، ١]
ج) (-∞، -١] ، [٢، ∞) د) [١، ٢]

من المعطيات تكون اشارة ق :

ق(-١) < ٠ ← ق(-١) عظمى محلية
ق(٢) > ٠ ← ق(٢) صغرى محلية
∴ اشارة ق :

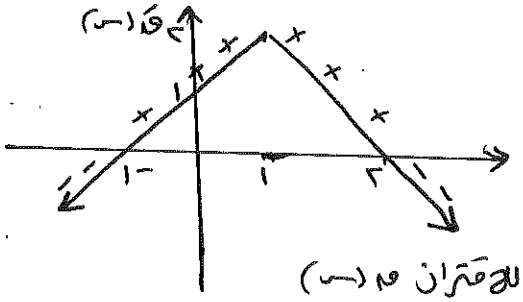
∴ ق(س) متناقص في [-١، ٢] أ

١٤ الشكل المرسوم يمثل منحنى ق(س)
أي العبارات التالية صحيحة :



أ) ق(س) > ٠ ، ق'(س) > ٠
ب) ق(س) < ٠ ، ق'(س) > ٠
ج) ق(س) > ٠ ، ق'(س) < ٠
د) ق(س) < ٠ ، ق'(س) < ٠
بما أن ق متزايد ومقعر للاسفل
∴ ق(س) > ٠ ، ق'(س) < ٠ ج

١٥ اذا كان ق(س) كما في الشكل المرسوم

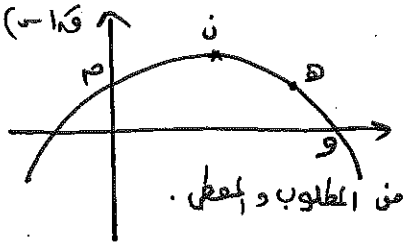


فان للاقتران ق(س)
قيمة عظمى محلية عند س =
أ) -١ ب) ٠ ج) ١ د) ٢

عدد اشارة ق على المستقيم المجاور :
فتكون كما يلي :

للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٢ د

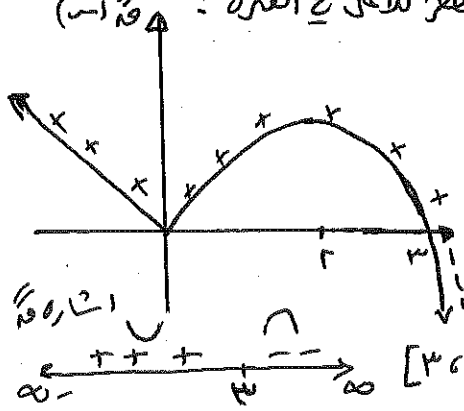
١٦ اذا كان ق(س) كما في الشكل المرسوم ، فان النقطة التي تكون عندها ق'(س) > ٠ هي



أ) م ب) ن
ج) هـ د) و

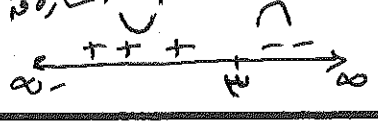
الحل : نخطب / من المطلوب ونعطي .
∴ نعطي ق(س) والمطلوب ق'(س) > ٠
ق(س) متزايد ∴ النقطة م أ

١٧ اذا كان ق'(س) كما في الشكل المرسوم
فان ق(س) مقعرا للاعلى في الفترة :



أ) [٢، ٠]
ب) (-∞، ٣]
ج) [٣، ٠]
د) [٢، ∞)

اشارة ق'



الاجابة : (-∞، ٣] ب

خصائص المشتقات

[1] كل من الاقترانات التالية جد :
١) فترات التزايد والتناقص
٢) القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة

