AWA2EL
LEARN 2 BE

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين كتاب الرياضيات

الصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الأول

الوحدة (١) : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات

تدريب (١) ص ١٥

أكمل :

١) $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ١$

٢) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ.م

تدريب (٢) : ص ١٦

١) $\lim_{س \to ١} م(س) = ٢$

٢) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ٢$

٣) $\lim_{س \to ١^-} م(س)$ = غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٣$

تمارين ومسائل

ص ١٧

أ) $\lim_{س \to ٦^+} م(س) = ٥$

ب) $\lim_{س \to ٦^-} م(س) = ٢$

ج) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ١$

د) $\lim_{س \to ٢^-} م(س)$ = غ.م

هـ) $\lim_{س \to ٨^+} م(س) = -٦$

و) $\lim_{س \to ٨^-} م(س) = -٦$

ز) $\lim_{س \to ١٠} م(س) =$ صفر

ح) م) $س \to ٤^-$

ب) $\lim_{س \to ٤^+} ل(س) =$ صفر

ط) $\lim_{س \to ٤^-} ل(س)$ غير موجودة

د) $\lim_{س \to ٤^-} ل(س)$ غير موجودة

ى) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

٣) أ) $\{-\sqrt{٣}, \sqrt{٣}\} \cup \{-١, ١\}$ ب) $\{-\sqrt{٣}, \sqrt{٣}\} \cup [-١, ١]$ ج) $\{-\sqrt{٣}, \sqrt{٣}\} \cup (-١, ١)$ د) $\{-\sqrt{٣}, \sqrt{٣}\} \cup \{-١, ١\}$

٤) أ) $ك = \{-٤, ٣\}$ ب) $ك = \{-٢, ٤\}$ ج) $ك = \{-١, ١\}$ د) $ك = \{-١, ١\}$

٥) $\lim_{س \to ٥^+} ن(س) = \lim_{س \to ٥^-} ن(س) = ٧$

ثانياً : نظريات النهايات

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٢} (م(س) + ق(س) \times س) = \lim_{س \to -٢} م(س) + \lim_{س \to -٢} ق(س) \times \lim_{س \to -٢} س$

$= -٣ + -١٠ \times -٢$

$= -٣ + ٢٠ = ١٧$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{م(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} ق(س)}{\lim_{س \to ١} م(س)} = \frac{٢}{٢} = ١$

٣) $\lim_{س \to ١} \sqrt{م(س)} + \sqrt[٣]{ق(س)} + \lim_{س \to ١} ١٥$

$= \sqrt{٢} + \sqrt[٣]{٢٧} + ١٥$

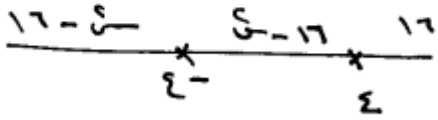
$= ٣\sqrt{٢} + ١٥$

تدريب (٢)

١) نهـا | س − ٨ | = | ٠ − ٨ | = ٨
س ← ٠

٢) نهـا | س − ١٦ | = صفر
س ← ١٦

٣) نهـا | س٤ − ١٦ | = ٠
س ← ٤ لأن :

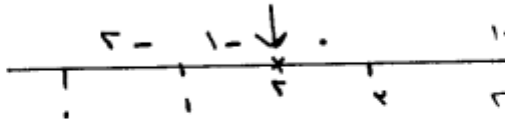


نهـا | س٤ − ١٦ | = صفر
س ← ٤+

نهـا | س٤ − ١٦ | = صفر
س ← ٤−

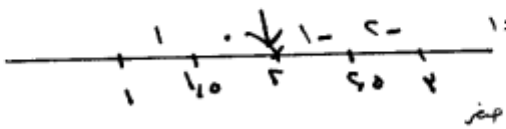
تدريب (٣)

١) نهـا [س − ٢]
س ← ١



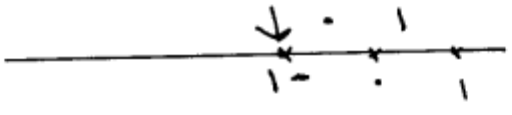
∴ غ ∉ ٣

٢) نهـا [٤ − ٢س]
س ← ١٫٥

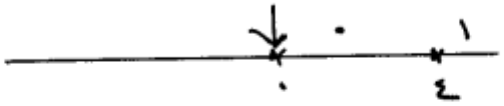


∴ غ ∈ ٣

٣) نهـا [س + ١] = ١
س ← ٠



٤) نهـا [٠٫٥ س]
س ← ٤



غ ∉ ٣ لأن

نهـا [٠٫٥ س] = ١ ، نهـا [٠٫٥ س] = صفر .
س ← ٤+ ، س ← ٤−

تدريب (٤)

أ) ١ ، ٣ ، ٥ ب) س = ٥ ، (٢،٣)

تدريب (٥)

١) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٠$ ٢) $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٠$

٣) $\lim_{س \to ٥} \frac{س-٥}{س^٢-٢٥} = \frac{١}{١٠}$ لأن $\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٠$

٤) $\lim_{س \to ٧} \frac{س-٧}{س^٢-٤٩} = \lim_{س \to ٧} \frac{س-٧}{(س-٧)(س+٧)} = \frac{١}{١٤}$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{س-٥}{س^٢-٢٥} =$ موجب

$\lim_{س \to ٥^-} \frac{س-٥}{س^٢-٢٥}$ غير موجودة

تدريب (٦)

$\lim_{س \to ٠} ق(س) =$ صفر $\lim_{س \to ٠} م(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٠} ق(س) م(س) = ٠$ ∴

تدريب (٧)

١) $\lim_{س \to ١} م(س) = ٠$ ٢) $\lim_{س \to ١} ل(س) = ٠$

٣) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ل(س)) = ٨$

١) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ غ.م لأن $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٥$

٢) $\lim_{س \to ١} ل(س)$ غ.م لأن $\lim_{س \to ١^+} ل(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} ل(س) = ٣$

٣) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + ل(س))$ لأن :

$\lim_{س \to ١^+} (ق(س) + ل(س)) = ٦ + ٢ = ٨$ ، $\lim_{س \to ١^-} (ق(س) + ل(س)) = ٥ + ٣ = ٨$

تمارين ومسائل

١) أ) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ن(س)) = -٦ + ٤ = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) \times ن(س)) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{ن(س)}{م(س)} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

د) $\lim_{س \to ٢} ن(س)^{٢} = \left(\lim_{س \to ٢} ن(س)\right)^{٢} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{١ - ن(س)} = \sqrt{\lim_{س \to ٤} (١ - ن(س))} = \sqrt{١ - ٣} = \sqrt{٤}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ن(س)}{م(س)} = \frac{ن(-١)}{م(-١)} = \frac{-٤}{٠} =$ ضعف

٢) أ) $\lim_{س \to ١} (٤ع(س) + ن(س)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $١٢٥ - ٤ = ١٢١$

ج) $\frac{٥}{٢٤}$ د) $٢٥ - ٤ = ٢١$

٣) أ) $\lim_{س \to ٥+} |س - ١٢٥| =$ ضعف ب) $\lim_{س \to ٥-} |س - ١٢٥| =$ ضعف

ج) $\lim_{س \to ٠} |س - ١٢| =$ ضعف د) $\lim_{س \to ٧} |س - ٤٦| =$ ضعف

هـ) $\lim_{س \to ٤-} [س - ٢]$ غير موجود و) $\lim_{س \to ١} (س[س] + |س|)$ غير موجود

ز) $\lim_{س \to 0^-} \frac{|س|}{س} =$ غير موجود ح) $\lim_{س \to 1} \frac{س-1}{|س-1|}$ غ.م

ط) $\lim_{س \to -1} \frac{س^2+3س+2}{س+1} = \lim_{س \to -1} \frac{(س+1)(س+2)}{س+1} = \lim_{س \to -1} |س+2| =$ غير موجود

٤) نفرض $ب \in [6, \infty)$

٥) $ب \in (-\infty, 0.5)$

٦) بما أن $\lim_{س \to 2^+} م(س)$ موجودة $\therefore \lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^-} م(س)$

$٩ - ٤ب = ٣$ وعند $٩ - ٢ = ٤ب$

$٦ = ٤ب \Leftarrow ب = \frac{٦}{٤}$

٧) $\lim_{س \to 2} \frac{س-2}{ل(س-2)}$ اعرف $ص = س-2$

$س \to 2$ ، $ص \to 0$

$\lim_{ص \to 0} \frac{ص}{ل(ص)} = ١$

٨) $\lim_{س \to 2} (س + ك(س)) = \lim_{س \to 2} س + \lim_{س \to 2} ك(س) = ٢ + ١ = ٣$

٩) $\lim_{س \to 1} م(س) + \lim_{س \to 1} ع(س)$ لان النهايتين منفصلتين

$= ٠ + ٢ = ٢$

١٠) $\lim_{س \to 2} م(س) \times \lim_{س \to 2} ع(س) = ١ \times ١ = ١$

١١) اعرف $ص = س - ١$ $س \to ١$ ، $ص \to$ غير

$\lim_{ص \to 0} ٢ م(ص) + \lim_{س \to 1} ع(س) = ٤ + ٢ = ٦$

٩) $\lim_{س \to -٢} (س - ل(س)) = -١٠$

$-٢ - \lim_{س \to -٢} ل(س) = -١٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to -٢} ل(س) = -٢ + ١٠ = ٨$

$\therefore \lim_{س \to -٣} (ق^{٢}(س) - ٢ل(س)) = (\lim_{س \to -٣} ق(س))^{٢} - \lim_{س \to -٣} ٢ل(س)$

$= ١٦ - ١٤$

$= ٢$

١٠) $ق(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + ٣س^{٢}) = \lim_{س \to ٢} ٤ق(س) + \lim_{س \to ٢} ٣س^{٢}$

$= ٤ \times ٥ + ١٦$

$= ٢٠ + ١٦ = ٣٦$

تمارين ٦ : نهايات افتراضات كسرية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥} = \lim_{س \to -٥} \frac{(س+٥)(س-٢)}{(س+٥)} = -٧$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ١}{س - ٢}$ غ.و

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{٢٥ - س^٢}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \left(\frac{١٠ - ٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س-٥)(س+٥)}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-٢(٥-س)}{٥س} \times \frac{١}{(س-٥)(س+٥)} = \frac{-٢}{٥٠} \times \frac{١}{١٠} = \frac{-٢}{٥٠}$

٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{٣س+٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{٣س+٤} + ٦}{\sqrt{٣س+٤} + ٦}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(\sqrt{٣س+٤} + ٦)}{(٣س+٤) - ٣٦}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(\sqrt{٣س+٤} + ٦)}{(س-٤)} = ١٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^٢ + ١} - \sqrt{١ - ٢س^٢}}{س^٢} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢}}{\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س^٢ + ١) - (١ - ٢س^٢)}{س^٢ (\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{(س^٢ + ٨س - ٨ + ٢س^٢)}{س^٢ (\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢})} = \lim_{س \to ٠} \frac{٣س^٢}{س^٢ (\sqrt{س^٢ + ١} + \sqrt{١ - ٢س^٢})}$

$= \frac{٣}{٢}$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to ٣^+} \frac{\sqrt{س - ٢}}{\sqrt{س - ٣}} = \lim_{س \to ٣^+} \sqrt{\frac{س - ٢}{س - ٣}} = \lim_{س \to ٣^+} \sqrt{\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)}}$

$= \sqrt{٤} = ٢$

ج) $\lim_{س \to ٢^+} \frac{\sqrt{س - ٢}}{\sqrt{س - ٢}}$ ع ٢ لان المقدار غير معرف في ٢

تدريب (٤)

$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ١} \times \frac{\left(\sqrt[٣]{س + ١}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤}{\left(\sqrt[٣]{س + ١}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س + ١) - ٨}{(س - ١)\left(\left(\sqrt[٣]{س + ١}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤\right)} = \frac{١}{\left(\sqrt[٣]{٤}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{٤} + ٤}$

$= \frac{١}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{١}{١٢}$

تمارين ومسائل

ا) $\lim_{س \to ٧} \frac{(س+١)^{٢} - ١٨}{س - ٧} = \lim_{س \to ٧} \frac{(س-٧)(س+٩)}{(س-٧)}$

$= ١٨$

ب) $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س} - ٢}{\frac{س}{٢} - ٤} \times \frac{(\sqrt{س^{٣}} + ٢\sqrt{س} + ٤)}{(\sqrt{س^{٣}} + ٢\sqrt{س} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٧} \frac{١}{\frac{١}{٢}(س+٧)} \times \frac{١}{(\sqrt{س^{٣}} + ٢\sqrt{س} + ٤)}$

$= \frac{١}{٢ + ٢ + ٤} = \frac{١}{-ج}$

ج) $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{(٢+س)^{ج}} - \frac{١}{٤} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{٤ - (٢+س)^{ج}}{٤(٢+س)^{ج}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-(٤ + ٣س + س^{٢})}{٤(٢+س)^{ج}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{-س^{٣} - ٣س - ٤}{٤(٢+س)^{ج}} \right)$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{٤} \left(\frac{س^{٣} + ٣س + ٤}{(٢+س)^{ج}} \right) = \lim_{س \to ٠} \frac{-١}{٤} \times \frac{(س+٤)}{(٢+س)^{ج}}$

$= \frac{-٣}{١٦} = \frac{-١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{|س+٤|-٥}{س^٢+٧} = \lim_{س \to -٢} \frac{س+٤|-٥}{س^٢+٧}$ $\lim_{س \to -٢} \frac{س+٤+٥}{س^٢+٧}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(س-٤)}{(س+٢)(س^٢-٢س+٤)} = \frac{-٦}{١٢} = -\frac{١}{٢}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{٦-س|س+١|}{٩-٣س} \times \frac{٦+س|س+١|}{٦+س|س+١|}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٣٦-س^٢(س+١)}{(٣-س)(٦+س|س+١|)} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٣٦-س^٢-س^٣}{(٣-س)(٦+س|س+١|)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(٣-س)(-س^٢-٤س-١٢)}{٣(٣-س)(٦+س|س+١|)} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{-س^٢-٤س-١٢}{٣(٦+س|س+١|)}$

$= \frac{-٩-١٢-١٢}{٣(٦+٦)} = \frac{-٣٣}{٣٦}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{|س^٢-١٠س+٢٥|}{س-٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{|(س-٥)^٢|}{س-٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{|س-٥|}{س-٥}$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{س-٥}{س-٥} = ١$ ، $\lim_{س \to ٥^-} \frac{٥-س}{س-٥} = -١$

اذن $\lim_{س \to ٥} \frac{|س-٥|}{س-٥}$ غ.م

ز) $\lim_{س \to 1} \frac{س^{ن} - 1}{س - 1}$ ع ٢٠ لأن البسط والمقام غير يعرّفان في فترة مفتوحة تحوي العدد ١

ح) $\lim_{س \to 1} \frac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^{٢} + س + ٤)}{(س-1)(س+1)} = \frac{٦}{٢} = ٣$

ط) $\lim_{س \to ٧^{+}} \frac{|س^{٢} - ٤٩|}{|س - ٧|} = \lim_{س \to ٧^{+}} \frac{|(س-٧)(س+٧)|}{|س-٧|} = \lim_{س \to ٧^{+}} |س + ٧| = |١٤|$

ي) $\lim_{س \to ٥^{+}} \frac{س - [س]}{٤س^{٣} - ٥س^{٢}}$ لابدّ من إيجاد النهاب من جهة اليمين العدد ٥^{+}

$$\lim_{س \to ٥^{+}} \frac{س - [س]}{س^{٢}(٤س - ٥)} = \lim_{س \to ٥^{+}} \frac{١}{(٤س+٥)} = \frac{١}{١٠}$$

$$\lim_{س \to ٥^{-}} \frac{س - [س]}{س^{٢}(٤س - ٥)} = \lim_{س \to ٥^{-}} \frac{س - ٤}{(س-٥)(٤س+٥)}$$ غ ٢٠

$\therefore \lim_{س \to ٥} \frac{س - [س]}{٤س^{٢} - ٥س}$ غ ٢٠

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(1+س^2)-(1-س^2)}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2}} = \frac{2}{2} = 1$

٢) بما أن النهاية موجودة ∴ م(٢) + ٥ = صفر ⇐ م(٢) = −٥

$\lim_{س \to 2} [م(س) - ٢س + ٣ب] = ٧$

$م(٣) - ٦ + ٣ب = ٧ \Leftarrow$ $-٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ٧ + ١١$

$٣ب = ١٨$

$\Leftarrow$ ب = ٦

بما ان النهاية موجودة اذاً

$\lim_{س \to 3^+} م(س) = \lim_{س \to 3^-} م(س)$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{س-٢}{س-٢} = -١ = \lim_{س \to 2^-} ٩س - ٤ = ٩د - ٤$

$٩د - ٤ = -١ \Leftarrow ٩د = ٣ \Leftarrow$ د = $\frac{١}{٣}$

٤) لكي تكون النهاية موجودة

$$\begin{array}{lll} & أ & ٢ب \\ ١ & أ & (أ+٢ب) \\ \hline & أ & أ+٢ب+٢ \end{array}$$

$$أ + ٢ب + ٢ = ٠ \quad \cdots (١)$$

$$أ + أ + ٢ب = ١$$

$$٢أ + ٢ب = ١ \quad \cdots (٢)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

$$أ = ٣ \quad ، \quad ب = -\frac{٥}{٢}$$

٥) $$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{(٢٤)^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٨^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٨^{س}(٨^{س} - ١)}{(١ - ٨^{س})} = \text{نها}_{س \to ٠} -٨^{س} = -١$$

٦) بما أن النهاية موجودة

$$\text{نها}_{س \to ٠^+} ٥(س) = \text{نها}_{س \to ٠^-} ٥(س)$$

$$\frac{ع^{٢} - ٧ع}{٢ع^{٥} + ٦ع^{٣} + ١٨} = ع + ٥$$

$$\frac{(ع - ٢)(ع^{٢} + ٤ع + ٩)}{٢(ع^{٥} + ٣ع^{٣} + ٩)} = ع + ٥$$

$$ع - ٢ = ٤ع^{٢} + ١٠ \Leftarrow -ع = ١٢ \Leftarrow ع = -١٢$$

٧) النهاية غير موجودة عند اصفار المقام

$$س^{٤} - ٥س + ٦ = ٠ \quad (س - ٢)(س - ج) = ٠$$

$$\text{فم } ٩ : ٢ ، ٣$$

AWAEL
LEARN 2 BE

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ٢س - ٢}{س^٢ - ٣س + ٢} = \frac{٣}{٢} - ب$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)} \cdot \frac{س - ١}{ق(س) - ٦} = \frac{٣}{٢} - ب$ ومنها النهاية والمقام $\neq ٠$

$\frac{٤}{٧} = \frac{٣}{٢} - ب \Leftarrow \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٢} = -ب \Leftarrow ب = ١$

ب) نعلم ان النهاية موجودة اذاً $د(٠) + ٥ = ٠$ ميز

$\lim_{س \to ٠} (د(س) - ٥ + ٣ب) = ٢ \Leftarrow -٥ - ٥ + ٢ب = ٢$

$٢ب = ٢ + ١٠$

$ب = ٤$

AWAEL
LEARN 2 BE

رابعًا: نهايات مثلثية.

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} 2س}{س} = 2$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}(س - \pi)}{(س - \pi)} = 1$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{ظا} س} = 1$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{2})}{س} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

تدريب (٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا}٣س + \text{ظا}٥س}{٣س - ٤\text{ظا}س}$ نقسم بسط ومقام على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \frac{\text{جا}٣س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{٣ - ٤\frac{\text{ظا}س}{س} \times \text{ظا}س} = \frac{1 - ٣ + ٥}{٣} = \frac{٣}{٣} = 1$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - (1 - 2\text{جا}^2 \frac{س}{2})}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2\text{جا}^2 \frac{س}{2}}{س^2} = 2 \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{2}}{\frac{س}{2}} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{2}}{\frac{س}{2}}$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س + \text{جا}٤س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س}{س}$

$= ٨ + ٤ = ١٢$

تدريب (٤)

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا } س}{(\frac{\pi}{2} - س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)} = ١$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جتا}^{٢} \frac{\pi}{٢} س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^{٢}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} س)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٢}(١ - س)}{(١ - س)} = -\frac{\pi}{٢}$

تمارين ومسائل

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } ٨س}{٧س} = \frac{٨}{٧}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س + \text{ظا}٢س - \text{جا}س}{س} = \lim_{س \to ٠} ١ + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$

$= ١ + ٢ - ١ = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} (\text{قا}س + \text{ظا}٥س) = \lim_{س \to ٠} \text{قا}س + \lim_{س \to ٠} \text{ظا}٥س$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} ٨ - س^{٢}$ ظتا$^{٢}(٥س)$ قتا$٥س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٨ - س^{٢}}{\text{ظا}^{٢}(٥س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}٥س} = ٨ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٢}{٥}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - ٢\text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}٤س - (\text{جتا}^{٢}س + ١)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٤س - \text{جتا}^{٢}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}} - ٢\text{جا}٣س\text{جا}س$

$= -٦ \times ١ = -٦$

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, س}{س \text{ ظا} س} \times \frac{1 + \text{جتا}\, س}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س \text{ ظا} س (1 + \text{جتا}\, س)}$ $= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س \frac{\text{جا}\, س}{\text{جتا}\, س} (1 + \text{جتا}\, س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

٧) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}\, س}{2 س - \pi} = \frac{0}{\pi - \pi} = \frac{0}{0}$

٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, س - \text{جا}\, س}{س^3} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, س}{س^3} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س^3}$

$= 1 - 1 = \text{صفر}$

٩) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}\, س}{(\pi - 2س)^2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}\, س}{4 (\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \frac{1 + \text{جا}\, س}{1 + \text{جا}\, س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}^2 س}{4 (\frac{\pi}{2} - س)^2 (1 + \text{جا}\, س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 س}{4 (\frac{\pi}{2} - س)^2 (1 + \text{جا}\, س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}\, س}{2 (\frac{\pi}{2} - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}\, س}{2 (\frac{\pi}{2} - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \text{جا}\, س}$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x + 1} \times \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{x^2 (2 + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos 2x}{x^2 (2 + x^2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos 2x}{2 + x^2} \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = -2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} \quad \text{نضرب بمقلوب المقدار في البسط والمقام}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin x + 2 \sin x \cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin x (1 + 2 \cos x)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x \to 0} (1 + 2 \cos x)$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin x}{\sin 3x} \cdot \lim_{x \to 0} (1 + 2 \cos x) = \frac{1}{3} \times 1 \times (1 + 2) = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cot x - \tan x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2x)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2(\frac{\pi}{4} - x)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2(\frac{\pi}{4} - x)}{-(\frac{\pi}{4} - x)} = -2$$

AWA2EL LEARN 2 BE

١٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{١ - جتا٦س}{جتا٨س - ١} \times \frac{١ + جتا٦س}{١ + جتا٦س} \times \frac{جتا٨س + ١}{جتا٨س + ١}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{١ - جتا^٢٦س}{جتا^٢٨س - ١} \times \frac{جتا٨س + ١}{١ + جتا٦س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{جا^٢٦س}{-جا^٢٨س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{جتا٨س + ١}{١ + جتا٦س}$

$\underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{\frac{جا^٢٦س}{س^٢}}{\frac{-جا^٢٨س}{س^٢}} \times \frac{٢}{٢} = \frac{٣٦}{-٦٤} = \frac{-٩}{١٦}$

١٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} ٣س \left(ظتا٢س + قتا٣س \right)$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{٣س}{ظا٢س} + \underset{س \leftarrow ٠}{نـــا} \frac{٣س}{جا٣س} = \frac{٣}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢}$

١٥) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{نـــا} \frac{ظتاس}{\pi - ٢س} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{نـــا} \frac{ظا(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$

١٦) $\underset{س \leftarrow ١}{نـــا} \frac{س \, جا\frac{\pi}{س}}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{نـــا} \frac{جا\frac{\pi}{س}}{\frac{س-١}{س}} = \frac{جا(\pi - \frac{\pi}{س})}{\frac{س-١}{س}}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{نـــا} \frac{جا\frac{\pi(س-١)}{س}}{\frac{س-١}{س}} = \pi$

AWA2EL

١٧) $\lim\limits_{س \to -٤} \frac{جا(س+٤)}{س^٢-١٦} = \lim\limits_{س \to -٤} \frac{جا(س+٤)}{(س+٤)(س-٤)} = \lim\limits_{س \to -٤} \frac{جا(س+٤)}{(س+٤)} \times \lim\limits_{س \to -٤} \frac{١}{س-٤}$

$= ١ \times \frac{١}{-٨} = \frac{-١}{٨}$

١٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{|س| - جاس}{\sqrt{١-جتا٢س}} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{|س| - جاس}{\sqrt{١-(١-٢جا^٢س)}} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{|س| - جاس}{\sqrt{٢}\,|جاس|}$

$\frac{١}{\sqrt{٢}} \lim\limits_{س \to ٠^+} \frac{|س| - جاس}{جاس} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \lim\limits_{س \to ٠^+} \left(\frac{س}{جاس} - ١\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}} (١) = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\frac{١}{\sqrt{٢}} \lim\limits_{س \to ٠^-} \frac{|س| - جاس}{-جاس} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \lim\limits_{س \to ٠^-} \left(\frac{س}{جاس} + ١\right) = \frac{١}{\sqrt{٢}} (-١+١) = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} \frac{|س| - جاس}{\sqrt{١-جتا٢س}}$ غير موجودة

١٩) $\lim\limits_{س \to ٣\pi} \frac{جاس}{\pi - \frac{س}{٣}} = \lim\limits_{س \to ٣\pi} \frac{جا(٣\pi - س)}{\frac{١}{٣}(٣\pi - س)} = ٣ \lim\limits_{س \to ٣\pi} \frac{جا(٣\pi - س)}{(٣\pi - س)}$

$= ٣$

٢٠) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س-٢}{ظا \pi س} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س-٢}{ظا(٢\pi - \pi س)} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س-٢}{ظا \pi (٢-س)} = \frac{-١}{\pi}$

٢١) $\lim\limits_{س \to -م} \frac{جاس + جام}{س+م} = \lim\limits_{س \to -م} \frac{٢جا\left(\frac{س+م}{٢}\right) جتا\left(\frac{س-م}{٢}\right)}{س+م}$

$= \lim\limits_{س \to -م} \frac{جا\left(\frac{س+م}{٢}\right)}{\frac{س+م}{٢}} \times \lim\limits_{س \to -م} جتا\left(\frac{س-م}{٢}\right)$

$= جتا(-م)$

$= جتام$

٢٢) $\frac{م}{ج} = \frac{٣}{١-٥} = ٦$ ، م = ١٢ ، ب = $\frac{٩}{٣} = ٣^{٢}$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢٢ - ٣س)}{-٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢(١١-س)}{-٥س} = -\frac{جا٢س}{-٥س}$

$= \frac{٢}{٥}$

الفصل الثاني : الاتصال

أولاً : الاتصال عند نقطة .

تدريب (١)

١) د معرّفة عند س = ٤ د(٤) = $\frac{|٤-٤|}{٨}$ = صفر

احسب نهاية

$\lim_{س \to ٤^{+}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٤^{+}} \frac{س-٤}{٤+س}$ = صفر

$\lim_{س \to ٤^{-}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٤^{-}} \frac{٤-س}{٤+س}$ = صفر

بما أن $\lim_{س \to ٤}$ د(س) = د(٤) = صفر ∴ د متصل عند س = ٤

تدريب (٢)

١) س ∈ صفر صفر تحوي الأعداد الصحيحة .

٢) د(س) = [± س + ٥] ، د(س) متصل عند س = ١ ولكن غير متصل عند س = ٢

(ملاحظة : هناك حلول مختلفة)

تدريب (٣)

بما أن د متصل ∴ $\lim_{س \to ٢^{+}}$ د(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ د(س) = د(٢)

٣م - ٢ب = ٦ ... ①

٣م + ب = ٦ ... ②

بحل المعادلتين ينتج م = $\frac{٦}{٥}$ ، ب = $-\frac{١٢}{٥}$

تدريب (٥)

$$م(س) = \begin{cases} (١+٢س)^{٣} & ، \ س \leq ١ \\ ٣س^{٢} \times |س| & ، \ س > ١ \end{cases}$$

م(س) متصل عند س = ١ لأنها كثيرة حدود

م(س) متصل عند س > ١ لأنها متصلة كثيرة حدود

اكتب نص الاتصال عند س = ١

$$\text{نها}_{س \to ١^+} م(س) \overset{؟}{=} \text{نها}_{س \to ١^-} م(س) = م(١)$$

$$٣ = ٣ = ٢ \quad \therefore \text{م(س) متصل عند س = ١}$$

طريقة (٢)

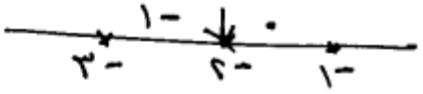
م متصل عند س = ١ لأن $\text{نها}_{س \to ١^+} م(س) = \text{نها}_{س \to ١^-} م(س) = م(١) = ٣$

ل متصل عند س = ١ لأن $\text{نها}_{س \to ١^+} ل(س) = \text{نها}_{س \to ١^-} ل(س) = ل(١) = ١$

∴ م(س) متصل عند س = ١ (تعريف ٢)

تدريب (٦)

$$ه(س) = \begin{cases} (س-٥)^{٢} \times ٠ & ، \ س \geq -١ \\ -١ \times (س-٥)^{٢} & ، \ س < -٢ \end{cases}$$



ه(س) غير متصل عند س = -٢ لأن:

$\text{نها}_{س \to -٢^+} ه(س) = \text{صفر}$ ، $\text{نها}_{س \to -٢^-} ه(س) = (-٢-٥)^{٢} \times -١ = -٢٤٩$

ه(س) متصل عند س = ٥

لأن $\text{نها}_{س \to ٥^+} ه(س) = (س-٥)^{٢} \times ٠ = ٠$ ، $\text{نها}_{س \to ٥^-} ه(س) = (س-٥)^{٢} \times ٦ = ٠$ ، $ه(٥) = ٠$

في $\text{نها}_{س \to ٥} ه(س) = ه(٥)$

تمارين ومسائل

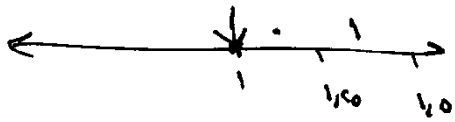
١) $س = -٥$ لأن $\lim_{س \to -٥} م(س) \neq م(٥)$

$س = ١$ لأن $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$

$س = ٤$ لأن $م(٤)$ غير معرّفة

٣) $\lim_{س \to ١,٥^+} م(س) = ١$

$\lim_{س \to ١,٥^-} م(س) = ٠$



بما أن $\lim_{س \to ١,٥^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١,٥^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ١,٥$

٤) $م$ غير متصل عند $س = ١$ فإن $م(١)$ غير معرّفة

٤) $م$ غير متصل عند $س = ٢$ لأن $م(٢)$ غير معرّفة

٥) $\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} (١ - جتا س) = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|جتا س|}{س} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^+} م(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ٠$

٦) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} \sqrt{س-٢} =$ صفر

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} |س-١٩| = \lim_{س \to ٢^-} (٩-س) =$ صفر

$ل(٢) =$ صفر

$\because \lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ل(٢)$

$\therefore$ ل متصل عند $س = ٢$

٧) $م(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

$\because \lim_{س \to ٢} م(س) \neq م(٢)$ $\therefore$ م غير متصل عند $س = ٢$

٨) $ك(٢) = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ك(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ك(س) =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to ٢} ك(س)$ غير موجود وعليه ك غير متصل عند $س = ٢$

٩) بما أن ع متصل عند $س = ٢$

فإن $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ع(٢)$

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \frac{ج}{٢} + ٤$

$\frac{ج}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{ج}{٢} = ١ \Leftarrow ج = ٢$

١٠) $ل(١) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١^+} ل(س) = \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س-١)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س-١)}$

$= ٧$

$\because \lim_{س \to ١} ل(س) \neq ل(١)$ $\therefore$ ل غير متصل عند $س = ١$

١١) $م(٢) = [٢+٤] = [٦] = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} (أ س + ٥) + \frac{٦}{ب}$

$= ٣ + ٣ = ٦$

بما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

$\therefore$ م متصل عند $س = ٢$

١٢) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} ل(س) = ل(٢)$

$-٣ = ٤ + ب \Leftarrow ب = -٧$

١٣) $م(٣) = ٢ \times ٣ + ٥ = ٤ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٢(٣)^٢ - ٤$

$= ٢ \times ٩ - ٤$

$= ١٤$

بما ان $\lim_{س \to ٣} م(س) = م(٣)$ $\therefore$ م متصل عندما $س = ٣$.

