إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين وتدريبات

كتاب الرياضيات

للصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الثاني

إدارة المناهج والكتب المدرسية
إجابات وحلول التدريبات والتمارين
الصف : الثاني الثانوي العلمي　　　الكتاب : الرياضيات　　　الفصل : الثاني
الوحدة : الرابعة / تطبيقات التكامل

الفصل الأول : التكامل

أولًا : معكوس المشتقة

تدريب (١):-

ق(س) متصل على ح لأنه طرح اقترانين متصلين

$م'(س) = ٤س^{٣} - جتاس$

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

تدريب (٢):-

م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

∴ $م'(س) = ق(س)$

هـ(س) معكوس لمشتقة ق(س)

∴ $هـ'(س) = ق(س)$

$ل'(س) = ٣ م'(س) - ٥ هـ'(س)$

$ل'(س) = ٣ ق(س) - ٥ ق(س)$

$= -٢ ق(س)$

تدريب (٣):

$\int ق(س) جا\frac{٣\pi}{٢} دس = ١ + س^{٣}$ ، جد ق(س)

$ق(س) \times جا\frac{٣\pi}{٢} = ٣س^{٢}$

$ق(س) \times -١ = ٣س^{٢}$

∴ $ق(س) = -٣س^{٢}$

تدريب (٤)

$ق'(س) = ٢جاس جتاس + أ جاس$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = صفر \Leftarrow ١ + أ جا\frac{\pi}{٤} = صفر$

$\boxed{أ = -\sqrt{٢}}$

تمارين ومسائل صفحة ٢٢٧ :

١) ق(س) متصل على ح − {−١} لأنه اقتران نسبي.

$م'(س) = \frac{(س+١) - س}{(س+١)^{٢}}$

$= \frac{١}{(س+١)^{٢}} = ق(س)$

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

٢) ق(س) متصل لأنه اقتران مثلثي

$م'(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س = ق(س)$

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

٣) م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

$م'(س) = ق(س)$

$م'(س) = ٣س^{٢} + ١٠س - ٣ = ق(س)$

$ق(-٢) = ٣ \times ٤ + ١٠ \times -٢ - ٣$

$= -١١$

٤) م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

$م'(س) = ق(س)$

$ق(س) = ٨س^{٣} + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٣}}$

$ق(١) = ٨ + \frac{\cancel{٢}}{٢ \times \cancel{٢}} = ٨,٥$

٥) ق(س) = ٣$س^{٢}$

م(س) = $س^{٣}$ + جـ

م(٢) = ٥ ⇐ ٥ = ٨ + جـ ⇐ جـ = -٣

∴ م(س) = $س^{٣}$ - ٣

٦) بما أن $م_{١}$(س) ، $م_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق.

∴ $م_{١}$ - $م_{٢}$ = جـ

٣$س^{٢}$ - ٢س + ٥ - $م_{٢}$(س) = جـ

$م_{٢}$(س) = ٣$س^{٢}$ - ٢س + ٥ - جـ

ولكن $م_{٢}$(٢) = ٤ ⇐ ١٢ - ٤ + ٥ - جـ = ٤

$\boxed{جـ = ٩}$

$م_{٢}$(س) = ٣$س^{٢}$ - ٢س - ٤

٧) ص = ∫ $\sqrt[٥]{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$ دس ، $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = -٢}$ = ؟

نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٥]{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$

عندما س = -٢ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٢}$

= $\sqrt[٥]{٣٢}$ = ٢

٨) ∫ ق(س) دس = $س^{٣}$ - $س^{٢}$ + ٢س + ١ ، قَ(-٣) = ؟

نشتق الطرفين

ق(س) = ٣$س^{٢}$ - ٢س + ٢

قَ(س) = ٦س - ٢

قَ(-٣) = -١٨ - ٢ = -٢٠

٩) ∫ ق(س) دس = جاس - جتاس + ٣

اثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) - قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

ق(س) = جتاس + جاس

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ١

قَ(س) = - جاس + جتاس

قَ($\frac{\pi}{٢}$) = -١

ق($\frac{\pi}{٢}$) - قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ١ - -١ = ٢

١٠) أ) ق(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

م(س) = $\frac{١}{س}$ + جـ

ب) ق(س) = قاس جتاس

ق(س) = ١

م(س) = س + جـ

جـ) ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

م(س) = $\sqrt{س}$ + جـ

د) ق(س) = ٥ + ٥ $ظا^{٢}$س = ٥(١ + $ظا^{٢}$س)

ق(س) = ٥ $قا^{٢}$س

∴ م(س) = ٥ ظاس + جـ

١١) م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق

مَ(س) = ق(س) = ظتاس + ١

مً(س) = - $قتا^{٢}$س

مً($\frac{\pi}{٤}$) = - $قتا^{٢}$ $\frac{\pi}{٤}$

= -٢

ثانياً: التكامل غير المحدود

تدريب (١)

١) $\int د س = س + جـ$

٢) $\int -\frac{١}{٤} د ل = -\frac{١}{٤} ل + جـ$

تدريب (٢):

١) $\int ١٠ د س = ١٠ س + جـ$

٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٧]{س^{٢}}} د س = \int س^{-\frac{٢}{٧}} د س$

$= \frac{٧}{٥} س^{\frac{٥}{٧}} + جـ$

تدريب (٣):

١) $\int \frac{س^{٢} - ٩ س}{\sqrt{س} - ٣} د س$

$= \int \frac{س (س - ٩)}{\sqrt{س} - ٣} د س = \int \frac{س (\cancel{\sqrt{س} - ٣}) (\sqrt{س} + ٣)}{\cancel{(\sqrt{س} - ٣)}} د س$

$= \int س^{\frac{٣}{٢}} + ٣ س \; د س$

$\frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣ س^{٢}}{٢} + جـ = \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + جـ$

٢) $\int \frac{(٢ - س)^{٣}}{س \sqrt{س}} د س$

$= \int \frac{٨ + ٦ س^{٢} - ١٢ س - س^{٣}}{س \sqrt{س}} د س$

$= \int ٨ س^{-\frac{٣}{٢}} + ٦ س^{\frac{١}{٢}} - ١٢ س^{-\frac{١}{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}} د س$

$= ٨ \times \frac{-٢}{١} س^{-\frac{١}{٢}} + ٦ \times \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - ١٢ \times \frac{٢}{١} س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

$= \frac{-١٦}{\sqrt{س}} + ٤ \sqrt{س^{٣}} - ٢٤ \sqrt{س} - \frac{٢}{٥} \sqrt{س^{٥}} + جـ$

تدريب (٤)

$\int \frac{٣}{(٧ س + ٥)^{٤}} د س = \int ٣ (٧ س + ٥)^{-٤} د س$

$\frac{٣ (٧ س + ٥)^{-٣}}{-٣ \times ٧} + جـ$

$= \frac{-١}{٧ (٧ س + ٥)^{٣}} + جـ$

٢) $\int س^{٤} (٥ - \frac{٣}{س})^{٤} د س$

$= \int س^{٤} (\frac{٥ س - ٣}{س})^{٤} د س = \int \cancel{س^{٤}} \frac{(٥ س - ٣)^{٤}}{\cancel{س^{٤}}} د س$

$= \frac{(٥ س - ٣)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ = \frac{(٥ س - ٣)^{٥}}{٢٥} + جـ$

تدريب (٥):

١) $\int (قا ٤ س \; ظا ٤ س + قا^{٢} ٣ س) \; د س$

$= -\frac{١}{٤} قا ٤ س - \frac{١}{٣} ظا ٣ س + جـ$

٢) $\int (جا ٤ س \; ظا ٤ س + \frac{١}{جتا^{٢} ٦ س}) د س$

$= \int \cancel{جتا ٤ س} \times \frac{جا ٤ س}{\cancel{جتا ٤ س}} + قا^{٢} ٦ س \; د س$

$= -\frac{١}{٤} جتا ٤ س + \frac{١}{٦} ظا ٦ س + جـ$

تدريب (٦):

١) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^{٢} \, \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{قاس ظاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س دس} + ٢\int \text{قاس ظاس دس} + \int \text{ظا}^{٢}\text{س دس}$

$= \text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} + \int \text{قا}^{٢}\text{س} - ١ \; \text{دس}$

$= \text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

$٢\,\text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} - \text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{٣}{١ - \text{جتا}٢\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{٣}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس} = \frac{٣}{٢} \int \text{قتا}^{٢}\text{س دس}$

$= -\frac{٣}{٢}\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س}) \, \text{دس}$

$= -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٤) $\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^{٢} \, \text{دس}$

$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس} + \text{جا}^{٢}\text{س} \; \text{دس}$

$= \int ١ - \text{جا}٢\text{س} \; \text{دس}$

$\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{س} + \text{جـ}$

تمارين ومسائل (صفحة ٢٣٦)

١) أ) $\int \text{س}^{٦} + \frac{٣}{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} \; \text{دس}$

$= \int \text{س}^{٦} + ٣\,\text{س}^{-٥} - \text{س}^{\frac{٢}{٥}} \; \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \frac{٣\,\text{س}^{-٤}}{-٤} - \frac{٥}{٧}\,\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤\,\text{س}^{٤}} - \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{\text{س}^{٧}} + \text{جـ}$

ب) $\int (٥ + ٣\text{ص})^{٤} \, \text{دص} = \frac{(٥ + ٣\text{ص})^{٥}}{١٥} + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} \, \text{دس} = \int \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}} \, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \text{جـ}$

د) $\int (٤\text{س}^{٢} + ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٥} \, \text{دس}$

$= \int ((٢\text{س} + ٥)^{٢})^{٥} \, \text{دس} = \int (٢\text{س} + ٥)^{١٠} \, \text{دس}$

$\frac{(٢\text{س} + ٥)^{١١}}{٢٢} + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}} \, \text{دس}$

$\int \frac{\cancel{(\text{س} + ٣ - ٣)}(\text{س} + ٣ + ٣)}{\cancel{\text{س}}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{س} + ٦) \, \text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$

و) $\int (١ - \text{س})(\text{س} - ١)^{٥} \, \text{دس}$

$\int -(\text{س} - ١)(\text{س} - ١)^{٥} \, \text{دس} = -\int (\text{س} - ١)^{٦} \, \text{دس}$

$-\frac{(\text{س} - ١)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

ز) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}\, دس$

$= \int س \sqrt[٣]{\frac{٥ - س}{س^{٣}}}\, دس$

$= \int \cancel{س} \frac{(٥ - س)^{\frac{١}{٣}}}{\cancel{س}}\, دس$

$\frac{(٥ - س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times -١} + جـ = -\frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{(٥ - س)^{٤}} + جـ$

ح) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}\, دس$

$= \int \frac{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} - ١)}{\sqrt{س} - ١}\, دس = \int س^{\frac{١}{٢}}\, دس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}} + جـ$

ط) $\int \sqrt[٣]{س} \left(\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}}\right) دس$

$= \int \left(س^{\frac{٢}{٣}} + ٥\right) دس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ٥س + جـ = \frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{س^{٥}} + ٥س + جـ$

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}\, دس$

$= \int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}} \times \frac{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}\, دس$

$= \int \frac{٥س}{٧س + \cancel{٣} - ٢س - \cancel{٣}} \times \left((٧س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}\right) دس$

$\int \frac{\cancel{٥س}}{\cancel{٥س}} \times \left((٧س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}\right) دس$

$\frac{٢}{٢١}\sqrt{(٧س + ٣)^{٣}} - \frac{١}{٣}\sqrt{(٢س + ٣)^{٣}} + جـ$

٢) $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$\int ق'(س)\, دس = \int (٣س^{٢} - ٣)\, دس$

$ق(س) = س^{٣} - ٣س + جـ$

$ق(٠) = ١ \Rightarrow ١ = جـ$

$\therefore ق(س) = س^{٣} - ٣س + ١$

* * *

٣) $ق''(س) = \frac{٦}{\sqrt{س}} = ٦س^{-\frac{١}{٢}}$

$ق(٤) = ٠ \qquad ق'(٤) = ١$

$\int ق''(س)\, دس = \int ٦س^{-\frac{١}{٢}}\, دس$

$ق'(س) = ١٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ_{١}$

$ق'(٤) = ١ \Rightarrow ١ = ١٢\sqrt{٤} + جـ_{١}$

$جـ_{١} = -٢٣$

$\int ق'(س)\, دس = \int (١٢س^{\frac{١}{٢}} - ٢٣)\, دس$

$ق(س) = ٨\sqrt{س^{٣}} - ٢٣س + جـ$

$ق(٤) = ٠ \Rightarrow ٦٤ - ٩٢ + جـ = ٠ \Rightarrow جـ = ٢٨$

$ق(س) = ٨\sqrt{س^{٣}} - ٢٣س + ٢٨$

* * *

٤) $\int (ق'(س) + ٢س)\, دس = س^{٣} + ب س^{٢} + ١$

$ق'(١) = ٥ \text{ ، } ق(٢) = ٧ \qquad ق(-٢) = ؟$

نشتق الطرفين:

$ق'(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢ب س$

$ق'(١) = ٥ \Rightarrow ٥ + ٢ = ٣ + ٢ب \Rightarrow ب = ٢$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ٢س$

$\int ق'(س) = \int (٣س^{٢} + ٢س)\, دس$

$ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + جـ$

$ق(٢) = ٧ \Rightarrow ٨ + ٤ + جـ = ٧ \Rightarrow جـ = -٥$

$ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥$

$ق(-٢) = -٨ + ٤ - ٥$

$= -٩$

٥) $\text{د}''(\text{س}) = -٤\,\text{جتا}\,٢\text{س}$

$\text{د}'(\frac{\pi}{٢}) = \text{صفر} \qquad \text{د}(\frac{\pi}{٢}) = -٢$

$\int \text{د}''(\text{س}) = \int -٤\,\text{جتا}\,٢\text{س}\ \text{دس}$

$\text{د}'(\text{س}) = -٢\,\text{جا}\,٢\text{س} + \text{جـ}_١$

$\text{د}'(\frac{\pi}{٢}) = \text{صفر} \Leftarrow -٢\,\text{جا}\,\pi + \text{جـ} = \text{صفر}$

$\text{جـ}_١ = \text{صفر}$

$\int \text{د}'(\text{س}) = \int -٢\,\text{جا}\,٢\text{س}\ \text{دس}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{جتا}\,٢\text{س} + \text{جـ}$

$\text{د}(\frac{\pi}{٢}) = -٢ \Leftarrow \text{جتا}\,\pi + \text{جـ} = -٢$

$\text{جـ} = -١$

$\text{د}(\text{س}) = \text{جتا}\,٢\text{س} - ١$

س٣ أ) $\int \frac{٥}{\text{جا}^٢\text{س}} - \frac{٣}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int ٥\,\text{قتا}^٢\text{س} - ٣\,\text{قا}^٢\text{س}\ \text{دس}$

$= -٥\,\text{ظتاس} - ٣\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س}}{١ + \text{جتا}\,٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢\,\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{١}{٢}\,\text{قا}^٢\text{س}\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

جـ) $\int (\text{ظتاس} - \text{قتاس})^٢\ \text{دس}$

$= \int (\text{ظتا}^٢\text{س} - ٢\,\text{ظتاس}\,\text{قتاس} + \text{قتا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \int (\text{قتا}^٢\text{س} - ١ - ٢\,\text{ظتاس}\,\text{قتاس} + \text{قتا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \int (٢\,\text{قتا}^٢\text{س} - ٢\,\text{ظتاس}\,\text{قتاس} - ١)\ \text{دس}$

$-٢\,\text{ظتاس} + ٢\,\text{قتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^٢\text{س}}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^٢\text{س}} + \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \text{ظاس}\,\text{قاس} + ١\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{س} + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{١ - \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جا}^٢\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}^٢\frac{\text{س}}{٢}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{(\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢})^٢}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^٢\text{س}}{(\frac{١}{٢}\,\text{جاس})^٢}\ \text{دس}$

$= \int ٤\,\text{ظتا}^٢\text{س}\ \text{دس} = \int ٤(\text{قتا}^٢\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$= ٤(-\text{ظتاس} - \text{س}) + \text{جـ}$

و) $\int \frac{١ - \text{جا}\,٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}\,٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$\int \frac{\text{جا}^٢\text{س} - ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس} - \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^٢}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \text{جاس} - \text{جتاس}\ \text{دس}$

$= -\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا(س+٢س)}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس جتا٢س} - \text{جاس جا٢س}}{\text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}\ \text{جتا٢س}}{\cancel{\text{جتاس}}} - \frac{\text{جاس} \times \text{٢جاس}\ \cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{دس}$

$\int \text{جتا٢س دس} - ٢\int \text{جا}^٢\text{س دس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} - \int \cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}(١ - \text{جتا٢س})\ \text{دس}$

$\frac{١}{٢}\text{جا٢س} - (\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جا٢س}) + \text{جـ}$

$= \text{جا٢س} - \text{س} + \text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^٢\text{س} - \text{جا}^٤\text{س}}$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^٢\text{س}(١-\text{جا}^٢\text{س})}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^٢\text{س جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\frac{١}{٤}\text{جا}^٢\text{٢س}}\ \text{دس} = ٤\int \text{قتا}^٢\text{٢س دس}$

$= -٢\ \text{ظتا٢س} + \text{جـ}$

ط) $\int \text{قاس (ظاس + جتاس) دس}$

$= \int \text{قاس ظاس} + ١\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{س} + \text{جـ}$

ي) $\int \text{جا٦س جا٤س دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا٢س} - \text{جتا١٠س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}\text{جا٢س} - \frac{١}{١٠}\text{جا١٠س}) + \text{جـ}$

ك) $\int \text{جتا}^٢\text{س دس} = \int \frac{١}{٢}(١+\text{جتا٢س})\ \text{دس}$

$\frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{١}{٢}\text{جا٢س}) + \text{جـ}$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^٣\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^٣\text{س} - ٥}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس} - ٥\ \text{قا}^٢\text{س دس}$

$\text{جاس} - ٥\ \text{ظاس} + \text{جـ}$

م) $\int \text{جتا٣س جتا٧س دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا(-٤س)} + \text{جتا١٠س})\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا٤س} + \text{جتا١٠س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤}\text{جا٤س} + \frac{١}{١٠}\text{جا١٠س}) + \text{جـ}$

ن) $\int (\text{جتا}^٤\text{س} - \text{جا}^٤\text{س})\ \text{دس}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س})(\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \int \text{جتا٢س دس} = \frac{١}{٢}\text{جا٢س} + \text{جـ}$

س) $\int \frac{١}{\text{قاس}-١}\ \text{دس} \times \frac{\text{قاس}+١}{\text{قاس}+١} = \int \frac{\text{قاس}+١}{\text{قا}^٢\text{س}-١}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قاس}+١}{\text{ظا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int (\text{قاس ظتا}^٢\text{س} + \text{ظتا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\cancel{\text{جتاس}}} \times \frac{\text{جتا}^{\cancel{٢}}\text{س}}{\text{جا}^٢\text{س}} + \text{قتا}^٢\text{س} - ١\ \text{دس}$

$= \int \text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^٢\text{س} - ١\ \text{دس}$

$= -\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

ع) $\int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}}\ \text{دس} \times \frac{١+\text{جاس}}{١+\text{جاس}} = \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}$

$= \int (\text{ظاس قاس} + \text{ظا}^٢\text{س})\ \text{دس} = \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

ثالثاً: التكامل المحدود

تدريب (١)

$\int_{١}^{٣} أ\,ق'(س)\,دس = أ\,ق(س)\Big|_{١}^{٣}$

$= أ\,ق(٣) - أ\,ق(١)$

$١٦ = ١٢أ - ٤أ \Rightarrow أ = ٢$

تدريب (٢)

$\int_{٢}^{٧} ٤س\,دس = ٢س^{٢}\Big]_{٢}^{٧} = ٢\times(٧)^{٢} - ٢(٢)^{٢}$

$= ٩٠$

٢) $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,دس = ظاس\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= ظا\frac{\pi}{٤} - ظا\frac{\pi}{٦} = ١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$

تدريب (٣):

$\int_{١+ب}^{٢+٣ب} ٥\,دس = ٤٠$

$٥(٢+٣ب-١-ب) = ٤٠ \Rightarrow ب = +\frac{٧}{٢}$

تدريب (٤)

$\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = ٢$

$\therefore \int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -٢$

تدريب (٥)

$\int_{١}^{٣} ٤ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ٧هـ(س)\,دس = ١٩$

$\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,دس = ٩ \Rightarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٣$

$\therefore ٤\times٣ + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١٩$

$\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١ \Rightarrow \int_{٣}^{١} ٥هـ(س)\,دس = ٥\times-١$

$= -٥$

تدريب (٦)

$ع = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس$ ، $ل = \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$

$ع + ل = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس - \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$

$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س\,دس = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ١\,دس$

$= ١\left(\frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi}{٢}$

تدريب (٧)

$\int_{٩}^{٢} ٢ق(س)\,دس + \int_{٩}^{٢} ٣\,دس = -١٧$

$٢\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس + ٣(٢-٩) = -١٧$

$\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس = ٢$

$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢ \Rightarrow \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = -٦$

$\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس =$

$\int_{٥}^{٩} ٤ق(س) - \int_{٥}^{٩} ١\,دس$

$= ٤\left(\int_{٥}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٩} ق(س)\,دس\right) - ١(٩-٥)$

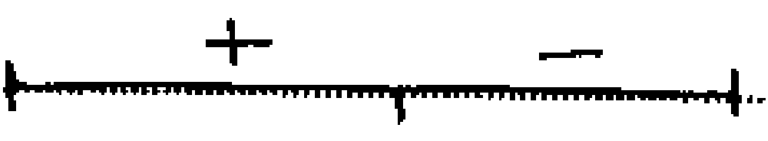
$= ٤(٦ + -٢) - ٤$

$= ١٢$

تدريب (٨)

$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١-\text{جتا}\,٢\text{س}}{٢}}\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢}}\ \text{دس} = \int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\ \text{دس}$



$= \int_{٠}^{\pi} \text{جاس دس} + \int_{\pi}^{٢\pi} -\text{جاس دس}$

$-\text{جتاس}\Big]_{٠}^{\pi} + +\text{جتاس}\Big]_{\pi}^{٢\pi}$

$(-\text{جتا}\pi + \text{جتا صفر}) + \text{جتا}\,٢\pi - \text{جتا}\,\pi$

$(١+١) + (١--١)$

$= ٤$

تدريب (٩)

$\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس}$ موجبة لأن ق(س) $\geq$ صفر

إشارة $\int_{٣}^{٦} \text{ق(س) دس}$ سالبة لأن ق(س) ≤ ٠

تدريب (١٠)

١) $\int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس} \geq \int_{٠}^{١} \text{هـ(س) دس}$

لأن ق(س) $\geq$ هـ(س) حسب الشكل

٢) من الشكل المجاور

هـ(س) $\geq$ ق(س) لكل س $\in [-١، ٠]$

$\therefore \int_{-١}^{٠} \text{هـ(س) دس} \geq \int_{-١}^{٠} \text{ق(س) دس}$

أي أن $\int_{-١}^{٠} \text{ق(س) دس} \leq \int_{-١}^{٠} \text{هـ(س) دس}$

تدريب (١١)

$\text{م} \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq \text{ل}$

$٠ \leq \text{س} \leq ١$

$٠ \leq \text{س}^{٢} \leq ١$

$١ \leq \text{س}^{٢}+١ \leq ٢ \Rightarrow ١ \geq \frac{١}{١+\text{س}^{٢}} \geq \frac{١}{٢}$

$٢ \geq \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}} \geq \frac{٢}{٢}$

$\int_{٠}^{١} ١\ \text{دس} \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq \int_{٠}^{١} ٢\ \text{دس}$

$١ \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq ٢$

م $= ١$ ، ل $= ٢$

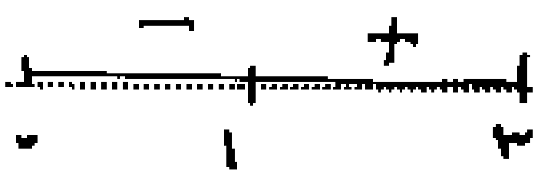
تمارين ومسائل صفحة (٢٥٠ - ٢٥١)

س١) أ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \int_{٢}^{٨} \text{س}^{-٢}\ \text{دس}$

$= \frac{-١}{\text{س}}\Big]_{٢}^{٨} = \frac{-١}{٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$

ب) $\int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٢} - |\text{س}-١|)\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢}\ \text{دس} - \int_{٠}^{٣} |\text{س}-١|\ \text{دس}$



$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big]_{٠}^{٣} - \left(\int_{٠}^{١} ١-\text{س}\ \text{دس} + \int_{١}^{٣} (\text{س}-١)\ \text{دس}\right)$

$(٩-٠) - \left(\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big]_{٠}^{١} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \text{س}\Big]_{١}^{٣}\right)$

$٩ - \left(\left((١-\frac{١}{٢}) - \text{صفر}\right) + (\frac{٩}{٢}-٣) - (\frac{١}{٢}-١)\right)$

$٩ - \frac{٥}{٢} = \frac{١٣}{٢}$

ج) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}2\text{س}\ \text{دس}$

$= -\frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\text{جتا}\pi + \frac{1}{2}\text{جتا}\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{2}$

د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\text{س} + \text{جتاس})\ \text{دس}$

$\frac{\text{س}^2}{2} + \text{جاس}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\text{صفر}}$

$= (\text{صفر} + \text{جاصفر}) - \left(\frac{\frac{\pi}{4}^{2}}{2} + \text{جا}\frac{\pi}{2}\right)$

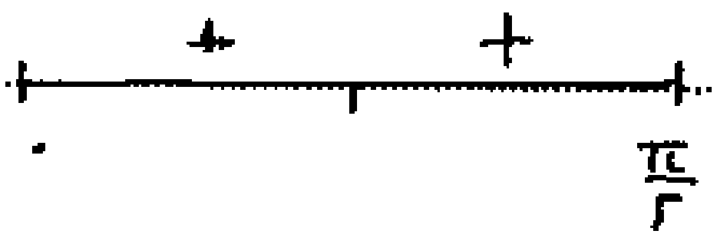
$= -\frac{\pi^2}{8} - 1$

ه) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \text{جا}2\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{جا}^2\text{س} + 2\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(\text{جاس} + \text{جتاس})^2}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\text{جاس} + \text{جتاس}|}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$



$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\ \text{دس}$

$= 1\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$.

و) $\int_{2}^{2} (9\text{س} - 7)^{5}\ \text{دس} = \text{صفر}$

ز) $\int_{-1}^{3} (\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1)\ \text{دس}$

$\int_{-}^{3} (\text{س}^3 - 1)\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}\Big]_{-1}^{3}$

$\left(\frac{81}{4} - 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1\right) = 16$

ح) $\int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}}\ (\sqrt{\text{س}} + 2)^2\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}}\ (\text{س} + 4\sqrt{\text{س}} + 4)\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{1} \text{س}^{\frac{3}{2}} + 4\text{س} + 4\text{س}^{\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + 2\text{س}^2 + \frac{8}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1}$

$\left(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right) - (\text{صفر})$

$= \frac{76}{15}$

ط) $\int_{2}^{4} \frac{1}{(\text{س} - 1)^2}\ \text{دس} = \int_{2}^{4} (\text{س} - 1)^{-2}\ \text{دس}$

$\frac{-1}{\text{س} - 1}\Big]_{2}^{4} = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

ي) $\int_{1}^{3} \frac{2\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 5}{\text{س}^2}\ \text{دس}$

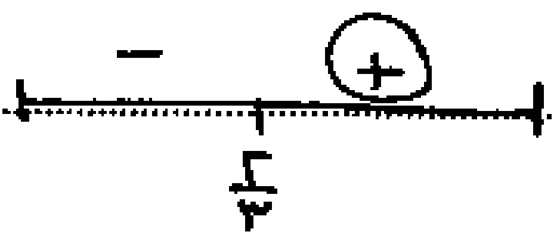
$= \int_{1}^{3} 2\text{س} - 4 + 5\text{س}^{-2}\ \text{دس}$

$\text{س}^2 - 4\text{س} - \frac{5}{\text{س}}\Big]_{1}^{3}$

$\left(9 - 12 - \frac{5}{3}\right) - (1 - 4 - 5) = \frac{10}{3}$

ك) $\int_{2}^{3} \sqrt{9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4}\ \text{دس} = \int_{2}^{3} \sqrt{(3\text{س} - 2)^2}\ \text{دس}$

$= \int_{2}^{3} |3\text{س} - 2|\ \text{دس}$



$= \int_{2}^{3} 3\text{س} - 2\ \text{دس}$

$\frac{3\text{س}^2}{2} - 2\text{س}\Big]_{2}^{3}$

$\left(\frac{27}{2} - 6\right) - (6 - 4) = \frac{11}{2}$

ل) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{دس}$

$= [\text{جاس} + \text{جتاس}]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= (١ + \text{صفر}) - (\text{صفر} + ١) = \text{صفر}$

* * *

س٢) $\text{ق}(\text{س}) = \int \left(\int_{٠}^{-٢} ٤\,\text{دس} - ٣\text{س}^٢ \right) \text{دس}$

$\text{قَ}(-١) = ؟$

$\text{قَ}(\text{س}) = \int_{٠}^{-٢} ٤\,\text{دس} - ٣\text{س}^٢$

$= ٤(-٢-٠) - ٣\text{س}^٢$

$\text{قَ}(\text{س}) = -٨ - ٣\text{س}^٢$

$\text{قَ}(-١) = -٨ - ٣ = -١١$

* * *

س٣) $\int_{\text{ب}}^{٢} ٢\text{ب}\,\text{دس} = -٣٠$

$٢\text{ب}(٢-\text{ب}) = -٣٠$

$-٢\text{ب}^٢ + ٤\text{ب} + ٣٠ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ - ٢\text{ب} - ١٥ = \text{صفر}$

$(\text{ب} - ٥)(\text{ب} + ٣) = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٥}،\ \boxed{\text{ب} = -٣}$

* * *

س٤) $\int_{٠}^{\text{جـ}} \text{س}(١-\text{س})\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\int_{٠}^{\text{جـ}} (\text{س} - \text{س}^٢)\,\text{دس} = \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{٠}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جـ}^٢}{٢} - \frac{\text{جـ}^٣}{٣} - \text{صفر} = \text{صفر}$

$\frac{٣\text{جـ}^٢ - ٢\text{جـ}^٣}{٦} = \text{صفر} \Leftarrow \text{جـ}^٢(٣ - ٢\text{جـ}) = \text{صفر}$

$\text{جـ} = \text{صفر}،\ \text{جـ} = \frac{٣}{٢}$

* * *

س٥) $\int_{-١}^{٣} \left(٣\text{س}^٢ - ٢\int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\text{م}^٢\,\text{دم}\right) \text{دس} = -٢٠$

$= \int_{-١}^{٣} (٣\text{س}^٢ - ٢ \times ٣\text{جـ}^٢)\,\text{دس} = -٢٠$

$[\text{س}^٣ - ٣\text{جـ}^٢\text{س}]_{-١}^{٣} = -٢٠$

$(٢٧ - ٩\text{جـ}^٢) - (-١ + ٣\text{جـ}^٢) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢\text{جـ}^٢ = -٢٠$

$\text{جـ}^٢ = ٤ \Leftarrow \text{جـ} = \pm ٢$

* * *

س٦) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} &، -٣ < \text{س} \le ٠ \\ \text{س} &، ٠ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$

$\int_{-٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-٣}^{٠} -\text{س}\,\text{دس} + \int_{٠}^{٤} \text{س}\,\text{دس}$

$= \left[-\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{-٣}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٠}^{٤}$

$(\text{صفر} + \frac{٩}{٢}) + (٨ - \text{صفر}) = ١٢٫٥$

* * *

س٧) $\int_{٢}^{\text{ب}} (٢\text{س} - ٣)\,\text{دس} = ٢٠$

$[\text{س}^٢ - ٣\text{س}]_{٢}^{\text{ب}} = ٢٠$

$\text{ب}^٢ - ٣\text{ب} - ٤ + ٦ - ٢٠ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ - ٣\text{ب} - ١٨ = \text{صفر}$

$(\text{ب} - ٦)(\text{ب} + ٣) = \text{صفر}$ $\boxed{\text{ب} = ٦}،\ \boxed{\text{ب} = -٣}$

* * *

س٨) $\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٣} \text{س}^{-٢}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} ٦\,\text{دس} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \left[\frac{-١}{\text{س}}\right]_{١}^{٣} - ٦(٣-١) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{٧٠}{٣} \Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{٣٥}{٣}$

$\int_{١}^{٣} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} \text{س}^٢\,\text{دس} = \frac{٣٥}{٦} - \left[\frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٣٥}{٦} - (٩ - \frac{١}{٣}) = -\frac{١٧}{٦}$

$\text{س}^{٩}$)
$\int_{٩}^{٢} ٢\,\text{ق(س) دس} + ٣(٢-٩) = -١٧$

$\int_{٩}^{٢} \text{ق(س) دس} = ٢$

$\int_{٢}^{٥} \text{ق(س) دس} = -٦$

$\int_{٥}^{٩} (٤\,\text{ق(س)} - ١)\,\text{دس} =$

$\left(\int_{٥}^{٢} ٤\,\text{ق(س) دس} + \int_{٢}^{٩} ٤\,\text{ق(س)}\right) - ١(٩-٥)$

$٢٤ - ٨ - ٤ = ١٢$

* * *

$\text{س}^{١٠}$) $-١ \leq \text{جتاس} \leq ١$ لكل $\text{س} \in [٠ ، \pi]$

$\text{صفر} \leq \text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ١$

$\text{صفر} \leq ٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ٣$

$٢ \leq ٢ + ٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س} \leq ٥$

$\frac{١}{٥} \leq \frac{١}{٢+٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س}} \leq \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥}\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,\text{دس}$

$\frac{\pi}{٥} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} \leq \frac{\pi}{٢}$

* * *

$\text{س}^{١١}$) $-٣ \leq \text{س} \leq ٣$

$(٠ \leq \text{س}^{٢} \leq ٩) \times -١$

$-٩ \leq -\text{س}^{٢} \leq \text{صفر}$

$\text{صفر} \leq ٩-\text{س}^{٢} \leq ٩$

$\text{صفر} \leq \sqrt{٩-\text{س}^{٢}} \leq \sqrt{٩}$

$\int_{-٣}^{٣} \text{صفر دس} \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-\text{س}^{٢}}\,\text{دس} \leq \int_{-٣}^{٣} ٣\,\text{دس}$

$\text{صفر} \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-\text{س}^{٢}}\,\text{دس} \leq ١٨$

$\text{م} = \text{صفر}$ ، $\text{ك} = ١٨$

$\text{س}^{١٢}$) $\text{ق(س)} = \text{أس}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ}$

$\text{ق}'\text{(س)} = ٢\,\text{أس} + \text{ب}$

$\text{ق}''\text{(س)} = ٢\,\text{أ}$

$\text{ق}''\text{(س)} = ٤ \Leftarrow ٢\,\text{أ} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ٢}$

$\text{ق(٠)} = ٥ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٥}$

$\int_{٠}^{١} \text{ق}'\text{(س) دس} = ٣ \Leftarrow \int_{٠}^{١} ٤\text{س} + \text{ب دس}$

$[٢\text{س}^{٢} + \text{بس}]_{٠}^{١} = ٣$

$٢ + \text{ب} = ٣ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ١}$

$\therefore \text{ق(س)} = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥$

* * *

$\text{س}^{١٣}$) $\text{ق(س)} = \text{أ س} + \text{ب}$

$\int_{-١}^{١} (\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = \left[\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + \text{بس}\right]_{-١}^{١}$

$= (\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}) - (\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}) = ٤$

$٢\text{ب} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٢}$

$\int_{١}^{٣} (\text{أس}+\text{ب})\,\text{دس} = \left[\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right]_{١}^{٣}$

$= (\frac{٩\text{أ}}{٢} + ٦) - (\frac{\text{أ}}{٢} + ٢) = ٢$

$٤\text{أ} + ٤ = ٢ \Leftarrow \boxed{\text{أ} = -\frac{١}{٢}}$

$\text{ق(س)} = -\frac{١}{٢}\text{س} + ٢$

* * *

رابعاً: اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

تدريب (1)

1) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(2 - \text{جتا}\,\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جا}\,\text{س}}{2 - \text{جتا}\,\text{س}}$

2) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|3\text{س} + 15|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{3}{3\text{س} + 5}$

تدريب (2):

1) $\int_{2}^{4} \frac{1}{9 - 2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{-2}\int_{2}^{4} \frac{-2}{9 - 2\text{س}}\,\text{دس} = \frac{1}{-2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|9 - 2\text{س}|\Big|_{2}^{4}$

$= \frac{1}{-2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}1 + \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}5 = \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}5$

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{قا}^2\text{س}}{2 + \text{ظا}\,\text{س}}\,\text{دس} = \left[\text{لو}_{\text{هـ}}|2 + \text{ظا}\,\text{س}|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}3 - \text{لو}_{\text{هـ}}1 = \text{لو}_{\text{هـ}}3$

تمارين ومسائل صفحة (256 - 257)

س1)

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}2\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2}{2\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^3 5\text{س} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}\,5\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3 \times \frac{5\,\text{جتا}\,5\text{س}}{\text{جا}\,5\text{س}} = 15\,\text{ظتا}\,5\text{س}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^2 + 4\text{س} - 5|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2\text{س} + 4}{\text{س}^2 + 4\text{س} - 5}$

د) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 5\text{س} + 3)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{2\text{س} + 5}{\text{س}^2 + 5\text{س} + 3}$

هـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^3 \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times 3\text{س}^2$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^2\,(1 + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

و) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(2 + \sqrt{\text{س}})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{2 + \sqrt{\text{س}}} = \frac{1}{4\sqrt{\text{س}} + 2\text{س}}$

ز) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3\,\text{ظا}\,\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}\,\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{3\text{س}^2}{\text{س}^3} + \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}}$

$= \frac{3}{\text{س}} + \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظا}\,\text{س}}$

ح) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 1)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}} - \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$

ط) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^3$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \times \frac{1}{\text{س}}$

ي) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{(٤\text{س}^٢+٥)^٦}{(٧-٣\text{س})^٥}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٤\text{س}^٢+٥) - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٧-٣\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٦ \times ٨\text{س}}{٤\text{س}^٢+٥} - \frac{٥ \times -٣}{٧-٣\text{س}}$

$= \frac{٤٨\text{س}}{٤\text{س}^٢+٥} + \frac{١٠}{٧-٣\text{س}}$

ك) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{٥\text{س}^٣+٤\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}^٣+٤\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٣} \times \frac{١٥\text{س}^٢ + ٤}{٥\text{س}^٣+٤\text{س}}$

ل) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}\,\text{قا}^٢(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$.

م) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + \sqrt{\text{س}^٢-١})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١ + \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^٢-١}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^٢-١}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}^٢-١} + \text{س}}}{\cancel{(\text{س}+\sqrt{\text{س}^٢-١})}(\sqrt{\text{س}^٢-١})}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^٢-١}}$

س٣) $\int (\text{ق}'(\text{س}) - \text{س})\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}+\text{طاس}| + \text{س}^٢$

نشتق الطرفين

$\text{ق}'(\text{س}) - \text{س} = \frac{\text{قاس طاس} + \text{قا}^٢\text{س}}{\text{قاس} + \text{طاس}} + ٢\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) - \text{س} = \frac{\text{قاس}\cancel{(\text{قاس}+\text{طاس})}}{\cancel{\text{قاس}+\text{طاس}}} + ٣\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{قاس} + ٣\text{س}$

*

س٤) $\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظتاس}$

ق(س) متصل على مجاله

$\text{م}'(\text{س}) = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس} = \text{ق}(\text{س}))$

∴ م(س) هو معكوس لمشتقة للاقتران ق

س٥)

أ) $\int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢+٣}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢+٣| + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{١+\text{جتاس}}{\text{س}+\text{جاس}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{جاس}| + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{٥+٥\,\text{ظتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{٥(١+\text{ظتا}^٢\text{س})}{\text{ظتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{٥\,\text{قتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{دس} = -٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}| + \text{جـ}$

د) $\int \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣+٥}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣+٥| + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{\text{س}+٥}{\text{س}}\,\text{دس} = \int ١ + \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

و) $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٤}\,\text{د س}$

$= \int_{٣}^{٥} \frac{\cancel{\text{س}-٢}}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}\,\text{د س} = \left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+٢|\right]_{٣}^{٥}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}٧ - \text{لو}_{\text{هـ}}٥$

ز) $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢\text{س}|}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{د س}$

$-١ \quad - \quad ٠ \quad + \quad ٢$

$= \int_{-١}^{٠} \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{د س} + \int_{٠}^{٢} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}\,\text{د س}$

$-\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+١|\right]_{-١}^{٠} + \left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+١|\right]_{٠}^{٢}$

$-\text{لو}_{\text{هـ}}١ + \text{لو}_{\text{هـ}}٢ \quad + \text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}١$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}٢ + \text{لو}_{\text{هـ}}٥$

ح) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١+\text{جتا}٣\text{س}}\,\text{د س}$

$= -\frac{١}{٣}\int \frac{-٣\,\text{جا}٣\text{س}}{١+\text{جتا}٣\text{س}}\,\text{د س}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{جتا}٣\text{س}| + \text{ج}$

ط) $\int \frac{٢\text{س}-١}{\text{س}(\text{س}-١)}\,\text{د س}$

$= \int \frac{٢\text{س}-١}{\text{س}^{٢}-\text{س}}\,\text{د س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}-\text{س}| + \text{ج}$

ي) $\int \text{ظاس}\,\text{د س}$

$= -\int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{د س} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{ج}$

ك)

١) $\text{م(س)} = \int \text{ق(س)}\,\text{د س}$

$= \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٤}\,\text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}+٤| + \text{ج}$

ب) $\text{م(س)} = \int \frac{٣\,\text{جتا}٣\text{س}}{٥+\text{جا}٣\text{س}}\,\text{د س}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|٥+\text{جا}٣\text{س}| + \text{ج}$

خامساً: مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

تدريب (١) :

١) $ق(س) = هـ^{جاس}$

$قَ(س) = جتاس \times هـ^{جاس}$

٢) $ق(س) = س^{٤} هـ^{٢س}$

$قَ(س) = س^{٤} \times ٢هـ^{٢س} + هـ^{٢س} \times ٤س^{٣}$

$٢س^{٣} هـ^{٢س}(س + ٢)$

تدريب (٢)

١) $ق(س) = س \; لو_{هـ} هـ^{س^{٢}}$

$= س \times س^{٢} \; لو_{هـ} هـ$

$ق(س) = س^{٣} \Leftarrow قَ(س) = ٣س^{٢}$

٢) $ق(س) = هـ^{٣ \, لو_{هـ}(١+جاس)}$

$= هـ^{لو_{هـ}(١+جاس)^{٣}}$

$ق(س) = (١+جاس)^{٣}$

$قَ(س) = ٣(١+جاس)^{٢} \times جتاس$

$= ٣جتاس(١+جاس)^{٢}$

تدريب (٣)

١) $\int_{٠}^{١} (١+هـ^{س})^{٢} دس$

$= \int_{٠}^{١} ١ + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س} \; دس$

$= \left[س + ٢هـ^{س} + \frac{١}{٢}هـ^{٢س} \right]_{٠}^{١}$

$\left(١ + ٢هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢}\right) - \left(صفر + ٢ + \frac{١}{٢}\right)$

$- \frac{٣}{٢} + ٢هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢}$.