(أ) $ق(س) = س(٢-س)^{٣}$ ، $س \in [-١، ٤]$

$ق'(س) = س \times ٣(٢-س)^{٢} \times -١ + (٢-س)^{٣} \times ١$

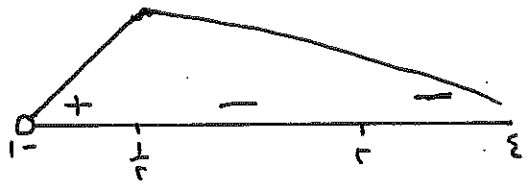
$= (٢-س)^{٢}(-٣س + ٢ - س)$

$ق'(س) = (٢-س)^{٢}(٢ - ٤س)$

ع.م ⟵ $س = ٤$

صفر ⟵ $(٢-س)^{٢}(٢ - ٤س) = ٠$

$س = ٢$ ، $س = \frac{١}{٤}$



ق(س) تزايد في $[-١، \frac{١}{٤}]$

متناقص في $[\frac{١}{٤}، ٤]$

$ق(\frac{١}{٤}) = \frac{١}{٤} \times \frac{٢٧}{٨} = \frac{٢٧}{١٦}$ عظمى محلية ومطلقة

$ق(-١) = -١ \times ٢٧ = -٢٧$

$ق(٤) = ٤ \times -٨ = -٣٢$ صغرى مطلقة

(ب) $ق(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} + ٣}$

مجال = ح

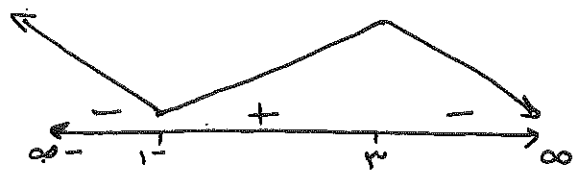
$ق'(س) = \frac{(س^{٢}+٣) \times ١ - (س-١) \times ٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$

$= \frac{-س^{٢} + ٢س + ٣}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$

ع.م ⟵ ٢

صفر ⟵ $-س^{٢} + ٢س + ٣ = ٠$ ⟵ $(س-٣)(س+١) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -١$



ق(س) متناقص في $(-\infty، -١]$ و $[٣، \infty)$

متزايد في $[-١، ٣]$

$ق(-١) = -\frac{١}{٢}$ صغرى محلية ، $ق(٣) = \frac{١}{٦}$ عظمى محلية

(ج) $ق(س) = \frac{\sqrt[٣]{س - ٢}}{س}$ ، $س \in [١٠، ١]$

مجال = $[١٠، ١]$

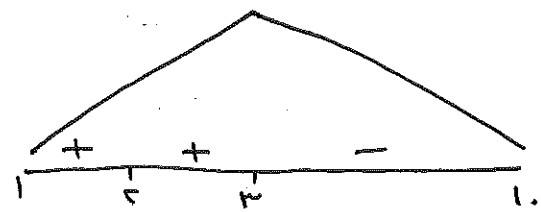
$ق'(س) = \frac{س \times \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س-٢)^{٢}}} - \sqrt[٣]{س-٢} \times ١}{س^{٢}}$

$ق'(س) = \frac{س - ٣(س-٢)}{٣\sqrt[٣]{(س-٢)^{٢}} \times س^{٢}}$

$= \frac{-٢س + ٦}{٣س^{٢}\sqrt[٣]{(س-٢)^{٢}}}$

ع.م ⟵ $س = ١، ١٠، ٢، ٣$ ، ٢ ∉ المجال.

صفر ⟵ $-٢س + ٦ = ٠$ ⟵ $س = ٣$



ق(س) متزايد في $[١، ٣]$ ومتناقص في $[٣، ١٠]$

$ق(٣) = \frac{١}{٣}$ عظمى محلية ومطلقة .

$ق(١) = -١$ صغرى مطلقة

$ق(١٠) = \frac{١}{٥}$.

[3] لكل من الاقترانات التالية جد :
1) فترات التقعر للاقتران ق
2) نقط الانطفاف (ان وجدت)

(أ) $ق(س) = س^3 + \frac{س^4}{4}$

مجال = ح

$ق'(س) = 3س^2 + س^3$

$ق''(س) = 6س + 3س^2$

غ.م ← x

صفر ← $6س + 3س^2 = 0$ ← $3س(2 + س) = 0$

$س = 0$ ، $س = -2$

ق(س) مقعر للاعلى في $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$

مقعر للاسفل في $[-2, 0]$

نقط الانطفاف:

$(0, ق(0)) = (0, 0)$ ، $(-2, ق(-2)) = (-2, -4)$

(ب) $ق(س) = 2 + جتا^2 س + جتا س$ ، $س \in [0, 2\pi]$

اكمل :

