الوحدة الرابعة

التكـامـل

أولاً: التكامل غير المحدود

عناصر خطة التكامل

(أ) ٦ قواعد التكامل
(ب) ٣ تجهيزات
(جـ) ٢ تجهيزات تفوق

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة (1): $\int$ العدد . $\overset{\text{رقم}}{\text{رس}}$ ← العدد س + جـ

قاعدة (2): $\int$ $س^{ن}$ رس ← $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ

قاعدة (3): $\int$ $أ\,س^{ن}$ رس ← $أ\,\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + جـ

ملاحظة : أهم قاعدة لا تنسى

$\int$ $س^{ن}$ رس ن
- موجب ← نزيد درجة + جـ
- سالب ← انزل درجة + جـ
- كسر $\frac{أ}{ب}$ ← $\frac{ب}{أ+ب}$ $س^{\frac{أ+ب}{ب}}$ + جـ

أمثلة : جد التكاملات الآتية:

1) $\int$ $س^{٥} + س^{٣} + ٩س + ١٨$ رس

2) $\int$ $٣س^{\frac{٥}{٢}} + ٩س^{\frac{-٧}{٢}} + ٨س^{-٢} + ١٨$ رس

قاعدة (4): قوس بداخله معادلة درجة أولى

$\int$ $(أ\,س + ب)^{ن}$ رس ← $\frac{(أ\,س+ب)^{ن+1}}{أ \times (ن+1)}$

قاعدة (5): تكامل الاقترانات الدائرية

$\int$ جا س رس = − جتا س + جـ

$\int$ جتا س رس = جا س + جـ

$\int$ $قا^{٢}$ س رس = ظا س + جـ

قاعدة (6): تكامل الاقترانات المثلثية في الزاوية خطية $(أ\,س + ب)$ First class

$\int$ جا $(أ\,س + ب)$ رس ← $\frac{-\text{جتا}(أ\,س+ب)}{أ}$ + جـ

$\int$ جتا $(أ\,س)$ رس ← $\frac{\text{جا}(أ\,س)}{أ}$ + جـ

$\int$ $قا^{٢}(أ\,س + ب)$ رس ← ظا $(أ\,س + ب)$ + جـ

$\int$ $٤\,قا^{٢}$ س + ٤ جا س + ٣ جتا س رس

$\int$ ٢ جا س وس

$\int$ جتا ٢س + جا ٧س وس

$\int$ (٣س − ٣)^{٢} وس

$\int$ جتا(٩ − ٨س) وس =

$\int$ (٢س − ٣)$^{-٦}$ وس

أ) تجهيزات لازمة قبل التكامل

1) الجذر $\int$ $\sqrt[ن]{\text{س}^{م}}$ ← نجهز ← $\int$ س$^{\frac{م}{ن}}$ ← الداخل / الخارج

$\int$ $\sqrt{\text{س}}$ وس

$\int$ $\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}}$ وس

$\int$ $\sqrt[٥]{(٥ - ٣\text{س})^{٣}}$ وس

2) الضرب نجهز

$$\int أ\,س^{ن} \times ب\,س^{م}\,د س \leftarrow \int أ \times ب\,س^{م+ن}\,د س$$

$$\int (٥س + ٢)(س - ١)\,د س$$

$$\int س^{٢}(٢س^{٢} + ٩س)\,د س$$

3) قسمة

أ) $\int \frac{\text{عدد}}{س^{ن}}\,د س \leftarrow$ نجهز $\leftarrow \int$ **عدد** $س^{-ن}\,د س$

ب) $\int \frac{أ + ب - جـ}{س^{ن}}\,د س \leftarrow$ **نوزع**

ج) $\int \frac{أ + ب - جـ}{س \mp أ}\,د س \leftarrow$ **نحلل**

$$\int \frac{١}{س^{٥}}\,د س$$

$$\int \frac{س^{٦} - ٥}{س^{٢}}\,د س$$

$$\int \frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}\,د س$$

$$\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, د س$$

$$\int \frac{س^{٢} - ٥س - ٢٤}{٢س - ١٦} \, د س$$

$$\int ٣س^{٢} - \frac{٢}{س^{٣}} + ٤ \sqrt[٣]{س^{٢}} \, د س$$

ب) تجهيز تفوق

1) ظا س ← نجهز ← **نضع محلها** $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

