الرياضيات
الفصل الثاني
المراجعة الشاملة

التكامل
القطوع المخروطية

عثمان حنفية

مركز مسار التفوق للتدريب

0795562444

قواعد وخواص التكامل

١ إذا كان م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق(س) = $س^3 + ٢س^2 - ٤$ فإن $م''(١) =$

أ) −١ ب) ٣ جـ) ٧ د) ١

$م'(س) = ق(س)$

$م''(س) = ق'(س) = ٣س^2 + ٤س$

$م''(١) = ٣ + ٤ = ٧$ $\boxed{جـ}$

٢ إذا كان $م(س) = س + \sqrt{س}$ هو معكوس المشتقة للاقتران ق(س) فإن:

$\int_{١}^{٤} ق'(س)\, دس =$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٤}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{-١}{٢}$

$م'(س) = ق(س) = ١ + \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\int_{١}^{٤} ق'(س)\, دس = ق(س) \Big]_{١}^{٤}$

$= ١ + \frac{١}{٢\sqrt{س}} \Big]_{١}^{٤} = (١ + \frac{١}{٤}) - (١ + \frac{١}{٢})$

$= \frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢} = \frac{-١}{٤}$ $\boxed{ب}$

٣ إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسي المشتقة للاقتران ق(س) وكان:

$\int_{١}^{٩} \frac{م(س)}{\sqrt{س}}\, دس + \int_{٩}^{١} \frac{هـ(س)}{\sqrt{س}}\, دس = ٨$ فإن

$\int_{٢}^{٥} (هـ(س) - م(س))\, دس =$

أ) −٢ ب) ٤ جـ) −٦ د) −٤

$\int_{١}^{٩} \frac{م(س)}{\sqrt{س}}\, دس - \int_{١}^{٩} \frac{هـ(س)}{\sqrt{س}}\, دس = ٨$

$\int_{١}^{٩} \frac{\overbrace{م(س) - هـ(س)}^{جـ}}{\sqrt{س}}\, دس = ٨$

$\int_{١}^{٩} جـ\, س^{-\frac{١}{٢}}\, دس = ٨$

$جـ \times ٢س^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{٩} = ٨ \longrightarrow ٢جـ\sqrt{س} \Big]_{١}^{٩} = ٨$

$٢جـ(٣ - ١) = ٨ \longrightarrow جـ = ٢$

$\therefore \int_{٢}^{٥} (هـ(س) - م(س))\, دس = \int_{٢}^{٥} -جـ\, دس$

$= \int_{٢}^{٥} -٢\, دس = -٦$ $\boxed{جـ}$

٤ إذا كان:

$\int_{-١}^{٣} \left(٣س^2 + \int_{٠}^{جـ} ٦م\, دم\right) دس = ٤٠$

فإن قيمة الثابت جـ =

أ) ١ ب) ٢ جـ) −١ د) ± ١

$\int_{٠}^{جـ} ٦م\, دم = ٣م^2 \Big]_{٠}^{جـ} = ٣جـ^2$

$\int_{-١}^{٣} (٣س^2 + ٣جـ^2)\, دس = ٤٠$

$س^3 + ٣جـ^2 س \Big]_{-١}^{٣} = ٤٠$

$(٢٧ + ٩جـ^2) - (-١ - ٣جـ^2) = ٤٠$ $\boxed{د}$

$٢٨ + ١٢جـ^2 = ٤٠ \longrightarrow جـ^2 = ١ \longrightarrow جـ = \pm ١$

٥ $\int_{٠}^{١} س^4 \left(٢ - \frac{١}{س}\right)^4 دس =$

أ) صفر ب) $\frac{١}{١٠}$ جـ) $\frac{١}{٥}$ د) $\frac{٢}{٥}$

$\int_{٠}^{١} س^4 \times \left(\frac{٢س - ١}{س}\right)^4 دس$

$= \int_{٠}^{١} \cancel{س^4} \times \frac{(٢س - ١)^4}{\cancel{س^4}}\, دس$

$= \frac{(٢س - ١)^5}{١٠} \Big]_{٠}^{١} = \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠}$

$= \frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$ $\boxed{جـ}$

٦ $\int_{\text{هـ}+1}^{2} \frac{2\text{س}+4}{\text{س}^2+\text{س}-2}\, \text{د س} =$

أ) ٢ ب) هـ جـ) −٢ د) ١

$= \int_{\text{هـ}+1}^{2} \frac{2\cancel{(\text{س}+2)}}{\cancel{(\text{س}+2)}(\text{س}-1)}\, \text{د س} = \int_{\text{هـ}+1}^{2} \frac{2}{\text{س}-1}\, \text{د س}$

$= 2\,\text{لو}|\text{س}-1| \Big]_{\text{هـ}+1}^{2} = 2(\text{لو}1 - \text{لو هـ})$

$= 2 \times -1 = -2$ $\boxed{\text{جـ}}$

٧ $\int_{1}^{3} \text{هـ}^{1+\text{لو}2\text{س}}\, \text{د س} =$

أ) ٨هـ ب) ٤هـ جـ) ٢هـ د) ٨

$\int_{1}^{3} \text{هـ}^{1} \times \text{هـ}^{\text{لو}2\text{س}}\, \text{د س} = \int_{1}^{3} 2\text{هـ س}\, \text{د س}$

$= \cancel{2}\text{هـ} \times \frac{\text{س}^2}{\cancel{2}} \Big]_{1}^{3} = \text{هـ}(9-1) = 8\text{هـ}$ $\boxed{\text{أ}}$