$ق'(س) = -2جتا س \, جا س + 2جا^2 س$

$ق''(س) = -جا^2 س - 2جا^2 س = -3جا^2 س$

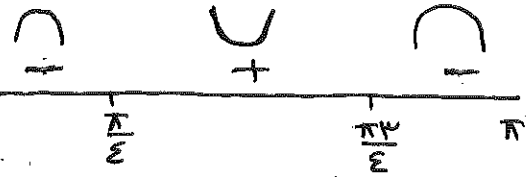
$ق'''(س) = -6جتا^2 س$

غ.م ← $س = 0, 2\pi$

صفر ← $جتا^2 س = 0$ ، $2س \in [0, 4\pi]$

$2س = \frac{\pi}{2}$ او $2س = \frac{3\pi}{2}$

$س = \frac{\pi}{4}$ او $س = \frac{3\pi}{4}$



ق(س) مقعر للاسفل في $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, 2\pi]$

للاعلى في $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

$(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4})$ ، $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5}{4})$ نقط انطفاف

(ج) $ق(س) = \begin{cases} س^3 + 2 ، -2 \le س \le 1 \\ \frac{3}{س} ، 1 < س \le 3 \end{cases}$

مجال = $[-2, 3]$

ق(س) متصل عند $س = 1$

$ق'(س) = \begin{cases} 3س^2 ، -2 < س < 1 \\ \frac{-3}{س^2} ، 1 < س < 3 \\ غ.م ، س = -2, 1, 3 \end{cases}$

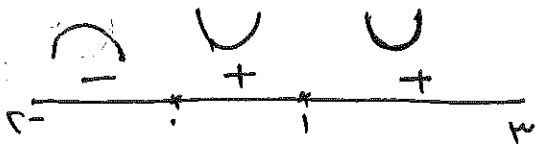
$ق'(1^-) = -3$

$ق'(1^+) = 3$

$ق''(س) = \begin{cases} 6س ، -2 < س < 1 \\ \frac{6}{س^3} ، 1 < س < 3 \\ غ.م ، س = -2, 0, 3 \end{cases}$

صفر ← $6س = 0$ ← $س = 0$

غ.م ← $س = -2, 0, 3$

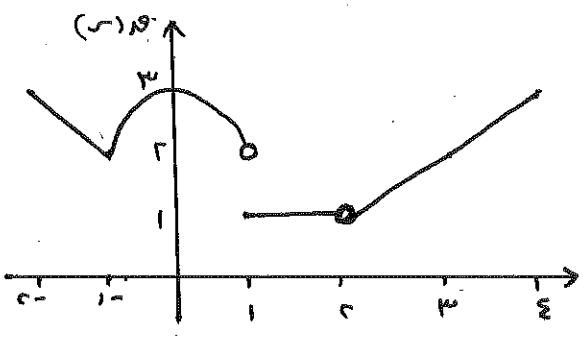


ق(س) مقعر للاسفل في $[-2, 0]$

مقعر للاعلى في $[0, 3]$

نقط الانطفاف : $(0, ق(0)) = (0, 2)$

[٣] اذا كان $ق(س)$ كما في الشكل المرسوم



جد للاقتران ق :

١) قيم س الحرجة

س = {-٢، -١، ٠، ٤} ∪ [١، ٢]

٢) قيم س التي يكون عندها ق غير قابل للاشتقاق

س = {-٢، -١، ١، ٤}

٣) قيم س التي يكون عندها المماس لمنحنى ق أفقياً

س = ٠

٤) ما اشارة $ق'(\frac{1}{2}) \times ق'(\frac{1}{2}) > ٠$

$ق'(\frac{1}{2}) > ٠$ (متناقص) ، $ق'(\frac{1}{2}) < ٠$ (مقعر للاسفل)

٥) الفترة التي يكون فيها $ق(س)$ مقعرا للاسفل

[-١، ١]

٦) قيم س التي يكون عندها $ق'(س) > ٠$

(-١، ٠) ، (٢، ٤)