٢) $\int هـ^{٣س}(١+هـ^{٢س}) \; دس$

$= \int (هـ^{٣س} + هـ^{٥س}) \; دس$

$= \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + \frac{١}{٥}هـ^{٥س} + جـ$

تمارين ومسائل صفحة (٢٦٢ - ٢٦٣)

حل)

أ) $ص = س + هـ^{٩س}$

$\frac{دص}{دس} = ١ + ٩هـ^{٩س}$

ب) $ص = س^{٣} + هـ^{٦-٥س^{٤}}$

$صَ = ٣س^{٢} - ٢٠س^{٣} هـ^{٦-٥س^{٤}}$

جـ) $ص = جاهـ^{٢س}$

$صَ = ٢هـ^{٢س} جتاهـ^{٢س}$

د) $ص = \sqrt{١+هـ^{٢س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{\cancel{٢}هـ^{٢س}}{\cancel{٢}\sqrt{١+هـ^{٢س}}} = \frac{هـ^{٢س}}{\sqrt{١+هـ^{٢س}}}$

هـ) $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ}\sqrt{س}$

$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢}لو_{هـ}س$

$صَ = \frac{-١}{س^{٢}}هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢س}$

و) $ص = هـ^{٥} + لو_{هـ}قاس$

$صَ = صفر + \frac{قاس ظاس}{قاس}$

$=$ ظاس .

ز) $ص = هـ^{٤لو_{هـ}(س^{٣}+٢)} \Leftarrow ص = (س^{٣}+٢)^{٤}$

$\frac{دص}{دس} = ٤(س^{٣}+٢)^{٣} \times ٣س^{٢} \Leftarrow صَ = ١٢س^{٢}(س^{٣}+٢)^{٣}$

ح) $\text{ص} = \dfrac{1 + \text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{5\text{س}}}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{-5\text{س}} + \text{هـ}^{-3\text{س}}$

$\text{ص}' = -5\,\text{هـ}^{-5\text{س}} - 3\,\text{هـ}^{-3\text{س}}$

ط) $\text{ص} = \text{هـ}^{3} + \text{س}^{3}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}$

$\text{ص}' = \text{صفر} + \text{س}^{3} \times \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{هـ}^{\text{جاس}} \times 3\text{س}^{2}$

$\text{ص}' = \text{س}^{2}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,(\text{س جتاس} + 3)$

ي) $\text{ص} = \left(\text{هـ}^{4\text{س}+5}\right)^{6}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{24\text{س}+30}$

$\text{ص}' = 24\,\text{هـ}^{24\text{س}+30}$

* * *

س٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتاس} + \int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\text{دس}}{1+\text{ظا}^{2}\text{س}}$

$\text{ص}' = \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ} \times \dfrac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \text{صفر}$

عندما $\text{س} = \dfrac{\pi}{4} \Leftarrow$

$2\text{هـ} + 1 = \text{قا}^{2}\dfrac{\pi}{2}\,\text{هـ}^{1} + -\text{أ} \times \text{ظا}\dfrac{\pi}{4}$

$2\text{هـ} + 1 = 2\text{هـ} - \text{أ}$

$\boxed{\text{أ} = -1}$

* * *

س٣) $\text{ق}''(\text{س}) = \text{جاس} + \text{هـ}^{2\text{س}}$

$\int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس} = \int \text{جاس} + \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{جـ}_{1}$

$\text{ق}'(0) = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} + \text{جـ}_{1}$

$\text{جـ}_{1} = 1$

$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + 1$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \left(-\text{جتاس} + \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + 1\right)\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{جاس} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س} + \text{جـ}_{2}$

$\text{ق}(0) = \frac{1}{4} \Leftarrow \text{صفر} + \frac{1}{4} + \text{صفر} + \text{جـ}_{2} = \text{صفر}$

$\text{جـ}_{2} = \text{صفر}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = -\text{جاس} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{س}.$

* * *

س٤) $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} - \text{ص}$

$(\text{ص} + \text{س ص}')\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = 1 - \text{ص}'$

$\text{هـ}^{\text{س ص}}\,\text{ص} + \text{س ص}'\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص}' = 1$

$\text{ص}'\,(\text{س هـ}^{\text{س ص}} + 1) = 1 - \text{هـ}^{\text{س ص}}\,\text{ص}$

$\text{ص}' = \dfrac{1 - \text{ص}(\text{س} - \text{ص})}{\text{س}(\text{س} - \text{ص}) + 1}$

$\text{ص}' = \dfrac{\text{ص}^{2} - \text{س ص} + 1}{\text{س}^{2} - \text{س ص} + 1}$ ✱.

* * *

س٥) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$

$\text{ص}' = \text{أ}\,\text{هـ}^{\text{أس}}$

$\text{ص}'' = \text{أ}^{2}\,\text{هـ}^{\text{أس}}$

$\text{أ}^{2}\,\text{هـ}^{\text{أس}} - 5\text{أ}\,\text{هـ}^{\text{أس}} + 6\,\text{هـ}^{\text{أس}} = \text{صفر}$

$\text{هـ}^{\text{أس}}\,(\text{أ}^{2} - 5\text{أ} + 6) = \text{صفر}$

$(\text{أ} - 2)(\text{أ} - 3) = \text{صفر}$

$\boxed{\text{أ} = 2}$ ، $\boxed{\text{أ} = 3}$

* * *

س٦) $\text{ق}(\text{س}) = 3^{\text{ل}(\text{س})} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,3^{\text{ل}(\text{س})}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,3$

$\dfrac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \text{ل}'(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,3 \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = 3^{\text{ل}(\text{س})} \times \text{ل}'(\text{س}) \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,3$

✱

٧) $\int ق(س)\,دس = هـ^{١-س^{٢}} + ٤هـ$

$ق(ب) = -٢ب$

نشتق الطرفين

$-٢س\,هـ^{١-س^{٢}} = ق(س)$

$-٢ب\,هـ^{١-ب^{٢}} = -٢ب$

$هـ^{١-ب^{٢}} = ١ \Leftarrow ١-ب^{٢} = صفر$

$ب = \mp ١$

ش) ١٩ $\int هـ^{٧س}\,دس = \frac{١}{٧}هـ^{٧س} + جـ$

ب) $\int_{٠}^{١} ٣هـ^{٣س}\,دس = \Big[هـ^{٣س}\Big]_{٠}^{١} = هـ^{٣} - ١$

جـ) $\int_{١}^{٣} هـ^{٤}\,دس = هـ^{٤}(٣-١)$

$= ٢هـ^{٤}$

د) $\int \frac{٤هـ^{٤س} - ٣}{هـ^{٤س} - ٣س}\,دس$

$= لو_{هـ}\left|هـ^{٤س} - ٣س\right| + جـ$

هـ) $\int \frac{هـ^{٣س} - ٢٧}{هـ^{س} - ٣}\,دس$

$= \int \frac{\cancel{(هـ^{س}-٣)}(هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩)}{\cancel{(هـ^{س}-٣)}}\,دس$

$= \frac{١}{٢}هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩س + جـ$

و) $\int هـ^{٥ + لو_{هـ} جتاس}\,دس$

$= \int هـ^{٥} \times هـ^{لو_{هـ} جتاس}\,دس$

$= \int هـ^{٥}\,جتاس\,دس$

$= هـ^{٥}\,جاس + جـ$

ط) $\int هـ^{٥س}\sqrt{(هـ^{س}+٢)^{٢}}\,دس$

$= \int هـ^{٥}\left|هـ^{س}+٢\right|\,دس$

$= \int هـ^{٥}(هـ^{س}+٢)\,دس = \int هـ^{٦س} + ٢هـ^{٥س}\,دس$

$= \frac{١}{٦}هـ^{٦س} + \frac{٢}{٥}هـ^{٥س} + جـ$

ي) $\int (هـ^{٢س+٥})^{٢}\,دس = \int هـ^{٤س+١٠}\,دس$

$= \frac{١}{٤}هـ^{٤س+١٠} + جـ$

أولاً : التكامل بالتعويض

تدريب (١)

١) $\int س^{٢} (٦س^{٣}+٥)^{٣}\, دس$

$ص = ٦س^{٣}+٥$ $\qquad$ $دص = ١٨س^{٢}\, دس$

$\int س^{٢} (٦س^{٣}+٥)^{٣}\, دس = \int \frac{١}{١٨} (٦س^{٣}+٥)^{٣} (١٨س^{٢} دس)$

$= \int \frac{١}{١٨} ص^{٣}\, دص = \frac{١}{١٨} \frac{ص^{٤}}{٤} + ح$

$= \frac{١}{٧٢} (٦س^{٣}+٥)^{٤} + ح$

٢) $\int (س+٣) \sqrt[٥]{س^{٢}+٦س-٤}\, دس$

$ص = س^{٢}+٦س-٤$ $\qquad$ $دص = (٢س+٦)\, دس$

$\int (س+٣) (س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}}\, دس$

$= \int \frac{١}{٢} (س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}} ((٢س+٦) دس)$

$= \int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٥}}\, دص = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٦} ص^{\frac{٦}{٥}} + ح$

$\frac{٥}{١٢} \sqrt[٥]{(س^{٢}+٦س-٤)^{٦}} + ح$

٣) $\int \frac{١٠س-٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢}-س+١)^{٢}}}\, دس$

$ص = س^{٢}-س+١$ $\qquad$ $دص = (٢س-١)\, دس$

$\int (١٠س-٥) (س^{٢}-س+١)^{\frac{-٢}{٣}}\, دس$

$= \int ٥ (س^{٢}-س+١)^{\frac{-٢}{٣}} ((٢س-١) دس)$

$= \int ٥ ص^{\frac{١}{٣}}\, دص = ٥\times٣ ص^{\frac{١}{٣}} + ح$

$= ١٥ \sqrt[٣]{س^{٢}-س+١} + ح$

تدريب (٢)

١) $\int س^{٧} \sqrt{س^{٤}-٣}\, دس$

$ص = س^{٤}-٣$ $\qquad$ $دص = ٤س^{٣}\, دس$

$\int س^{٧} (س^{٤}-٣)^{\frac{١}{٢}} دس = \int \frac{١}{٤} س^{٤} ص^{\frac{١}{٢}} (٤س^{٣} دس)$

$= \int \frac{١}{٤} س^{٤} ص^{\frac{١}{٢}}\, دص$

$= \int \frac{١}{٤} (ص+٣) ص^{\frac{١}{٢}}\, دص$

$= \int \frac{١}{٤} (ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ص^{\frac{١}{٢}})\, دص$

$= \frac{١}{٤} (\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} + ٣\times\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}) + ح$

$= \frac{١}{٤} (\frac{٢}{٥} \sqrt{(س^{٤}-٣)^{٥}} + ٢\sqrt{(س^{٤}-٣)^{٣}}) + ح$

٢) $\int ٢س^{٥} (س^{٢}+٥)^{٤}\, دس$

$ص = س^{٢}+٥$ $\qquad$ $دص = ٢س\, دس$

$\int س^{٤} ص^{٤} (٢س) دس$

$\int (ص-٥)^{٢} ص^{٤}\, دص$

$\int (ص^{٢}-١٠ص+٢٥) ص^{٤}\, دص$

$\int ص^{٦} - ١٠ص^{٥} + ٢٥ص^{٤}\, دص$

$\frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{١٠ص^{٦}}{٦} + \frac{٢٥ص^{٥}}{٥} + ح$

$= \frac{(س^{٢}+٥)^{٧}}{٧} - \frac{٥(س^{٢}+٥)^{٦}}{٣} + ٥(س^{٢}+٥)^{٥} + ح$

تدريب (٣)

١) $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\, دس$

$= \int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٥} \times س^{٢}}\, دس$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٥} دس$

$ص = \frac{٢س+١}{س}$ ، $ص = ٢ + \frac{١}{س}$

$دص = \frac{-١}{س^{٢}}\, دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} (ص)^{٥}\, دس = -\int ص^{٥}\, دص$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= -\frac{١}{٦} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} + جـ$

٢) $\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧}+٥س^{٣}}\, دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}} \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\, دس$

$\int س^{٣} \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\, دس$

$ص = س^{٤}+٥$ $\qquad$ $دص = ٤س^{٣}\, دس$

$\int س^{٣} (س^{٤}+٥)^{\frac{١}{٣}}\, دس = \int \frac{١}{٤} ص^{\frac{١}{٣}}\, دص$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(س^{٤}+٥)^{٤}} + جـ$

٣) $\int \sqrt[٣]{٤س^{٥}+٢س^{٣}}\, دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س \sqrt[٣]{٤س^{٢}+٢}\, دس$

$ص = ٤س^{٢}+٢$ $\qquad$ $دص = ٨س\, دس$

$\int س (٤س^{٢}+٢)^{\frac{١}{٣}}\, دس = \int \frac{١}{٨} ص^{\frac{١}{٣}}\, دص$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٣٢} \sqrt[٣]{(٤س^{٢}+٢)^{٤}} + جـ$

٤) $\int (٧س^{٥} - ٢س)^{٣}\, دس$

$\int س^{٣} (٧س^{٤} - ٢)^{٣}\, دس$

$ص = ٧س^{٤}-٢$ $\qquad$ $دص = ٢٨س^{٣}$

$\int \frac{١}{٢٨} ص^{٣}\, دص = \frac{١}{٢٨} \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{١١٢} (٧س^{٤}-٢)^{٤} + جـ$

تدريب (٤)

١) $\int_{٠}^{٤} س \sqrt{س^{٢}+٩}\, دس$

$ص = س^{٢}+٩$ $\qquad$ $دص = ٢س\, دس$

$\int_{٩}^{٢٥} \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٢}}\, دص$ $\qquad$ $س=٠$ $ص=٩$ ، $س=٤$ $ص=٢٥$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \left[\sqrt{ص^{٣}}\right]_{٩}^{٢٥}$

$\frac{١}{٣} (١٢٥ - ٢٧) = \frac{٩٨}{٣}$

٢) $\int_{1}^{2} \frac{(\text{س}+1)^{5}}{\text{س}^{7}}\,\text{دس}$

$\int_{1}^{2} \frac{(\text{س}+1)^{5}}{\text{س}^{5}\,\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$= \int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}^{2}}\left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}}\right)^{5}\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = 1 + \frac{1}{\text{س}}$ $\text{دص} = \frac{-1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$-\int_{2}^{\frac{3}{2}} \text{ص}^{5}\,\text{دص}$ $\text{س}=1$ ، $\text{ص}=2$

$\text{س}=2$ ، $\text{ص}=\frac{3}{2}$

$-\left[\frac{\text{ص}^{6}}{6}\right]_{2}^{\frac{3}{2}}$

$-\frac{1}{6}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{6} - (2)^{6}\right) = \frac{3367}{384}$

تدريب (٥)

١) $\int (\text{س}^{2}+1)\ \text{جا}(\text{س}^{3}+3\text{س}+1)\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{3}+3\text{س}+1$ $\text{دص} = (3\text{س}^{2}+3)\,\text{دس}$

$\int \frac{1}{3}\,\text{جا ص}\ \text{دص} = -\frac{1}{3}\,\text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{3}\,\text{جتا}(\text{س}^{3}+3\text{س}+1) + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}\ \text{ظا}^{2}(\text{س}^{2}+5)\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{2}+5$ $\text{دص} = 2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{1}{2}\,\text{ظا}^{2}\text{ص}\ \text{دص} = \frac{1}{2}\int(\text{قا}^{2}\text{ص}-1)\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}(\text{ظا ص} - \text{ص}) + \text{جـ} = \frac{1}{2}\left(\text{ظا}(\text{س}^{2}+5) - (\text{س}^{2}+5)\right) + \text{جـ}$

٣) $\int_{1}^{2} \frac{\text{هـ}^{\frac{3}{\text{س}}}}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{3}{\text{س}}$ $\text{دص} = -\frac{3}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = \frac{3}{2}$

$\int_{3}^{\frac{3}{2}} \frac{-1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= -\frac{1}{3}\left[\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{3}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\left(\text{هـ}^{\frac{3}{2}} - \text{هـ}^{3}\right)$

تدريب (٦) :

١) $\int \text{ظا}^{5}3\text{س}\ \text{قا}^{2}3\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}\,3\text{س}$ $\text{دص} = 3\,\text{قا}^{2}3\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{1}{3}\,\text{ص}^{5}\,\text{دص} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{ص}^{6}}{6} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{18}\,\text{ظا}^{6}3\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{\text{جتا}\,2\text{س}}{\text{قتا}^{5}2\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{جا}^{5}2\text{س}\ \text{جتا}\,2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}\,2\text{س}$ $\text{دص} = 2\,\text{جتا}\,2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{1}{2}\,\text{ص}^{5}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{ص}^{6}}{6} + \text{جـ}$

$\frac{1}{12}\,\text{جا}^{6}2\text{س} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جا}^{3}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{جا س} \times \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{جا س}\,(1-\text{جتا}^{2}\text{س})\,\text{دس}$ $\text{ص} = \text{جتا س}$

$-\int (1-\text{ص}^{2})\,\text{دص}$ $\text{دص} = -\text{جا س}\ \text{دس}$

$= -\text{ص} + \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{جـ} = -\text{جتا س} + \frac{\text{جتا}^{3}\text{س}}{3} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{جا}^{٤} ٥\text{س}\ \text{جتا}^{٣} ٥\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا} ٥\text{س}$ ، $\text{دص} = ٥\ \text{جتا} ٥\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{١}{٥} \text{ص}^{٤} \times \text{جتا}^{٢} ٥\text{س}\ \text{دص}$

$\leftarrow (١ - \text{جا}^{٢} ٥\text{س})$

$\int \frac{١}{٥} \text{ص}^{٤} (١ - \text{ص}^{٢})\ \text{دص}$

$= \int \frac{١}{٥} (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦})\ \text{دص}$

$\frac{١}{٥} \left(\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٧}}{٧} \right) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^{٥} ٥\text{س}}{٢٥} - \frac{\text{جا}^{٧} ٥\text{س}}{٣٥} + \text{جـ}$

تمارين ومسائل صفحة (٢٧٣ ، ٢٧٤)

س١)

أ) $\int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٣) \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٦\text{س}$ ، $\text{دص} = (٢\text{س} + ٦)\ \text{دس}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ٠$

$\int_{٠}^{١٦} \frac{١}{٢} \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص}$ $\quad \text{س} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ١٦$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \left[\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١٦}$

$\frac{١}{٣} \left(\sqrt{١٦^{٣}} - \sqrt{٠^{٣}} \right) = \frac{٦٤}{٣}$

ب) $\int \frac{٢\text{س} - ٣}{٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٥}\ \text{دس}$

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٥$ ، $\text{دص} = (٤\text{س} - ٦)\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٥| + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{٢}{(٤\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٧}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{٢}{((٢\text{س} - ٥)^{٢})^{٧}}\ \text{دس}$

$= \int ٢ (٢\text{س} - ٥)^{-١٤}\ \text{دس}$

$= \frac{٢ (٢\text{س} - ٥)^{-١٣}}{٢ \times -١٣} + \text{جـ} = \frac{-١}{١٣ (٢\text{س} - ٥)^{١٣}} + \text{جـ}$

د) $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}\ \text{دس}$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{(\text{س} - ٢)^{٢}}\ \text{دس} = \int_{٣}^{٤} ٧ (\text{س} - ٢)^{-٢}\ \text{دس}$

$= \left[\frac{-٧}{\text{س} - ٢} \right]_{٣}^{٤} = \frac{-٧}{٢} + \frac{٧}{١} = \frac{٧}{٢}$

هـ) $\int \frac{\text{ظا}^{٢} \frac{١}{\text{س}}}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

$= \int - \text{ظا}^{٢} \text{ص}\ \text{دص}$

$= \int -(\text{قا}^{٢} \text{ص} - ١)\ \text{دص}$

$= -(-\text{ظا ص} - \text{ص}) + \text{جـ}$

$= \text{ظا} \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$

و) $\int \frac{(٥ + \sqrt{\text{س}})^{٧}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + ٥$ $\quad \text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\int ٢ \text{ص}^{٧}\ \text{دص} = \frac{٢ \text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

$\frac{(٥ + \sqrt{\text{س}})^{٨}}{٤} + \text{جـ}$

ن) $\int \frac{١}{س^٢}\sqrt{\frac{٢س+١}{س}}\ دس$

$ص = \frac{٢س+١}{س}$ ، $ص = ٢ + \frac{١}{س}$ ، $دص = \frac{-١}{س^٢}\ دس$

$\int \frac{١}{س^٢}\ ص^{\frac{١}{٢}} .\ دس = \int - ص^{\frac{١}{٢}}\ دص$

$= -\frac{٢}{٣}\ ص^{\frac{٣}{٢}} + ج$

$= -\frac{٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢س+١}{س}\right)^٣} + ج$

ع) $\int_{١}^{هـ^٣} \frac{١}{س\sqrt{١+لو_{هـ}س}}\ دس$

$ص = ١ + لو_{هـ}س$ ، $دص = \frac{١}{س}\ دس$

$س = ١$ ، $ص = ١$

$س = هـ^٣$ ، $ص = ٤$

$\int_{١}^{٤} ص^{-\frac{١}{٢}}\ دص = ٢\ ص^{\frac{١}{٢}}\Big]_{١}^{٤}$

$٢(\sqrt{٤} - \sqrt{١}) = ٢$

ط) $\int هـ^{س^٣ + ٢لو_{هـ}س}\ دس$

$= \int هـ^{س^٣} \times هـ^{٢لو_{هـ}س}\ دس = \int هـ^{س^٣} \times هـ^{لو_{هـ}س^٢}\ دس$

$= \int س^٢\ هـ^{س^٣}\ دس$

$ص = س^٣$ $دص = ٣س^٢\ دس$

$\int \frac{١}{٣}\ هـ^{ص}\ دص = \frac{١}{٣}\ هـ^{ص} + ج$

$= \frac{١}{٣}\ هـ^{س^٣} + ج$

ي) $\int \frac{س^٣}{(س+١)^٥}\ دس$

$= \int \frac{١}{(س+١)^٢} \times \frac{س^٣}{(س+١)^٣}\ دس$

$= \int \frac{١}{(س+١)^٢}\left(\frac{س}{س+١}\right)^٣ دس$

$ص = \frac{س}{س+١}$ ، $دص = \frac{١}{(س+١)^٢}\ دس$

$= \int ص^٣\ دص = \frac{ص^٤}{٤} + ج$

$\frac{١}{٤}\left(\frac{س}{س+١}\right)^٤ + ج$

ك) $\int \sqrt[٣]{س^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\ دس$

$= \int \sqrt[٣]{\frac{١}{س^{\frac{٣}{٤}}} + ١}\ دس = \int \sqrt[٣]{\frac{١ + س^{\frac{٣}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٤}}}}\ دس$

$= \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٤}}}\sqrt[٣]{١+س^{\frac{٣}{٤}}}\ دس$

$ص = ١ + س^{\frac{٣}{٤}}$ ، $دص = +\frac{٣}{٤}\ س^{-\frac{١}{٤}}\ دس$

$= \int +\frac{٤}{٣}\ ص^{\frac{١}{٣}}\ دص = +\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}\ ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \sqrt[٣]{(١+س^{\frac{٣}{٤}})^٤} + ج$

ل) $\int جتا^٣س\ (١+جاس)^٧\ دس$

$ص = ١ + جاس$ ، $دص = جتاس\ دس$

$\int جتا^٢س\ ص^٧\ دص = \int (١ - جا^٢س)\ ص^٧\ دص$

$= \int (١ - (ص-١)^٢)\ ص^٧\ دص$

$= \int ٢ص^٨ - ص^٩\ دص = \frac{٢ص^٩}{٩} - \frac{ص^{١٠}}{١٠} + ج$

$= \frac{٢(١+جاس)^٩}{٩} - \frac{(١+جاس)^{١٠}}{١٠} + ج$

س٢) إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٨$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}$ $\qquad$ $\text{دص} = ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{دس}$

$\text{س} = ١ \rightarrow \text{ص} = ١$

$\text{ص} = ٢ \qquad \text{ص} = ٨$

$\int_{١}^{٢} \text{س}^{٢}\,\text{ق}(\text{س}^{٣})\,\text{دس} = \frac{١}{٣}\int_{١}^{٨} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٣} \times ١٨ = ٦$

س٣) $\int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٨$

$\text{ص} = \text{جا}٢\text{س}$ ، $\text{دص} = ٢\,\text{جتا}٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \rightarrow \text{ص} = ٠$

$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \qquad \text{ص} = ١$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣\,\text{جتا}٢\text{س}\,\text{ق}(\text{جا}٢\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{٣}{٢}\int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \frac{٣}{٢} \times ٨ = ١٢$

س٤) أ) $\int \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{لوهـ}\,\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{لوهـ}\,\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ $\qquad$ $\text{دص} = \text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

ب) $\int_{٠}^{٢} \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt{(\text{س}^{٢}+٩)^{٣}}}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{٢} \text{س}^{٣}\,(\text{س}^{٢}+٩)^{-\frac{٣}{٢}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٩$ ، $\text{دص} = ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ٩$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ١٣$

$\int_{٩}^{١٣} \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{-\frac{٣}{٢}}\,\text{دص}$

$\int_{٩}^{١٣} \frac{١}{٢}(\text{ص}-٩)\,\text{ص}^{-\frac{٣}{٢}}\,\text{دص} = \int_{٩}^{١٣} \frac{١}{٢}(\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} - ٩\text{ص}^{-\frac{٣}{٢}})\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٢}\left[(٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - ٩ \times -٢\,\text{ص}^{-\frac{١}{٢}})\right]_{٩}^{١٣}$

$= \frac{١}{٢}\left((٢\sqrt{١٣} + \frac{١٨}{\sqrt{١٣}}) - (٢ \times ٣ + \frac{١٨}{٣})\right)$

$= \frac{١}{٢}\left(٢\sqrt{١٣} + \frac{١٨}{\sqrt{١٣}} - ١٢\right)$

جـ) $\int \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,(١ - \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$= \int ١ - \text{ص}^{٢}\,\text{دص}$

$= \text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{جاس\sqrt{جا^{٢}س+٤}}{قاس}\,دس$

$= \int جاس\,جتاس\sqrt{جا^{٢}س+٤}\,دس$

$ص = جا^{٢}س+٤$ ، $دص = ٢جاس\,جتاس\,دس$

$\int \frac{١}{٢}ص^{\frac{١}{٢}}\,دص = \frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}+جـ$

$= \frac{١}{٣}\sqrt{(جا^{٢}س+٤)^{٣}}+جـ$

هـ) $\int قتا^{٤}٦س\,ظتا^{٣}٦س\,دس$

$ص = ظتا٦س$ ، $دص = -٦قتا^{٢}٦س\,دس$

$= \int -\frac{١}{٦}قتا^{٢}٦س\,ص^{٣}\,دص$

$= \int -\frac{١}{٦}(ظتا^{٢}٦س+١)\,ص^{٣}\,دص$

$= \int -\frac{١}{٦}(ص^{٥}+ص^{٣})\,دص$

$= -\frac{١}{٦}\left(\frac{ص^{٦}}{٦}+\frac{ص^{٤}}{٤}\right)+جـ$

$= -\frac{١}{٦}\left(\frac{ظتا^{٦}س}{٦}+\frac{ظتا^{٤}٦س}{٤}\right)+جـ$

و) $\int جتا^{٤}س\,دس$

$\int (جتا^{٢}س)^{٢}\,دس = \int \left(\frac{١}{٢}(١+جتا٢س)\right)^{٢}دس$

$= \int \frac{١}{٤}(١+٢جتا٢س+جتا^{٢}٢س)\,دس$

$= \int \frac{١}{٤}\left(١+٢جتا٢س+\frac{١}{٢}(١+جتا٤س)\right)\,دس$

$= \frac{١}{٤}\left(س+جا٢س+\frac{١}{٢}(س+\frac{١}{٤}جا٤س)\right)+جـ$

ز) $\int \frac{جا٢س}{(١+جتا^{٢}س)^{٥}}\,دس$

$\int جا٢س\,(١+جتا^{٢}س)^{-٥}\,دس$

$ص = ١+جتا^{٢}س$ ، $دص = -٢جتاس\,جاس\,دس$

$\int -ص^{-٥}\,دص = -\frac{ص^{-٤}}{-٤}+جـ$

$= \frac{١}{٤(١+جتا^{٢}س)^{٤}}+جـ$

ح) $\int جا٢س\,هـ^{جتا٢س}\,دس$

$ص = جتا٢س$ ، $دص = -٢جا٢س\,دس$

$\int -\frac{١}{٢}هـ^{ص}\,دص$

$= -\frac{١}{٢}هـ^{ص}+جـ = -\frac{١}{٢}هـ^{جتا٢س}+جـ$

ط $\int \frac{\sqrt[٣]{س}}{٥-س\sqrt[٣]{س}}\,دس$

$ص = ٥-س\sqrt[٣]{س}$ ، $ص = ٥-س^{\frac{٤}{٣}}$

$دص = -\frac{٤}{٣}س^{\frac{١}{٣}}\,دس$

$\int -\frac{٣}{٤}\times\frac{١}{ص}\,دص = -\frac{٣}{٤}لو_{هـ}|ص|+جـ$

$= -\frac{٣}{٤}لو_{هـ}|٥-س\sqrt[٣]{س}|+جـ$

ي) $\int قا^{٤}س\,دس = \int قا^{٢}س\times قا^{٢}س\,دس$

$= \int قا^{٢}س\,(ظا^{٢}س+١)\,دس$

$= \int ص^{٢}+١\,دص$ $\qquad ص = ظاس$

$= \frac{ص^{٣}}{٣}+ص+جـ$ $\qquad دص = قا^{٢}س\,دس$

$= \frac{ظا^{٣}س}{٣}+ظاس+جـ$

ك) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(٣+\sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ٣+\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{1}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\int \frac{٢}{\text{ص}}\,\text{دص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣+\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

ل) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢-٢\,\text{جتا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢(١-\text{جتا}^٢\text{س})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢\,\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\int \text{قتا}^٢\text{س}\,\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس}+٣$ ، $\text{دص} = -\text{قتا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$-\frac{١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص} = -\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= -\frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{ظتاس}+٣)^٤} + \text{جـ}$

م) $\int \text{جاس}\,(١+\text{جتا}٢\text{س})^٥\,\text{دس}$

$= \int \text{جاس}\,(٢\,\text{جتا}^٢\text{س})^٥\,\text{دس}$

$= ٣٢\int \text{جاس}\,\text{جتا}^{١٠}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{دص} = -\text{جاس}\,\text{دس}$

$-٣٢\int \text{ص}^{١٠}\,\text{دص}$

$= -٣٢\,\frac{\text{ص}^{١١}}{١١} + \text{جـ}$

$= -٣٢\,\frac{\text{جتا}^{١١}\text{س}}{١١} + \text{جـ}$

ن) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}-\text{جتا}^٣\text{س}}\,\text{دس}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}\,(١-\text{جتا}^٢\text{س})}\,\text{دس}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}}\times\sqrt{\text{جا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جاس}|\,\sqrt{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$\underset{٠}{|}\;+\;\;+\;\underset{\frac{\pi}{٢}}{|}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\,(\text{جتاس})^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{دص} = -\text{جاس}\,\text{دس}$

$-\int_{١}^{٠} \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$ $\quad$ $\text{س} = ٠ \to \text{ص} = ١$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٢} \to \text{ص} = ٠$

$= -\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{\text{ص}^٣}\right]_{١}^{٠}$

$= \text{صفر} + \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

س) $\int \frac{١}{\text{س}^٢}\sqrt{\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ٢+\frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^٢}\,\text{دس}$

$-\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$

$-\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = -\frac{٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^٣} + \text{جـ}$

ع) $\int \text{جتا}٢\text{س}\,(\text{جاس}-\text{جتاس})^٨\,\text{دس}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س}-\text{جا}^٢\text{س})(\text{جاس}-\text{جتاس})^٨\,\text{دس}$

$= \int (\text{جتاس}+\text{جاس})(\text{جتاس}-\text{جاس})(\text{جاس}-\text{جتاس})^٨\,\text{دس}$

$= -\int (\text{جتاس}+\text{جاس})(\text{جاس}-\text{جتاس})^٩\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}-\text{جتاس}$ ، $\text{دص} = (\text{جتاس}+\text{جاس})\,\text{دس}$

$= -\int \text{ص}^٩\,\text{دص} = -\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

$= -\frac{(\text{جاس}-\text{جتاس})^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

س٥) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}} \times \text{س}^{٢}}\, \text{دس}$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{١}{\text{س}^{٢}} \left(\frac{\text{س}-١}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\text{س}-١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ١ - \frac{١}{\text{س}}$

$\text{دص} = +\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ $\text{س} = \frac{١}{٢}$ $\text{ص} = -١$

$\text{س} = ١$ $\text{ص} = ٠$

$\int_{-١}^{٠} \text{ص}^{\text{ن}}\, \text{دص} = \left[\frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right]_{-١}^{٠}$

$= \text{صفر} - \frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$

ن: فردي ⇐ ن+١ زوجي $(-١)^{\text{ن}+١} = ١$

$= \frac{-١}{\text{ن}+١}$

ن: زوجي ⇐ ن+١ فردي $(-١)^{\text{ن}+١} = -١$

$= - \times \frac{-١}{\text{ن}+١} = \frac{١}{\text{ن}+١}$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\text{س}-١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}\, \text{دس} = \begin{cases} \frac{-١}{\text{ن}+١} ، & \text{ن: فردي} \\ \frac{١}{\text{ن}+١} & \text{ن: زوجي} \end{cases}$$

س٦)

أ) $\int \text{جتا}^{١٠}\text{س}\ \text{جا}^{٧}\text{س}\ \text{دس}$

نفرض ص = جتا س

ب) $\int \text{جتا}^{٥}\text{س}\ \text{جا}^{٧}\text{س}\ \text{دس}$

نفرض ص = جا س

جـ) $\int \text{ظا}^{٥}\text{س}\ \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

ص = ظا س

د) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\ \text{قا}^{٥}\text{س}\ \text{دس}$

ص = قا س

هـ) $\int \text{ظتا}^{٦}\text{س}\ \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

ص = ظتا س

و) $\int \text{ظتا}^{٧}\text{س}\ \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

ص = ظتا س

الفصل الثاني : طرائق التكامل

ثانياً: التكامل بالأجزاء

تدريب (١)

١) $\int$ س جتا س دس

و = س   دو = دس

ده = جتا س دس   ه = جا س

$\int$ س جتا س دس = س جا س − $\int$ جا س دس

= س جا س + جتا س + ث

٢) $\int$ س جا٥س دس

و = س   دو = دس

ده = جا٥س دس   ه = −$\frac{١}{٥}$ جتا٥س

$\int$ س جا٥س دس = −$\frac{١}{٥}$ س جتا٥س + $\int \frac{١}{٥}$ جتا٥س دس

= −$\frac{١}{٥}$ س جتا٥س + $\frac{١}{٢٥}$ جا٥س + ث

٣) $\int$ (٢س − ٣) هـ^{س} دس

و = ٢س − ٣   دو = ٢ دس

ده = هـ^{س} دس   ه = هـ^{س}

$\int$ (٢س − ٣) هـ^{س} دس = (٢س − ٣) هـ^{س} − $\int$ ٢ هـ^{س} دس

= (٢س − ٣) هـ^{س} − ٢ هـ^{س} + ث

٤) $\int$ س قا^{٢}س دس

و = س   دو = دس

ده = قا^{٢}س دس   ه = ظا س

$\int$ س قا^{٢}س دس = س ظا س − $\int$ ظا س دس

= س ظا س + لو$_{هـ}$ |جتا س| + ث

تدريب (٢)

١) $\int$ س جا^{٢}س دس

و = س   دو = دس

ده = جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س) دس   ه = $\frac{١}{٢}$ (س − $\frac{١}{٢}$ جا٢س)

$\int$ س جا^{٢}س دس = $\frac{١}{٢}$ س (س − $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\int \frac{١}{٢}$ (س − $\frac{١}{٢}$ جا٢س) دس

= $\frac{١}{٢}$ س (س − $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\frac{١}{٢}$ ($\frac{س^{٢}}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ جتا٢س) + ث

٢) $\int$ س لو$_{هـ}$ س^{٣} دس = $\int$ ٣س لو$_{هـ}$ س دس

و = لو$_{هـ}$ س   دو = $\frac{١}{س}$ دس

ده = ٣س دس   ه = $\frac{٣س^{٢}}{٢}$

$\int$ ٣س لو$_{هـ}$ س دس = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س − $\int \frac{٣}{٢}$ س دس

= $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} لو$_{هـ}$ س − $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + ث

٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٣س جا س دس

و = ٣س   دو = ٣ دس

ده = جا س دس   ه = − جتا س

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٣س جا س دس = $\left[-٣س \text{ جتا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٣ جتا س دس

= (−٣ × $\frac{\pi}{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ٣ × ٠ جتا ٠) + $\left[٣ \text{ جا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= صفر + ٣ جا $\frac{\pi}{٢}$ − ٣ جا ٠

= ٣

٤) ∫ $\frac{\text{س}}{١ - \text{جتا}٢\text{س}}$ دس = ∫ $\frac{\text{س}}{٢\text{حا}^{٢}\text{س}}$ دس

= ∫ $\frac{١}{٢}$ س قتا^{٢}س دس

ق = $\frac{١}{٢}$ س   دق = $\frac{١}{٢}$ دس

دهـ = قتا^{٢}س دس   هـ = − ظتاس

∫ $\frac{١}{٢}$ س قتا^{٢}س دس = − $\frac{١}{٢}$ س ظتاس + ∫ $\frac{١}{٢}$ ظتاس دس

= − $\frac{١}{٢}$ س ظتاس + $\frac{١}{٢}$ لو$_{\text{هـ}}$|حاس| + جـ

<u>تدريب (٣)</u> :

١) ∫ س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ دس

ق = س^{٢} دق = ٢س دس

دهـ = هـ$^{\text{س}}$ دس   هـ = هـ$^{\text{س}}$

∫ س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ دس = س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ − ∫ ٢س هـ$^{\text{س}}$ دس

أجزاء مرة أخرى

ق = ٢س   دق = ٢ دس

دهـ = هـ$^{\text{س}}$ دس   هـ = هـ$^{\text{س}}$

∫ ٢س هـ$^{\text{س}}$ دس = ٢س هـ$^{\text{س}}$ − ∫ ٢هـ$^{\text{س}}$ دس

= ٢س هـ$^{\text{س}}$ − ٢هـ$^{\text{س}}$

∴ ∫ س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ دس = س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ − ٢س هـ$^{\text{س}}$ + ٢هـ$^{\text{س}}$ + جـ

٢) ∫ س (لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} دس

ق = (لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} دق = ٢لو$_{\text{هـ}}$س × $\frac{١}{\text{س}}$ دس

دهـ = س دس   هـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

∫ س(لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} دس = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$(لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} − ∫ س لو$_{\text{هـ}}$س دس

أجزاء مرة أخرى

ق = لو$_{\text{هـ}}$س   دق = $\frac{١}{\text{س}}$ دس

دهـ = س دس   هـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

∫ س لو$_{\text{هـ}}$س دس = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لو$_{\text{هـ}}$س − ∫ $\frac{١}{٢}$ س دس

= $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لو$_{\text{هـ}}$س − $\frac{\text{س}^{٢}}{٤}$

∴ ∫ س(لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} دس = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$(لو$_{\text{هـ}}$س)^{٢} − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لو$_{\text{هـ}}$س + $\frac{\text{س}^{٢}}{٤}$ + جـ

<u>تدريب (٤)</u>

١) ∫ س^{٣} هـ$^{\text{س}}$ دس

ق		دهـ
س^{٣}	+	هـ$^{\text{س}}$
٣س^{٢}	−	هـ$^{\text{س}}$
٦س	+	هـ$^{\text{س}}$
٦	−	هـ$^{\text{س}}$
صفر		هـ$^{\text{س}}$

∫ س^{٣} هـ$^{\text{س}}$ دس = س^{٣} هـ$^{\text{س}}$ − ٣س^{٢} هـ$^{\text{س}}$ + ٦س هـ$^{\text{س}}$ − ٦هـ$^{\text{س}}$ + جـ

٢) ∫ س^{٢} جتا٤س دس

ق		دهـ
س^{٢}	+	جتا٤س
٢س	−	$\frac{١}{٤}$ حا٤س
٢	+	− $\frac{١}{١٦}$ جتا٤س
صفر		− $\frac{١}{٦٤}$ حا٤س

∫ س^{٢} جتا٤س دس = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} حا٤س + $\frac{١}{٨}$ س جتا٤س − $\frac{١}{٣٢}$ حا٤س + جـ

٣) $\int$ (س^{٢} − س) جا٢س دس

م		د هـ
س^{٢} − س		جا٢س
٢س − ١	+	− $\frac{١}{٢}$ جتا٢س
٢	−	− $\frac{١}{٤}$ جا٢س
صفر	+	$\frac{١}{٨}$ جتا٢س

$\int$ (س^{٢} − س) جا٢س دس = − $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} − س) جتا٢س + $\frac{١}{٤}$ (٢س − ١) جا٢س

+ $\frac{١}{٤}$ جتا٢س + جـ

٤) $\int$ س^{٢} (٢س + ١)^{٥} دس

م		د هـ
س^{٢}		(٢س + ١)^{٥}
٢س	+	$\frac{(٢س + ١)^{٦}}{١٢}$
٢	−	$\frac{(٢س + ١)^{٧}}{١٦٨}$
صفر	+	$\frac{(٢س + ١)^{٨}}{٢٦٨٨}$

$\int$ س^{٢} (٢س + ١)^{٥} دس = $\frac{س^{٢}}{١٢}$ (٢س + ١)^{٦} − $\frac{س}{٨٤}$ (٢س + ١)^{٧}

+ $\frac{(٢س + ١)^{٨}}{١٣٤٤}$ + جـ

تدريب (٥) :

١) $\int$ قا^{٢}س هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ دس

ص = $\sqrt{ظاس}$ ، ص^{٢} = ظاس ، ٢ص دص = قا^{٢}س دس

$\int$ ٢ص هـ^{ص} دص

م = ٢ص   د م = ٢ دص

د هـ = هـ^{ص} دص   هـ = هـ^{ص}

$\int$ ٢ص هـ^{ص} دص = ٢ص هـ^{ص} − ٢هـ^{ص} + جـ

= ٢$\sqrt{ظاس}$ هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ − ٢هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ + جـ

٢) $\int$ جا٢س هـ^{جاس} دس

ص = جاس   ، دص = جتاس دس

$\int$ ٢جاس هـ^{جاس} جتاس دس

$\int$ ٢ص هـ^{ص} دص   (تكامل بالأجزاء)