2) **عند وجود** قا س **أو** جتا س **في المقام**

$$\int \frac{أ}{\text{جتا}^{٢} س} + \frac{ب}{\text{قا س}} \, د س \leftarrow \text{هنا نجهز} \int أ \, \text{قا}^{٢} س + ب \, \text{جتا س} \, د س$$

$$\int \underset{\downarrow}{\text{ظا س}} \, \text{جتا س} \, د س$$

$$\int \frac{٦}{\text{جتا}^{٢} س} + \frac{٨}{\text{قا س}} \, د س$$

تدريب (2): ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1) $\int$ ص د س يساوي:

أ) صفر ب) س^{٢} ج) س + جـ د) ١ + جـ

2) $\int$ −٢ جا س د س يساوي:

أ) ٢ جتا س + جـ ب) ٢ جتا ٢س + جـ ج) −٢ جا س + جـ د) ١ + جـ

3) $\int$ م د س حيث م عدد ثابت:

أ) م + جـ ب) م س + جـ ج) صفر د) $\frac{م^{٢}}{٢}$ + جـ

4) $\int$ ٦ قا^{٢} ٣س د س يساوي:

أ) ٦ ظا ٣س + جـ ب) ٢ ظا ٣س + جـ ج) ١٨ ظا ٣س + جـ د) صفر

5) $\int$ صفر د س يساوي:

أ) صفر ب) س + جـ ج) $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ د) جـ

ثانياً: التكامل المحدود

أ) إيجاد قيمة (ناتج التكامل المحدود)

القاعدة العامة: جد $\int_{أ}^{ب}$ ق`(س) د س

١) نعمل تكامل للمقدار $\Big[\ \Big]_{أ}^{ب}$

٢) أحلى قوسين بينهم $\boxed{-}$

$$\Big(\text{نعوض بالرقم اللي فوق}\Big) - \Big(\text{نعوض بالرقم اللي تحت}\Big)$$

أمثلة:

1) $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} د س

2) $\int_{١}^{٣}$ $\frac{١}{س^{٣}}$ د س

3) $\int_{-1}^{3} (2س + 7)\ د س$

4) $\int_{0}^{2} (1 - 4س)\ د س$

ب) إيجاد مجاهيل التكامل المحدود

مخطط الخطوات

$\int_{أ}^{ب} \square\ د س$ = عدد جد الثابت م

أ) نعمل تكامل محدود للمقدار

سينات [ ]$_{أ}^{ب}$ ( ) نلغي الفتحة ( ) = ق( )

[ق(س)]$_{أ}^{ب}$ ( ) − ( )

ب) ونعوض ونقوم بإيجاد المجهول بس نخلص جهة اليمن = العدد

ج) ويصبح السؤال حل معادلة إيجاد مجاهيل (عادي)

أمثلة :

1) إذا كان $\int_{أ-1}^{٥أ+٥} ق(س)\ د س$ ، $د س = ٠$ ، فما قيم (أ)

2) إذا كان $\int_{٣}^{أ} ٣س^{٢}\ د س = -٣٥$ ، فما قيمة (أ)

3) إذا كان $\int_{1}^{جـ} (٢س + ٣)\,د س = ٠$ ، فما قيم (جـ)

الاشتقاق في وجود التكامل

إذا طلب في الامتحان في مادة الفصل الثاني اشتقاق ← يعني طلب

جد $ق'(س)$ / أو $\frac{د ص}{د س}$ / أو $ق'(٢)$

وهذا السؤال غالباً سيبدأ به أسئلة وحدة التكامل في الورقة الإمتحانية

هنا المخطط التالي يوضح ماذا نفعل؟ جد $ق'(س)$

هنا لدينا حالتين وجود

1) وجود التكامل غير المحدود

هنا نثبت إشارة الـ = ونقسم السؤال إلى جهتين

جهة = جهة

$\int$ □ د س = □

↓ ↓

نلغي إشارة التكامل مع د س ونسخ الموجود بينهم = جهة بدون تكامل = نشتقها على القواعد

2) وجود التكامل المحدود $\int_{أ}^{ب}$ □ د س

$ق'(س)$ = صفر

مشتقة التكامل المحدود دائماً ← صفر

أمثلة:

1) إذا كان $ق(س) = \int \frac{٣}{س^{٢} + ٧س + ١}\,د س$ ، جد $ق'(١)$

2) إذا كان $\int$ عَ(س) ورس = ٦س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦س + ٥

جد عَ(١)

3) إذا كان $\int$ فَ(س) ورس = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٥

جد فـ(١) ، فَ(١)

4) إذا كان $\int$ فَ(س) ورس = س^{٣} + ٥س ورس ، جد فَ(٢)

ج) صيغ الأسئلة التي تبدو صعبة تقوم على موضوعين ← معلومتين:

١) $\int_{أ}^{ب}$ فَ(س) ورس = [فـ(س)]$_{أ}^{ب}$

التكامل بيلغي الفتحة

٢) أي فترة موجودة في السؤال الفترة [أ ، ب] هي حدود التكامل $\int_{أ}^{ب}$ □ ورس

أمثلة:

2) إذا كانت فَ(س) هي مشتقة الاقتران فـ المعرف على [٢ ، ٩] وكان فـ(٢) = ١١ ، فـ(٩) = ٢٥ احسب

$\int_{٢}^{٩}$ فَ(س) ورس

3) إذا كانت هَ(س) = ٦س هي مشتقة (هـ) المعرف على [−٢ ، ٣] فما قيمة هـ(٣) − هـ(−٢)

ص = $\int_{١}^{٣}$ [$\frac{س - ١}{س + ٢}$] دس + $\int_{١}^{٣}$ [$\frac{٥س}{س^{٢} + ٩}$] دس علماً بأن هـ(٢) = ٩ ، هَ(٢) = ٣ أوجد $\frac{ص}{س}$ | $_{س=٢}$

للتكامل المحدود ٣ خصائص رئيسية

١	٢	٣
= تساوي الحدود ↓ الناتج صفر	قلب الحدود ↓ نعكس إشارة الناتج	+ جمع تكاملين محدودين ↓ خاصية الإضافة

مع الانتباه للخواص الخطية

أ) خاصية التوزيع ← الخاصية الخبيثة

$\int_{أ}^{ب}$ (هـ(س) ∓ مقدار) دس

لازم نوزع التكامل يعني نعمل تكامل للمقدار الموجود بجانب هـ(س)

$\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) ∓ مقدار دس (هذا نعمله تكامل محدود)

ب) $\int_{أ}^{ب}$ ل هـ(س) دس ← ل $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

عدد مضروب في اقتران — العدد بينزل زي ما هو ما بنعمله تكامل

أمثلة:

1) $\int_{٢}^{٢}$ س^{٥} + ٩س دس =

2) إذا كان $\int_{٧}^{٤}$ هـ(س) دس = ٢ ، فإن $\int_{٤}^{٧}$ هـ(س) دس =

1) إذا كان $\int_{٣}^{٥} ٢ه(س)\ د س = ١٢$ ، فإن $\int_{٥}^{٣} ه(س)\ د س =$

2) إذا كان $\int_{٧}^{٤} ٢ه(س)\ د س = -٨$ ، فإن $\int_{٤}^{٧} ٣ه(س) - ٢س + ١\ د س =$

3) إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٢ه(س) - ٣\ د س = ٩$ ، جد $\int_{-١}^{٢} ه(س) + ٥س + ٧\ د س$

4) إذا كان $\int_{-١}^{٣} ه(س)\ د س = ٦$ ، $\int_{٣}^{-١} \frac{ع(س)}{٢}\ د س = -٥$ ، جد ما يلي:

أ) $\int_{-١}^{٣} ه(س) - ع(س)\ د س$

ب) $\int_{-١}^{٣} ٦س^{٢} - ٣ع(س) + ٢\ د س$

5) إذا كان $\int_{7}^{1} \text{ق}(س)\ \text{د}س = ٥$ ، $\int_{7}^{٤} \text{ق}(س)\ \text{د}س = ٩$ جد $\int_{1}^{٤} \text{ق}(س)\ \text{د}س$

6) إذا كان $\int_{٣}^{٢} ٢\text{ق}(س) - ٢\ \text{د}س = ٨$ $\int_{٤}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{د}س = -١٢$ ، جد ما يلي:

أ) $\int_{٣}^{٢} \text{ق}(س)\ \text{د}س$

ب) $\int_{٤}^{٣} \frac{\text{ق}(س)}{٢} + ٣س^{٢}\ \text{د}س$

7) إذا كان $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(س) - ٢س\ \text{د}س = ٨$ $\int_{٣}^{٢} \frac{٤\text{ق}(س)}{٣}\ \text{د}س = ٢$، جد $\int_{١}^{٣} ٥\text{ق}(س) + ٣س^{٢}\ \text{د}س$

إذا كان ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ١٩ ، جد $\int_{١}^{٢} ٢\text{قَ}(س) + ٣س^{٢} - ٧\ \text{د}س$

قاعدة الاقتران

١) $\text{ق}(س) = \int \text{ق}'(س)\ \text{د}س$

٢) تكامل عادي $+ \text{جـ}$

٣) التخلص من (جـ) من المساعدة بالسؤال

أمثلة :