٧) جد : $ق'(-١)$ ، $ق'(٠)$ ، $ق'(١)$ ، $ق'(٣)$

$ق'_+(١)$

$ق'(-١)$ غير موجودة

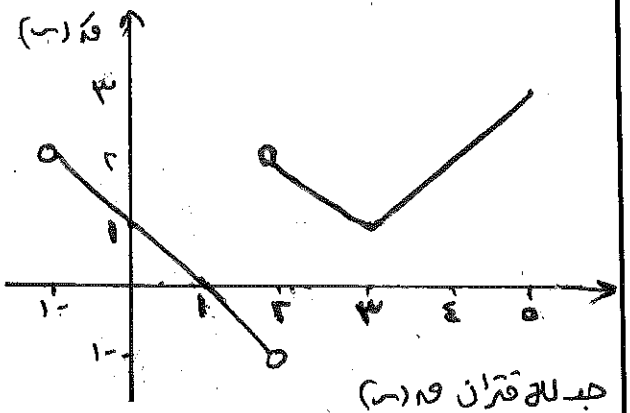
$ق'(٠)$ = صفر

$ق'(١)$ غ.م

$ق'(٣)$ = الميل = $\frac{٣-١}{٤-٢} = ١$

$ق'_+(١)$ = صفر

[٤] اذا كان $ق(س)$ متصلا على [-١، ٥]
وكان منحنى $ق'(س)$ كما في الشكل المرسوم

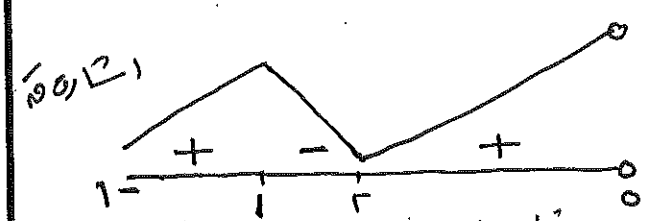


جد للاقتران ق(س)

١) قيم س الحرجة :

س = {-١، ١، ٢}

٢) القيم العظمى والصغرى المحلية



ق(١) عظمى محلية ، ق(٢) صغرى محلية

٣) فترات التزايد والتناقص

ق(س) تزايد في [-١، ١] ، [٢، ٥)

متناقص في [١، ٢]

٤) فترات التقعر ونقط الانقطاف .

ق(س) مقعر للاسفل في [-١، ٣]

مقعر للاعلى في [٣، ٥)

(٣، ق(٣)) نقطة الانقطاف .

٥) $ق'(٣)$ غ.م ، ق(١) = ٠ ، $ق'(٠)$ = الميل = -١

ق(٣) = ١ ، $ق'_+(٣)$ = ٣ ،

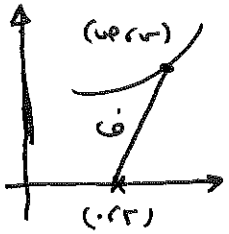
المعدلات المرتبطة بالزمن

٥ تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $ق(س) = \sqrt{س^2 + 9}$ بحيث يزداد الاحداثي السيني لها بمعدل ٣ سم/ث . ما معدل تغير بعدها عن النقطة (٠،٤) عندما يكون الاحداثي الصادي لها = ٥ سم .

نفرض النقطة المتحركة = $(س، ص) = (س، ق(س))$

$\frac{دس}{دن} = ٣$

المطلوب : $\left|\frac{دف}{دن}\right|_{ص=٥} = ؟$



$ف = \sqrt{(س-٠)^2 + (ص-٤)^2}$ ولكن $ص = \sqrt{س^2+9}$

$ف = \sqrt{س^2 - ٤س + ٤ + س^2 + 9}$

$ف = \sqrt{٢س^2 - ٤س + ١٣}$

$\frac{دف}{دن} = \frac{٤س - ٤}{٢\sqrt{٢س^2 - ٤س + ١٣}} \times \frac{دس}{دن}$

عندما ص = ٥

$\sqrt{س^2+9} = ٥$
$س^2 = ١٦$
$س = ٤$

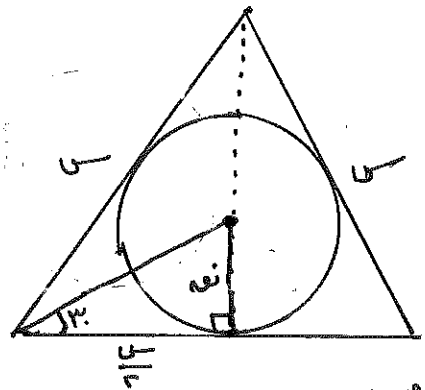
$= \frac{١٦ - ٤}{٢\sqrt{٢٩}} \times ٣$
$= \frac{١٢}{\sqrt{٢٩}}$

٦ تتمدد أضلاع مثلث متساوي الاضلاع بمعدل ١ سم/ث . رسمت دائرة داخل المثلث تمس أضلاعه وأخذت تتمدد مع المثلث . جد معدل تغير مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ٨ سم .