ثانياً: الاتصال على فترة

تدريب (١)

د متصل على الفترة $(٥,٢)$ على جموعة كثيرات حدود.

د متصل على الفترة $(٧,٥)$ على جموعة كثيرات حدود.

$\because$ $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٩$ ، $د(٢) = ٩$

$\therefore$ د متصل عند $س = ٢$

لكي تكون د متصلة على $[٥,٧]$ يجب أن تكون متصلة عند $س = ٥$ ، $س = ٧$

$\because$ $\lim_{س \to ٥^+} د(س) = ٢٥$ ، $\lim_{س \to ٥^-} د(س) = ٢٥$ ، $د(٥) = ٢٥$

$\therefore$ د متصل عند $س = ٥$ وبذلك د متصل على الفترة $[٧,٥]$

$\because$ $\lim_{س \to ٧^-} د(س) = ٩$ ، $د(٧) = ٩$ د غير متصل عند

$\therefore$ د متصل عند $س = ٧$ وبذلك د متصل على الفترة $[٧,٥]$

تدريب (٢)

١) د متصل على $ح - \{٥\}$ على جموعة اقترانات نسبية معرّفة في ح

عند $س = ٥$

$$\lim_{س \to ٥} د(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)} = ١٠$$

$د(٥) = ٥ + ٥ = ١٠$

وبذلك د متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تدريب (٣)

أحد تعريف الاقتران د.

د متصل على $(٠,١ \text{ و } ٠)$ على جموعة كثيرات حدود.

$$د = \begin{cases} أ و - س & ٠,١ \leq س \leq أ \\ س - أ & أ \leq س \leq ٩,٠ \end{cases}$$

د متصل على $(٠,١ \text{ و } ٠,٩)$ على جموعة كثيرات حدود.

عند نقطة الكوّلب.

$\lim_{\substack{س \to او^+}} هـ(س) = \lim_{\substack{س \to او^+}} (س - او) = او - او = صفر$

$\lim_{\substack{س \to او^-}} هـ(س) = \lim_{\substack{س \to او^-}} (او - س) = صفر$

$هـ(او) = صفر$.

$\therefore$ هـ متصل عند $س = او$.

عند الأطراف:

$\lim_{\substack{س \to ا.و^+}} هـ(س) = او - ا.و = ٠.٩\ و$ ، $هـ(ا.و) = ٠.٩\ و$

$\therefore$ هـ متصل على يمين العدد ا.و .

$\lim_{\substack{س \to ٩و^-}} هـ(س) = ٩و - او = ٨\ و$ ، $هـ(٩و) = ٩و - او$

$\therefore$ هـ متصل على يسار العدد ٩ و

$\therefore$ هـ متصل على الفترة $[ا.و\ ،\ ٩و]$

تدريب (٤)

بما أنه الاقترانان ع متصل على الفترة $[-\pi\ ،\ \pi]$ $\therefore$ ع متصل عند $س = ٠$

$\therefore \lim_{\substack{س \to ٠^+}} ع(س) = \lim_{\substack{س \to ٠^-}} ع(س) = ع(٠)$

$ب(٢+٠) = \lim_{\substack{س \to ٠^-}} \frac{جا ٢س}{٥س} = \frac{٢}{٥}$

$\Leftarrow \frac{٢}{٥} = ٢$ ، $\boxed{ب = ١}$ $\boxed{ا = ١٠}$

تمارين ومسائل

١) $ه$ متصل على الفترة $(-٢،١)$ على صورة كثير حدود ـ

$ه$ متصل على الفترة $(١،٢)$ على صورة كثير حدود ـ

عند نقطة التحول

$\text{نهـا}_{س \to ١^+} ه(س) = ٨$ ، $\text{نهـا}_{س \to ١^-} ه(س) = ٣+٥ = ٨$

$ه(١) = ٨$

$\therefore ه$ متصل عند $س = ١$

عند الأطراف :

$\text{نهـا}_{س \to -٢^+} ه(س) = ١٧$ ، $ه(-٢) = ١٧$

$\therefore ه$ متصل على مجموعة العدد -٢

$\text{نهـا}_{س \to ٢^-} ه(س) = ١٦$ ، $ه(٢) = ١٦$

$\therefore ه$ متصل على يمين العدد ٢

ومنه $ه$ متصل على الفترة $[-٢،٢]$

٢) أكمل تعريف الاقتران ل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ & ٥ \leq س < ٨ \\ ١٠ - ٣س & ١ \leq س < ٥ \end{cases}$$

ل متصل على الفترة $(٥،٨)$ والفترة $(-١٠،٥)$ على صورة كثير حدود

عند نقطة التحول

$\text{نهـا}_{س \to ٥^+} ل(س) = \text{صغر}$ ، $\text{نهـا}_{س \to ٥^-} ل(س) = \text{صغر}$. $ل(٥) = \text{صغر}$

$\therefore ه$ متصل عند $س = ٥$

عند الأطراف :

$\lim_{س \to -١٠^+} م(س) = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$ ، $م(-١٠) = ٢٠$

∴ م متصل على يمين العدد -١٠

$\lim_{س \to ٨^-} م(س) = ١٦ - ١٠ = ٦$ ، $م(٨) = ٦$

∴ م متصل على يسار العدد ٨

وهذا م متصل على الفترة $[-١٠، ٨]$

(٣) ع متصل على الفترة $(-٣، ٥)$ على مجموعة اقتران نسبي معرف على مجاله

ع متصل على الفترة $(٣، ٥)$ على مجموعة اقتران كثير حدود.

عند $س = ٣$

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ع(س) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٣ - ٧س + ٦}{٣ - س} =$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س - ١)(س - ٢)(س + ٣)}{(٣ - س)(٣ + س)}$

$= -٢٧$

بما أن $\lim_{س \to ٣^+} ع(س) \neq \lim_{س \to ٣^-} ع(س)$ ∴ ع غير متصل عند $س = ٣$

وهذا ع متصل على $ح - \{٣\}$

(٤) ل متصل على الفترة $(-٥، ٤)$ حيث ك ثابت معرف

ل متصل على الفترة $(٤، ٥)$ متصل (ليس مطلقاً)

عند نقطة التحول $س = ٤$

$\lim_{س \to 4^+} ل(س) = \infty$ ، $\lim_{س \to 4^-} ل(س) = \infty$ ، $ل(4) = \infty$

∴ ل متصل عند $س = 4$

ومنه ل متصل على الفترة $(-\infty, \infty)$

٥) $\lim_{س \to 4^-} ع(س) = 8$ ، $ع(4) = 4$

∴ ع غير متصل عند $س = 4$ من جهة اليسار

$\lim_{س \to 3^+} ع(س) = 8$ ، $ع(3) = 5$

∴ ع غير متصل عند $س = 3$ من جهة اليمين

ع متصل على الفترة $(4,13)$ على مجموعة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية

ومنه ع متصل على الفترة $(4,13)$

٦) $م$ متصل على الفترة $(3,10)$ اقتران جذره معرّف على مجاله

بما الفترة $(6,13)$ موجبة لنضمن تحوّل عند $س = 4$

$\lim_{س \to 4^+} م(س) = 2$ ، $\lim_{س \to 4^-} م(س) = 2$

∴ $م$ غير متصل عند $س = 4$

عند الطرف

$\lim_{س \to 0^+} م(س) = 1$ ، $م(0) = 1$

∴ $م$ متصل على يمينه العدد ٠

$\lim_{س \to 6^-} م(س) = 3$ ، $م(6) = 3$

∴ $م$ متصل على يسار العدد ٦

ومنه $م$ متصل على الفترة $[0,6] - \{4\}$

٧) بما ان الاقتران ع متصل :

$$\lim_{س \to ٤} ع(س) = ٧$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٧$$

بما ان المقام معطوف ∴ (س-٢) عامل من عوامل البسط

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س^٢ + ٢(هـ-١)س - ٤هـ)}{س-٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٢)(س + ٢ + ٢(هـ-١))}{(س-٢)} = ٧$$

$$٢ + ٢ + ٢(هـ-١) = ٧$$

$$٢(هـ-١) = ٣$$

$$هـ - ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \boxed{هـ = \frac{٥}{٢}}$$

٨) ع متصل على الفترة $(-\infty, ٢)$ ع لصورة كثير حدود .

ع متصل على الفترة $[٢, ٤)$ اقتران خطي

ع متصل على الفترة $(٤, \infty)$ اقتران نسبي معرف على مجاله.
(أي يعدا المقام)

عند الطرف $س = ٦ \leftarrow س^٢ = ٣٦$ ، $-٦ \notin (٤, \infty)$ ، $٦ \in (٤, \infty)$

بما $م(س) = ٤$ $م(٢) = ٣$ ∴ م غير متصل عند $س = ٢$
$س \to ٢^-$

بما $م(س) = ٣$ ، بما $م(س) = \frac{٢٠}{٢٦-١٦} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$
$س \to ٤^-$ $س \to ٤^+$

∴ م غير متصل عند $س = ٤$

∴ م متصل على $ح - \{٢, ٤, ٦\}$

٩) في الفترة $(-1,0)$ ρ متصل لأنها مجموعة كثير حدود $(-1+س)$
في الفترة $(0,2)$ ρ متصل (مجموع اقترانين متصلين)

نقطة التحول $س = 0$

$\lim_{س \to 0^+} \rho(س) = \lim_{س \to 0^+} 1 = 1$ ، $\lim_{س \to 0^-} \rho(س) = -1$

$\therefore \rho$ غير متصل عند $س = 0$

الأطراف :

$\rho(س) = -2$ ، $س \to -1^+$

$\rho(-1) = -2$

ρ متصل على يمين العدد -1

$\rho(س) = \sqrt{2س + \frac{12}{5}}$ ، $س \to 2^-$

$\rho(2) = \sqrt{2 \times 2 + \frac{12}{5}}$

ρ متصل على يسار العدد 2

وعليه ρ متصل على الفترة $[-1,2] - \{0\}$

١٠) يكون الاقتران السيني متقارباً نحو العدد الحقيقي
إذا كانت المميز $ب^2 - 4أجـ < 0$
للمقام

$1 - 4 \times 3 \times 4 < 0$

$1 - 12 < 0 \Leftarrow 12 > 1$

ضم $م$ التي تحقق المتباينة $م > \frac{1}{12}$

١) أ) $\lim_{س \to 0^+} ق(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to 0^-} ق(س) = -٢$

جـ) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٤$

هـ) م $= \{٠, ٢\}$

و) ب $= \{٠, ٢, ٤\}$

٢) اقترف $ص = ٢س + ١$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ٣$

$\lim_{ص \to ٣} ه^{٢}(ص) - \lim_{س \to ١} ٢س + ٢ = ١٦ + ١ = ١٧$

٣) بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to -٢^+} ق(س) = \lim_{س \to -٢^-} ق(س)$

$-١ = ٩د - ٤$

$٩د = ٣ \Leftarrow د = \frac{١}{٣}$

٤) حتى تكون النهاية موجودة $\therefore (س+٢)$ عامل من عوامل البسط

$٠ = م + ٢ \times (١٣ + م) + ٤$

$٠ = م + ٢٦ + ٢م + ٤$

$٠ = ٣م + ٣٠ \Leftarrow م = -١٠$

٥) بما أن $\lim_{س \to ٥} م(س)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^+} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م(س)$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{|س^٣ - ٤س - ٥|}{|س - ١٥|} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)} = ٦$

$س^٣ - ٤س - ٥ = س^٣ + ٤س + ٥ \quad س^٣ - ٤س - ٥$

$-١ \qquad ٥$

$\lim_{س \to ٥^-} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م جتا \frac{\pi}{٥} س + ٥ = ٦$

$= -م + ٥ = ٦ \Leftarrow \boxed{م = -١}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{١ - جتاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{(١ - جتاس)} \times \frac{(١ + جتاس)}{(١ + جتاس)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{جا^٢ س} \times \frac{١}{س}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٣ جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} \left(\frac{س}{جاس} - \frac{جاس}{جاس} \right) = \frac{١}{٠^٢} \times ١ - \frac{١}{٠^٢} \times ١$

$=$ غير

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٣ جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} \left(\frac{س}{جاس} - \frac{جاس}{جاس} \right)$

$= \frac{١}{٠^٢} + \frac{١}{٠^٢} =$ غير

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٣ جاس} =$ غير

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{س + \text{جا}^2 س}{س^3 - س} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{س^3 - س} + \frac{\text{جا}^2 س}{س^3 - س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{س^3 - س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^3 - س} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ج) $\lim_{س \to 1} \frac{1}{(1-س)} \left(\frac{1}{\text{ظا} س} - 1 \right) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{1-س} \left[\frac{1 - \text{ظا} س}{\text{ظا} س} \right]$

$= \lim_{س \to 1} \frac{1}{(1-\text{ظا} س)(\text{ظا} س + 1)} \cdot \frac{(1 - \text{ظا}^2 س)}{\text{ظا} س} = \frac{-1}{2}$

د) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 3س}{\sqrt{س+1} - \sqrt{3س-1}} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س - 1 - \sqrt{3س-1}}$ بالضرب بمرافق المقام

$\lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س - 1 - \sqrt{3س-1}} \times \frac{س - 1 + \sqrt{3س-1}}{س - 1 + \sqrt{3س-1}} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)[س - 1 + \sqrt{3س-1}]}{(س-1)^2 - (3س-1)}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)[س - 1 + \sqrt{3س-1}]}{س^2 - 5س + 4} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)[س - 1 + \sqrt{3س-1}]}{(س-4)(س-1)}$

$= \frac{2(-1)(2)}{(-2)(1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

$$= \frac{\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} (س - \frac{\pi}{6})}{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} - س)} \times \frac{\text{جا}(2س + \frac{\pi}{6})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \frac{1}{\text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(س - \frac{\pi}{6})}{(س - \frac{\pi}{6})}} \times \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(2س + \frac{\pi}{6})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \frac{1}{1} \times \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(2س + \frac{\pi}{6})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2 \text{جا}(س + \frac{\pi}{6}) \text{جتا}(س + \frac{\pi}{6})}{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2 \text{جا}(س + \frac{\pi}{6}) \text{جتا}(س + \frac{\pi}{6})}{\text{جتا}(س + \frac{\pi}{6})}$$

$$= \text{نها}_{س \to \frac{\pi}{6}} 2 \text{جا}(س + \frac{\pi}{6})$$

$$= 2 \text{جا}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6})$$

$$= 2 \text{جا} \frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

ب) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{ظا^2 س - 1}{س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\frac{1}{\text{جتا}^2 س} - 1}{س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2 \text{جتا}^2 س}$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2 \text{جتا}^2 س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س \text{جتا}^2 س}$$

$$= 1 \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س \text{جتا}^2 س}$$

$$= 2$$

ج) $\text{نها}_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + هـ) - \text{جتا}(\frac{\pi}{2} + هـ)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to 0} \frac{\text{جا}^2 هـ - \text{جتا}(\frac{\pi}{2} + هـ)}{هـ}$

$$= \text{نها}_{هـ \to 0} \frac{-2 \text{جا}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + هـ) \text{جا}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - هـ)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to 0} \frac{-2 \text{جا}(\frac{\pi}{2} + هـ) \text{جا}(-هـ)}{هـ}$$

$$= \text{نها}_{هـ \to 0} -2 \times \text{جا}(\frac{\pi}{2} + هـ) \times \frac{\text{جا}(-هـ)}{هـ} = -2 \times \text{جا} \frac{\pi}{2} \times -1 = 2$$

(ملاحظة: يمكنك حل السؤال لاحقا باستخدام تعريف المشتقة)

د) $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا} 3س - \text{جتا} 5س}{س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا} 4س \text{جا}(-س)}{س^2}$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{2 \text{جا} 4س \text{جا} س}{س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} 4س}{س} \times \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س}$$

$$= 4$$

AWAEL
LEARN 2 BE

١) بالضرب على مقام بكسر اكسر

$$\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ع س^{2}}{س} - \frac{ط ا ب س}{س}}{\frac{ب س}{س} - \frac{ط ا ٤ س}{س}} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{ع - ب}{ب - ٤} = \frac{١}{٤} \Leftarrow \quad -٤ب = ب - ٤$$
$$-٥ب = -٤ \Leftarrow \quad ب = \frac{٤}{٥}$$

$$\lim_{س \to ٤} م(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٤}$$ اعد صياغة النهاية حسب المطلوب

$$\lim_{س \to ٤^{+}} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^{+}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^{+}} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)} = ٤$$

$$\lim_{س \to ٤^{-}} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^{-}} \frac{٤ - س^{٢}}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^{-}} \frac{(٥ - س)(٥ + س)}{(س - ٤)} = -٤$$

م غير متصل عند س = ٤

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} [٥ و. س + ٢] = ٤$$

$$\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} \frac{١}{س^{٣}} - ١ = \frac{١}{٨}$$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجود

وبالتالي ع غير متصل عند س = ٢

$$\lim_{س \to -٢^{+}} ل(س) = \lim_{س \to -٢^{+}} -٦ - [س] = -٢$$

$$\lim_{س \to -٢^{-}} ل(س) = \lim_{س \to -٢^{-}} \frac{٩ - س^{٤}}{|١ - ٦س + ١٢س^{٢}|} = \lim_{س \to -٢^{-}} \frac{(٣ - س)(٣ + س)(٢س + ١)}{|٢س - ١|}$$

$$= \frac{(٣ - ٢)(٣ + ٢)(٢ \times -٢ + ١)}{-(٢ \times -٢ - ١)} = -(٥ \times -٣) = -٢$$

م متصل عند س = $-\frac{١}{٢}$ $\therefore$ م(-٢) = $\frac{١}{٢}$

١١) ع(س) = $\sqrt{س+١}$ متصل على الفترة (٢،١) اشتقاقية جد ع' ثم بسط
معرف على مجاله .

ابحث في اتصال ع على ساء العدد ٣

منا ع(س) = $\sqrt{س+١}$ = $\sqrt{٣}$
س→٢

ع(٢) = $\sqrt{٢+١}$ = $\sqrt{٣}$

بما ان منا ع(س) ≠ ع(٢) ∴ ع غير متصل على ساء العدد ٣
س→٢

وصف ع متصل على الفترة (٢،١)

١٢) هـ متصل على الفترة (-٥،١) على مجموعة كثيرة حدود .
هـ متصل على الفترة (١،٥) لانه حاصل قسمة كثيرة حدود بافتراض
جد ثم بسط معرف في مجاله مقروع منها ١.

ابحث في اتصال هـ عند س = ١

منا هـ(س) = منا $\frac{س^{٣}-١}{س-١}$ = منا $\frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{س-١}$ = ١
س→١+ س→١+ س→١+

منا هـ(س) = منا $س^{٢}$ = ١
س→١- س→١-

∴ منا هـ(س) = منا هـ(س)
س→١+ س→١-

فنها هـ(س) = هـ(١) = ١
س→١

وعليه هـ(س) متصل عند س = ١

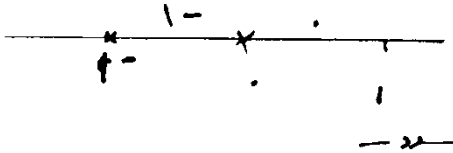
هـ(س) متصل على ح .

١٣) م متصل على الفترة $(-٢، -١)$ على مجموعة اقتران f يحقق f معرّف على مجاله

اثبت بالمثال م على الفترة $(-١، ١)$

يوجد نقطة تتشعب عند $س = ٠$

م متصل على الفترة $(-١، ٠)$ على مجموعة كثير حدود



م متصل على الفترة $(٠، ١)$ على مجموعة كثير حدود

اثبت بالمثال عند $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} ٠ = ٠$ ، $\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} س = ٠$

$م(٠) = ٠$ ∴ م متصل عند $س = ٠$ ومنه م متصل على $(-١، ١)$

عند نقطة التشعب $س = -١$

$\lim_{س \to -١^+} م(س) = \lim_{س \to -١^+} [س] = -١$

$\lim_{س \to -١^-} م(س) = \lim_{س \to -١^-} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} (س - ١) = -٢$

∴ م غير متصل عند $س = -١$

عند الطرف $س = -٢$

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) \stackrel{؟}{=} م(-٢)$

$\lim_{س \to -٢^+} \frac{س^٣ + ١}{س + ٢} = \lim_{س \to -٢^+} \frac{(س + ١)(س - ١)}{(س + ٢)} = -٣$

$م(-٢) = -٣$

∴ م متصل عند $س = -٢$ من جهة اليمين

ومنه م متصل على الفترة $[-٢، ١) - \{-١\}$

١٤) $ل \times و = \begin{cases} 0 & ، \quad س < 0 \\ \frac{س - ١}{س + ٢} & ، \quad ٠ \leq س < ١ \\ ١,٥ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

$ل \times و$ متصل على الفترة $(١,٠)$ لأنها كثيرة حدود

$ل \times و$ متصل على الفترة $(٢,١)$ لأنها دالة نسبية مقامها مخالف للصفر

المشتبه بانفصاله عند نقط التحول

عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^+} ل \times و = صفر$ ، $\lim_{س \to ١^-} ل \times و = صفر$ ، $ل \times و(١) = ٠$

$\therefore ل \times و$ متصل عند $س = ١$

عند الأطراف

$\lim_{س \to ٠^+} ل \times و = ٠$ ، $ل \times و(٠) = ٠$ $\therefore ل \times و$ متصل لأن نهايته تساوي الصفر

$\lim_{س \to ٢^-} ل \times و = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ١}{س + ٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $ل \times و(٢) = ١,٥$

بما أن $\lim_{س \to ٢^-} ل \times و \neq ل \times و(٢)$ $\therefore ل \times و$ غير متصل عند $س = ٢$

العدد ٢ وسنه $ل \times و$ متصل على الفترة $[٠,٢]$

AWA2EL
LEARN 2 BE

١٥)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ج	ج	ب	د	ب	د	ج	د	ج	ب
٢٢	$\frac{1}{2}$	١٨	$\{-\frac{3}{4}\}$	جـ	٩	٥	$\{\frac{3}{4}\}$	٤	(٢،٢)

رياضيات / العلمي / ف1

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثانية

(التفاضل)

الوحدة الثانية : التفاضل /علمي

الفصل الأول : معدّل التغير والمشتقات

أولاً : معدّل التغير

تدريب (١)

١) $\Delta س = ٣,٧ - ٤ = -٠,٣$

٢) $\Delta س = ن + ١ - ن = ١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٢,١) - هـ(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{(٢,١)^٢ - ٥ - (٢^٢ - ٥)}{٠,١}$$

$$= \frac{-٠,٤١}{٠,١} = -٤,١$$

تدريب (٣)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-١ - ٠}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

تدريب (٤)

$$ع = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٣} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$$

تدريب (٥)

معدّل التغير $= ظا ١٣٥^\circ = -١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\Delta ص = هـ(٤) - هـ(٣) = ١٢ - ٦ = ٦$

ب) $\Delta ص = هـ(٢ + هـ) - هـ(٢) = (٢ + هـ)^٢ - ٥ - (٢^٢ - ٥)$

$= ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٥ - ٤ + ٥ = هـ^٢ + ٤هـ$

(٢) معدّل التغير $= \frac{هـ(١ + هـ) - هـ(١)}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٣ - ٣ - (١ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + هـ^٣ + ٣هـ - ٣ - ١ + ٣}{هـ} = هـ + ٣$

(٦) تدريب

(١) ✓

$$\frac{\Delta ص}{\Delta هـ} = \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٢ - ص(٤)) + ٢) - (٣ - ص(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{(١٢ + ٢ - ٣ - ٢) - (ص(٤) \times ص(١))}{٣} = \frac{٩}{٣} - \frac{ص(٤) - ص(١)}{٣}$$

$$= ٣ - ٦ = -٣$$

(٤)

(٣) س = ٢ − ١٠ = ١٫٩

ص = ٥ − ٦٠ = ٤٫٤

النقطة P(١٫٩ ، ٤٫٤)

(٤) نفرض طول ضلع المربع س وحدة ∴ مـ(س) = س٢

معدّل التغير = $\frac{\text{مـ}(١٫٦) - \text{مـ}(٦)}{١٠}$ = $\frac{٢١٫٧٦ - ٣٦}{١٠}$

= $\frac{٢١٫٧٦}{١٠}$ = ١٫٢١ سم٢

(٥) معدّل التغير = $\frac{\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(-١)}{٢ - (-١)}$ = $\frac{٤ \times ٤ - ٣\text{مـ}(٢) - (٤ \times ١ - ٣\text{مـ}(-١))}{٣}$

= $\frac{١٦ - ٤ - ٣(\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(-١))}{٣}$ = $\frac{١٢}{٣} - ٣ \times \frac{\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(-١)}{٣}$

= ٤ − ٣ × ٥ = −١١

(٦) أ) $\bar{ع}$ = $\frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢}$ = $\frac{٣٠٠ - ١٢٥ - (١٠٠ - ١٢٥)}{٣}$

= $\frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣}$ = $\frac{٧٥}{٣}$ = ٢٥ ∴

ب) $\bar{ع}$ = $\frac{ف(٥ن) - ف(٠)}{٥ن}$ = $\frac{٦٠ ٥ن - ٥(٥ن)^٢}{٥ن}$

= $\frac{٥ ٥ن (١٢ - ٥ن)}{٥ن}$ = ٥ (١٢ − ٥ن)

(٧) معدّل التغير = $\frac{\text{حـ}(٤) - \text{حـ}(١)}{٤ - ١}$ = $\frac{\text{مـ}^٢(٤) - \text{مـ}^٢(١)}{٣}$

= $\frac{(\text{مـ}(٤) - \text{مـ}(١))(\text{مـ}(٤) + \text{مـ}(١))}{٣}$

= $\frac{\text{مـ}(٤) - \text{مـ}(١)}{٣} \times (\text{مـ}(٤) + \text{مـ}(١))$ = ٣ × ٢ = ٦

(٢)

٨) $\frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٩-٥} = ١٤$ ، $هـ(٩)-هـ(٥) = ٥٦$

$\frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٥-٢} = ٧$ ، $هـ(٥)-هـ(٢) = ١٢$

معدّل التغير $= \frac{هـ(٩)-هـ(٢)}{٩-٢} = \frac{هـ(٩)-هـ(٥)+هـ(٥)-هـ(٢)}{٧}$

$= \frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٧} + \frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٧} = \frac{٥٦}{٧} + \frac{١٢}{٧} = ١١$

٩) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = ظا\frac{٣}{٤}\pi$

$هـ(٤)-هـ(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٥$

١٠) معدّل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = \frac{[٤+١]-١٠-١٣}{٣}$

$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١١) $هـ(س) = \frac{١}{س^٢+س}$ ، $س \neq ٠$

مقدار التغير $= هـ(س_٢)-هـ(١) = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} = \frac{١}{٦}$ ، $س_٢^٢+س_٢ = ٦$

$س_٢^٢+س_٢-٦ = ٠$ ، $(س_٢+٣)(س_٢-٢) = ٠$

إذن $س_٢ = ٢$ ، -٣ يُهمل

١٢) ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{١٠-٢}{٥-١} = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ثانياً : المشتقة الأولى

التدريبات

(١) $\text{هـ}'(-1) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(-1+\text{هـ}) - \text{هـ}(-1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{(-1+\text{هـ})^3 + 2(-1+\text{هـ}) - (-3)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}^3 - 3\text{هـ}^2 + 3\text{هـ} - 1 - 2 + 2\text{هـ} + 3}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{هـ}^2 - 3\text{هـ} + 5)}{\text{هـ}} = 5$

٢) نفرض $5\text{هـ} = \text{ل}$ ومنه $\text{هـ} = \frac{\text{ل}}{5}$ ، ل ← ٠ عندما هـ ← ٠ .