٨ $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}}+2\text{هـ}^{\text{س}}+1}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{د س} =$

أ) −هـ ب) $\frac{1}{\text{هـ}}$ جـ) هـ د) هـ+٢

$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^2}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{د س} = \int_{-1}^{1} \frac{|\text{هـ}^{\text{س}}+1|}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{د س}$

لكن $\text{هـ}^{\text{س}}+1 > 0$

$\int_{-1}^{1} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}+1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\, \text{د س} = \int_{-1}^{1} (1+\text{هـ}^{-\text{س}})\, \text{د س}$

$= \text{س} - \text{هـ}^{-\text{س}} \Big]_{-1}^{1} = (1-0) - (-1-\text{هـ})$

$= -1+1+\text{هـ} = \text{هـ}$ $\boxed{\text{جـ}}$

٩ $\int_{\text{لو}2}^{\text{لو}4} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}-2}\, \text{د س} =$

أ) لو٢ ب) لو٦ جـ) $\frac{2}{3}$ د) لو٣

البسط مشتقة للمقام

$\therefore = \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}}-2| \Big]_{\text{لو}2}^{\text{لو}4}$

$= \text{لو}|\text{هـ}^{\text{لو}4}-2| - \text{لو}|\text{هـ}-2|$

$= \text{لو}2 - \text{لو}1 = \text{لو}2$ $\boxed{\text{أ}}$

١٠ إذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = 6\text{س}$ ، $\int_{0}^{2} \text{ق}'(\text{س})\, \text{د س} = 6$

فإن $\text{ق}'(1) =$

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) −١

$\int \text{ق}''(\text{س})\, \text{د س} = \int 6\text{س}\, \text{د س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 + \text{جـ}$ نعوض في التكامل المعطى

$\therefore \int_{0}^{2} (3\text{س}^2+\text{جـ})\, \text{د س} = 6$

$\text{س}^3 + \text{جـ س} \Big]_{0}^{2} = 6 \leftarrow 8 + 2\text{جـ} = 6$

$\therefore \text{جـ} = -1$

$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = 3\text{س}^2 - 1 \leftarrow \text{ق}'(1) = 2$ $\boxed{\text{ب}}$

١١ $\int_{-2}^{1} \text{لو هـ}^2\, \text{د س} =$

أ) ٢ ب) لو٢ جـ) ٣هـ د) ٦

$= \int_{-2}^{1} 2\,\text{لو هـ}\, \text{د س}$

$= \int_{-2}^{1} 2\, \text{د س} = 2 \times 3$

$= 6$ $\boxed{\text{د}}$

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net

[١٢] $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا}٢\text{س} - \text{ظا}^2\text{س})\, \text{ء س} =$

أ) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ب) $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$

ج) $\frac{\pi}{4} - 1$ د) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\text{جتا}٢\text{س} - \text{قا}^2\text{س} + 1)\, \text{ء س}$

$= \left[\frac{\text{جا}٢\text{س}}{2} - \text{ظا س} + \text{س}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= (\frac{1}{2} - 1 + \frac{\pi}{4}) - \cdot = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ $\boxed{\text{د}}$

---

[١٣] $\int 8\, \text{جا}^2\text{س}\, \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س} =$

أ) $\text{س} - \frac{1}{4}\text{جتا}٤\text{س} + \text{ج}$ ب) $\text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}٤\text{س} + \text{ج}$

ج) $\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}٤\text{س} + \text{ج}$ د) $\text{س} + \frac{1}{4}\text{جتا}٤\text{س} + \text{ج}$

$= \int 8 (\text{جا س جتا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int 8 \times (\frac{1}{2}\text{جا}٢\text{س})^2\, \text{ء س}$

$= \int 2\,\text{جا}^2 ٢\text{س}\, \text{ء س} = \int 2 \times \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}٤\text{س})\, \text{ء س}$

$= \text{س} - \frac{1}{4}\text{جا}٤\text{س} + \text{ج}$ $\boxed{\text{ب}}$

---

[١٤] $\int \text{هـ}^{\text{ظتا}^2\text{س} - \text{قتا}^2\text{س}}\, \text{ء س} =$

أ) $\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$ ب) $\frac{1}{\text{هـ}}\text{س} + \text{ج}$

ج) $\text{هـ س} + \text{ج}$ د) $\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{ج}$

$= \int \text{هـ}^{-1}\, \text{ء س}$

$= \int \frac{1}{\text{هـ}}\, \text{ء س} = \frac{1}{\text{هـ}}\text{س} + \text{ج}$

$\boxed{\text{ب}}$

---

[١٥] إذا كان:

$\text{أ} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \text{جا س}}\, \text{ء س}$ ، $\text{ب} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{1 + \text{جا س}}\, \text{ء س}$

فإن أ − ب =

أ) ٢ ب) −١ ج) $\frac{1}{2}$ د) ١

$\text{أ} - \text{ب} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \text{جا س}}\, \text{ء س} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{1 + \text{جا س}}\, \text{ء س}$

$\text{أ} - \text{ب} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 - \text{جا س}} + \frac{1}{1 + \text{جا س}}\right) \text{ء س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cancel{\text{جا س}} + 1 - \cancel{\text{جا س}}}{1 - \text{جا}^2\text{س}}\, \text{ء س} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\text{جتا}^2\text{س}}\, \text{ء س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\,\text{قا}^2\text{س}\, \text{ء س} = [2\,\text{ظا س}]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 2$ $\boxed{\text{أ}}$