نفرض طول ضلع المثلث = س

نصف قطر الدائرة = نق

$\frac{دس}{دن} = ١$



المطلوب : $\left|\frac{دم}{دن}\right|_{س=٨} = ؟$

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^2 - \pi نق^2$ لكن :

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^2 - \pi \times \frac{س^2}{١٢}$

$م = (\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}) س^2$

$\frac{دم}{دن} = ٢(\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}) س \frac{دس}{دن}$

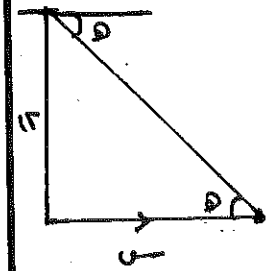
$= ٢(\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}) \times ٨ \times ١ = ٤\sqrt{٣} - \frac{٤}{٣}\pi$

ظا٣٠ = $\frac{نق}{\frac{س}{٢}}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢نق}{س}$

$\therefore نق = \frac{س}{٢\sqrt{٣}}$

٧ من قمة برج ارتفاعه عن الارض ١٢ م رصد قارب يسير على سطح بحيرة مبتعداً عن البرج بسرعة ١،٥ م/ث . ما معدل تغير زاوية انخفاض القارب عن قمة البرج عندما يكون القارب على بعد ٩ م من قاعدة البرج .



$\frac{دس}{دن} = ١،٥$ ، $\left|\frac{دهـ}{دن}\right|_{س=٩} = ؟$

ظاهـ = $\frac{١٢}{س}$

$\frac{دهـ}{دن} \times قاهـ = \frac{-١٢}{س^2} \times \frac{دس}{دن}$

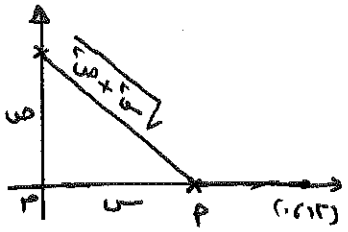
عندما س = ٩
ظاهـ = $\frac{١٢}{٩}$
ظاهـ = $\frac{٤}{٣}$
قاهـ = ١ + ظاهـ
قاهـ = $\frac{١٦}{٩}$ + ١
قاهـ = $\frac{٢٥}{٩}$

$\frac{دهـ}{دن} \times \frac{٢٥}{٩} = \frac{-١٢ \times ١،٥}{٨١}$

$\frac{دهـ}{دن} = \frac{-١٢ \times \frac{٣}{٢}}{٢٥ \times \frac{٩}{٣}} = \frac{-٦}{٢٥ \times ٣}$

$= \frac{-٢}{٢٥}$

٨ بدأت النقطة م الحركة من النقطة (٠،٦،١٢) مقتربة من نقطة الأصل م بسرعة ٢ سم/ث وفي نفس اللحظة بدأت النقطة ب الحركة من نقطة الأصل على محور الصادات الموجب مبتعدة عنها بسرعة ٣ سم/ث . ما معدل تغير محيط المثلث م م ب عندما تكون ب على بعد ٦ سم من نقطة الأصل



$\frac{د س}{د ن} = -٢$

$\frac{د ص}{د ن} = ٣$

المطلوب :

$\left| \frac{د ع}{د ن} \right|_{ص=٦} = ؟$

$ع = س + ص + \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{د س}{د ن} + \frac{د ص}{د ن} + \frac{٢س \frac{د س}{د ن} + ٢ص \frac{د ص}{د ن}}{٢\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

عندما ص = ٦

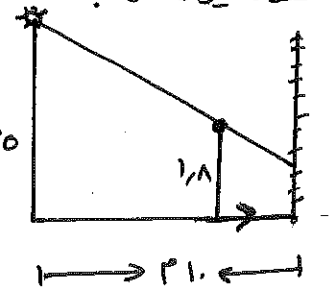
$ص = \frac{د ص}{د ن} \times ن \leftarrow ٦ = ٣ن \leftarrow ن = ٢$