= ٢ص هـ^{ص} − ٢ هـ^{ص} + جـ

= ٢جاس هـ^{جاس} − ٢هـ^{جاس} + جـ

٣) $\int$ جتا $\sqrt{٢س+١}$ دس

ص = $\sqrt{٢س+١}$ ، ص^{٢} = ٢س + ١ ، ٢ص دص = ٢دس

$\int$ ص جتاص دص

م = ص   د م = دص

د هـ = جتاص دص   هـ = جاص

$\int$ ص جتاص دص = ص جاص + جتاص + جـ

= $\sqrt{٢س+١}$ جا $\sqrt{٢س+١}$ + جتا $\sqrt{٢س+١}$ + جـ

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٣قا^{٤}س لو$_{هـ}$ظاس دس

ص = ظاس   دص = قا^{٢}س دس

س = $\frac{\pi}{٤}$ ص = ١

س = $\frac{\pi}{٣}$ ص = $\sqrt{٣}$

$\int_{١}^{\sqrt{٣}}$ ٣ قا^{٢}س لو$_{هـ}$ص دص = $\int_{١}^{\sqrt{٣}}$ ٣(ص^{٢}+١) لو$_{هـ}$ص دص

(ظا^{٢}س+١)

م = لو$_{هـ}$ص   د م = $\frac{١}{ص}$ دص

د هـ = ٣(ص^{٢}+١) دص   هـ = ٣($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص)

= ٣($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) لو$_{هـ}$ص $]_{١}^{\sqrt{٣}}$ − $\int_{١}^{\sqrt{٣}}$ ٣($\frac{ص^{٢}}{٣}$ + ١) دص

= ٣($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) لو$_{هـ}$ص $]_{١}^{\sqrt{٣}}$ − $[$ ٣ ($\frac{ص^{٣}}{٩}$ + ص) $]_{١}^{\sqrt{٣}}$

(٣($\frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٣}$ + $\sqrt{٣}$) لو$_{هـ}$$\sqrt{٣}$) − (صفر) − ٣(($\frac{(\sqrt{٣})^{٢}}{٩}$ + $\sqrt{٣}$) − ($\frac{١}{٩}$ + ١))

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٢

س١) أ) $\int_{0}^{\pi} (\text{٣س}+١)\,\text{جتا٣س}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{٣س} + ١$ $\text{دق} = ٣\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جتا٣س}\,\text{دس}$ $\text{هـ} = \frac{١}{٣}\,\text{جا٣س}$

$\int_{0}^{\pi} (\text{٣س}+١)\,\text{جتا٣س}\,\text{دس} =$

$\left[\frac{١}{٣}(\text{٣س}+١)\,\text{جا٣س}\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{٢}{٣}\,\text{جا٣س}\,\text{دس}$

$\left(\frac{١}{٣}(٣\pi+١)\,\text{جا}٣\pi\right) - \left(\frac{١}{٣}(٣\times٠+١)\,\text{جا}٠\right) + \frac{٢}{٩}\,\text{جتا٣س}\Big]_{0}^{\pi}$

$\text{صفر} + \frac{٢}{٩}\,\text{جتا}٣\pi - \frac{٢}{٩}\,\text{جتا صفر}$

$-\frac{٢}{٩} - \frac{٢}{٩} = -\frac{٤}{٩}$

ب) $\int \text{س}^٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\text{دق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{س}^٢\,\text{دس}$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^٣}{٣}$

$\int \text{س}^٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^٣}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}^٢}{٣}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^٣}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^٣}{٩} + \text{جـ}$

جـ) $\int_{-٢}^{١} \text{٥س}\,\sqrt{\text{س}+٣}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{٥س}$ $\text{دق} = ٥\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}}$ $\text{هـ} = \frac{٢}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}$

$\int_{-٢}^{١} \text{٥س}\,\sqrt{\text{س}+٣}\,\text{دس} = \left[\frac{\text{١٠س}}{٣}\sqrt{(\text{س}+٣)^٣}\right]_{-٢}^{١} - \int_{-٢}^{١} \frac{١٠}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{دس}$

$\left(\frac{١٠}{٣}\times ٨ + \frac{٢٠}{٣}\times ١\right) - \left[\frac{١٠}{٣}\times\frac{٢}{٥}\sqrt{(\text{س}+٣)^٥}\right]_{-٢}^{١}$

$\frac{١٠٠}{٣} - \left(\frac{٤}{٣}\times ٣٢ - \frac{٤}{٣}\times ١\right)$

$\frac{١٠٠}{٣} - \frac{١٢٤}{٣} = -٨$

د) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^٣\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{س ظاس قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}$ $\text{دق} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{ظاس قا}^٢\text{س}$ $\text{هـ} = \frac{١}{٢}\,\text{قا}^٢\text{س}$

تكامل بالتعويض

$\int \text{س ظاس قا}^٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\,\text{س قا}^٢\text{س} - \int \frac{١}{٢}\,\text{قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{س قا}^٢\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

هـ) $\int \text{قا}^٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = \text{قا}^٢\text{س}\,\text{دس}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\text{دق} = \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{دص}$ $\text{هـ} = \text{ص}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص} = \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{دص}$

$= \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

و) $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,\text{دس} = \int \text{س هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}$ $\text{دق} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس}$ $\text{هـ} = -\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}}$

$\int \text{س هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس} = -\frac{١}{٢}\,\text{س هـ}^{-\text{٢س}} + \int \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{س هـ}^{-\text{٢س}} - \frac{١}{٤}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{جـ}$

ن) $\int \text{جتا}\sqrt[3]{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{ص}^{٣} = \text{س} \Leftarrow ٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int ٣\text{ص}^{٢}\ \text{جتا ص}\ \text{دص}$

ق		دهـ
$٣\text{ص}^{٢}$		جتا ص
٦ص	+	جا ص
٦	−	− جتا ص
صفر	+	− جا ص

$= ٣\text{ص}^{٢}\,\text{جا ص} + ٦\text{ص}\,\text{جتا ص} - ٦\,\text{جا ص} + \text{جـ}$

$= ٣\left(\sqrt[3]{\text{س}}\right)^{٢}\text{جا}\sqrt[3]{\text{س}} + ٦\sqrt[3]{\text{س}}\ \text{جتا}\sqrt[3]{\text{س}} - ٦\,\text{جا}\sqrt[3]{\text{س}} + \text{جـ}$

ع) $\int \text{جتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ $\qquad \text{دص} = \text{جتاس دس}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad \text{دق} = \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{دص}$ $\qquad \text{هـ} = \text{ص}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \text{جاس}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$

ط) $\int \text{س}\,(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}\ \text{دس}$

$= \int \text{س}\,(١ + \text{جا}٢\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}$ $\qquad \text{دق} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = ١ + \text{جا}٢\text{س}\ \text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \text{س} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س}$

$\int \text{س}(١ + \text{جا}٢\text{س})\,\text{دس} = \text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س} - \int (\text{س} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٢\text{س})\,\text{دس}$

$= \text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س} - \left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

ي) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad \text{دق} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \frac{١}{٣}\text{جا}٣\text{س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٣\text{س} - \int \frac{١}{٣}\text{جا}٣\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

أجزاء مرة أخرى

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad \text{دق} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دهـ} = \frac{١}{٣}\text{جا}٣\text{س}$ $\qquad \text{هـ} = -\frac{١}{٩}\text{جتا}٣\text{س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس} =$

$\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٣\text{س} + \frac{١}{٩}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س} - \int \frac{١}{٩}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس}$

$\frac{١٠}{٩}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٣\text{س} + \frac{١}{٩}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\ \text{دس} = \frac{٩}{١٠}\left(\frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}٣\text{س} + \frac{١}{٩}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}٣\text{س}\right) + \text{جـ}$

ك) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٣)}{\sqrt{\text{س}+٣}}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+٣}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{س} + ٣$

$٢\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$

$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^{٢}}{\text{ص}} \cdot ٢\text{ص}\,\text{دص} = ٤\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad \text{دق} = \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{دهـ} = ٤\,\text{دص}$ $\qquad \text{هـ} = ٤\text{ص}$

$٤\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = ٤\,\text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - ٤\text{ص} + \text{جـ}$

$= ٤\sqrt{\text{س}+٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+٣} - ٤\sqrt{\text{س}+٣} + \text{جـ}$

ل) ∫ (س^{٢} − ٢س) $\sqrt{\text{س}+٣}$ دس

و		دهـ
س^{٢} − ٢س	+	(س + ٣)$^{\frac{١}{٢}}$
٢س − ٢	−	$\frac{٢}{٣}$ (س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$
٢	+	$\frac{٤}{١٥}$ (س + ٣)$^{\frac{٥}{٢}}$
صفر		$\frac{٨}{١٠٥}$ (س + ٣)$^{\frac{٧}{٢}}$

∫ (س^{٢} − ٢س) $\sqrt{\text{س}+٣}$ دس =

$\frac{٢}{٣}$ (س^{٢} − ٢س) $\sqrt{(\text{س}+٣)^{٣}}$ − $\frac{٤}{١٥}$ (٢س − ٢) $\sqrt{(\text{س}+٣)^{٥}}$

+ $\frac{١٦}{١٠٥}$ $\sqrt{(\text{س}+٣)^{٧}}$ + جـ

م) ∫ قا^{٢}س لو$_{\text{هـ}}$ جاس دس

و = لو$_{\text{هـ}}$ جاس   دو = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس

دهـ = قا^{٢}س دس   هـ = ظاس

∫ قا^{٢}س لو$_{\text{هـ}}$ جاس دس = ظاس لو$_{\text{هـ}}$ جاس − ∫ ظاس × $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ دس

= ظاس لو$_{\text{هـ}}$ جاس − س + جـ

ن) ∫ ٢ هـ$^{\text{س}}$ جاس جتاس دس

= ∫ هـ$^{\text{س}}$ جا٢س دس

و = جا٢س   دو = ٢ جتا٢س دس

دهـ = هـ$^{\text{س}}$ دس   هـ = هـ$^{\text{س}}$

∫ هـ$^{\text{س}}$ جا٢س دس = هـ$^{\text{س}}$ جا٢س − ∫ ٢ هـ$^{\text{س}}$ جتا٢س دس

أجزاء مرة أخرى

و = ٢ جتا٢س   دو = −٤ جا٢س دس

دهـ = هـ$^{\text{س}}$ دس   هـ = هـ$^{\text{س}}$

∫ هـ$^{\text{س}}$ جا٢س دس = هـ$^{\text{س}}$ جا٢س − ٢ هـ$^{\text{س}}$ جتا٢س − ∫ ٤ هـ$^{\text{س}}$ جا٢س دس

٥ ∫ هـ$^{\text{س}}$ جا٢س دس = هـ$^{\text{س}}$ جا٢س − ٢ هـ$^{\text{س}}$ جتا٢س

∴ ∫ هـ$^{\text{س}}$ جا٢س دس = $\frac{١}{٥}$ (هـ$^{\text{س}}$ جا٢س − ٢ هـ$^{\text{س}}$ جتا٢س) + جـ

س) ∫ (س^{٣} + ٢س) هـ$^{\text{س}}$ دس

و		دهـ
(س^{٣} + ٢س)	+	هـ$^{\text{س}}$
٣س^{٢} + ٢	−	هـ$^{\text{س}}$
٦س	+	هـ$^{\text{س}}$
٦	−	هـ$^{\text{س}}$
صفر		هـ$^{\text{س}}$

∫ (س^{٣} + ٢س) هـ$^{\text{س}}$ دس =

(س^{٣} + ٢س) هـ$^{\text{س}}$ − (٣س^{٢} + ٢) هـ$^{\text{س}}$ + ٦س هـ$^{\text{س}}$ − ٦ هـ$^{\text{س}}$ + جـ

ع) ∫ $\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+١)^{٢}}$ دس = ∫ س هـ$^{\text{س}}$ (س + ١)$^{-٢}$ دس

و = س هـ$^{\text{س}}$ دو = هـ$^{\text{س}}$ (س + ١) دس

دهـ = (س + ١)$^{-٢}$ هـ = $\frac{-١}{\text{س}+١}$

∫ س هـ$^{\text{س}}$ (س + ١)$^{-٢}$ دس = $\frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}$ + ∫ هـ$^{\text{س}}$ دس

= $\frac{-\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١}$ + هـ$^{\text{س}}$ + جـ

س٢) $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = ٣$

$\text{ق}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = ٨$

$\int_{١}^{٢} \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{د س}$

$\text{ع} = \text{س}$　　$\text{د ع} = \text{د س}$

$\text{د هـ} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{د س}$　　$\text{هـ} = \text{ق}(\text{س})$

$\int_{١}^{٢} \text{س}\,\text{ق}'(\text{س})\,\text{د س} = \Big[\text{س}\,\text{ق}(\text{س})\Big]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س}$

$= ٢\,\text{ق}(٢) - ١\,\text{ق}(١) - ٣$

$١٦ - ٥ - ٣ = ٨$

س٣) $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} = ١٠$

$\text{ق}(٢) = ٣$ ، $\text{ق}(١) = -١$

$\int_{٠}^{١} \text{س}^{٥}\,\text{ق}'(\text{س}^{٣} + ١)\,\text{د س}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ١$　　$\text{د ص} = ٣\text{س}^{٢}\,\text{د س}$

$\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ١$

$\text{س} = ١$　　$\text{ص} = ٢$

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣}\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{د ص}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣}(\text{ص} - ١)\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{د ص}$

$\text{ع} = \frac{١}{٣}(\text{ص} - ١)$　　$\text{د ع} = \frac{١}{٣}\,\text{د ص}$

$\text{د هـ} = \text{ق}'(\text{ص})\,\text{د ص}$　　$\text{هـ} = \text{ق}(\text{ص})$

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{٣}(\text{ص} - ١)\,\text{ق}'(\text{ص})\,\text{د ص} =$

$\Big[\frac{١}{٣}(\text{ص} - ١)\,\text{ق}(\text{ص})\Big]_{١}^{٢} - \int_{١}^{٢} \frac{١}{٣}\,\text{ق}(\text{ص})\,\text{د ص}$

$= \frac{١}{٣} \times ١\,\text{ق}(٢) - \frac{١}{٢} \times ٠ \times \text{ق}(١) - \frac{١}{٣} \times ١٠$

$\frac{٣}{٣} - \frac{١٠}{٣} = -\frac{٧}{٣}$.

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية

تدريب (١)

$$\int \frac{٥}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}\, \text{دس}$$

$$\frac{٥}{(\text{س}-٣)(\text{س}-١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}-٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-١}$$

$$٥ = \text{أ}(\text{س}-١) + \text{ب}(\text{س}-٣)$$

$\text{س} = ١$	$\text{س} = ٣$
$٥ = -٢\text{ب}$	$٥ = ٢\text{أ}$
$\text{ب} = \frac{-٥}{٢}$	$\text{أ} = \frac{٥}{٢}$

$$\int \frac{٥}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٣}\, \text{دس} = \int \frac{+\frac{٥}{٢}}{\text{س}-٣}\, \text{دس} + \int \frac{-\frac{٥}{٢}}{\text{س}-١}\, \text{دس}$$

$$= \frac{٥}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-٣| - \frac{٥}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-١| + \text{جـ}$$

تدريب (٢)

$$\int \frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ٣}\, \text{دس}$$

$$\frac{\text{س}-١٣}{(٢\text{س}-١)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{أ}}{٢\text{س}-١} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-٣}$$

$$\text{س} - ١٣ = \text{أ}(\text{س}-٣) + \text{ب}(٢\text{س}-١)$$

$\text{س} = ٣$	$\text{س} = \frac{١}{٢}$
$-١٠ = ٥\text{ب}$	$-١٢{,}٥ = -٢{,}٥\,\text{أ}$
$\text{ب} = -٢$	$\text{أ} = ٥$

$$\int \frac{\text{س}-١٣}{٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ٣}\, \text{دس} = \int \frac{٥}{٢\text{س}-١}\, \text{دس} + \int \frac{-٢}{\text{س}-٣}\, \text{دس}$$

$$= \frac{٥}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |٢\text{س}-١| - ٢\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-٣| + \text{جـ}$$

تدريب (٣)

$$١)\ \int \frac{\text{س}^٢ + \text{س} + ٥}{\text{س}^٢ + \text{س}}\, \text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{س}^٢ + \text{س} + ٥ & \text{س}^٢ + \text{س} \\ -(\text{س}^٢ + \text{س}) & \\ \hline ٥ & \end{array}$$

$$\int ١\, \text{دس} + \int \frac{٥}{\text{س}^٢ + \text{س}}\, \text{دس}$$

↲ كسور جزئية

$$\frac{٥}{\text{س}(\text{س}+١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+١}$$

$$٥ = \text{أ}(\text{س}+١) + \text{ب}\,\text{س}$$

$\text{س} = -١$	$\text{س} = \text{صفر}$
$-\text{ب} = ٥$	$\boxed{\text{أ} = ٥}$
$\boxed{\text{ب} = -٥}$	

$$\int ١\, \text{دس} + \int \frac{٥}{\text{س}}\, \text{دس} + \int \frac{-٥}{\text{س}+١}\, \text{دس}$$

$$\text{س} + ٥\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| - ٥\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+١| + \text{جـ}$$

$$٢)\ \int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س}-١}\, \text{دس}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^٢ + \text{س} + ٢ & \\ \hline \text{س}^٣ + \text{س} & \text{س}-١ \\ -(\text{س}^٣ - \text{س}^٢) & \\ \hline \text{س}^٢ + \text{س} & \\ \text{س}^٢ - \text{س} & \\ \hline ٢\text{س} & \\ ٢\text{س} - ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$= \int_{٢}^{٣} \text{س}^٢ + \text{س} + ٢\, \text{دس} + \int_{٢}^{٣} \frac{٢}{\text{س}-١}\, \text{دس}$$

$$\left[\frac{\text{س}^٣}{٣} + \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٢\text{س} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}-١|\right]_{٢}^{٣}$$

$٩ + \frac{٩}{٢} + ٦ + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \frac{٨}{٣} - ٢ - ٤ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}١$

$\frac{٦٥}{٦} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

* * *

تدريب (٤)

١) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\,\text{ظاس} - ٢}\,\text{دس}$

نفرض ص = ظاس   دص = قا^٢س دس

$\int \frac{١}{٥\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} - ٢}\,\text{دص}$

$\frac{١}{(٥\text{ص} + ٢)(\text{ص} - ١)} = \frac{\text{أ}}{٥\text{ص} + ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١}$

$١ = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(٥\text{ص} + ٢)$

$\text{ص} = ١$
$٧\text{ب} = ١$
$\text{ب} = \frac{١}{٧}$

$\text{ص} = \frac{-٢}{٥}$
$-\frac{٧}{٥}\text{أ} = ١$
$\text{أ} = \frac{-٥}{٧}$

$\int \frac{١}{٥\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} - ٢}\,\text{دص} = \int \frac{\frac{-٥}{٧}}{٥\text{ص} + ٢}\,\text{دص} + \int \frac{\frac{١}{٧}}{\text{ص} - ١}\,\text{دص}$

$= \frac{-١}{٧}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٥\text{ص} + ٢| + \frac{١}{٧}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١| + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٧}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٥\,\text{ظاس} + ٢| + \frac{١}{٧}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس} - ١| + \text{جـ}$

* * *

٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ ، $\text{ص}^{٣} = \text{س}$ ، $٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int \frac{٣\text{ص}^{٢}(\text{ص} - ١)}{\text{ص}^{٢} - ٤}\,\text{دص} = \int \frac{٣\text{ص}^{٣} - ٣\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٤}\,\text{دص}$

$٣\text{ص} - ٣$

$\text{ص}^{٢} - ٤ \;\big)\; ٣\text{ص}^{٣} - ٣\text{ص}^{٢}$

$-(٣\text{ص}^{٣} - ١٢\text{ص})$

$-٣\text{ص}^{٢} + ١٢\text{ص}$

$-(-٣\text{ص}^{٢} + ١٢)$

$١٢\text{ص} - ١٢$

$\int (٣\text{ص} - ٣)\,\text{دص} + \int \frac{١٢\text{ص} - ١٢}{\text{ص}^{٢} - ٤}\,\text{دص}$

← كسور جزئية

$\frac{١٢\text{ص} - ١٢}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢}$

$١٢\text{ص} - ١٢ = \text{أ}(\text{ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ٢)$

$\text{ص} = ٢$ $\text{ص} = -٢$

$١٢ = ٤\text{أ}$ $-٣٦ = -٤\text{ب}$

$\text{أ} = ٣$ $\text{ب} = ٩$

$\int (٣\text{ص} - ٣)\,\text{دص} + \int \frac{٣}{\text{ص} - ٢}\,\text{دص} + \int \frac{٩}{\text{ص} + ٢}\,\text{دص}$

$\frac{٣\text{ص}^{٢}}{٢} - ٣\text{ص} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ٢| + ٩\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ٢| + \text{جـ}$

$= \frac{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}{٢} - ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢| + ٩\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}} + ٢| + \text{جـ}$

٣) $\int_{٠}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{س} + ١$ $٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int_{١}^{٢} \frac{٢\text{ص}(\text{ص} - ١)}{\text{ص} + ١}\,\text{دص}$

$٢\text{ص} - ٤$

$\text{ص} + ١ \;\big)\; ٢\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص}$

$-(٢\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص})$

-٤ص

$-(-٤\text{ص} - ٤)$

٤

$\int_{١}^{٢} (٢\text{ص} - ٤)\,\text{دص} + \int_{١}^{٢} \frac{٤}{\text{ص} + ١}\,\text{دص}$

$[\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص}]_{١}^{٢} + ٤\,[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ١|]_{١}^{٢}$

$-١ + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٩

١) $\int \frac{٧}{س^٢-٣س-١٠}\,دس$

$\frac{٧}{(س-٥)(س+٢)} = \frac{م}{س-٥} + \frac{ب}{س+٢}$

$٧ = م(س+٢) + ب(س-٥)$

$س = -٢ \qquad س = ٥$

$٧ = -٧ب \qquad ٧ = ٧م$

$ب = -١ \qquad م = ١$

$\int \frac{٧}{س^٢-٣س-١٠}\,دس = \int \frac{١}{س-٥}\,دس + \int \frac{-١}{س+٢}\,دس$

$= لو_{هـ}|س-٥| - لو_{هـ}|س+٢| + جـ$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٢س}{س^٢-٤س-١٢}\,دس$

$\frac{٢س}{(س-٦)(س+٢)} = \frac{م}{س-٦} + \frac{ب}{س+٢}$

$٢س = م(س+٢) + ب(س-٦)$

$س = -٢ \qquad س = ٦$

$-٤ = -٨ب \qquad ١٢ = ٨م$

$ب = \frac{١}{٢} \qquad م = \frac{٣}{٢}$

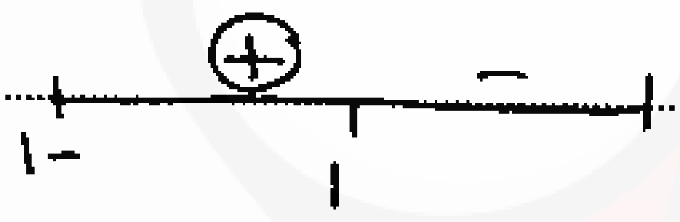
$\int_{١}^{٣} \frac{\frac{٣}{٢}}{س-٦}\,دس + \int_{١}^{٣} \frac{\frac{١}{٢}}{س+٢}\,دس$

$= \frac{٣}{٢}لو_{هـ}|س-٦|\Big]_{١}^{٣} + \frac{١}{٢}لو_{هـ}|س+٢|\Big]_{١}^{٣}$

$\frac{٣}{٢}لو_{هـ}٣ - \frac{٣}{٢}لو_{هـ}٥ + \frac{١}{٢}لو_{هـ}٥ - \frac{١}{٢}لو_{هـ}٣$

$لو_{هـ}٣ - لو_{هـ}٥$.

٣) $\int_{-١}^{١} \frac{|١-س|}{س^٢-٥س+٦}\,دس$



$\int_{-١}^{١} \frac{١-س}{س^٢-٥س+٦}\,دس$

$\frac{١-س}{(س-٢)(س-٣)} = \frac{م}{س-٢} + \frac{ب}{س-٣}$

$١-س = م(س-٣) + ب(س-٢)$

$س = ٣ \qquad س = ٢$

$\boxed{-٢ = ب} \qquad -١ = -م$

$\boxed{م = ١}$

$\int_{-١}^{١} \frac{١-س}{س^٢-٥س+٦}\,دس = \int_{-١}^{١} \frac{١}{س-٢}\,دس + \int_{-١}^{١} \frac{-٢}{س-٣}\,دس$

$= لو_{هـ}|س-٢|\Big]_{-١}^{١} + -٢لو_{هـ}|س-٣|\Big]_{-١}^{١}$

$لو_{هـ}١ - لو_{هـ}٣ - ٢لو_{هـ}٢ + ٢لو_{هـ}٤$

$= ٢لو_{هـ}٤ - ٢لو_{هـ}٢ - لو_{هـ}٣$.

٤) $\int \frac{س^٣+٤س-٨}{س^٢-٩}\,دس$

بالقسمة الطولية $\Leftarrow \int س\,دس + \int \frac{١٣س-٨}{س^٢-٩}\,دس$

$= \int س\,دس + \int \frac{\frac{٣١}{٦}}{س-٣}\,دس + \int \frac{\frac{٤٧}{٦}}{س+٣}\,دس$

$\frac{س^٢}{٢} + \frac{٣١}{٦}لو_{هـ}|س-٣| + \frac{٤٧}{٦}لو_{هـ}|س+٣| + جـ$

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣س^{٢}+٣}{٣س^{٢}-س-٤}\,دس$

بالقسمة الطولية ⟸ $\int_{٠}^{١} ١\,دس + \int_{٠}^{١} \frac{س+٧}{٣س^{٢}-س-٤}\,دس$

↲ كسور جزئية

$= \int_{٠}^{١} ١\,دس + \int_{٠}^{١} \frac{\frac{٢٥}{٧}}{(٣س-٤)}\,دس + \int_{٠}^{١} \frac{\frac{-٦}{٧}}{س+١}\,دس$

$س]_{٠}^{١} + \frac{٢٥}{٢١}لو_{هـ}|٣س-٤|]_{٠}^{١} + \frac{-٦}{٧}لو_{هـ}|س+١|]_{٠}^{١}$

$١ + \cancel{\frac{٢٥}{٢١}لو_{هـ}١} - \frac{٢٥}{٢١}لو_{هـ}٤ - \frac{٦}{٧}لو_{هـ}٢ + \cancel{\frac{٦}{٧}لو_{هـ}١}$

$١ - \frac{٢٥}{٢١}لو_{هـ}٤ - \frac{٦}{٧}لو_{هـ}٢$

٦) $\int \frac{ظاس}{٢٥-(لو_{هـ}جتاس)^{٢}}\,دس$

نفرض $ص = لو_{هـ}جتاس$ ، $دص = \frac{-جاس}{جتاس}\,دس$

$\int \frac{١}{ص^{٢}-٢٥}\,دص$

$\frac{١}{(ص-٥)(ص+٥)} = \frac{أ}{ص-٥} + \frac{ب}{ص+٥}$

$١ = أ(ص+٥) + ب(ص-٥)$

$ص = ٥$ $\quad أ = \frac{١}{١٠}$

$ص = -٥$ $\quad ب = -\frac{١}{١٠}$

$\int \frac{\frac{١}{١٠}}{ص-٥}\,دص + \int \frac{-\frac{١}{١٠}}{ص+٥}\,دص$

$= \frac{١}{١٠}لو_{هـ}|ص-٥| - \frac{١}{١٠}لو_{هـ}|ص+٥| + جـ$

$\frac{١}{١٠}لو_{هـ}|لو_{هـ}جتاس-٥| - \frac{١}{١٠}لو_{هـ}|لو_{هـ}جتاس+٥| + جـ$

٧) $\int \frac{١}{هـ^{س}+١}\,دس$

نفرض $ص = هـ^{س}$ $\quad دص = هـ^{س}\,دس$

$\int \frac{١}{ص(ص+١)}\,دص = \int \frac{١}{ص}\,دص + \int \frac{-١}{ص+١}\,دص$

$= لو_{هـ}|ص| - لو_{هـ}|ص+١| + جـ$

$= لو_{هـ}|هـ^{س}| - لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + جـ$

٨) $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س}-٣هـ^{س}-٤}\,دس$

نفرض $ص = هـ^{س}$ $\quad دص = هـ^{س}\,دس$

$\int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢}-٣ص-٤}\,دص$ بالقسمة الطولية

$= \int ١\,دص + \int \frac{٣ص+٤}{ص^{٢}-٣ص-٤}\,دص$

↲ كسور جزئية

$= \int ١\,دص + \int \frac{\frac{١٦}{٥}}{ص-٤}\,دص + \int \frac{\frac{-١}{٥}}{ص+١}\,دص$

$ص + \frac{١٦}{٥}لو_{هـ}|ص-٤| - \frac{١}{٥}لو_{هـ}|ص+١| + جـ$

$هـ^{س} + \frac{١٦}{٥}لو_{هـ}|هـ^{س}-٤| - \frac{١}{٥}لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + جـ$

٩) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{س}}{س-٤}\,دس$ $\quad$ نفرض $ص=\sqrt{س}$

$ص^{٢}=س$ ، $٢ص\,دص=دس$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-٤}\,دص = \int_{٣}^{٤} ٢\,دص + \int_{٣}^{٤} \frac{٨}{ص^{٢}-٤}\,دص$

$= \int_{٣}^{٤} ٢\,دص + \int_{٣}^{٤} \frac{٢}{ص-٢}\,دص + \int_{٣}^{٤} \frac{-٢}{ص+٢}\,دص$

$= ٢(٤-٣) + ٢لو_{هـ}|ص-٢|]_{٢}^{٤} - ٢لو_{هـ}|ص+٢|]_{٢}^{٤}$

$٢ + ٢لو_{هـ}٢ - ٢لو_{هـ}٦ + ٢لو_{هـ}٥$

$$١٠)\ \int \frac{\text{جتا س}}{١ + ٣\,\text{جا س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا س}}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س} + ٣\,\text{جا س}}\ \text{دس}$$

نفرض $\text{ص} = \text{جا س}$ $\quad \text{دص} = \text{جتا س دس}$

$$\int \frac{١}{٢\text{ص}^{٢} + ٣\text{ص}}\ \text{دص} = \int \frac{\frac{١}{٣}}{\text{ص}}\ \text{دص} + \int \frac{\frac{-٢}{٣}}{٢\text{ص} + ٣}\ \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{ص} + ٣| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا س}| - \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\,\text{جا س} + ٣| + \text{جـ}$$

* * *

$$١١)\ \int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩)\ \text{دس}$$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩)$ $\qquad \text{دع} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩}\ \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \text{س}$

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩)\ \text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩) - \int \frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ٩}\ \text{دس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩) - \int ٢\ \text{دس} - \int \frac{١٨}{\text{س}^{٢} - ٩}\ \text{دس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩) - ٢\text{س} - \left(\int \frac{٣}{\text{س} - ٣}\ \text{دس} + \int \frac{-٣}{\text{س} + ٣}\ \text{دس}\right)$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩) - ٢\text{س} - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٣| + ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ٣| + \text{جـ}$$

* * *

$$١٢)\ \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}(١ + \text{س}^{-٢})}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{س}^{-٣}}{١ + \text{س}^{-٢}}\ \text{دس}$$

نفرض $\text{ص} = ١ + \text{س}^{-٢}$

$$\text{دص} = -٢\,\text{س}^{-٣}\ \text{دس}$$

$$= \int -\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\text{ص}}\ \text{دص} = -\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١ + \text{س}^{-٢}| + \text{جـ}$$

* * *

$$١٣)\ \int_{٩}^{١٦} \frac{\text{دس}}{\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} + ٢}$$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{س}$ ، $٢\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$

$$\int_{٣}^{٤} \frac{٢\text{ص}\ \text{دص}}{\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} + ٢} = \int_{٣}^{٤} \frac{٤}{\text{ص} - ٢}\ \text{دص} + \int_{٣}^{٤} \frac{-٢}{\text{ص} - ١}\ \text{دص}$$

$$٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ٢|\Big]_{٣}^{٤} + -٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١|\Big]_{٣}^{٤}$$

$$٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \cancel{٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}١} - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣ + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$$

$$٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$$

* * *

$$١٤)\ \int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{٤\text{س} - ٨} - ٢}\ \text{دس} = \int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{٢\sqrt{\text{س} - ٢} - ٢}\ \text{دس}$$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س} - ٢}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{س} - ٢ \Leftarrow ٢\text{ص}\ \text{دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{\text{ص} + ١}{٢\text{ص} - ٢} \times ٢\text{ص}\ \text{دص} = \int \frac{٢\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص}}{٢\text{ص} - ٢}\ \text{دص}$$

$$= \int \frac{\text{ص}^{٢} + \text{ص}}{\text{ص} - ١}\ \text{دص} = \int (\text{ص} + ٢)\ \text{دص} + \int \frac{٢}{\text{ص} - ١}\ \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + ٢\text{ص} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١| + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{س} - ٢)}{٢} + ٢\sqrt{\text{س} - ٢} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س} - ٢} - ١| + \text{جـ}$$

١٥) $$\int \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\;\text{د س}$$

$$\text{ص} = \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}} \quad ، \quad \text{ص}^2 = 1-\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$2\,\text{ص د ص} = -\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{2\,\text{ص}^2}{\text{ص}^2-1}\,\text{د ص} = \int 2\,\text{د ص} + \int \frac{2}{\text{ص}^2-1}\,\text{د ص}$$

$$= \int 2\,\text{د ص} + \int \frac{-1}{\text{ص}+1}\,\text{د ص} + \int \frac{1}{\text{ص}-1}\,\text{د ص}$$

$$2\,\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$$

$$2\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}+1\right| + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}-1\right| + \text{جـ}$$

١٦) $$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-\text{قا}^2\text{س}}\,\text{د س} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-(\text{ظا}^2\text{س}+1)}\,\text{د س}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{4-\text{ظا}^2\text{س}}\,\text{د س}$$

نفرض $\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{د ص} = \text{قا}^2\text{س د س}$

$$\int \frac{1}{4-\text{ص}^2}\,\text{د ص} = \int \frac{\frac{1}{4}}{2+\text{ص}}\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{2-\text{ص}}\,\text{د ص}$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ص}| - \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ظاس}| - \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ظاس}| + \text{جـ}$$

١٧) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8+\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{د س} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8+1-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{د س}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{9-\text{جا}^2\text{س}}\,\text{د س}$$

نفرض $\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\text{د ص} = \text{جتاس د س}$

$\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 0$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{2}$ ، $\text{ص} = 1$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{9-\text{ص}^2}\,\text{د ص} = \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3-\text{ص}}\,\text{د ص} + \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3+\text{ص}}\,\text{د ص}$$

$$= \left[-\frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3-\text{ص}|\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|3+\text{ص}|\right]_{0}^{1}$$

$$-\frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 + \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 + \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}4 - \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$$

$$= \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$$

١٨) $$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}(\text{لوس})^2-4\,\text{س}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س}((\text{لوس})^2-4)}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \quad ، \quad \text{د ص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{د س}$$

$$= \int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^2-4} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{\text{ص}+2}\,\text{د ص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{\text{ص}-2}\,\text{د ص}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| + \text{جـ}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+2| + \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-2| + \text{جـ}$$

الفصل الثالث : تطبيقات التكامل

أولاً : المساحة

تدريب (١)

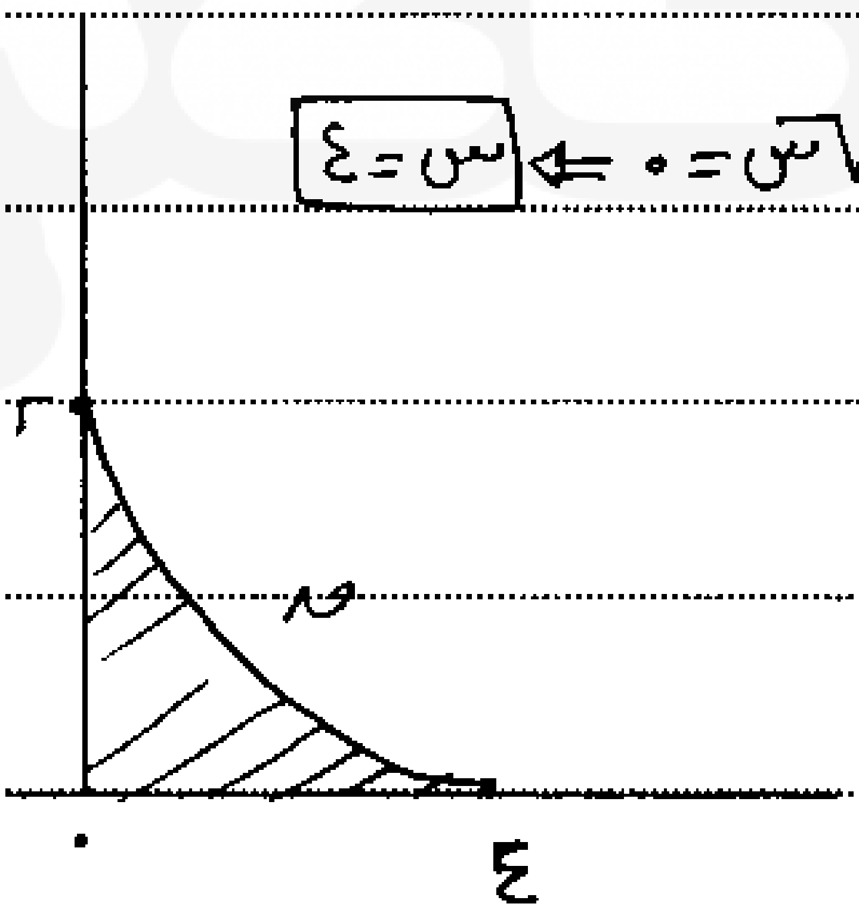
$\text{ق(س)} = ٢ - \sqrt{\text{س}}$ ، $٢ - \sqrt{\text{س}} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٤}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} ٢ - \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \left[٢\text{س} - \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^٣}\right]_{٠}^{٤}$$

$$(٢ \times ٤ - \frac{٢}{٣} \times ٨) - \text{صفر}$$

$$= \frac{٨}{٣}\ \text{وحدة مساحة}$$



تدريب (٢) :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$$

$$= -٨ + ٥ = -٣$$

تدريب (٣)

$$\int_{٠}^{٢} |\text{جتا}\ \pi\text{س} - ٠|\ \text{دس} = \int_{٠}^{٢} |\text{جتا}\ \pi\text{س}|\ \text{دس}$$

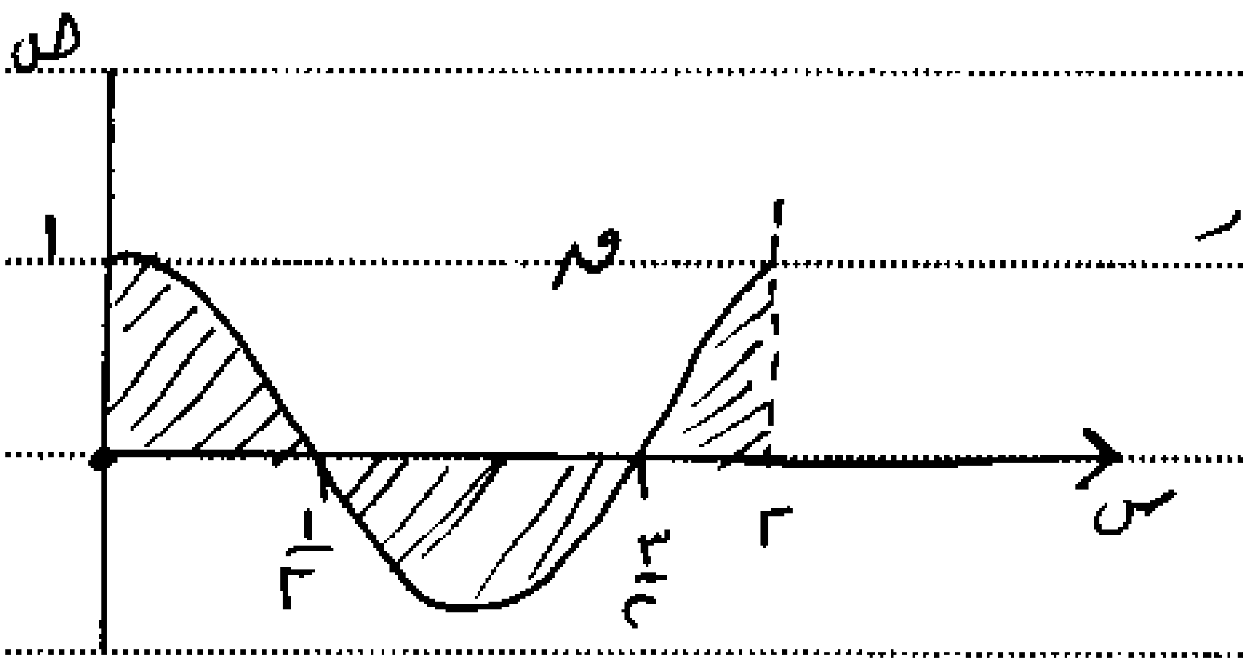
$$= \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \text{جتا}\ \pi\text{س دس} + \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} -\text{جتا}\ \pi\text{س دس} + \int_{\frac{٣}{٢}}^{٢} \text{جتا}\ \pi\text{س دس}$$

$$\left[+\frac{١}{\pi}\text{جا}\ \pi\text{س}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} \oplus \left[-\frac{١}{\pi}\text{جا}\ \pi\text{س}\right]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \oplus \left[\frac{١}{\pi}\text{جا}\ \pi\text{س}\right]_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$$

$$(\frac{١}{\pi} - \text{صفر}) \oplus (\frac{١}{\pi} + \frac{١}{\pi}) \oplus (\text{صفر} - -\frac{١}{\pi})$$

$$\frac{١}{\pi} + \frac{٢}{\pi} + \frac{١}{\pi} = \frac{٤}{\pi}\ \text{وحدة مساحة}$$

انظر الشكل المجاور



تدريب (٤) :

$\text{ق(س)} = ٤\text{س}^٢ - ٣\text{س}$ ، $\text{هـ(س)} = ٥\text{س}$

نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow$ ق = هـ

$٤\text{س}^٢ - ٣\text{س} = ٥\text{س} \Leftarrow$ س = صفر ، س = ٢

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} \text{هـ(س)} - \text{ق(س) دس}$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} ٥\text{س} - ٤\text{س}^٢ + ٣\text{س دس} = \int_{٠}^{٢} (٨\text{س} - ٤\text{س}^٢)\ \text{دس}$$

$$\left[٤\text{س}^٢ - \frac{٤}{٣}\text{س}^٣\right]_{٠}^{٢} = (١٦ - \frac{٣٢}{٣}) - \text{صفر}$$

$$= \frac{١٦}{٣}\ \text{وحدة مساحة.}$$

تدريب (٥)

$\text{ق(س)} = ١ + \text{جاس}$ ، $\text{هـ(س)} = ١ + \text{جتاس}$

نجد نقاط التقاطع $\Leftarrow$ ١ + جاس = ١ + جتاس

$$\text{س} = \frac{٥\pi}{٤} \in \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{٤} \notin \left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]\ \text{تهمل}$$

$$\text{م} = \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (\text{ق} - \text{هـ})\ \text{دس} + \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} (\text{هـ} - \text{ق})\ \text{دس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} (\text{جاس} - \text{جتاس})\ \text{دس} \oplus \int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}} \text{جتاس} - \text{جاس دس}$$