---

[١٦] $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}٢\text{س}}{2}}\, \text{ء س} =$

أ) −١ ب) ٢ ج) ١ د) $\sqrt{2}$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{\frac{\cancel{2}\,\text{جا}^2\text{س}}{\cancel{2}}}\, \text{ء س} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} |\text{جا س}|\, \text{ء س}$

لكن جا س $<$ ٠ في الفترة $[\frac{3\pi}{2} ، 2\pi]$

$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\text{جا س}\, \text{ء س} = [\text{جتا س}]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 - \cdot = 1$

$\boxed{\text{ج}}$

---

[١٧] $\int \frac{1}{\text{جا س ظا س} + \text{جتا س}}\, \text{ء س} =$

أ) جا س + ج ب) ظا س + ج ج) جتا س + ج د) قا س + ج

$= \int \frac{1}{\text{جا س} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} + \text{جتا س}}\, \text{ء س} = \int \frac{1}{\frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا س}} + \text{جتا س}}\, \text{ء س}$

$= \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}}\, \text{ء س} = \int \text{جتا س}\, \text{ء س}$

$= \text{جا س} + \text{ج}$ $\boxed{\text{أ}}$

١٨ $\int \frac{\text{قاس}}{\text{قاس}+\text{ظاس}}\,\text{ءس} =$

أ) ظاس + قاس + ث ب) ظاس − قاس + ث

جـ) قاس − ظاس + ث د) لو|قاس + ظاس| + ث

$$= \int \frac{\text{قاس}}{\text{قاس}+\text{ظاس}}\,\text{ءس} \times \frac{\text{قاس}-\text{ظاس}}{\text{قاس}-\text{ظاس}}\,\text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س} - \text{قاس ظاس}}{\underbrace{\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س}}_{\text{متطابقة} = 1}}\,\text{ءس}$$

$$= \int (\text{قا}^2\text{س} - \text{قاس ظاس})\,\text{ءس}$$

$$= \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{ث} \qquad \boxed{\text{ب}}$$

١٩ $\int_{-\pi}^{0} \frac{\text{جاس}}{٢ - \text{جتاس}}\,\text{ءس} =$

أ) صفر ب) لو٢ جـ) −لو٣ د) −لو٢

البسط مشتقة للمقام .

$$= \text{لو}\,|٢ - \text{جتاس}|\,\Big]_{-\pi}^{0} = \text{لو}١ - \text{لو}٣$$

$$= -\text{لو}٣ \qquad \boxed{\text{جـ}}$$

٢٠ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}^2 ٢\text{س}}{١ + \text{جتا}٢\text{س}}\,\text{ءس} =$

أ) π ب) $\frac{\pi}{2}$ جـ) $\pi - 1$ د) 2π

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(٢\,\text{جاس جتاس})^2}{٢\,\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{٤\,\text{جا}^2\text{س}\,\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}}{٢\,\cancel{\text{جتا}^2\text{س}}}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ٢\,\text{جا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cancel{٢} \times \tfrac{1}{\cancel{2}}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \text{س} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - ٠ = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{\text{ب}}$

٢١ $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس} =$

أ) −ظتاس + ٢س + ث ب) −ظتاس − س + ث

جـ) −ظتاس + س + ث د) −ظتاس − ٢س + ث

$$= \int \frac{١ - ٢\,\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس} \quad \text{بالتوزيع}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} - ٢\right)\text{ءس} = \int (\text{قتا}^2\text{س} - ٢)\,\text{ءس}$$

$$= -\text{ظتاس} - ٢\text{س} + \text{ث} \qquad \boxed{\text{د}}$$

٢٢ $\int \text{ظاس}\,\text{ءس} =$

أ) لو|جاس| + ث ب) لو|جتاس| + ث

جـ) لو|قاس| + ث د) لو|ظاس| + ث

$$= -\text{لو}\,|\text{جتاس}| + \text{ث}$$

$$= \text{لو}\,|\text{جتا}^{-1}\text{س}| + \text{ث} = \text{لو}\left|\frac{1}{\text{جتاس}}\right| + \text{ث}$$

$$= \text{لو}\,|\text{قاس}| + \text{ث} \qquad \boxed{\text{جـ}}$$

٢٣ إذا كان:

$$\text{د(س)} = ٥\text{س}^2 - \int (٢\text{س} + \text{د}'(\text{س}))\,\text{ءس}$$

فإن د′(−٢) =

أ) −٤ ب) −٨ جـ) −١٢ د) −١٠

$$\text{د}'(\text{س}) = ١٠\text{س} - (٢\text{س} + \text{د}'(\text{س}))$$

$$\text{د}'(\text{س}) = ٨\text{س} - \text{د}'(\text{س})$$

$$٢\,\text{د}'(\text{س}) = ٨\text{س} \longrightarrow \text{د}'(\text{س}) = ٤\text{س}$$

$$\therefore \text{د}'(-٢) = ٤ \times -٢ = -٨$$

$\boxed{\text{ب}}$

٢٤ اذا كان

ق(س) = ∫ (س² × ∫₁^٢ ٢س د س) د س

فان ق′(٣) =

أ) ٩ ب) ١٢ ج) ١٨ د) ٢٧

ق′(س) = س² × ∫₁^٢ ٢س د س

ق′(س) = س² × [س²]₁^٢

= س² (٤ − ١) = ٣س²

∴ ق′(٣) = ٣ × ٩ = ٢٧ $\boxed{د}$

٢٥ اذا كان م(س) معكوس المشتقة للاقتران ق وكان م(٢) = ٧

∫ (ق(س) + س²) د س = س م(س) + ٥

فان ق(٢) =

أ) −٣ ب) ٤ ج) −٢ د) ٣

نشتق الطرفين .

