سابعاً: الارتباط

1. معامل ارتباط بيرسون

١. **الارتباط من الكلام:** العلاقة بين المتغير

- كلما زادت س ← زادت ص طردي
- كلما زادت س ← قلت ص عكسي
- قيم س ← لا تؤثر على قيم ص لا توجد علاقة

السؤال الاول: مندوب مبيعات وجد أنه في معظم الحيان كلما تزداد الكمية المعروضة من البسكويت (س)، فإن ذلك يؤدي إلى انخفاض السعر لذلك النوع (ص) ، فأي مما يلي يمثل معامل ارتباط بين المتغيرين (س ، ص) حسب رأي مندوب المبيعات

أ) ٠,٨− ب) ٠,١٧− ج) ٠,٨ د) ٠,١٧

السؤال الثاني في محاضرة ألقاها خبير زراعي أوضح أنه في معظم الأحيان كلما ترتفع أجور عمال الزراعة (س) فإن ذلك يؤدي إلى ارتفاع أسعار البندورة (ص) ، فأي مما يلي يمثل معامل ارتباط بين (س ، ص) حسب قول الخبير

أ) ٠,٩٨− ب) ١,٢ ج) ٠,١٣ د) ٠,٧٢

- أيجاد قيمة معامل الارتباط من خلال دراسة أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل الارتباط

هنا في السؤال راح يعطينا قيمة معامل ارتباط بيرسون جاهزة مثلاً ٠,٨−

وبعطينا علاقتين عُدلت فيهما قيمة كل المتغيرين س ، ص

مثلاً: $س^* = أ\,س + ب$ ، $ص^* = جـ\,ص + د$

هنا ننظر فقط إلى إشارة معامل

س أ		ص جـ
+	←	+
	لهما نفس الإشارة	
−	←	−

يبقى معامل الارتباط كما هو على نفس إشارته ٠,٨

+	←	−
	عكس بعض	
−	←	+

نعكس إشارة معامل الارتباط ٠,٨−

السؤال الثالث: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين (س ، ص) هو (٠,٧) ، فإن قيمة الارتباط بين $س^*$ ، $ص^*$ حيث $س^* = ١ - ٢س$ ، $ص^* = ص + ٤$ تساوي:

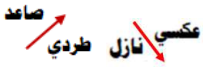
أ) ٠,٧ ب) ٠,٧− ج) ٠,٥٦− د) ٠,٥٦

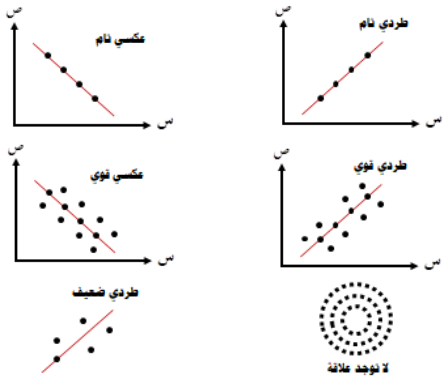
السؤال الرابع: إذا كان معامل الارتباط بين (س ، ص) هو (٠,٦) فإن قيمة معامل الارتباط بين $س^\circ$ ، $ص^\circ$ ، حيث $س^\circ = ٥ - س$ ، $ص^\circ = ص + ٨$ يساوي:

أ) ٠,٦− ب) ٠,٦

ج) ٠,٤ د) ٠,٤−

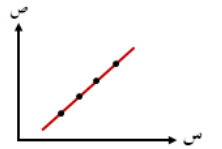
الارتباط من الرسمة





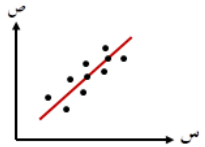
السؤال(٥) : من خلال الأشكال التالية التي تمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص في أشكال الانتشار التالية حدد نوع الارتباط وقيمته ؟

(1)



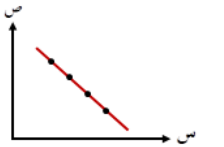
النوع ←
القيمة ←
أ) ١ ب) ٠,٨ ج) −١ د) ٠,٣

(2)



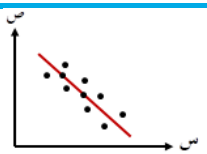
النوع ←
القيمة التقديرية ←
أ) ١ ب) ٠,٨ ج) −٠,٧ د) ٠,٢

(3)



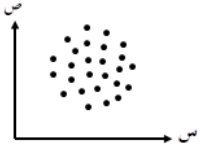
النوع ←
القيمة ←
أ) ١ ب) −٠,٩ ج) −١ د) ٠,٢

(4)



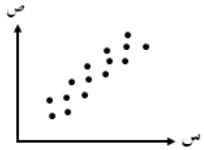
النوع ←
القيمة التقديرية ←
أ) −٠,٩ ب) −١ ج) ٠,٨ د) −٠,٢

(5)



النوع ←
القيمة ←
أ) ١ ب) −١ ج) صفر د) −٠,٧

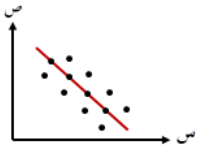
(6)