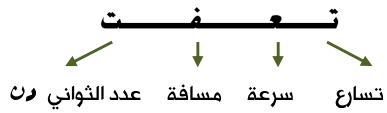
1) إذا كان $\text{ق}'(س) = ٣س^{٢} - ٢س$ ، احسب قاعدة الاقتران ق علماً بأن النقطة $(٢ ، ٣)$ تقع عليه

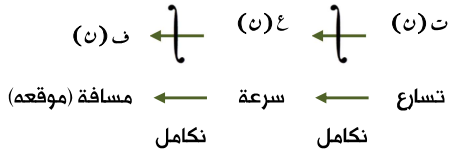
2) إذا كان ق قابل للاشتقاق وكانت $\text{ق}'(س) = ٦س - ٨س^{٣} + ٥$ ، وكان $\text{ق}(-١) = ٣$ احسب قاعدة الاقتران

3) إذا كانت $\text{ق}'(س) = (٢س + ١)^{٣}$ ، احسب قاعدة الاقتران المار بالنقطة $(٠ ، ١٣)$

4) إذا كانت $\text{ق}'(س) = ٢س - ٥$ ، وكان $\text{ق}(٢) = ٤$ ، احسب ق (١)

5) إذا كانت $ق'(س) = ٣س(٦ - ٥س + ٤س^{٣})$ ، وكان $ق(٢) = -١$ ، احسب قيمة $ق(١)$





ت (ن) =

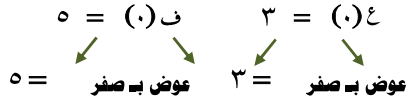
ع (ن) = نعمل تكامل

ف (ن) = نعمل تكامل كمان مرة

- الخطوات اللي رح نعملها كل مرة للانتقال من حرف لآخر

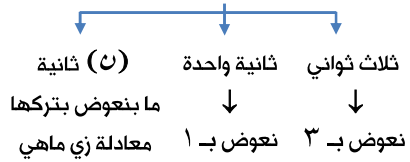
١) نعمل تكامل + جـ

٢) نحسب قيمة جـ من المعلومة



٣) نضع المعادلة كاملة + قيمة جـ

٤) نعوض بعدد الثواني بعد كلمة (بعد مرور)



أمثلة:

1) يتحرك جسيم حسب العلاقة: ع(ن) = (٢ ن + ٤) م / ث ، احسب المسافة بعد مرور (٣) ثواني علماً بأن الموقع الابتدائي ف(٠) = ٦

2) إذا كان تسارع جسيم معطى بالعلاقة: ت = ٦ ن م / ث^{٢} ، احسب المسافة علماً بأن ع(٠) = ٢ م / ث ، ف(٠) = ٥ م

ثالثاً: التكامل بالتعويض

متى نستخدم طريقة التكامل بالتعويض؟

نستخدم هذه الطريقة عند وجود ضرب بين اقترانين وبشرطين:

١) ما بنقدر نضربهم

٢) اقتران اكبر من الآخر بدرجة واحدة فقط

من الآخر نستخدمها في الحالتين:

أ) ∫ (سينات) × (سينات)^{ن} ← يوجد أس s لـ دس

ب) ∫ (سينات) × جا (معادلة)

جتا (معادلة)

قا^{٢} (معادلة)

ظا (معادلة)

قَا (معادلة) أو ظا (معادلة)

هنا نلجأ للتكامل باستخدام طريقة التعويض وفق الخطوات التالية:

أولاً: بجانب السؤال نعمل غرفة الأسرار

١) ص = المعادلة الأكبر

٢) المشتقة = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

٣) $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{مشتقة}}$

جد ∫ (معادلة صغيرة) (معادلة كبيرة)^{ن} دس

↓ ↓ ↓

تصبح محلها تنزل زي ما هي

ثانياً:

∫ (معادلة صغيرة) ص^{ن} $\frac{\text{دص}}{\text{مشتقة}}$

اشطب فورا نكامل اشطب

$\frac{\text{ص}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

نرجع ص معادلتها $\frac{(\text{معادلة كبيرة})^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

أمثلة: جد قيمة التكاملات الآتية:

1) $\int ٢س(س^{٢}+١)^{٧}\ د س$

1) $\int \frac{٤س-٦}{\sqrt[٣]{س^{٢}-٣س+١}}\ د س$

2) $\int (٢س+١)\sqrt[٥]{س^{٢}+س-٤}\ د س$

3) $\int (٤س+٦)\,قا^{٢}(س^{٢}+٣س+٨)\ د س$

4) $\int \frac{٢س + ١}{جتا^{٢}س^{٢} + س + ٩}$ ورس

5) إذا كان ق(٩) = ١٩ ، ق(١٣) = ٢ ، جد قيمة $\int_{١}^{٠} (٤س + ٦) ق'(س^{٢} + ٣س + ٩)$ ورس