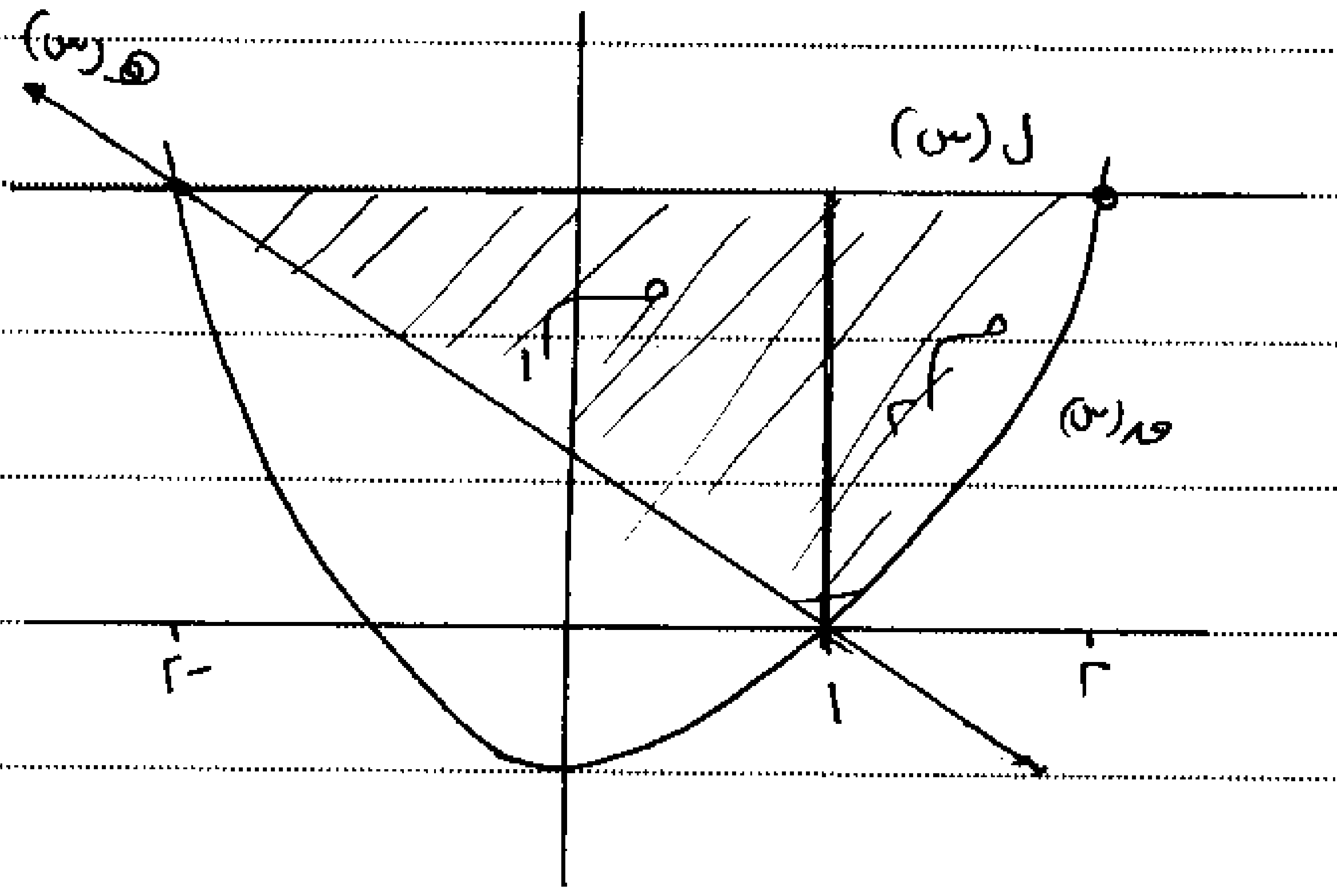
$$-\text{جتاس} - \text{جاس}\Big]_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}} \oplus \Big[\text{جاس} + \text{جتاس}\Big]_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$$

$$(+\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) - (-١) \oplus (-١ + ٠) - (-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}})$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} + ١ - ١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}} = ٢\sqrt{٢}\ \text{وحدة مساحة}$$

تدريب (٦)

ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
$\text{س}^2 - ١ = ١ - \text{س}$	$\text{س}^2 - ١ = ٣$	$١ - \text{س} = ٣$
$\text{س}^2 + \text{س} - ٢ = ٠$	س = ٢ ، (٢، ٣)	س = −٢
$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$	س = −٢ (−٢، ٣)	(−٢، ٣)
س = −٢ (−٢، ٣)		
س = +١ (١، ٠)		



$$\text{م} = \int_{-٢}^{١} (\text{ل} - \text{هـ})\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} (\text{ل} - \text{ق})\,\text{دس}$$

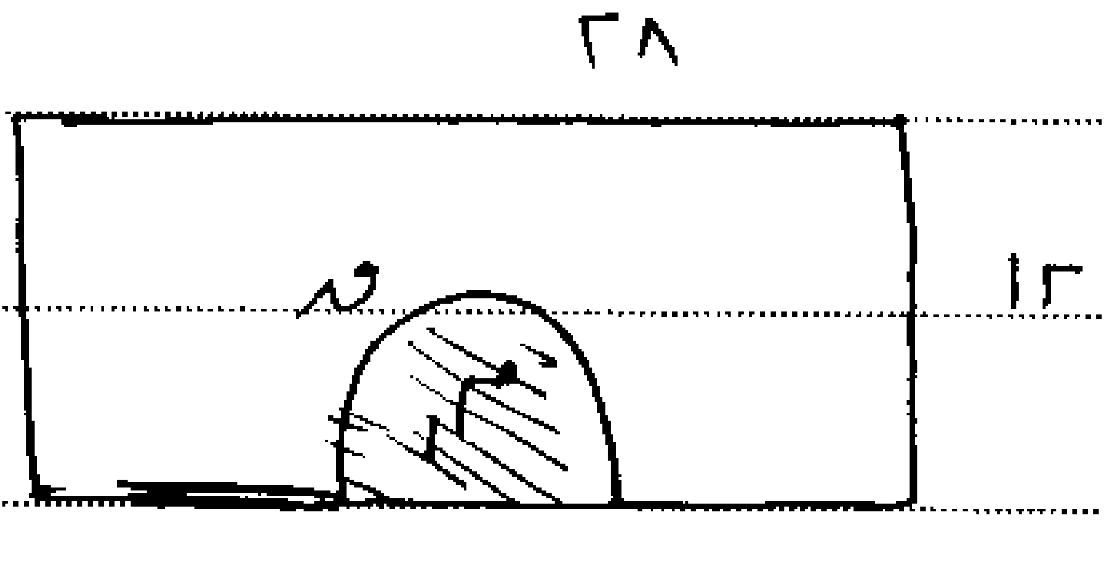
$$\text{م} = \int_{-٢}^{١} (٢ + \text{س})\,\text{دس} \oplus \int_{١}^{٢} (٤ - \text{س}^2)\,\text{دس}$$

$$\left[٢\text{س} + \frac{\text{س}^2}{٢}\right]_{-٢}^{١} \oplus \left[٤\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

$$\left(٢ + \frac{١}{٢}\right) - (-٤ + ٢) \oplus \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(٤ - \frac{١}{٣}\right)$$

$$٤,٥ + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

تدريب (٧)



أولاً نجد مساحة المنطقة الملونة بالأزرق

= مساحة المستطيل − مساحة المنطقة المظللة

$$= ١٢ \times ٢٨ - \int_{-٤}^{٤} ٨ - \frac{\text{س}^2}{٢}\,\text{دس}$$

لإيجاد حدود التكامل نضع $٨ - \frac{\text{س}^2}{٢} = \text{صفر}$

$$\text{م} = ٣٣٦ - \left(٨\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٦}\right]_{-٤}^{٤}$$

$$٣٣٦ - \left(\left(٣٢ - \frac{٦٤}{٦}\right) - \left(-٣٢ + \frac{٦٤}{٦}\right)\right)$$

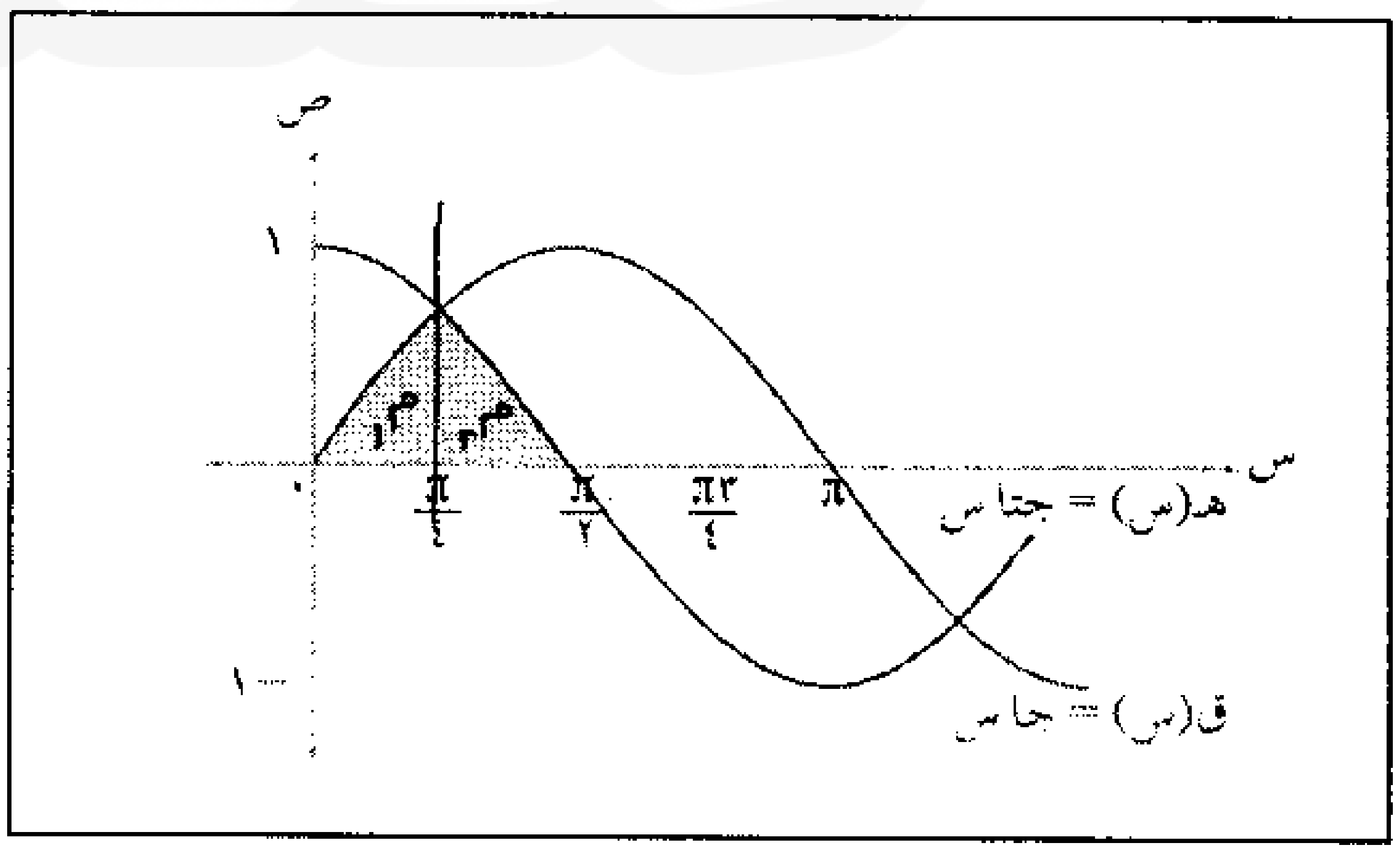
$$\text{م} = \frac{٨٨٠}{٣}$$

$$\text{التكلفة الكلية للدهان} = \frac{٨٨٠}{٣} \times ٤٠$$

$$= \frac{٣٥٢٠٠}{٣} \text{ قرشاً}$$

تمارين ومسـائل صفحة (٣٠١ - ٣٠٣)

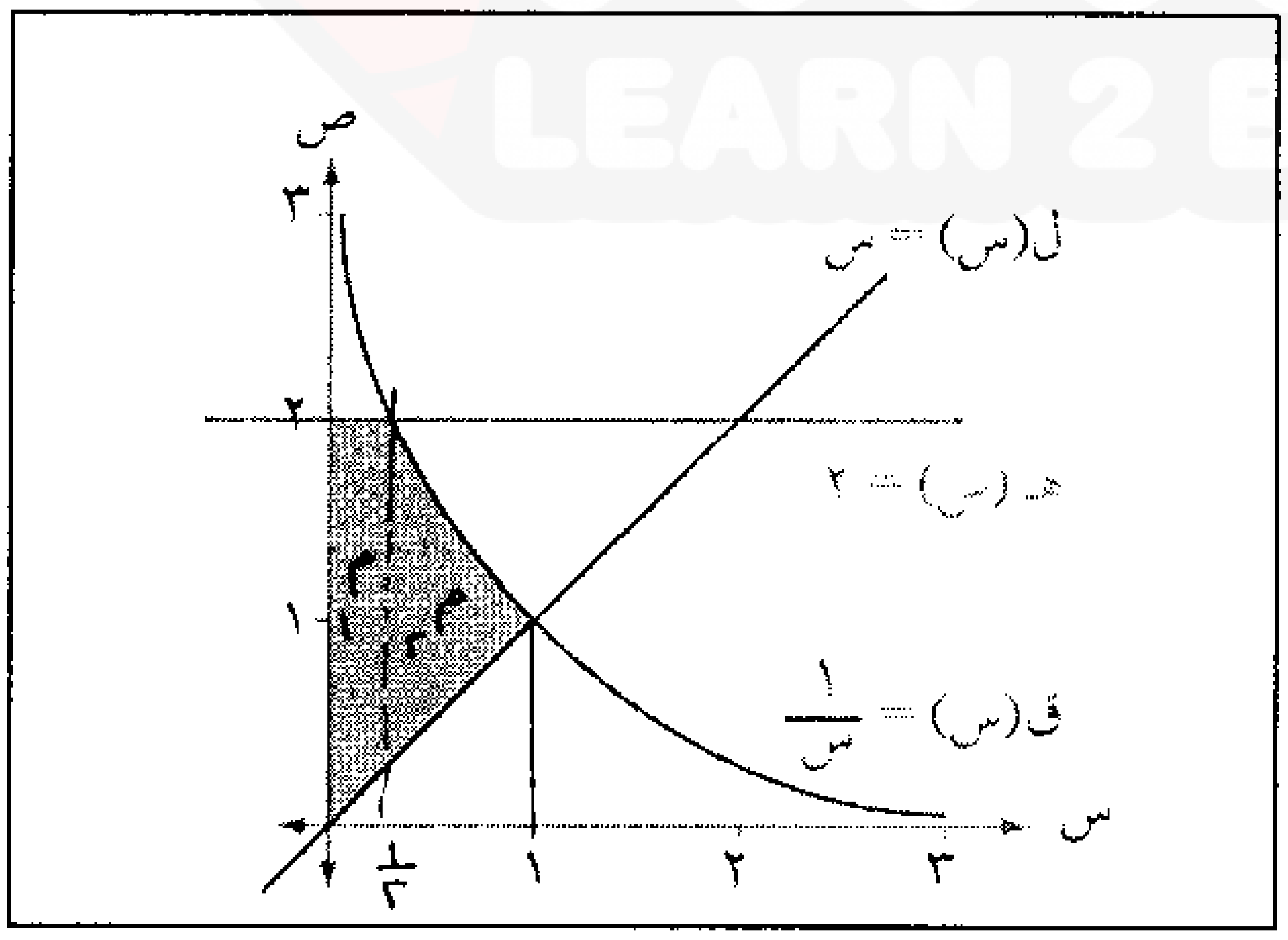
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



الشكل (٤ ــ ٢٤)

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ق}(س)\,دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{هـ}(س)\,دس$$

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جاس}\,دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\,دس$$



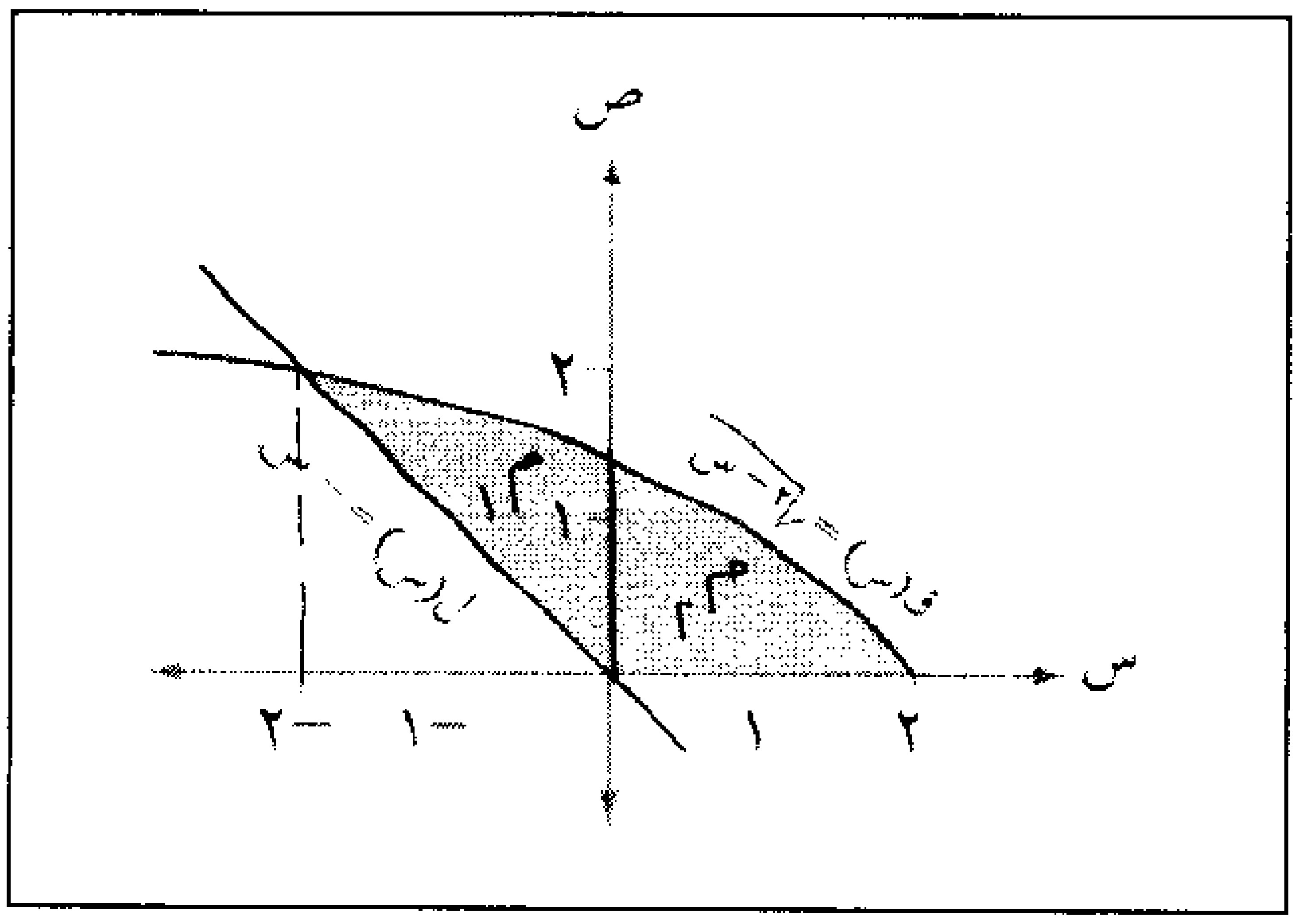
الشكل (٤ ــ ٢٥)

$$\text{هـ}(س) = \text{ق}(س) \Rightarrow \frac{1}{س} = 2 \Rightarrow س = \frac{1}{2}$$

$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} \text{هـ}(س) - \text{ل}(س)\,دس + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \text{ق}(س) - \text{ل}(س)\,دس$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2 - س\,دس \oplus \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س} - س\,دس$$

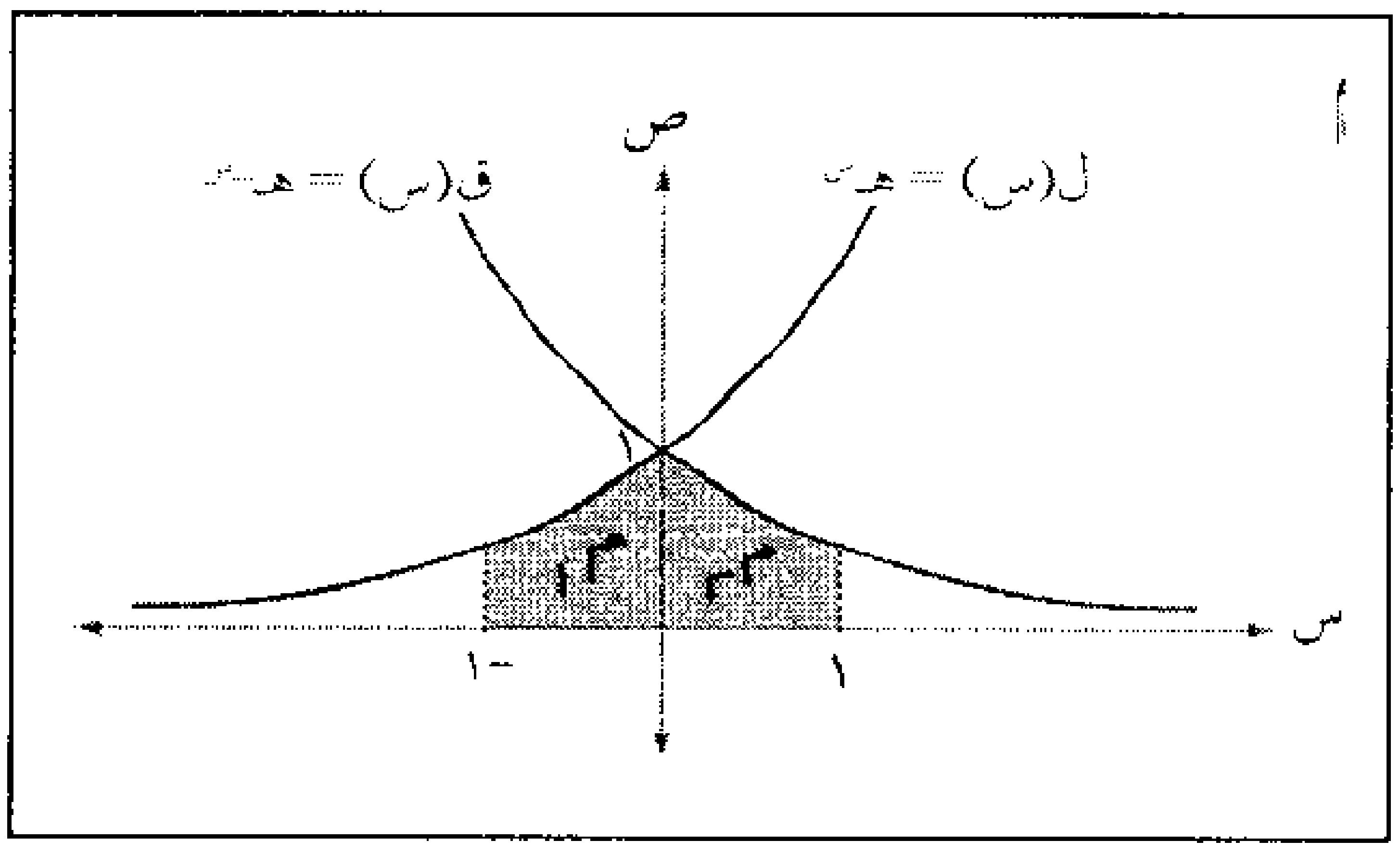


الشكل (٤ ــ ٢٦)

$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{-2}^{0} (\text{ق} - \text{ل})\,دس + \int_{0}^{2} (\text{ق} - \text{صفر})\,دس$$

$$= \int_{-2}^{0} \sqrt{2-س} + س\,دس \oplus \int_{0}^{2} \sqrt{2-س}\,دس$$

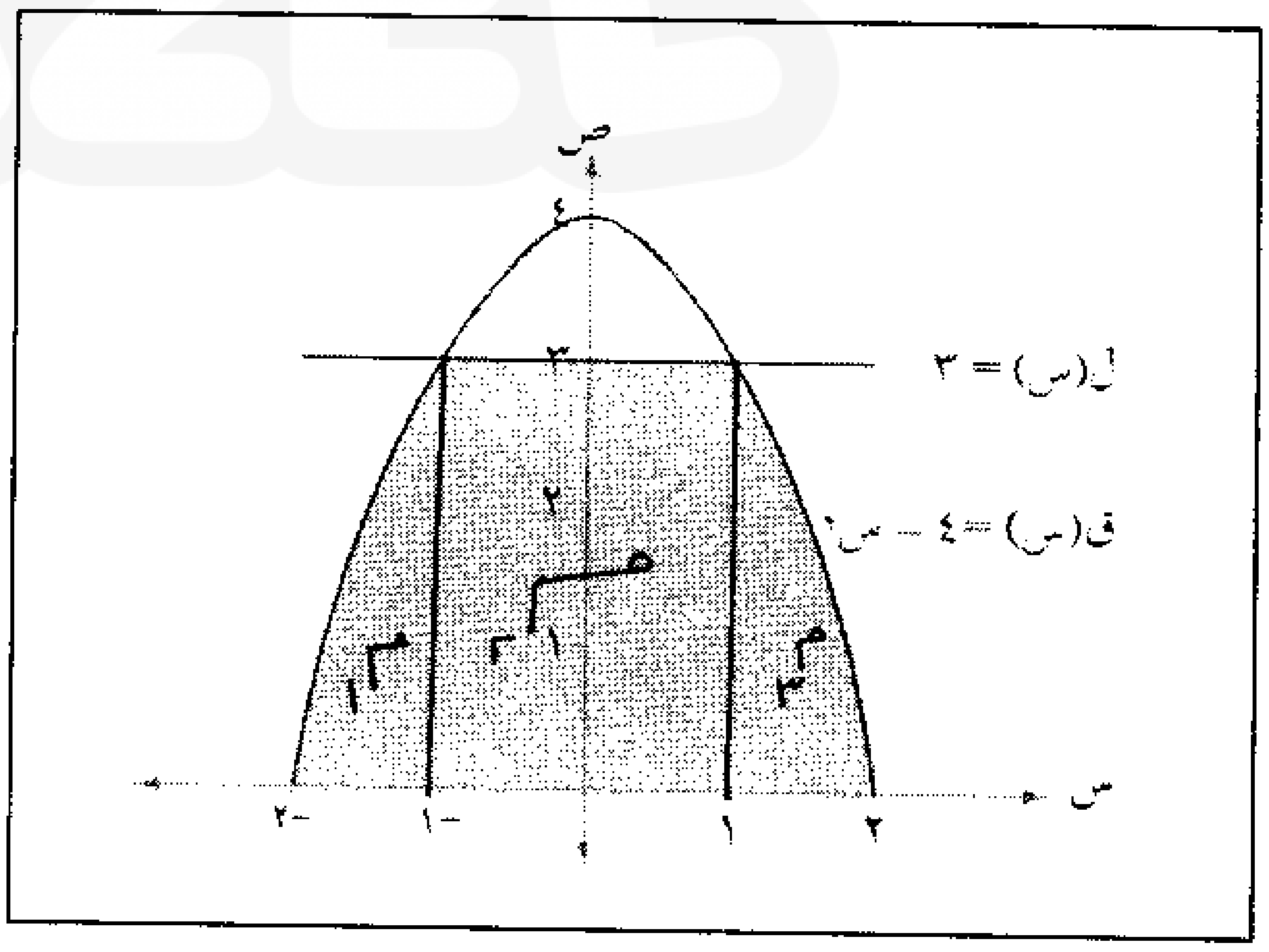


الشكل (٤ ــ ٢٧)

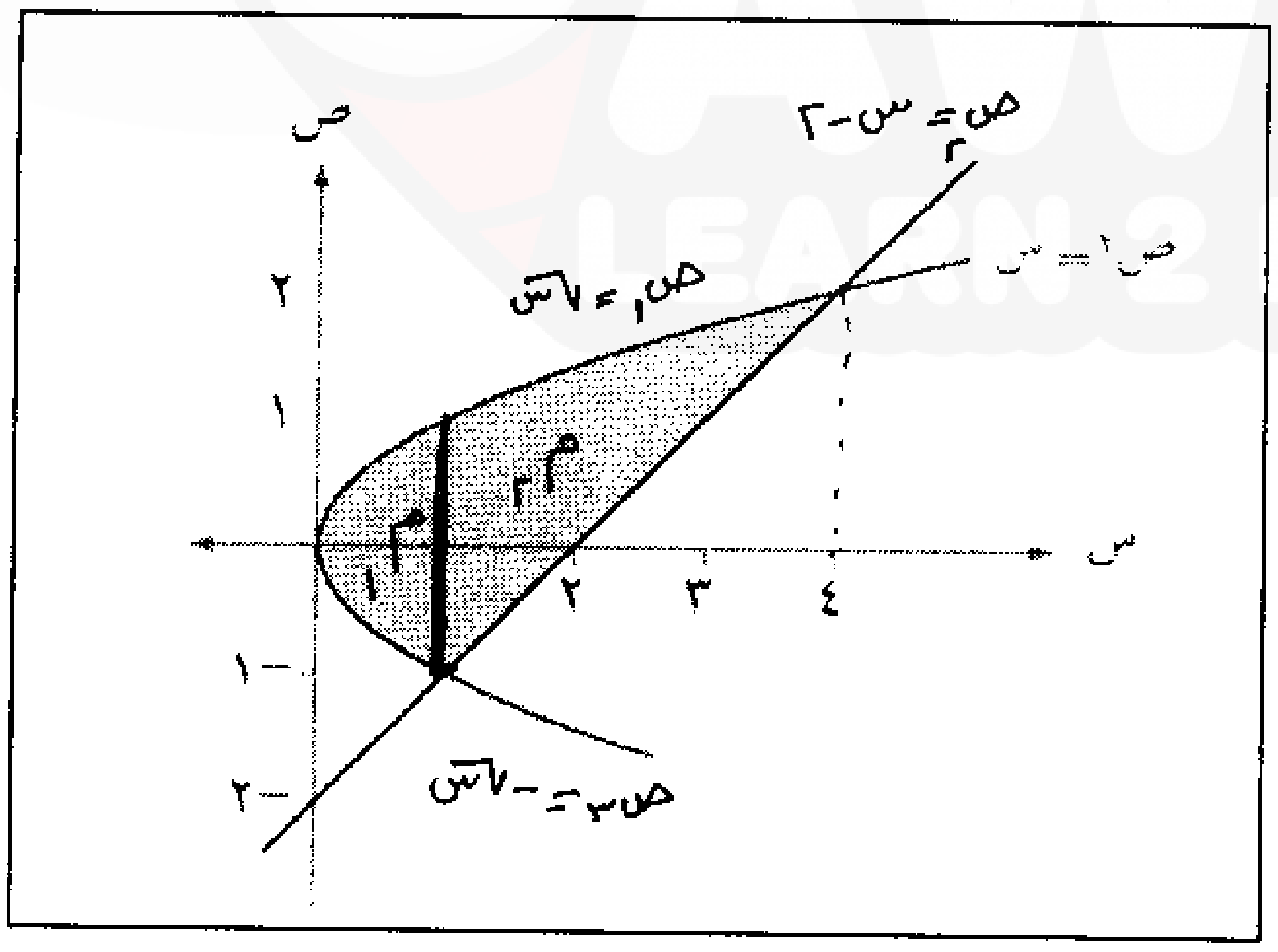
$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{-1}^{0} \text{ل}(س)\,دس + \int_{0}^{1} \text{ق}(س)\,دس$$

$$= \int_{-1}^{0} \text{هـ}^{س}\,دس + \int_{0}^{1} \text{هـ}^{-س}\,دس$$



الشكل (٤ ــ ٢٨)



الشكل (٤ ــ ٢٩)

$م = \int_{-٢}^{-١} ق(س)\,دس + \int_{-١}^{١} ل(س)\,دس + \int_{١}^{٢} ق(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{-١} (٤ - س^٢)\,دس + \int_{-١}^{١} ٣\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - س^٢)\,دس$

$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{٠}^{١} \sqrt{س} - -\sqrt{س}\,دس + \int_{١}^{٤} \sqrt{س} - س + ٢\,دس$

$= \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{س}\,دس + \int_{١}^{٤} \sqrt{س} - س + ٢\,دس$

٢) $ق(س) = ٤س^٣ - ٤س$ محور السينات $ص = ٠$

$٤س^٣ - ٤س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ١ ، س = -١$

$م = \int_{-١}^{٠} (٤س^٣ - ٤س)\,دس + \int_{٠}^{١} (-٤س^٣ + ٤س)\,دس$

$= \left[س^٤ - ٢س^٢\right]_{-١}^{٠} \oplus \left[-س^٤ + ٢س^٢\right]_{٠}^{١}$

$(صفر) - (١ - ٢) \oplus (-١ + ٢) - (صفر)$

$١ \oplus ١ = ٢$ وحدة مساحة

٣) أولاً نجد نقاط التقاطع

$٤س^٣ - ٣س = ٥س \Leftarrow ٤س^٣ - ٨س = صفر$

$س = ٠ ، س = \sqrt{٢} ، س = -\sqrt{٢}$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (ق - هـ)\,دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (هـ - ق)\,دس$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (٤س^٣ - ٨س)\,دس \oplus \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (٨س - ٤س^٣)\,دس$

$= \left[س^٤ - ٤س^٢\right]_{-\sqrt{٢}}^{٠} \oplus \left[٤س^٢ - س^٤\right]_{٠}^{\sqrt{٢}}$

$(صفر) - (٤ - ٨) \oplus (٨ - ٤) - صفر$

$٤ + ٤ = ٨$ وحدة مساحة

٤) $ق(س) = ٣س^٢ - ٣$ محور السينات $\leftarrow ص = ٠$

$٣س^٢ - ٣ = ٠ \Leftarrow س = \mp ١$

$م = \int_{-٣}^{-١} (٣س^٢ - ٣)\,دس \oplus \int_{-١}^{١} (٣ - ٣س^٢)\,دس \oplus \int_{١}^{٢} (٣س^٢ - ٣)\,دس$

$= \left[س^٣ - ٣س\right]_{-٣}^{-١} \oplus \left[٣س - س^٣\right]_{-١}^{١} \oplus \left[س^٣ - ٣س\right]_{١}^{٢}$

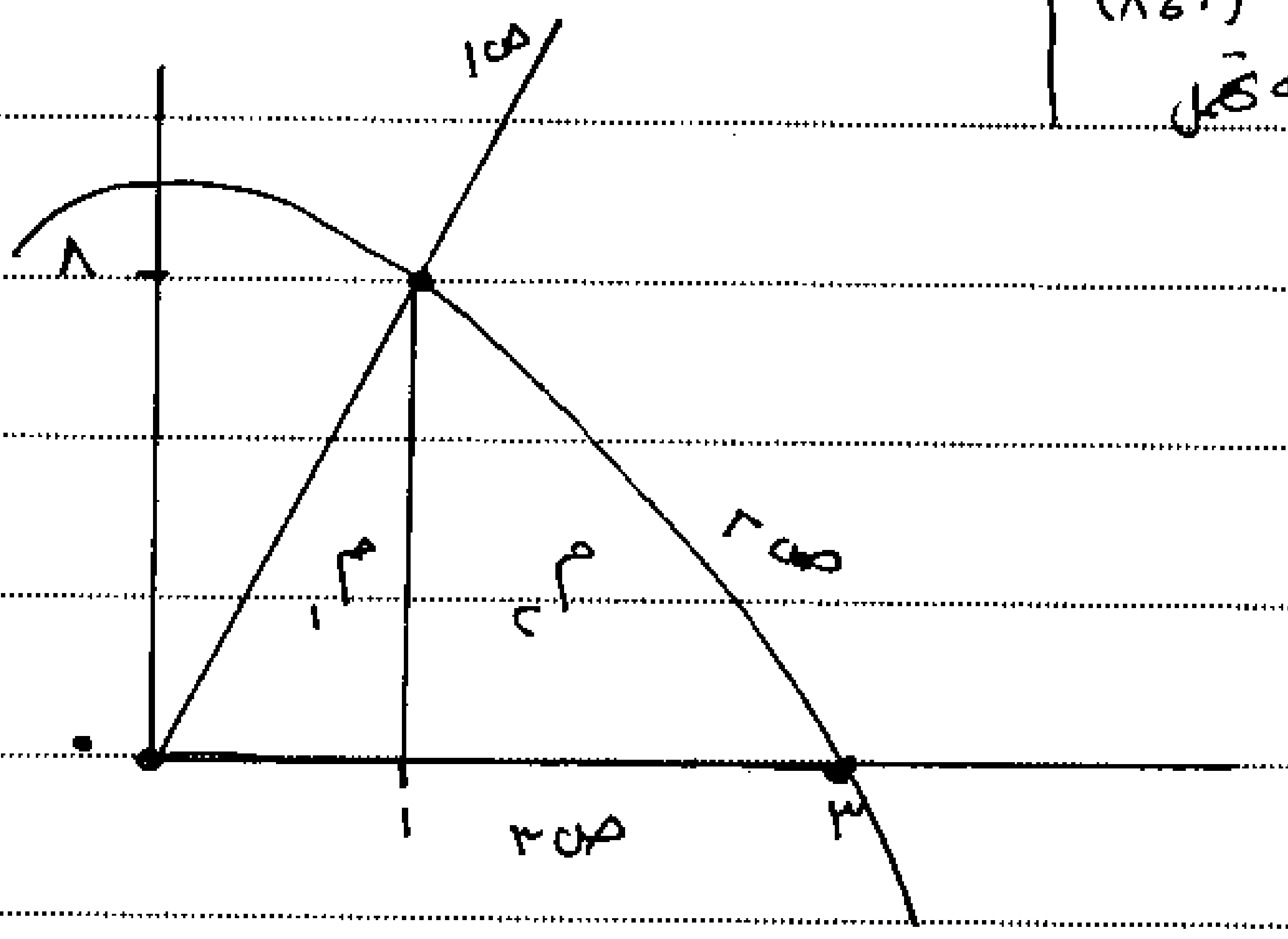
$(-١ + ٣) - (-٢٧ + ٩) \oplus (٣ - ١) - (-٣ + ١) \oplus (٨ - ٦) - (١ - ٣)$

$٢٠ \oplus ٤ \oplus ٤$

$= ٢٨$ وحدة مساحة

ش٥) $ص_1 = ٨س$ ، $ص_2 = ٩ - س^2$ ، $ص_3 = ٠$

$ص_1 = ص_2$	$ص_1 = ص_3$	$ص_2 = ص_3$
$٩ - س^2 = ٨س$	$٨ س = صفر$	$٩ - س^2 = ٠$
$س^2 + ٨س - ٩ = ٠$	$\boxed{س = صفر}$	$\boxed{س = ٣}$ (٣، ٠)
$(س - ١)(س + ٩) = ٠$		$س = -٣$ تهمل
$س = ١$ (١، ٨)		
$س = -٩$ تهمل		



$$م = \int_{٠}^{١} ص_1 \, دس + \int_{١}^{٣} ص_2 - ص_3 \, دس$$

$$= \int_{٠}^{١} ٨س \, دس + \int_{١}^{٣} ٩ - س^2 \, دس$$

$$\left[٤س^2\right]_{٠}^{١} \oplus \left[٩س - \frac{س^3}{٣}\right]_{١}^{٣}$$

$$٤ - صفر \oplus (٢٧ - ٩) - (٩ - \tfrac{١}{٣})$$

$$٤ \oplus ٩ + \tfrac{١}{٣} = ١٣ \tfrac{١}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

ح٦) $س \in [٠ ، \frac{\pi}{٢}]$

نجد نقاط التقاطع

$جاس = جا٢س \Leftarrow جاس - ٢جاس جتاس = ٠$

$جاس = ٠$ ، $جتاس = \frac{١}{٢}$

$س = ٠$ ، $س = \frac{\pi}{٣}$

$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} (جا٢س - جاس) دس + \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} (جاس - جا٢س) دس$$