ق(س) + س² = س × ق(س) + م(س)

ق(٢) + ٤ = ٢ق(٢) + م(٢)

ق(٢) = ٤ − م(٢) = ٤ − ٧ = −٣ $\boxed{أ}$

٢٦ اذا كان : ص = لو √(٢ + ظاس) فان

دص/دس |_{س = π/٤} تساوي .

أ) ١/٢ ب) ١/٣ ج) ٢/٣ د) ١/٦

ص = ١/٢ لو (٢ + ظاس) د س

دص/دس = ١/٢ × قا²س / (٢ + ظاس)

= ١/٢ × ٢/(٢ + ١) = ١/٢ × ٢/٣

= ١/٣ $\boxed{ب}$

٢٧ اذا كان :

ص = لو |س − هـ^٣س| فان دص/دس |_{س = ٠} تساوي

أ) −١ ب) ١ ج) ٢ د) −٢

دص/دس = (١ − ٣هـ^٣س)/(س − هـ^٣س) = (١ − ٣ × ١)/(٠ − ١) = ٢ $\boxed{ج}$

٢٨ اذا كان :

ق(س) = هـ^أس لوس ، ق′(١) = هـ فان أ =

أ) ٢ ب) هـ ج) ١ د) ١/٢

ق′(س) = هـ^أس × ١/س + لوس × أ هـ^أس

ق′(١) = هـ^أ × ١ + لو١ × أ هـ^أ

هـ = هـ^أ + صفر ← أ = ١ $\boxed{ج}$

٢٩ اذا كان :

هـ^ص = جتاس وكان ص″ + ص′² + أ = صفر

فان الثابت أ =

أ) صفر ب) ١ ج) ١/٢ د) −١

هـ^ص × ص′ = − جاس لكن هـ^ص = جتاس

جتاس × ص′ = − جاس

ص′ = − ظاس

ص″ = − قا²س

∴ − قا²س + (− ظاس)² + أ = ٠

$\underbrace{\text{ظا²س − قا²س}}_{\text{متطابقة}}$ + أ = ٠

١ + أ = صفر ← أ = −١

$\boxed{د}$

[٣٠] إذا كان ص = ٢^(√س) فإن دص/دس |_(س=١) =

أ) لو٢   ب) ٢   ج) لو٤   د) ١

دص/دس = ٢^(√س) × ١/(٢√س) × لو٢

= ٢ × ١/٢ × لو٢ = لو٢   [أ]

[٣١] إذا كان :

ص = أ هـ^(٢س) + جا(لوس)

وكان دص/دس |_(س=١) = هـ^٣ + ١ فإن الثابت أ =

أ) هـ   ب) هـ/٢   ج) ٢هـ   د) ١/٢

دص/دس = أ × هـ^(٢س) × ٢ + ١/س جتا(لوس)

هـ^٣ + ١ = ٢أ هـ^٢ + ١ × ١ جتا٠   [ب]

هـ^٣ + ~~١~~ = ٢أ هـ^٢ + ~~١~~ ← أ = هـ^٣/(٢هـ^٢) = هـ/٢

[٣٢] إذا كان : ∫ من -١ إلى ٢ (٣د(س) − ٤س + ١) دس = ٩

فإن ∫ من ٢ إلى -١ ٢د(س) دس =

أ) ٤   ب) −٨   ج) −٤   د) ٨

٣ × ∫ من -١ إلى ٢ د(س) دس − [٢س^٢] من -١ إلى ٢ + ٣ = ٩

٣ ∫ من -١ إلى ٢ د(س) دس − (٨ − ٢) + ٣ = ٩

٣ ∫ من -١ إلى ٢ د(س) دس = ١٢

∴ ∫ من -١ إلى ٢ د(س) دس = ٤

∴ ∫ من ٢ إلى -١ ٢د(س) دس = ٢ × −٤ = −٨

[ب]

[٣٣] إذا كانت ∫ من ١ إلى ٣ د(س) دس = ٦

∫ من ٥ إلى ٣ (د(س)/٢ − ٤) دس = ١٢ ، فإن ∫ من ٥ إلى ١ د(س) دس =

أ) ٢   ب) ٤   ج) ٦   د) ١٤

١/٢ ∫ من ٥ إلى ٣ د(س) دس + ٨ = ١٢

∴ ∫ من ٥ إلى ٣ د(س) دس = ٨

∫ من ٥ إلى ١ د(س) دس = ∫ من ٥ إلى ٣ د(س) دس + ∫ من ٣ إلى ١ د(س) دس

= ٨ − ٦ = ٢   [أ]

[٣٤] إذا كان :

∫ من -٢ إلى ١ د(٣س+٥) دس = ٤ ، ∫ من -١ إلى ٣ د(س) دس = ٩

فإن ∫ من ٣ إلى ٨ (٢د(س) + ١) دس =

أ) ٧   ب) ٦   ج) ١١   د) ٣

∫ من -٢ إلى ١ د(٣س+٥) دس = ٤

نفرض ص = ٣س + ٥ ← دس = دص/٣

−٢ ← −١ ، ١ ← ٨

∫ من -١ إلى ٨ د(ص) × دص/٣ = ٤ ← ∫ من -١ إلى ٨ د(ص) دص = ١٢

∫ من ٣ إلى ٨ (٢د(س) + ١) دس

= ٢ ∫ من ٣ إلى ٨ د(س) دس + ٥

= ٢ (∫ من ٣ إلى -١ د(س) دس + ∫ من -١ إلى ٨ د(س) دس) + ٥

= ٢ (−٩ + ١٢) + ٥

= ٢ × ٣ + ٥ = ١١   [ج]