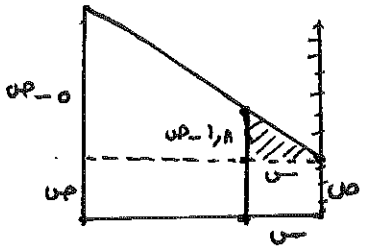
$\therefore س = \frac{د س}{د ن} \times ن + ١٢ = -٢ \times ٢ + ١٢ = ٨$

$\therefore \frac{د ع}{د ن} = -٢ + ٣ + \frac{-١٦ + ١٨}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٦}{٥}$

٩ يقع مصباح كهربائي على ارتفاع ٥ م عن الأرض وعلى بعد ١٠ م من حائط رأسي كما في الشكل المرسوم .

إذا سار رجل طوله ١،٨ م على سطح الأرض بسرعة $\frac{١}{٢}$ م/ث مقتربا من الحائط . فما سرعة ظل رأس الرجل على الحائط عندما يكون على بعد ٢ م من الحائط





$\frac{د س}{د ن} = -\frac{١}{٢}$

$\left| \frac{د ص}{د ن} \right|_{س=٢} = ؟$

من تشابه المثلثات :

$\frac{١،٨ - ص}{س} = \frac{٥ - ص}{١٠} \leftarrow ١٨ - ١٠ص = ٥س - ٢ص$

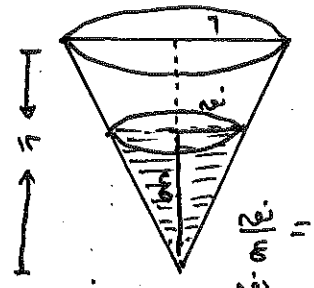
$س ص - ١٠ص = ٥س - ١٨$

$ص(س - ١٠) = ٥س - ١٨ \leftarrow ص = \frac{٥س - ١٨}{س - ١٠}$

$\frac{د ص}{د ن} = \frac{(س - ١٠) \times ٥ - (٥س - ١٨) \times ١}{(س - ١٠)^٢} \times \frac{د س}{د ن}$

$= -\frac{٣٢}{٦٤} \times -\frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$ م/ث .

١٠ وعاء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٦ سم ورأسه إلى أسفل . يُصب فيه الماء بحيث تزداد مساحة السطح العلوي للماء بمعدل ٤π سم^٢/د . ما معدل تغير حجم الماء بعد ٤ دقائق من صب الماء في الوعاء .



$\frac{د م}{د ن} = ٤\pi$

$\left| \frac{د ع}{د ن} \right|_{ن=٤} = ؟$

$ع = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع$ لكن $\frac{نق}{ع} = \frac{٦}{١٢}$

$\frac{نق}{ع} = \frac{١}{٢} \leftarrow ع = ٢نق$

$ع = \frac{\pi}{٣} نق^٢ \times ٢نق$

$ع = \frac{٢\pi}{٣} نق^٣$ ، $م = \pi نق^٢$

$\frac{د ع}{د ن} = ٢\pi نق^٢ \frac{د نق}{د ن}$ و $\frac{د م}{د ن} = ٢\pi نق \frac{د نق}{د ن}$

$\therefore \frac{د ع}{د ن} = \frac{١}{٢} \times ١٦ \times ٢\pi$

$= ١٦\pi$

عندما ن = ٤

$م = \frac{د م}{د ن} \times ٤ = ١٦\pi$

$\pi نق^٢ = ١٦\pi \leftarrow نق = ٤$

$\frac{د نق}{د ن} \times ٤ \times ٢\pi = ٤\pi$

$\frac{د نق}{د ن} = \frac{١}{٢}$ ←

تطبيقات القيم القصوى

١١ ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٤ سم .