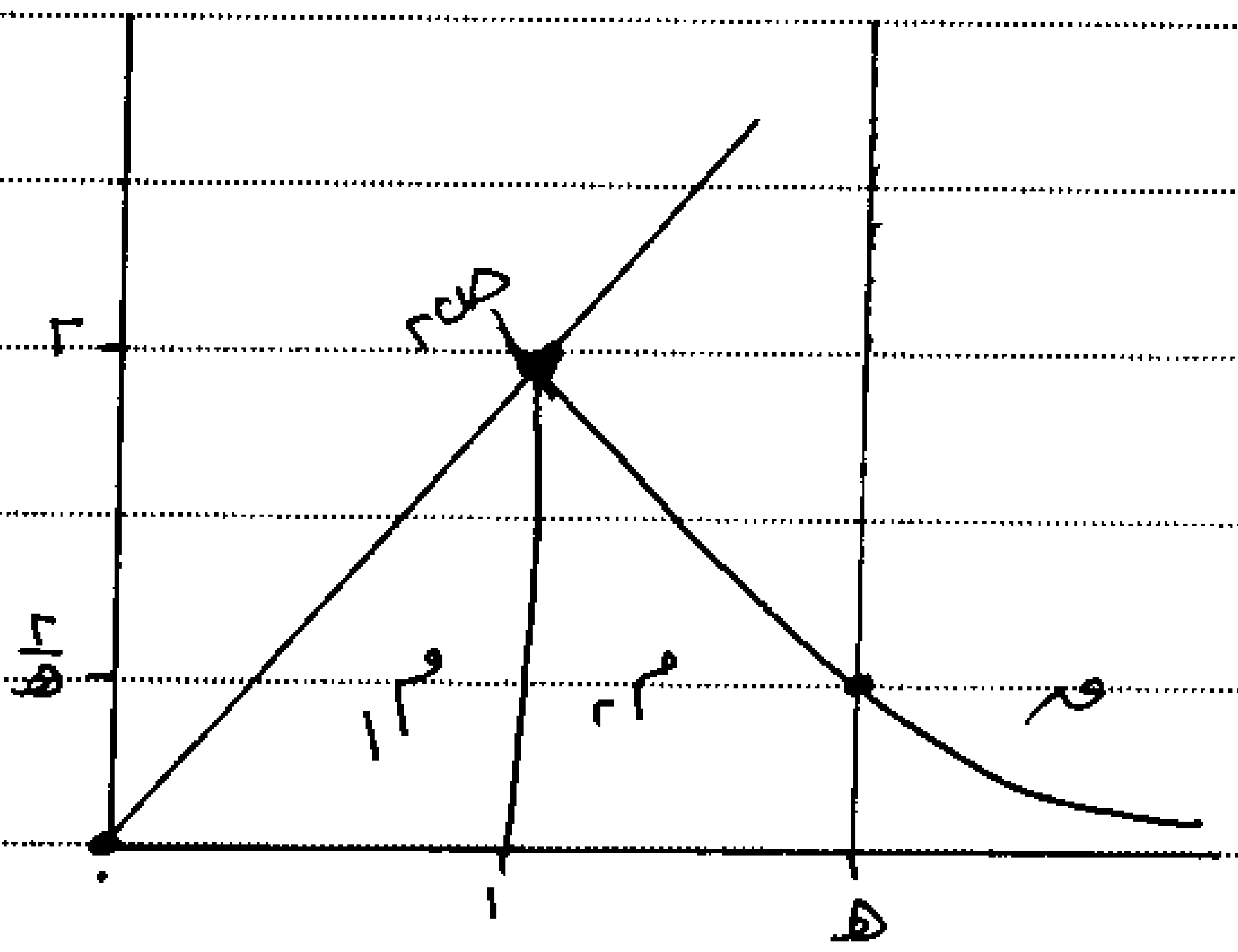
$$\left[-\tfrac{١}{٢} جتا٢س + جتاس\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \oplus \left[-جتاس + \tfrac{١}{٢} جتا٢س\right]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$(\tfrac{١}{٤} + \tfrac{١}{٢}) - (-\tfrac{١}{٢} + ١) \oplus (٠ - \tfrac{١}{٢}) - (-\tfrac{١}{٢} - \tfrac{١}{٤})$$

$$\tfrac{١}{٤} + \tfrac{١}{٤} = \tfrac{١}{٢} \text{ وحدة مساحة}$$

س٧) $د(س) = \frac{٢}{س}$ ، $ص_1 = صفر$ ، $ص_2 = ٢س$

$د = ص_1$	$د = ص_2$	$ص_1 = ص_2$
$\frac{٢}{س} = ٠$ لا يوجد	$\frac{٢}{س} = ٢س$	$٠ = ٢س$
نقط تقاطع	$س^2 = ١$	$\boxed{س = ٠}$
	$س = ١$ ، $س = -١$ تهمل (١، ٢)	(٠، ٠)



$$م = \int_{٠}^{١} (ص_2 - ص_1) دس + \int_{١}^{هـ} (د - ص_1) دس$$

$$= \int_{٠}^{١} ٢س \, دس \oplus \int_{١}^{هـ} \frac{٢}{س} \, دس$$

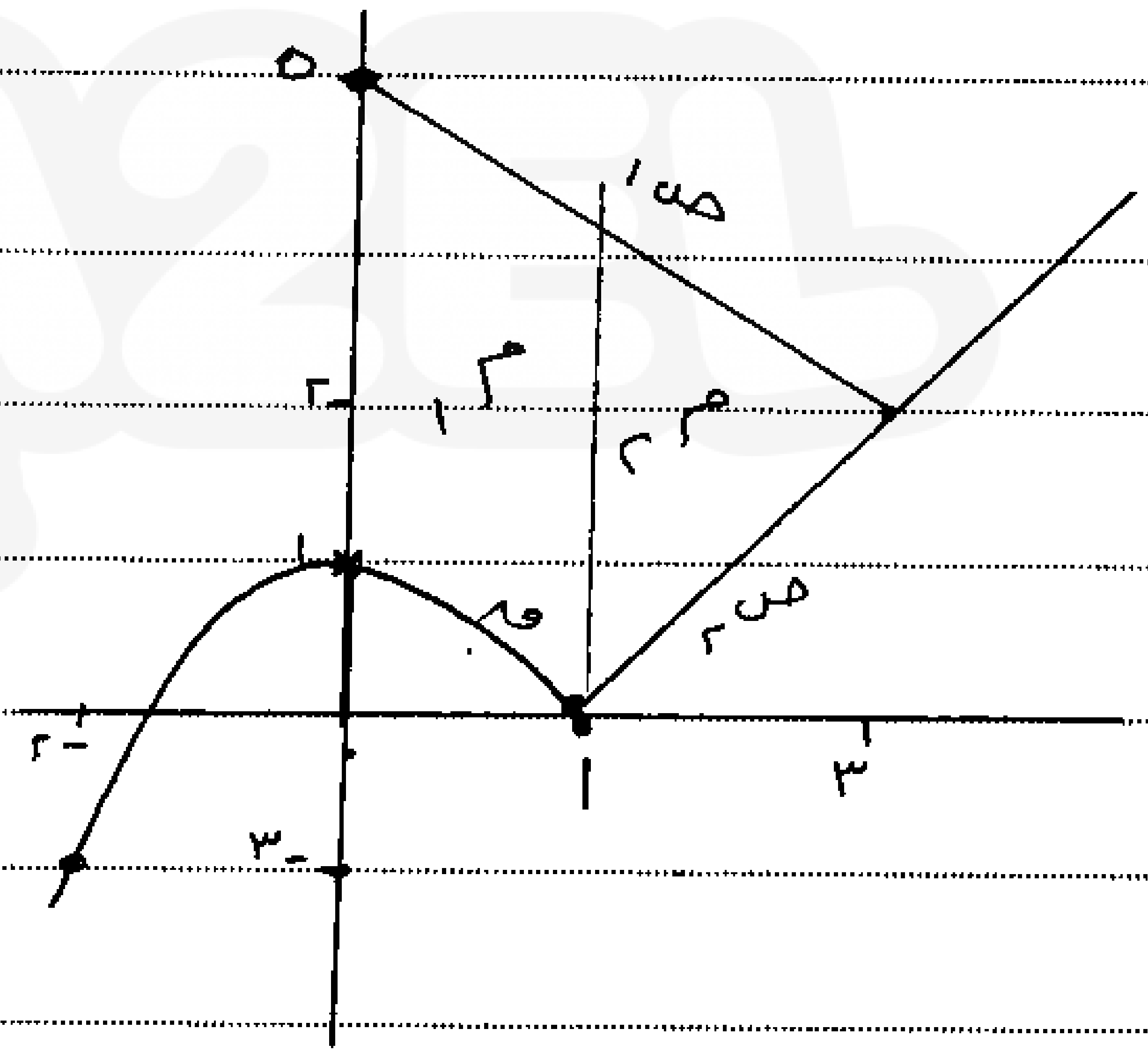
$$\left[س^2\right]_{٠}^{١} \oplus \left[٢ لو_{هـ} |س|\right]_{١}^{هـ}$$

$$١ \oplus ٢ لو_{هـ} هـ - ٢ لو_{هـ} ١$$

$$١ + ٢ = ٣ \text{ وحدة مساحة}$$

ش٨) $د(س) = ١ - س^2$ ، $ص_1 = ٥ - س$ ، $ص_2 = س - ١$

$د = ص_1$	$د = ص_2$	$ص_1 = ص_2$
$١ - س^2 = ٥ - س$	$١ - س^2 = س - ١$	$٥ - س = س - ١$
$س^2 - س + ٤ = ٠$	$س^2 + س - ٢ = ٠$	$٢س = ٦$
لا تحل	$(س + ٢)(س - ١) = ٠$	$س = ٣$
	$س = ١$ (١، ٠)	(٣، ٢)
	$س = -٢$	



$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{٠}^{١} ص_١ - د \; دس + \int_{١}^{٣} ص_١ - ص_٢ \; دس$

$= \int_{٠}^{١} ٥ - س - ١ + س^٢ \; دس + \int_{١}^{٣} ٥ - س - س + ١ \; دس$

$= \int_{٠}^{١} س^٢ - س + ٤ \; دس \oplus \int_{١}^{٣} ٦ - ٢س \; دس$

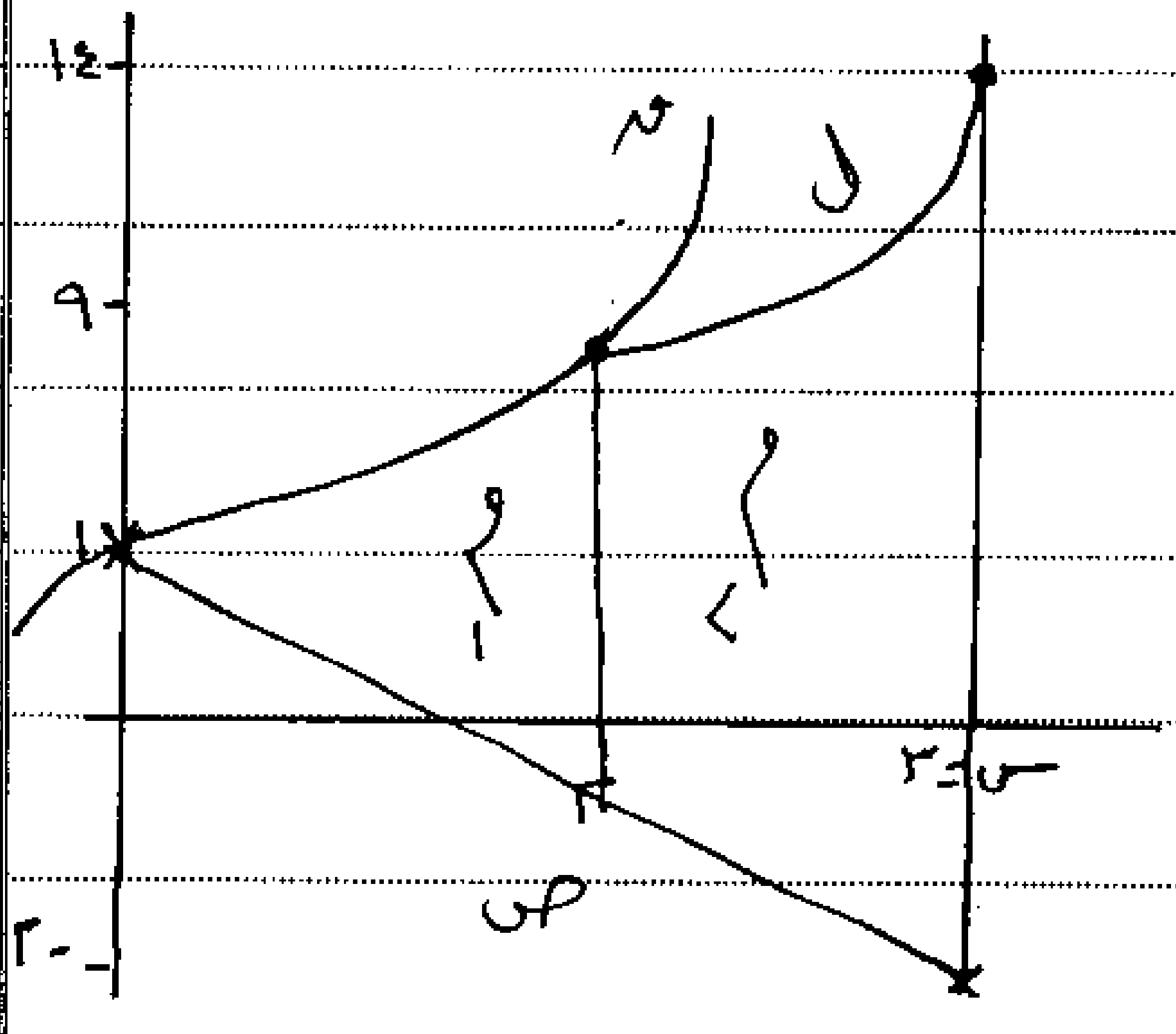
$\left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{٠}^{١} \oplus \left[٦س - س^٢\right]_{١}^{٣}$

$\left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤\right) - صفر \oplus (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$

$\frac{٢٣}{٦} + ٤ = \frac{٤٧}{٦}$ وحدة مساحة

س٩) $د(س) = ١ + س^٣$ ، $ل(س) = س^٢ + ٥$ ، $ص = ١ - س$

$د = ل$	$د = ص$	$ل = ص$
$١ + س^٣ = س^٢ + ٥$	$١ + س^٣ = ١ - س$	$س^٢ + ٥ = ١ - س$
$س^٣ - س^٢ - ٤ = ٠$	$س^٣ + س = ٠$	$س^٢ + س + ٤ = ٠$
$\boxed{س = ٢}$	$س(س^٢ + ١) = ٠$	لا تحل
$(٢ ، ٩)$	$\boxed{س = ٠}$ $(٠ ، ١)$	



$م = \int_{٠}^{٢} (د - ص) \; دس + \int_{٢}^{٣} (ل - ص) \; دس$

$= \int_{٠}^{٢} ١ + س^٣ - ١ + س \; دس \oplus \int_{٢}^{٣} س^٢ + ٥ - ١ + س \; دس$

$= \int_{٠}^{٢} (س^٣ + س) \; دس \oplus \int_{٢}^{٣} س^٣ + س + ٤ \; دس$

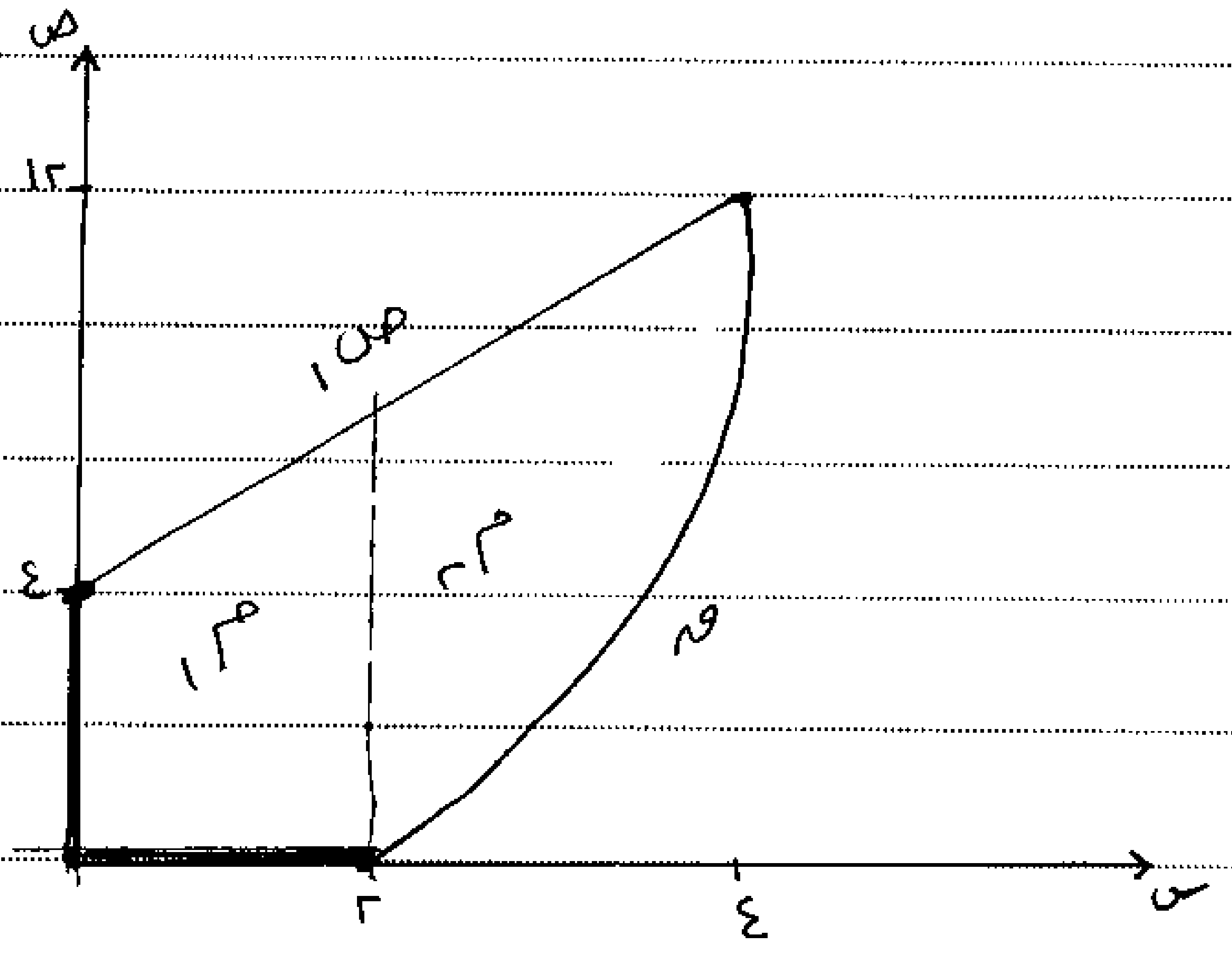
$\left[\frac{س^٤}{٤} + \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٢} \oplus \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{٢}^{٣}$

$(٤ + ٢) - صفر \oplus \left(٩ + \frac{٩}{٢} + ١٢\right) - \left(\frac{٨}{٣} + ٢ + ٨\right)$

$٦ + \frac{٧٧}{٦} = \frac{١١٣}{٦}$ وحدة مساحة

١٠) $د(س) = س^٢ - ٤$ ، $ص_١ = ٢س + ٤$ ، $ص_٢ = ٠$

$د = ص_١$	$ص_١ = ص_٢$	$د = ص_٢$
$س^٢ - ٤ = ٢س + ٤$	$٢س + ٤ = ٠$	$س^٢ - ٤ = ٠$
$س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$	$س = -٢$	$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$
$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$	تهمل	$س = ٢$ $(٢ ، ٠)$
$س = ٤$ $(٤ ، ١٢)$		$س = -٢$ تهمل
$س = -٢$ تهمل		



$م = \int_{٠}^{٢} ص_١ - ص_٢ \; دس + \int_{٢}^{٤} (ص_١ - د) \; دس$

$م = \int_{٠}^{٢} ٢س + ٤ \; دس \oplus \int_{٢}^{٤} ٢س + ٤ - س^٢ + ٤ \; دس$

$\left[س^٢ + ٤س\right]_{٠}^{٢} \oplus \int_{٢}^{٤} ٢س - س^٢ + ٨ \; دس$

$٤ + ٨ \oplus \left[\left(س^٢ - \frac{س^٣}{٣} + ٨س\right)\right]_{٢}^{٤}$

$١٢ \oplus \left(١٦ - \frac{٦٤}{٣} + ٣٢\right) - \left(٤ - \frac{٨}{٣} + ١٦\right)$

$١٢ \oplus \frac{٢٨}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

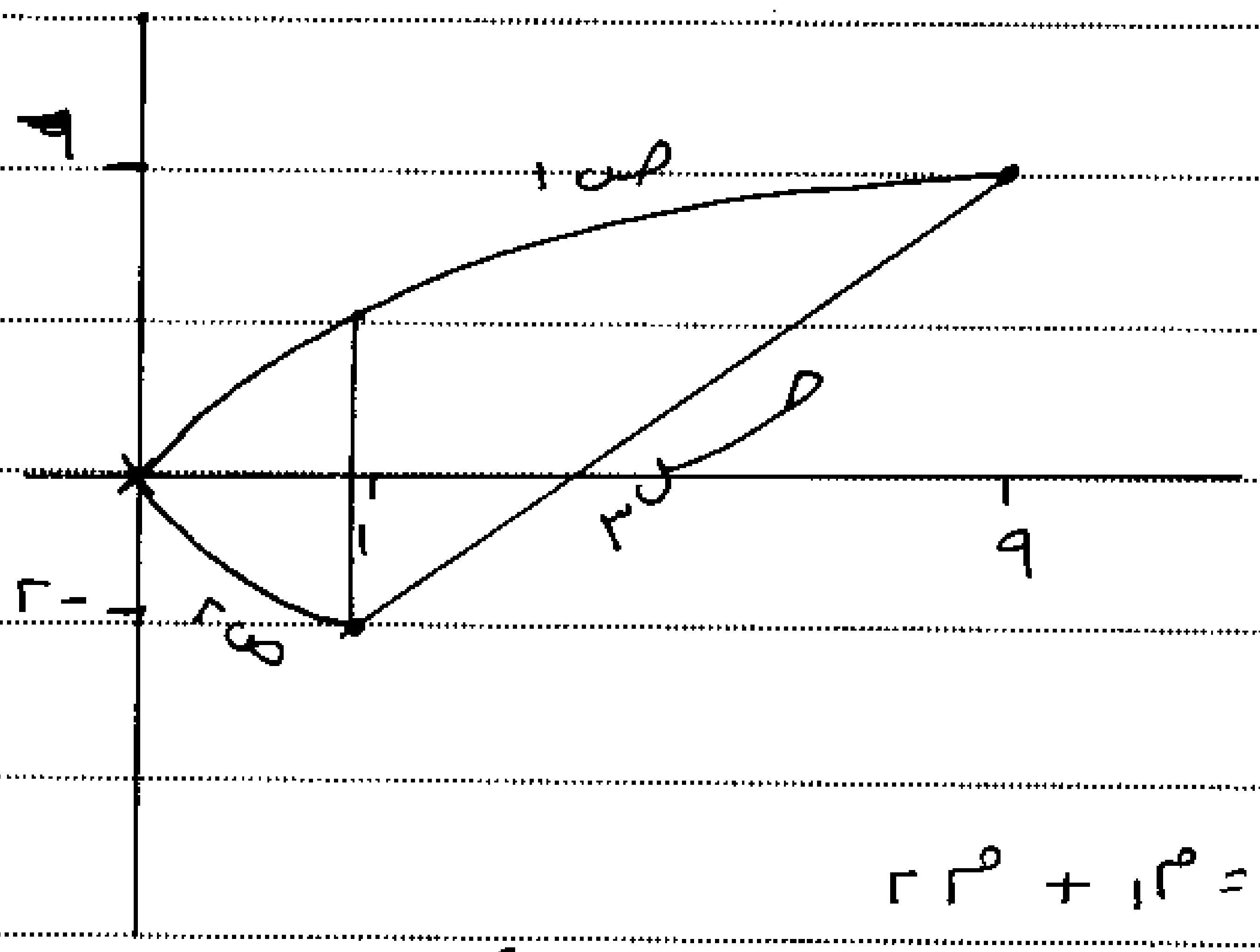
١١) $\text{ص}^2 = ٤\text{س}$ ، $\text{ص} = \text{س} - ٣$

$\Downarrow$

$\text{ص}_1 = ٢\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}_3 = \text{س} - ٣$

$\text{ص}_2 = -٢\sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}_1 = \text{ص}_2$	$\text{ص}_1 = \text{ص}_3$	$\text{ص}_2 = \text{ص}_3$
$٢\sqrt{\text{س}} = -٢\sqrt{\text{س}}$	$٢\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ٣$	$-٢\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ٣$
$\text{س} = \text{صفر}$	$\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣ = ٠$	$\text{س} + ٢\sqrt{\text{س}} - ٣ = ٠$
$(٠ ، ٠)$	$(\sqrt{\text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س}} + ١) = ٠$	$(\sqrt{\text{س}} - ١)(\sqrt{\text{س}} + ٣) = ٠$
	$\sqrt{\text{س}} = ٣ \leftarrow \boxed{\text{س} = ٩}$	$\sqrt{\text{س}} = ١ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$
	$\sqrt{\text{س}} = -١$ تُهمل	$\sqrt{\text{س}} = -٣$ تُهمل



$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$

$= \int_{٠}^{١} (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)\, \text{دس} + \int_{١}^{٩} (\text{ص}_1 - \text{ص}_3)\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} (٢\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}})\, \text{دس} \oplus \int_{١}^{٩} ٢\sqrt{\text{س}} - \text{س} + ٣\ \text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} ٤\, \text{س}^{\frac{1}{2}}\, \text{دس} \oplus \left[٢ \times \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{س}^3} - \frac{\text{س}^2}{٢} + ٣\text{س}\right]_{١}^{٩}$

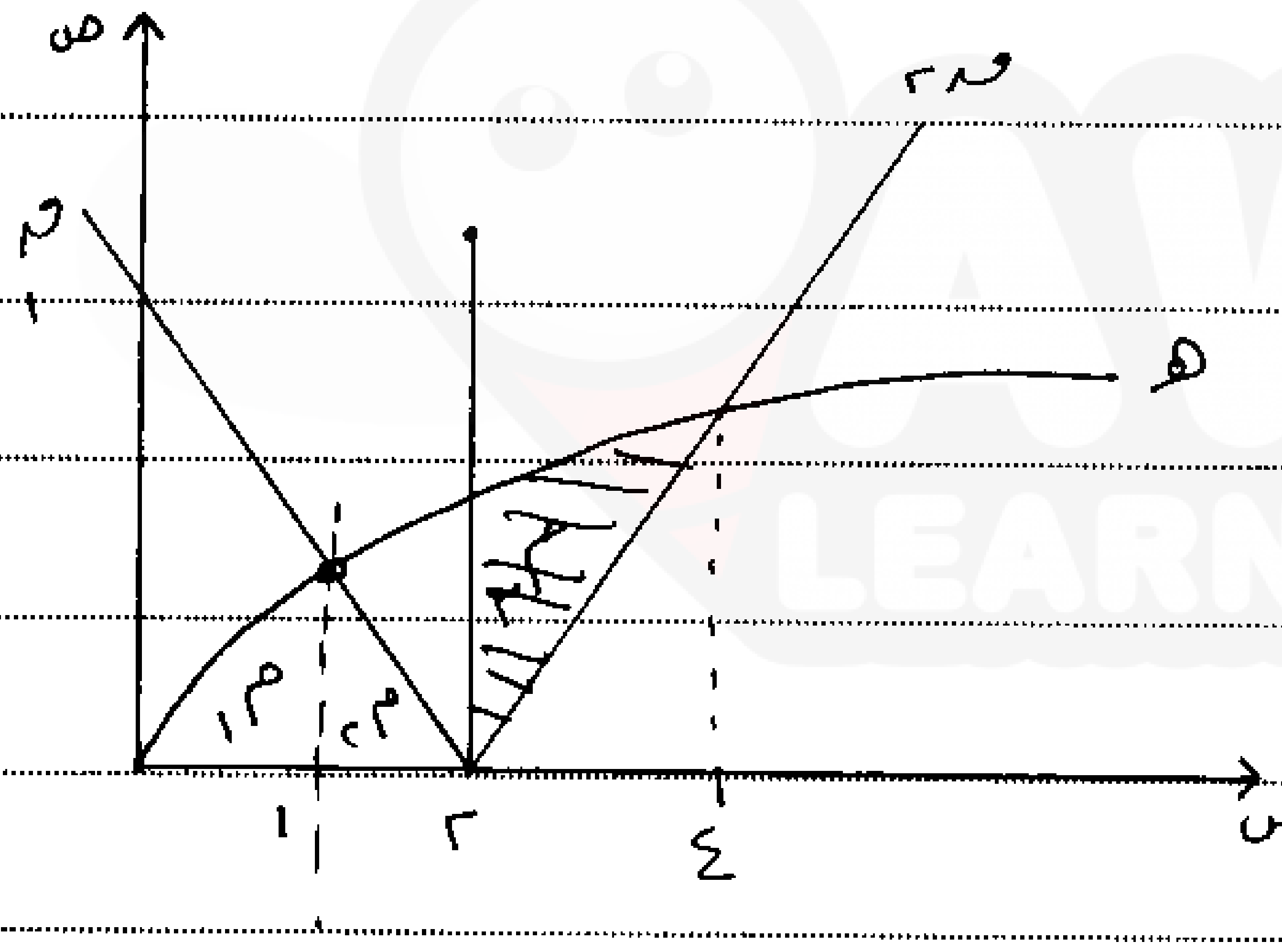
$= ٤ \times \frac{٢}{٣} \left[\text{س}^{\frac{3}{2}}\right]_{٠}^{١} \oplus \left(\frac{٤}{٣} \times ٢٧ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧\right) - \left(\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣\right)$

$= \frac{٨}{٣} \oplus \frac{٥٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ - \text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

$\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ق}_1 = \text{هـ}$ ، $\sqrt{\text{س}} = ٢ - \text{س}$ ، $\boxed{\text{س} = ١}$

$\text{هـ} = \text{ق}_2$ ، $\sqrt{\text{س}} = \text{س} - ٢$ ، $\boxed{\text{س} = ٤}$



$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3$

$= \int_{٠}^{١} (\text{هـ} - \text{صفر})\, \text{دس} + \int_{١}^{٢} (\text{ق}_1 - \text{صفر})\, \text{دس} + \int_{٢}^{٤} \text{هـ} - \text{ق}_2$

$= \int_{٠}^{١} \text{س}^{\frac{1}{2}}\, \text{دس} \oplus \int_{١}^{٢} (٢ - \text{س})\, \text{دس} \oplus \int_{٢}^{٤} \text{س}^{\frac{1}{2}} - \text{س} + ٢\ \text{دس}$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{س}^3} \oplus \left[٢\text{س} - \frac{\text{س}^2}{٢}\right]_{١}^{٢} \oplus \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{س}^3} - \frac{\text{س}^2}{٢} + ٢\text{س}$

$= \frac{٢}{٣} \oplus (٤ - ٢) - \left(٢ - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨\right) - \left(\frac{٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢ + ٤\right)$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} + \frac{١٦}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} + -٢$

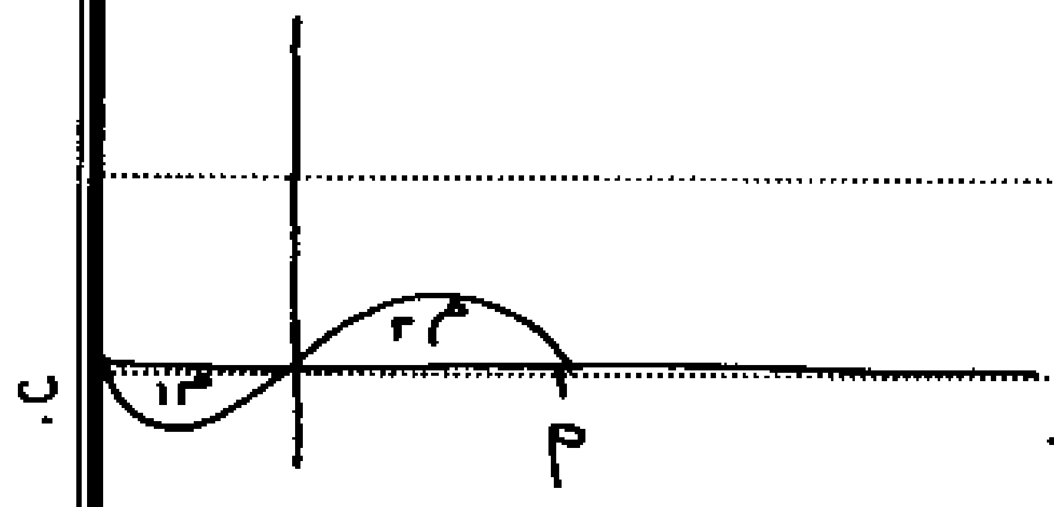
$= \frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$

١٣) $\int_{٠}^{٣} (٢ - \text{ق}(\text{س}))\, \text{دس}$

$= \int_{٠}^{٣} ٢\, \text{دس} - \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

$٢(٣ - ٠) - -٦ = ١٢$

١٤) $\int_{\text{ب}}^{٠} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = -\text{م}_1$



$\int_{٠}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \text{م}_1 = ٦$

$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 \Leftarrow ١٤ = ٦ + \text{م}_2 \Leftarrow \boxed{\text{م}_2 = ٨}$

$\int_{٠}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = ٨ \Leftarrow \int_{\text{م}}^{٠} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = -٨$

ثانياً : المعادلات التفاضلية

تدريب (١) :

$(\text{س}^2-3\text{س})\,\text{دص} = \text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}^2+\text{س}-12)\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \frac{\cancel{(\text{س}-3)}(\text{س}+4)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-3)}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{س}+4}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \int 1+\frac{4}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + 4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+4\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|+\text{جـ})$

تدريب (٢) ميل العمودي = $\text{س}\sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\text{س}\sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}$

$\int \text{دص} = \int \frac{-1}{\text{س}\sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

$\text{ع}^2 = 3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ص} = \int \frac{-2\text{ع}}{\text{ع}}\,\text{دع}$ $\qquad 2\text{ع}\,\text{دع} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \int -2\,\text{دع} \Rightarrow \text{ص} = -2\sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{جـ}$

$(\text{هـ}، 4) \Rightarrow 4 = -2\sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}} + \text{جـ}$

$\boxed{\text{جـ} = 8}$

$\text{ص} = -2\sqrt{3+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + 8$

تدريب (٣)

$\text{ت} = \sqrt{\text{ع}} \Rightarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \sqrt{\text{ع}}$ $\qquad \text{ع}(0) = 9$

$\int \text{ع}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دع} = \int \text{دن}$ $\qquad \text{ف}(4) = 80$

$2\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \text{ن} + \text{جـ}$ $\qquad \text{ف}(2) = ?$

$2\sqrt{9} = 0 + \text{جـ}$

$\boxed{\text{جـ} = 6}$

$2\text{ع}^{\frac{1}{2}} = \text{ن} + 6$

$\sqrt{\text{ع}} = \frac{\text{ن}+6}{2} \Rightarrow \text{ع} = \frac{(\text{ن}+6)^2}{4}$

$\int \text{دف} = \int \frac{(\text{ن}+6)^2}{4}\,\text{دن}$

$\text{ف} = \frac{(\text{ن}+6)^3}{12} + \text{جـ}$

$\text{ف}(4) = 80 \Rightarrow 80 = \frac{1000}{12} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = -\frac{40}{12}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{(\text{ن}+6)^3}{12} - \frac{40}{12}$

$\text{ف}(2) = \frac{512}{12} - \frac{40}{12} = \frac{472}{12} = \frac{118}{3}$ م

تدريب (٤) $\qquad \text{ع}(0) = 40$ م/ث

$\text{ت} = -10$

$\int \text{دع} = \int -10\,\text{دن} \Rightarrow \text{ع} = -10\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ع}(0) = 40 \Rightarrow \text{جـ} = 40$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -10\text{ن} + 40 \Rightarrow \int \text{دف} = \int -10\text{ن}+40\,\text{دن}$

$\text{ف} = -5\text{ن}^2 + 40\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ف}(0) = 45 \Rightarrow \text{جـ} = 45$

$\text{ف}(\text{ن}) = -5\text{ن}^2 + 40\text{ن} + 45$

ف = صفر $\qquad$ ن = ??

$-5\text{ن}^2 + 40\text{ن} + 45 = 0$

$\text{ن}^2 - 8\text{ن} - 9 = 0$ $\qquad (\text{ن}+1)(\text{ن}-9) = 0$

ن = -١ يهمل $\qquad \boxed{\text{ن} = 9}$

تمارين ومسائل صفحة (٣٠٨ - ٣٠٩)

س١)

أ) $س^{٣} دص - ص دس = صفر$

$س^{٣} دص = ص دس$

$\int \frac{١}{ص} دص = \int س^{-٣} دس$

$لو_{هـ}|ص| = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$

$|ص| = هـ^{\frac{-١}{٢س^{٢}} + جـ}$

ب) $دس - ٣ دص = جتاس دس$

$\int ٣ دص = \int دس - \int جتاس دس$

$٣ ص = س - جاس + جـ_{١}$

$ص = \frac{١}{٣} س - \frac{١}{٣} جاس + جـ$.

جـ) $هـ^{-ص} جاس - \frac{دص}{دس} جتا^{٢}س = صفر$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{-ص} جاس}{جتا^{٢}س}$

$\int هـ^{ص} دص = \int قاس ظاس دس$

$هـ^{ص} = قاس + جـ$

$ص = لو_{هـ}(قاس + جـ)$.

د) $قا^{٢}\frac{س}{٢} دص - جا^{٢}\frac{س}{٢} دس = صفر$

$قا^{٢}\frac{س}{٢} دص = جا^{٢}\frac{س}{٢} دس$

$دص = \frac{جا^{٢}\frac{س}{٢}}{قا^{٢}\frac{س}{٢}} دس$

$دص = جا^{٢}\frac{س}{٢} جتا^{٢}\frac{س}{٢} دس$

$دص = (جا\frac{س}{٢} جتا\frac{س}{٢})^{٢} دس$

$\int دص = \int \frac{١}{٤} جا^{٢}س دس$

$ص = \int \frac{١}{٨}(١ - جتا٢س) دس$

$ص = \frac{١}{٨}(س - \frac{١}{٢} جا٢س) + جـ$

هـ) $\frac{دص}{دس} = ١ - ص + س^{٢} - ص س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = (١ - ص) + س^{٢}(١ - ص)$

$\frac{دص}{دس} = (١ - ص)(س^{٢} + ١)$

$\int \frac{١}{١ - ص} دص = \int (س^{٢} + ١) دس$

$-لو_{هـ}|١ - ص| = \frac{س^{٣}}{٣} + س + جـ$

و) $(س^{٢} + ٣س)\frac{دص}{دس} = هـ^{-٢ص}(س + ١)(س^{٢} - ٩)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{-٢ص}(س + ١)(س^{٢} - ٩)}{س(س + ٣)}$

$هـ^{٢ص} دص = \frac{(س + ١)(س - ٣)\cancel{(س + ٣)}}{س\cancel{(س + ٣)}} دس$

$\frac{١}{٢} هـ^{٢ص} = \int س - ٢ - \frac{٣}{س} دس$

$\frac{١}{٢} هـ^{٢ص} = \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س - ٣لو_{هـ}|س| + جـ$

$هـ^{٢ص} = س^{٢} - ٤س - ٦لو_{هـ}|س| + جـ$

$٢ص = لو_{هـ}(س^{٢} - ٤س - ٦لو_{هـ}|س| + جـ)$

$ص = \frac{١}{٢} لو_{هـ}(س^{٢} - ٤س - ٦لو_{هـ}|س| + جـ)$

س٥) $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -\frac{٥٠٠}{(ن+١)^{٢}}$

$\int \text{دع} = \int -٥٠٠(ن+١)^{-٢}\ \text{دن}$

$ع = \frac{٥٠٠}{ن+١} + \text{جـ}$

$ع(٠) = ٢٥٠٠ \Rightarrow ٢٥٠٠ = \frac{٥٠٠}{١} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٢٠٠٠$

$ع(ن) = \frac{٥٠٠}{ن+١} + ٢٠٠٠$

$ع(٣) = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار

س٣) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{س-ص}}{\text{هـ}^{س}+١}$

$\text{دص} = \frac{\text{هـ}^{س} \times \text{هـ}^{-ص}}{\text{هـ}^{س}+١}\ \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{ص}\ \text{دص} = \int \frac{\text{هـ}^{س}}{\text{هـ}^{س}+١}\ \text{دس}$

$\text{هـ}^{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{س}+١| + \text{جـ}$

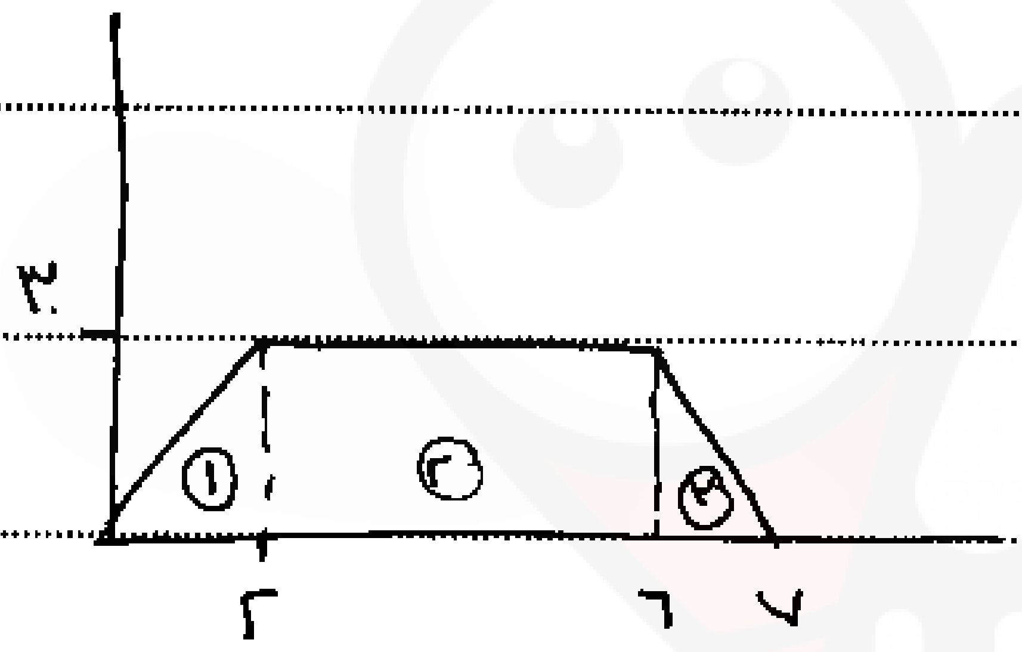
$(١،٠) \Rightarrow \text{هـ}^{٠} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}+١| + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ١ - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}+١|$

$\text{هـ}^{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{س}+١| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}+١|$

$ص = \text{لو}_{\text{هـ}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{س}+١| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}+١|\right)$

س٤)



المسافة المقطوعة في [٠، ٧]

= المساحة تحت المنحنى

$ف_{١} = \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٣٠ = ٣٠$

$ف_{٢} = \text{مساحة المستطيل} = (٦-٢) \times ٣٠ = ١٢٠$

$ف_{٣} = \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ٣٠ = ١٥$

$\text{المسافة المقطوعة} = ٣٠ + ١٢٠ + ١٥ = ١٦٥\text{م}$

س) $ت = -٤\ ع^{\frac{٣}{٢}} \Rightarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٤\ ع^{\frac{٣}{٢}}$

$\int ع^{-\frac{٣}{٢}}\ \text{دع} = \int -٤\ \text{دن}$

$-٢\ ع^{-\frac{١}{٢}} = -٤ن + \text{جـ} \Rightarrow \frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن + \text{جـ}$

$ع(٠) = ٤ \Rightarrow \frac{-٢}{\sqrt{٤}} = -٤ \times ٠ + \text{جـ} \Rightarrow \boxed{\text{جـ} = -١}$

$\frac{-٢}{\sqrt{ع}} = -٤ن - ١ \Rightarrow \sqrt{ع} = \frac{٢}{٤ن+١}$

$ع = \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}} \Rightarrow \int \text{دف} = \int \frac{٤}{(٤ن+١)^{٢}}\ \text{دن}$

$ف = \frac{-٤(٤ن+١)^{-١}}{٤} + \text{جـ}$

$ف(٠) = ٠ \Rightarrow \frac{-١}{١} + \text{جـ} = ٠ \Rightarrow \boxed{\text{جـ} = ١}$

$ف(ن) = \frac{-١}{٤ن+١} + ١ \Rightarrow ف(ن) = \frac{٤ن}{٤ن+١}$

$ف(ن) = \frac{٢}{٤ن+١} \times ٢ن \Rightarrow ف(ن) = ٢ن\sqrt{ع}$ #

س٦) ع(٠) = ٤٠ م/ث

ف(١) = ٨٠   ف = ؟؟ عندما ع = ٠

ت(ن) = -١٠ م/ث^{٢}

∫دع = ∫-١٠ دن

ع = -١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ⇐ ٤٠ = جـ

∫دف = ∫(-١٠ن + ٤٠) دن

ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + جـ

ف(١) = ٨٠ ⇐ ٨٠ = -٥ + ٤٠ + جـ

جـ = ٤٥

ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥

عند أقصى ارتفاع ع = ٠

-١٠ن + ٤٠ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{ن = ٤}}$

ف(٤) = -٥ × ١٦ + ٤٠ × ٤ + ٤٥

= ١٢٥ م

س٧) دع/دن = ٠.٠٢٥ ع

ع(٠) = ٢ × ١٠^{٥} ع(٤٠) = ؟؟

∫دع/ع = ∫٠.٠٢٥ دن

لوهـ|ع| = ٠.٠٢٥ن + جـ١

|ع| = هـ$^{٠.٠٢٥ن + جـ١}$ ⇐ ع = هـ$^{٠.٠٢٥ن}$ × هـ^{جـ١}

ع = جـ هـ$^{٠.٠٢٥ن}$

ع(٠) = ٢ × ١٠^{٥} ⇐ ٢ × ١٠^{٥} = جـ × هـ^{٠}

جـ = ٢ × ١٠^{٥}

ع(ن) = ٢ × ١٠^{٥} هـ$^{٠.٠٢٥ن}$

ع(٤٠) = ٢ × ١٠^{٥} هـ$^{٠.٠٢٥ × ٤٠}$

= ٢ × ١٠^{٥} هـ

= ٥٤٠٠٠٠ نسمة

أسئلة الوحدة

حل) أ) $\int_{٢}^{٣}(\text{٤س}+١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = \frac{٢}{٣}\left[\frac{(\text{٤س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤}\right]_{٢}^{٣}$

$\frac{٢}{١٢}\sqrt{١٣}^{٣} - \frac{٥٤}{١٢} = \frac{١}{٦}\left(\sqrt{١٣}^{٣} - ٢٧\right)$

* * *

ب) $\int \frac{\text{س قا}^{٢}\text{س} - \text{س ظا}^{٢}\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}\left(\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}\right)}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\,\text{دس}$

$= \frac{٣}{٥}\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}} + \text{جـ}$

* * *

جـ) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}^{٤}}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس}$ إخراج $\text{س}^{٤}$ عامل مشترك.