٣٥ إذا كانت

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٢\text{س} ، & \text{س} < ٢ \\ ٥ ، & \text{س} = ٢ \\ ٣\text{س}^{٢} ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$$

فإن: $\int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ءس} =$

أ) ١٩ ب) ٢٢ ج) ٢٤ د) ٢٧

$= \int_{١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٣} ٣\text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

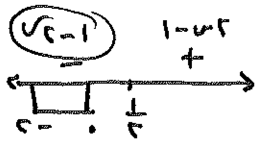
$= [\text{س}^{٢}]_{١}^{٢} + [\text{س}^{٣}]_{٢}^{٣}$

$= ٤ - ١ + ٢٧ - ٨ = ٢٢$ $\boxed{\text{ب}}$

٣٦ $\int_{-٢}^{٠} \sqrt{٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١}\,\text{ءس} =$

أ) صفر ب) ٢ ج) −٢ د) ٦

$= \int_{-٢}^{٠} \sqrt{(٢\text{س} - ١)^{٢}}\,\text{ءس}$



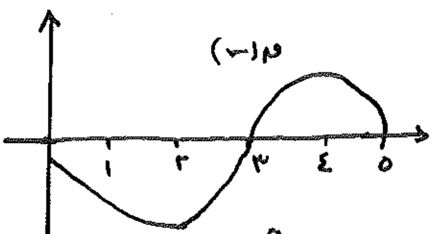
$= \int_{-٢}^{٠} |٢\text{س} - ١|\,\text{ءس}$

$= \int_{-٢}^{٠} (١ - ٢\text{س})\,\text{ءس}$

$= [\text{س} - \text{س}^{٢}]_{-٢}^{٠} = ٠ - (-٢ - ٤) = ٦$

$\boxed{\text{د}}$

٣٧ إذا كانت د(س) معرفة على [٠، ٥] كما في الشكل فأي العبارات التالية صحيحة؟



أ) $\int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ءس} \geq ٠$ ب) $\int_{٣}^{٥} \text{د(س)}\,\text{ءس} \leq ٠$

ج) $\int_{٠}^{٢} \text{د(س)}\,\text{ءس} < ٠$ د) $\int_{٠}^{٣} \text{د(س)}\,\text{ءس} > ٠$

$\boxed{\text{ج}}$

٣٨ إذا كانت $-٣ \leq \text{د(س)} \leq ١ \quad \forall\ \text{س} \in [-١، ٢]$
فإن أكبر قيمة للتكامل التالي:

$$\int_{-١}^{٢} \frac{٦}{\text{د}^{٢}\text{(س)} + ٣}\,\text{ءس} \quad \text{هي:}$$

أ) ١ ب) ٦ ج) ٢ د) $\frac{٣}{٢}$

$-٣ \leq \text{د(س)} \leq ١$

$٠ \leq \text{د}^{٢}\text{(س)} \leq ٩ \qquad +٣$

$٣ \leq \text{د}^{٢}\text{(س)} + ٣ \leq ١٢$

$\frac{١}{٣} \geq \frac{١}{\text{د}^{٢}\text{(س)}+٣} \geq \frac{١}{١٢} \qquad \times ٦$

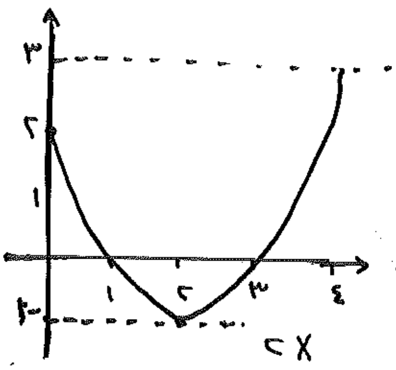
$٢ \geq \frac{٦}{\text{د}^{٢}\text{(س)}+٣} \geq \frac{١}{٢}$

$\int_{-١}^{٢} ٢\,\text{ءس} \geq \int_{-١}^{٢} \frac{٦}{\text{د}^{٢}\text{(س)}+٣}\,\text{ءس} \geq \int_{-١}^{٢} \frac{١}{٢}\,\text{ءس}$

٦ $\frac{٣}{٢}$

∴ أكبر قيمة = ٦ $\boxed{\text{ب}}$

٣٩ إذا كانت د(س) معرفة على [٠، ٤] كما في الشكل
وكان $\text{م} \leq \int_{٠}^{٤} (٢\text{د(س)} + ٣)\,\text{ءس} \leq \text{ن}$ فإن
أكبر قيمة للثابت م وأصغر قيمة للثابت ن على الترتيب



أ) ١ ، ٩
ب) ٤ ، ١٢
ج) ٤ ، ٩
د) ٤ ، ٣٦

$-١ \leq \text{د(س)} \leq ٣ \qquad \times ٢$

$-٢ \leq ٢\text{د(س)} \leq ٦ \qquad +٣$

$١ \leq ٢\text{د(س)} + ٣ \leq ٩$

$\int_{٠}^{٤} ١\,\text{ءس} \leq \int_{٠}^{٤} (٢\text{د(س)}+٣)\,\text{ءس} \leq \int_{٠}^{٤} ٩\,\text{ءس}$