النوع ←
القيمة التقديرية ←
أ) ٠,٧ ب) −٠,٧ ج) ١ د) −١

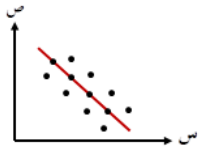
---

١) **إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين** (س ، ص) **يساوي** (٠,٩٤) ، **فإن الارتباط بين** (س ، ص) **هو:**



أ) طردي
ب) عكسي
ج) طردي تام
د) عكسي تام

٢) **يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار لتوزيع ما بين المتغيرين** (س ، ص) **يمكن تقدير الارتباط بين المتغيرين** (س ، ص)



أ) ٠,٨
ب) −١
ج) ١
د) −٠,٨

---

٢. إيجاد معامل ارتباط بيرسون من القانون والجدول

الخطوات ١) **القانون** $ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^{٢} \times \sum (ص - \bar{ص})^{٢}}}$

٢) **نعمل جدول كبير** (٧) **أعمدة من القانون**

السؤال (٦) : إذا كان (س ، ص) متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠) ، وكان $\sum_{ر=١}^{١٠} (ص - \bar{ص})^{٢} = ٤٠٠$ ، $\sum_{ر=١}^{١٠} (س - \bar{س})^{٢} = ٨١$ ، $\sum_{ر=١}^{١٠} (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٣٥$ ، احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س ، ص)

الحل:

السؤال (٧) : يبين الجدول علامات (٥) طلاب في مبحثي الفيزياء والجغرافيا في امتحان قصير النهاية العظمى (١٠) له ، احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س ، ص)

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
(س)	٢	٥	٣	٦	٤
(ص)	٥	٦	٣	٧	٩

السؤال (٨) : يمثل الجدول علامات (٦) طلاب في الرياضيات (س) والجغرافيا (ص) علامته العظمى (١٠)، احسب معامل ارتباط بيرسون

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
(س)	٦	٧	٥	٣	٥	٤
(ص)	٥	٦	٤	١	٥	٣

2. معادلة خط الانحدار

المعادلة $\boxed{ص = أ\ س + ب}$ تستخدم للتنبؤ والتوقع

↓

هذه المعادلة

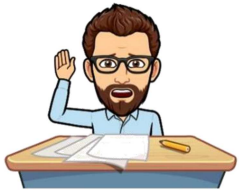
أ) إما معطاه جاهزة في السؤال ب) أو يطلب منك جد معادلة خط الانحدار

أ) في حال كانت المعادلة معطاة جاهزة في السؤال

١) إذا طلب جد قيمة أ ، ب (أ معامل س / ب الرقم الثابت)

٢) إذا طلب تنبأ أو قدر ← عوض مباشرة في المعادلة بقيمة (س)

٣) إذا طلب جد الخطأ في التنبؤ



الحقيقية المتوقعة

الخطأ = ص − ص

الخطأ = $\square$ −(المعادلة)

رقم جاهز نعوض فيها بقيمة س

السؤال (١) : في دراسة أجراها أحد طلبة الدراسات العلية توصل إلى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة إحدى الجامعات فكانت:

ص = ٥٣ + ٥س ، معتمداً معادلة خط الانحدار أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) جد قيم أ ، ب

ب) قدر معدل طالب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية له (٥) ساعات.

ج) إذا كان معدل طالب درس (٨) ساعات يومياً هو (٩٥) ، جد الخطأ بالتنبؤ

السؤال (٢) : توصل باحث تربوي إلى معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل في الثانوية العامة (ص) فكانت: ص = ٣س + ٦٥

أ) ما قيمة كل من أ ، ب

ب) درست طالبة (٨) ساعات يومياً وحصلت على معدل (٨٦) ، احسب الخطأ بالتنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه الطالبة ومعتمداً على معادلة خط الانحدار المعطاة .

السؤال (٣) : إذا علمت أن معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) وعدد الأخطاء (ص) التي يرتكبها موظف في اليوم الواحد هي: ص = ٠,٦ س + ١ ، معتمداً تلك المعادلة أجب عما يأتي:

أ) تنبأ بعدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (١٠) ساعات في اليوم.

ب) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (١٥) ساعة في اليوم هي (٦) أخطاء ، فجد الخطأ بالتنبؤ

ب) في حال طلب جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ

هنا فوراً بكتب قوانين

1. ص = أ س + ب
2. $أ = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^{٢}}$
3. ب = $\overline{ص} - (أ \times \overline{س})$

وهنا لإيجاد أ

- إما المجاميع بتكون معطاة جاهزة في السؤال ← بنعوض فوراً
- بدنا نعمل جدول كبير ٦ أعمدة لإيجاد أ وبعدها نوجد ب ونضعهم في المعادلة

ص = $\square^{أ}$ س + $\square_{ب}$

السؤال (٤) : إذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) وكان $\overline{س}$ = ٥ ، $\overline{ص}$ = ٧٥ ، أ = ٣

أ) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت (س)