$\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤}(\text{س}^{-٢} - ١)}}{\text{س}^{٥}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٥}}\sqrt{\text{س}^{-٢} \rightarrow ١}\,\text{دس}$

$\int \text{س}^{-٣}\left(\text{س}^{-٢} - ١\right)^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{-٢} - ١$

$\int -\frac{١}{٢}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$ $\qquad \text{دص} = -\text{٢س}^{-٣}\,\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٢}\sqrt{\text{ص}^{٣}} + \text{جـ} = -\frac{١}{٣}\sqrt{(\text{س}^{-٢} - ١)^{٣}} + \text{جـ}$

* * *

د) $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ ، $\text{دص} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{ظتاس دس}$

$\int \text{ص دص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

هـ) $\int (\text{س}^{٨} - \text{٤س})^{٦}\,\text{دس}$

$= \int \left(\text{س}(\text{س}^{٧} - ٤)\right)^{٦}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٦}(\text{س}^{٧} - ٤)^{٦}\,\text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٧} - ٤$

$\text{دص} = \text{٧س}^{٦}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٧}\,\text{ص}^{٦}\,\text{دص} = \frac{١}{٤٩}\,\text{ص}^{٧} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}^{٧} - ٤)^{٧}}{٤٩} + \text{جـ}$

* * *

و) $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$ $\qquad \text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\Lsh (\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١)$

$\int (\text{ص}^{٢} + ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad \text{دع} = \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = (\text{ص}^{٢} + ١)\,\text{دص}$ $\qquad \text{هـ} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص}$

$\int (\text{ص}^{٢} + ١)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \left(\frac{\text{ص}^{٢}}{٣} + ١\right)\text{دص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٩} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \left(\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{ظاس}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٩} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

* * *

ز) $\int \sqrt[٣]{\text{٢س}^{٥} - \text{س}^{٣}}\,\text{دس} = \int \text{س}\sqrt[٣]{\text{٢س}^{٢} - ١}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{٢س}^{٢} - ١ \Leftarrow \text{دص} = \text{٤س دس}$

$\int \frac{١}{٤}\,\text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دص} = \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{٣\sqrt[٣]{(\text{٢س}^{٢} - ١)^{٤}}}{١٦} + \text{جـ}$

ح) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س}+٢هـ^{س}+١}\, دس$

$= \int_{٠}^{١} \frac{هـ^{س}}{(هـ^{س}+١)^{٢}}\, دس$

$ص = هـ^{س} + ١ \qquad دص = هـ^{س}\, دس$

$س = ٠ \qquad ص = ٢$

$س = ١ \qquad ص = هـ + ١$

$\int_{٢}^{هـ+١} ص^{-٢}\, دص = \left[\frac{-١}{ص}\right]_{٢}^{هـ+١}$

$= \frac{-١}{هـ+١} + \frac{١}{٢} = \frac{هـ-١}{٢(هـ+١)}$

ط) $\int جا(لو_{هـ}س)\, دس$

نفرض $ص = لو_{هـ}س \leftarrow دص = \frac{١}{س}\, دس$

$س = هـ^{ص}$

$\int هـ^{ص} جاص\, دص$

$ع = هـ^{ص} \qquad دع = هـ^{ص}\, دص$

$دهـ = جاص \qquad هـ = -جتاص$

$\int هـ^{ص} جاص\, دص = -هـ^{ص} جتاص + \underbrace{\int هـ^{ص} جتاص\, دص}_{\text{أجزاء مرة أخرى}}$

$\int هـ^{ص} جاص\, دص = -هـ^{ص} جتاص + هـ^{ص} جاص - \int هـ^{ص} جاص\, دص$

$٢\int هـ^{ص} جاص\, دص = -هـ^{ص} جتاص + هـ^{ص} جاص$

$\int هـ^{ص} جاص\, دص = \frac{١}{٢}\left(-هـ^{ص} جتاص + هـ^{ص} جاص\right) + جـ$

$= \frac{١}{٢}\left(-س جتا(لو_{هـ}س) + س جا(لو_{هـ}س)\right) + جـ$

$= \frac{١}{٢}\left(س جا(لو_{هـ}س) - س جتا(لو_{هـ}س)\right) + جـ$

ي) $\int \frac{س^{٣}}{٢س^{٤}+س^{٨}}\, دس$

$\int \frac{س^{٣}}{س^{٨}(٢س^{-٤}+١)}\, دس = \int \frac{س^{-٥}}{٢س^{-٤}+١}\, دس$

$ص = ٢س^{-٤}+١ \qquad دص = -٨س^{-٥}\, دس$

$\int \frac{-١}{٨} \times \frac{١}{ص}\, دص = -\frac{١}{٨} لو_{هـ}|ص| + جـ$

$= -\frac{١}{٨} لو_{هـ}|٢س^{-٤}+١| + جـ$

ك) $\int \frac{\sqrt{٤س+١٢} - ٣}{\sqrt{س+٣}+٣}\, دس$

$\int \frac{٢\sqrt{س+٣} - ٣}{\sqrt{س+٣}+٣}\, دس$

$ص = \sqrt{س+٣} ، ص^{٢} = س+٣ \leftarrow ٢ص\, دص = دس$

$\int \frac{(٢ص-٣)}{ص+٣} \times ٢ص\, دص = \int \frac{٤ص^{٢}-٦ص}{ص+٣}\, دص$

$= \int ٤ص - ١٨\, دص + \int \frac{٥٤}{ص+٣}\, دص$

$٢ص^{٢} - ١٨ص + ٥٤لو_{هـ}|ص+٣| + جـ$

$= ٢(س+٣) - ١٨\sqrt{س+٣} + ٥٤لو_{هـ}|\sqrt{س+٣} + ٣| + جـ$

ل) $\int لو_{هـ}(س^{٢}+٢س)\, دس$

$ع = لو_{هـ}(س^{٢}+٢س) \qquad دع = \frac{٢س+٢}{س^{٢}+٢س}\, دس$

$دهـ = دس \qquad هـ = س$

$\int لو_{هـ}(س^{٢}+٢س)\, دس = س لو_{هـ}(س^{٢}+٢س) - \int \frac{٢س+٢}{س+٢}\, دس$

$= س لو_{هـ}(س^{٢}+٢س) - \int ٢\, دس + \int \frac{٢}{س+٢}\, دس$

$= س لو_{هـ}(س^{٢}+٢س) - ٢س + ٢لو_{هـ}|س+٢| + جـ$

س٢) ٣ ظاص − $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ قاس = ٠

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ قاس = ٣ ظاص

$\frac{١}{\text{ظاص}}$ دص = $\frac{٣}{\text{قاس}}$ دس

$\int$ ظتاص دص = ٣ $\int$ جتاس دس

= ٣ جاس + ج

٣) ص^{٢} = لو$_{\text{هـ}}$س ص − هـ$^{\text{س}^{٢}}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ؟

ص^{٢} = لو$_{\text{هـ}}$س + لو$_{\text{هـ}}$ص − هـ$^{\text{س}^{٢}}$

٢ص صَ = $\frac{١}{\text{س}}$ + $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ − ٢س هـ$^{\text{س}^{٢}}$

٢ص صَ − $\frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$ − ٢س هـ$^{\text{س}^{٢}}$

صَ (٢ص − $\frac{١}{\text{ص}}$) = $\frac{١}{\text{س}}$ − ٢س هـ$^{\text{س}^{٢}}$

صَ = $\dfrac{\frac{١}{\text{س}} - \text{٢س هـ}^{\text{س}^{٢}}}{\text{٢ص} - \frac{١}{\text{ص}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\dfrac{\text{ص}(١ - \text{٢س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}})}{\text{س}(\text{٢ص}^{٢} - ١)}$

س٤) م(س) = س^{٣} + ب س^{٢} − ١

مَ(س) = ق(س) = ٣س^{٢} + ٢ب س

ق(٢) = ٢٤ ⇐ ١٢ + ٤ب = ٢٤

$\boxed{\text{ب} = ٣}$

س٥) م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة ق(س)

م(س) − هـ(س) = ثابت = جـ

$\int_{-١}^{٣}$ جـ دس = ١٢ ⇐ جـ(٣ − −١) = ١٢

$\boxed{\text{جـ} = ٣}$

$\int_{٠}^{٤}$ ٢س م(س) دس + $\int_{٤}^{٠}$ ٢س هـ(س) دس

= $\int_{٠}^{٤}$ ٢س م(س) دس − $\int_{٠}^{٤}$ ٢س هـ(س) دس

= $\int_{٠}^{٤}$ ٢س (م(س) − هـ(س)) دس

$\underbrace{\qquad}_{\text{ثابت = جـ = ٣}}$

$\int_{٠}^{٤}$ ٦س دس = ٣س$^{٢}]_{٠}^{٤}$ = ٤٨

س٦) $\int_{٣}^{١}$ (٢ق(س) + $\int_{٠}^{٢}$ ٢م دم) دس = ١٤

← م$^{٢}]_{٠}^{٢}$ = ٤

$\int_{٣}^{١}$ (٢ق(س) + ٤) دس = ١٤

$\int_{٣}^{١}$ ٢ق(س) دس + ٤×−٢ = ١٤

$\int_{٣}^{١}$ ق(س) دس = ١١ ⇐ $\int_{١}^{٣}$ ٣ق(س) دس = −٣٣

س٧) ق(س) = س^{٢} − $\int$ (٣س^{٢} − $\int_{٠}^{١}$ ٢ص دص) دس

قَ(س) = ؟

← ص$^{٢}]_{٠}^{١}$ = ١

ق(س) = س^{٢} − $\int$ ٣س^{٢} − ١ دس

قَ(س) = ٢س − (٣س^{٢} − ١)

قَ(س) = ٢س − ٣س^{٢} + ١

س٨) $\int_{-1}^{1} (٤ق(س) + ٣)\,دس = ١٨$

$٤\int_{-1}^{1} ق(س)\,دس + ٦ = ١٨$

∴ $\int_{-1}^{1} ق(س)\,دس = ٣$

$\int_{1}^{٤} ٢ق(س)\,دس = ٢٠ \Rightarrow \int_{1}^{٤} ق(س)\,دس = ١٠$

$\int_{٤}^{٢} ٢س\,دس - \int_{٤}^{-١} ق(س)\,دس =$

$[س^٢]_{٤}^{-١} - \left(\int_{٤}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{-١} ق(س)\,دس\right)$

$١ - ١٦ - (-١٠ + -٣)$

$-١٥ + ١٣ = -٢$

س٩) $\frac{دع}{دن} = أ\sqrt[٣]{ع}$ ، ع(٠) = ٠

أ = ؟ عندما ع(٣) = ٨

$\int ع^{-\frac{١}{٣}}\,دع = \int أ\,دن$

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ع^٢} = أن + جـ$

$ع(٠) = ٠ \Rightarrow \frac{٣}{٢} \times ٠ = أ \times ٠ + جـ$

جـ = صفر

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ع^٢} = أن$

عندما ن = ٣ ، ع = ٨

$\frac{٣}{٢} \times ٤ = أ \times ٣$

$٦ = ٣أ \Rightarrow \boxed{أ = ٢}$

س١٠) $\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{هـ^ص}}{١ - جا^٢س}$

$هـ^{-\frac{١}{٢}ص}\,دص = \frac{١}{جتا^٢س}\,دس$

$\int هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = \int قا^٢س\,دس$

$-٢هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = -ظاس + جـ$

$(\frac{\pi}{٤} ، ٠) \Rightarrow -٢ \times هـ^٠ = -ظا\frac{\pi}{٤} + جـ$

جـ = −١

$-٢هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = -ظاس - ١$

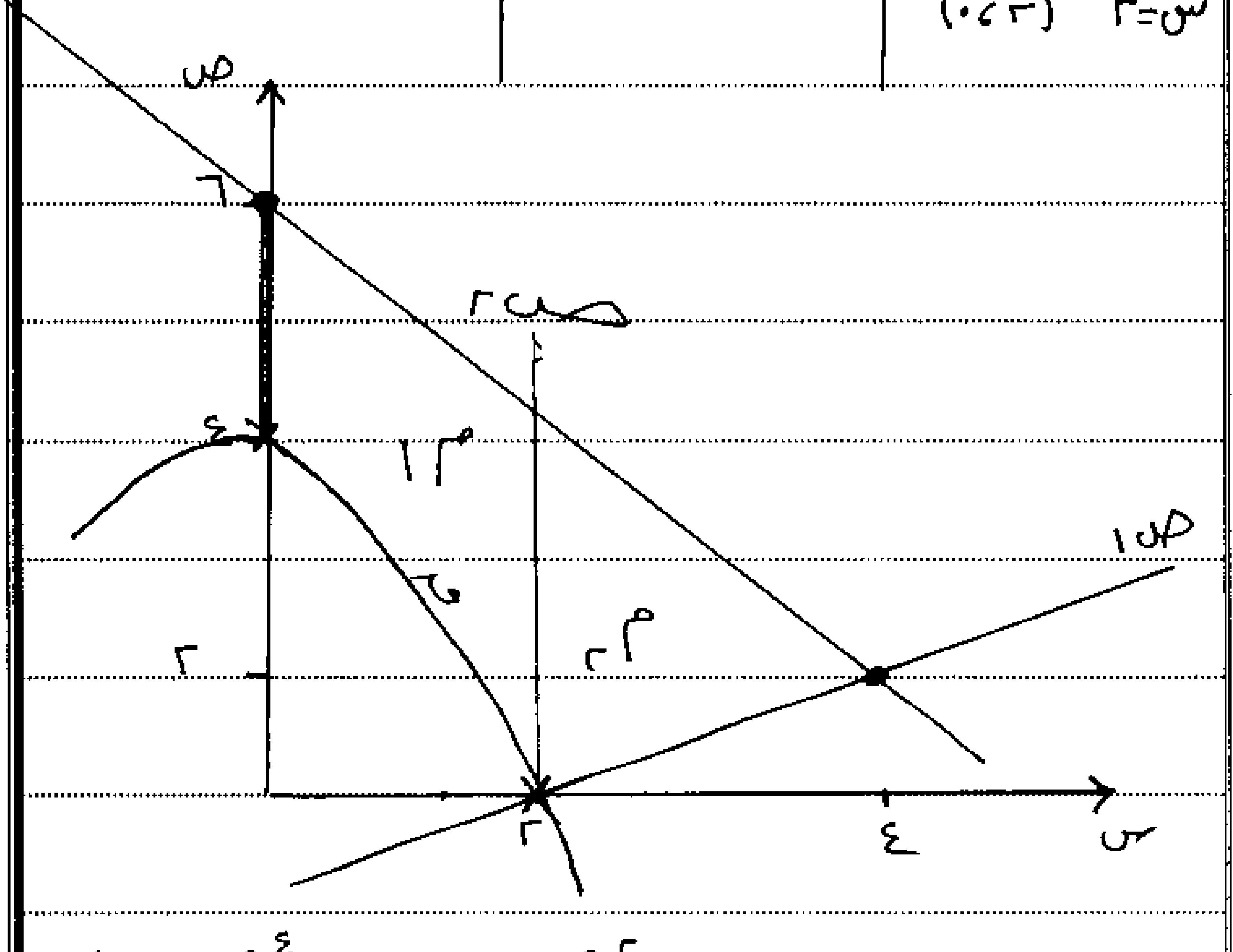
$هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = \frac{١}{٢}ظاس + \frac{١}{٢}$

$-\frac{١}{٢}ص = لو_{هـ}(\frac{١}{٢}ظاس + \frac{١}{٢})$

$ص = -٢لو_{هـ}(\frac{١}{٢}ظاس + \frac{١}{٢})$

س١١) ق(س) = ٤ − س^٢ ، ص١ = س − ٢ ، ص٢ = ٦ − س

ق = ص١	ق = ص٢	ص١ = ص٢
٤ − س^٢ = س − ٢	٤ − س^٢ = ٦ − ٢س	س − ٢ = ٦ − س
س^٢ + س − ٦ = ٠	س^٢ − ٢س + ٢ = ٠	٢س = ٨ ← $\boxed{س = ٤}$
(س + ٣)(س − ٢) = ٠	لا تحلل	(٤ ، ٢)
س = −٣ تهمل		
س = ٢ (٢ ، ٠)		



$م = م١ + م٢ \Rightarrow م = \int_{٠}^{٢} (ص٢ - ق)\,دس + \int_{٢}^{٤} (ص٢ - ص١)\,دس$

$= \int_{٠}^{٢} (س^٢ - ٢س + ٢)\,دس \oplus \int_{٢}^{٤} (٨ - ٢س)\,دس$

$[\frac{س^٣}{٣} - \frac{٢س^٢}{٢} + ٢س]_{٠}^{٢} + [٨س - س^٢]_{٢}^{٤}$

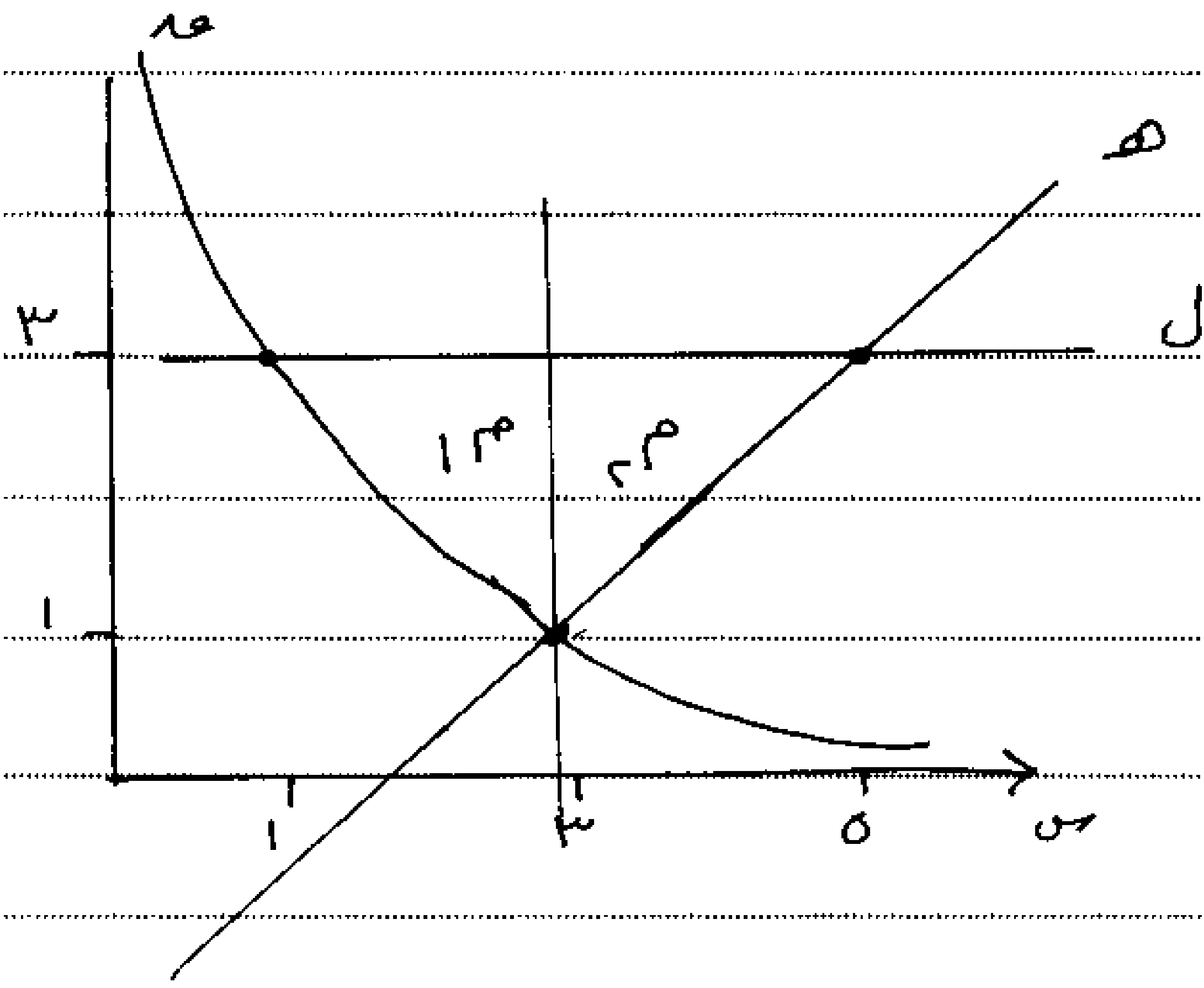
$\frac{٨}{٣} - ٢ + ٤ \oplus (٣٢ - ١٦) - (١٦ - ٤)$

$\frac{١٤}{٣} + ٤ = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مساحة

س١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} - ٢$

$\text{ل}(\text{س}) = ٣$

ق = هـ	ق = ل	هـ = ل
$\frac{٣}{\text{س}} = \text{س} - ٢$	$\frac{٣}{\text{س}} = ٣$	$\text{س} - ٢ = ٣$
	س = ١	س = ٥
س = ٣ (٣، ١)	(١، ٣)	(٥، ٣)
س = −١ (−١، −٣)		



$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$

$= \int_{١}^{٣} (\text{ل} - \text{ق})\, \text{دس} + \int_{٣}^{٥} (\text{ل} - \text{هـ})\, \text{دس}$

$= \int_{١}^{٣} ٣ - \frac{٣}{\text{س}}\, \text{دس} \oplus \int_{٣}^{٥} ٣ - \text{س} + ٢\, \text{دس}$

$= \left[٣\text{س} - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \right]_{١}^{٣} \oplus \left[٥\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{٣}^{٥}$

$٩ - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - (٣ - \text{صفر}) \oplus (٢٥ - \frac{٢٥}{٢}) - (١٥ - \frac{٩}{٢})$

$٦ - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ \oplus ٢$

$٨ - ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

س١٣) مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث − $\int_{-٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$

$٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢ ، -٢$

$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢)\, \text{دس}$

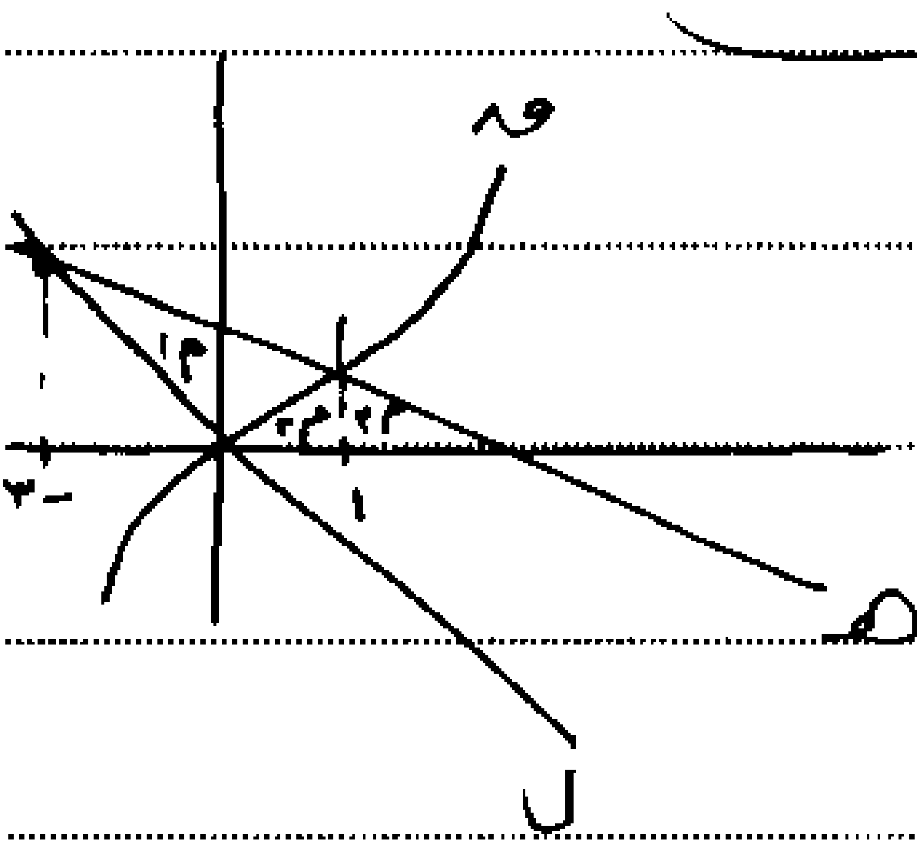
$= \left[٢\text{س} - \frac{١}{٦}\text{س}^٣ \right]_{-٢}^{٢}$

$(٤ - \frac{٨}{٦}) - (-٤ + \frac{٨}{٦}) = \frac{١٦}{٣}$

مساحة المنطقة المظللة = $١٢ - \frac{١٦}{٣}$

$= \frac{٢٠}{٣}$

التكلفة = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢٠}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ من الدينار.



س١٤) $\text{م}_١ = \int_{-٣}^{٠} (\text{هـ} - \text{ل})\, \text{دس}$

$= \int_{-٣}^{٠} ٣ - \text{س} + ٢\text{س}\, \text{دس}$

$= \left[٣\text{س} + \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{-٣}^{٠}$

$(\text{صفر}) - (-٩ + \frac{٩}{٢}) = \frac{٩}{٢}$

$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} \leftarrow \text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} ٢\text{س}^٣\, \text{دس} = \frac{\text{س}^٤}{٢} \Big]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$

$\text{م}_٣ = \int_{١}^{٣} ٣ - \text{س}\, \text{دس}$

$= \left[٣\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢} \right]_{١}^{٣}$

$(٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٢$

$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣$

$= \frac{٩}{٢} + \frac{١}{٢} + ٢ = ٧$ وحدة مساحة

س١٥) $\text{م}_١ = ١٠ \Leftarrow \int_{-٣}^{٠} \text{ق(س) دس} = ١٠$

$\text{م}_٢ = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس} = -٤$

$\int_{٠}^{٢} \text{س ق}(١-\text{س}^٢)\,\text{دس}$

$\text{ص} = ١ - \text{س}^٢ \qquad \text{دص} = -٢\text{س دس}$

$\text{س} = ٠ \qquad \text{ص} = ١$

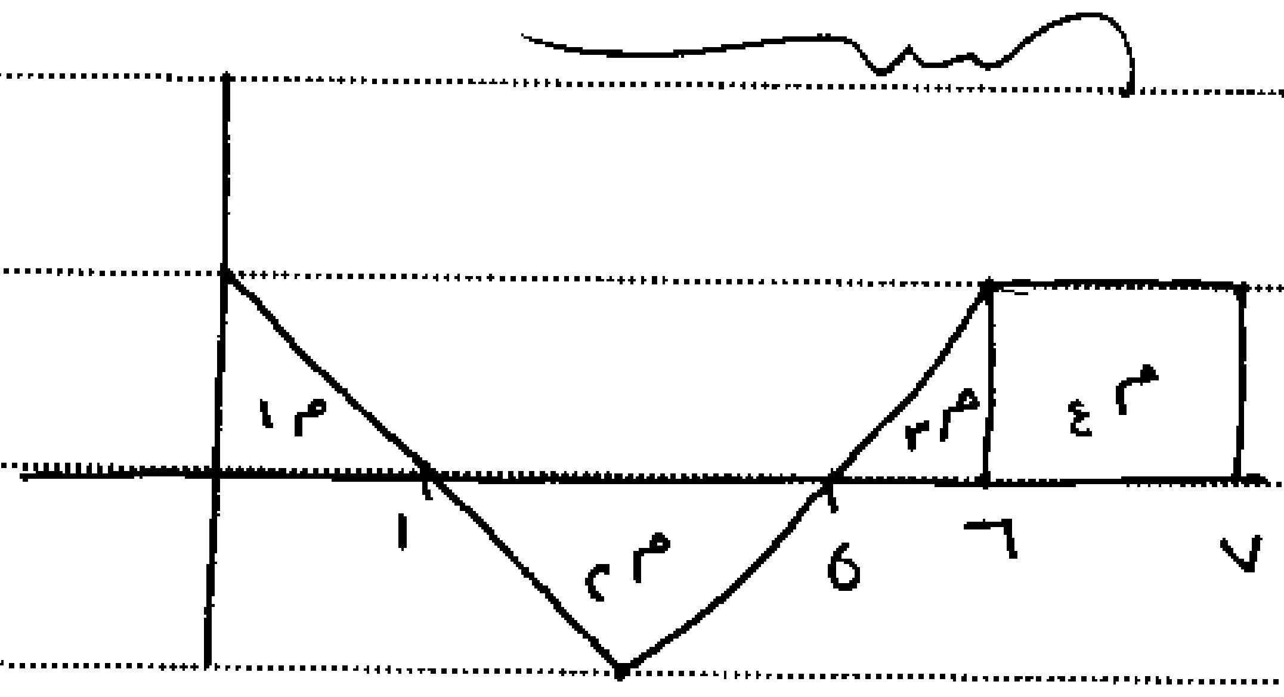
$\text{س} = ٢ \qquad \text{ص} = -٣$

$\int_{١}^{-٣} -\frac{١}{٢}\,\text{ق(ص) دص}$

$= -\frac{١}{٢}\left(\int_{١}^{٠} \text{ق(ص) دص} + \int_{٠}^{-٣} \text{ق(ص) دص}\right)$

$= -\frac{١}{٢}\,(+٤ + -١٠) = ٣$

س١٦)



$\text{م}_١ = \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس} = \frac{١}{٢}$

$\text{م}_٢ = \frac{١}{٢} \times ٢ \times (٥-١) = ٤$

$\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = -٤$

$\text{م}_٣ = \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ = \frac{١}{٢}$

$\int_{٥}^{٦} \text{ق(س) دس} = \frac{١}{٢}$

$\text{م}_٤ = ١ \times ١ = ١$ ، $\int_{٦}^{٧} \text{ق(س) دس} = ١$

$\int_{٥}^{٧} \text{ق(س) دس} = \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٢}$

أ) $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس} = \int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} + \int_{٥}^{٧} \text{ق(س) دس}$

$= \frac{١}{٢} + -٤ + \frac{٣}{٢} = -٢$

ب) $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\,\text{دس} = \text{المساحة}$

$= \text{م}_١ + \text{م}_٢ + \text{م}_٣ + \text{م}_٤ = \frac{١}{٢} + ٤ + ١ + \frac{١}{٢}$

$= ٦$ وحدة مساحة

جـ) $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس}\right|$

$= \left|\int_{٠}^{١} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} + \int_{٥}^{٧} \text{ق(س) دس}\right|$

$= \left|\frac{١}{٢} + -٤ + \frac{٣}{٢}\right| = |-٢| = ٢$

س١٧) أ) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^٣\sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \qquad \text{ص}^٢ = \text{س}$ ، $٢\text{ص دص} = \text{دس}$

$\int ٢\text{ص جاص جتا}^٣\text{ص دص}$

$= \int ٢\text{ص جاص جتاص جتا}^٢\text{ص دص}$

$= \int ٢\text{ص} \times \frac{١}{٢}\text{جا٢ص} \times \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا٢ص})\,\text{دص}$

$= \int \frac{١}{٢}\text{ص}\,(\text{جا٢ص} + \text{جا٢ص جتا٢ص})\,\text{دص}$

$= \int \frac{١}{٢}\text{ص}\,(\text{جا٢ص} + \frac{١}{٢}\text{جا٤ص})\,\text{دص}$

$\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{ص} \qquad \text{دع} = \frac{١}{٢}\text{دص}$

$\text{دهـ} = (\text{جا٢ص} + \frac{١}{٢}\text{جا٤ص})\,\text{دص} \qquad \text{هـ} = (-\frac{١}{٢}\text{جتا٢ص} - \frac{١}{٨}\text{جتا٤ص})$

$= \frac{١}{٢}\text{ص}(-\frac{١}{٢}\text{جتا٢ص} - \frac{١}{٨}\text{جتا٤ص}) + \int \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}\text{جتا٢ص} + \frac{١}{٨}\text{جتا٤ص})\,\text{دص}$

$= \frac{١}{٢}\text{ص}(-\frac{١}{٢}\text{جتا٢ص} - \frac{١}{٨}\text{جتا٤ص}) + \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤}\text{جا٢ص} + \frac{١}{٣٢}\text{جا٤ص}) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{\text{س}}\,(-\frac{١}{٢}\text{جتا}٢\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{٨}\text{جتا}٤\sqrt{\text{س}}) + \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤}\text{جا}٢\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\sqrt{\text{س}}) + \text{جـ}$

ب) $\int \text{س}\ \sqrt[3]{\text{س}^2+1}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2+1 \qquad \text{دص} = 2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{1}{2}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \text{دص} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\ \text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$= \frac{3}{8}\ \sqrt[3]{(\text{س}^2+1)^4} + \text{جـ}$

جـ) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\text{قا}^4\text{س}}{\text{ظا}^2\text{س} - 3\,\text{ظاس} + 2}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \qquad \text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0 \qquad \text{س} = \frac{\pi}{6}\ ،\ \text{ص} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\ \text{دص} = \int \frac{\text{ظا}^2\text{س}+1}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\ \text{دص}$

$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\text{ص}^2+1}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\ \text{دص}$

$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1\ \text{دص} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{3\text{ص} - 1}{\text{ص}^2 - 3\text{ص} + 2}\ \text{دص}$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1\ \text{دص} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{5}{(\text{ص}-2)}\ \text{دص} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{-2}{(\text{ص}-1)}\ \text{دص}$

$[\text{ص}]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + 5\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - 2\Big[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\right| - 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right| + \cancel{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}1}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 2\right| - 5\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 - 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right|$

د) $\int \frac{\text{ظتاس}\ \text{قتاس}}{9 - 4\,\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{قتاس} \qquad \text{دص} = -\,\text{قتاس}\ \text{ظتاس}\ \text{دس}$

$= \int \frac{-1}{9 - 4\text{ص}^2}\ \text{دص} = \int \frac{1}{4\text{ص}^2 - 9}\ \text{دص}$

$= \int \frac{\frac{1}{6}}{2\text{ص} - 3}\ \text{دص} + \int \frac{-\frac{1}{6}}{2\text{ص} + 3}\ \text{دص}$

$= \frac{1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص} - 3| + \frac{-1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{ص} + 3| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{12}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\frac{2\,\text{قتاس} - 3}{2\,\text{قتاس} + 3}\right| + \text{جـ}$

هـ) $\int_0^2 \text{س}^4\ \text{هـ}^{\text{س}^3 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_0^2 \text{س}^4 \times \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_0^2 \text{س}^5\ \text{هـ}^{\text{س}^3}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 \qquad \text{دص} = 3\text{س}^2\ \text{دس}$

$\text{س} = 0 \quad \text{ص} = 0 \quad ، \quad \text{س} = 2 \quad \text{ص} = 8$

$\int_0^8 \frac{1}{3}\,\text{س}^3\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \int_0^8 \frac{1}{3}\,\text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{ع} = \frac{1}{3}\text{ص} \qquad \text{دع} = \frac{1}{3}\ \text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} \qquad \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int_0^8 \frac{1}{3}\,\text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \Big[\frac{1}{3}\,\text{ص}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\Big]_0^8 - \int_0^8 \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \left(\frac{8}{3}\,\text{هـ}^8 - \text{صفر}\right) - \frac{1}{3}\Big[\text{هـ}^{\text{ص}}\Big]_0^8$

$\frac{8}{3}\,\text{هـ}^8 - \frac{1}{3}\,\text{هـ}^8 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\,\text{هـ}^8 + \frac{1}{3}$

و) $\int \text{جا}٣\text{س}\ \text{قتا}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}(٢\text{س}+\text{س})}{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جا}٢\text{س}\ \text{جتاس} + \text{جاس}\ \text{جتا}٢\text{س}}{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{٢\text{جاس}\ \text{جتاس}\ \text{جتاس} + \text{جاس}\ \text{جتا}٢\text{س}}{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}\left(٢\times\frac{١}{٢}(١+\text{جتا}٢\text{س}) + \text{جتا}٢\text{س}\right)}{\cancel{\text{جاس}}}\ \text{دس}$

$= \int ١ + ٢\text{جتا}٢\text{س}\ \text{دس}$

$= \text{س} + \text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

ز) $\int \frac{٢\text{جا}٣\text{س}\ \text{جتاس}}{\text{جتا}٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{٢}\times\cancel{\frac{١}{٢}}(\text{جا}٤\text{س} + \text{جا}٢\text{س})}{\text{جتا}٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{٢\text{جا}٢\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س} + \text{جا}٢\text{س}}{\text{جتا}٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int ٢\text{جا}٢\text{س} + \text{ظا}٢\text{س}\ \text{دس}$

$= -\text{جتا}٢\text{س} - \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}٢\text{س}| + \text{جـ}$

ح) $\int \frac{\text{س} + \text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{١+\text{جتاس}}\ \text{دس} + \int \frac{\text{جاس}}{١+\text{جتاس}}\ \text{دس}$

* $\int \frac{\text{س}}{١+\text{جتاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{س}}{٢\text{جتا}^٢\frac{\text{س}}{٢}}\ \text{دس}$

$\int \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{قا}^٢\frac{\text{س}}{٢}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{١}{٢}\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{قا}^٢\frac{\text{س}}{٢}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = ٢\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}$

$\int \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{قا}^٢\frac{\text{س}}{٢}\ \text{دس} = \text{س}\ \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} - \int \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{دس}$

$= \text{س}\ \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}| + \text{جـ}$

* $\int \frac{\text{جاس}}{١+\text{جتاس}}\ \text{دس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{جتاس}|$

$\int \frac{\text{س}+\text{جاس}}{١+\text{جتاس}}\ \text{دس} = \text{س}\ \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{جتاس}| + \text{جـ}$

ط) $\int \frac{٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-١)^٢}\ \text{دس}$

$\text{ع} = ٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{٤}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}-١)^{-٢}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{-١}{\text{س}-١}$

$\int \frac{٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-١)^٢}\ \text{دس} = \frac{-٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-١} + \int \frac{٤}{\text{س}(\text{س}-١)}\ \text{دس}$

$= \frac{-٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-١} + \int \frac{-٤}{\text{س}}\ \text{دس} + \int \frac{٤}{\text{س}-١}\ \text{دس}$

$= \frac{-٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-١} + -٤\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + ٤\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}-١| + \text{جـ}$

ي) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^{١٠}\ \text{قاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{قاس} + \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = (\text{قاس}\ \text{ظاس} + \text{قا}^٢\text{س})\ \text{دس}$

$\int \text{ص}^{١٠}\ \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^٩\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{قاس} + \text{ظاس})^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

س١٨)

١) $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{جا}٢\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتاس} - ١$

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\,\text{جتا}٢\text{س}\;\text{هـ}^{\text{جا}٢\text{س}} + \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\text{ق}(٠) = ٢$ (د)

٢) $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{س}^{٥} + \text{جاس} + ٣$

$\text{ق}(\text{س}) = ٥\text{س}^{٤} + \text{جتاس}$ (أ)

٣) $١ \leqslant \text{ق}(\text{س}) \leqslant ٤ \longrightarrow ٢ \leqslant ٢\text{ق}(\text{س}) \leqslant ٨$

$\int_{-١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leqslant \int_{-١}^{٢} ٨\,\text{دس}$

$\int_{-١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leqslant ٢٤$ (ب)

٤) $\int_{-٣}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٠ \;،\; \int_{-٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٥$

$\int_{-٢}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$

$\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٣} ٣\,\text{دس}$

$= ٢\left(\int_{١}^{-٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{-٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}\right) + ٣(٣-١)$

$= ٢(-٤ + ٥) + ٦ = ٨$ (جـ)

٥) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}(\text{س}) \qquad \text{دص} = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{س} = \text{أ} \quad \text{ص} = \text{هـ}(\text{أ}) \;،\; \text{س} = \text{ب} \quad \text{ص} = \text{هـ}(\text{ب})$

$\int_{\text{هـ}(\text{أ})}^{\text{هـ}(\text{ب})} \text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص} = \Big[\text{ق}(\text{ص})\Big]_{\text{هـ}(\text{أ})}^{\text{هـ}(\text{ب})}$

$= \text{ق}(\text{هـ}(\text{ب})) - \text{ق}(\text{هـ}(\text{أ}))$ (جـ)

٦) $\int_{-١}^{٢} (\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\,\text{دس} = ١٢$

$(\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))(٢ - -١) = ١٢ \Leftarrow \text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) = ٤$

$\int_{-١}^{٢} ٨\text{س}\,\text{دس} = ٤\text{س}^{٢}\Big]_{-١}^{٢} = ١٦ - ٤ = ١٢$ (جـ)

٧) $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤ \;،\; \int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ق}(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} \;،\; \text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad ٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \quad \text{ص} = ١ \qquad \text{س} = ٢ \quad \text{ص} = \text{هـ}$

$\int_{١}^{\text{هـ}} ٢\text{ص}\,\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = ٢ \times ٤ = ٨$ (ب)

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس}$ (أ)

٩) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{هـ}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}))\,\text{دس} = ٦$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} - ١٠ = ٦ \Leftarrow \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = ٦ + ١٠$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = ١٦$ (جـ)

١٠) $\int_{-٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{-٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$= ٤{,}٨ + -٠{,}٨ + ٢ = ٦$ (ب)

١١) $\text{م} = \int_{٠}^{١} ٣\text{س} - \text{س}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤ - \text{س} - \text{س}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} ٢\text{س}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤ - ٢\text{س}\,\text{دس}$

(ب)

رقم الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
رمز الإجابة	د	أ	ب	جـ	جـ	جـ	ب	أ	جـ	ب	ب

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة الرياضيات

الصف: الثاني عشر (العلمي).

الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها.