$٤ \leq \int_{٠}^{٤} (٢\text{د(س)}+٣)\,\text{ءس} \leq ٣٦$ $\boxed{\text{د}}$

٤٠ أكبر قيمة للتكامل التالي :

$\int_{-2}^{1} (\text{٢س}^3 + ٥)\, \text{دس}$ تساوي :

أ) ٧ ب) ١٢ ج) ١٥ د) ٢١

$\text{د(س)} = \text{٢س}^3 + ٥ \quad \text{س} \in [-٢ ، ١]$

$\text{دَ(س)} = \text{٦س}^2$

ع.م: س = -٢ ، س = ١ — صفر: س = ٠

د(-٢) = -١١

د(١) = ٧ ، د(٠) = ٥

$-١١ \le \text{٢س}^3 + ٥ \le ٧$

$\int_{-2}^{1} -١١\, \text{دس} \le \int_{-2}^{1} (\text{٢س}^3+٥)\, \text{دس} \le \int_{-2}^{1} ٧\, \text{دس}$

$\qquad \downarrow -٣٣ \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow ٢١$

∴ أكبر قيمة = ٢١ $\boxed{\text{د}}$

٤١ أصغر قيمة للتكامل التالي :

$\int_{0}^{\pi} (٣ + \text{جتا}^2\text{س})\, \text{دس}$ تساوي .

أ) π ب) ٢π ج) ٣π د) ٤π

$\text{د(س)} = ٣ + \text{جتا}^2\text{س} \quad \text{س} \in [٠ ، \pi]$

$\text{دَ(س)} = -٢\text{جتاس جاس}$

$= -\text{جا٢س} = ٠$

$\text{٢س} = ٠ ، \pi ، ٢\pi$

$\text{س} = ٠ ، \frac{\pi}{2} ، \pi$

$\text{د}(٠) = ٤ ، \text{د}(\frac{\pi}{2}) = ٣ ، \text{د}(\pi) = ٤$

$٣ \le ٣ + \text{جتا}^2\text{س} \le ٤$

$\int_{0}^{\pi} ٣\, \text{دس} \le \int_{0}^{\pi} (٣+\text{جتا}^2\text{س})\, \text{دس} \le \int_{0}^{\pi} ٤\, \text{دس}$

$\qquad \downarrow ٣\pi \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow ٤\pi$

أصغر قيمة = ٣π $\boxed{\text{ج}}$

طريقة أخرى :

$-١ \le \text{جتاس} \le ١ \quad \forall \; [٠ ، \pi]$

$٠ \le \text{جتا}^2\text{س} \le ١$

$٣ \le ٣ + \text{جتا}^2\text{س} \le ٤$

$\int_{0}^{\pi} ٣\, \text{دس} \le \int_{0}^{\pi} (٣+\text{جتا}^2\text{س})\, \text{دس} \le \int_{0}^{\pi} ٤\, \text{دس}$

$\qquad \downarrow ٣\pi \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow ٤\pi$

∴ أصغر قيمة = ٣π

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net

طرائق التكامل

$\boxed{1}$ $\int 4س \, جا^2 س^2 \, ءس =$

أ) $س^2 - \frac{1}{2} جتا 2س^2 + ج$

ب) $س - \frac{1}{2} جا 2س^2 + ج$

جـ) $س - \frac{1}{2} جتا 2س^2 + ج$

ء) $س^2 - \frac{1}{2} جا 2س^2 + ج$

نفرض $ص = س^2 \longrightarrow ءس = \frac{ءص}{2س}$

$= \int 4\cancel{س} \, جا^2 ص \times \frac{ءص}{2\cancel{س}}$

$= \int 2 جا^2 ص \, ءص = \int \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} (1 - جتا 2ص) \, ءص$

$= ص - \frac{1}{2} جا 2ص + ج$

$= س^2 - \frac{1}{2} جا 2س^2 + ج$ $\boxed{ء}$

$\boxed{2}$ $\int_0^{\frac{1}{2}} س \, هـ^{2س} \, ءس =$

أ) $\frac{هـ}{4}$ ب) $\frac{1}{4}$ جـ) $\frac{هـ}{2}$ ء) $\frac{1}{2}$

$ع = س \longrightarrow ءع = ءس$

$ءص = هـ^{2س} \longrightarrow ص = \frac{1}{2} هـ^{2س}$

$= \frac{1}{2} س \, هـ^{2س} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} هـ^{2س} \, ءس$

$= \left[\frac{1}{2} س \, هـ^{2س} - \frac{1}{4} هـ^{2س} \right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{1}{4} هـ - \frac{1}{4} هـ \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right)$

$= \frac{هـ}{4} - \frac{هـ}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $\boxed{ب}$

$\boxed{3}$ $\int_0^{\pi} ظاس \, جتا^5 س \, ءس =$

أ) $\frac{-2}{5}$ ب) صفر جـ) $\frac{1}{5}$ ء) $\frac{2}{5}$

نفرض $ص = جتاس$

$ءس = \frac{ءص}{-جاس}$ ، $0 \longrightarrow 1$ ، $\pi \longrightarrow -1$

$\int_1^{-1} ظاس \times ص^5 \times \frac{ءص}{-جاس}$

$= \int_{-1}^{1} \frac{\cancel{جاس}}{جتاس} \times ص^5 \times \frac{ءص}{\cancel{جاس}}$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{ص} \times ص^5 \, ءص = \int_{-1}^{1} ص^4 \, ءص$