ب) جد الخطأ بالتنبؤ إذا كانت س = ٨ والقيمة الحقيقية المناظرة لها (٨٢)

السؤال (٥) : إذا كان (س ، ص) متغيرين عدد قيم كل منهما (٥)، وكان $\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})$ = ٨٠

$\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \overline{س})^{٢}$ = ٤٠ ، $\overline{س}$ = ٦ ، $\overline{ص}$ = ١٣ ، فجد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س)

الحل :

السؤال (٦) : يبين الجدول الآتي علامات (٦) طلاب في امتحاني العلوم (س) والرياضيات (ص) ،

جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) ، إذا علمت قيم (س)

س	٦	٤	٨	٧	٢	٣
ص	٩	٨	١٠	٨	٥	٢

السؤال (٧) : يبين الجدول التالي معدلات خمس طالبات في الثانوية العامة (س) وعدد الساعات (ص) التي تقضيها الطالبة يومياً

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
س	٨	٢	٥	٣	٧
ص	٥	١٥	١٠	٧	١٣

أ) أوجد معادلة خط الانحدار

ب) قدر المعدل المتوقع لطالبة تدرس (٦) ساعات

ج) درست طالبة (٨) ساعات وحصلت على معدل (٩٥) ، احسب الخطأ في التنبؤ

▪ ن! مضروب

القانون: $ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times (ن-٣) \times ..... \times ١$

$ن! = ن \times (ن-١)!$

المضروب ! ← هو حاصل ضرب تنازلي بدءاً من العدد ن وحتى نصل إلى الـ ١

ن!

إيجاد ناتج المضروب

صفر ! = ١ ← ليش ؟ هيك

١! = ١

٢! = ٢ × ١ = ٢

٣! = ٣ × ٢ × ١ = ٦

٤! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

٧! = ٥٠٤٠

يفضل حفظ نواتج الأعداد المبنية أعلاه أسرعلك في الحل

أولويات تنفيذ العمليات الحسابية:

١) الأقواس — نستخدمها عند وجود قسمة للاختصار

↓

٢) الأسس — $ن! = ن \times (ن-١)!$

↓

٣) المضروب ! — $٧! = ٧ \times ٦!$

↓

٤) الضرب والقسمة — $٧! = ٧ \times ٦ \times ٥!$

↓

٥) الجمع والطرح

أمثلة للتوضيح: جد ناتج كلاً مما يلي:

1) ٣! + ٢!

2) (٣ + ٢)!

3) $\frac{٩!}{٧!}$

4) $\frac{١٠! \times (٧-٧)!}{٩! \times ٢!}$

1) (٤ − ٤)! =

2) ٥! × ٣! =

3) (٤ − ٣)! × ٣! =

4) $\frac{٧!}{٥!}$ =

5) $\frac{٩!}{٤! \times ١٦!}$ =

6) ٧! − ٥! =

7) (٢ × ٣)! =

8) ٢! × ٣! =

9) ٣! + ٢! =

10) (٣ + ٢)! =

11) $\frac{٨!}{١٦!}$ =

12) $\frac{٧!}{(٧-٢)!}$ =

إيجاد المجاهيل

بالنظر ⇐ مضروب ! = عدد ⇐ ن! = ١٢٠

قانون ⇐ $\frac{\text{مضروب }!}{\text{مضروب }!}$ ⇐ $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-٢)!} = ١٢$

أمثلة : أوجد (ن) قيمة لكل مما يلي:

1) ٥(ن)! = ٣٠

2) ن! = ٧٢٠

3) ٣(ن)! = ٣٦٠

4) ن! − ٤! = ٩٦

5) ٤ + ٢ن! = ٥٢

6) $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-٢)!} = ١٢$

7) ١٠ + ٣ن! = ١٦

8) (٢ن + ١)! = ١٢٠

9) $\frac{(\text{ن}+١)!}{(\text{ن}-١)!} = ٣٠$

ثانياً: التباديل

التباديل ل(ن ، ر)

◆ ل(ن ، ر) = (ن)(ن − ١)(ن − ٢) ... حسب ☑

قانون ثاني:

◆ ل(ن ، ر) = $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-\text{ر})!}$ ← ممكن نحتاجه في ضع دائرة

ل(٥ ، ٢) = ٥ × ٤ = ٢٠

أمثلة : جد قيمة كلاً مما يلي:

1) ل(٥ ، ٢)

2) ل(٦ ، ٣)

3) ل(٧ ، ٢) + ل(٤ ، ٢)

4) $\frac{\text{ل}(٨ ، ٣)}{!٣}$

5) $\frac{\text{ل}(٧ ، ٥)}{!٥}$

هناك حالات يتم الحل عالسريع بدون قوانين في حالات التالية:

١) ل(ن ، ٠) = ١

٢) ل(ن ، ١) = ن

٣) ل(ن ، ن) = ن!

٤) ل(ن ، ن − ١) = ن!