$\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(0) - \text{هـ}(5\text{هـ})}{3\text{هـ}} = \lim_{\text{ل}\to 0} \frac{\text{هـ}(0) - \text{هـ}(\text{ل})}{\frac{3}{5}\text{ل}}$

$= -\frac{5}{3} \lim_{\text{ل}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{ل}) - \text{هـ}(0)}{\text{ل}} = -\frac{5}{3}\text{هـ}'(0) = -\frac{30}{3} = -10$

(ج) $\text{هـ}'(2) = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(2)}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1} - \frac{2}{3}}{\text{س} - 2}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\frac{3\text{س} - 2(\text{س}+1)}{3(\text{س}+1)}}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{3\text{س} - 2\text{س} - 2}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)}$

$= \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س} - 2}{3(\text{س}+1)(\text{س}-2)} = \frac{1}{9}$

(د) $\text{هـ}'(-1) = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(-1)}{\text{س} - (-1)} = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4\text{س} + 1 - (-3)}{\text{س} + 1}$

$= \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4\text{س} + 4}{\text{س} + 1} = \lim_{\text{س}\to -1} \frac{4(\text{س}+1)}{\text{س}+1} = 4$

س = ١ نقطة تفرع

$\text{هـ}'_-(1) = \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{4\text{س} + 1 - 5}{\text{س} - 1}$

$= \lim_{\text{س}\to 1^-} \frac{4(\text{س}-1)}{\text{س}-1} = 4$

$\text{هـ}'_+(1) = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{2\text{س} + 3 - 5}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س}\to 1^+} \frac{2(\text{س}-1)}{\text{س}-1} = 2$

هـ (١) غير موجودة لأن $\text{هـ}'_-(1) \neq \text{هـ}'_+(1)$

(٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{\frac{٤}{س^{٢} + ٧} - \frac{٤}{٤^{٢} + ٧}}{س - ٤}$ (٤)

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(٤^{٢} + ٧)(س^{٢} + ٧)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)(٤^{٢} + ٧)(س^{٢} + ٧)}{٤(-س^{٢} + ٧) - س(٤^{٢} + ٧)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)(٤^{٢} + ٧)(س^{٢} + ٧)}{٤س^{٢} + ٧٤ - س٤^{٢} - ٧س} = \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)(٤^{٢} + ٧)(س^{٢} + ٧)}{٤س^{٢} - ٤س٤ + ٧٤ - ٧س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)(٤^{٢} + ٧)(س^{٢} + ٧)}{٤س(س - ٤) + ٧(٤ - س)} = \lim_{س \to ٤} \frac{(٤ - س)(٤^{٢} + ٧)(س^{٢} + ٧)}{(٤ - س)(٧ - ٤س)}$

$= \frac{(٤^{٢} + ٧)^{٢}}{٧ - ٤^{٢}}$

تمارين وسائل

(أ) ب) $ق'(٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٧ - ٥(٢ + هـ) - (-٨)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥هـ + ٨}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$

ج) $ق'(-١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(-١ + هـ) - ق(-١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(-١ + هـ)^{٣} + (-١ + هـ)^{٢} - ٠}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^{٣} - ٣هـ^{٢} + ٣هـ - ١ + ١ - ٢هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^{٣} - ٢هـ^{٢} + هـ}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ^{٢} - ٢هـ + ١)}{هـ} = ١$

د) $ل'(٥) = \lim_{س \to ٥} \frac{ل(س) - ل(٥)}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٨س - ١} - ٦}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{\sqrt{٨س - ١} + ٦} \times \frac{\sqrt{٨س - ١} + ٦}{\sqrt{٨س - ١} + ٦} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(\sqrt{٨س - ١} + ٦)}{س - ١ - ٣٦}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(\sqrt{٨س - ١} + ٦)}{٨(س - ٥)} = \lim_{س \to ٥} \frac{(\sqrt{٨س - ١} + ٦)}{١} = \frac{٦}{٣}$

(٤)

تدريب (٥)

نفرض طول ضلع المصفوفة س وساحتها م(س)

فيكون م(س) = س^{٢}

$$م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

م'(٠) = ٢ × ٠ = ٠ وحدة مربعة

(٥)

د) $\text{هـ}(٠)$ ، $\text{هـ}(٦)$ غير موجودة لأن هـ غير متصلة عند $س = ٠$ ، $س = ٦$ طرفي فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$\text{هـ}'(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦ - س}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٢)}{س - ٣} = ٥$$

$$\text{هـ}'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥س - ٩ - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

$\text{هـ}(٣) = ٥$ لأن $\text{هـ}'_+(٣) = \text{هـ}'(٣) = ٥$

هـ) نعيد تعريف $\text{هـ}(س)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ & س \le -٢ \\ ٤ - س^٢ & -٢ \le س \le ٢ \\ س^٢ - ٤ & س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ}'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٢ - ٣}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{-(س^٢ - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{-(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = -٢$$

$س = ٢$ نقطة تفرع

$$\text{هـ}'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{٤ - س^٢ - ٠}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} -(٢ + س) = -٤$$

$$\text{هـ}'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٤$$

$\text{هـ}(٢)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}'(٢) \neq \text{هـ}'_+(٢)$

و) $\text{هـ}(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{٣ + س}{٢ + س} - ١ - ١}{س + ١}$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٣ + س - ٢ - س}{(س + ٢)(س + ١)} = \lim_{س \to -١} \frac{٢(س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)} = \frac{٢}{١}$$

(٦)

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{م(ع)-م(س)}{ع-س}$ ⇒ $\lim_{س \to ع} \frac{م(ع)-م(س)}{ع-س} = \lim_{س \to ع} \frac{ع^3 - 3ع س^2 + 3س^3}{ع-س}$

$= \lim_{س \to ع} \frac{ع^3 - \frac{ع^3}{3} - (س^3 - \frac{س^3}{3})}{ع-س} = \lim_{س \to ع} \frac{\frac{2}{3}ع^3 - \frac{2}{3}س^3}{ع-س}$

$= \lim_{س \to ع} \frac{\frac{2}{3}(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} = \frac{2}{3}(3ع^2) = 2ع^2$

د) $م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع)-م(س)}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^3 - 3ع^2 - س^3 + 3س^2}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2) - 3(ع-س)(ع+س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} (ع^2+ع س+س^2 - 3ع - 3س)$

$= 3س^2 - 6س$

هـ) $م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع)-م(س)}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{2ع-1} - \sqrt{2س-1}}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{2ع-1-2س+1}{(ع-س)(\sqrt{2ع-1}+\sqrt{2س-1})} = \lim_{ع \to س} \frac{2}{\sqrt{2ع-1}+\sqrt{2س-1}}$

$= \frac{2}{2\sqrt{2س-1}} = \frac{1}{\sqrt{2س-1}}$

و) $م'(س) = \lim_{ه \to 0} \frac{م(س+ه)-م(س-ه)}{ه} = \lim_{ه \to 0} \frac{م(س+ه)-م(س)+م(س)-م(س-ه)}{ه}$

$= \lim_{ه \to 0} \frac{م(س+ه)-م(س)}{ه} + \lim_{ه \to 0} \frac{م(س)-م(س-ه)}{ه}$

$= م'(س) + م'(س) = 2م'(س)$

ز) $\lim_{ع \to س} \frac{ع م(س) - س م(ع)}{ع-س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع م(ع) + ع م(س) - ع م(س) - س م(ع)}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع م(ع) - س م(ع)}{ع-س} + \lim_{ع \to س} \frac{ع م(س) - ع م(ع)}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{م(ع)(ع-س)}{ع-س} - \lim_{ع \to س} \frac{ع(م(ع)-م(س))}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} م(ع) - س م'(س) = م(س) - س م'(س)$

(٦)

السؤال (٢)

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ص(ع) - ص(س)}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} \frac{ع^3 - س^3}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع^2 + ع س + س^2) = 3 س^2$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ص(ع) - ص(س)}{ع - س} \times \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع} - \sqrt{س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع^2} + \sqrt{ع}\sqrt{س} + \sqrt{س^2}}{\sqrt{ع^2} + \sqrt{ع}\sqrt{س} + \sqrt{س^2}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع^2} + \sqrt{ع}\sqrt{س} + \sqrt{س^2})} = \frac{1}{3\sqrt{س^2}}$

(٧) ج) $\lim_{س \to ج} \frac{٢ج\,ظا(ج) - ٣س\,ظا(س)}{ج - س} = \lim_{ع \to ج} \frac{٢ج\,ظا(ج) - ج\,ظا(س) - ج\,ظا(س) + ج\,ظا(ع) - س\,ظا(ع) + س\,ظا(ع)}{ع - س}$

$= ٣ \lim_{ع \to ج} \frac{ج(ظا(ع) - ظا(س))}{ع - س} + ٣ \lim_{ع \to ج} \frac{ظا(س)(ع - س)}{ع - س}$

$= ٣س\,ظا^{٢}(س) + ٣\,ظا(س)$

٤) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٥ - ٢هـ) - ظا(٥ + ٤هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٥) + ظا(٥ - ٢هـ) - ظا(٥ + ٤هـ) - ظا(٥)}{هـ}$

$= - \lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٥ + ٤هـ) - ظا(٥)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٥ - ٢هـ) - ظا(٥)}{هـ}$

نفرض $٤هـ = م$ ومنه $هـ \to ٠$ يكون $م \to ٠$ ونفرض $-٢هـ = ل$ ومنه $هـ \to ٠$ يكون $ل \to ٠$

$= - \lim_{م \to ٠} \frac{ظا(٥ + م) - ظا(٥)}{\frac{م}{٤}} + \lim_{ل \to ٠} \frac{ظا(٥ + ل) - ظا(٥)}{-\frac{ل}{٢}}$

$= -٤ \lim_{م \to ٠} \frac{ظا(٥ + م) - ظا(٥)}{م} - ٢ \lim_{ل \to ٠} \frac{ظا(٥ + ل) - ظا(٥)}{ل}$

$= -٤ ظا'(٥) - ٢ ظا'(٥) = -٦ ظا'(٥) = -٣٦$

(٥) $ظا'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س) - ظا(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢) ل(س)}{س - ٢} = ٠$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س - ٢} \times \lim_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢)$

(٦) نفرض طول نصف القطر (نصف) للأرض $= ج$ (ع)

فيكون $ظا = نصف + ٢$

$م(نصف) = ٢ نصف^{٢} ج = ٢ نصف^{٢} (نصف + ٢)$

$= ٢ نصف^{٣} + ٤ نصف^{٢}$

$م'(٦) = \lim_{نصف \to ٦} \frac{م(نصف) - م(٦)}{نصف - ٦} = \lim_{نصف \to ٦} \frac{٢ نصف^{٣} + ٤ نصف^{٢} - ٦٩٦}{نصف - ٦}$

$= ٢ \lim_{نصف \to ٦} \frac{نصف^{٣} + ٢ نصف - ٧٤}{نصف - ٦} = ٢ \lim_{نصف \to ٦} \frac{(نصف - ٦)(نصف + ١٧)}{نصف - ٦} = ٧٣٨$

(٧) $ظا'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٦ س^{٢} هـ - ٣ س هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} هـ(٦ س^{٢} - ٣ س هـ) = ٦ س^{٢}$

$ظا'(-٢) = ٦(-٢)^{٢} = ٢٤$

(٧)

(٨) نفرض طول ضلع المكعب ل وحدة فيكون ح(ل) = ل^{٣}

$$\text{هـ}'(ج) = \lim_{ل \to ج} \frac{ح(ل) - ح(ج)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} \frac{ل^{٣} - ٨}{ل - ج}$$

$$= \lim_{ل \to ج} \frac{(ل - ج)(ل^{٢} + ج ل + ٤)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} (ل^{٢} + ج ل + ٤) = ١٢$$

(٩) نفرض طول نصف قطر الكرة نصف وحدة ، ح(نصف) = $\frac{٤}{٣}$ ط نصف^{٣}

$$\text{حـ}'(\text{نصف}) = \lim_{ع \to \text{نصف}} \frac{ح(ع) - ح(\text{نصف})}{ع - \text{نصف}} = \lim_{ع \to \text{نصف}} \frac{\frac{٤}{٣} ط ع^{٣} - \frac{٤}{٣} ط \text{نصف}^{٣}}{ع - \text{نصف}}$$

$$= \frac{٤}{٣} ط \lim_{ع \to \text{نصف}} \frac{ع^{٣} - \text{نصف}^{٣}}{ع - \text{نصف}} = \frac{٤}{٣} ط \lim_{ع \to \text{نصف}} \frac{(ع - \text{نصف})(ع^{٢} + \text{نصف} ع + \text{نصف}^{٢})}{ع - \text{نصف}}$$

$$= \frac{٤}{٣} ط \lim_{ع \to \text{نصف}} (ع^{٢} + \text{نصف} ع + \text{نصف}^{٢}) = \frac{٤}{٣} ط \times ٣ \text{ نصف}^{٢} = ٤ ط \text{ نصف}^{٢}$$

ثالثاً : الاتصال والاشتقاقية

التدريبات

(١) ١) $س = ٢$ نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٤}{س} + ١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٥س - ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$

إذن هـ غير متصل عند $س = ٢$

٢) $هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤}{س} + ١ - ٣}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤ - ٢س}{س}}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢(س - ٢)}{س(س - ٢)} = -١$

$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١ - ٩}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$

هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$ لأن $هـ'_-(٢) \neq هـ'_+(٢)$

(٢) نبحث الاتصال عند $س = ٢$ لأنها نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ - ١) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٢س + ١} = \sqrt{٣}$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة وطالما هـ غير متصل عند $س = ٢$

إذن هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٢$ حسب النظرية

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١ - ١٥}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٨$

تمارين ومسائل

(١) P) هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ١ لأن هـ غير متصل عند س = ١

ب) نبحث اتصال هـ عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٠$ ، إذن $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٠$

هـ(٢) = صفر . هـ متصل عند س = ٢ لأن $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س - ٢ & ١ \le س < ٢ \\ ٢(س-٢) & ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

$$هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢(س-٢) - ٠}{س - ٢} = ٢$$

$$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$$

هـ'(٢) غير موجودة لأن $هـ'_+(٢) \neq هـ'_-(٢)$

ج) نجد تعريف ل(س)

نجد هـ(س) هي قاعدة تجد كل فترة طولها $\frac{١}{٢}$ وحدة .

$$ل(س) = \begin{cases} ٥ & \frac{٣}{٢} > س \ge ١ \\ ٤ & ١ > س \ge \frac{١}{٢} \\ ٣ & \frac{١}{٢} > س \ge ٠ \\ ٢ & ٠ > س \ge \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$$\lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{ل(س) - ل(\frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٤}} = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{٢ - ٢}{س - \frac{١}{٤}} = ٠$$

س = ١ نقطة تفرع . نبحث الاتصال عند س = ١

$\lim_{س \to ١^-} ل(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ١^+} ل(س) = ٤$

$\lim_{س \to ١} ل(س)$ غير موجودة وعليه ل غير متصل عند س = ١

ل غير قابل للاشتقاق عند س = ١ لأنه غير متصل عند هذه النقطة

(١٠)

(أ) $هـ$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٠$ ، $س = ٥$ لأنها طرفا فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^+} (٦س - ٣) = ١٥$

$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٦س) = ١٥$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١٥$ ، $هـ(٣) = ١٥$. إذن $هـ$ متصل عند $س = ٣$

$هـ'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦س - ٣ - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$

$هـ'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ + ٦س - ١٥}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} = ٨$

$هـ'(٣)$ غير موجودة لأن $هـ'_+(٣) \neq هـ'_-(٣)$

(ب) نبحث اتصال $هـ$ عند $س = ٩$

$\lim_{س \to ٩} هـ(س) = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣} = ٦$

$هـ(٩) = ٦$. $هـ$ متصل عند $س = ٩$ لأن $\lim_{س \to ٩} هـ(س) = هـ(٩) = ٦$

$هـ'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{هـ(س) - هـ(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} - ٦}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩ - ٦(\sqrt{س} - ٣)}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٩}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)^٢}$

$= \frac{١}{٦}$

(ج) $هـ$ متصل عند $س = ١$ لأن $هـ(١)$ موجودة

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = \lim_{س \to ١^-} هـ(س)$

$\lim_{س \to ١^-} س^٢ = \lim_{س \to ١^+} (ب س + ج)$

$١ = ب + ج$ وعندما $ب = -١$

$ج = ٢$

(٤) عندما $س = -١$

د متصل لجميع قيم $س \neq -١$ لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-١ - ٢ع - (-١ - ٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ع}{س - ع} = -٢ \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = -٢$$

عندما $-١ < س < ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢س$$

عندما $س > ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

$س = -١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^+} س^٢ = ١$$

$$\lim_{س \to -١^-} د(س) = \lim_{س \to -١^-} (-١ - ٢س) = ١$$

$\lim_{س \to -١} د(س) = ١ = د(-١)$ ، د متصل عند $س = -١$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^-} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{-١ - ٢س - ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١^-} \frac{-٢(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$$د'_+(-١) = \lim_{س \to -١^+} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$د'(-١) = -٢$

$س = ١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} س^٢ = ١ \quad ، \quad \lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} س = ١$$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١$. د متصل عند $س = ١$

(٥)

$$\text{هـ}_+'(1) = \lim_{س \to 1^+} \frac{س^2 - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1^+} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1} = 2$$

$$\text{هـ}_-'(1) = \lim_{س \to 1^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{س - 1}{س - 1} = 1$$

هـ(1) غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(1) \neq \text{هـ}_-'(1)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} -2 & س \leq -1 \\ 2س & -1 < س < 1 \\ \text{غير معرفة} & س = 1 \\ 1 & س > 1 \end{cases}$$

(٥) لبحث اتصال هـ عند $س = 2$

$$\lim_{س \to 2^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^+} (2س - 4) = 0$$

$$\lim_{س \to 2^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^-} (س^2 - 2س) = 0$$

$$\lim_{س \to 2} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(2) = 0 \quad \text{، هـ متصل عند } س = 2$$

$$\text{هـ}_+'(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2س - 4}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2(س-2)}{س-2} = 2$$

$$\text{هـ}_-'(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س^2 - 2س}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س(س-2)}{س-2} = 2$$

هـ(2) غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(2) \neq \text{هـ}_-'(2)$

(٦) عندما $س = 0$ ، هـ متصل لأنه ثابت

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{0}{ع - س} = \text{صفر}$$

عندما $0 < س < 4$ ، $\text{هـ}(س) = 5 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{5 - ع - (5 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{ع - س} = -1$$

عندما $س > 4$ ، $\text{هـ}(س)$ متصل ماعدا عند $س = 5$ لأنه اقتران نسبي

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{1}{5 - ع} - \frac{1}{5 - س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{(5 - س) - (5 - ع)}{(5 - ع)(5 - س)}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - 5)(5 - س)(ع - س)} = \frac{1}{(5 - س)^2}$$

نبحث الاستمرار عند نقاط التشعب

عند $س = ٠$:

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - س) = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-}$ صفر $=$ صفر

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجودة وعليه $هـ$ غير متصل عند $س = ٠$.

اذن $هـ$ غير موجودة .

$س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١}{٥ - س} = ١ \neq \lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٥ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ١ \neq هـ(٤) = ١$. $هـ$ متصل عند $س = ٤$

$هـ'_+(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{١}{٥ - س} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{١ - (٥ - س)}{(٥ - س)(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(٥ - س)(س - ٤)} = ١$

$هـ'_-(٤) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٥ - س - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١$

اذن $هـ'(٤)$ غير موجودة . مما سبق

$هـ(س) = \begin{cases} \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ ١ - & ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{(٥ - س)^٢} & س = ٠,٤٧٥ \\ & س > ٤ \end{cases}$

(٧) $هـ(س) = \begin{cases} ١ & ١ \geq س < ٢ \\ ٢ - س & ٢ \leq س < ٣ \\ س - ٣ & ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

$هـ(١)$ ، $هـ(٤)$ غير موجودة لأنه $س = ١$ ، $س = ٤$ طرفي فترة

عندما $١ < س < ٤$ ، $هـ(س)$ متصل لأنه اقتران ثابت

$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ١}{ع - س} = ٠$

(١٤)

عندما $٢ < س < ٣$ ، $هـ(س) = ٢ - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$هـ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢ - ع - (٢ - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{ع - س} = -١$$

عندما $٣ < س < ٤$

$هـ(س) = س - ٣$ متصل لأنه كثير حدود

$$هـ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - ٣ - (س - ٣)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

نقاط التفرع ، $س = ٢$

$$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ١ \quad ، \quad \lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (٢ - س) = ١$$

$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ١ = هـ(٢) \quad \therefore \text{ هـ متصل عند } س = ٢$$

$$هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢ - س - ١}{س - ٢} = -١$$

$$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{١ - ١}{س - ٢} = \text{صفر}$$

$هـ(٢)$ غير موجودة لأن $هـ'_+(٢) \neq هـ'_-(٢)$

عند $س = ٣$

$$\lim_{س \to ٣^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^-} (٢ - س) = ٠ \quad ، \quad \lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٣^+} (س - ٣) = ٠$$

$$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٠ \quad ، \quad هـ(٣) = ٠ \quad \therefore \text{ هـ متصل عند } س = ٣$$

$$هـ'_+(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{س - ٣ - ٠}{س - ٣} = ١$$

$$هـ'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{٢ - س - ٠}{س - ٣} = -١$$

$هـ(٣)$ غير موجودة لأن $هـ'_+(٣) \neq هـ'_-(٣)$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & ١ < س < ٢ \\ -١ & ٢ < س < ٣ \\ ١ & ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \end{cases}$$

رابعاً : قواعد الاشتقاق ١

التدريبات

(١) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) $\frac{د}{دس}(س) = -٨س$ ج) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{٢س}$

(٢) $\frac{د}{دس}(س) = ١٠س^{٥} - ١٥س^{٣}$

$\frac{د}{دس}(س) = ٥٠س^{٤} - ٤٥س^{٢}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٥٠ \times ١ - ٤٥ \times ١ = ٥$

(٣) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٨س^{٤} - ١٠س^{٥}$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٢٠س^{٣} - ٥٠س^{٤}$

ب) ميل $س = ٤٠$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٢ + س$

$\frac{د}{دس}(س) = ١$ ، $\frac{د}{دس}(٤٠) = ١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) صفر $= ٤٠س^{٣}$

ج) صفر $= ٠$ د) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{١٦}س^{٤}$ ، $\frac{د}{دس}(س) = \frac{٤}{١}س^{٣}$

(٢) أ) $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٣$ ب) $\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{١}(٢س) = \frac{١}{٢}س$

ج) $\frac{دص}{دس} = ٤\frac{١}{٢}س^{٢}$ د) $\frac{دص}{دس} = س^{٢} + س^{٢} - ١$

(٣) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٢س^{٣}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = -٢$

ب) ميل $س = ٣$ ، $ص(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$\frac{د}{دس}(س) = ٢س + ٣$ ، $\frac{د}{دس}(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

ج) ميل $س = ٤,٢$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٦ - ٤س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(س) = -٨س$ ، $\frac{د}{دس}(٤,٢) = -٨ \times ٤,٢ = -١٩,٢$

د) ميل $س = -١$ ، $ص(س) = ٣س - ١ - (-س) = ٤س - ١$

$\frac{د}{دس}(س) = ٤$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٤$

(٤) أ) $\frac{د}{دس}(س) = ٦ ق(س) - ٢ ط(س)$

$\frac{د}{دس}(-٢) = ٦ ق(-٢) - ٢ ط(-٢) = ٦ \times ٤ - ٢ \times -٣ = ٣٠$

ب) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{٢} ق(س) + ط(س) + ٣س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(-٢) = \frac{١}{٢} ق(-٢) + ط(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ - ٣ + ١٢ = ١١$

(١٦)

(٥) $\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٩س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٤} + ٩س & س < ١ \end{cases}$

هـ (١) موجودة ، إذن هـ متصل عند س = ١

$\lim_{س \to ١^{-}} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ١^{+}} \text{هـ}(س)$

$٩ + ب = ٤ - ب + ٩$ ومنه ب = ٢

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٩س + ب & س \geq ١ \\ ٩ - ب س & س < ١ \end{cases} = \begin{cases} ٩س + ٢ & س \geq ١ \\ ٩ - ٤س & س < ١ \end{cases}$

$\text{هـ}'_{+}(١) = \text{هـ}'_{-}(١)$ لأن هـ (١) موجودة

$٩ - ٤ = ٩ + ج$ ، $أ = -٦$

(٦) هـ (س) متصل عند س = ح بالفرض

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ل(س) & س \geq ح \\ ل(ح) & س < ح \end{cases}$

$\text{هـ}'_{+}(ح) = ل'(ح)$ ، $\text{هـ}'_{-}(ح) = ل'(ح)$

$\text{هـ}'_{+}(ح) = ل'(ح) = \text{هـ}'_{-}(ح)$

إذن هـ قابل للاشتقاق عند س = ح وأن هـ (ح) = ل'(ح)

ثانياً: قواعد الاشتقاق (٢)

التدريبات

(١) $هـ(س) = (٤ - ٢س^{٣})(\frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢}س + ٣)(-٦س^{٢})$

$= ٢ - س^{٣} - ٣س^{٣} - ١٨س^{٢} = ٢ - ٤س^{٣} - ١٨س^{٢}$

---

(٢) $\frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢} - ٤)(٦) - (٦س + ١)(٢س)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{٦س^{٢} - ٤ - ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٦س^{٢} - ٢س - ٤}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$ ، $\frac{ص}{س}\Big|_{س=١} = \frac{-٦ - ٢ - ٤}{(-٣)^{٢}} = -\frac{١٢}{٩}$

---

(٣) ١) $ص = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٤}} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٣}}$

٢) $ص = \frac{٢}{س} - س^{٢}$ ، $ص = \frac{-٢}{س^{٢}} - ٢س$

فكّر وناقش $هـ(س) = \frac{س^{٣}(٤س^{٣}) - (س^{٤} - ٢)(٣س^{٢})}{س^{٦}} = \frac{٤س^{٦} - ٣س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}}$

$= \frac{س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{س^{٤} + ٩}{س^{٤}} = ١ + \frac{٩}{س^{٤}}$

---

(٤) ق (س) متصل على ح.

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \neq ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$$

$هـ_{+}(١) = ١$ ، $هـ_{-}(١) = \frac{-٤}{٤} = -١$. $هـ(١)$ غير موجودة

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \neq ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$$

تمارين وصائل

(١) أ) $ص = س^2(٣-س^2) + (١+س^3)(٥س)$

$= ٣س^4 + ٥س - ٥س^4 = ٥س + ٤س$

ب) $ص = (س^3 - ٥س + ١)(٤) + (٤س - ٣)(٣س^2 - ٥)$

$= ٤س^3 - ٨س + ٤ + ١٢س^3 - ٨س - ٩س^2 + ٦$

$= ١٦س^3 - ٩س^2 - ١٦س + ١٠$

ج) $ص = \frac{(١-س)(٢-س^2) - س^3(-١)}{(١-س)^2} = \frac{٣س^2 - ٢س^3 + س^3}{(١-س)^2}$

$= \frac{٣س^2 - ٢س^3}{(١-س)^2}$

د) $ص = \frac{(٥س+٣)(٥س) - (٥س^2-١)(٥)}{(٥س+٣)^2}$

$= \frac{٢٥س^2 + ١٥س - ٢٥س^2 + ٥}{(٥س+٣)^2} = \frac{١٥س + ٥}{(٥س+٣)^2}$

(٢) أ) $ن(س) = (س^2 + ٢س)(س^2 - ٣س - ٦)$

$ن'(س) = (س^2 + ٢س)(٢س - ٣) + (س^2 - ٣س - ٦)(٢س + ٢)$

$= ٢س^3 - ٣س^2 + ٤س^2 - ٦س + ٢س^2 - ٦س - ٦س - ١٢$

$= ٤س^3 - ٣س^2 - ٢٤س - ١٢$

ب) $ن'(س) = \begin{cases} (س-٣)(س^2+٤) & س < ٣ \\ (٣-س)(س^2+٤) & س > ٣ \end{cases} = \begin{cases} ٣س^2 - ٦س - ٣ & ، س < ٣ \\ ٣س - س^3 - ٤ & ، س > ٣ \end{cases}$

$ن(س) = \begin{cases} س^3 - ٣س^2 - ٤س & ، س < ٣ \\ ٤س - \frac{١}{٣}س^3 + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$

$ن'_+(٣) = ٤ - ٩ = -٥$ ، $ن'_-(٣) = ٢٧ - ٢٧ - ١٢ = -١٢$

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^2 - ٦س - ٣ & ، س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \\ ٤ - س^2 & ، س > ٣ \end{cases}$

(19)

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^2+3)(6س-2) - (3س^2-2س+3)(2س)}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{6س^3 - 2س^2 + 18س - 6 - 6س^3 + 4س^2 - 18س}{(س^2+3)^2} = \frac{2س^2 - 6}{(س^2+3)^2}$

د) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & 3 \geq س \geq 0 \\ \frac{-(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & س > 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س-3}{س} & 3 \geq س \geq 0 \\ \frac{3-س}{س} & س > 3 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{3}{س} & 3 \geq س \geq 0 \\ \frac{3}{س} - 1 & س > 3 \end{cases}$

$هـ(س)$ اقترانات متصل على $[0,1]$ الفترة

$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2}{4} & 3 \geq س \geq 0 \\ \frac{4}{س^2} & س > 3 \end{cases}$

$هـ(3) = \frac{1}{4}$ ، $هـ(3) = -\frac{1}{3}$ ، $هـ(3)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{س^2}{4} & ، 3 > س \geq 0 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \\ -\frac{4}{س^2} & ، س > 3 \end{cases}$

(3) أ) $هـ(س) = س \, ق(س) + ق(س)$

$هـ(2) = 2 \, ق(2) + ق(2) = 2 \times -1 + 3 = 1$

ب) $هـ(س) = 2س^3 \times ق(س) + ق(س) \times 6س - 5$

$هـ(2) = 12 \times -1 + 3 \times 12 - 5 = 19$

ج) $هـ(س) = ق(س) + \frac{ق(س)}{(ق(س))^2}$

$هـ(2) = ق(2) + \frac{ق(2)}{(ق(2))^2} = -1 + \frac{3}{9} = -\frac{6}{11}$

د) $هـ(س) = \frac{3ق(س) \times 2 - (2س+1)(2ق(س))}{(2ق(س))^2}$

$هـ(2) = \frac{6ق(2) - 5ق(2)}{(2ق(2))^2} = \frac{18+15}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{9}$

(٤) أ) $هـ'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$ (٥٠)

$هـ'(-٢) = ل(-٢) \times ق'(-٢) + ق(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times -١ = -١٢$

ب) $هـ'(س) = \frac{[ل(س)+١)\, ق'(س) - ق(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$هـ'(-٢) = \frac{[ل(-٢)+١)\, ق'(-٢) - ق(-٢) ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \frac{٤ \times -٦ - ٣ \times -١}{(-٣+١)^{٢}} = \frac{-٢٠}{١٦} = -\frac{٥}{٤}$

(٥) أ) نعيد تعريف $هـ(س)$ حول $س = ١,٤$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٣$

$هـ(س) = ٢س$ ، $هـ'(١,٤) = ٢,٨$

ب) نعيد تعريف $ه(س)$ حول $س = ٢$ ، $ه(س) = \frac{٣}{٢س - ١}$

$ه'(س) = \frac{-٣ \times ٢}{(٢س-١)^{٢}}$ ، $ه'(٢) = \frac{-٦}{٣^{٢}} = -\frac{٢}{٣}$

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^{٢}-٤)(٥) - (٥س+١)(٢س)}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$هـ'(-١) = \frac{-٣ \times ٥ - ١ \times -٥}{(-٣)^{٢}} = \frac{-١٠+٥}{٩} = -\frac{٥}{٩}$

(٦) $\frac{د}{دس}(ل(س) \times م(س) \times ق(س))) = \frac{د}{دس}((ل(س) \times م(س)) \times ق(س))$

$= (ل(س) \times م(س)) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) \times م(س))'$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ق(س)(ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ل(س) \times ق(س) \times م'(س) + م(س) \times ق(س) \times ل'(س)$

(٧) نضع $ل(س)$ بدلاً من $م(س)$ ، $ق(س)$ في السؤال السادس ينتج

$\frac{د}{دس}(ل(س))^{٣} = ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س)$

$= ٣(ل(س))^{٢} \cdot ل'(س)$.