الفصل الأول: القطوع المخروطية:

أولاً: القطع المخروطي:

س١ الشكل (٥-٣):

أ) قطع زائد   ب) قطع ناقص   جـ) دائرة   د) قطع مكافئ

س٢ أ) قطع زائد   ب) دائرة   جـ) قطع مكافئ   د) قطع ناقص

ثانياً: الحل الهندسي:

تدريب (١): الحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى هو دائرة مركزها النقطة م (٢، -٤)، ونصف قطرها = ١ وحدة.

∴ معادلة الحل الهندسي = معادلة الدائرة

$$\Leftarrow (\text{ص}-٢)^٢+(\text{ص}+٤)^٢=(١)^٢$$

$$\Leftarrow (\text{س}-٢)^٢+(\text{ص}+٤)^٢=١$$

تدريب (٢): الحل الهندسي الناتج هو خط مستقيم، ولإيجاد معادلته:

البعد = $\sqrt{٥}$

م: ص + ٢س = ٠

النقطة (س، ص)

$$\text{البعد} = \left|\frac{\text{أ}\text{س}_١+\text{ب}\text{ص}_١+\text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^٢+\text{ب}^٢}}\right|$$

$$\sqrt{٥}=\left|\frac{٢\times\text{س}+١\times\text{ص}+٠}{\sqrt{(٢)^٢+(١)^٢}}\right|=\frac{|٢\text{س}+\text{ص}|}{\sqrt{٥}}$$

$$٥=|٢\text{س}+\text{ص}|$$

∴ $٢\text{س}+\text{ص}=٥$

أو $٢\text{س}+\text{ص}=-٥$

وبما أن النقطة المتحركة تمر أثناء حركتها بالنقطة (-١، -٣) فإن معادلة المستقيم هي $\boxed{٢\text{س}+\text{ص}=-٥}$

تابع الحل الهندسي :

تدريب (٣) : معادلة الحل الهندسي هي :

$$٣ \times \sqrt{(\text{س}-٢)^٢ + (\text{ص}+١)^٢} = \left|\frac{\text{س}}{\sqrt{١}}\right|$$ (محور الصادات معادلته س = ٠)

$$٩ \times \left((\text{س}-٢)^٢ + (\text{ص}+١)^٢\right) = \left(|\text{س}|\right)^٢$$

$$٩\left(\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{ص}^٢ + ٢\text{ص} + ١\right) = \text{س}^٢$$

$$٨\text{س}^٢ + ٩\text{ص}^٢ - ٣٦\text{س} + ١٨\text{ص} + ٤٥ = ٠$$

★ تمارين ومسائل الحل الهندسي :

س١ معادلة الحل الهندسي هي : $(\text{س}+٢)^٢ + (\text{ص}-٦)^٢ = (٧)^٢$

س٢ معادلة الحل الهندسي هي :

$$\text{البعد} = ٤ = \left|\frac{\text{س}-١}{\sqrt{(١)^٢+(٠)^٢}}\right| \Leftarrow ٤ = |\text{س}-١| \Leftarrow \text{س} = ٥$$ تهمل

أو $\boxed{\text{س} = -٣}$ لأن النقطة (−٣، ٢) تقع عليه.

س٣ معادلة الحل الهندسي هي :

$$\sqrt{(\text{س}-٥)^٢ + (\text{ص}-٣)^٢} = ٢\left|\frac{\text{ص}-٤}{\sqrt{٠+(١)^٢}}\right|$$ وبتربيع الطرفين

$$(\text{س}-٥)^٢ + (\text{ص}-٣)^٢ = ٤(\text{ص}-٤)^٢$$

$$\text{س}^٢ - ١٠\text{س} + ٢٥ + \text{ص}^٢ - ٦\text{ص} + ٩ = ٤\text{ص}^٢ - ٣٢\text{ص} + ٦٤$$

$$\text{س}^٢ - ٣\text{ص}^٢ - ١٠\text{س} + ٣٦\text{ص} - ٣٠ = ٠$$

س٤ بعد النقطة عن المستقيم = ٣ وحدات ، معادلة المستقيم $٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = ٠$ ، النقطة مركز الدائرة ∴ (٤، ٢) تقع على الحل الهندسي

∴ معادلة الحل هي البعد $= ٣ = \left|\frac{٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}\right|$

$$٣ = \frac{|٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥|}{٥} \Leftarrow ١٥ = |٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥|$$

∴ $٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = -١٥ \Leftarrow ٣\text{س} + ٤\text{ص} = -١٠$

أو $٣\text{س} + ٤\text{ص} - ٥ = ١٥ \Leftarrow ٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٠$

لكن النقطة (٤، ٢) تقع على المستقيم (منحنى) الذي معادلته $٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٠$

∴ معادلة الحل الهندسي هي $\boxed{٣\text{س} + ٤\text{ص} = ٢٠}$

الفصل الثاني : معادلات القطوع المخروطية :

أولاً : الدائرة ::

تدريب ١ : ١) معادلة الدائرة التي نهايتا قطرها النقطتان (٧، ٣) ، (٥، -١)

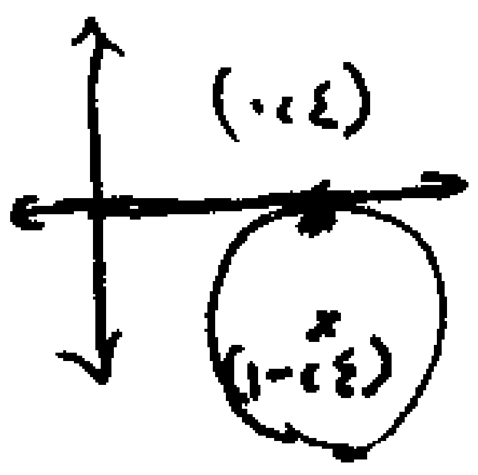
نجد إحداثيات المركز = $\left(\frac{٧+٥}{٢} ، \frac{٣+{}^{-}١}{٢}\right) = (٦ ، ١)$ إحداثيات منتصف قطعة $\left(\frac{\text{س}_١+\text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١+\text{ص}_٢}{٢}\right)$

نجد قطر الدائرة = $\sqrt{(٧-٥)^٢+(٣-{}^{-}١)^٢} = \sqrt{٤+١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول ⇐ نصف القطر = $\sqrt{٥}$ وحدة

∴ معادلة الدائرة هي $(\text{س}-٦)^٢+(\text{ص}-١)^٢ = ٥$

تدريب ١ : ٢) معادلة الدائرة على الصورة القياسية :

∴ مركز الدائرة هو (-١، ٤) ، نق = $\sqrt{٣٠}$ وحدة



تدريب ٢ : بما أن الدائرة تمس محور السينات ، فإن نقطة التماس (٤، ٠) ، وبما أن المركز (٤، -١)

نجد نق = $\sqrt{(٤-٤)^٢+(٠-{}^{-}١)^٢} = ١$ وحدة

∴ المعادلة $(\text{س}-٤)^٢+\text{ص}^٢ = ١$ ——— وهي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة .

تدريب ٣ :

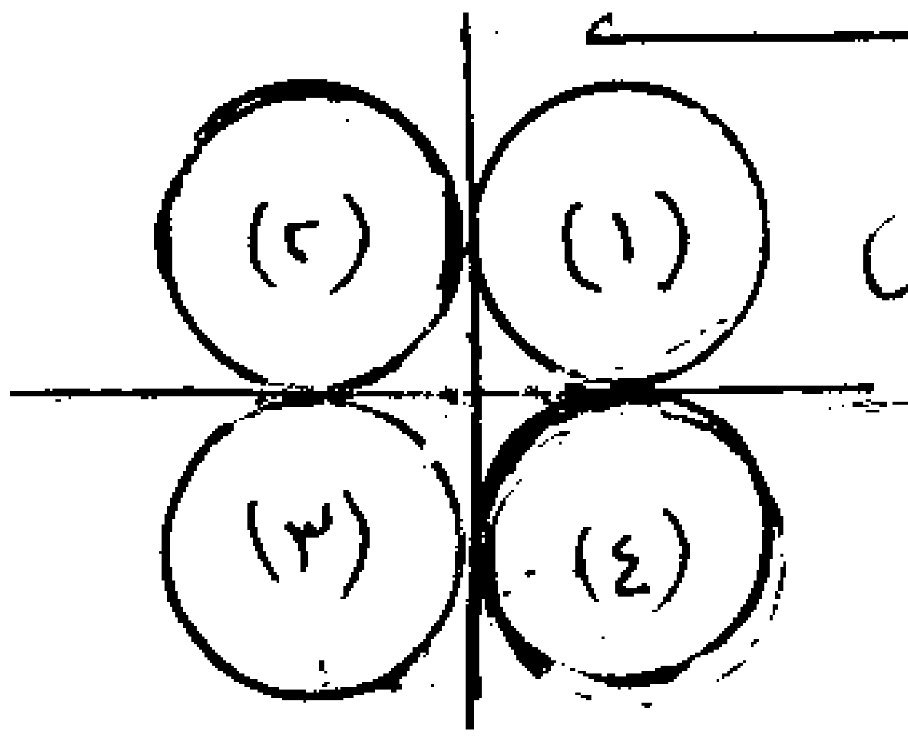
أ) المركز (٤، -١) ، وتمس المستقيم ص = -٢ ،

نجد نق = البعد بين نقطة ومستقيم = $\left|\frac{\text{أ}\,\text{س}_١+\text{ب}\,\text{ص}_١+\text{جـ}}{\sqrt{(\text{أ})^٢+(\text{ب})^٢}}\right|$ حيث $\overset{\text{س}_١}{٤} ، \overset{\text{ص}_١}{-١}$

أ = ٠ = معامل س في المستقيم
ب = ١ = معامل ص
جـ = ٢ = الحد الثابت لأن المعادلة ص + ٢ = ٠

$= \left|\frac{\cancel{٠\times٤}+١\times{}^{-}١+٢}{\sqrt{(٠)^٢+(١)^٢}}\right| = \frac{١}{١} = ١$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : $(\text{س}-٤)^٢+(\text{ص}+١)^٢ = ١$



تدريب ٣ ب) بما أن الدائرة تمس المحورين ، ونصف قطرها = ٣ وحدات ، لاحظ الشكل

(١) الحل الأول: الدائرة تقع في الربع الأول ⇐ مركزها (٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي: $(\text{س}-٣)^٢+(\text{ص}-٣)^٢ = ٩$

(٢) الحل الثاني : الدائرة تقع في الربع الثاني ⇐ المركز (-٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي : $(\text{س}+٣)^٢+(\text{ص}-٣)^٢ = ٩$

(٣) الحل الثالث : الدائرة تقع في الربع الثالث ⇐ معادلة الدائرة $(\text{س}+٣)^٢+(\text{ص}+٣)^٢ = ٩$

(٤) الحل الرابع : الدائرة تقع في الربع الرابع ⇐ معادلة الدائرة $(\text{س}-٣)^٢+(\text{ص}+٣)^٢ = ٩$.

تدريب ٤ : ١) بما أن المعادلة على الصورة العامة ، فإن المركز = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص)

∴ إحداثيا المركز = $\left(\frac{-(-٢)}{٢} ، -\frac{(٦)}{٢}\right) = (١ ، -٣)$

د = ١
هـ = −٣
جـ = الحد الثابت = −٦

طول نصف القطر = $\sqrt{(د)^٢ + (هـ)^٢ - جـ} = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - (-٦)}$

$= \sqrt{١ + ٩ + ٦} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

حل آخر: يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية بإكمال مربع ثم إيجاد المركز و نصف القطر.

تدريب ٤ : ٢) $(٣س + ٦)^٢ + (٣ص - ١٢)^٢ = ٣٦$

يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية على الصورة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$\left(\frac{٣س}{٣} + \frac{٦}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{٣ص}{٣} - \frac{١٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٣٦}{(٣)^٢}$ بالقسمة على ٣ ، ولاحظ أنه داخل $(\ )^٢$

ومنه $(س + ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٤$.

∴ المركز (−٢ ، ٤) ، نق = ٢ وحدة طول .

تدريب (٥) : الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + جـ = ٠$ ، فنعوض بالنقاط الثلاثة

$(٠ ، ٠) \Leftarrow \boxed{جـ = ٠}$

$(٠ ، ٢) \Leftarrow \cancel{(٠)}^٢ + (٢)^٢ + أ \times \cancel{٠} + ب \times ٢ + \cancel{جـ} = ٠ \Leftarrow ٢ب + ٤ = ٠ \Leftarrow \boxed{ب = -٢}$

$(-١ ، ٣) \Leftarrow (-١)^٢ + (٣)^٢ + أ \times -١ + ب \times ٣ + \cancel{جـ} = ٠ \Leftarrow ١٠ - أ + ٣ب = ٠$

$١٠ - أ - ٦ = ٠ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

∴ معادلة الدائرة $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٢ص = ٠}$

إحداثيا مركز الدائرة = $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right) = \left(\frac{-٤}{٢} ، \frac{-(-٢)}{٢}\right) = (-٢ ، ١)$

نق = $\sqrt{د^٢ + هـ^٢ - جـ} = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ - ٠} = \sqrt{٥}$ وحدة طول .

تدريب (٦) : بما أن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :-

$س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + جـ = ٠$ ، مركزها على محور الصادات في إحداثياته $\left(٠ ، \frac{-ب}{٢}\right)$

وبما أن النقاط (−١ ، ٣) ، (٥ ، ١) تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها ، ومنه

$-أ + ٣ب + جـ = -١٠$ —— ①

$٥أ + ب + جـ = -٢٦$ —— ②

وبما أن المركز = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص) = $\left(-\frac{أ}{٢} ، \frac{-ب}{٢}\right) = \left(٠ ، \frac{-ب}{٢}\right)$

∴ $\boxed{أ = ٠}$

وبحل نظام المعادلتين ① ، ② نجد أن $\boxed{ب = ٨}$ ، $\boxed{جـ = -٣٤}$

∴ الصورة النهائية لمعادلة الدائرة هي : $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ٨ص - ٣٤ = ٠}$

ملاحظة : يمكن حل السؤال على المسافة بين نقطتين. $س^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$ ، المركز (٠ ، −٤)
، ر = ٥√٢ وحدة طول

تمارين ومسائل الدائرة :

س١ أ) معادلة الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = (٨)^{٢}$

ب) معادلة الدائرة $(س + ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٤٩$ لأن نق = $\sqrt{(-٢ - ٥)^{٢} + (١ - ١)^{٢}} = ٧$ وحدة طول

جـ) معادلة الدائرة $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٤٩$ لأن نق = البعد بين المركز والمماس = $|-٧| = ٧$ وحدة طول

د) معادلة الدائرة $(س - ٥)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = (\sqrt{٥})^{٢}$ لأن المركز = $\left(\frac{٦ + ٤}{٢} , \frac{-١ + ٣}{٢}\right) = (٥ , ١)$
نق = $\sqrt{(٦ - ٥)^{٢} + (-١ - ١)^{٢}} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

هـ) معادلة الدائرة $(س - ٥)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = (٥)^{٢}$ لأن الدائرة تقع في الربع الرابع وتمس المحورين فإن المركز $(٥ , -٥)$

و) الدائرة يقع مركزها على محور السينات ⇐ المركز $(-\frac{أ}{٢} , ٠)$ ⇐ $\boxed{ب = ٠}$
تمر بالنقطة $(٠ , -٢)$ ⇐ $\boxed{جـ = -٤}$
تمر بالنقطة $(٤ , ٤)$ ⇐ $٤أ + جـ = -٣٢$ ⇐ $\boxed{أ = -٧}$
∴ معادلة الدائرة هي $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} - ٧س - ٤ = ٠}$

ز) تمر بالنقاط $(-٥ , ٠)$ ، $(-٣ , ٤)$ ، $(١ , ٢)$ فنكون نظامًا من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات ونحله
النظام : $-٥أ + جـ = -٢٥$ — ①
$-٣أ + ٤ب + جـ = -٢٥$ —— ②
$أ + ٢ب + جـ = -٥$ —— ③
ومن الحل نجد أن $أ = ٤$
$ب = -٢$
$جـ = -٥$
∴ المعادلة هي : $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٢ص - ٥ = ٠}$

ح) الدائرة تمس محور السينات عند النقطة $(٧ , ٠)$ ⇐ مركز الدائرة = $\left(\frac{-أ}{٢} , \frac{-ب}{٢}\right) = \left(٧ , \frac{-ب}{٢}\right)$ ⇐ $\boxed{أ = -١٤}$
وتمس النقطة $(٧ , ٠)$ ⇐ $\boxed{جـ = ٤٩}$
وتمر بالنقطة $(١ , ٢)$ ⇐ $\boxed{ب = -٢٠}$
∴ معادلة الدائرة هي $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} - ١٤س - ٢٠ص + ٤٩ = ٠}$

س٢ أ) المركز $(٠ , ٠)$ ، نق = $\sqrt{١٤٤} = ١٢$ وحدة طول

س٢ ب) نكتب المعادلة على الصورة القياسية $(س + ١١)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٣$ ⇐ المركز $(-١١ , -٤)$ ، نق = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

س٢ جـ) المركز $(٠ , ٧)$ ، نق = $\sqrt{٨١} = ٩$ وحدة طول .

س٢ د) نكتب المعادلة على الصورة العامة $س^{٢} + ص^{٢} - ٨س - ٦ص - ٩ = ٠$
المركز $\left(\frac{+٨}{٢} , \frac{+٦}{٢}\right) = (٤ , ٣)$
نق = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢} - -٩} = \sqrt{١٦ + ٩ + ٩} = \sqrt{٣٤}$ وحدة طول .

تابع الدائرة:

حـ هـ) نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$٣س^٢ + ٣ص^٢ + ٦ص - ٢٧ = ٠$ نقسم على ٣

$س^٢ + ص^٢ + ٢ص - ٩ = ٠$

المركز (٠، −١) ، نق = $\sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢ - -٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول.

و) $\left(\frac{٢}{٢}س - \frac{٢}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{٢ص}{٢} + \frac{١٠}{٢}\right)^٢ = \frac{١٠٠}{(٢)^٢}$

$(س-١)^٢ + (ص+٥)^٢ = ٢٥$ ⇐ المركز (١، −٥) ، نق = ٥ وحدة طول.

ز) نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

$(س+٤)^٢ + ص^٢ = ١٦$ ⇐ المركز (−٤، ٠) ، نق = ٤ وحدة طول.

٣س مركزها يقع على المستقيم ص−٢س=٤ وتمس محور السينات عند النقطة (١، ٠)

المركز (د، هـ) = (١، هـ)

وبما أن المركز يقع على المستقيم ص−٢س=٤ ⇐ يحقق معادلته ⇐ هـ−٢×١=٤ ⇐ هـ = ٦

∴ إحداثيا المركز (١، ٦)

نق = المسافة بين (١، ٦)، (١، ٠) = ٦ وحدات

∴ معادلة الدائرة هي $(س-١)^٢ + (ص-٦)^٢ = ٣٦$

٤س مركز الدائرة = (−٢، −٢) ، نق = البعد بين المركز والمماس الذي معادلته ٣س−ص+١٠=٠.

نق = $\left|\frac{٣\times-٢ - ١\times(-٢) + ١٠}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}}\right| = \left|\frac{-٦+٢+١٠}{\sqrt{١٠}}\right| = \frac{٦}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي: $(س+٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = \frac{٣٦}{١٠}$

تابع الدائرة :

هـ بما أن $\text{س} = ٣ + ٢\,\text{جاهـ} \Leftarrow \text{جاهـ} = \frac{\text{س} - ٣}{٢}$ —— ①

$\text{ص} = ٤ + ٢\,\text{جتاهـ} \Leftarrow \text{جتاهـ} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢}$ —— ②

لكن $\text{جا}^٢\text{هـ} + \text{جتا}^٢\text{هـ} = ١$ (متطابقة مثلثية)

∴ $\left(\frac{\text{س} - ٣}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{\text{ص} - ٤}{٢}\right)^٢ = ١ \Leftarrow (\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} - ٤)^٢ = ٤$ وهي معادلة الحل الهندسي

∴ الحل الهندسي هو دائرة مركزها (٣، ٤)، وطول نصف قطرها = ٢ وحدة

و بما أن $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٨\text{س} - ٤\text{ص} + \text{جـ} = ٠$ معادلة دائرة فإن $\left(\frac{-\text{أ}}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{-\text{ب}}{٢}\right)^٢ - \text{جـ} > \text{صفر}$

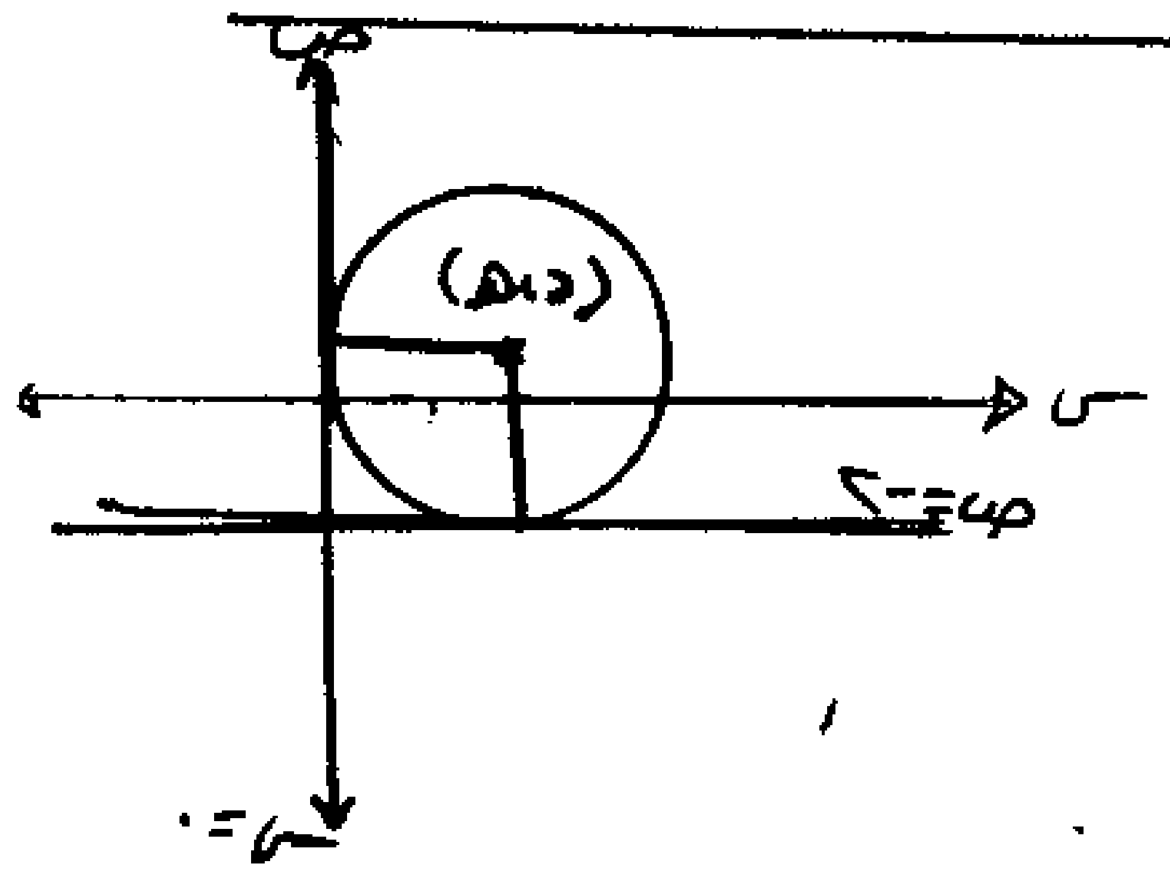
مركز الدائرة (−٤، ٢)

$\text{أ} = ٨ \rightarrow \frac{-\text{أ}}{٢} = -٤$

$\text{ب} = -٤ \rightarrow \frac{-\text{ب}}{٢} = ٢$

∴ $(-٤)^٢ + (٢)^٢ - \text{جـ} > ٠$

$١٦ + ٤ > \text{جـ} \Leftarrow ٢٠ > \text{جـ} \Leftarrow$ قيم جـ $= (-\infty، ٢٠)$



ز معادلة الدائرة هي $(\text{س} - \text{د})^٢ + (\text{ص} - \text{هـ})^٢ = \text{ر}^٢$

$\text{د} = \text{ر} \Leftarrow \text{هـ} = \text{ر} - ٢$

∴ $(\text{س} - \text{ر})^٢ + (\text{ص} - \text{ر} + ٢)^٢ = \text{ر}^٢$

بما أن (٤، ٠) تقع على الدائرة $\Leftarrow (٤ - \text{ر})^٢ + (-\text{ر} + ٢)^٢ = \text{ر}^٢$

ومنه $\text{ر}^٢ - ١٢\text{ر} + ٢٠ = ٠ \Leftarrow (\text{ر} - ١٠)(\text{ر} - ٢) = ٠$

∴ ر = ١٠ أو ر = ٢ ترفض

عندما ر = ١٠ ⇐ المركز (١٠، ٨) ⇐ معادلة الدائرة $(\text{س} - ١٠)^٢ + (\text{ص} - ٨)^٢ = ١٠٠$

ح الدائرة تمس المحورين ∴ المركز (د، د)

بعد الدائرة عن المستقيم $\overline{\text{أجـ}}$ = نق

نجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{أجـ}} \Leftarrow \text{ص} = -\text{س} + ٤ \Leftarrow \text{س} + \text{ص} - ٤ = ٠$

$\text{البعد} = \text{د} = \left|\frac{\text{د} + \text{د} - ٤}{\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}}\right| = \left|\frac{٢\text{د} - ٤}{\sqrt{٢}}\right|$

∴ $\sqrt{٢}\,\text{د} = |٢\text{د} - ٤|$ وبتربيع الطرفين

$(\sqrt{٢}\,\text{د})^٢ = (٢\text{د} - ٤)^٢ \Leftarrow ٢\text{د}^٢ = ٤\text{د}^٢ - ١٦\text{د} + ١٦ \Leftarrow ٢\text{د}^٢ - ١٦\text{د} + ١٦ = ٠ \rightarrow \text{د}^٢ - ٨\text{د} + ٨ = ٠$

∴ نعوض $\text{د} = \frac{٨ \pm \sqrt{(-٨)^٢ - ٤ \times ١ \times ٨}}{٢} \rightarrow ٤ + ٢\sqrt{٢}$ نهمل لأن نق < ٤ حسب الشكل المعطى

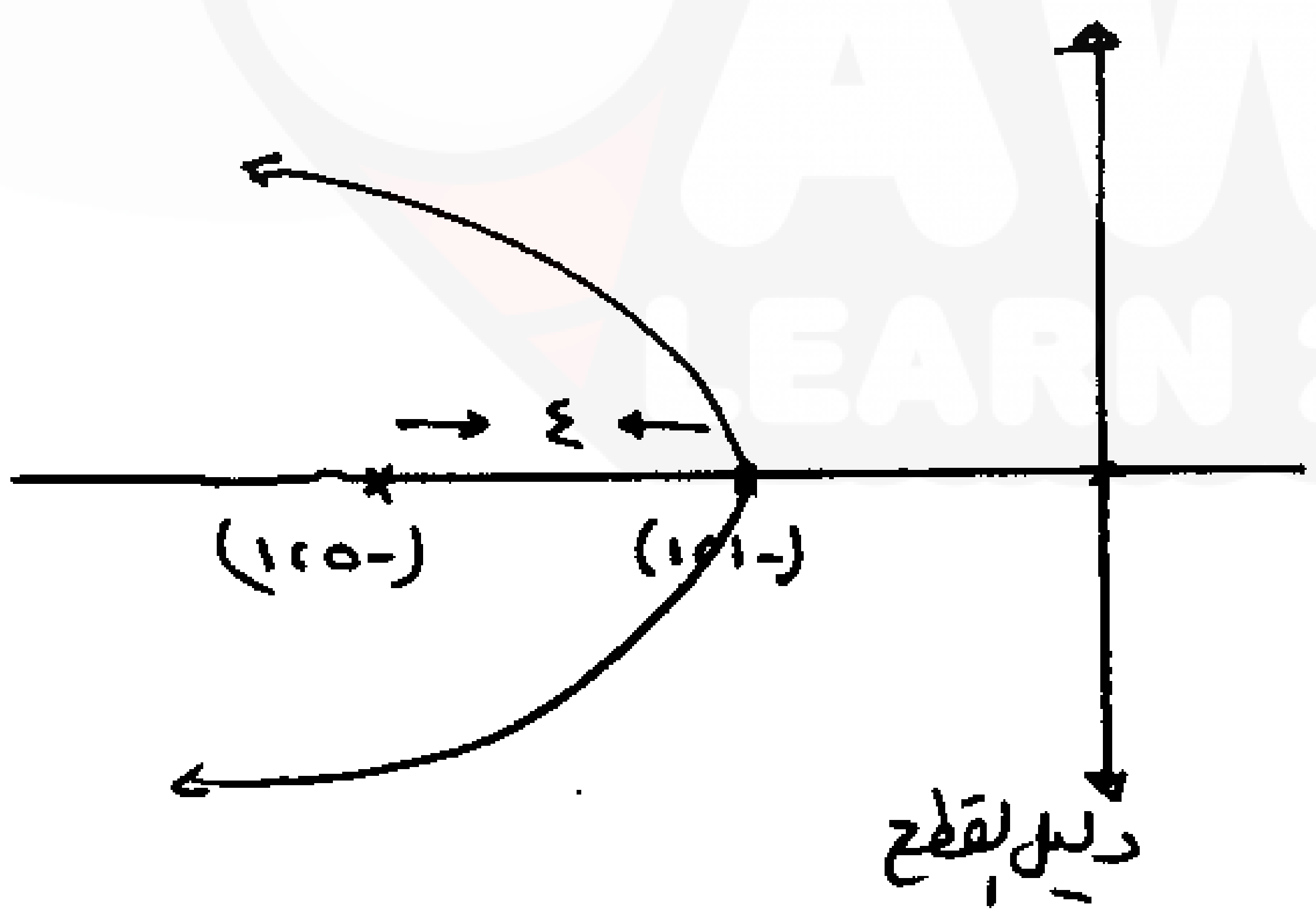
$٤ - ٢\sqrt{٢}$

∴ معادلة الدائرة هي :

$$(\text{س} - ٤ + ٢\sqrt{٢})^٢ + (\text{ص} - ٤ + ٢\sqrt{٢})^٢ = (٤ - ٢\sqrt{٢})^٢$$

ثانيًا : القطع المكافئ :.

تدريب ١ : ١) رأس القطع المكافئ (-١، ١) ، بؤرته النقطة (-٥، ١) .



لاحظ أن القطع مفتوح نحو اليسار

∴ معادلة القطع هي $(ص-هـ)^{٢} = -٤ جـ (س-د)$

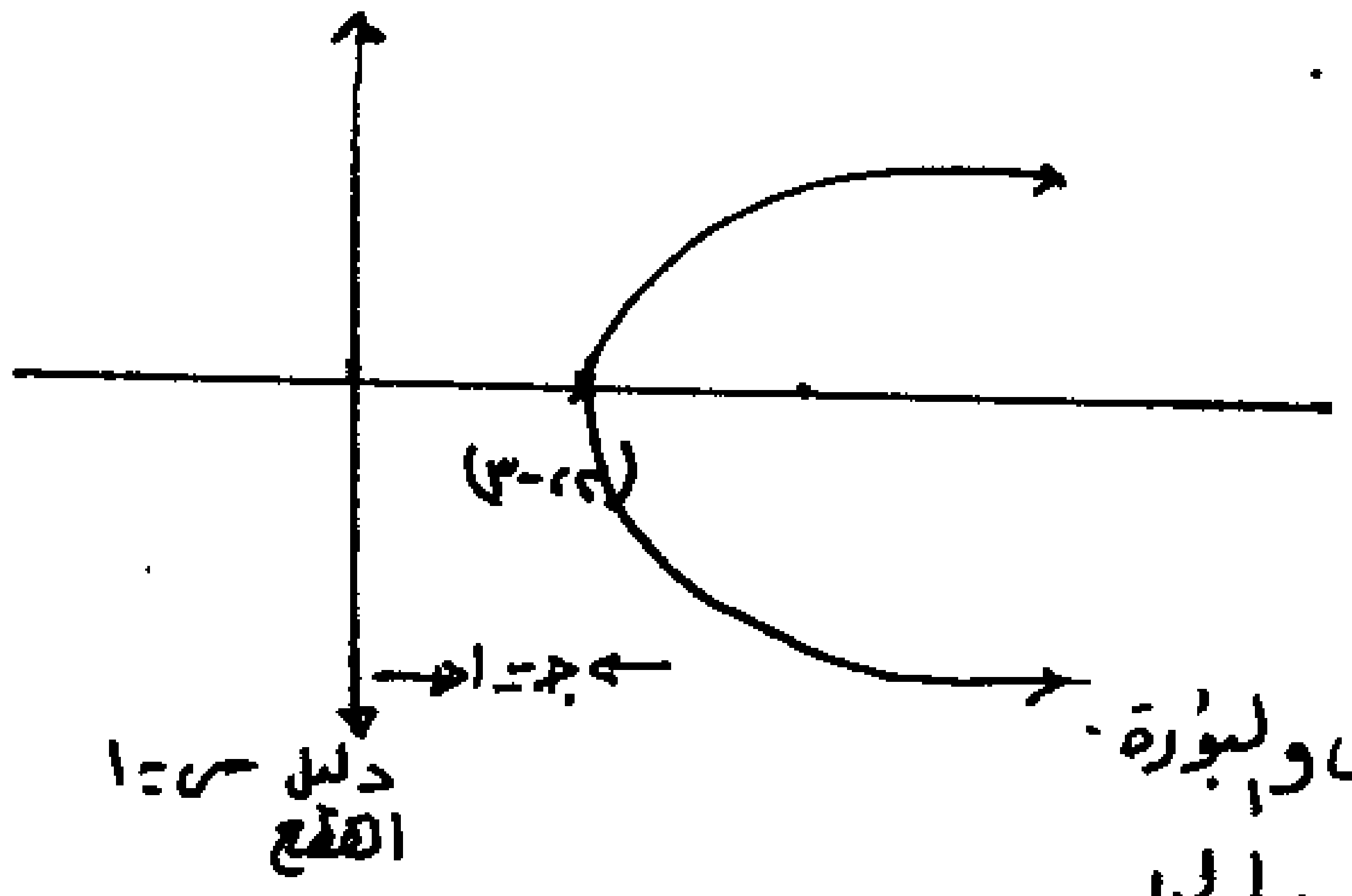
وحيث أن الرأس (د، هـ) = (-١، ١)

وبعد الرأس عن البؤرة = جـ = ٤ وحدات

∴ المعادلة $(ص-١)^{٢} = -٤×٤ (س+١)$

$(ص-١)^{٢} = -١٦ (س+١)$

تدريب ١ : ٢) رأس القطع المكافئ (٢، -٣) ، معادلة دليله س = ١ .



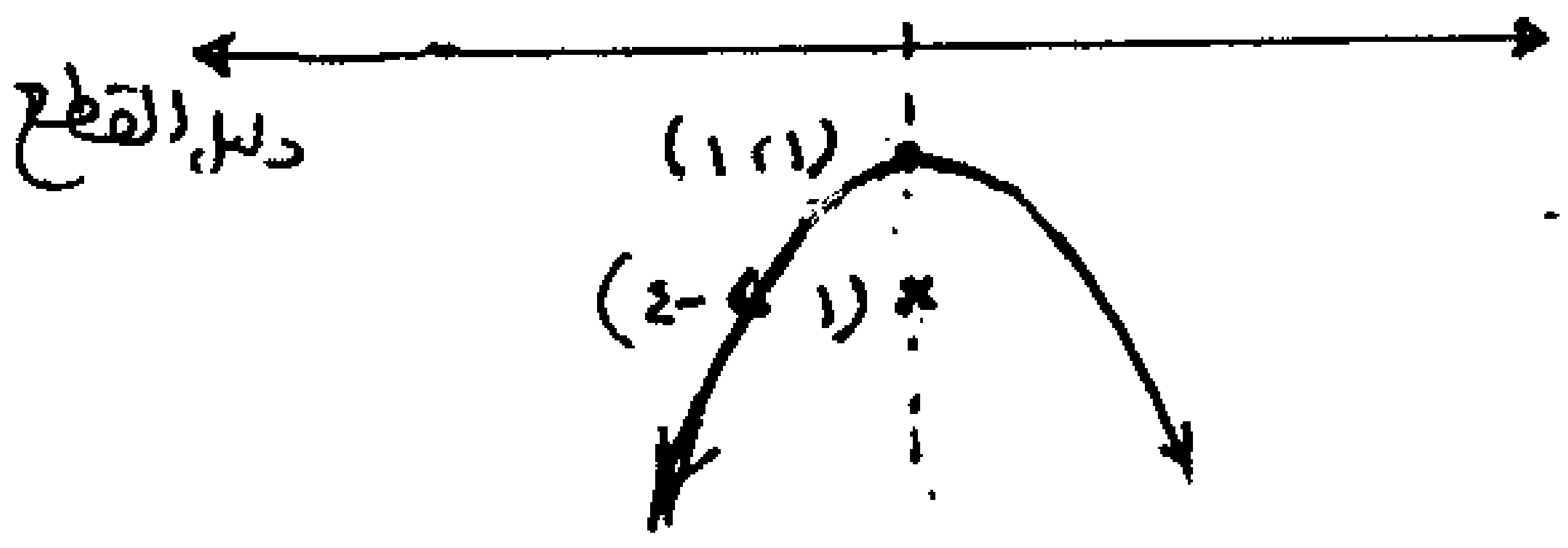
معادلة القطع المكافئ هي :

$(ص+٣)^{٢} = ٤×١ (س-٢)$

$(ص+٣)^{٢} = ٤ (س-٢)$ حيث جـ = البعد بين الرأس والبؤرة .