6) ل(٦ ، ٠) + ل(٩ ، ١) + ل(٤ ، ٤) + ل(٣ ، ٣)

7) $\frac{\text{ل}(٩ ، ٩)}{\text{ل}(٨ ، ٧)}$

المجاهيل التباديل

تباديل = عدد

بناء على جدول الضرب

تباديل = تباديل

افرط القانون

أمثلة : أوجد ما يلي:

1) ل(ن ، ٢) = ٥٦

الحل:

2) ل(ن ، ٣) = ٩ل(ن ، ٢)

الحل:

3) ل(ن ، ٢) = ٤٢

الحل:

4) ل(ن ، ٢) = ٣٠

الحل:

5) ٣ + ٢ل(٦ ، ر) = ٤! + ٣٩

الحل:

6) ل(٦ ، ر) = ١٢٠

الحل:

7) ٨٠ − ٣ل(٤ ، ر) = ٠! + ٧

الحل:

ثالثاً: التوافيق

- **إيجاد الناتج قانونه (طابقين)**

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!} \leftarrow \frac{\text{تباديل}}{\text{مضروب}}$$

$$\binom{٥}{٢} = \frac{ل(٥ ، ٢)}{٢!} = \frac{٤ \times ٥}{١ \times ٢} = ١٠$$

قوانينه

- $\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$
- $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)! \times ر!}$ ← **لضع دائرة**

- **نتائج مهمة:**

١) $\binom{ن}{٠} = ١$

٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

٣) $\binom{ن}{١} = ن$

٤) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{م}$ **عندما** ر = م **أو** ر + م = ن

مثال (١) : أوجد ما يلي:

1) $\binom{٩}{٠} =$

2) $\binom{٧}{٠} =$

3) $\binom{٨}{١} =$

4) $\binom{٧}{٧} =$

إيجاد المجاهيل (ن)

الفوق = الفوق

مجموع التحت = الفوق

مثال (٢) : حل المعادلات التالية:

1) $\begin{pmatrix} س \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ٩ \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} س \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ٨ \end{pmatrix}$

التحت = التحت

مجموع التحت = الفوق

3) $\begin{pmatrix} ٩ \\ س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ \\ ٥ \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} ١٢ \\ س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} ٨ \\ ٢س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ \\ ٦ \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٢س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ \\ س + ١ \end{pmatrix}$

5) $= \begin{pmatrix} ٤ \\ ٤ \end{pmatrix}$

6) $= \begin{pmatrix} ٩ \\ ٢ \end{pmatrix}$ ، $= \begin{pmatrix} ٩ \\ ٧ \end{pmatrix}$

7) $= \begin{pmatrix} ٨ \\ ٥ \end{pmatrix}$

8) $= \begin{pmatrix} ٦ \\ ٢ \end{pmatrix}$

9) $= \begin{pmatrix} ٧ \\ ٣ \end{pmatrix}$

10) $= \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$

11) $= \begin{pmatrix} ٧ \\ ٤ \end{pmatrix}$

12) $= \begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \end{pmatrix}$

7) $\binom{٣٢}{١٢} = \binom{٣٢}{٢س + ٦}$

8) $\binom{س}{١} = ٩$

9) $\binom{٨}{س} = ١$

10) $\binom{١٥}{س} = ١٥$

مثال (٣) :

1) إذا كانت ل $\binom{ن}{٣} = ١٢٠$ ، احسب ل (ن ، ٣)

الحل:

2) إذا كانت ل (ن ، ر) = ٢٠ ، $\binom{ن}{ر} = ١٠$ ، احسب ن ، ر

الحل:

مثال (٤) : أوجد قيمة (ن) في كل مما يلي:

1) $\binom{ن}{٢} = ٢١$

2) $\binom{ن}{٢} = ٢٨$

3) ل (ن ، ١) = $\binom{ن}{٢}$

4) $\binom{ن}{ن-٢}$ = ل (٣ ، ٢)

5) ل (ن ، ٣) = ٦ × $\binom{ن}{٢}$

6) $\binom{ن}{٣} = \frac{\text{ل (ن ، ٢)}}{!٣}$

أولاً: مبدأ العد

يقوم على أنه إذا تمت عملية ما على عدة مراحل متتالية فإن:

عدد الطرق = عدد طرق المرحلة الأولى × عدد طرق المرحلة الثانية ... وهكذا

شراء او بيع / تكرار مسموح به / سؤال دائرة السير / أي عملية على مراحل

أمثلة:

1) دخل شخص مطعماً لتناول وجبة الغذاء فوجد أن قائمة الطعام لذلك اليوم تحتوي أنواع مختلفة من الشوربة (عدس ، خضار ، فريكة) ونوعين من السمك (مقلي ، مشوي) فبكم طريقة يمكن اختيار وجبة مكونة من نوع واحد من الشوربة ونوع آخر من السمك.