(٨) $هـ(س)$ اقترانٌ متصلٌ عند $س = ١$، لأنه نهايته عند $س = ١$ هي $هـ(١) = ٤$

$$هـ(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ١٢س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$$

$هـ'_{+}(١) = ١٢$ ، $هـ'_{-}(١) = ١٢$ ، إذن $هـ'(١) = ١٢$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٢٤س & ، س \geq ١ \\ ٣٦س^{٢} & ، س < ١ \end{cases}$$

(٩) نعيد تعريف $هـ(س)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+٦س) & س \geq ٠ \\ -س(س^{٢}+٦س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+٦س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ -س^{٣}-٦س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$$

وهو اقترانٌ متصلٌ على $ح$.

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $هـ'(٠) = ٠$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$$

(١٠) $هـ$ متصلٌ عند $س = ج$، لأنه قابلٌ للاشتقاق عند $س = ج$

$$\text{نهـا}_{س \to ج^{+}} هـ(س) = \text{نهـا}_{س \to ج^{-}} هـ(س)$$

$$٤ - ٨ب + ج = ٤ج - ٢ب \quad \text{ومنه} \quad ج + ٢ب = ٤ \quad ... (١)$$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ج س - ب & ، س \leq ج \\ ج + ب س^{٢} & ، س > ج \end{cases}$$

$هـ'(ج) = هـ'_{+}(ج)$

$$٤ج - ب = ١٢ + ج \quad \text{ومنه} \quad ٣ج + ١١ب = ٠ \quad ... (٢)$$

$٣ج + ١١ب = ٠$ ... (٢)

$ج + ٣ب = ٤$ ... (١) بالضرب بـ ٣ ثم الطرح

$٢٣ب = -٦$ ومنه $ب = -٣$

نجد $ج$ من معادلة (١): $ج = ٤ - ٢ب = ٤ + ٦ = ١٠$

ثالثاً : المشتقات العليا

التدريبات / تدريب (١) فرع (أ)

(أ) $هـ(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦$

$هـ'(س) = ٣٠س - ٨$ ، $هـ'(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨$

(ب) $هـ(س) = \frac{ن}{١٠} س^{ن-١}$ ، $هـ'(س) = \frac{ن(ن-١)}{١٠} س^{ن-٢}$

$هـ''(س) = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$٩ س^{٢} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠} س^{ن-٣}$

$ن - ٣ = ٢$ ومنه $ن = ٥$ ، $٩ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{ب}$ ومنه $ب = ٦$

(ج) $هـ(س)$ اختبر اتصاله عند $س = ٠$ لأن بها $هـ(س) = هـ(٠)$ عند $س = ٠$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٣ - س^{٢} & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

١) $هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $هـ'(٠)$ موجودة وتساوي صفر

$هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، $هـ'(٠)$ موجودة وتساوي صفر

٢) $$هـ'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س \leq ٠ \end{cases}$$

$$هـ''(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$$

٣) $$هـ''(س) = \begin{cases} ٦ & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$$

$هـ''_{+}(٠) = ٦$ ، $هـ''_{-}(٠) = ٠$ إذن $هـ''(٠)$ غير موجودة

تدريبات (أ) فرع (ج)

$هـ(س) = س^{٧} + ١٤س^{٤} - ٣س^{٣} - ١٢س + س^{٢} + ٧$

$هـ'(س) = ٧س^{٦} + ٥٦س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢س - ١٢$

$هـ''(س) = ٤٢٠س^{٤} + ٦٧٨س^{٢} - ١٨س + ٢$

$هـ''(-١) = ٤٢٠ + ٦٧٨ + ١٨ + ٢ = ١٠٨٢$

تمارين ومسائل

(١) ١) $ص = ١٢س^{٢} - ٧س - ٦$

$ص' = ٢٤س - ٧$

٢) $ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

٣) $م(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+س) & س \geq ٠ \\ -س(س^{٢}+س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+س^{٢} & س \geq ٠ \\ -س^{٣}-س^{٢} & س < ٠ \end{cases}$

وهو اقتران متصل على ح

$م'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-٢س & س < ٠ \end{cases}$

$م'_{+}(٠) = ٠$ ، $م'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $م'(٠) = ٠$

$م''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$ ، $م''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$

$م''_{+}(٠) = ٢$ ، $م''_{-}(٠) = -٢$ ، إذن $م''(٠)$ غير موجودة.

$م''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$

٤) $م(س) = (س^{٢}+٣س)(٣س^{٢}) + (س^{٣}+١)(٢س+٤)$

$= ٣س^{٤} + ١٢س^{٣} + ٢س^{٤} + ٣س^{٣} + ٢س + ٤$

$= ٥س^{٤} + ١٦س^{٣} + ٢س + ٤$

$م''(س) = ٢٠س^{٣} + ٤٨س^{٢} + ٢$

$م''(-١) \times م''(-١) = (-٢٠ + ٤٨ + ٢)(٥ - ١٦ + ٢ + ٤)$

$= ٣٠ \times ٩ = -٢٧٠$

(٣) $م(س) = ن س^{ن-١}$ ، $م'(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$م''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣} = ٤س$ وعندما $ن - ٣ = ١$ فإن $ن = ٤$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٤ \times ٣ \times ٢$

$ن = ٤$

(٤) $ص = \frac{س^{-٢}}{-٢}$ ، $ص' = \frac{س^{٤}}{٤ \times ٢ س} = \frac{١}{٨} س^{٣}$ ، $ص'' = \frac{١}{٢} س^{٣}$ (٤ د)

(٥) $ق(س) = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١$

$ق'(س) = ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢$

أ) $١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢ = ٠$ ، $٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$ ومنه $س = -٢ ، \frac{١}{٢}$

ب) مجموعة $P : (٢س - ١)(س + ٢) < ٠$

$س \in (-\infty ، -٢] \cup [\frac{١}{٢} ، \infty)$

ج) مجموعة $P : (٢ - س)(س + ٢) > ٠$

$س \in (-٢ ، \frac{١}{٢})$

(٦) أ) $ص = ٤س^{٣} + ١٥س^{٢}$

$ص' = ١٢س^{٢} - ٩٠س$ ، $ص'' = ٢٤س + ٣٠ = ٧$

ب) $ص = ٢٤س^{٢} + ٢٠س + ص$

أ) $ص'' = ٦٤س + ٢٠$ ، $ص'' = ٦٤$

(٨) أ) $ق(س) = ٢س - ٦$ ، $ق'(س) = ٢$

$ق''(س) =$ صفر ، $ق''(\pi) =$ صفر

ب) $ق(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢}$

$ق''(س) = س^{٣} - ٢س$ ، $ق''(-١) = -١ + ٢ = ١$

ج) $ق(س) = -\frac{١}{س^{٢}}$ ، $ق'(س) = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

$ق''(س) = \frac{-٢ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦}{س^{٤}}$

$ق^{(٤)}(س) = \frac{٦ \times ٤س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{٢٤}{س^{٥}}$ ، $ق^{(٤)}(١) = ٤٢$

(٥)

(٨) $هـ(س) = س^2 ل(س) + ل(س) \times ٢س$

$هـ'(س) = س^2 ل'(س) + ل(س) \times ٢س + ل(س) \times ٢ + ٢س \times ل'(س)$

$= س^2 ل'(س) + ٤س ل'(س) + ٢ ل(س)$

$هـ''(س) = س^2 ل''(س) + ل'(س) \times ٢س + ٤س \times ل'(س) + ل'(س) \times ٤ + ٢ ل'(س)$

$= س^2 ل''(س) + ٦س ل'(س) + ٦ ل'(س)$

(٩) $(ل \times ق)'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$

$[ل \times ق)''(س) = ل(س) \times ق''(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ق(س) \times ل''(س) + ل'(س) \times ق'(س)$

$= (ل'' \times ق)(س) + ٢(ل' \times ق')(س) + (ل \times ق'')(س)$

(١٠) $هـ(س) = ٢س^2 + ب س + ح$

$هـ(١) = ٣$ ومنه $٢ + ب + ح = ٣$ ... (١)

$هـ'(س) = ٤س + ب$

$هـ'(١) = -٢$ ومنه $٤ + ب = -٢$ ... (٢)

$هـ''(س) = ٤$

$هـ''(١) = ٤$ ومنه $٢ = ٤$

بحل معادلة (٢) : $ب = -٦$ وبحل معادلة (١) : $ح = ٧$ $\Leftarrow هـ(س) = ٢س^2 - ٦س + ٧$

(١١) $\frac{ق}{ل}$ $= \frac{ل(س) ق'(س) - ل'(س) ق(س)}{(ل(س) ق(س) + ق(س) ل'(س))^2}$

$= \frac{ل(س) ق'(س) - ل'(س) ق(س)}{ل(س) ق(س)}$

(١٢) $ق(س) = ل(س) هـ(س) + هـ(س) ل'(س)$

$ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + هـ(س) ل''(س) + ٢ هـ'(س) ل'(س)$ بما أن $ل \times هـ = ح$

$ل'(س) + هـ'(س) = ح$ ، بالتفاضل بطرفي المعادلة نحصل على

$ل''(س) + هـ''(س) = ٠$

$ق''(س) = ل(س) هـ''(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + هـ(س) ل''(س)$

(٥٤)

١٣) $ق(س) = ٤ب س^{٣} - \frac{١٦}{س^{٤}}$

$ق'(س) = ١٢ب س^{٢} + \frac{١٦ \times ٤ س^{٣}}{س^{٨}} = ١٢ب س^{٢} + \frac{٣٢}{س^{٥}}$

$ق''(س) = ٢٤ب س - \frac{٣٢ \times ٢ س^{٤}}{س^{٦}} = ٢٤ب س - \frac{٩٦}{س^{٤}}$

$ق''(١) = ٩٠ \Leftarrow ٢٤ب - ٩٦ = ٩٠$

$٢٤ب = ١٩٦$ وضح $ب = ٢$

١٤) $ق(س) = ٨ - ٨(م-٣) س$

$ق'(س) = -٨(م-٣)$

$-٨(م-٣) < ٠$ ، $م-٣ > ٠$ وضح $م > ٣$

سابعاً: مشتقة الاقترانات المثلثية

التدريبات

(١) $هـ(س) = ٢ جتا س + ٦$

$هـ(\frac{\pi}{٣}) = ٢ \times \frac{١}{٢} + ٦ = ٧$

(٢) $هـ(س) = س جتا س + جا س$

$هـ(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١ = ١$

(٣) $هـ(س) = ظا س = \frac{١}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{-(-جا س)}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س} = ظا س ظا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{١}{جا س}$

$هـ(س) = \frac{-جتا س}{جا^٢ س} = -\frac{١}{جا س} \times \frac{جتا س}{جا س} = -ظتا س ظتا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{جتا س}{جا س}$

$هـ(س) = \frac{جا س \times -جا س - جتا س \times جتا س}{جا^٢ س}$

$= \frac{-جا^٢ س - جتا^٢ س}{جا^٢ س} = \frac{-١}{جا^٢ س} = -ظتا^٢ س$

(٤) $هـ(س) = ظا س ظا س + ظا^٢ س$

$هـ(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$

تمارين وسائل

١) أ) $ص' = ٣ جتا س + جا س$

ب) $ص'' = س^٢ جتا س + جا س \times ٢ س$

$= س^٢ جتا س + ٢ س جا س$

ج) $ص' = \frac{جتا س \times جا س - س \times جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا س + س جا س}{جتا^٢ س}$

د) $ص' = ق^٢ س - \sqrt{٣} ق$ ، هـ) $ص = ١$ ، $ص' = ٠$

و) $ص' = -ظتا س ظتا س - (س \times -ق^٢ س + ظتا س \times ١)$

$= -ظتا س ظتا س + س ق^٢ س - ظتا س$

ز) $ص' = جتا س$ ، $ص'' = -جا س = -ص$

$ص'' + ٦ ص = -ص + ٦ ص = ٥ ص$

(٣) أ) $م'(س) = جا س (-جا س) + جتا س جتا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = (\frac{١}{٢})^٢ - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $م'(س) = -جا س + جتا س$ ، $م'(س) = -جتا س - جا س$

$م'(\frac{\pi}{٤}) = -\frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} = -\sqrt{٢}$

ج) $م'(س) = \frac{(١ + جا س)(-جا س) - ظتا س جتا س}{(١ + جا س)^٢}$

$= \frac{-جا س - جا^٢ س - ظتا^٢ س}{(١ + جا س)^٢} = \frac{-جا س - ١}{(١ + جا س)^٢}$

$م'(\pi) = \frac{-جا \pi - ١}{(١ + جا \pi)^٢} = -١$

د) $م'(س) = س ظا س ظا س + ظا س$

$م'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi}{٤} \times \sqrt{٣} \times \frac{١}{٣} + \sqrt{٣} = \frac{\pi}{٤} + \frac{٤\sqrt{٣}}{٣}$

هـ) $م'(س) = \frac{جا س (ق^٢ س + ١) - (ظا س + س) جتا س}{جا^٢ س}$

$م'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\frac{٣}{٤}(٤ + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \frac{٥\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٣}}{\frac{٣}{٤}}$

$= \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٩} - \frac{٤\pi}{٩}$

(٤) أولاً : ص = جتاس

ص' = − جاس ، ص'' = − جتاس

ص + ص'' = جتاس − جتاس = ٠

ثانياً ص = جاس

ص' = جتاس ، ص'' = − جاس

ص + ص'' = جاس − جاس = ٠

(٥) P) ق'(س) = ١ − جاس

١ − جاس = ٠ وعندما جاس = ١

إذاً س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$

ب) ق'(س) = ظاس ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{1}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

ق'(س) = ٠ إذا كان جاس = ٠

س = − π ، ٠ ، π

(٦) ص = P جتاس − ب جاس

$(\text{ص}')^2 + \text{ص}^2 = (\text{P جتاس} - \text{ب جاس})^2 + (\text{P جاس} + \text{ب جتاس})^2$

$= \text{P}^2\text{جتا}^2\text{س} - 2\text{Pب جتاس جاس} + \text{ب}^2\text{جا}^2\text{س} + \text{P}^2\text{جا}^2\text{س} + 2\text{Pب جاس جتاس} + \text{ب}^2\text{جتا}^2\text{س}$

$= \text{P}^2(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}) + \text{ب}^2(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})$

$= \text{P}^2 \times 1 + \text{ب}^2 \times 1 = \text{P}^2 + \text{ب}^2$.

(٧) P) ص = − ظتاس

ص' = − ظتاس × − قتا^{2}س + ظتاس (قتاس ظتاس)

= قتا^{3}س + ظتاس ظتا^{2}س

ب) ص = س (− جاس) + جتاس − ٤ جتاس

= − س جاس − ٣ جتاس

ص'' = − س جتاس + جاس (− ١) + ٣ جاس = ٤ جاس − س جتاس

(٨) لتكون $هـ$ قابلة للاشتقاق عند $س = ٠$ يجب أن تكون $هـ$ متصلة عند $س = ٠$.

$$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = هـ(٠) = ١$$

$$هـ(س) = \begin{cases} -\text{جا}س & س > ٠ \\ ب & س \le ٠ \end{cases}$$

$$هـ'_+(٠) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{هـ(س) - هـ(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{\text{جتا}س - ١}{س}$$

$$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{\text{جتا}س - ١}{س} \times \frac{\text{جتا}س + ١}{\text{جتا}س + ١} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{\text{جتا}^٢س - ١}{س(\text{جتا}س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{-\text{جا}^٢س}{س(\text{جتا}س + ١)} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{-\text{جا}س}{س} \times \lim_{س \to ٠^+} \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س + ١}$$

$$= -١ \times ٠ = ٠$$

$هـ'_-(٠) = ب = هـ'_+(٠)$ ، إذن $ب = ٠$

(٩) نعيد تعريف $هـ(س)$.

$$هـ(س) = \begin{cases} \text{جا}س & س \ge \pi \\ -\text{جا}س & س < \pi \end{cases}$$

$$هـ'_+(\pi) = \lim_{س \to \pi^+} \frac{هـ(س) - هـ(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-\text{جا}س - ٠}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-\text{جا}س}{س - \pi}$$

نفرض $س - \pi = هـ$ ، عندما $س \to \pi^+$ ، فإن $هـ \to ٠^+$

$$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-\text{جا}(\pi + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-(-\text{جا}هـ)}{هـ} = ١$$

$$هـ'_-(\pi) = \lim_{س \to \pi^-} \frac{هـ(س) - هـ(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^-} \frac{-\text{جا}س - ٠}{س - \pi}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{\text{جا}(س + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{-\text{جا}هـ}{هـ} = ١$$

إذن $هـ'(\pi) = ١$ ، أي أن $هـ$ قابلة للاشتقاق عند $س = \pi$

(١٠) $هـ(س) = \text{جتا}س - \frac{١}{٢}$

$\text{جتا}س - \frac{١}{٢} = ٠$ ، $\text{جتا}س = \frac{١}{٢}$

إذن $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ثانياً : قاعدة السلسلة

التدريبات :

(١) (١) نفرض ع = س٣ − س فيكون ص = ع٦ ، ع = س٣ − س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = ٦ ع^{٥} \times (٣ س^{٢} - ١)$

$= ٦ (س^{٣} - س)^{٥} (٣ س^{٢} - ١)$

٢) هـ (س) = ٢ − $\frac{١}{٢ س}$ ، هـ (س) = جتا س

(هـ ○ ص)′ (س) = هـ′ (هـ (س)) . هـ′ (س) = (٢ − $\frac{١}{جا ٢ س}$) × جتا س

= ٢ جتا س − ٢ جتا س ظتا س

(٣) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (قا س + ظا س) (قا س ظا س + قا٢ س)

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٠}$ = ٢ (١ + ٠) (١ × ٠ + ١) = ٢

(٣) ١) هـ (س) = ٤ قا٤ س ظا٤ س

٢) هـ′ (س) = ٧ (س٢ + ٢ س − ٨)٦ (٢ س٢ + ٢)

٣) هـ′ (س) = ٤ جا٣ (س٢) جتا (س٢) × ٢ س = ٨ س جا٣ (س٢) جتا (س٢)

(٤) نشتق الطرفين بالنسبة إلى س

هـ′ (س٢ − ١) (٣ س٢) = − $\frac{١}{٢ س}$ − ٢ س

س٣ − ١ = ٧ عندما س = ٢

هـ′ (٧) (١٢) = − $\frac{١}{٤}$ − ٤

هـ′ (٧) × ١٢ = − $\frac{٤}{٨١}$ ، هـ′ (٧) = − $\frac{٤}{٨١ \times ١٢}$ = − $\frac{١}{٨٧}$

(١) ب) $\frac{ص}{س} = ٨(س^٣ - ٢س + ٤)^٧ (٣س^٢ - ٢)$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{-٥(س^٢+١)^٤(٢س)}{(س^٢+١)^١٠} = \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٦}$

د) $\frac{ص}{س} = \frac{(١-س^٣)^٤(٤س^٣) - س^٤(٤(١-س^٣)^٣ \times -٣س^٢)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٤ + ١٢س^٦(١-س^٣)^٣}{(١-س^٣)^٨}$

$= \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٣(١-س^٣+٣س^٣)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١+٢س^٣)}{(١-س^٣)^٥}$

ه) $\frac{ص}{س} = -جا(س^٢-س) \times (٢س-١) = (١-٢س) جا(س^٢-س)$

(٢) $هـ(س) = ٢س - ٢$ ، $هـ(س) = ٣س^٢$

$(هـ \circ هـ)'(١) = هـ'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$= هـ'(٢) \times ٣ = ٢ \times ٣ = ٦$

$(هـ \circ هـ)'(١) = هـ'(هـ(١)) . هـ'(١) = هـ'(-١) \times$ صفر $=$ صفر

(٣) ب) $(هـ \circ هـ)'(٢) = هـ'(هـ(٢)) . هـ'(٢)$

$= هـ'(٣) \times -٦ = ٤ \times -٦ = -٢٤$

ه) $هـ'(س^٢) \times ٢س = هـ'(٣) \times ٢\sqrt{٣} = ٨\sqrt{٣}$

(٤) نفرض $ع = هـ(س)$ فيكون $ص = جا^٣ع$ ، $ع = هـ(س)$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} . \frac{ع}{س} = ٣ جا^٢ع \times جتا ع \times هـ'(س)$

$= ٣ جا^٢(هـ(س)) \times جتا(هـ(س)) \times هـ'(س)$

(٥) ب) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} . \frac{ع}{س}$

$= جا^٢ع \times (٣س^٢ - ١) = جا^٢(س^٣-س) \times (٣س^٢ - ١)$

ه) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} . \frac{ل}{س} = (٢ ل + ٢) \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}$

$= (٢\sqrt{س^٢+١} + ٢) \times \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}} = ٢س + \frac{٢س}{\sqrt{س^٢+١}}$

(٣٢)

(٦) $ص = -\text{جا}(س + \frac{\pi}{2})$ ، $ص'' = -\text{جا}(س + \frac{\pi}{2})$

$ص + ص'' = \text{جا}(س + \frac{\pi}{2}) - \text{جا}(س + \frac{\pi}{2}) = \text{صفر}$

(٧) $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = \text{ظا}^2 س + \text{ظا}^2 س \text{ قا}^2 س = \text{قا}^2 س (1 + \text{ظا}^2 س)$

$= \text{قا}^2 س \text{ قا}^2 س = \text{قا}^4 س$

(٨) أ) $هـ$ اقتران فردي وأي أن $هـ(-س) = -هـ(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-هـ'(-س) = -هـ'(س)$ ومنه $هـ'(-س) = هـ'(س)$

أي أن $هـ'(س)$ اقتران زوجي

ب) $هـ$ اقتران زوجي ، أي أن $هـ(-س) = هـ(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-هـ'(-س) = هـ'(س)$ ومنه $هـ'(-س) = -هـ'(س)$

أي أن $هـ'(س)$ اقتران فردي

(٩) أ) $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢ \text{ جا} ٣س \text{ جتا} ٣س \times ٣ = ٣ \text{ جا} ٦س$

عندما $س = \frac{\pi}{9}$ ، $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٣ \text{ جا} \frac{٦\pi}{٩} = ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

ب) $\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٤(س + \frac{١}{س})^٣ (١ - \frac{١}{س^٢})$

$\left.\frac{\text{د}ص}{\text{د}س}\right|_{س=١} = ٤(١+١)^٣ (١-١) = \text{صفر}$

(١٠) أ) $ص' = س \text{ قا}^2(\frac{١}{س}) \times -\frac{١}{س^٢} + \text{ظا}(\frac{١}{س}) \times ١$

$= -\frac{١}{س} \text{ قا}^2(\frac{١}{س}) + \text{ظا}(\frac{١}{س})$

$ص'' = -\frac{١}{س} \times ٢ \text{ قا}(\frac{١}{س}) \text{ قا}(\frac{١}{س}) \text{ ظا}(\frac{١}{س}) \times -\frac{١}{س^٢} + \text{قا}^2(\frac{١}{س}) \times \frac{١}{س^٢} + \text{قا}^2(\frac{١}{س}) \times \frac{١}{س^٢}$

$= \frac{٢}{س^٣} \text{ قا}^2(\frac{١}{س}) \text{ ظا}(\frac{١}{س}) + \frac{١}{س^٢} \text{ قا}^2(\frac{١}{س}) - \frac{١}{س^٢} \text{ قا}^2(\frac{١}{س})$

$= \frac{٢}{س^٣} \text{ قا}^2(\frac{١}{س}) \text{ ظا}(\frac{١}{س})$

(٣٣) $ص = \frac{س \text{ جتا } س - \text{جا } س}{س^2} = \frac{س \text{ جا } س + \text{جتا } س}{-س^2}$

$ص'' = \frac{-س^2(س \text{ جتا } س + 2 \text{ جا } س) - (س \text{ جا } س + \text{جتا } س) \times 2س}{س^4}$

$= \frac{-س^3 \text{ جتا } س - 3س^2 \text{ جا } س + 2س \text{ جا } س + 2 \text{ جتا } س}{س^4}$

$= \frac{3س \text{ جا } س + 2 \text{ جتا } س - س^2 \text{ جتا } س}{س^4}$

(١١) $هـ(\text{جا } س) \times \text{جتا } س = -\text{جتا } س \text{ ظتا } س \times 2$

$\text{جا } س = \frac{1}{2}$ اذا كان $س = \frac{5\pi}{6}$ وهي $س = \frac{\pi}{6}$

$هـ(\frac{1}{2}) \times \text{جتا } \frac{5\pi}{6} = -\text{جتا } \frac{5\pi}{6} \text{ ظتا } \frac{5\pi}{6} \times 2$

$هـ(\frac{1}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2$

$هـ(\frac{1}{2}) = -3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{1} = -3$

(١٢) $\frac{ص}{س} = هـ(س^2 + 2س)(س + 2)$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=1} = هـ(3) \times 3 = 0 \times 3 = 0$

(١٣) $\frac{ص}{س} = \frac{2\sqrt{س^2 + 2س}}{\frac{3}{3\sqrt{س^2 + 2س}}} = \frac{3س + 3\sqrt{س^2 + 2س}}{3\sqrt{س^2 + 2س}}$

(١٤) $هـ(3س) = 2س$

$هـ(3س) \times 3 = 2$

$هـ(3س) = \frac{2}{3}$

بفرض $س = 1$ ، $هـ(3) = \frac{2}{3}$

(٣٣)

(٥١) $ق(س) = ٣س^{٤} + ٢$ ، $ق'(س) = ٦س$ ، $ق''(س) = ٦$

$ه(س) = ٦س$ ، $ه'(س) = ٦$ ، $ه''(س) =$ صفر

ب) $(ق \circ ه)'(١) = ق'(ه(١)) \times ه(١)$

$= ق'(٦) \times ٦ = ٦ \times ٣ \times ٦ = ١٠٨$

ن) $(ق \circ ه)'(٢) = ق'(ه(٢)) \times ه(٢)$

$= ق'(١٢) \times ٦ = ٦ \times ١٢ \times ٦ = ٤٣٢$

ج) $(ق \circ ه)''(س) = ((ق \circ ه)'(س))'$

$= (ق'(ه(س)) \times ه(س))' = (ق'(٣س^{٤}) \times ٦س)'$

$= (١٨س^{٤} \times ٦س)' = (١٠٨س^{٣})' = ٤٣٢س^{٢}$

$(ق \circ ه)''(-١) = ٤٣٢$

د) $(ق \circ ه)''(س) = ((ق \circ ه)'(س))' = (ق'(ه(س)) \times ه'(س))'$

$= ق''(ه(س)) \times ه'(س) + ه''(س) \times ق'(ه(س)) \times ه'(س)$

$= ق''(٦س) \times$ صفر $+ ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨$

تابع: الاشتقاق الضمني

التدريبات

(١) ١) $٦س - ٨ص ص' = ٠$

$٨ص ص' = ٦س$ ومنه $ص' = \frac{٣}{٤} \times \frac{س}{ص}$

٢) $٢س \cdot ص' + ٢ص - ٣ص^{٢} ص' = ١ + ٢ص'$

$٢س ص' - ٣ص^{٢} ص' - ٢ص' = ١ - ٢ص$

$ص'(٢س - ٣ص^{٢} - ٢) = ١ - ٢ص$ ومنه $ص' = \frac{١ - ٢ص}{٢س - ٣ص^{٢} - ٢}$

٣) $٢س + ص' = ظا^{٢}ص \cdot ص'$

$ص'(١ - ظا^{٢}ص) = -٢س$ ومنه $ص' = \frac{-٢س}{١ - ظا^{٢}ص}$

(٢) ١) $\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} - جاس = ٠$ ومنه $ص' = ٢\sqrt{ص}\ جاس$

٢) $٢(س - ص)(١ - ص') - ص' = ٠$

$٢(س - ص) - ص'(٢(س - ص)) - ص' = ٠$

$ص'(٢س - ٢ص + ١) = ٢(س - ص)$ ومنه $ص' = \frac{٢(س - ص)}{٢س - ٢ص + ١}$

(٣) $-جاص ص' = ١$ ، $ص' = -\frac{١}{جاص}$

نجد جاص بدلالة س:

$جا^{٢}ص = ١ - جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$

$جاص = \sqrt{١ - س^{٢}}$ ، $-\sqrt{١ - س^{٢}}$ يُهمل

$ص' = -\frac{١}{جاص} = -\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(٤) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س}$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٣ جتا٣ن$

$\frac{د ص}{د س} = (-جا٣ن) \times ٣ \times \frac{١}{٣ جتا٣ن} = -ظا٣ن$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = -٣ ظا^{٢}٣ن \times \frac{د ن}{د س} = -٣ ظا^{٢}٣ن \times \frac{١}{٣ جتا٣ن}$

$= -ظا^{٣}٣ن$

$\left.\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}\right|_{ن = \frac{\pi}{٣}} = -(-١)^{٣} = ١$

تمارین وسائل

(۱) ۴) $۳س + ۸ص \frac{دص}{دس} = ۰$ ، $\frac{دص}{دس} = -\frac{۱}{۴} \times \frac{س}{ص}$

ن) $\frac{دص}{دس} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۲(۳س^۳ + ۴س^۲)}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۲ص(۳س^۳ + ۴س^۲)} \times \frac{۱}{ص^۲} = \frac{۳س^۲ + ۸س}{۴ص(۳س^۳ + ۴س^۲)}$