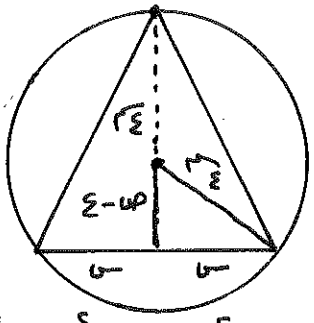
مساحة المثلث أكبر ما يمكن

م = ½ القاعدة × الارتفاع

م = ½ × ٢س × ص

م = س ص

$م = ص\sqrt{8ص - ص^2}$



$س^2 + (ص-٤)^2 = 16$

$س^2 + ص^2 - 8ص + 16 = 16$

$س^2 = 8ص - ص^2$

$س = \sqrt{8ص - ص^2}$

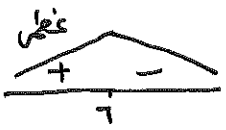
$م' = ص \times \frac{8 - 2ص}{2\sqrt{8ص - ص^2}} + \sqrt{8ص - ص^2} = صفر$ (×2√(8ص−ص²))

$\frac{4ص - ص^2}{\sqrt{8ص - ص^2}} = -\sqrt{8ص - ص^2}$

$4ص - ص^2 = -8ص + ص^2$

$2ص^2 - 12ص = 0 \leftarrow 2ص(ص-6) = 0$

ص = ٠ ، ص = ٦



$م = 6 \times \sqrt{48 - 36}$

$م = 6 \times \sqrt{12} = 6\sqrt{12}$ سم²

١٢ صندوق على شكل متوازي مستطيلات طول قاعدته ضعفي عرضها وحجمه ٧٢ سم³ ما أقل مساحة كلية ممكنة لهذا الصندوق

عرض القاعدة = س ← طولها = ٢س

والارتفاع = ص

المساحة الكلية أقل ما يمكن

م = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$م = 6س ص + 4س^2$

$م = 6س \times \frac{36}{س^2} + 4س^2$

$م = \frac{216}{س} + 4س^2$

$م' = -\frac{216}{س^2} + 8س = 0$

$8س^3 = 216 \leftarrow س^3 = 27 \leftarrow س = 3$

$\therefore م = \frac{216}{3} + 4 \times 9$

م = ١٠٨ سم² .

لكن ٤ص = ٧٢

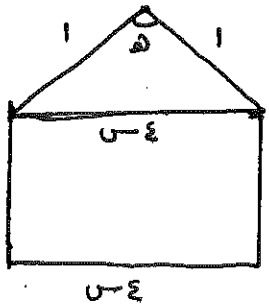
$2س^2 ص = 72$

$ص = \frac{36}{س^2}$

١٣ يمثل الشكل المرسوم نافذة مكونة من مستطيل طوله أربعة أمثال عرضه ويعلوه مثلث متساوي الساقين طول كل من ضلعيه ١ متر . ما قيمة زاوية رأسه هـ التي تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

عرض المستطيل = س

∴ طوله = ٤س



مساحة النافذة أكبر ما يمكن س

م = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$م = س \times 4س + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times جاهـ$

$م = 4س^2 + \frac{1}{2} جاهـ$

لكن $(4س)^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times تاهـ$

$16س^2 = 2 - 2تاهـ$ ÷ 4

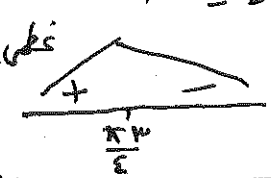
$\therefore 4س^2 = \frac{1}{2}(1 - تاهـ)$

$م = \frac{1}{2}(1 - تاهـ) + \frac{1}{2} جاهـ$

$م' = \frac{1}{2}(جاهـ + تاهـ) = 0$

جاهـ = −تاهـ ← ظاهـ = −١

$\therefore هـ = \frac{3\pi}{4}$



١٤ ما أكبر حجم يمكن لاسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم زاويته رأسه ٦٠° ونصف قطر قاعدته ٦ سم .

حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن

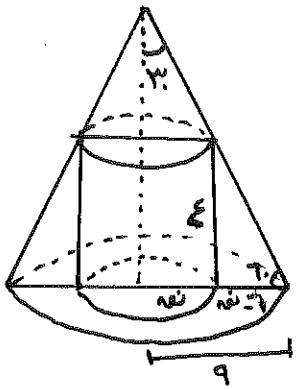
$ح = \pi نق^2 ع$

لكنه

$ظا ٦٠ = \frac{ع}{٦ - نق}$

$\sqrt{٣} = \frac{ع}{٦ - نق}$

$ع = \sqrt{٣}(٦ - نق)$

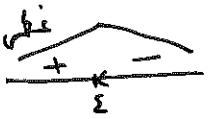


$ح = \pi نق^2 \times \sqrt{٣}(٦ - نق)$

$ح = \pi \sqrt{٣}(٦ نق^2 - نق^3)$

$ح' = \pi \sqrt{٣}(١٢ نق - ٣ نق^2) = ٠$

$٣ نق(٤ - نق) = ٠ \leftarrow نق = ٠$ ، $\boxed{نق = ٤}$



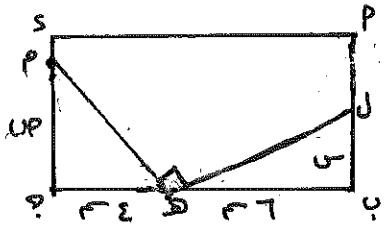
$\therefore ح = \pi \times ١٦ \sqrt{٣} \times ٢$

$= ٣٢ \sqrt{٣} \pi$ سم^3

١٥ $ب ج د$ ، $ب ج = ٤٨$ سم ، $ب ج = ٨٠$ سم

قياس $\angle ل م ك = ٩٠°$ كما في الشكل المرسوم

ما قيم $س$ ، $ص$ التي تجعل مساحة الشكل $ل م ك د$ أكبر ما يمكن .



مساحة الشكل أكبر ما يمكنه

$م =$ مساحة المستطيل $-$ مساحة المثلثين

$م = ٨٠ - (\frac{١}{٢} \times ٤ ص + \frac{١}{٢} \times ٦ س)$

$م = ٨٠ - ٢ ص - ٣ س$

ولكن $\Delta ل ب د$ ، $\Delta ك ج د$ متشابهان .

لأن : $\angle ١ + \angle ٢ = ٩٠$ ، $\angle ٢ + \angle ٣ = ٩٠$

$\therefore \angle ١ = \angle ٣$

$\frac{س}{٦} = \frac{٤}{ص}$ ← $س ص = ٢٤$

$ص = \frac{٢٤}{س}$

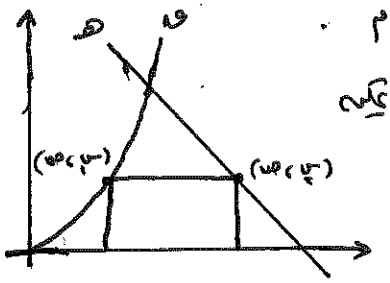
$\therefore م = ٨٠ - \frac{٤٨}{س} - ٣ س$

$م' = \frac{٤٨}{س^2} - ٣ = ٠$ ← $س^2 = ١٦$

$\boxed{س = ٤}$

$\therefore ص = \frac{٢٤}{٤} = ٦$

١٦ ما بعدي مستطيل ذو أكبر مساحة يمكن رسمه بحيث ينطبق أحد أبعاده على محور السينات ويقع رأساه الآخران في الربع الأول على منحنى الاقتران : $ق(س) = ٩ - س^2$ ، $ق(س) = ص$ كما في الشكل المرسوم .



مساحة المستطيل أكبر ما يمكنه

$م =$ الطول $\times$ العرض

$م = (س_2 - س_1) \times ص$

$م = (\frac{٩ - س_2^2}{٢} - س_1) \times ص$ لكنه $ق(س_1) = ص$

$م = (\frac{٩ - س_1^2}{٢} - س_1) \times س_1^2$

$\left.\begin{array}{l} س_1^2 = ٩ - ٢ س_2 \\ س_2 = \frac{٩ - س_1^2}{٢} \end{array}\right\}$

$م = \frac{٩}{٢} س_1^2 - \frac{١}{٢} س_1^4 - س_1^3$

$م' = ٩ س_1 - ٢ س_1^3 - ٣ س_1^2 = ٠$

$-س_1(٢ س_1^2 + ٣ س_1 - ٩) = ٠$

$س_1 = ٠$ ، $(٢ س_1 - ٣)(س_1 + ٣) = ٠$

$\therefore س_1 = \frac{٣}{٢}$ ، $س_1 = -٣$ (مرفوض)

$\therefore س_2 = \frac{٥٧}{٨}$

$\therefore$ طوله $= س_2 - س_1 = \frac{١٥}{٨}$ سم

عرضه $= ص = (\frac{٣}{٤})^2 = \frac{٩}{٤}$ سم