2) كم عدداً مكوناً من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣}

أ) إذا سمح بتكرار الأرقام

3) تعمل ٥ حافلات لنقل الركاب بين مدينتي مأدبا وعمان وتعمل ٢٠ حافلة أخرى بين مدينتي عمان والزرقاء ، فإذا أراد راكب أن يسافر من مأدبا إلى الزرقاء مروراً بعمان ثم يعود سالكاً الطريق نفسه ، فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك شريطة ألا يركب الحافلة نفسها في أثناء رحلته؟

4) دخل أحد الزبائن محلاً لبيع أجهزة الحاسوب فوجد أمامه (٣) أنواع مختلفة لشاشات العرض و (٤) أنواع للوحات المفاتيح و (٥) أنواع لوحدات التشغيل ، فبكم طريقة يمكنه اختيار جهاز مكون من شاشة العرض ولوحة المفاتيح ووحدة التشغيل.

5) أرادت دائرة السير صنع لوحات معدنية تحمل كل منها رقمين وحرف من مجموعة الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٩} ، فكم لوحة مختلفة يمكن صنعها إذا علمت أن عدد حروف الهجاء العربية (٢٨) حرفاً.

الحل:

- **مضروب** $n!$

نفس المجموعة تترتب مع بعضها البعض

ترتيب / تراتيب / توزيع / تجليس

6) بكم طريقة يمكن أن يجلس (٥) طلاب على (٥) مقاعد في صف واحد.

الحل:

7) بكم طريقة يمكن ترتيب (٤) كتب على رف المكتبة في صف واحد.

الحل:

ثانياً: التباديل

مع وجود مناصب / تكرار غير مسموح / تكوين حروف

1) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب الرئيس وأمين الصندوق من بين أعضاء مجلس إدارة عددها (٤).

الحل:

2) كم عدد تباديل مجموعة من ستة عناصر مأخوذة من ثلاثة عناصر كل مرة.

الحل:

3) بكم طريقة يمكن اختيار مديرة ومساعدة مديرة وسكرتيرة ومحاسبة وقيمة مختبر من بين (١٠) معلمات.

الحل:

4) كم كلمة مكونة من ثلاثة حروف يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف {أ ، ب ، ج ، د ، هـ} ، علماً بأنه ليس ضرورياً أن يكون للكلمات معنى .

الحل:

5) جد عدد طرق جلوس (٤) أطفال على (٦) مقاعد وضعت في خط مستقيم.

ثالثاً: التوافيق

اختيار بدون مناصب / اجراء مبارة تصفية (نهائية)

1) ما عدد الطرق التي يمكن بها إجراء مباريات تصفية نهائية لكرة الطاولة بين خمسة لاعبين .

2) بكم طريقة يمكن إجراء مباريات التصفية النهائية لكرة القدم بين أربعة فرق رياضية.

3) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين من بين (٦) معلمين و (١٠) طلاب .

4) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار (٥) أسئلة للإجابة عنها في امتحان للرياضيات يتكون من (٧) أسئلة.

5) ما عدد المجموعات الجزئية التي تتكون من (٤) عناصر والتي يمكن تكوينها من مجموعات ذات (٦) عناصر

اسئلة دمج بين التوافيق والتباديل

اختيار بدون مناصب توافيق

اختيار مع مناصب تباديل

6) مجموعة مكونة من (٨) معلمين و (٣) إداريين، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية في كل من الحالات الآتية:

أ) تتكون اللجنة من معلمين وإداري.

ب) تتكون اللجنة من معلمين على الأقل .

ج) رئيس اللجنة ونائبه من الإداريين والباقي من المعلمين.

الحل :

7) مجلس إدارة احدى الشركات تضم (٨) مساهمين و (٣) مدراء ، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة استشارية مؤلفة من (٤) أشخاص منهم في الحالات التالية:

أ) تتكون اللجنة من (٣) مساهمين وإداري.

ب) تتكون من مديرين على الأقل.

ج) رئيس اللجنة ونائبه من المساهمين والباقي من المدراء.

الحل :

8) يراد تشكيل لجنة رباعية من بين رؤساء أقسام و (٨) اعضاء في الحالات التالية:

أ) تتكون من (٣) رؤساء أقسام وعضو واحد.

ب) تتكون من عضوين اثنين على الأقل.

ج) تتكون من رئيس لجنة ورئيس قسم من الرؤساء والباقي أعضاء.

د) لا تضم اللجنة أي عضو من رؤساء الأقسام.

الحل :

رابعاً: المتغير العشوائي (س)

أ) إيجاد الاحتمالات عن طريق الفضاء العيني في حالات صوره / كتابة ، ولد / بنت ، فوز / خساره

في هذه الحالة ولد/بنت ، صورة/كتابة ، فوز/خساره ثوابت لازم تفهمها وتحفظها

عدد مرات إجراء التجربة

مرتان	ثلاث مرات
١) الفضاء العيني Ω عدد النتائج (٤) { ( ) ( ) ( ) ( ) } ٢) قيم س = ٠ ، ١ ، ٢ ٣) جدول التوزيع الاحتمالي	١) الفضاء العيني Ω عدد النتائج (٨) { ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) } ٢) قيم س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ٣) جدول التوزيع الاحتمالي

(س)	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

(س)	٠	١	٢	٣
ل (س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

دائماً مجموع الاحتمالات في الجدول = ١

ملاحظة

١) شروط إثبات أن الاقتران ل (س) هو اقتران احتمال .