= البعد بين الرأس والدليل

تدريب ٢ : ١) بما أن البؤرة تقع أسفل الرأس ⇐ القطع مفتوح للأسفل ، و جـ = البعد بين الرأس والبؤرة = ٥ وحدات



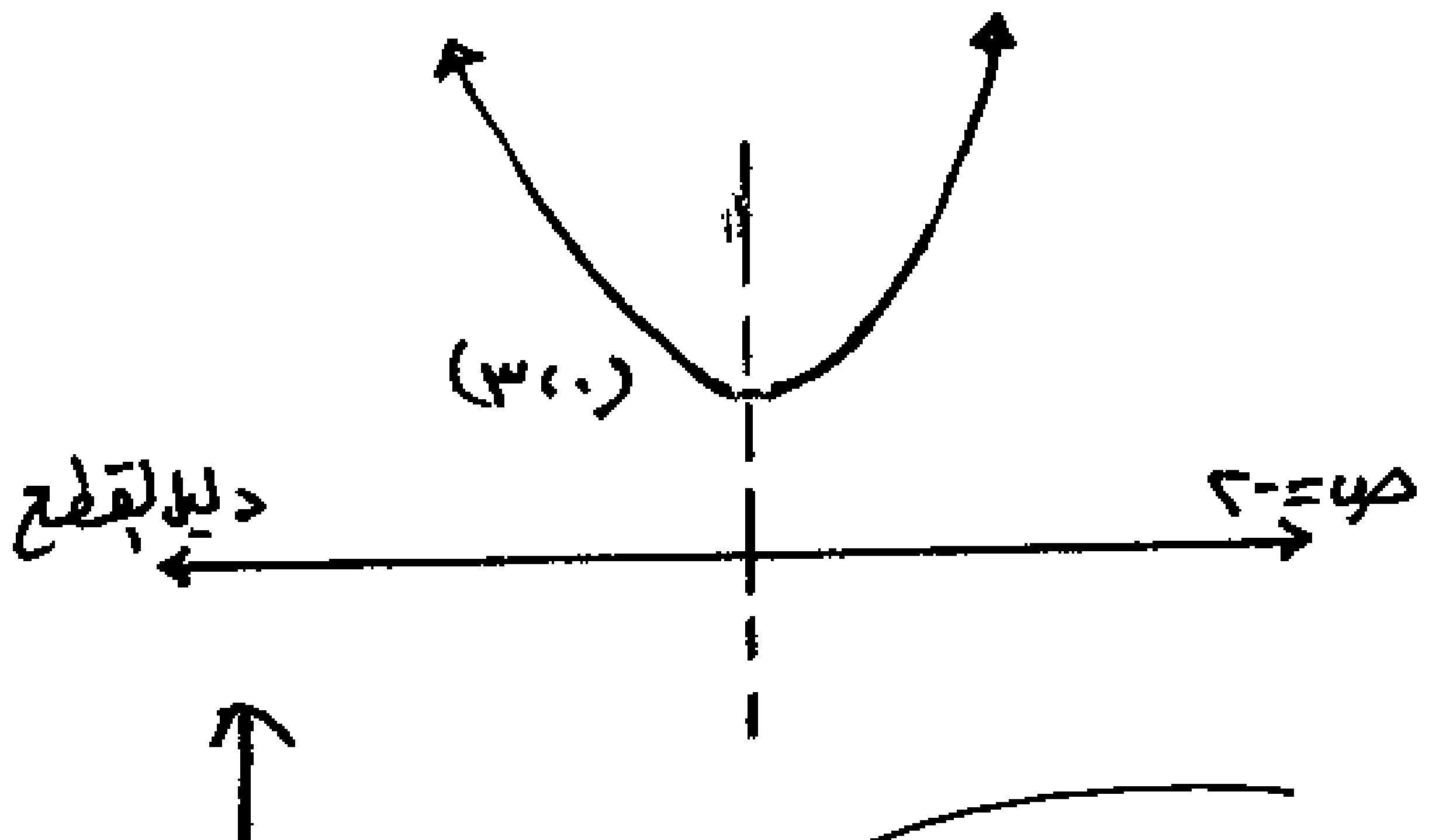
∴ معادلة القطع المكافئ هي :

$(س-١)^{٢} = -٤×٥ (ص-١)^{٢}$

$(س-١)^{٢} = -٢٠ (ص-١)^{٢}$

٢) الرأس (٠، ٣) ، ومعادلة دليله ص+٢ = ٠ ⇐ ص = -٢

معادلة القطع المكافئ هي :

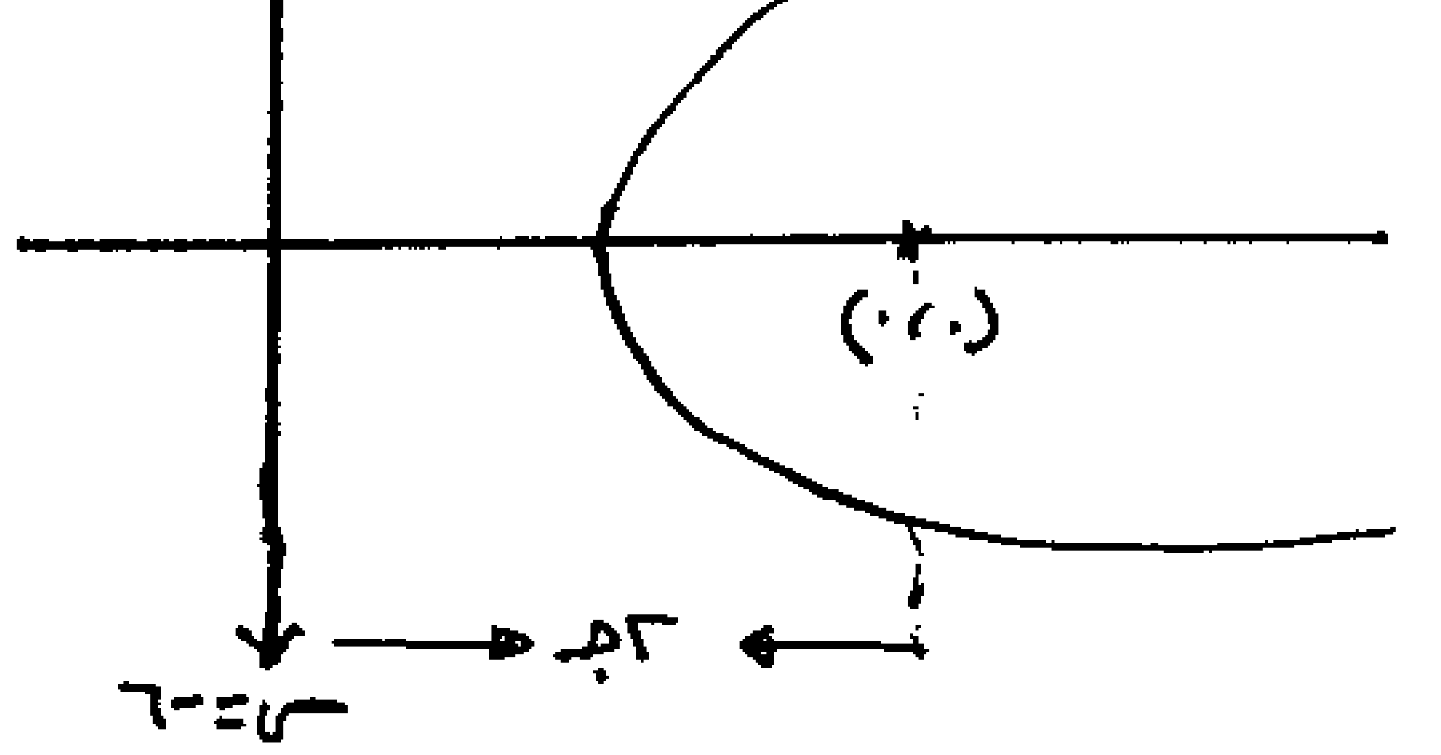


$(س-٠)^{٢} = ٤×٥ (ص-٣)$

القطع مفتوح نحو الأعلى
و جـ = ٥

$س^{٢} = ٢٠ (ص-٣)$

٣) بؤرته (٠، ٠) ومعادلة دليله س = -٦



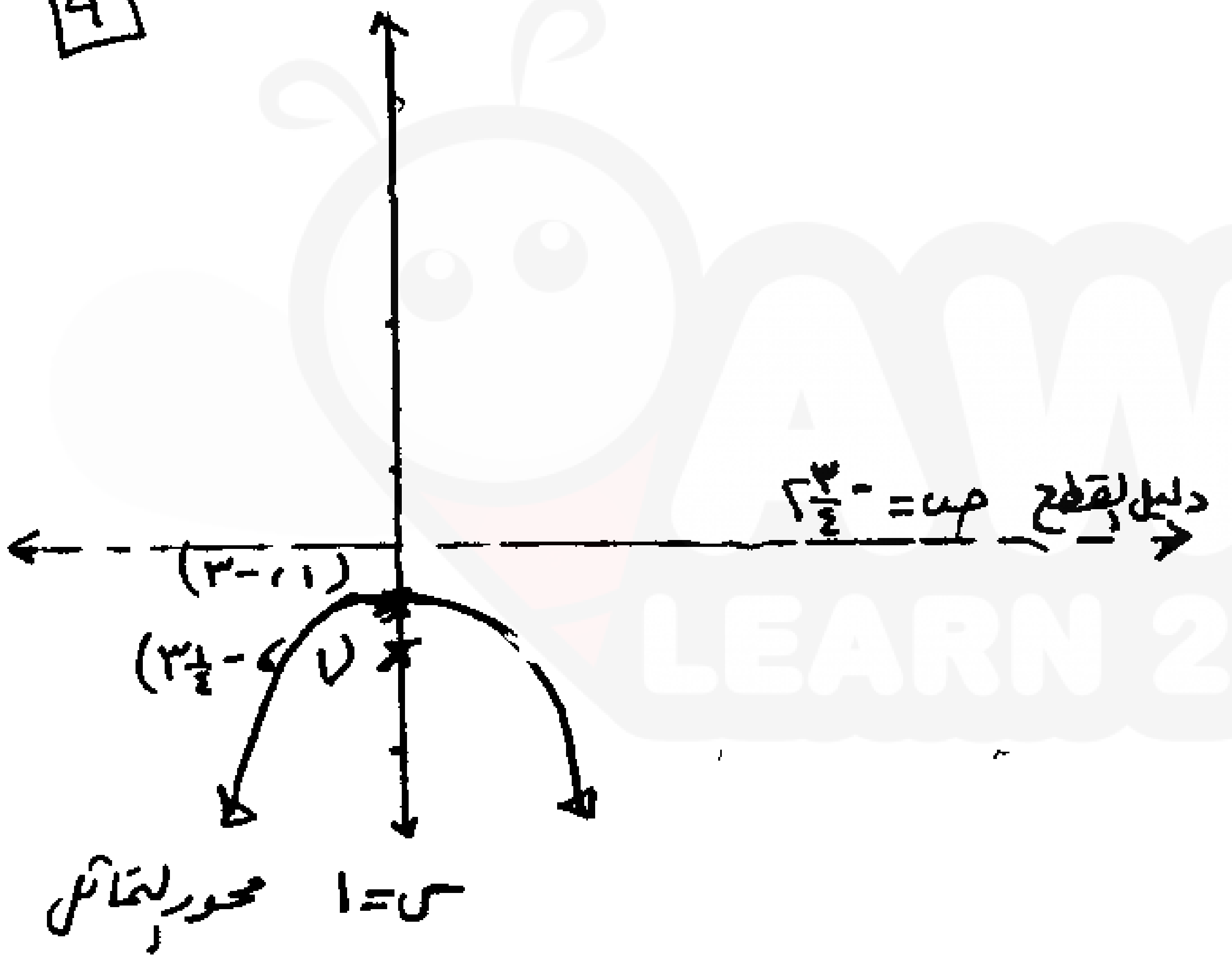
∴ معادلة القطع المكافئ هي :

القطع مفتوح نحو اليمين
و جـ = ٣

$ص^{٢} = ٤×٣ س$

$ص^{٢} = ١٢ س$

تابع / القطع المكافئ :.



تدريب ٣ :. نكتب المعادلة على الصورة القياسية :

$$(\text{س}-١)^{٢} = -(\text{ص}+٣)$$

ومنه نجد أن القطع مفتوح نحو الأسفل

إحداثيات الرأس = (١، -٣) ، $\text{هـ} = \frac{١}{٤}$

∴ إحداثيات البؤرة = (١، $-٣\frac{١}{٤}$)

معادلة الدليل هي : $\text{ص} = -٣ + \frac{١}{٤} = -٢\frac{٣}{٤}$

معادلة محور التماثل هي : س = ١

تدريب ٤ :. نكتب معادلة القطع على الصورة القياسية

$\text{س}^{٢} = ٤(\text{ص}-١)$ فيكون منحنى القطع مفتوحاً نحو الأعلى (هـ ج = ١

- الرأس (٠، ١) ، البؤرة (٠، ٢)

معادلة الدليل هي : ص = ٠

معادلة محور التماثل هي س = ٠

تدريب ٥ :. بما أن محور القطع معادلته س = -٢ ⇐ الرأس (-٢، هـ)

∴ معادلة القطع المكافئ هي :.

$$(\text{س}+٢)^{٢} = ٤\text{جـ}(\text{ص}-\text{هـ})$$

النقطة (٠، ٠) تقع على المنحنى ⇐ $\boxed{\text{جـ} \times \text{هـ} = -١}$

النقطة (١، ٣) تقع على المنحنى ⇐ ٩ = ١٢جـ + ٤ ⇐ $\text{جـ} = \frac{٥}{١٢}$ ، $\text{هـ} = -\frac{١٢}{٥}$

∴ المعادلة هي : $(\text{س}+٢)^{٢} = \frac{٥}{٣}\left(\text{ص} + \frac{١٢}{٥}\right)$

حل أ) $\text{ص}^{٢} = -١٦(\text{س}+١)$ حيث جـ = ٤ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليسار.

ب) $\text{ص}^{٢} = ١٦(\text{س}+١)$ حيث جـ = ٤ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليمين.

جـ) $(\text{س}-٢)^{٢} = ٢٠(\text{ص}-٣)$ حيث جـ = ٥ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأعلى.

د) $(\text{س}-٢)^{٢} = -٢٠(\text{ص}-٣)$ حيث جـ = ٥ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأسفل.

هـ) $(\text{س}-١)^{٢} = ٦\left(\text{ص}+\frac{٣}{٢}\right)$ حيث ٢جـ = البعد بين البؤرة والدليل = ٣ ⇐ $\text{جـ} = \frac{٣}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأعلى.

و) $\text{ص}^{٢} = -١٠\text{س}$ حيث ٢جـ = ٥ ⇐ $\text{جـ} = \frac{٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليسار.

ز) $(\text{ص}+٥)^{٢} = ١٫٥(\text{س}-١٫٦٢٥)$ حيث ٢جـ = ٠٫٧٥ ⇐ $\text{جـ} = \frac{٠٫٧٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين
ورأسه (١٫٦٢٥، -٥)

ح) $(\text{ص}+٣)^{٢} = ١٢(\text{س}-٢)$ حيث جـ = ٣ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين.

ط) $(\text{س}+١)^{٢} = -١٢(\text{ص}-٢)$ حيث جـ = ٣ ، والمنحنى مفتوح نحو الأسفل.

القطع الناقص

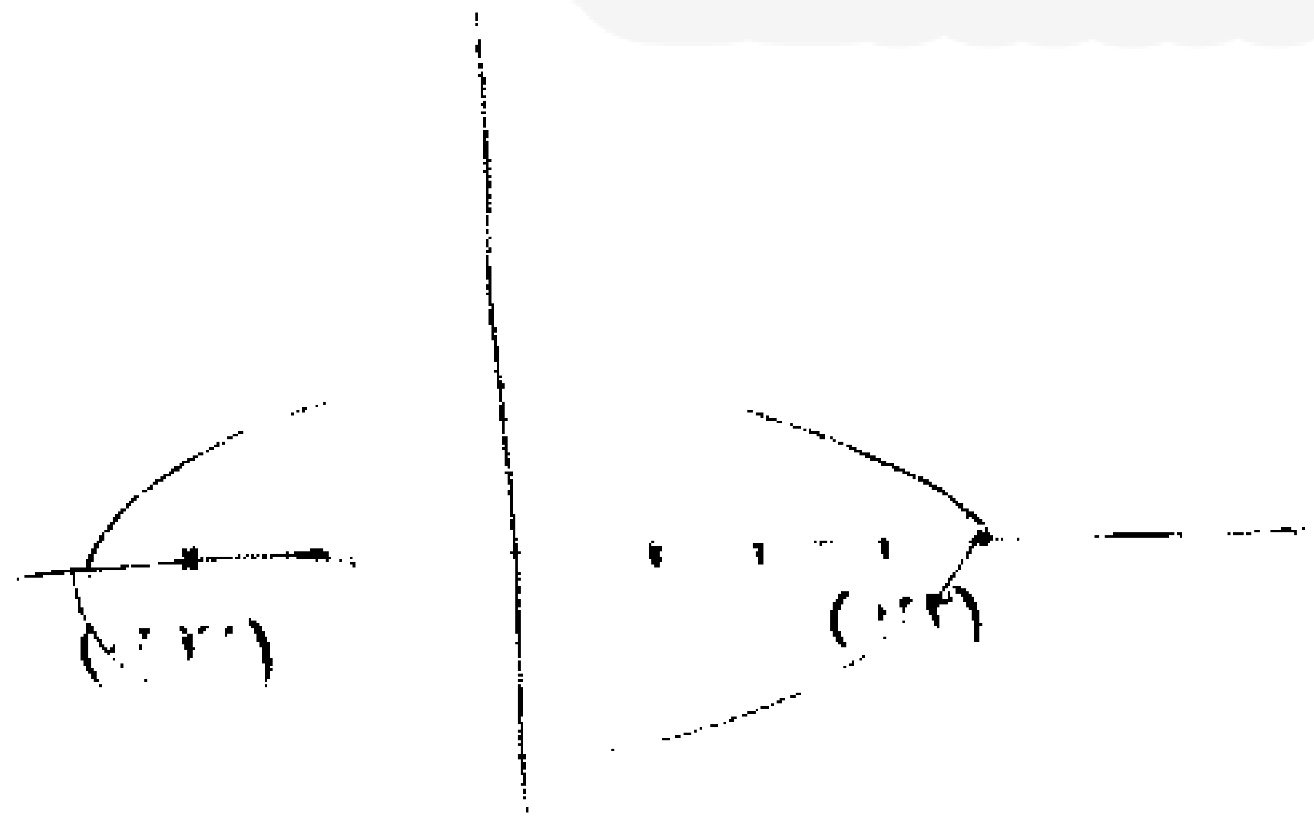
ق(١) المركز (٠،٠) محور الأصغر // محور ص ، ٢ب = ٤ ⟸ $\boxed{ب = ٢}$

أحد بؤرتيه (-٣، ٠)

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ ، (-٣، ٠) = (٠ - جـ ، ٠) ⟸ $\boxed{جـ = ٣}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$٩ = أ^٢ - ٤$ ⟸ $أ^٢ = ١٣$



∴ $\frac{س^٢}{١٣} + \frac{ص^٢}{٤} = ١$

ق(٢) قطع ناقص بؤرتاه (-٢، ٣)، (-٢، ٩) ⟸ المركز = (-٢، ٦)

∴ $\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} + \frac{(س - د)^٢}{ب^٢} = ١$ ⟸ $\frac{(ص - ٦)^٢}{أ^٢} - \frac{(س + ٢)^٢}{ب^٢} = ١$

طول محور الأكبر = ١٢ ⟸ ٢أ = ١٢ ⟸ $\boxed{أ = ٦}$

البؤرتان (د ، هـ ± جـ) ⟸ (-٢، ٣) = (د ، هـ - جـ) ⟸ هـ - جـ = ٣

(-٢، ٩) = (د ، هـ + جـ)   هـ + جـ = ٩

هـ = ٦ ، جـ = ٣

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$٩ = ٣٦ - ب^٢$ ⟸ $\boxed{ب^٢ = ٢٧}$

∴ $\frac{(ص - ٦)^٢}{٣٦} + \frac{(س + ٢)^٢}{٢٧} = ١$

ت (٣)

$$\frac{\text{س}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$$

١) المركز (٠ ، ٠)

أ² = ٢٥ ⇐ أ = ٥

ب² = ٩ ⇐ ب = ٣

جـ² = أ² − ب²

= ٢٥ − ٩

جـ² = ١٦

$\boxed{\text{جـ} = ٤}$

٢) البؤرتان (±٤ ، ٠)

٣) الرأسان (±٥ ، ٠)

٤) طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٠

٥) = = الأصغر = ٢ب = ٦

٦) طول البعد البؤري = ٢جـ = ٨

٧) طرفي المحور الأصغر (٠ ، ±٣)

ت (٤) أحد الرؤوس (٤ ، ١) ، البؤرة القريبة من الرأس (٢ ، ١) ، الاختلاف المركزي = ٠٫٥

$$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$$

أ − جـ = ٤ − ٢ = ٢

∴ $\boxed{\text{أ} - \text{جـ} = ٢}$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠٫٥$ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٢\text{جـ}}$

⇐ ٢جـ − جـ = ٢

$\boxed{\text{جـ} = ٢}$

$\boxed{\text{أ} = ٤}$

جـ² = أ² − ب²

٤ = ١٦ − ب² ⇐ $\boxed{\text{ب}^{٢} = ١٢}$

(د + أ ، هـ) = (٤ ، ١)

د + أ = ٤

د + ٤ = ٤

$\boxed{\text{د} = ٠}$

$\boxed{\text{هـ} = ١}$

$$∴ \frac{(\text{س})^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{١٢} = ١$$

ت (٥)

$$\frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٢)^{٢}}{١٦} = ١$$

ت(٦)

$٤س^٢ + ٣ص^٢ + ١٦س = ١٧٦$

$٤س^٢ + ١٦س + ٣ص^٢ = ١٧٦$

$٤(س^٢ + ٤س) + ٣ص^٢ = ١٧٦$

$٤(س+٢)^٢ + ٣ص^٢ - ١٦ = ١٧٦ \Leftarrow ٤(س+٢)^٢ + ٣ص^٢ = ١٩٢$

$\frac{(س+٢)^٢}{٤٨} + \frac{ص^٢}{٦٤} = ١ \Leftarrow \frac{ص^٢}{٦٤} + \frac{(س+٢)^٢}{٤٨} = ١$

١) المركز $(-٢، ٠)$ $أ^٢ = ٦٤ \Leftarrow أ = ٨$

$ب^٢ = ٤٨ \Leftarrow ب = \sqrt{٤٨}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ١٦ \Leftarrow جـ = ٤$

٢) الرأسان $(-٢، ٠ \pm ٨)$

٣) البؤرتان $(-٢، ٠ \pm ٤)$ ٣) الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٨} = ٫٥٠$

تمارين ومسائل

① أ) $\frac{(س-١)^٢}{٩} + \frac{(ص-١)^٢}{٤} = ١$

ب) $\frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{٢١} = ١$

جـ) $\frac{س^٢}{٢٢} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

د) $\frac{س^٢}{١٣} + \frac{٤ص^٢}{٣٩} = ١$

هـ) $\frac{(س-٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^٢}{٦٤} = ١$

و) $\frac{(س+٣)^٢}{٢٥} + \frac{(ص٤)}{١٦} = ١$

ز) $\frac{٥ص^٢}{٨١} + \frac{س^٢}{٩} = ١$

③ $٤(س-٣)^٢ + ٤(ص-٢)^٢ = ٣٦$

$(س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩$ ⟸ مركز الدائرة (٣، ٢)

نصف قطرها نق = ٣ ، القطر = ٦

مركز الدائرة (٣، ٢) هو احد بؤرتي القطع الناقص

طول المحور الأصغر = قطر الدائرة ⟸ $٢ب = ٦$ ⟸ $\boxed{ب = ٣}$

معادلة المحور الأصغر هي $س = -١$ ⟸ $\frac{(س+١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$

(−١، هـ) المركز ⟸ $\boxed{د = -١}$

$(٣، ٢) = (د+جـ ، هـ)$ ⟸ $(-١+جـ ، هـ)$

$جـ = ٤$ ، $هـ = ٢$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$١٦ = أ^٢ - ٩$ ⟸ $أ^٢ = ٢٥$

④ $\frac{(س-١)^٢}{٢٩} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٥} = ١$

⑤ $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٤١} = ١$

⑥ $\frac{س-٥}{٣} = جاهـ$ ، $\frac{ص-٢}{٢} = جتاهـ$ ، $جا^٢هـ + جتا^٢هـ = ١$

$\frac{(س-٥)^٢}{٩} + \frac{(ص-٢)^٢}{٤} = ١$

⑦ $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ ؛ $\boxed{أب\pi = ٤٠\pi}$ ، $\boxed{أ = ٨}$

⑧ نصف القطر = ٦ ؛ $أب\pi = نق^٢ \pi$

⑨ (أ) $هـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، (ب) $\frac{س^٢}{٤٠٠} + \frac{ص^٢}{١٠٠} = ١$

⑩ $هـ = \frac{جـ}{أ}$ ⟸ $جـ = أهـ$ ، $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ ⟸ $ب^٢ = أ^٢ - جـ^٢$

$= أ^٢ - (أهـ)^٢$

$= أ^٢(١ - هـ^٢)$ هو المطلوب.

١٤

⑪ م = أ + جـ

ن = أ − جـ

بالجمع

م + ن = ٢أ ⟸ أ = (م + ن)/٢

بالطرح م − ن = ٢جـ ⟸ جـ = (م − ن)/٢

هـ = جـ/أ = ((م − ن)/٢)/((م + ن)/٢) = (م − ن)/(م + ن) هو المطلوب.

بعاً: القطع الزائد :

ت(١) س²/٦٤ − ص²/٣٦ = ١

ت(٢) ٥ص²/٣٦ − س²/٤ = ١

ت(٣) أ² = ٢٥ ⟸ أ = ٥ ، طول المحور القاطع = ١٠ ومعادلته س = ١

ب² = ١٤٤ ⟸ ب = ١٢ ، طول المحور المرافق = ٢٤ ومعادلته ص = ٠

جـ² = أ² + ب² ⟸ جـ = ١٣

المركز (١، ٠)

البؤرتان (١، ٠ ± ١٣)

الرأسان (١، ٠ ± ٥)

طرفي المحور المرافق (١ ± ١٢، ٠)

ت(٤) س²/٩ − ص²/١٦ = ١

ت(٥) ١) $\frac{(س-١)^٢}{٥}-\frac{(ص+٢)^٢}{٢}=١$ والعناصر تطبيق مباشر.

٢) $\frac{س^٢}{٤}-\frac{ص^٢}{٩}=١$ والعناصر تطبيق مباشر.

تمارين ومسائل

١) أ) $\frac{س^٢}{٩}-\frac{ص^٢}{٤}=١$

ب) $\frac{ص^٢}{٢٥}-\frac{س^٢}{١٤٤}=١$

جـ) $\frac{٥س^٢}{١٤٤}-\frac{ص^٢}{٣٦}=١$

د) $\frac{(س+١)^٢}{٤}-\frac{٥(ص-١)^٢}{١٦}=١$

هـ) $\frac{س^٢}{١٦}-\frac{ص^٢}{٤}=١$

و) $٤ص^٢-\frac{س^٢}{٢}=١$

٣) $٤(س-٣)^٢+٤(ص-٢)^٢=٣٦ \Leftarrow (س-٣)^٢+(ص-٢)^٢=٩$ معادلة الدائرة

مركزها (٣، ٢) هو احدى بؤرتي القطع الزائد

نق = ٣ ⇐ المرافق = القطر ⇐ ٢ن = ٦

$\boxed{ن = ٣}$

معادلة المحور المرافق هي س = −١

⇐ معادلة القطع هي $\frac{(س+١)^٢}{أ^٢}-\frac{(ص+هـ)^٢}{ن^٢}=١$

احدى بؤرتي القطع (٣، ٢) ⇐ (−١ + جـ، هـ) ⇐ −١ + جـ = ٣ ⇐ $\boxed{جـ = ٤}$ ، $\boxed{هـ = ٢}$

$جـ^٢ = أ^٢ + ن^٢$

$١٦ = أ^٢ + ٩ \Leftarrow \boxed{أ^٢ = ٧}$

$\therefore \frac{(س+١)^٢}{٧}-\frac{(ص-٢)^٢}{٩}=١$

$\boxed{١٦}$

④ $٤(س-٤)^2+٤(ص-٣)^2=١٦ \Leftarrow (س-٤)^2+(ص-٣)^2=٤$ معادلة الدائرة ، نق $=٢$

مركزها $(٤ ، ٣)$ أحد رأسي القطع الزائد

طول المرافق $٢ب$ = القطر $=٤ \Leftarrow \boxed{ب=٢}$

المركز $(د ، هـ)$ يقع على $س=-١ \Leftarrow \boxed{د=-١}$

أحد الرأسين $(٤ ، ٣)=(د+أ ، هـ) \Leftarrow -١+أ=٤ \Leftarrow \boxed{أ=٥}$

$\boxed{هـ=٣}$

$$\frac{(س+١)^2}{٢٥}-\frac{(ص-٣)^2}{٤}=١$$

⑤ $\frac{ل س^2}{٩٠}-\frac{ك ص^2}{٩٠}=١$ ، $أ^2=\frac{٩٠}{ل}$ ، $ب^2=\frac{٩٠}{ك}$

طول محور القاطع $=٢أ=٦\sqrt{٣} \Leftarrow \boxed{أ=٣\sqrt{٣}} \Leftarrow (٣\sqrt{٣})^2=\frac{٩٠}{ل}$

$١٨ل=٩٠$

$ل=\frac{٩٠}{١٨}=\frac{١٠}{٢}=٥$

$\boxed{ل=٥}$

القطع الناقص $٩س^2+١٦ص^2=٥٧٦$

$$\frac{س^2}{٦٤}+\frac{ص^2}{٣٦}=١$$

$ج^2=٢٨$

$ج=\sqrt{٢٨}$

البؤرتان $(\pm\sqrt{٢٨} ، ٠)$

للقطع الزائد

$ج^2=أ^2+ب^2$

$ج^2=\frac{٩٠}{ل}+\frac{٩٠}{ك}$

البؤرتان $(\pm ج ، ٠)=(\pm\sqrt{٢٨} ، ٠)$

$٢٨=\frac{٩٠}{ل}+\frac{٩٠}{ك}$

$٢٨=١٨+\frac{٩٠}{ك}$

$\frac{٩٠}{ك}=١٠ \Leftarrow \boxed{ك=٩}$

(٦) $\frac{\text{س}+٤}{٥} = \text{قا}\,\text{هـ}$ ، $\frac{\text{ص}-٢}{-٣} = \text{ظا}\,\text{هـ}$

$\text{ظا}^٢\text{هـ} + ١ = \text{قا}^٢\text{هـ} \Leftarrow \text{قا}^٢\text{هـ} - \text{ظا}^٢\text{هـ} = ١$

$\frac{(\text{س}+٤)^٢}{٢٥} - \frac{(\text{ص}-٢)^٢}{٩} = ١$ قطع زائد

(٦) الإحصاء والاحتمالات / علمي

الفصل الأول: الإحصاء

أولاً :- الارتباط

تدريب (٢) ارتباط عكسي ؛ لأنه العلاقة تمثل خط مستقيم ميله سالب .

تمارين ومسائل :

(١) طردي

(٢) أ) طردي تام في الشكل (٦-٤) ب) عكسي في الشكل (٦-٥)

ب) لا ؛ لأن العلاقة ص = ٦ + ٣س تمثل ارتباطاً طردياً والشكل المرسوم يمثل ارتباطاً عكسياً .

(٤) أ) عكسي

ب) قوي جداً (تام) .

(٥) نعم

(٦) أ) طردي :

س	١	٢	٣
ص	٥	٦	٧

ب) عكسي

س	٢	٣	٤
ص	٧	٦	٣

ثانياً : معامل ارتباط بيرسون

تدريب (١) ر ≃ ٠٫٨٤ .

تدريب (٢) أ) ١ ب) −١ جـ) ضعيفاً .

تدريب (٣) ١) ٠٫٨٩ ٢) ٠٫٨٩

تدريب (٤) ر ≃ ٠٫٨٤ .

تمارين ومسائل

(١) أ) قوياً ب) صفر جـ) الكمية د) نوع و قوة

(٢) ر = ٠٫٩٧

(٣) ر = $\frac{-١}{١٫٧١٠٧}$ = −٠٫١

(٤) تدل على نوع الارتباط : (موجبة تعني ارتباطاً طردياً وسالبة تعني ارتباطاً عكسياً) .

(٥) العلاقة بين م ، ن أقوى لأنه |−٠٫٩| > |٠٫٨| .

(٦) ١) −٠٫١٣ ٢) ٠٫١٣

ثالثاً : معادلة خط الانحدار

تدريب (١) أ) ص = س + ١١ ب) ص̂ = س + ١١

جـ) ١ د) صفر

تمارين ومسائل :

١) أ) ص̂ = ٣,٢ س + ٢

ب) ١٦

جـ) ١

٢) أ) أ = ● و ب = ١

ب) ٥ أخطاء

جـ) صفر

٣) تدل على نوع الارتباط .

٤) ص̂ = ٠,٧ س + ٢,٣

٥) ص الحقيقية = ٩ ، ص̂ المتنبأ بها = ٢×٣+١ = ٧

الخطأ في التنبؤ = ص - ص̂ = ٢

٦)

س	١	٢	٣
ص	٩	٨	٧

الفصل الثاني :- الاحتمالات

اولاً :- المتغير العشوائي المنفصل

تدريب (١) ١) ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

٢) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

٣) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

تدريب (٢) ١)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

٢)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

تحل بالشجرة أو ذات الحدين بعد إتمام دراسته .

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٢١}{٤٦٢}$	$\frac{١٤٠}{٤٦٢}$	$\frac{٢١٠}{٤٦٢}$	$\frac{٨٤}{٤٦٢}$	$\frac{٧}{٤٦٢}$

٤ ٧

بدون ارجاع توافيق

ل(س = ٠) = $\frac{\binom{٤}{٠}\binom{٧}{٥}}{\binom{١١}{٥}} = \frac{٢١}{٤٦٢}$

ل(س = ١) = $\frac{\binom{٤}{١}\binom{٧}{٤}}{\binom{١١}{٥}} = \frac{١٤٠}{٤٦٢}$ وهكذا

ل(س = ٠) = ل(ززززز) = $\frac{٣×٤×٥×٦×٧}{٧×٨×٩×١٠×١١}$

ل(س = ١) = ل(ف زززز + ز ف ززز + زز ف زز + ززز ف ز + زززز ف)

= ٥× $\frac{٤×٧×٦×٥×٤}{٧×٨×٩×١٠×١١}$

تدريب (٣) ٢ك + ٣ر٠ + ٤٥ر٠ + ٢ك = ١ ومنه، ك = ٠٥ر٠

تمارين ومسائل

١) ٠، ١، ٢، ٣

٢) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	٦/٣٦	١٠/٣٦	٨/٣٦	٦/٣٦	٤/٣٦	٢/٣٦

٤)

س	١	٢	٣
ل(س)	٦/٥٦	٣٠/٥٦	٢٠/٥٦

ب	ح
٦	٢

ل(س=١) = $\frac{(^{٦}_{١})(^{٢}_{٢})}{(^{٨}_{٣})}$ = ٦/٥٦ وهكذا.

١، ل(ب ح ح + ح ب ح + ح ح ب) = ٣ × (٦/٨ × ٢/٧ × ١/٦) = ٦/٥٦

٥) أ) ل(١) + ل(٢) + ل(٣) = ١ ومنه، ٤ن + ٢ن + ٤ن = ١ ⟸ ن = ١/١٠

ب)

س	١	٢	٣
ل(س)	٤ر٠	٢ر٠	٤ر٠

٦)

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	٤/١٠	٣/١٠	٢/١٠	١/١٠
	ح	ب ح	ب ب ح	ب ب ب ح

بيضاء	حمراء
٣	٢

ل(س=١) = ٢/٥ = ٤/١٠

ل(س=٢) = ٣/٥ × ٢/٤ = ٣/١٠

ل(س=٣) = ٣/٥ × ٢/٤ × ٢/٣ = ٢/١٠

ل(س=٤) = ٣/٥ × ٢/٤ × ١/٣ × ٢/٢ = ١/١٠

ثانياً: توزيع ذات الحدين

تدريب (١) أ) ل(س=٣) = $(^{٣}_{٣})$ (٤ر٠)^{٣} (٦ر٠)^{٠} = (٤ر٠)^{٣} = ٠٦٤ر٠

ب) ل(س<١) = ل(س=٠) = $(^{٣}_{٠})$ (٤ر٠)^{٠} (٦ر٠)^{٣} = ٢١٦ر٠

ج) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣)

د) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) = ١ − ل(س=٠) = ١ − ٢١٦ر٠ = ٧٨٤ر٠

تدريب (٢) ن=٧ ، أ=١/٤

أ) ل(س=١) = $(^{٧}_{١})$ (١/٤)^{١} (٣/٤)^{٦}

ب) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣) + ... + ل(س=٧) = ١ − [ل(س=١) + ل(س=٠)] ...

ج) ل(س≯١) = ل(س=١) + ل(س=٠) ..... .

تدريب (٣) ن=٢٠ ، أ=٧٥ر٠

أ) ل(س=٥) = $(^{٢٠}_{٥})$ (٧٥ر٠)^{٥} (٢٥ر٠)^{١٥} ، ب) ل(س=٠) = $(^{٢٠}_{٠})$ (٧٥ر٠)^{٠} (٢٥ر٠)^{٢٠} = (٢٥ر٠)^{٢٠}

تمارين ومسائل

١) ن = ٥ ، أ = ٠٫٧

ل(س ≥ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤) + ل(س = ٥) = $\binom{٥}{٣}(٠٫٧)^{٣}(٠٫٣)^{٢} + \binom{٥}{٤}(٠٫٧)^{٤}(٠٫٣)^{١} + \binom{٥}{٥}(٠٫٧)^{٥}(٠٫٣)$

٢) ن = ٨ ، أ = $\frac{١}{٢}$

أ) ل(س = ٤) = $\binom{٨}{٤}(\frac{١}{٢})^{٤}(\frac{١}{٢})^{٤}$

ب) ل(س ≥ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤) + ... + ل(س = ٨) = ١ − [ل(س = ٢) + ل(س = ١) + ل(س = ٠)]

= ١ − [$\binom{٨}{٢}(\frac{١}{٢})^{٢}(\frac{١}{٢})^{٦} + \binom{٨}{١}(\frac{١}{٢})^{١}(\frac{١}{٢})^{٧} + \binom{٨}{٠}(\frac{١}{٢})^{٠}(\frac{١}{٢})^{٨}$]

٣) ن = ٨ ، أ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

ل(س ≥ ٢) = ١ − [ل(س = ١) + ل(س = ٠)] — - -

③

حمراء	بيضاء
٥	٣

٤)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٢٧}{٥١٢}$	$\frac{١٣٥}{٥١٢}$	$\frac{٢٢٥}{٥١٢}$	$\frac{١٢٥}{٥١٢}$

ل(س = ٠) = $\binom{٣}{٠}(\frac{٥}{٨})^{٠}(\frac{٣}{٨})^{٣}$ = $\frac{٢٧}{٥١٢}$

وهكذا مع الإرجاع ذات الحدين

٥) ل(س = ٢) + ل(س = ٣) + ل(س = ٤) = ١

٤ك + ٩ك + ١٦ك = ١ ⇐ ٢٩ك = ١ ⇐ ك = $\frac{١}{٢٩}$

٦) ل(س ≥ ١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$ ، ن = ٣

أ) س = ٠، ١، ٢، ٣

ب) ل(س ≥ ١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$ ⇐ ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

١ − ل(س = ٠) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

١ − $\frac{٣٧}{٦٤}$ = ل(س = ٠)

$\frac{٢٧}{٦٤}$ = $\binom{٣}{٠}(أ)^{٠}(١ - أ)^{٣}$

$(\frac{٣}{٤})^{٣}$ = $(١ - أ)^{٣}$ ⇐ ١ − أ = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ أ = $\frac{١}{٤}$

ثالثاً: العلامة المعيارية

تدريب (١) ١) $\text{ز}_{٤} = ٢$ ٢) ٤٤٫٥   ٣) ٣٧

تدريب (٢) مستوى الطالب في الفيزياء أفضل ، لأن العلامة المعيارية في الفيزياء أكبر منها في الرياضيات.

تدريب (٣) ١) $\text{ع} = ٤$
٢) $\bar{\text{س}} = ٧٢$
٣) ٨٥

تمارين ومسائل

١) $\bar{\text{س}} = ٥٨$

٢) أ) ٥   ب) ٥

٣) أ) $\text{ع} = ٤$ ب) ٨٠ ، ٧٢ ، ٧١   ج) ٦٤

٤) $\text{ع} = ٦$

٥) $\bar{\text{س}} = \dfrac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} \Leftarrow \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{ن}\bar{\text{س}}$.

$$\text{الوسط الحسابي للعلامات المعيارية} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ز}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\frac{\text{س}_١ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} + \frac{\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} + \dots + \frac{\text{س}_{\text{ن}} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \dots + \text{س}_{\text{ن}} - (\underbrace{\bar{\text{س}} + \bar{\text{س}} + \dots + \bar{\text{س}}}_{\text{ن من المرات}})}{\text{ن ع}}$$

$$= \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} - \text{ن}\bar{\text{س}}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{ن}\bar{\text{س}} - \text{ن}\bar{\text{س}}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{صفر}}{\text{ن ع}}$$

$$= \text{صفر}$$

وهو المطلوب.

٥) $\text{ل}(\text{س} \geq ٤٫٨) = \text{ل}\left(\text{ز} \geq \frac{٤٫٨ - ٥}{٠٫٠٤}\right) = \text{ل}(\text{ز} \geq -٠٫٥)$

$= ١ - \text{ل}(\text{ز} \geq ٠٫٥)$

$= ١ - ٠٫٦٩١٥ = ٠٫٣٠٨٥$

عدد الصناديق $= ١٠٠٠ \times ٠٫٣٠٨٥ = ٣٠٨٫٥ \simeq ٣٠٩$ صناديق

أسئلة الوحدة

١) طردي تام $\text{ر} = ١$

٢)

٣) أ) $\text{ر} = -١$

ب) $\hat{\text{ص}} = \frac{٢}{٣}\text{س} + \frac{١١}{٣}$.

٤) $\text{ر} = -١$

٥) ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩

٦) أ) توزيع ذات الحدين.

ب) $\text{أ} = ٠٫٤$ ، $\text{ن} = ٢$

جـ) $\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٢}{٢}(٠٫٤)^{٢}(٠٫٦)^{٠} = ٠٫١٦$

٧) $\text{ل}(٣) = \frac{١}{٧}$

٨) أ) $\text{ل}(\text{س} = ٢) = \binom{٦}{٢}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٢}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤} = \ldots$

$\text{أ} = \frac{١}{٦}$ ، $\text{ن} = ٦$

ب) $\text{ل}(\text{س} \leq ٣) = \text{ل}(\text{س} = ٣) + \text{ل}(\text{س} = ٢) + \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٠) = \ldots$

٩) $\text{ل}(\text{س} \leq ١) = \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٠)$

$= \binom{٢٠}{١}(٠٫٩٥)^{١}(٠٫٠٥)^{١٩} + \binom{٢٠}{٠}(٠٫٩٥)^{٠}(٠٫٠٥)^{٢٠}$

١٠) $\text{ل}(\text{س} = ٣) = \frac{٤}{١١} \times \frac{\cancel{٣}}{١٠} \times \frac{٧}{\underset{٣}{\cancel{٩}}} = \frac{٢٨}{٣٣٠} = \frac{١٤}{١٦٥}$

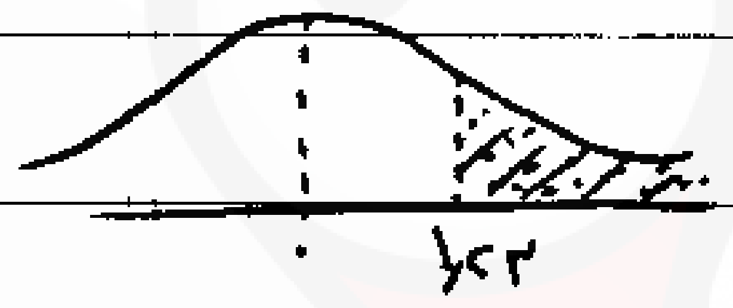
١١) $\text{ل}(\text{س} \geq ٣) = ١ - [\text{ل}(\text{س} = ٠) + \text{ل}(\text{س} = ١) + \text{ل}(\text{س} = ٢)]$ ، حيث $\text{ل}(\text{س} = \text{ر}) = \binom{٩}{\text{ر}}(٠٫١)^{\text{ر}}(٠٫٩)^{٩ - \text{ر}}$.

١٢) أ) المتوسط الحسابي للعلامات المعيارية = صفر   ب) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية = ١

جـ) $\text{ز} = -٥$

رابعاً: التوزيع الطبيعي

تدريب (١) ١) ل(ز ≤ ١٫١٦) = ٠٫٨٧٧٠



٢) ل(ز ≥ ١٫٢٣) = ١ − ل(ز ≤ ١٫٢٣) ثم من الجدول مباشرة.

٣) ل(ز ≤ −٠٫٩٥) = ١ − ل(ز ≤ ٠٫٩٥) 〃 〃 〃

٤) ل(٠٫٠٣ ≤ ز ≤ ٣٫١)

= ل(ز ≤ ٣٫١) − ل(ز ≤ ٠٫٠٣) ثم من الجدول مباشرة.

٥) ل(−٠٫٨ ≤ ز ≤ صفر) = ل(ز ≤ صفر) − ل(ز ≤ −٠٫٨)

= ل(ز ≤ صفر) − [١ − ل(ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول مباشرة.

تدريب (٢) ١) أ = ٠٫٠٨ ٢) أ = −٠٫٤٧

تدريب (٣) ١) ل(ز ≤ $\frac{٩٥-١١٠}{١٠}$) = ل(ز ≤ −١٫٥) = ١ − ل(ز ≤ ١٫٥) ثم من الجدول مباشرة.

٢) ل(ز ≥ $\frac{١٠٥-١١٠}{١٠}$) = ل(ز ≥ −٠٫٥) = ل(ز ≤ ٠٫٥) 〃 〃 〃.

٣) ل(−٢ ≤ ز ≤ ٢) = ل(ز ≤ ٢) − ل(ز ≤ −٢) = ل(ز ≤ ٢) − [١ − ل(ز ≤ ٢)]

تدريب (٤) ٢٥ يوماً.

تمارين ومسائل

١) ن) ل(|ز| ≤ ٠٫٨) = ل(−٠٫٨ ≤ ز ≤ ٠٫٨) = ل(ز ≤ ٠٫٨) − ل(ز ≤ −٠٫٨)

= ل(ز ≤ ٠٫٨) − [١ − ل(ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول.

٢) ١) أ = −٠٫٢٧ ٢) أ = ٠٫٩٢

٣) أ) ل(س ≥ ٨٢) = ل(ز ≥ $\frac{٨٢-٧٠}{٨}$) = ل(ز ≥ ١٫٥) = ١ − ل(ز ≤ ١٫٥)

= ١ − ٠٫٩٣٣٢ = ٠٫٠٦٦٨

العدد = ٢٠٠٠ × ٠٫٠٦٦٨ = ١٣٣٫٦ ≈ ١٣٤ معلمين.

ب) ل(س ≥ ٨٠) = ل(ز ≥ ١٫٢٥) = ١ − ل(ز ≤ ١٫٢٥) = ١ − ٠٫٨٩٤٤ = ٠٫١٠٥٦

٤) نسبة النجاح = $\frac{٧٥٨٠}{١٠٠٠٠}$ = ٠٫٧٥٨ ل(س ≥ أ) = ٠٫٧٥٨

ل(ز ≥ $\frac{أ-٦٠}{٥}$) = ٠٫٧٥٨ ، لتكن $\frac{أ-٦٠}{٥}$ = ك

ل(ز ≥ ك) = ٠٫٧٥٨

١ − ل(ز ≤ ك) = ٠٫٧٥٨

ل(ز ≤ ك) = ٠٫٢٤٢ ⇐ ك = −٠٫٧٠

$\frac{أ-٦٠}{٥}$ = −٠٫٧ ⇐ أ = −٣٫٥ + ٦٠ ⇐ أ = ٥٦٫٥