ج) $۳س^۲ + ۳ص^۲ \cdot \frac{دص}{دس} = س \frac{دص}{دس} + ص$

$\frac{دص}{دس}(۳ص^۲ - س) = ص - ۳س^۲$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{ص - ۳س^۲}{۳ص^۲ - س}$

د) $ظتا(س ص)(س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = ۲س$

$(س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = \frac{۲س}{ظتا(س ص)}$ ، $س \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{۲س}{ظتا(س ص)} - ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۲}{ظتا(س ص)} - \frac{ص}{س}$

(۲) ۴) $۳(س ص)^۲(س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = ۴$

$س \cdot \frac{دص}{دس} + ص = \frac{۴}{۳(س ص)^۲}$

$س \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳(س ص)^۲} - ص$ وضع $\frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳س^۲(س ص)^۲} - \frac{ص}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{۴}{۳}(\frac{۱}{س^۳ ص^۲}) - \frac{ص}{س}$

$\frac{د^۲ص}{دس^۲} = \frac{۴}{۳} \times \frac{-(س^۳ \times ۲) ص \cdot \frac{دص}{دس} + ۳س^۲ ص^۲)}{س^۶ ص^۴} - \frac{س \cdot \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

$= -\frac{۴}{۳} \times \frac{س^۲ ص(۲ س \cdot \frac{دص}{دس} + ۳ص)}{س^۶ ص^۴} - \frac{س \cdot \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

$= -\frac{۴}{۳} \times \frac{۲ س \cdot \frac{دص}{دس} + ۳ص}{س^۴ ص^۳} - \frac{س \cdot \frac{دص}{دس} - ص}{س^۲}$

(۵) $۸س + ۶ص \cdot ص' = ۰$ ، $ص' = -\frac{۴}{۳} \times \frac{س}{ص}$

$ص'' = -\frac{۴}{۳}(\frac{ص - س \cdot ص'}{ص^۲})$

ج) $\frac{ص}{س} = س(-حاص).صَ + جتاص$

$\frac{ص}{س}(1 + س حاص) = جتاص$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{جتاص}{1+س حاص}$

$\frac{ص}{س^2} = \frac{(1+س حاص)(-حاص)صَ - جتاص(س جتاص.صَ + حاص)}{(1+س حاص)^2}$

$= \frac{-(حاص)(صَ)(1+س حاص) - جتاص(س صَ جتاص + حاص)}{(1+س حاص)^2}$

$= \frac{-حاص صَ(1+س حاص) + س صَ}{(1+س حاص)^2}$

د) جتاس $= \frac{صَ}{2\sqrt{ص}}$ وفيه صَ $= 2\sqrt{ص}$ جتاس

صَ $= 2\sqrt{ص}(-حاس) + جتاس \times \frac{2صَ}{2\sqrt{ص}}$

$= -2\sqrt{ص}$ حاس $+ \frac{صَ جتاس}{\sqrt{ص}}$

٣) أ) $8س صَ + 8ص - حاص.صَ = 0$

صَ$(8س - حاص) = -8ص$ وفيه صَ $= \frac{-8ص}{8س - حاص}$

صَ $|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})} = \frac{-8 \times \frac{\pi}{2}}{8 \times \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{-4\pi}{2\pi - 1} = \frac{4\pi}{1 - 2\pi}$

ب) $3س^2 - (2س صَ + 2ص) + 3ص^2.صَ = 0$

صَ$(3ص^2 - 2س) = -3س^2 + 2ص$

صَ $= \frac{-3س^2 + 2ص}{3ص^2 - 2س}$ ، صَ $|_{(1,-1)} = \frac{-3 \times 1 + 2}{3 - 2} = -1$

ج) $\frac{ص}{س} = 3 - \frac{4}{س} = \frac{3س - 4}{س}$ وفيه $\frac{1}{ص} = \frac{س}{3س - 4}$

$\frac{1}{ص}$ صَ $= \frac{3 \times (3س - 4) - 3 \times س}{(3س - 4)^2}$ وفيه صَ $= \frac{-8}{(3س - 4)^2}$

صَ $|_{(1,\frac{1}{8})} = \frac{-8}{8^2} = -\frac{1}{8}$

(٣٧)

(٤) $\text{جتا}(س+ص) \times (1+ص') = ص^{٤}(-\text{جا}س) + ٢ص ص' \text{جتا}س$

$ص' \text{جتا}(س+ص) + \text{جتا}(س+ص) = ٢ص ص' \text{جتا}س - ص^{٤}\text{جا}س$

$ص'(\text{جتا}(س+ص) - ٢ص \text{جتا}س) = -\text{جتا}(س+ص) - ص^{٤}\text{جا}س$

$$ص' = \frac{\text{جتا}(س+ص) + ص^{٤}\text{جا}س}{٢ص\text{جتا}س - \text{جتا}(س+ص)}$$

(٥) $\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

$ص' = -\sqrt{\frac{ص}{س}} \times \frac{١}{\sqrt{س}}$

يكون المماس أفقياً إذا كان $ص' = ٠$ أي أن:

$\sqrt{س} = ٣$ ومنه $س = ٩$. يكون المماس أفقياً عند النقطة (٩،٠)

٦) $ص' = \frac{٤}{٣}(٢س+١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{٤}{٣\sqrt{٢س+١}}$

٧) $١ = -\text{جتا}ص \cdot ص'$ ومنه $ص' = \frac{١}{-\text{جتا}ص} = -\text{قا}ص$

$ص'' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times ص' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times -\text{قا}ص$

$= \text{ظا}ص \text{قا}^{٢}ص$

٨) $ص \times -٢\text{جا}٢س + ص' \text{جتا}٢س = س \times ٢\text{جتا}ص \times ص' + \text{جا}٢ص$

$ص'(\text{جتا}٢س - ٢س\text{جتا}٢ص) = \text{جا}٢ص + ٢ص\text{جا}٢س$

$$ص' = \frac{\text{جا}٢ص + ٢ص\text{جا}٢س}{\text{جتا}٢س - ٢س\text{جتا}٢ص}$$

$ص' \Big|_{(\frac{\pi}{٤}, \frac{\pi}{٢})} = \frac{\text{جا}\pi + ٢ \times \frac{\pi}{٢}\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جتا}\pi - ٢ \times \frac{\pi}{٤}\text{جتا}\pi} = \frac{٠ + \pi}{\frac{\pi}{٢} + ٠} = ٢$

(٩) $س صَ + ص = جتاس$

$صَ = \frac{جتاس - ص}{س}$

$صَّ = \frac{س(-حاس - صَ) - (جتاس - ص)١}{س^٢} = \frac{-س حاس - س صَ - جتاس + ص}{س^٢}$

$س صَّ + ٢ صَ + س ص = \frac{-س حاس - س صَ - جتاس + ص}{س} + ٢ \times \frac{جتاس - ص}{س} + س ص$

$= \frac{-س حاس - س صَ - جتاس + ص + ٢ جتاس - ٢ص + س^٢ ص}{س}$

بالتعويض عن س ص بـ حاس و س صَ بـ جتاس - ص

$= \frac{-س^٢ ص - س صَ + س صَ + س^٢ ص}{س} = صفر$

(١٠) $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د س} \cdot \frac{د س}{د ن} = (\frac{١}{٤ ن})(٣ ن^٢ + ٢) = \frac{٣}{٤} ن + \frac{١}{٢ ن}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{٣}{٤} \times \frac{د ن}{د س} + \frac{د ن}{د س} \times \frac{-٢ \times د^٢ س}{(٢ ن)^٢} = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤ ن} - \frac{\frac{١}{٤ ن} \times ٢}{(٢ ن)^٢}$

$= \frac{٣}{١٦ ن} - \frac{١}{(٢ ن)^٣}$

$\left. \frac{د^٢ ص}{د س^٢} \right|_{ن = ١} = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$

(١١) $١ + صَ = جتاص \times صَ$

$صَّ = جتاص \times صَّ + صَ (- حاص) \times صَ$

$(صَ)^٢ جاص = صَّ (جتاص - ١)$

$(صَ)^٢ = صَّ \times \frac{جتاص - ١}{حاص} = صَ (ظتاص - قتاص)$

(١٢) $صَ = جتاس + س صَ + ص$ ، $صَّ = -حاس + س صَّ + صَ + صَ$

$صَّ (١ - س) = ٢ صَ - حاس$ ، $صَّ = \frac{٢ صَ - حاس}{١ - س}$

$صَّ + ص = \frac{٢ صَ - حاس}{١ - س} + ص = \frac{٢ صَ - حاس + ص - س ص}{١ - س}$

$= \frac{٢ صَ + (ص - (حاس + س ص))}{١ - س} = \frac{٢ صَ}{١ - س}$

لأن $ص = حاس + س ص$

مراجعة

(١) معدّل التغير $= \frac{\text{ه}(س+ص)-\text{ه}(س)}{ص}$

$= \frac{\text{ظا}(س+ص)-\text{ظا}س}{ص} = \frac{\frac{\text{ظا}س+\text{ظا}ص}{١-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص}-\text{ظا}س}{ص}$

$= \frac{\frac{\text{ظا}س+\text{ظا}ص-\text{ظا}س(١-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)}{١-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص}}{ص} = \frac{\text{ظا}س+\text{ظا}ص-\text{ظا}س+\text{ظا}^{٢}س\,\text{ظا}ص}{ص(١-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)}$

$= \frac{\text{ظا}ص(١+\text{ظا}^{٢}س)}{ص(١-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)} = \frac{\text{ظا}ص\,\text{قا}^{٢}س}{ص(١-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)}$

(٢) $\text{ه}'(\frac{\pi}{٤}) = \text{نهـا}_{ص\to٠} \frac{\text{ه}(\frac{\pi}{٤}+ص)-\text{ه}(\frac{\pi}{٤})}{ص} = \text{نهـا}_{ص\to٠} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٤}+ص)-١}{ص}$

$= \text{نهـا}_{ص\to٠} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٤}\,\text{جتا}ص+\text{جتا}\frac{\pi}{٤}\,\text{جا}ص-١}{ص} = \text{نهـا}_{ص\to٠} \frac{\text{جتا}ص-١}{ص}$

$= \text{نهـا}_{ص\to٠} \frac{-٢\,\text{جا}^{٢}\frac{ص}{٢}}{ص} = -٢ \times \text{نهـا}_{ص\to٠}\,\text{جا}\frac{ص}{٢} \times \text{صفر} = \text{صفر}$

(٣) $\text{ه}(س) = \begin{cases} س^{٢}+٢س+٢ & ٠ \le س < ١ \\ ٤س+١ & ١ \le س < ٢ \\ ٤س+٢ & ٢ \le س < ٣ \\ ٤س+٣ & س = ٣ \end{cases}$ وهو اقتران متصل على $[٠,٣]-\{٢\}$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ٢س+٢ & ٠ < س < ١ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$\text{ه}'_{-}(١) = ٤$ ، $\text{ه}'_{+}(١) = ٤$ ، إذن $\text{ه}'(١) = ٤$

$\text{ه}'(٢)$ غير موجودة ، لأن $\text{ه}(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ٢س+٢ & ٠ < س \le ١ \\ ٤ & ١ < س < ٢ \\ ٤ & ٢ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠,٣٦,٢ \end{cases}$

(٤٠)

(٤) د) $ه'(س) = \sqrt{٨س+٥} \times ل'(س) + ل(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{٨س+٥}}$

$ه'(-١) = \sqrt{٤} \times ل'(-١) + ل(-١) \times \frac{١}{٢\sqrt{٨(-١)+٥}} = ٢ \times ٢ + ١ \times \frac{١}{٢} = ٤\frac{١}{٢}$

ه) $ه'(س) = \frac{(س^{٢}-س)(٢ل(س) \cdot ل'(س)) - (ل(س))^{٢}(٢س-١)}{(س^{٢}-س)^{٢}}$

$ه'(-١) = \frac{٢ \times ٢ ل(-١) ل'(-١) - ١(ل(-١))^{٢}(-٣)}{٢^{٢}} = \frac{٣ \times ١ \times ٢ - ١ \times -٣}{٤} = \frac{١١}{٤}$

ج) $ه'(س) = ل'(س) - \frac{س ل'(س) - ل(س)}{س^{٢}}$

$ه'(-١) = ل'(-١) - \frac{-١ ل'(-١) - ل(-١)}{(-١)^{٢}}$

$= ٢ - \frac{-١ \times ٢ - ١}{١} = ٢ + ٣ = ٥$

ر) $ه'(س) = (جا^{٣}\frac{\pi}{٣} ل(س)) \times \frac{\pi}{٣} ل'(س)$

$ه'(-١) = جا^{٣}(\frac{\pi}{٣} ل(-١)) \times \frac{\pi}{٣} ل'(-١) = (\frac{\pi}{٣} جا^{٣}\frac{\pi}{٣}) \times ٢$

$= \frac{\pi}{٣} \times ٣ \times \frac{٣}{٤} = \frac{٧\pi}{٣}$

(٥) د) $ص = س جاس + ظاس$

$ص' = س \times ٢ جاس جتاس + ظاس + جاس$

$= ٢ س جاس ظاس + ٢ جاس = ٢ جاس (س ظاس + ١)$

$= ٢ جاس (١ + ص)$

ر) $جتاص \cdot \frac{د ص}{د س} = ١$ ومنه $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{جتاص}$

نجد جتاص بدلالة س

$جتا^{٢}ص + جا^{٢}ص = ١$ ، $جتا^{٢}ص + س^{٢} = ١$

اذن $جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$ ومنه $جتاص = \sqrt{١-س^{٢}}$ لأن $ص \in (٠, \frac{\pi}{٢})$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{جتاص} = \frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

٦) $\frac{د س}{د ن} = ٢$ ومنه $\frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د ن}{د س} = (٣ن - ٤) \times \frac{١}{٢} = ن - ٢$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

عندما ن = ٦ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{١}{٢}$

٧) ل(س) = ٢ هـ(س) . ق(س) + ٢ ق(س) . هـ(س)

= ٢ ق(س) . ق(س) + ٢ ق(س) . هـ(س) = صفر

٨) ق(س) اقترانٌ متصلٌ على ح

$$ق(س) = \begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س < ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س \geq ٠ \end{cases}$$

أ) $ق'_+(٠) = -٤$ ، $ق'_-(٠) = ٤$ وعليه ق'(٠) غير موجودة ⇐ ق'(س) = $\begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س < ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \end{cases}$

٩) $٣ ص^٢ ص' = ق'(٤س^٣ - س)(٨س - ١)$

$$ص' = \frac{ق'(٤س^٣ - س)(٨س - ١)}{٣ ص^٢}$$

نجد ص عندما س = -١ ، $ص^٣ = هـ(٥) = -٨$ ومنه ص = -٢

$$ص' \Big|_{س=-١} = \frac{ق'(٥)(-٩)}{٣(-٢)^٢} = \frac{٤ \times -٩}{١٢} = -٣$$

١٠) ق(س) = (جتا هـ(س)) ق(س)

ق'(س) = (جتا هـ(س)) . ق'(س) + ق(س) (-جا هـ(س)) × ق'(س)

ق'(١) = جتا هـ(١) × ق'(١) - ق(١) جا هـ(١) × ق'(١)

= (جتا $\frac{\pi}{٣}$) × ٤ - صفر = $\frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$

١١) أ) ق'(س) = ٣س^٢ + ٢ ، هـ'(س) = ٦س ، ق(س) = ٦ - س

(هـ ○ ص)'(س) = هـ'(ص(س)) . ق(س)

(هـ ○ ص)'(٢) = هـ'(ص(٢)) . ق(٢) = هـ'(١٢) × ١٢

= ٨٧ × ١٢ = ٧٤٨

(٤٢)

ب) $(هـ \circ ص)''(س) = ((هـ \circ ص)'(س))'$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص'(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) \cdot ص'(س) + هـ'(ص(س)) \cdot ص''(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) \cdot ص'(٢) + هـ'(ص(٢)) \cdot ص''(٢)$

$= هـ''(١) \times ٦ \times ١ \times ٦ + ٣٤ \times ٦ = ٢٨ \times ٦ + ٣٤ \times ٦$

$= ١٦٨$

١٢) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٣ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ص'(١) = -\frac{٥}{٢}$ ومنه $ص(١) = -٥ ص'(١)$

١٣) $\frac{د ص}{د س} = س ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٢ + ٦ = ٤$

١٤) $ظا ص \cdot ص' = ظا^٢ س$ ومنه $ص' = \frac{ظا^٢ س}{ظا ص}$

$ظا ص \times ص' + ص'(-ظا ص) \cdot ص' = ٢ ظا س ظا س$

$ص'' ظا ص - (ص')^٢ ظا ص = ٢ ظا^٢ س ظا س$

باستبدال ظا ص بـ ظا س

$ص'' ظا ص - (ص')^٢ ظا ص = ٢ ظا^٢ س$ ظا ص بالقسمة على ظا ص

$ص'' - (ص')^٢ ظا ص = ٢ ظا^٢ س$

ظا ص $(٢ ظا^٢ س + (ص')^٢) = ص''$. اذن ظا ص $= \frac{ص''}{٢ ظا^٢ س + (ص')^٢}$

(١٥) $هـ'(٣س - ١)(٣) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{س^٢}{٢}$

$هـ(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٢س^٢} - \frac{س^٣}{٦})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٨} - \frac{٤}{٦}) = \frac{١}{٣}(\frac{-١}{٢}) = \frac{-١}{١٢}$

(١٦) $- ظا ص \cdot ص' - (س ص' + ص)(٢) = ٠$

$- ظا ص \cdot ص'' + ص'(-ظا ص \cdot ص') - (٢ ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص'' ظا ص + (ص')^٢ ظا ص + ٢ ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س + ظا ص) + ص'(٢ + ص' ظا ص) = ٠$

(٤٣)

(١٧) صَ = أ جتا س + ب جا س

(صَ)٢ + صْ٢ = أ٢ جتا٢ س + ب٢ جا٢ س + ٢أب جا س جتا س
+ أ٢ جا٢ س + ب٢ جتا٢ س − ٢أب جا س جتا س

= جتا٢ س (أ٢ + ب٢) + جا٢ س (أ٢ + ب٢)

= (أ٢ + ب٢) (جتا٢ س + جا٢ س) = أ٢ + ب٢

(١٨) ٣ صْ٢ صَ = هـَ (ب س٢ − س)(٤ س − ١)

عندما س = ٠ يكون صْ٢ = هـ (٦) = −٨ ومنه صْ = −٢

٣ (−٢)٢ × صَ |س=٠ = هـَ (٦) × ٨

١٢ صَ |س=٠ = ٤ × ٨ ، صَ |س=٠ = ٤ × ٨ / ١٢ = ٨/٣

(١٩) د) هـَ (س) = ٣ س٢ − ٢ س ، هـَ (س) = ٦ س − ٢ ، هـَّ (س) = ٦

ق (س) = ٦ س + ١ ، قَ (س) = ٦

(هـَ ○ ص)َ (١) = هـَ (ص (١)) . صَ (١)

= هـَ (٤) × ٨ = ٢٢ × ٨ = ٤٥١

ب) (هـَ ○ ص)َّ (س) = ((هـَ ○ ص)َ (س))َ = (هـَ (ص (س)) . صَ (س))َ

= هـَّ (ص (س)) . صَ (س) + صَ (س) (هـَّ (س) . صَ (س))

(هـَ ○ ص)َّ (١) = هـَّ (ص (١)) . صَ (١) + صَ (١) (هـَّ (ص (١)) . صَ (١))

= هـَّ (٤) × ٦ + ٨ (هـَّ (٤) × ٨)

= ٢٢ × ٦ + ٨ × ٦ × ٨ = ٦٢٤

ج) س = ٠ ، ب) س = −١٩٠ ، ٢

ا) ا) جـ ، ب) ب ، ج) د ، د) أ

ه) جـ ، و) أ ، ز) ب

رياضيات / العلمي / ف1

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثالثة

(تطبيقات التفاضل)

تطبيقات هندسية

تدريب (١) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \sqrt{س + ٣}$ عند $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= ق'(س)\Big|_{س=١} = \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}}\Big|_{س=١} = \frac{١}{٢\times ٢} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -٤(س - ١)$

تدريب (٢) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، $ق(س) = ص$

يتقاطعان عندما $ق(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{٤}{س} = س \Leftarrow ٤ = س^٢ \Leftarrow س = \pm ٢$

ميل المماس لـ $ق(س)$ عند $س = -٢$ هو $ق'(-٢) = \frac{-٤}{س^٢}\Big|_{س=-٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

ميل المماس لـ $ق(س)$ عند $س = ٢$ هو $ق'(٢) = -١$

وبما أن $ق'(-٢) \times ق'(٢) = -١ \times -١ = ١$ ∴ متعامدان

تدريب (٣) ص ١٦٣ :

$ق(س) = جا س$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ميل المماس أفقيا لـ $ق(س) \Leftarrow ق'(س) = ٠ \Leftarrow جتا س = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$ أو $س = \frac{٣\pi}{٢}$

تدريب (٤) ص ١٦٤ :

$ق(س) = ج س^٣ + د س^٢ + هـ س + ج$ ، ميل المماس لمنحنى $ق(س) = ق'(س) = ٣ج س^٢ + ٢د س + هـ$

$ق'(١) = ظا ١٣٥°$

$٣ج + ٢د + هـ = -١ \Leftarrow ٥ هـ = -١ \Leftarrow هـ = \frac{-١}{٥} = -٠,٢$

تدريب (٥) ص ١٦٥

$f(x) = 5 - x^2$ ، النقطة (٣، ٠) لا تقع على منحنى $f(x)$

افرض أن النقطة (x_1, y_1) تقع على منحنى $f(x) \Leftarrow y_1 = 5 - x_1^2$

ميل المماس عند $(x_1, y_1) = f'(x_1) = -2x_1$

معادلة المماس: $y - 0 = -2x_1(x - 3)$

$f(x_1) = y_1 \Leftarrow 5 - x_1^2 = -2x_1(x_1 - 3)$

$5 - x_1^2 = -2x_1^2 + 6x_1 \Leftarrow x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \Leftarrow (x_1 - 1)(x_1 - 5) = 0$

$x_1 = 1$ أو $x_1 = 5$

نقطة المماس الأولى (١، ٤) ومعادلة المماس الأولى: $y - 4 = -2(x - 1)$

" " الثانية (٥، -٢٠) " " الثانية: $y + 20 = -10(x - 5)$

تمارين ومسائل
ص ١٦٦

١) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ ، $f'(x) = 2x + 6$

ميل المماس عند (١، ٢) $= f'(1) = 8$

٢) $f(x) = x^3$ يتقاطع مع المستقيم $y = x + 6$ عندما

$f(x) = y \Leftarrow x^3 = x + 6 \Leftarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftarrow x = 2$

ميل المماس $= f'(2) = 3(2)^2 = 12$

معادلة المماس: $y - 8 = 12(x - 2)$
عند (٢، ٨)

٣) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ ، $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

ميل المماس $= f'(x) = \tan\frac{\pi}{4} \Leftarrow 3x^2 - 6x + 3 = 1 \Leftarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftarrow x = 1$

النقطة (١، ١)

٤) $(y - 4)^2 = x + 2 \Leftarrow 2(y - 4) \times \frac{dy}{dx} = 1 \Leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 8}$

ميل المنحنى = ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{1}{2y - 8} = -\frac{1}{2} \Leftarrow 2y = 6 \Leftarrow y = 3$

∴ النقطة $(-1, 3)$

٥) $ق(س) = -س^٤ - ٤س + ٣$ ، $ق'(س) = -٤س^٣ - ٤$ ، ميل المماس $= -٢$

ميل المماس المقترن $= ق'(س_١) = -٢ \Leftarrow -٤س_١^٣ - ٤ = -٢ \Leftarrow س_١ = -١$

$(-١ ، ١)$

معادلة المماس: $ص - ١ = -٢(س + ١) \Leftarrow ص = -٢س - ١$

٦) $ق(س) = \frac{١}{س^٢}$ عند $(١ ، ١)$ ، $ق'(س) = \frac{-٢}{س^٣}$

ميل المماس $= ق'(١) = -٢$ ، ميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

معادلة المماس: $ص - ١ = -٢(س - ١)$

معادلة العمودي: $ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

٧) $ق(س) = س^٣ + ب س + ج$ عند $(٠ ، ٢)$ ، $ق'(س) = ٣س^٢ + ب$

$ق(٠) = ٢ \Leftarrow \boxed{ج = ٢}$

$ق'(١) =$ ميل المستقيم $= ١ \Leftarrow ق'(١) = ب = ١ \Leftarrow \boxed{ب = ١}$

٨) $ق(س) = \frac{س^٣}{٣}$ حيث المستقيم $٢س - ص + ج = ٠$ ، $ق'(س) = \frac{س^٢}{٢}$ ، $ص = ٢$

$ق'(س_١) = ص \Leftarrow \frac{س^٢}{٢} = ٢ \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ١$

$ق(١) = |ص|_{س=١} \Leftarrow \frac{١}{٣} = ٢ + ج \Leftarrow \boxed{ج = -\frac{٤}{٣}}$

$ق(-١) = |ص|_{س=-١} \Leftarrow ٢ = -٢ + ج \Leftarrow \boxed{ج = ٤}$

٩) العلاقة $س = ص^٢ - ٤ص$ تقاطع مع محور الصادات عندما $س = ٠$

$ص^٢ - ٤ص = ٠ \Leftarrow ص(ص - ٤) = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ ، $ص = ٤$

النقطة الأولى $(٠ ، ٠)$ ، النقطة الثانية $(٠ ، ٤)$

معادلة المماس الأولى: ميل المماس $= ١ = ٢ص \cdot ص' - ٤ص' \Leftarrow ص' = \frac{١}{٤ - ٢ص}$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٤}(س - ٠)$

معادلة المماس الثانية:

$ص - ٤ = \frac{١}{٤} \times س$

١٠) العلاقة $ص^2 + ٦ص = س^3 + ٢س - ٣$ ، $٢ص\frac{دص}{دس} + ٦\frac{دص}{دس} = ٣س^2 - ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^2 - ٢}{٢ص + ٦}$ ⟸ ميل المماس = المقلوب

$\left|\frac{دص}{دس}\right|_{(-١،٣)} = ظا\theta \Leftarrow \frac{-٥}{٥} = ظا\theta \Leftarrow ظا\theta = -١$ ، $\theta = ١٣٥°$

١١) $ص(س) = ٣ جتا س + ٤ قتا س$ ، النقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٥)$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$ص'(س) = -٣ جتا س ظتا س + ٤ قتا س ظا س$

ميل المماس $= |ص'(\frac{\pi}{٤})| = -٣ \times \frac{١}{٢} \times ١ + ٤ \times \sqrt{٢} \times ١ = -٢$

ميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ٥ = -٢(س - \frac{\pi}{٤})$

معادلة العمودي : $ص - ٥ = \frac{١}{٢}(س - \frac{\pi}{٤})$

١٢) منحنى $ص(س) = ١ - س$ ⟵ منحنى $ق(س) = س^3 - \frac{٣}{٢}س^2 + \frac{١}{٣}$ عندما $ص(س) = ق(س)$

$س^3 - \frac{٣}{٢}س^2 + \frac{١}{٣} = ١ - س \Leftarrow س = ١$ عند $(١، ١)$

ميل المماس $= |ص'(س)|_{س=١} = ق'(١) = \frac{-١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ١ = \frac{-١}{٢}(س - ١)$

١٣) ميل المماس $= |ص'(س)|_{س=٤} = ق'(٤) = \frac{-\sqrt{١٥}}{٨} = \frac{-١}{٤}$ ، معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{-١}{٤}(س - ٤)$

$ص = \frac{-١}{٤}س + ١$

المماس يقطع السينات عندما $ص = ٠ \Leftarrow س = ٤$

وحدات مربعة $= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢ = ٨$ وحدات مربعة $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٥ = ١٠$

١٤) ميل المماس عند $(٢، ١) = ق'(١) = ٢س$ عندما $س = ١ = ٢ \Leftarrow$ ميل العمودي عند $(٢، ١) = \frac{-١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = ٢(س - ١) \Leftarrow ص = ٢س$ تقطع محور السينات عند $س = ٠$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = \frac{-١}{٢}(س - ١) \Leftarrow ص = \frac{-١}{٢}س + \frac{٥}{٢}$ تقطع محور السينات عند $س = ٥$

وحدات مربعة $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$

تطبيقات فيزيائية

تدريب (1) صـ 179 :

$ف(ن) = ٤ جا ٣ن - ٥ جتا ٣ن$

$ف(\frac{\pi}{٢}) = ٤ جا \frac{\pi}{٢} - ٥ جتا \frac{\pi}{٢} = ٤ - ٠ = ٤$ متر

$ع(ن) = ف'(ن) = ١٢ جتا ٣ن + ١٥ جا ٣ن \Rightarrow ع(\frac{\pi}{٢}) = ١٢ جتا \frac{\pi}{٢} + ١٥ جا \frac{\pi}{٢} = ٠ + ١٥ = ١٥$ م/ث

$ج(ن) = ع'(ن) = -٣٦ جا ٣ن + ٤٥ جتا ٣ن \Rightarrow ج(\frac{\pi}{٢}) = -٣٦ جا \frac{\pi}{٢} + ٤٥ جتا \frac{\pi}{٢} = -٣٦ + ٠ = -٣٦$ م/ث^٢

تدريب (2) صـ 179 :

$ف(ن) = ن^٣ - ٩ن^٢ + ١٥ن$ ، $ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن + ١٥ = ٠ \Rightarrow ٣(ن-١)(ن-٥) = ٠$

$ن = ١$ ث ، $ن = ٥$ ث

$ج(ن) = ٦ن - ١٨ \Rightarrow ج(١) = ٦ - ١٨ = -١٢$ م/ث^٢ ، $ع(٥) = ٢٥ - ٩٠ + ١٥ = ٠$ م/ث

تدريب (3) صـ 180 :

$ف(ن) = ٥٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٥٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٥) = ٥٠ - ٥٠ = ٠$ م/ث

$\Rightarrow ن = ٨$ ث ضعف زمن الصعود لكل أقصى ارتفاع

$ف(٨) + ل = ٠ \Rightarrow ١٦٠ - ٣٢٠ + ل = ٠ \Rightarrow ل = ١٦٠$ م ارتفاع البرج

تمارين ومسائل صـ 181

١) $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن + ٣$

ع) $ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ \Rightarrow ع(١) = ٩$ م/ث