أ) $\sum$ ل (س) = ١ مجموع الاحتمالات = ١ ب) ل (س) ≥ ٠ الاحتمالات موجبة

٢) التوزيع الاحتمالي **بدون** كلمة جدول س ، ل(س)

$\left(٠ ، \frac{١}{٤} \right) \left(١ ، \frac{٢}{٤} \right) \left(٢ ، \frac{١}{٤} \right)$

9) يراد اختيار فريق طبي خماسي من بين (٥) أطباء و(٦) ممرضين ، بكم طريقة تكوين الفريق في الحالات التالية:

أ) الفريق يتألف من طبيبين اثنين على الأكثر.

ب) رئيس الفريق ونائبه من الأطباء والباقي ممرضين.

الحل:

10) عائلة مكونة من (٥) أولاد و(٣) بنات يراد تكليف (٣) منهم بتنظيف البيت في الحالات التالية:

أ) يوجد بنتان على الأقل.

ب) لا يوجد أي بنت.

ج) يكون رئيس الفريق من البنات.

الحل:

8) يراد تكوين عدد مكون من (٣) منازل من الأرقام (٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩) ، أوجد عدد الأعداد التي يمكن الحصول عليها عندما:

أ) يسمح بتكرار الرقم

ب) لا يسمح بتكرار الرقم

الحل:

1) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الإناث في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها طفلان ، وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة ، فجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي واكتب التوزيع الاحتمالي.

الحل:

2) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود (٣) مرات ، اكتب الفضاء العيني للتجربة ، ثم جد القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) واكتب التوزيع الاحتمالي.

الحل:

3) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة

{(٠ ، ٠,٢) ، (١ ، ٠,٤) ، (٢ ، ب)} ، فما قيمة (س)

الحل:

4) يمثل الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) ، ما قيمة الثابت (ب)

الحل:

(س)	٠	١	٢
ل (س)	٠,٢	ب	٠,٥

5) اعتمد على جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) ، في إيجاد قيمة (أ)

الحل:

(س)	٠	١	٢
ل (س)	٠,٨١	أ	٠,٠٢

ب) أيجاد الاحتمالات باستخدام قانون ذا الحدين (برنولي)

أيجاد الاحتمالات باستخدام قانون ذا الحدين (برنولي) في الحالات:

١) وجود كلمة ذا الحدين / سؤال كرات أو نرد

٢) طلب احتمال في الامتحان أو جدول التوزيع الاحتمالي

قانون: $ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن - ر}$

ن ← عدد مرات تكرار العملية

أ ← احتمال النجاح (موجود في السؤال)

١ − أ ← احتمال الفشل (المتمم لـ ١)

ر ← نفسها قيم س

ملاحظة

١) إذا كانت ن ← عدد مرات تكرار العمل مثلاً: ن = ٤ تكون قيم س هي:

س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

٢) إذا طلب جدول التوزيع الاحتمالي مثلاً: ن = ٢

(س)	٠	١	٢
ل (س)			

هنا نعوض في القانون

ل(س = ٠) = ( ) ( ) ( )

ل(س = ١) = ( ) ( ) ( )

ل(س = ٢) = ( ) ( ) ( )

٣) كلمة **على الأقل** ترجمتها ل(س ≤ العدد) / كلمة **على الأكثر** ترجمتها ل(س ≥ العدد)

٤) قيمة أ ← احتمال النجاح في سؤال

- حجر نرد يكون عدد الأوجه المطلوبة ٦
  - عدد ٥: أ = ١/٦
  - عدد زوجي: أ = ٣/٦
- سحب كرات من صندوق: أ = عدد الكرات المطلوبة / عدد الكرات كاملة

٥) المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ⇐ يسمى **(منفصل)**

1) إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٣ ، أ = ٠,٤ ، فجد كلاً مما يلي:

أ) ل(س = ٠) ب) ل(س < ٢) ج) ل(س ≥ ١) د) ل(س > ٣)

المعطيات:

2) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٢ ، أ = ٠,١

أ) جد قيم س الممكنة

ب) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

الحل:

المعطيات:

أ) قيم س = ٠ ، ١ ، ٢

ب) جدول التوزيع

3) إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين وكانت ن = ٥ ، أ = ٠,٩ ، أوجد:

أ) ل (س = ٣)　　ب) ل (س ≥ ٤)　　ج) ل (٢ < س < ٤)

الحل:

4) عند رمي حجر نرد أربع مرات متتالية ، ما احتمال ظهور العدد (٢) في ثلاث رميات.

الحل:

5) إذا اطلقت ثلاث طلقات على هدف وكان احتمال إصابة الهدف تساوي (٠,٦) ودل المتغير العشوائي (س) على عدد الطلقات التي تصيب الهدف ، أوجد احتمال أن يصيب الهدف طلقتان .

الحل:

6) إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً ما في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي (٠,٧) فإذا اطلق (٥) طلقات فما احتمال:

أ) إصابة الهدف (٣) مرات .