$= \left[\frac{ص^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ $\boxed{ء}$

$\boxed{4}$ $\int_0^3 س \sqrt[3]{س^2 - 1} \, ءس =$

أ) $\frac{15}{4}$ ب) $\frac{45}{4}$ جـ) $\frac{21}{8}$ ء) $\frac{45}{8}$

$ص = \sqrt[3]{س^2 - 1}$

$ص^3 = س^2 - 1 \longrightarrow 3ص^2 ءص = 2س \, ءس$

$\therefore ءس = \frac{3ص^2}{2س} ءص$ ، $0 \longrightarrow -1$ ، $3 \longrightarrow 2$

$= \int_{-1}^{2} \cancel{س} \times ص \times \frac{3ص^2}{2\cancel{س}} ءص$

$= \int_{-1}^{2} \frac{3}{2} ص^3 \, ءص = \frac{3}{2} \times \left[\frac{ص^4}{4} \right]_{-1}^{2}$

$= \frac{3}{8} (16 - 1) = \frac{45}{8}$ $\boxed{ء}$

$\boxed{5}$ $\int (2س^5 - 4س)^3 \, ءس =$

أ) $\frac{1}{2} (س^4 - 2)^4 + ج$ ب) $(س^4 - 2)^4 + ج$

جـ) $-(س^4 - 2)^4 + ج$ ء) $-\frac{1}{2} (س^4 - 2)^4 + ج$

$= \int \left(2س (س^4 - 2) \right)^3 ءس$

$= \int 8س^3 (س^4 - 2)^3 \, ءس$

$ص = س^4 - 2 \longrightarrow ءس = \frac{ءص}{4س^3}$

$= \int \cancel{8}^{2} \cancel{س^3} \times ص^3 \times \frac{ءص}{\cancel{4س^3}}$

$= 2 \times \frac{ص^4}{4}$

$= \frac{1}{2} (س^4 - 2)^4 + ج$ $\boxed{أ}$

[٦] $\int \frac{(س+٢)^{٣}}{س^{٥}}\, دس =$

أ) $(١+\frac{٢}{س})^{٤} + جـ$ ب) $-\frac{١}{٤}(١+\frac{٢}{س})^{٤} + جـ$

جـ) $\frac{١}{١٢}(١+\frac{٢}{س})^{٤} + جـ$ د) $-\frac{١}{٨}(١+\frac{٢}{س})^{٤} + جـ$

$= \int \frac{س^{٣}(١+٢س^{-١})^{٣}}{س^{٥}}\, دس$

$= \int س^{-٢}(١+٢س^{-١})^{٣}\, دس$

$ص = ١+٢س^{-١} \longrightarrow دس = \frac{دص}{-٢س^{-٢}}$

$= \int \cancel{س^{-٢}} \times ص^{٣} \times \frac{دص}{-٢\cancel{س^{-٢}}} = \int -\frac{١}{٢} ص^{٣}\, دص$

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = -\frac{١}{٨}(١+\frac{٢}{س})^{٤} + جـ$

$\boxed{د}$

[٧] إذا كان: $س\, ق'(س) + ق(س) = جتاس$

وكان $ق(\pi) = صفر$ ، فإن $ق(س) =$

أ) $س\, جاس$ ب) $\frac{جاس}{س}$

جـ) $\frac{س}{جاس}$ د) $جاس$

تكامل الطرفين:

$\int س\, ق'(س)\, دس + \int ق(س)\, دس = \int جتاس\, دس$

$ع = س \leftarrow دع = دس$

$دهـ = ق'(س)\, دس \leftarrow هـ = ق(س)$

$س\, ق(س) - \cancel{\int ق(س)\, دس} + \cancel{\int ق(س)\, دس} = جاس + جـ$

$س\, ق(س) = جاس + جـ$

لكن $ق(\pi) = ٠$

$\pi\, ق(\pi) = جا\pi + جـ \longrightarrow جـ = ٠$

$\therefore س\, ق(س) = جاس$

$ق(س) = \frac{جاس}{س}$ $\boxed{ب}$

[٨] $\int_{٠}^{١} \frac{٣}{(س+١)(٢-س)}\, دس =$

أ) صفر ب) لو٢ جـ) -لو٢ د) لو٤

$= \int_{٠}^{١} \frac{أ}{س+١}\, دس + \int_{٠}^{١} \frac{ب}{٢-س}\, دس$

$س = -١ \longrightarrow أ = ١$ ، $س = ٢ \longrightarrow ب = ١$

$= \int_{٠}^{١} \frac{١}{س+١}\, دس + \int_{٠}^{١} \frac{١}{٢-س}\, دس$

$= لو|س+١| \Big]_{٠}^{١} - لو|٢-س| \Big]_{٠}^{١}$

$= لو٢ - لو١ - (لو١ - لو٢)$

$= ٢لو٢ = لو٤$ $\boxed{د}$

[٩] $\int_{هـ}^{١} س\, لو\frac{١}{س}\, دس =$

أ) $\frac{هـ^{٢}}{٤}$ ب) $\frac{هـ^{٢}+١}{٤}$ جـ) $\frac{هـ^{٢}-١}{٤}$ د) $\frac{١}{٤}$