ج) $ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٣(ن-١)(ن-٣) = ٠ \Rightarrow ن = ١$ ث ، $ن = ٣$ ث

ت) $ج(ن) = ع'(ن) = ٦ن - ١٢ \Rightarrow ج(١) = -٦$ م/ث^٢ ، $ج(٣) = ٦$ م/ث^٢

٢) $ف(ن) = ٢ جا(\frac{\pi}{٤} ن) + \frac{\pi}{٤} ن$

ع) $ع(ن) = ف'(ن) = ٢ \times \frac{\pi}{٤} جتا \frac{\pi}{٤} ن + \frac{\pi}{٤} = جتا \frac{\pi}{٤} ن + \frac{\pi}{٤} \Rightarrow \frac{\pi}{٤} = جتا \frac{\pi}{٤} ن + \frac{\pi}{٤}$

$\Rightarrow ن = \frac{\pi}{٣}$ ث $\Rightarrow ت(ن) = ع(ن) = جتا \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢}$ م/ث

٣) $ف(ن) = ٦,٩ن - ٤,٩ن^٢$

د) $ع(ن) = ف'(ن) = ٦,٩ - ٩,٨ن \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = \frac{٦,٩}{٩,٨} = ٢$ ث

هـ) $ف(٢) = ٦,٩ \times ٢ - ٤,٩ \times ٤ = ١٣,٨ - ١٩,٦ = -٥,٨$ م

ن) $ت(ن) = ع(ن) = -٩,٨$ م/ث

ج) $ع(٤) = ٦,٩ - ٩,٨ \times ٤ = -٦,٩$ م/ث

٤) $ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = ٤$ ث

ن	$٠ < ن < ٤$	٤	$ن > ٤$
ع(ن)	+	٠	-

ب) $ع(٧) = ٠$ ، ضعفا $ن \in [٤ ، ٨]$ ، $ف(٤) = ١٢٨ \times ٤ - ١٦ \times ١٦ = ٢٥٦$ قدم

ج) $ت(٨) \Rightarrow ع(٨) = -٣٢$ قدم/ث ، $ع(٠) = ١٢٨$ قدم/ث

ه) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(ن) = ٠ \Rightarrow ٩٦ن - ١٦ن^٢ = ٠ \Rightarrow ن(٩٦ - ١٦ن) = ٠$

$\Rightarrow ن = ٠$ أو $٩٦ - ١٦ن = ٠ \Rightarrow ١٦ن = ٩٦ \Rightarrow ن = ٦$

$ع(٠) = ٣٦ كجم/ث$ ، $ع(٥) = ٣٦ - ٤٥ = -٤٤$ كجم/ث

و) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن$

$ع(٣) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١) = ٦٤$ كجم/ث ، $ع(٥) = -٤٤$ كجم/ث

ز) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن$

$ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٩٦ - ٣٢ن = ٠ \Rightarrow ٣٢ن = ٩٦ \Rightarrow ن = ٣$ ث

ح) $ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٩٦ - ٣٢ن = ٠ \Rightarrow ٣٢ن = ٩٦ \Rightarrow ن = ٣$ ث ، زمن الصعود = زمن الهبوط $= ٦$ ث

ط) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٣) = ٩٦(٣) - ١٦(٣)^٢ = ٢٨٨ - ١٤٤ = ١٤٤$ م

ي) $ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٩٦ - ٣٢ن = ٠ \Rightarrow ٣٢ن = ٩٦ \Rightarrow ن = ٣$ ث

ك) $ف(٣) = ١٤٤$ م ، $ف(٤) = ٩٦(٤) - ١٦(٤)^٢ = ٣٨٤ - ٢٥٦ = ١٢٨$ م

$\Rightarrow$ المسافة بين $ف$ و $ف$ $= ١٤٤ - ١٢٨ = ١٦$ م

ل) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢) = ١٩٢ - ٦٤ = ١٢٨$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢) = ٣٢$ م/ث

م) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٤) = ٣٨٤ - ٢٥٦ = ١٢٨$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٤) = -٣٢$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة المتجهة $= ٣٢$ م/ث

ن) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٥) = ٤٨٠ - ٤٠٠ = ٨٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٥) = -٦٤$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٦٤$ م/ث

س) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٦) = ٥٧٦ - ٥٧٦ = ٠$

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٦) = -٩٦$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٩٦$ م/ث

ع) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٧) = ٦٧٢ - ٧٨٤ = -١١٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٧) = -١٢٨$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ١٢٨$ م/ث

ف) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٨) = ٧٦٨ - ١٠٢٤ = -٢٥٦$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٨) = -١٦٠$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ١٦٠$ م/ث

ص) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٩) = ٨٦٤ - ١٢٩٦ = -٤٣٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٩) = -١٩٢$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ١٩٢$ م/ث

ق) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٠) = ٩٦٠ - ١٦٠٠ = -٦٤٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٠) = -٢٢٤$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٢٢٤$ م/ث

ر) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١١) = ١٠٥٦ - ١٩٣٦ = -٨٨٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١١) = -٢٥٦$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٢٥٦$ م/ث

ش) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٢) = ١١٥٢ - ٢٣٠٤ = -١١٥٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٢) = -٢٨٨$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٢٨٨$ م/ث

ت) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٣) = ١٢٤٨ - ٢٧٠٤ = -١٤٥٦$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٣) = -٣٢٠$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٣٢٠$ م/ث

ث) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٤) = ١٣٤٤ - ٣١٣٦ = -١٧٩٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٤) = -٣٥٢$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٣٥٢$ م/ث

ج) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٥) = ١٤٤٠ - ٣٦٠٠ = -٢١٦٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٥) = -٣٨٤$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٣٨٤$ م/ث

ح) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٦) = ١٥٣٦ - ٤٠٩٦ = -٢٥٦٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٦) = -٤١٦$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٤١٦$ م/ث

خ) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٧) = ١٦٣٢ - ٤٦٢٤ = -٢٩٩٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٧) = -٤٤٨$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٤٤٨$ م/ث

د) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٨) = ١٧٢٨ - ٥١٨٤ = -٣٤٥٦$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٨) = -٤٨٠$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٤٨٠$ م/ث

ذ) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(١٩) = ١٨٢٤ - ٥٧٦٤ = -٣٩٤٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(١٩) = -٥١٢$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٥١٢$ م/ث

ض) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٠) = ١٩٢٠ - ٦٤٠٠ = -٤٤٨٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٠) = -٥٤٤$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٥٤٤$ م/ث

ظ) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢١) = ٢٠١٦ - ٧٠٥٦ = -٥٠٤٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢١) = -٥٧٦$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٥٧٦$ م/ث

غ) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٢) = ٢١١٢ - ٧٧٤٤ = -٥٦٣٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٢) = -٦٠٨$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٦٠٨$ م/ث

ف) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٣) = ٢٢٠٨ - ٨٤٦٤ = -٦٢٥٦$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٣) = -٦٤٠$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٦٤٠$ م/ث

ق) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٤) = ٢٣٠٤ - ٩٢١٦ = -٦٩١٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٤) = -٦٧٢$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٦٧٢$ م/ث

ك) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٥) = ٢٤٠٠ - ١٠٠٠٠ = -٧٦٠٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٥) = -٧٠٤$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٧٠٤$ م/ث

ل) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٦) = ٢٤٩٦ - ١٠٨١٦ = -٨٣٢٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٦) = -٧٣٦$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٧٣٦$ م/ث

م) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٧) = ٢٥٩٢ - ١١٦٦٤ = -٩٠٧٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٧) = -٧٦٨$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٧٦٨$ م/ث

ن) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٨) = ٢٦٨٨ - ١٢٥٤٤ = -٩٨٥٦$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٨) = -٨٠٠$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٨٠٠$ م/ث

س) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٢٩) = ٢٧٨٤ - ١٣٤٥٦ = -١٠٦٧٢$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٢٩) = -٨٣٢$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٨٣٢$ م/ث

ع) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢ \Rightarrow ف(٣٠) = ٢٨٨٠ - ١٤٤٠٠ = -١١٥٢٠$ م

$ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن \Rightarrow ع(٣٠) = -٨٦٤$ م/ث

$\Rightarrow$ السرعة $= ٨٦٤$ م/ث

المعدلات المرتبطة بالزمن

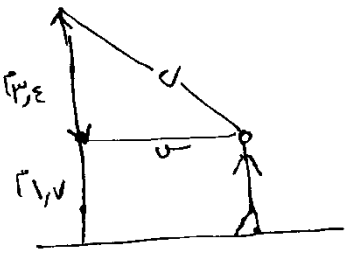
تدريب (١) ص١٧٥ :

$\frac{ds}{dt} = -10$ سم/ث ،

أ) $ح = \frac{4}{3}\pi نق^3 \Rightarrow \frac{dح}{dt} = 4\pi نق^2 \cdot \frac{dنق}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dح}{dt}\right|_{نق=10} = 4 \times \pi \times 10^2 \times 10 = 4000\pi$ سم^3/ث

ب) $م = 4\pi نق^2 \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 8\pi نق \cdot \frac{dنق}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dt}\right|_{نق=5} = 8 \times \pi \times 5 \times 10 = 400\pi$ سم^2/ث

تدريب (٢) ص١٧٩ :



$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=3} = ؟$

$ل = \sqrt{س^2 + (3,4)^2} \Rightarrow \frac{dل}{dt} = \frac{2س \times \frac{ds}{dt}}{2\sqrt{س^2 + (3,4)^2}}$

$\left|\frac{dل}{dt}\right|_{س=3} = \frac{6}{\sqrt{9 + (3,4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{20,56}}$ م/ث

تدريب (٣) ص١٧٧

$\frac{dθ}{dt} = 0,2$ د/ث

أ) م $= \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times$ جا$θ \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 28 \times$ جتا$θ \times \frac{dθ}{dt}$

$\left|\frac{dم}{dt}\right| = 28 \times$ جتا$60° \times 0,2 = 2,8$ سم^2/ث
$θ = 60°$

ب) $\left|\frac{dم}{dt}\right| = 28 \times$ جتا$120° \times 0,2 = -2,8$ سم^2/ث
$θ = 120°$

تمرين (١) ص١٧٩

$\frac{ds}{dt} = -1000$ سم/ث حيث :

$ح = س^3 \Rightarrow \frac{dح}{dt} = 3س^2 \frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dح}{dt}\right|_{س=10} = 3 \times 100 \times -1000 = -300000$ سم^3/ث

$م = 6س^2 \Rightarrow \frac{dم}{dt} = 12س \frac{ds}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dم}{dt}\right|_{س=10} = 12 \times 10 \times -1000 = -120000$ سم^2/ث

تمرين (2) صـ179

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}$ م/ث ، $\left|\frac{ds}{dh}\right|_{h=24}$ = ؟

$s^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow h = \sqrt{25^2 - s^2} \Rightarrow \frac{dh}{ds} = \frac{-2s}{2\sqrt{25^2 - s^2}}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{-s}{\sqrt{25^2 - s^2}} \times \frac{1}{2} = \frac{-3}{\sqrt{25^2 - 9^2}} \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{32}$ م/ث

3) تدريب (3) :

$\frac{dv}{dt} = 12\pi$ سم^3/ث ، $\left|\frac{dr}{dh}\right|_{h=4}$ = ؟

$\frac{r}{h} = \frac{7}{14} \Rightarrow r = \frac{1}{2}h$

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{4}h^2 \times h = \frac{1}{12}\pi h^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow 12\pi = \frac{1}{4}\pi \times 16 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4}$ سم/ث

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dh}{dt} = \frac{3}{8}$ سم/ث $\Rightarrow \frac{dr}{dh} = \frac{3}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$\left|\frac{dr}{dh}\right|_{h=4} = \frac{1}{2}$

تدريب (4) :

$\frac{dm}{dt} = 2$ كجم/ساعة ، $\frac{dn}{dt} = 3$ كجم/ساعة

$\left|\frac{dl}{dt}\right|$ = ؟

$m = 4$ كجم
$n = 7$ كجم
$l = 9$ كجم

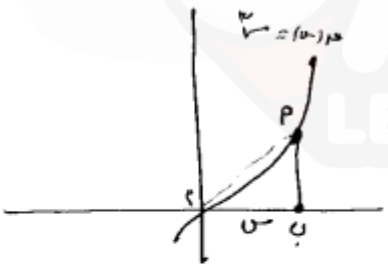
$l^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos 120°$ (قانون جيب التمام)

$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{l}\left(m\frac{dm}{dt} + n\frac{dn}{dt} - \frac{1}{2}m\frac{dn}{dt} - \frac{1}{2}n\frac{dm}{dt}\right)$

$= \frac{1}{9}(4 \times 2 + 7 \times 3 - 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 7 \times 2)$

$= \frac{1}{9}(8 + 21 - 6 - 7) = \frac{16}{9}$ كجم/ساعة

تمرين (5)



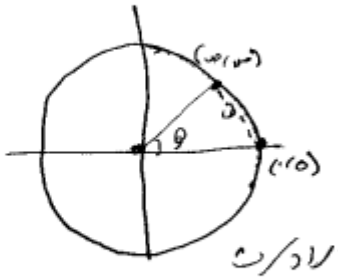
$\frac{ds}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dm}{ds}\right|_{s=1}$ = ؟

$m = \frac{1}{2} \times s \times s^3 = \frac{1}{2} s^4$

$\frac{dm}{ds} = 4s^3$ ، $\frac{ds}{dt}$ = ؟ ث = ؟ ث ، s = ؟ سم

$\left|\frac{dm}{dt}\right|_{\substack{s=1 \\ s=2}} = 4 \times 1^3 \times 2 = 8$ سم/ث

تمرين (6)



$\frac{dx}{dt} = -10$ سم/ث ، $\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$ = ؟

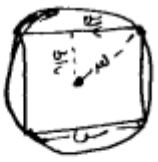
$L = 2\theta$ نق $\Rightarrow L = 5\theta \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 5\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}$ = ٠,٢ راد/ث

$ص = \sqrt{1 - س^2}$ جتا θ = $\sqrt{1 - \cos^2 2\theta}$ = $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ = جا θ

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}$ جتا θ

$\left|\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ سم/ث

تمرين (7)



$\frac{dx}{dt} = 4$ سم/ث ، $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10}$ = ؟

$A = 100 - x^2$

$\frac{dA}{dt} = -2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10} = -20 \times 4 = -80$ سم^2/ث

تمرين (8)

$\frac{dx}{dt} = 3$ سم/ث ، $\left|\frac{dy}{dt}\right|_{x=10}$ = ؟

$y = 100 - x^2$

$\frac{dy}{dt} = -2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dy}{dt}\right|_{x=10} = -20 \times 3 = -60$ سم/ث

تمرين (9)

$\frac{dx}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}$ = ؟

$A = \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 60$

$\frac{dA}{dt} = \sqrt{3} x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=4} = \sqrt{3} \times 4 \times 2 = 8\sqrt{3}$ سم^2/ث

تمرين (10)

$\frac{dx}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10}$ = ؟

$A = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 120$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \times 2 = 10\sqrt{3}$ سم^2/ث

تمرين (11)

$\frac{dx}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10}$ = ؟

$A = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 60$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10 \times 2 = 5\sqrt{3}$ سم^2/ث

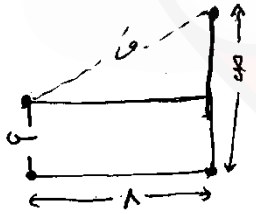
تمرين (12)

$\frac{dx}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10}$ = ؟

$A = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 90$

$\frac{dA}{dt} = x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \left|\frac{dA}{dt}\right|_{x=10} = 10 \times 2 = 20$ سم^2/ث

تمرين (٩) :



$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\frac{dص}{dt} = 1$ م/ث ، $\left|\frac{dف}{dt}\right| =$ ؟

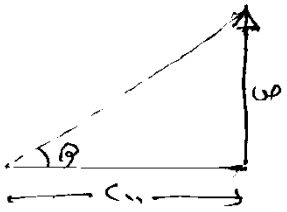
$ف = \sqrt{(ص-س)^2 + 64}$ ، $\frac{dف}{dt} = \frac{2(ص-س)\left(\frac{dص}{dt} - \frac{ds}{dt}\right)}{2\sqrt{(ص-س)^2+64}}$

$\frac{dف}{dt} = \frac{(8-2)(2-1)}{\sqrt{36+64}} = \frac{6}{10} = 0.6$ م/ث

$ص = \frac{ص}{ds} \times س = 4 \times 2 = 8$ م

$س = \frac{ds}{dt} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ م

تمرين (٦) :



$\frac{dص}{dt} = 10$ م/ث ، $\left|\frac{dθ}{dt}\right| =$ ؟

عندما $ص = 3$

$ظا θ = \frac{ص}{100}$

$قا^2 θ \frac{dθ}{dt} = \frac{1}{100} \frac{dص}{dt}$

$\frac{dθ}{dt} = \frac{1}{100} \times 10 = \frac{1}{10}$

$9 \times \frac{dθ}{dt} = \frac{1}{2}$

$\frac{dθ}{dt} = \frac{1}{10} = 0.1$ راديان/ث

$قا^2 θ = ظا^2 θ + 1$

$ظا θ = \frac{3}{4} = ص$

$قا^2 θ = 3^2 + 1 = 5$

النقط الحرجة

تدريب (١)

$$ق(س) = س^3 - 12س + 1 \quad ; \quad س \in [-3, 3]$$

$$ق'(س) = 3س^2 - 12$$

$$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$$

$$ق'(س) \text{ غير موجودة عند } س = \pm 3$$

$$س \in (-3, 3)$$

∴ النقط الحرجة هي

$$(-3, -1), (3, 17), (-2, 17), (2, -15)$$

تدريب (٢)

$$ق(س) = جا س - جتا^2 س \quad ; \quad س \in [0, 2\pi]$$

$$ق'(س) = جتا س + 2 جا س جتا س$$

$$ق'(س) = 0 \Leftarrow جتا س (1 + 2 جا س) = 0 \Leftarrow جتا س = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{أو } جا س = -\frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$ق(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 0, 2\pi$$

النقط الحرجة $(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{4}), (\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{4})$

تدريب (٣)

$$ق(س) = \sqrt[3]{س^4} \quad ; \quad س \in [-1, 4]$$

$$ق'(س) = \frac{4}{3} س^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{س}}$$

$$ق'(س) \neq 0 \text{ لا يوجد قيم لـ } س$$

$$ق(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 0$$

∴ النقط الحرجة $(-1, \sqrt[3]{1}), (0, 0), (4, \sqrt[3]{256})$

تدريب (٤)

$$ق(س) = |س^2 - 4س| \quad ; \quad س \in [1, 4]$$

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 4س & ; \ 0 \leq س \leq 4 \\ -س^2 + 4س & ; \ س < 0 \text{ أو } س > 4 \end{cases}$$

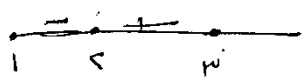
$$ق'(س) = \begin{cases} 2س - 4 & ; \ 0 < س < 4 \\ -2س + 4 & ; \ س < 0 \text{ أو } س > 4 \end{cases}$$

$$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 2$$

$$ق(س) \text{ غير موجودة } \Leftarrow س = 0$$

∴ النقط الحرجة هي

$$(1, 3), (2, 4), (4, 0)$$



$$ق(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 2$$

لأن $ق'(2^+) \neq ق'(2^-)$

كذلك عند اطراف الفترة عند $س = 1, 4$

$$س = 1 \notin (3, 4)$$

$$ق(س) = 0 \Leftarrow س = 2 \notin (1, 2)$$

تمرين (1)

ه) $ص(س) = س^3 - 3س + 1 \; ; \; س \in [-2, 2]$

$ص' = 3س^2 - 3 = 0 \Leftarrow س = \pm 1$

$ص(-2) = -1 \; ، \; ص(-1) = 3 \; ، \; ص(1) = -1 \; ، \; ص(2) = 3$

∴ النقط الحرجة هي $(-2, -1) \; ، \; (-1, 3) \; ، \; (1, -1) \; ، \; (2, 3)$

و) $ص(س) = |س - 1| + |س + 1| \; ; \; س \in [-2, 2]$

$ص = \begin{cases} -2س & ، \; -2 \leq س < -1 \\ 2 & ، \; -1 \leq س < 1 \\ 2س & ، \; 1 \leq س \leq 2 \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} -2 & ، \; -2 < س < -1 \\ 0 & ، \; -1 < س < 1 \\ 2 & ، \; 1 < س < 2 \end{cases}$

$ص'$ غير موجودة عندما $س = -1 \; ، \; 1$

$ص' \neq 0$ لأي قيمة من $س$

∴ النقط الحرجة هي $(-1, 2) \; ، \; (1, 2)$

ز) $ص(س) = جتا 2س + جا س \; ; \; س \in [0, 2\pi]$

$ص' = -2جا 2س + جتا س = 0 \Leftarrow جتا س = 2جا س جتا س$

$ص'$ غير موجودة عندما $س = \frac{\pi}{2} \; ، \; \frac{3\pi}{2}$

$ص' = 0 \Leftarrow جتا س = 0 \Rightarrow س = \frac{\pi}{2} \; ، \; \frac{3\pi}{2}$

$جا س = \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{6} \; ، \; \frac{5\pi}{6}$

∴ النقط الحرجة هي $(\frac{\pi}{2}, 1) \; ، \; (\frac{3\pi}{2}, -3) \; ، \; (\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}) \; ، \; (\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2})$

ح) $ص(س) = |س^2 - 3س| \; ; \; س \in [-1, 4]$

$ص = \begin{cases} س^2 - 3س & ، \; 3 \leq س \leq 4 \\ -س^2 + 3س & ، \; 0 \leq س < 3 \\ س^2 - 3س & ، \; -1 \leq س < 0 \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} 2س - 3 & ، \; 3 < س < 4 \\ -2س + 3 & ، \; 0 < س < 3 \\ 2س - 3 & ، \; -1 < س < 0 \end{cases}$

$ص'$ غير موجودة ، $س = 0$

$ص' = 0 \Leftarrow س = \frac{3}{2} \notin (-1, 0)$

$س = 3 \notin (0, 3)$

∴ النقط الحرجة هي $(-\frac{3}{2}, \frac{63}{4}) \; ، \; (0, 0) \; ، \; (\frac{3}{2}, \frac{9}{4}) \; ، \; (3, 0) \; ، \; (4, 4)$

ط) $ص(س) = |جتا س| \; ; \; س \in [0, 2\pi]$

$ص = \begin{cases} جتا س & ، \; 0 \leq س \leq \frac{\pi}{2} \\ -جتا س & ، \; \frac{\pi}{2} < س \leq \frac{3\pi}{2} \\ جتا س & ، \; \frac{3\pi}{2} < س \leq 2\pi \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} -جا س & ، \; 0 < س < \frac{\pi}{2} \\ جا س & ، \; \frac{\pi}{2} < س < \frac{3\pi}{2} \\ -جا س & ، \; \frac{3\pi}{2} < س < 2\pi \end{cases}$

$ص' = 0 \Leftarrow س = 0 \; ، \; \pi \; ، \; 2\pi$

$ص'$ غير موجودة ، $س = \frac{\pi}{2} \; ، \; \frac{3\pi}{2}$

∴ النقط الحرجة هي $(0, 1) \; ، \; (\frac{\pi}{2}, 0) \; ، \; (\pi, 1) \; ، \; (\frac{3\pi}{2}, 0) \; ، \; (2\pi, 1)$

ي) $ص(س) = |س^3 - 4س| \; ; \; س \in [-1, 3]$

$ص = \begin{cases} س^3 - 4س & ، \; 2 \leq س \leq 3 \\ -س^3 + 4س & ، \; 0 \leq س < 2 \\ س^3 - 4س & ، \; -1 \leq س < 0 \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} 3س^2 - 4 & ، \; 2 < س < 3 \\ -3س^2 + 4 & ، \; 0 < س < 2 \\ 3س^2 - 4 & ، \; -1 < س < 0 \end{cases}$

$ص'$ غير موجودة ، $س = 0$

$ص' = 0 \Leftarrow س = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \notin (-1, 3) \; ، \; س = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \notin (-1, 0)$

$س = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0, 2)$

∴ النقط الحرجة هي $(-1, 3) \; ، \; (0, 0) \; ، \; (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{16}{3\sqrt{3}}) \; ، \; (2, 0) \; ، \; (3, 15)$

ك) $ص(س) = |س^2 - 3س + 2| \; ; \; س \in [0, 3]$

$ص = \begin{cases} س^2 - 3س + 2 & ، \; 2 \leq س \leq 3 \\ -س^2 + 3س - 2 & ، \; 1 \leq س < 2 \\ س^2 - 3س + 2 & ، \; 0 \leq س < 1 \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} 2س - 3 & ، \; 2 < س < 3 \\ -2س + 3 & ، \; 1 < س < 2 \\ 2س - 3 & ، \; 0 < س < 1 \end{cases}$

$ص'$ غير موجودة ، $س = 1 \; ، \; 2$

$ص' = 0 \Leftarrow س = \frac{3}{2} \; ، \; \frac{3}{2} \notin (0, 1)$

∴ النقط الحرجة هي $(0, 2) \; ، \; (1, 0) \; ، \; (\frac{3}{2}, \frac{1}{4}) \; ، \; (2, 0) \; ، \; (3, 2)$

ل) $ص(س) = |س^2 - 4| \; ; \; س \in [-3, 3]$

$ص = \begin{cases} س^2 - 4 & ، \; 2 \leq س \leq 3 \\ -س^2 + 4 & ، \; -2 \leq س < 2 \\ س^2 - 4 & ، \; -3 \leq س < -2 \end{cases}$

$ص' = \begin{cases} 2س & ، \; 2 < س < 3 \\ -2س & ، \; -2 < س < 2 \\ 2س & ، \; -3 < س < -2 \end{cases}$

$ص'$ غير موجودة ، $س = \pm 2$

$ص' = 0 \Leftarrow س = 0$

∴ النقط الحرجة هي $(-3, 5) \; ، \; (-2, 0) \; ، \; (0, 4) \; ، \; (2, 0) \; ، \; (3, 5)$

(2)

تمرين (٥):

$ق(س) = س^3 + ب س^2 + ج س + د$ يقطع محور السينات عند $س = -1$ ، $س = 3$

$ق(-1) = 0 \Leftarrow -1 + ب - ج + د = 0$

$ق(3) = 0 \Leftarrow 27 + 9ب + 3ج + د = 0$

$-3 = ب - 3ج + د$

$-27 = 9ب + 3ج + د$

$-24 = 8ب + 4د$

$-6 = 2ب + د$

$ق(-2) = -8 + 4ب - 2ج + د = 0$

$-8 = 4ب - 2ج + د$

$-6 = 2ب + د$

$-2 = 4ب - 2ج$

$-1 = 2ب - ج$

$-24 = 8ب + 4د$

$-6 = 2ب + د$

$-18 = 6ب$

$ب = -3$

$-6 = -6 + د$

$د = 0$

$-1 = -6 - ج$

$ج = -5$

$ق(س) = س^3 - 3س^2 - 5س$

تمرين (٣)

$ق(س) = 0 \Leftarrow س = 0 \ ، \ س = -2$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = -3 \ ، \ س = 3$

$\therefore$ التقطع الرجيه $(-3، ق(-3))$ ، $(-2، ق(-2))$ ، $(0، ق(0))$ ، $(3، ق(3))$

تمرين (٤)

$ق(س) = \frac{س^3 - 1}{س^3 + 1} \Leftarrow ق'(س) = \frac{(س^3+1)(3س^2) - (س^3-1)(3س^2)}{(س^3+1)^2} = \frac{(3س^2)(س^3+1-س^3+1)}{(س^3+1)^2}$

$ق'(س) = \frac{6س^2}{(س^3+1)^2} \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow 6س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س^3 + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$ لا تنتمي لـ ط

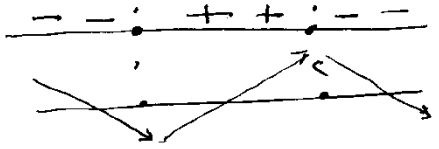
النقطة الحرجة $(0، -1)$

التزايد والتناقص

تدريب (1)

$ق(س) = س^3 - 3س^2 - 2 \Rightarrow ق'(س) = 3س^2 - 6س \Rightarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س(س-2) = 0$

$س = 0 \ ، \ س = 2$

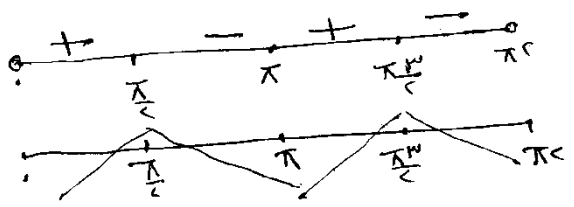


نلاحظ أن اقتران $ق(س)$ متزايد في الفترة $[0, 2]$ ومتناقص في $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

تدريب (2):

$ق(س) = جا^2 س \ ، \ س \in [0, 2\pi] \Rightarrow ق'(س) = 2 جاس \ جتاس \ ، \ س \in (0, 2\pi)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 2 جاس \ جتاس = 0 \Leftarrow جاس = 0 \ ، \ جتاس = 0 \Leftarrow س = \pi \ ، \ س = \frac{\pi}{2} \ ، \ س = \frac{3\pi}{2}$

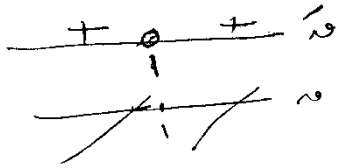


$ق$ متزايد في $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

$ق$ متناقص في $[\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

تدريب (3):

$ق(س) = \sqrt[3]{س - 1} \Rightarrow ق'(س) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(س-1)^2}}$

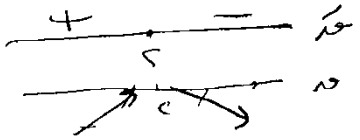


$ق(س)$ متزايد في $ح$

تمارين ومسائل

1)

أ) $ق(س) = 4س - س^2 \Rightarrow ق'(س) = 4 - 2س = 0 \Leftarrow س = 2$

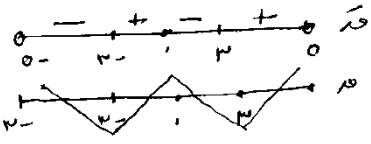


$ق(س)$ متزايد في $(-\infty, 2]$

$ق(س)$ متناقص في $[2, \infty)$

ب) $ق(س) = |س^2 - 9| = \begin{cases} -س^2 + 9 & -3 \le س \le 3 \\ س^2 - 9 & س \le -3 \ ، \ س \ge 3 \end{cases} \Rightarrow ق'(س) = \begin{cases} -2س & -3 < س < 3 \\ 2س & س < -3 \ ، \ س > 3 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