ب) احتمال عدم إصابة الهدف.

ج) إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر.

الحل:

7) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية (٨٠ ٪) وتم إجراء (٣) عمليات ، فما احتمال نجاح عمليتين على الأقل.

الحل:

8) إذا كانت نسبة التالف من إنتاج مصنع لأجهزة الحاسوب (٠,٠٠١) وأخذت عينة حجمها (٥) أجهزة بطريقة عشوائية، فما احتمال أن تكون جميعها صالحة.

الحل:

9) مصنع يحتوي على (٥) آلات من نوع واحد إذا كان احتمال أن تحتاج أي آلة إلى إصلاح في السنة الخامسة من عمرها هو (٠,٢)، احسب احتمال:

أ) ألا تحتاج أي من الآلات إلى إصلاح .

ب) أن تحتاج اثنتان فقط إلى إصلاح.

ج) أن تحتاج اثنتان على الأكثر إلى إصلاح.

د) أن تحتاج واحدة على الأقل إلى إصلاح.

الحل:

خامساً: العلامة المعيارية ز

قانون: $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

س ← العلامة / الفعلية / الخام / المشاهدة

$\bar{س}$ ← المتوسط الحسابي

ع ← الانحراف المعياري

ز ← العلامة (القيمة) المعيارية

ملاحظة

أ) جد العلامة التي تنحرف

فوق المتوسط انحرافين	تحت المتوسط انحرافين
معياريين معناها ز = ٢	معياريين معناها ز = −٢

ب) العلامة المعيارية ز ← نستخدمها للمقارنة بين القيم فإذا أعطانا عدة علامات معيارية الأفضل هي العلامة المعيارية الموجبة الأعلى .

أمثلة:

1) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف الثاني الثانوي في الحاسوب (٦٥) والانحراف المعياري لها ٥، فجد العلامة المعيارية لعلامات (احمد ، علي ، حسين) إذا كانت علاماتهم في الحاسوب على الترتيب (٧٥ ، ٦٥ ، ٦٠)

الحل:

2) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات الشعبة (أ) في الرياضيات يساوي (٧٠) والانحراف المعياري يساوي (٨) والوسط الحسابي لعلامات الشعبة (ب) يساوي (٧٥) والانحراف المعياري لها يساوي (٥) وكانت علامة أحد الطلاب في الشعبة (أ) يساوي (٨٦) وعلامة أحد طلاب الشعبة (ب) يساوي (٨١) فأي العلامتين أفضل.

الحل:

3) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة الأدبي في الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) والوسط الحسابي لعلامات شعبة العلمي في الرياضيات يساوي (٧٠) والانحراف المعياري لها (٤) وحصل أحد طلاب الأدبي على علامة (٦٤) وأحد طلاب العلمي على علامة (٦٢) ، فأي العلامتين أفضل.

الحل:

4) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة الإنجليزية (٩٠) والانحراف المعياري لها (١٠) ، فجد:

أ) العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥)

ب) العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معياريين

ج) العلامة التي تنحرف تحت الوسط انحرافاً معيارياً واحداً

الحل:

اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي: **(واجب)**

١) **إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم (٦٥) والانحراف المعياري لها (٤) فإن القيمة التي تنحرف (٣) انحرافات تحت الوسط الحسابي هي:**

أ) ٧٧ ب) ٥٣ ج) ١٢ د) −١٢

٢) **إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في أحد الاختبارات هو (١٢) والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما هو (١,٢) فإن الانحراف المعياري لعلامات الطلاب في هذا الاختبار يساوي:**

أ) ١,٤ ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٢

٣) **إذا كانت علامتا طالبتين في الصف نفسه في الرياضيات (٨٥ ، ٧٠) والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما (١ ، −٢) على الترتيب فإن الانحراف المعياري لعلامات الرياضيات يساوي:**

أ) ١٠ ب) ٥ ج) ٣ د) ١

٤) **إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية يساوي (٦٠) والانحراف المعياري (٥) فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) هي:**

أ) ٦ ب) ١٢ ج) −٠,٤ د) ٨

سادساً: التوزيع الطبيعي

في هذا الدرس نقوم بإيجاد احتمال [ز] ← ل(ز) من خلال جدول معطى جاهز (**جدول التوزيع الطبيعي**)

- **حالات إيجاد الاحتمال من الجدول**

1. ل(ز ≥) — العدد (+) ← مباشرة من الجدول؛ العدد (−) ← ١ − الاحتمال
2. ل(ز ≤ أ) — نضربه كف نحوله لأصغر ونعكس إشارة العدد فإذا أصبح العدد (+) موجب ← مباشرة؛ (−) سالب ← ١ − الاحتمال
3. **صغير** أ ≤ ل(ز) ≤ ب **كبير**

احتمال الكبير (−) احتمال الصغير

ل(ز ≥ ب) (−) ل(ز ≥ أ)

ملاحظة لطرح أي احتمال من يتم طرحه من (١) رقم الطوارئ ٩٩٩١٠

- **خطوات حل السؤال**: المعطى في السؤال قيمة (س) وليس [ز]