رابعاً: قاعدة الاقتران ميل المماس

هنا سنقوم بإيجاد المساحة باستخدام التكامل المحدود ← نحتاج لـ اقتران + حدود

صيغة السؤال: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين؟

أولاً: اقتران واحد ومعه المحدود ق(س) = ... ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب

أو الفترة [أ ، ب] ← **الإجراءات**

أ) مساواة الاقتران بالصفر ق(س) = ٠ ، لإيجاد قيم (س) فمثلاً إذا كانت قيمة (س) الناتجة هي س = جـ

ب) نشوف هل [جـ] تقع

بين العددين [أ ، ب]

إذا بينهم نرتبهم من الصغير للكبير

[أ ، جـ ، ب]

$م_{١}$ $م_{٢}$

ويكون لدينا مساحتين المساحة

المساحة = $م_{١} + م_{٢}$

$م = \int_{أ}^{جـ} ق(س)$ ورس + $\int_{جـ}^{ب} ق(س)$ ورس

↓ ↓

نعمل تكامل محدود **نعمل تكامل محدود**

ثم نجمع المساحتين

أو مش بينهم هنا

نعمل [جـ] ويكون

لدينا مساحة واحدة فقط

$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)$ ورس

↓

نعمل تكامل محدود

والناتج هو المساحة

أمثلة:

1) احسب المساحة المحصورة بين ق = ٢س − ٢ ومحور السينات عندما س = ٣ ، س = ٥

2) احسب المساحة المحصورة بين ق = ٢س − ٢ ومحور السينات على [−١ ، ٣]

3) احسب المساحة المحصورة بين ق = ٤ − ٢س ومحور السينات عندما س = −١ ، س = ٣

ثانياً: اقتران واحد ومحور السينات (بدون حدود) ق(س) = ... ومحور السينات

الإجراءات

أ) مساواة الاقتران بالصفر ق(س) = ٠

وذلك لإيجاد قيم (س) وهي تكون الحدود

ب) نحلل لإيجاد قيم (س)

المعادلة كلها سينات (نأخذ عامل مشترك)

مش كلها سينات (نفتح قوسين)

بعد إيجاد قيم (س) بعد إيجاد مثلاً $\begin{cases} س = أ \\ س = ب \end{cases}$

ج) نعمل تكامل محدود لإيجاد قيمة

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س الناتج هو المساحة (الإجابة)

← كبير

← صغير

أمثلة:

1) احسب المساحة المحصورة بين ق = س^{٢} − ٤ ومحور السينات

2) احسب المساحة المحصورة بين $ق = ٩ - س^{٢}$ ومحور السينات

3) احسب المساحة المحصورة بين $ق = س^{٢} - ٥س$ ومحور السينات

4) احسب المساحة المحصورة بين $ق = ٦س - ٣س^{٢}$ ومحور السينات

5) احسب المساحة المحصورة بين $ق = س^{٢} + ٢س - ٣$ ومحور السينات

خامساً: إيجاد المساحة بين اقتران ومحور السينات

خطوات الحل:

١) لازم استخراج المعطيات من السؤال أي مساحة كل منطقة ووضعها على الرسمة

٢) الإجابة على المطلوب مع الانتباه

المطلوب

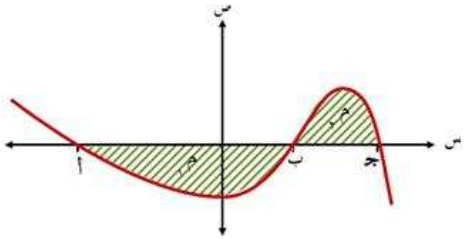
مساحة كله موجب ولا تكامل (فوق + تحت −)

ولو طالب منطقتين مساحة نجمع المنطقتين

تكامل فوق + تحت −

أمثلة:

1) في الشكل المجاور إذا كانت $م_١ = ٨$ ، $م_٢ = ٥$ ، أوجد ما يلي:



١) $\int_{أ}^{ب} و(س)\ د س$

٢) $\int_{ب}^{جـ} و(س)\ د س$

٣) $\int_{أ}^{جـ} و(س)\ د س$

٤) المساحة المحصورة على $[أ ، ب]$

٥) المساحة المحصورة على $[ب ، جـ]$

6) المساحة المحصورة على $[أ ، جـ]$

2) إذا كانت $م_١ = ١٣$ ، $م_٢ = ٣$ احسب قيمة $\int_{-٥}^{٣} ٢و(س)\ د س$