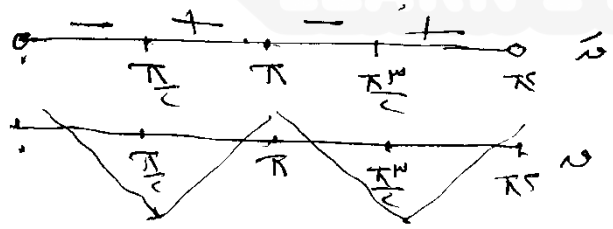


$ق(س)$ متزايد في $[-3, 0] \cup [3, \infty)$

$ق(س)$ متناقص في $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$

ز) $ق(س) = جتا^2 س - جا^2 س = جتا 2س = 0 \Leftarrow 2س = \frac{\pi}{2} + ك\pi \Leftarrow س = \frac{\pi}{4} + \frac{ك\pi}{2}$

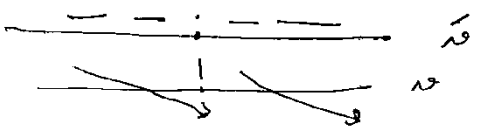
$ق(س) = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$



$د(س)$ متزايدة $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, 2\pi]$

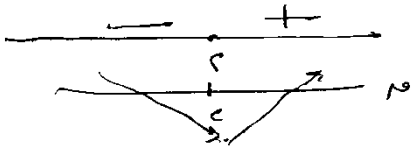
$د(س)$ متناقصة $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

ح) $ق(س) = (1-س)^3 \Leftarrow ق'(س) = 3(1-س)^2 \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$



$د(س)$ متناقصة $\mathbb{ح}$

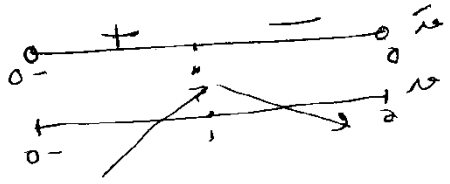
ط) $ق(س) = (2-س)^4 \Leftarrow ق'(س) = -4(2-س)^3 \Leftarrow ق'(1) = 0 \Leftarrow س = 2$



$د(س)$ متزايدة في $[2, \infty)$

$د(س)$ متناقصة في $(-\infty, 2]$

ي) $ق(س) = \sqrt{5 - س^2} \Leftarrow ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{5-س^2}} \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

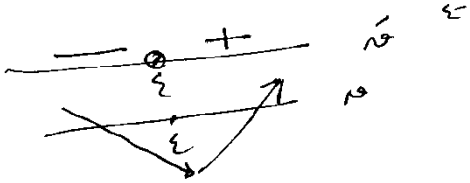


$د(س)$ متزايدة في $[-\sqrt{5}, 0]$

$د(س)$ متناقصة في $[0, \sqrt{5}]$

ك) $ق(س) = \sqrt[3]{(س-4)^2} = (س-4)^{\frac{2}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{2}{3}(س-4)^{-\frac{1}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{2}{3\sqrt[3]{س-4}}$

$س = 4 \Leftarrow$ غير موجود $\Leftarrow ق'(س) = 0$ غير موجود

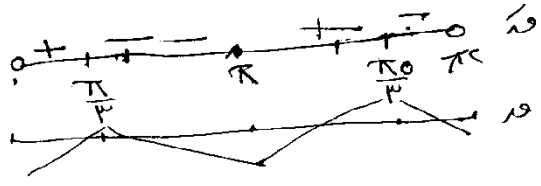


$د(س)$ متزايدة في $[4, \infty)$

$د(س)$ متناقصة في $(-\infty, 4]$

ل) $ق(س) = جتاس - \frac{1}{2} جتا 2س \Leftarrow ق'(س) = -جاس + جا 2س = -جاس + 2جاس جتاس$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow جاس(2جتاس - 1) = 0 \Leftarrow جاس = 0 \Leftarrow س = \pi$ أو $جتاس = \frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

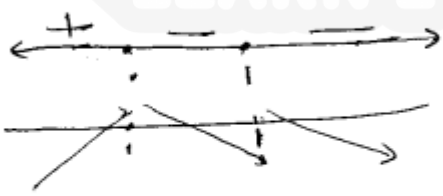


$د(س)$ متزايدة في $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{3}]$

$د(س)$ متناقصة في $[\frac{\pi}{3}, \pi] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

ب) $ق(س) = \begin{cases} 3-س^2 ، & س \leq 1 \\ \frac{1}{س} ، & س > 1 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -2س ، & س \leq 1 \\ -\frac{1}{س^2} ، & س > 1 \end{cases}$ ⟸ $ق'(س) = 0$ ⟸ $س = 0$



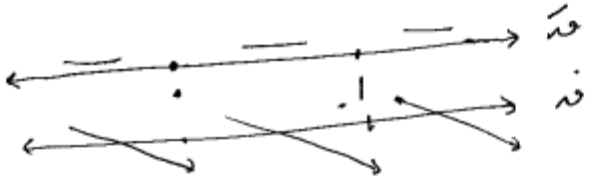
$ق(س)$ متزايدة في $(-\infty, 0]$

$ق(س)$ متناقصة في $[0, \infty)$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} 4-س^3 ، & س \leq 1 \\ \frac{3}{س} ، & س > 1 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -3س^2 ، & س < 1 \\ -\frac{3}{س^2} ، & س > 1 \end{cases}$ ⟸ $ق'(س) = 0$ ⟸ $س = 0$

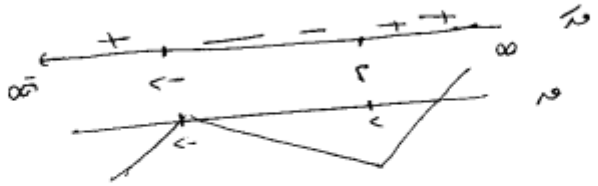
$ق(س)$ متناقصة في $\mathbb{ح}$



الفترتين

$ق(س)$ متزايدة في $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$ق(س)$ متناقصة في $[-2, 2]$

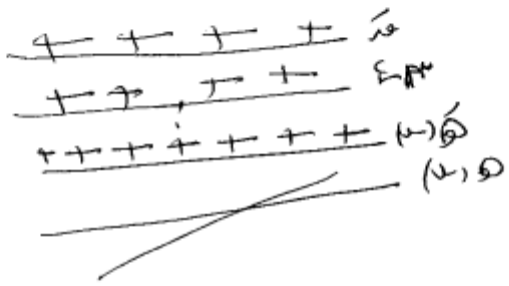


$ق(س) = ق(س) + س^3$

$ق'(س) = ق'(س) + 3س^2$

ما أن $ق'(س) > 0$

$ق(س)$ متزايدة في $[0, 2]$



القيم القصوى

تدريب (١)

$ق(س) = س^٤ - ٦س^٣ + ١٢س^٢ - ٩$ ، $س \in [-١ ، ٥]$

$ق'(س) = ٤س^٣ - ١٨س^٢ + ٢٤س = ٠ \Leftarrow ٤س(س^٢ - ٤س + ٣) = ٠$

$٤س(س - ١)(س - ٣) = ٠$

$س = ٠ ، ١ ، ٣$

$س$	-١		٠		١		٣		٥
$ق'(س)$		$-$	٠	$+$	٠	$-$	٠	$+$	
$ق(س)$	٢٥	↓	٩	↑	١٠	↓	٩	↑	٢٥

$ق(-١) = ٢٥$ ، $ق(٠) = ٩$ ، $ق(١) = ١٠$ ، $ق(٣) = ٩$ ، $ق(٥) = ٢٥$

∴ $ق(س)$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = -١$ ، $س = ٥$

∴ $ق(س)$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = ٠$ ، $س = ٣$

تدريب (٢)

$ق(س) = |س^٢ - ٤| ، س \in [-٣ ، ٤]$

$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ & س \le -٢ \text{ أو } س \ge ٢ \\ -س^٢ + ٤ & -٢ < س < ٢ \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < -٢ \text{ أو } س > ٢ \\ -٢س & -٢ < س < ٢ \end{cases}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ (توجد عند $س = -٢$ ، $س = ٢$)

$س$	-٣		-٢		٠		٢		٤
$ق'(س)$		$-$	غير موجودة	$+$	٠	$-$	غير موجودة	$+$	
$ق(س)$	٥	↓	٠	↑	٤	↓	٠	↑	١٢

$ق(-٣) = ٥$ ، $ق(-٢) = ٠$ ، $ق(٠) = ٤$ ، $ق(٢) = ٠$ ، $ق(٤) = ١٢$

∴ $ق(س)$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = ٠$

∴ $ق(س)$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = -٢$ ، $س = ٢$

تدريب (٣)

$ق(س) = س^٤ + ٤س^٣ - ٨س^٢ + ١ ، س \in [-٤ ، ٢]$

$ق'(س) = ٤س^٣ + ١٢س^٢ - ١٦س = ٠ \Leftarrow ٤س(س^٢ + ٣س - ٤) = ٠$

$٤س(س + ٤)(س - ١) = ٠$

$س = ٠ ، -٤ ، ١$

$س$	-٤		-٣		-١		٠		١		٢
$ق'(س)$	٠	$-$		$+$	٠	$-$	٠	$+$	٠	$-$	
$ق(س)$	١	↓	-٢٦	↑	-٦	↓	١	↑	-٢	↓	٢٥

$ق(-٤) = ١$ ، $ق(-٣) = -٢٦$ ، $ق(-١) = -٦$ ، $ق(٠) = ١$ ، $ق(١) = -٢$ ، $ق(٢) = ٢٥$

∴ $ق(س)$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = ٢$ ، $ق(٢) = ٢٥$

∴ $ق(س)$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = -٣$ ، $س = ١$

تدريب (٤)

$ق(س) = س + ٢جتا س ، س \in [٠ ، ٢\pi]$

$ق'(س) = ١ - ٢جا س = ٠ \Leftarrow جا س = \frac{١}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٦}$

$س$	٠		$\frac{\pi}{٦}$		$\frac{٥\pi}{٦}$		٢π
$ق'(س)$		$+$	٠	$-$	٠	$+$	
$ق(س)$	٢	↑	$\frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣}$	↓	$\frac{٥\pi}{٦} - \sqrt{٣}$	↑	$٢\pi + ٢$

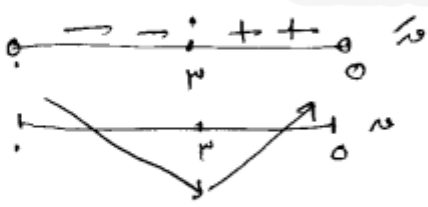
$ق(٠) = ٢$ ، $ق(\frac{\pi}{٦}) = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣}$ ، $ق(\frac{٥\pi}{٦}) = \frac{٥\pi}{٦} - \sqrt{٣}$ ، $ق(٢\pi) = ٢\pi + ٢$

∴ $ق(س)$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = ٠$ ، $ق(٠) = ٢$

∴ $ق(س)$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = \frac{٥\pi}{٦}$

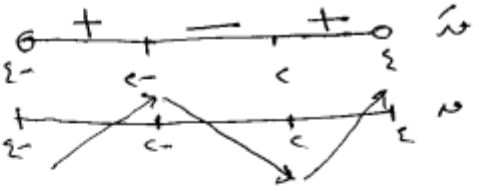
تمارين وسائل

أ) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س$ ⇐ $م'(س) = 3س^2 - 12س + 9$ ⇐ $م'(س) = 0$ ⇐ $س = 1$ أو $س = 3$



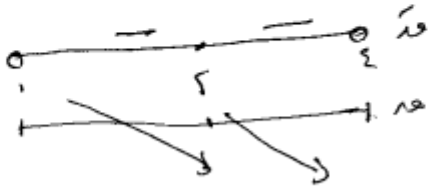
للاقتران $م$ على $[0, 4]$:
قيمة صغرى محلية عندما $س = 3$ لأن $م(3) = 0$ وهي مطلقة
قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 0$ لأن $م(0) = 9$

ب) $م(س) = س^3 - 12س$ ⇐ $م'(س) = 3س^2 - 12$ ⇐ $م'(س) = 0$ ⇐ $س = \pm 2$



للاقتران $م(س)$ على $[-4, 4]$:
قيمة عظمى محلية عندما $س = -2$ لأن $م(-2) = 16$
قيمة صغرى محلية عندما $س = 2$ لأن $م(2) = -16$
16 قيمة عظمى مطلقة في (-16)
(16) قيمة صغرى مطلقة

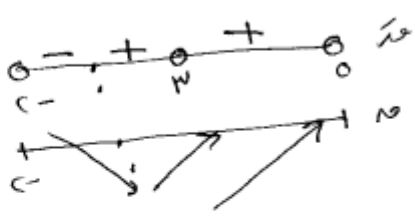
ج) $م(س) = (س - 2)^3$ ، $س \in [0, 4]$ ⇐ $م'(س) = 3(س - 2)^2$ ⇐ $م'(س) = 0$ ⇐ $س = 2$



للاقتران قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 0$ لأن $م(0) = 8$
قيمة صغرى ← صغرى محلية عندما $س = 2$ لأن $م(2) = 0$
-8 قيمة صغرى مطلقة عندما $س = 4$ لأن $م(4) = 8$

د)
$$م(س) = \begin{cases} 4س + 1 & ، 0 \leq س \leq 3 \\ 6 - 2س & ، 3 < س \leq 4 \end{cases}$$
$$م'(س) = \begin{cases} 4 & ، 0 < س < 3 \\ -2 & ، 3 < س < 4 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \end{cases}$$

$م'(س) = 0$ ⇐ $0 = 4$ ، $س = 3$

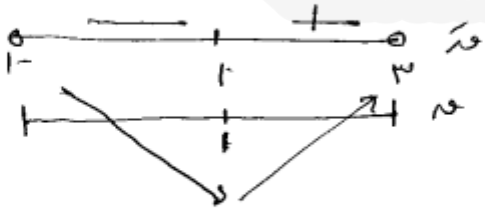


للاقتران $م(س)$ على $[-1, 5]$:
قيمة صغرى محلية عندما $س = 3$ لأن $م(3) = 1$ وهي مطلقة
قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 5$ لأن $م(5) = 6$

هـ) $م(س) = |(س-1)^3| = \begin{cases} (1-س)^3 & ، س < 1 \\ (س-1)^3 & ، س \geq 1 \end{cases}$

$م'(س) = \begin{cases} -3(1-س)^2 & ، س < 1 \\ 3(س-1)^2 & ، س > 1 \end{cases}$ غير موجودة عند $س = 1$

للاقتران $م(س)$:



فيه صغرى محلية عند $س = 1$ ، $م(1) = 0$ وهي مطلقة

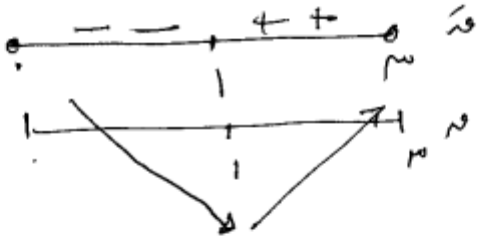
فيه عظمى مطلقة هي (3)

و) $م(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{3}س^3 : س \in [0, 3]$

$م'(س) = س^3 - س^2 = س^2(س-1)$ غير موجودة عند $س = 0$

$م'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = 1$

للاقتران $م(س)$:



فيه صغرى محلية عند $س = 1$ ، $م(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

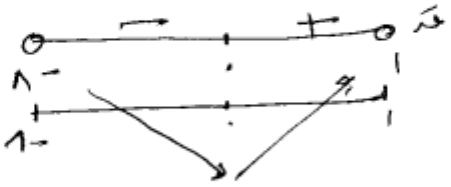
= صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{12}$

= عظمى مطلقة هي $م(3) = \frac{45}{4}$

ز) $م(س) = \sqrt[3]{س^2}$ ، $[-8, 1]$

$م'(س) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س}}$

للاقتران $م(س)$:



فيه صغرى محلية عند $س = 0$ ، $م(0) = 0$

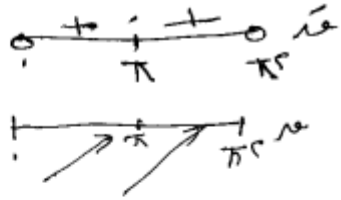
= صغرى مطلقة هي $م(0) = 0$

فيه عظمى مطلقة هي $م(-8) = 4$

ح) $م(س) = س + جاس$ ، $[0, 2\pi]$

$م'(س) = 1 + جتاس \Leftarrow م'(س) = 1$ غير موجودة $\Leftarrow جتاس = -1 \Leftarrow س = \pi$

$م'(س) = 0 \Leftarrow س = \pi$



فيه صغرى محلية عند $س = \pi$ ، $م(\pi) = \pi$

فيه عظمى مطلقة عند $س = 2\pi$ ، $م(2\pi) = 2\pi$

ط) $م(س) = (1-س)^3$ ، $س \in [-2, 4] \Leftarrow م'(س) = 3(1-س)^2$ غير موجودة $\Leftarrow س = 1$

$م'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

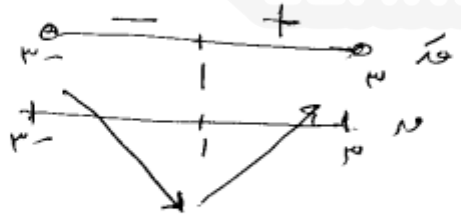
للاقتران $م(س)$:

فيه عظمى مطلقة هي $م(-2) = 27$

= صغرى مطلقة هي $م(4) = -1$

ي) $ن(س) = (1 - س)^4$ ، $س \in [-3, 3]$

$ن'(س) = 4(1-س)^3 \Leftarrow ن'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

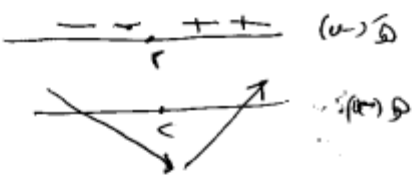


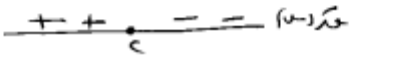
الاقتران $ن(س)$:

قيمة صغرى محلية هي $ن(1) = 0$ وهطلقة

قيمة كبرى مطلقة هي $ن(-3) = 256$

ج) $ق(س) = (1 - ن(س))^3 \Rightarrow ق'(س) = 3 ن'(س)(1 - ن(س))^2 \Rightarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow ن'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$ أو $س = 3$

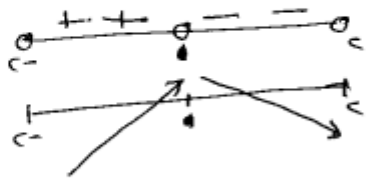




الاقتران $ق(س)$ قيمة صغرى محلية

عند $س = 3 \Leftarrow ق(3) = (1 - ن(3))^3 = (1-3)^3 = (-2)^3 = -8$

م) مجموعة قيم $س$ التي عندها نقط حرجة للاقتران $ن(س)$ هي $\{-2, 0, 2\}$

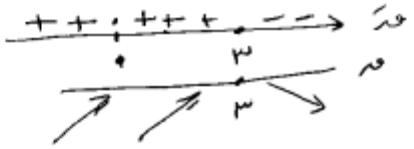


ن) الاقتران متزايد في الفترة $[-2, 0] \cup [2, \infty)$

متناقص في $[0, 2]$

ح) الاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = 0$

ع) $ن$ الاقتران نقط حرجة عند $س = 0$ ، $س = 3$ وهي $(0, ن(0))$ ، $(3, ن(3))$



ن) معكوس الاقتران متزايد في $[-3, 3]$

متناقص في $[3, 5]$

ح) الاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = 3$

التقعر

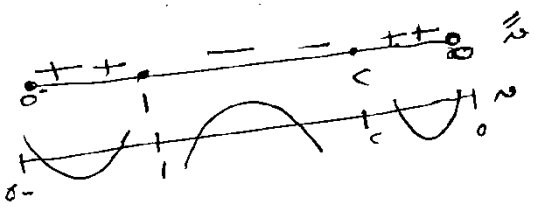
تدريب (١)

$$\text{ه}(س) = س^4 - 6س^3 + 24س + 5 \quad ، [-5, 5]$$

$$\text{ه}'(س) = 4س^3 - 18س^2 + 24 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 12س^2 - 36س + 24$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow 12(س^2 - 3س + 2) = 0 \Leftarrow (س-1)(س-2) = 0 \Leftarrow س = 1 ، س = 2$$

الاقتران مقعر للأعلى في الفترات
$[-5, 1] \cup [2, 5]$



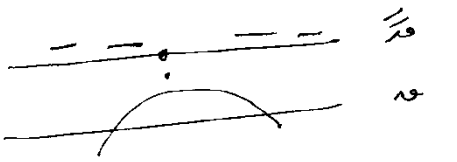
الاقتران مقعر للأسفل في الفترة $[1, 2]$

تدريب (٢) :

$$\text{ه}(س) = س^{\frac{4}{3}} \Leftarrow \text{ه}'(س) = \frac{4}{3}س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow \text{ه}''(س) = \frac{4}{9}س^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{ه}''(س) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{س^{\frac{2}{3}}} \Leftarrow \text{ه}''(س) \text{ يُوجد موجبة عند } س = 0$$

الاقتران مقعر للأسفل في الفترة $(-\infty, \infty)$

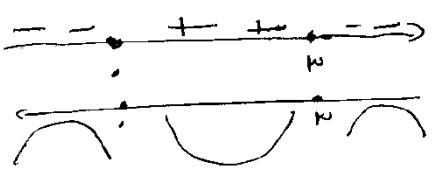


تدريب (٣) :

$$\text{ه}(س) = س^4 - 6س^3 \Leftarrow \text{ه}'(س) = 4س^3 - 18س^2 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 12س^2 - 36س$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow (12س)(س-3) = 0 \Leftarrow س = 0 ، س = 3$$

للاقتران نقطتي انعطاف هما
$(0, 0)$ ، $(3, -81)$



تدريب (٤) :

$$\text{ه}(س) = س^3 - 12س + 3 \Leftarrow \text{ه}'(س) = 3س^2 - 12 \Leftarrow \text{ه}''(س) = 6س$$

$$\text{ه}''(س) = 0 \Leftarrow س = 0 \Leftarrow \text{ه}'(0) = -12 \quad \text{ه}''(2) = 12 > 0$$

$\therefore$ عند $س = 2$ يوجد قيمة صغرى محلية

$\therefore$ عند $س = -2$ يوجد قيمة عظمى محلية

تمارين ومسائل

أ) $ق(س) = س + \frac{4}{س}$ ⟸ $ق'(س) = 1 - \frac{4}{س^2}$ ⟸ $ق''(س) = \frac{8}{س^3} = \frac{8}{س^3}$

$ق''(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ س ⟸ $ق''(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$

مقعر لأسفل في $(0, \infty)$ ، مقعر لأعلى في $(-\infty, 0)$

ب) $ق(س) = \sqrt{16 - س^2}$ ⟸ $ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{16-س^2}}$

$ق''(س) = \frac{-\sqrt{16-س^2} - \frac{س^2}{\sqrt{16-س^2}}}{16-س^2} = \frac{-16 + س^2 - س^2}{(16-س^2)^{\frac{3}{2}}}$

$ق''(س) = \frac{-16}{(16-س^2)^{\frac{3}{2}}}$ ⟸ $ق''(س) = 0$

مقعر لأسفل في $[-4, 4]$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} 1 - س^2 & , -1 \le س < 0 \\ س^2 + 1 & , 0 \le س < 2 \\ 5 - س & , 2 \le س \le 5 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} -2س & , -1 < س < 0 \\ 2س & , 0 < س < 2 \\ -1 & , 2 < س < 5 \end{cases}$ ⟸ $ق''(س) = \begin{cases} -2 & , -1 < س < 0 \\ 2 & , 0 < س < 2 \\ 0 & , 2 < س < 5 \end{cases}$

مقعر لأعلى في $(-1, 2)$

د) $ق(س) = \left(\frac{س-1}{س}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{س}\right)^2$ ⟸ $ق'(س) = 2\left(1 - \frac{1}{س}\right)\left(\frac{1}{س^2}\right) = 2\left(\frac{1}{س^2} - \frac{1}{س^3}\right)$

$ق''(س) = 2\left(\frac{-2س^2}{س^4} + \frac{3س^2}{س^6}\right) = 2\left(\frac{-2س + 3}{س^4}\right)$ ⟸ $ق''(س) = 0$

$س = \frac{3}{2}$ ، $س \neq 0$

مقعر لأعلى في $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

مقعر لأسفل في $\left(0, \frac{3}{2}\right]$

هـ) $ق(س) = جتاس - جاس + 1$

$ق'(س) = -جاس - جتاس$ ⟸ $ق''(س) = -جتاس + جاس = 0$ ⟸ $جاس = جتاس$

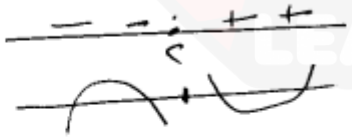
$س = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4} \notin (0, 2\pi)$

مقعر لأعلى في $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

مقعر لأسفل في $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

ج) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2 \Rightarrow م'(س) = 3س^2 - 12س + 9 \Rightarrow م''(س) = 6س - 12$

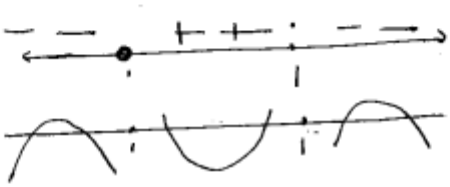
$م''(س) = 0 \Leftarrow س = 2$



للاقتران نقطة انقطاف عند $س = 2$ وهي $(2، 4)$

د) $م(س) = س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow م'(س) = \frac{5}{3} س^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}} \Leftarrow م''(س) = \frac{10}{9} س^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9} س^{-\frac{5}{3}}$

$م''(س) = \frac{10}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^5}} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{\sqrt[3]{س^5}} \Leftarrow م''(س) = 0 \Leftarrow س = 1$



نقطتا انقطاف: عند $س = 0$، $س = 1$

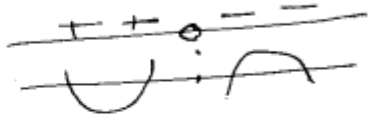
وهي: $(0، 0)$، $(1، \frac{1}{2})$

نختبر الاقتران $م(س)$:

مقعر للأعلى في $[0، 1]$

مقعر للأسفل في $(-\infty، 0] \cup [1، \infty)$

هـ) $م(س) = س^{\frac{3}{5}} \Leftarrow م'(س) = \frac{3}{5} س^{-\frac{2}{5}} \Leftarrow م''(س) = -\frac{6}{25} س^{-\frac{7}{5}} = -\frac{6}{25} \times \frac{1}{\sqrt[5]{س^7}}$



نختبر $م''$ عند $س = 0$ فقط

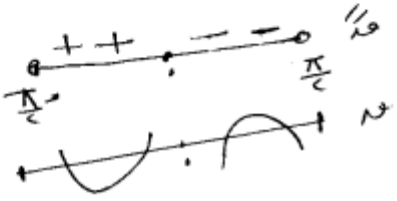
مقعر للأعلى في $(-\infty، 0]$

مقعر للأسفل في $[0، \infty)$

نقطة انقطاف عند $س = 0$ هي $(0، 0)$

و) $م(س) = س - ظا س \Rightarrow م'(س) = 1 - قا^2 س \Leftarrow م''(س) = -2 قا^2 س ظا س = -2 \frac{جا س}{جتا^3 س}$

للاقتران نقطة انقطاف عند $س = 0$ وهي $(0، 0)$



ز) $م(س) = جا س - جتا س \Rightarrow م'(س) = جتا س + جا س \Leftarrow م''(س) = -جا س + جتا س$

$م''(س) = 0 \Leftarrow جا س = جتا س \Leftarrow ظا س = 1$

$س = \frac{\pi}{4}، \frac{5\pi}{4}$

$م''(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} < 0$

$\therefore$ للاقتران قيمة عظمى محلية عند $س = \frac{3\pi}{4}$

$م''(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} > 0$

$\therefore$ للاقتران قيمة صغرى محلية عند $س = \frac{7\pi}{4}$

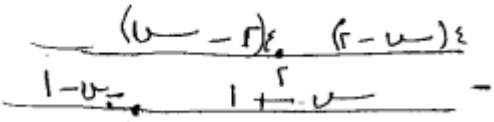
ب) $م(س) = س^4$ ⇐ $م'(س) = 4س^3$ ⇐ $م'(س) = 12س^2$.