ل(ز ≥ **عدد**) ← نحولها ز = $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$

ل(ز ≥ [✗]) ← ز = [✗] ← نوجد الاحتمال من الجدول

مباشرة **أو** ١ − الاحتمال

مع الانتباه للمطلوب في السؤال

- جد احتمال فقط نوجد الاحتمال من الجدول
- جد عدد هنا **أولاً**: نوجد الاحتمال **ثانياً**: العدد = العدد الكلي × الاحتمال

1) معتمداً على الجدول التالي أجب عما يليه:

ز	٠	٠,٥	٠,٨	١	١,٥	٢
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٧٨٨١	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

أ) جد ل(ز ≥ ٠,٨)

ب) جد ل(ز ≤ −٢)

ج) جد ل(ز ≥ −٢)

د) جد ل(ز ≤ ٠,٥)

هـ) جد ١ ≥ ل(ز) ≥ ٢

و) جد −٠,٥ ≥ ل(ز) ≥ ١,٥

1. إذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٧٠) وانحرافه المعياري يساوي (٥) ، أجب عما يأتي معتمداً على الجدول التالي:

ز	٠	٠,٥	٠,٨	١	١,٥	٢
ل(ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٧٨٨١	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

أ) جد ل(س ≥ ٧٥) ←

س = ٧٥
س̄ = ٧٠
ع = ٥
ز = ؟

ب) جد ل(س ≤ ٦٠) ←

ج) جد ل(س ≤ ٦٦) ←

د) جد ٦٥ ≤ ل(س) ≤ ٨٠

2. الأسئلة الكلامية: هنا يكون المعطى في السؤال

الوسط الحسابي (س̄) ← μ / والانحراف المعياري (ع) ← σ / والقيمة الفعلية (س)

ويطلب جد احتمال يعني ل(س)

أولاً: نحول س ← إلى ز عالقانون

ثانياً: نوجد الاحتمال من الجدول

هنا:

وانتبه: لصيغة المطلوب كيف تقوم بترجمته

جد احتمال أن

يقل عن ٥٠ ل(س ≥ ٥٠) | يزيد عن ٥٠ ل(س ≤ ٥٠) | أن لا يزيد عن ٥٠ ل(س ≥ ٥٠) | ينحصر بين ٣٠ و ٥٠ ٣٠ ≤ ل(س) ≤ ٥٠

احتمال أن تكون

على الأقل ل(س ≤ ٥٠) | على الأكثر ل(س ≥ ٥٠)

امثله عامة على التوزيع الطبيعي

1) إذا كان (ز) متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً وكان ل(ز ≥ أ) = ٠,٦ ، فإن قيمة ل(ز ≤ − أ) تساوي:

أ) −٠,٦ ب) ٠,٤ ج) −٠,٤ د) ٠,٦

الحل:

2) من خصائص التوزيع الطبيعي المعياري أن وسطه الحسابي يساوي:

أ) ١ ب) صفر ج) −١ د) $\frac{١}{٢}$

الحل:

3) تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان عام وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٤) وانحراف معياري (٨) ، جد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان إذا كانت علامة النجاح (٥٠)

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي:

(ر)	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل (ر)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل:

4) إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف في احدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣٠٠) دينار شهرياً وانحراف معياري (١٠) دنانير ، فما عدد الموظفين الذين **تنحصر** رواتبهم بين (٢٨٠) دينار و (٣٢٠) دينار

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي:

(ر)	٣	٢,٥	٢	١,٥	٠,٢
ل (ر)	٠,٩٩٨٧	٠,٩٣٨	٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٨٧٩٣

الحل:

5) إذا كانت أوزان (١٠٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٤)كغ وانحراف معياري (٤)كغ ، ما عدد الطلبة الذين **تزيد** أوزانهم عن (٥٠)كغ

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي:

(ر)	٠,٢٥	٢,٥	١,٢	١,٢٥	١,٥٢	٠,٨
ل (ر)	٠,٥٩٨٧	٠,٩٣٨	٠,٨٨٤٩	٠,٨٩٤٤	٠,٩٣٥٧	٠,٧٨٨١

الحل:

6) تقدم لامتحان الثانوية العامة في احدى السنوات (٢٠٠٠)طالب من طلبة أحد الفروع المهنية وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٧) وانحراف معياري (١٦) إذا علمت أنه لا يسمح للطالب الذي معدله أقل من (٦٥) بتقديم طلبات للجامعات الحكومية ، جد عدد طلبة ذلك الفرع الذين يحق لهم تقديم تلك الطلبات.

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الجدول التالي:

(ر)	٠	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل (ر)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

الحل:

7) إذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي (٦٥) والانحراف المعياري (١٠) وكان عدد الناجحين (٧٥٨) طالب ، فما علامة النجاح

الحل:

(ر)	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	١
ل (ر)	٠,٦٩١٥	٠,٧٢٥٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٨٨١	٠,٨١٥٩	٠,٨٤١٣