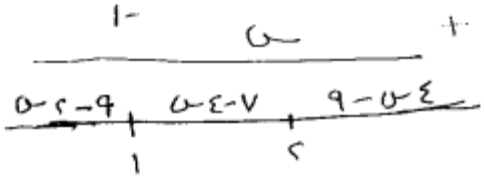
$م'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $م'(1) = -$ تقبل وترجع إلى اختبار المشتقة الأولى

للاقتران ليس طرفي محلية عند $س = 0$

ج) $م(س) = |س - 1| + |س + 1| + س$

$$م(س) = \begin{cases} 3س - 9 & س \le -1 \\ -س - 7 & -1 < س \le 2 \\ 3س + 9 & س > 2 \end{cases}$$

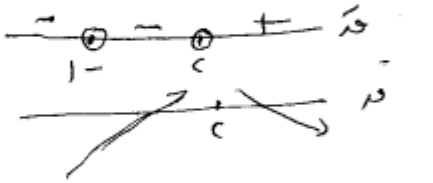




$$م'(س) = \begin{cases} 3 & س < -1 \\ -1 & -1 < س < 2 \\ 3 & س > 2 \end{cases}$$

غير موجود عند $س = -1 ، 2$

$$م'(س) = 0 \Leftarrow \begin{cases} 0 & س < -1 \\ 0 & -1 < س < 2 \\ 0 & س > 2 \end{cases}$$



∴ يتفشل اختبار المشتقة الأولى ويرجع إلى اختبار المشتقة الثانية

∴ للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = 2$

د) $م(س) = س + \frac{16}{س^2} ، س \neq 0 \Leftarrow م'(س) = 1 - \frac{32}{س^3} \Leftarrow م'(س) = 0$

$$\frac{س^3 - 32}{س^2} = 0 \Leftarrow س = 4$$

$م''(س) = \frac{64}{س^3} \Leftarrow م''(4) = \frac{64}{64} = 1 > 0$

∴ قيمة صغرى محلية عند $س = 4$

هـ) $م(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$ ، $م'(س) = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$ ، $م''(س) = 6أ س + 2ب$

$م(1) = أ + ب + جـ + د = 5$ ---①

$م(2) = 8أ + 4ب + 2جـ + د = 10$ ---②

$م'(2) = 12أ + 4ب + جـ = 3$ ---③

$م''(2) = 12أ + 2ب = 0$ ---④

$$\frac{12أ + 4ب + جـ = 3}{-8أ - 4ب - 2جـ = -10} + \Rightarrow 4أ + جـ = -7 \Rightarrow جـ = -7 - 4أ$$

$$\frac{8أ + 4ب + 2جـ = 10}{أ + ب + جـ + د = 5} \times -2 \Rightarrow -8أ - 4ب - 2جـ = -10$$

$$\frac{12أ + 2ب = 0}{ب = -6أ} \Rightarrow ب = -6(-1) \Rightarrow \boxed{ب = 6}$$

$\boxed{أ = -1}$

$\boxed{ب = 6}$

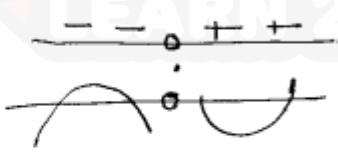
$\boxed{جـ = -10}$

$\boxed{د = 15}$

ومنه $م(س) = -س^3 + 6س^2 - 10س + 15$

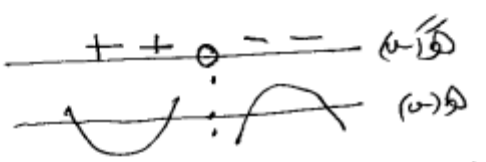
AWAEL LEARN 2 BE

٥) $م(س) = \frac{1}{س}$ ⇐ $م'(س) = \frac{-1}{س^2}$ ، $م''(س) = \frac{2}{س^3}$



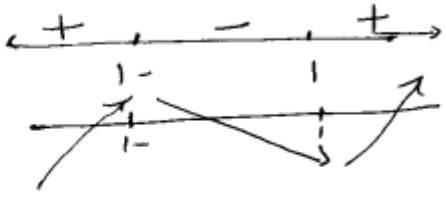
م متزايدة في $(-\infty, 0)$ ⇐ مقعر للأعلى في $(-\infty, 0)$
م متناقصة في $(0, \infty)$ ⇐ مقعر للأسفل في $(0, \infty)$
لا يوجد نقطة انعطاف لأن $م(س)$ غير معرفة عند $س = 0$
وتحت متصل عند $س = 0$

$ق(س) = س^{\frac{1}{3}}$ ⇐ $ق'(س) = \frac{1}{3} س^{-\frac{2}{3}}$ ، $ق''(س) = -\frac{2}{9} س^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9 س^5 \sqrt[3]{س^2}}$



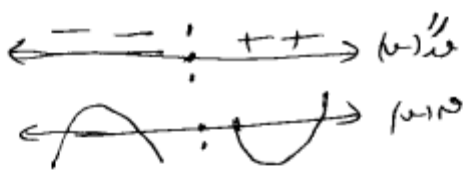
متزايدة في $(-\infty, 0]$ ⇐ مقعر للأسفل في $(-\infty, 0]$
متناقصة في $[0, \infty)$ ⇐ مقعر للأسفل في $[0, \infty)$
للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$ ومتصل عند $س = 0$

٦) أ) $م(س)$ متزايدة في $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$م(س)$ متناقصة في $[-1, 1]$



ب) $م'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm 1$
ج) للاقتران $م(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = -1$
قيمة صغرى محلية عند $س = 1$

د) $م'(-1) = 0$ ، $م''(-1) < 0 \Leftarrow م(-1)$ قيمة عظمى محلية
$م'(1) = 0$ ، $م''(1) > 0 \Leftarrow م(1)$ = قيمة صغرى محلية

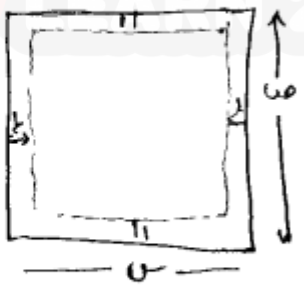


هـ) مقعر للأعلى في $[1, \infty)$ ⇐ متزايدة $م(س)$
مقعر للأسفل في $(-\infty, 1]$ ⇐ متناقصة

و) للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$ وهي $(0, م(0))$

تطبيقات القيم العظمى

تدريب (٢):



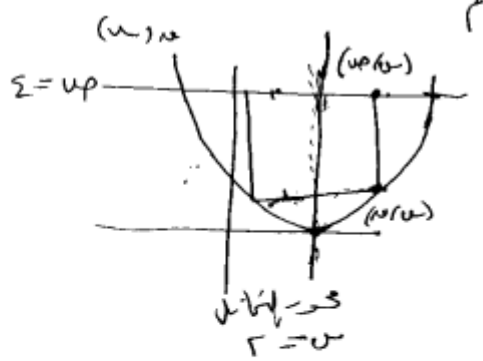
$م = س ص = س(٣٠ - \frac{٣}{٤}س) = ٣٠س - \frac{٣}{٤}س^٢$

$م' = ٣٠ - \frac{٣}{٢}س = ٠ \Leftarrow س = ٢٠$

$م'' = -\frac{٣}{٢} < ٠$ ∴ عظمى

∴ أكبر مساحة = $٢٠ \times ١٥ = ٣٠٠$ م^٢

تدريب (٣):



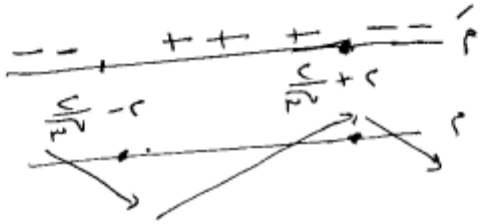
$م = \frac{١}{٣}(س - ٢)(س - ٤)(٢س - ٧)$

$م = \frac{١}{٣}(س^٣ - ٦س^٢ + ١١س - ٨)$

$م' = \frac{١}{٣}(٣س^٢ - ١٢س + ١١) = ٠ \Leftarrow س = \frac{٦ \pm \sqrt{٣٣}}{٣}$

∴ أكبر مساحة للمستطيل عندما

$س = (٢ + \frac{\sqrt{٣٣}}{٣})$ م



تدريب (٤):

$م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times جا\theta = ٣٢ جا\theta$

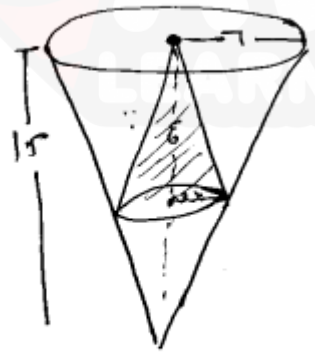
$م' = ٣٢ جتا\theta = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$

$م'' = -٣٢ جا\theta$

$م''|_{\theta = \frac{\pi}{٢}} = -٣٢ < ٠$ ⇐ أكبر مساحة للمثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{٢}$

أي عندما المثلث قائم الزاوية

تدريب (5) :



من التشابه

$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{١٢ - ع}{١٢}$

$٢\text{نق} = ١٢ - ع$

$\boxed{ع = ١٢ - ٢\text{نق}}$

$ح = \frac{\pi}{٣}\text{نق}^{٢}ع$

$ح = \frac{\pi}{٣}\text{نق}^{٢}(١٢ - ٢\text{نق})$

$ح = \frac{٢\pi}{٣}(٦\text{نق}^{٢} - \text{نق}^{٣})$

$ح' = \frac{٢\pi}{٣}(١٢\text{نق} - ٣\text{نق}^{٢}) \Rightarrow ح' = ٠ \Leftarrow (٣\text{نق})(٤ - \text{نق}) = ٠ \Rightarrow \text{نق} = ٠ \text{ ، } \text{نق} = ٤$

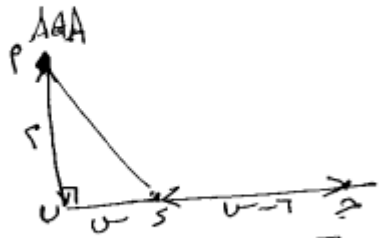
$ح'' = \frac{٢\pi}{٣}(١٢ - ٦\text{نق}) = ٤\pi(٢ - \text{نق})$

$ح''(٠) = ٨\pi > ٠$ ∴ قيمة صغرى

$ح''(٤) = -٨\pi < ٠$ ، نظام تغير ← عظمى ، $\text{نق} = ٤$ ، $ع = ٤$

∴ أكبر حجم $= ح(٤) = \frac{٤\pi}{٣}(٩٦ - ٦٤) = \frac{٣٢}{٣}\pi$ م^{٣}

تدريب (6)



$\overline{ب جـ} = \sqrt{٤ + س^{٢}}$ | $ت = ٣٥٠٠٠ + ٥٠٠٠ \sqrt{٤ + س^{٢}}$

$ت = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{٤ + س^{٢}} + ٣(٦ - س))$

$ت(س) = ١٠٠٠٠ (٥\sqrt{٤ + س^{٢}} + ٣(٦ - س))$

$ت' = ١٠٠٠٠ (\frac{٥ \times ٢س}{٢\sqrt{٤ + س^{٢}}} - ٣)$

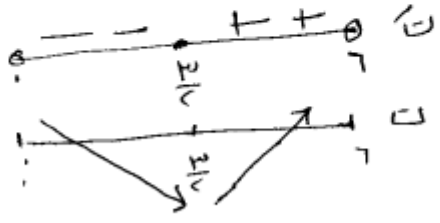
$ت'(س) = ٠ \Leftarrow \frac{٥س}{\sqrt{٤ + س^{٢}}} = ٣ \Leftarrow ٣\sqrt{٤ + س^{٢}} = ٥س$ ؛ $س > ٠$

$٩(٤ + س^{٢}) = ٢٥س^{٢}$

$١٦س^{٢} = ٣٦ \Rightarrow س^{٢} = \frac{٣٦}{١٦} = \frac{٩}{٤} \Rightarrow س = \frac{٣}{٢}$

∴ أقل تكلفة ممكنة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

وأكبر تكلفة ممكنة عندما $س = ٦$



تمارین و مسائل

تمرین (۱) صفحه ۵۱۲

$$ع = س + \frac{۱}{س} = \frac{س^۲ + ۱}{س} \; ; \; س \in [\frac{۱}{۲} ، ۳]$$

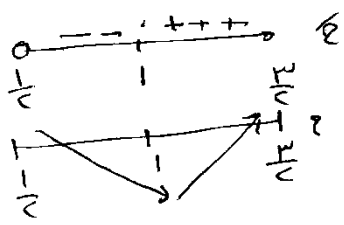
$$ع' = ۱ - \frac{۱}{س^۲} \Rightarrow ع' = ۰ \Leftarrow ۱ - \frac{۱}{س^۲} = ۰ \Leftarrow س = ۱ \; ، \; -۱ \notin$$

$$ع(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

$$ع(۱) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$ع(۳) = \frac{۳}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{۱۳}{۶}$$

$$\text{بنابراین کمترین مقدار تابع برابر } \frac{۱}{۲} \text{ و بیشترین مقدار آن برابر } \frac{۱۳}{۶} \text{ است.}$$



ب) $ع = ۸\pi ر + ۲\pi ر^۲$

$$۸\pi = ۸\pi ر + ۲\pi ر^۲ \Leftarrow ۸\pi = ۸\pi ر + ۲\pi ر^۲ \Leftarrow ۸۰۰\pi = ۸\pi ر + ۲\pi ر^۲$$

$$ر = ۱۰ \text{ سم} \Leftarrow ر = ۱۰۰ \text{ سم}^۲$$

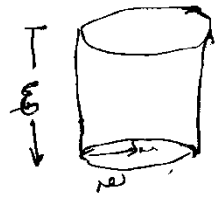
$$ح = \frac{۱}{۳}\pi ر^۲ ه = \frac{۱}{۳}\pi ر^۲ (۸ - ۲ر) = \frac{۸}{۳}\pi ر^۲ - \frac{۲}{۳}\pi ر^۳$$

$$ح' = ۰ \Leftarrow ۸\pi ر - ۲\pi ر^۲ = ۰ \Leftarrow ۴\pi ر(۲ - ر) = ۰ \Leftarrow ر = ۲ \; ، \; ر = ۰ \notin$$

$$\text{اول تکلیف ایجاب می‌کند که } ر = ۲ \text{ سانتی‌متر باشد.}$$

$$\text{بنابراین } ه = ۸ - ۲ر = ۴ \text{ سانتی‌متر}$$

$$\text{و حجم استوانه} = \pi ر^۲ ه = ۴\pi \times ۴ = ۱۶\pi \approx ۵۰.۲۴ \text{ سانتی‌متر مکعب}$$

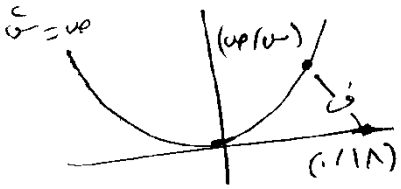


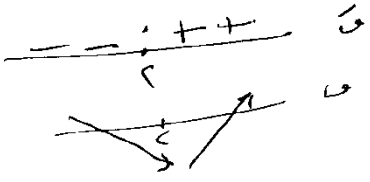
ج) $ف = \sqrt{(س - ۱۸)^۲ + ص^۲} = \sqrt{(س - ۱۸)^۲ + ۴س}$

$$ف' = \frac{۲(س - ۱۸) + ۴}{۲\sqrt{(س - ۱۸)^۲ + ۴س}} = \frac{س - ۱۴}{\sqrt{س^۲ - ۳۶س + ۳۲۴}}$$

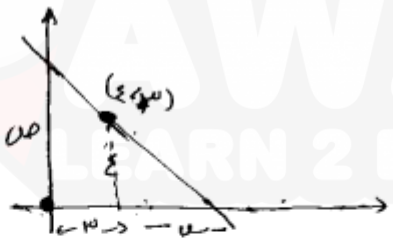
$$ف' = ۰ \Leftarrow س - ۱۴ = ۰ \Leftarrow س = ۱۴$$

س	۰		۱۴		۳۶
ف'		−	۰	+	
ف		↘	مینیمم	↗	





$$\text{فاصله مینیمم} = \sqrt{۵۶ + ۱۶} = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$$



متشابهتان بـ
$\frac{ص}{ص+3} = \frac{3}{ص هـ}$
$ص هـ = \frac{3(ص+3)}{ص}$

ج) $م = \frac{1}{2} ص هـ (ص+3)$
$م = \frac{ص}{2} \times \frac{3(ص+3)}{ص} (ص+3)$
$م = \frac{ص^2+6ص+9}{2}$
$م = \frac{1}{2}ص + 3 + \frac{9}{2ص}$
$م' = 1 - \frac{9}{2ص^2} \Leftarrow م' = 0 \Leftarrow ص^2 = 9 \Leftarrow ص = 3$ (مرفوض -3)
$م'' = \frac{18}{ص^3} \Leftarrow م''(3) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} > 0$
∴ المقدار أصغر ما يمكن عندما $ص = 3$ ، $هـ = 6$ ← المستقيم يمر بالنقطة $(6,6)$
والنقطة $(3,3)$

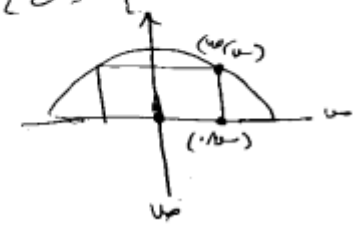
ميل المستقيم $= \frac{6-3}{6-0} = \frac{3}{6}$
معادلة المستقيم $هـ - 0 = \frac{3}{6}(ص - 0) \Leftarrow هـ = \frac{3}{6}ص + 6$

د) $م = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{3}{6} \times 6 \times 6 \times$ جاه جاه $\Leftarrow$ **م = $\frac{15}{16}$ جاه جاه**

$\frac{3}{6} = \frac{ص}{6} \Leftarrow$ جاه $= \frac{ص}{6}$
$ص = 3$ جاه $\Leftarrow$ جتا $= \frac{6}{6}$
$\frac{3}{6} = \frac{هـ}{6} \Leftarrow$ جا $= \frac{هـ}{6}$
$هـ = 3$ جا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{6}{6}$
$\frac{3}{6} = \frac{ص}{6} \Leftarrow$ جاه $= \frac{ص}{6}$
$ص = 3$ جاه $\Leftarrow$ جتا $= \frac{6}{6}$

$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

هـ) $م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

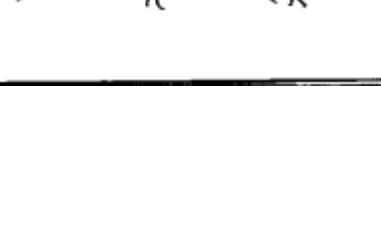


$ص = 6$ جا $\Leftarrow$ جا $= \frac{ص}{6}$
$هـ = 6$ جتا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{هـ}{6}$
$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

و) $م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

$ص = 6$ جا $\Leftarrow$ جا $= \frac{ص}{6}$
$هـ = 6$ جتا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{هـ}{6}$
$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

ز) $م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا



$ص = 6$ جا $\Leftarrow$ جا $= \frac{ص}{6}$
$هـ = 6$ جتا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{هـ}{6}$
$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

ح) $م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

$ص = 6$ جا $\Leftarrow$ جا $= \frac{ص}{6}$
$هـ = 6$ جتا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{هـ}{6}$
$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

ط) $م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

$ص = 6$ جا $\Leftarrow$ جا $= \frac{ص}{6}$
$هـ = 6$ جتا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{هـ}{6}$
$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

ي) $م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

$ص = 6$ جا $\Leftarrow$ جا $= \frac{ص}{6}$
$هـ = 6$ جتا $\Leftarrow$ جتا $= \frac{هـ}{6}$
$م = 6 \times 6 \times$ جا $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا $\times$ جاه $\times$ جتا
$م = 36$ جا جتا جاه جتا جاه جتا

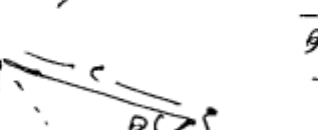
٨) الربح = البيع − التكلفة ⇐ ر(س) = ٢٠ س − ٠٫١ س٢ − ١٥٠ − ٢٠ س

ر(س) = ١٥٠ − ٢٠ س + ٠٫١ س٢ ⇐ ر′(س) = ٢٠ − ٠٫٢ س ⇐ ر′(س) = ٠

س = ١٥٠ / ٠٫٢ = ١٥٠٠ / ٢ = ٧٥٠

ر″ = −٠٫٢ < ٠

∴ الربح يكون أكبر ما يمكن عندما س = ٧٥٠ قطعة



٩) م = ½ × ٤ × ١ × جتاهـ + ½ × ١ × ١ × جتاهـ

م = جتاهـ + ٢/٤ جتاهـ

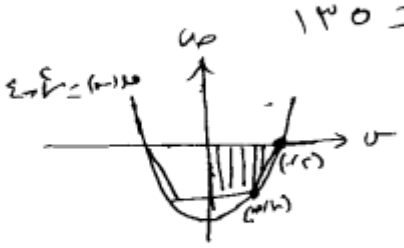
م = جتاهـ − جتاهـ + ٥/٤ ، ٠ < هـ < π/٢

م′(هـ) = جتاهـ + جاهـ

م′(هـ) = ٠ ⇐ جتاهـ = −جاهـ ⇐ هـ = ٣π/٤

م″(هـ) = −جاهـ + جتاهـ ⇐ م″(٣π/٤) = −١/√٢ + −١/√٢ = −√٢ < ٠

∴ الكمية المحققة للتكلفة عندما هـ = ٣π/٤ = ١٣٥°



١٠) م = ½ (٤ + س)(٤ − س) = (٢ + س)(٤ − س)

م(س) = (٢ + س)(٤ − س) ∴ ٠ ≤ س ≤ ٤

م′(س) = (٢ + س)(−١) + (٤ − س)(١)

م′(س) = −٢ س + ٢

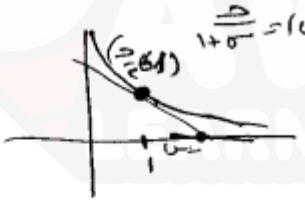
م″(س) = −٢ < ٠

م′(س) = ٠ ⇐ −٢ س + ٢ = ٠ ⇐ س = ٢ / ٢ = ١

∴ الكمية المحققة لشبه المنحرف عندما س = ١

وتكون مربعة.

أسئلة الوحدة



١) ميل المماس = $\left|\text{ق}'(س)\right|_{س=١} = \left|\frac{-ج}{(١+س)^{٢}}\right|_{س=١} = \frac{-ج}{٤}$

معادلة المماس هي: $ص - \frac{ج}{٤} = -\frac{ج}{٤}(س - ١) \Leftarrow ص = -\frac{ج}{٤}س + \frac{٣ج}{٤}$

المماس يقطع محور السينات عندما ص = ٠ $\Leftarrow$ س = ٣

المماس يقطع محور الصادات عندما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = $\frac{٣ج}{٤}$

$\Delta = \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣ج}{٤} = \frac{٩}{٤} \Leftarrow \frac{٩ج}{٨} = \frac{٩}{٤} \Leftarrow ج = \frac{٨}{٤} \times \frac{٩}{٨} = ٢$

٢) $ف(ن) = \frac{ن}{٢} - جاس ن \Leftarrow ف'(ن) = \frac{١}{٢} - ٢ حتا ن$

$ف'(ن) = \frac{١}{٢} - حاس ن \Leftarrow ف'(ن) = ٠ \Leftarrow حاس ن = \frac{١}{٢} \Leftarrow ٢ن = ٣٠° = \frac{\pi}{٦} \Leftarrow ن = \frac{\pi}{١٢}$

$ن = ١٥٠° = \frac{٥\pi}{٦} \Leftarrow ن = \frac{٥\pi}{١٢}$

$ف''(ن) = -٢ حتا ن$

$ف''(\frac{\pi}{١٢}) = -٢ حتا \frac{\pi}{٦} = -٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

$ف''(\frac{٥\pi}{١٢}) = -٢ حتا \frac{٥\pi}{٦} = -٢ \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \sqrt{٣}$ م/ث^{٢}

٣) $\text{ق}(س) = \sqrt{س^{٣} - ٧س}$

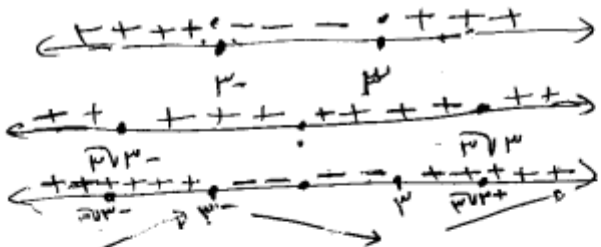
$\text{ق}'(س) = \frac{٣س^{٢} - ٧}{٢\sqrt{س^{٣} - ٧س}} \Leftarrow$ ق$'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = ٠$ ، $س = \pm\sqrt{٧}$

ق$'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٧ = ٠ \Leftarrow س = \pm\sqrt{\frac{٧}{٣}}$

ق$'(س) = ٠ \Leftarrow س = \pm\sqrt{٧}$

٥) فترات التزايد هي:
$(-\infty ، -\sqrt{٧}] ، [\sqrt{٧} ، \infty)$

فترة التناقص هي:
$[-\sqrt{٧} ، \sqrt{٧}]$



٦) ق$'(س) = ٠$ عند $س = -٣$ ولا توجد قيمة عظمى محلية

ق$'(س) = ٠$ عند $س = ٣$ ولا توجد قيمة صغرى محلية

٧) $ق(س) = ا س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ٤$ ، $ق'(س) = ٣ا س^{٢} + ٢ب س + جـ$ ، $ق''(س) = ٦ا س + ٢ب$

$ق(٠) = ٥ \Leftarrow \boxed{د = ٥}$

$ق'(١) = -٩ \Leftarrow ٣ا + ٢ب + جـ = -٩$

$ق'(٢) = ٠ \Leftarrow ١٢ا + ٤ب + جـ = ٠$

$ق(١) = ا + ب + جـ + ٥ = ٠$ إذن (١ ، ق(١)) نقطة تماس $\Leftarrow$ (١ ، ٠) نقطة تماس

ومنه ا = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٠ $\Leftarrow ق(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٥$

ق(س) = س³ − ٣س + ٥

ق'(س) = ٣س² − ٣ = ٣(س² − ١) = ٣(س − ١)(س + ١)

ق'(س) = ٠ ⇐ س = ١ أو س = −١

س	−∞	−١	١	∞+
ق'(س)	+	٠	−	+
ق(س)	↗	٧	↘	٣

ق متزايدة في]−∞، −١] ∪ [١، ∞+[

ق متناقصة في [−١، ١]

ق(−١) = ٧ قيمة عظمى محلية

ق(١) = ٣ قيمة صغرى محلية

ق(س) = ٠ ⇐ س = ٢ ∉]١، ٣[

∴ ق(س) ≠ ٠ لكل س ∈]١، ٣[

ق(١) = ٣ > ٠ ، ق(٣) = ١ > ٠

∴ ق(س) > ٠ لكل س ∈]١، ٣[

∴ ق(س) لا تغير إشارتها في]١، ٣[

∴ ق ليس لها قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية في]١، ٣[

ق(س) = س³ − ٣س + ٥

ق'(س) = ٣س² − ٣ = ٣(س − ١)(س + ١)

ق'(س) = ٠ ⇐ س = ١ ∈]٠، ٢[أو س = −١ ∉]٠، ٢[

س	٠	١	٢
ق'(س)	−	٠	+
ق(س)	٥ ↘	٣	↗ ٧

ق متناقصة في]٠، ١]

ق متزايدة في [١، ٢[

ق(١) = ٣ قيمة صغرى محلية

ق(٠) = ٥ ⇐ ق(٠) ≠ ٣

ق(٢) = ٧ ⇐ ق(٢) ≠ ٣

∴ ق(س) = ٣ ⇐ س = ١

ق(س) = ٣س⁴ − ٤س³ − ٦س² + ٢٤س + ٣

ق'(س) = ١٢س³ − ١٢س² − ١٢س + ٢٤

= ١٢(س³ − س² − س + ٢)

= ١٢(س + ١)(س − ٢)²

ق'(س) = ٠ ⇐ س = −١ أو س = ٢

س	−∞	−١	٢	∞+
ق'(س)	−	٠	+	+
ق(س)	↘	٠	↗	↗

ق متناقصة في]−∞، −١]

ق متزايدة في [−١، ∞+[

ق(−١) = −٢٤ قيمة صغرى محلية

ق(٢) = ٠ ⇐ ق(٢) ≠ −٢٤

∴ ق(س) = −٢٤ ⇐ س = −١

ق(س) = س³ − ٣س + ٥

ق'(س) = ٣س² − ٣ = ٣(س − ١)(س + ١)

ق'(س) = ٠ ⇐ س = ١ ∈]٠، ٢[أو س = −١ ∉]٠، ٢[

س	٠	١	٢
ق'(س)	−	٠	+
ق(س)	٥ ↘	٣	↗ ٧

ق متناقصة في]٠، ١]

ق متزايدة في [١، ٢[

ق(١) = ٣ قيمة صغرى محلية

ق(٠) = ٥ ⇐ ق(٠) ≠ ٣

ق(٢) = ٧ ⇐ ق(٢) ≠ ٣

∴ ق(س) = ٣ ⇐ س = ١

ق(س) = س⁴ − ٤س³ + ٤س² + ٥

ق'(س) = ٤س³ − ١٢س² + ٨س

= ٤س(س² − ٣س + ٢)

= ٤س(س − ١)(س − ٢)

ق'(س) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س = ١ أو س = ٢

س	−∞	٠	١	٢	∞+
ق'(س)	−	٠	+	٠	−
ق(س)	↘	٥	↗	٦	↘

ق متناقصة في]−∞، ٠] ∪ [١، ٢]

ق متزايدة في [٠، ١] ∪ [٢، ∞+[

ق(٠) = ٥ قيمة صغرى محلية

ق(١) = ٦ قيمة عظمى محلية

ق(٢) = ٥ قيمة صغرى محلية

ق(س) = ٥ ⇐ س = ٠ أو س = ٢

ق(س) = ٦ ⇐ س = ١

ق(س) = ٤ ⇐ س = ٣

ق(س) = ٣ ⇐ س = ٤

ق(س) = ٢ ⇐ س = ٥

ق(س) = ١ ⇐ س = ٦

ق(س) = ٠ ⇐ س = ٧

ق(س) = س³ − ٣س + ٥

ق'(س) = ٣س² − ٣ = ٣(س − ١)(س + ١)

ق'(س) = ٠ ⇐ س = ١ ∈]٠، ٢[أو س = −١ ∉]٠، ٢[

س	٠	١	٢
ق'(س)	−	٠	+
ق(س)	٥ ↘	٣	↗ ٧

ق متناقصة في]٠، ١]

ق متزايدة في [١، ٢[

ق(١) = ٣ قيمة صغرى محلية

ق(٠) = ٥ ⇐ ق(٠) ≠ ٣

ق(٢) = ٧ ⇐ ق(٢) ≠ ٣

∴ ق(س) = ٣ ⇐ س = ١

ق(س) = س⁴ − ٤س³ + ٤س² + ٥

ق'(س) = ٤س³ − ١٢س² + ٨س

= ٤س(س² − ٣س + ٢)

= ٤س(س − ١)(س − ٢)

ق'(س) = ٠ ⇐ س = ٠ أو س = ١ أو س = ٢

س	−∞	٠	١	٢	∞+
ق'(س)	−	٠	+	٠	−
ق(س)	↘	٥	↗	٦	↘

ق متناقصة في]−∞، ٠] ∪ [١، ٢]

ق متزايدة في [٠، ١] ∪ [٢، ∞+[

ق(٠) = ٥ قيمة صغرى محلية

ق(١) = ٦ قيمة عظمى محلية

ق(٢) = ٥ قيمة صغرى محلية

ق(س) = ٥ ⇐ س = ٠ أو س = ٢

ق(س) = ٦ ⇐ س = ١

ق(س) = ٤ ⇐ س = ٣

ق(س) = ٣ ⇐ س = ٤

ق(س) = ٢ ⇐ س = ٥

ق(س) = ١ ⇐ س = ٦

ق(س) = ٠ ⇐ س = ٧

حل

رقم الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
الرمز	جـ	د	ﻫ	د	ﻫ	د	د	جـ	ب	د	جـ