$= \int_{هـ}^{١} س\, لوس^{-١}\, دس$

$= \int_{هـ}^{١} -س\, لوس\, دس$

$= \int_{١}^{هـ} س\, لوس\, دس$

$ع = لوس \longrightarrow دع = \frac{١}{س}\, دس$

$دهـ = س\, دس \leftarrow هـ = \frac{س^{٢}}{٢}$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} لوس \Big]_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} \frac{١}{٢} س\, دس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} لوس - \frac{١}{٤} س^{٢} \Big]_{١}^{هـ}$

$= (\frac{هـ^{٢}}{٢} - \frac{١}{٤} هـ^{٢}) - (٠ - \frac{١}{٤})$

$= \frac{هـ^{٢}}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{هـ^{٢}+١}{٤}$

$\boxed{ب}$

10 الفرض المناسب لإيجاد $\int$ ظتا^{6}س قتا^{4}س ءس هو ص =

أ) جاس ب) قتاس ج) قاس د) ظتاس

الفرض المناسب هو ص = ظتاس $\boxed{د}$

11 $\int$ هـ^{س} (جاس + جتاس) ءس =

أ) هـ^{س} جاس + ث ب) هـ^{س} (جاس − جتاس) + ث

ج) هـ^{س} جتاس + ث د) هـ^{س} (جتاس − جاس) + ث

= $\int$ هـ^{س} جاس ءس + $\int$ هـ^{س} جتاس ءس

ع = جاس ⟵ ءع = جتاس

ءح = هـ^{س} ءس ⟵ ح = هـ^{س}

هـ^{س} جاس − $\cancel{\int \text{هـ}^{س} \text{جتاس ءس}}$ + $\cancel{\int \text{هـ}^{س} \text{جتاس ءس}}$

= هـ^{س} جاس + ث $\boxed{أ}$

12 إذا كان: $\int$ س^{2} جتاس ءس = س^{2} جاس + $\int$ ع ءح

فإن ع ءح =

أ) س جاس ءس ب) س جتاس ءس

ج) ٢س جاس ءس د) −٢س جاس ءس

ع = س^{2} ⟵ ءع = ٢س ءس

ءح = جتاس ءس ⟵ ح = جاس

س^{2} جاس − $\int$ ٢س جاس ءس

= س^{2} جاس + $\int$ −٢س جاس ءس

∴ ع ءح = −٢س جاس ءس

$\boxed{د}$

13 $\int_{4}^{9} \frac{ءس}{س - \sqrt{س}}$ =

أ) لو٢ ب) لو٤ ج) −لو٢ د) −لو٤

ص = $\sqrt{س}$ ⟵ ص^{2} = س

٢ص ءص = ءس   ٤ ⟵ ٢ ، ٩ ⟵ ٣

= $\int_{2}^{3} \frac{٢ص}{ص^{2} - ص}$ ءص

= $\int_{2}^{3} \frac{٢\cancel{ص}}{\cancel{ص}(ص-١)}$ ءص = ٢لو|ص − ١| $]_{2}^{3}$

= ٢(لو٢ − لو١) = ٢لو٢ = لو٤ $\boxed{ب}$

14 $\int_{0}^{2} \frac{٢س^{2} - ١}{س + ١}$ ءس =

أ) لو٢ ب) صفر ج) لو٣ د) لو٩

نستخدم القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} ٢س - ٢ & \\ \hline \cancel{٢س^{2}} - ١ & س + ١ \\ -٢س^{2} - ٢س & \\ \hline \cancel{-٢س} - ١ & \\ ٢س + ٢ & \\ \hline ١ & \end{array}$$

= $\int_{0}^{2}$ (٢س − ٢) ءس + $\int_{0}^{2} \frac{١}{س+١}$ ءس

= س^{2} − ٢س $]_{0}^{2}$ + لو|س + ١| $]_{0}^{2}$

= صفر + لو٣

= لو٣ $\boxed{ج}$

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net

[15] جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt[3]{\text{س}}}}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{ص}^3 = \text{س}$ ، $3\text{ص}^2\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{\cancel{\text{ص}}} \times 3\text{ص}^{\cancel{2}}\,\text{ءص}$

$= \int 3\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$\text{ع} = 3\text{ص} \longrightarrow \text{ءع} = 3\,\text{ءص}$

$\text{ءه} = \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} \longrightarrow \text{ه} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= 3\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - \int 3\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$= 3\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 3\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ث}$

$= 3\sqrt[3]{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt[3]{\text{س}}} - 3\,\text{هـ}^{\sqrt[3]{\text{س}}} + \text{ث}$

② $\int \text{جا}\,2\text{س}\;\text{ظتا}^2(\text{جاس})\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{جا}\,2\text{س}\;\text{ظتا}^2\text{ص} \times \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$= \int 2\text{جاس}\,\cancel{\text{جتاس}}\;\text{ظتا}^2\text{ص} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int 2\text{ص}\;\text{ظتا}^2\text{ص}\,\text{ءص}$

$\text{ع} = 2\text{ص} \longrightarrow \text{ءع} = 2\,\text{ءص}$

$\text{ءه} = \text{ظتا}^2\text{ص}\,\text{ءص}$

$\text{ءه} = (\text{قتا}^2\text{ص} - 1)\,\text{ءص} \longrightarrow \text{ه} = -\text{ظتاص} - \text{ص}$

$= 2\text{ص}(-\text{ظتاص} - \text{ص}) + \int 2(\text{ظتاص} + \text{ص})\,\text{ءص}$

$= -2\text{ص}\,\text{ظتاص} - 2\text{ص}^2 + 2\text{لو}|\text{جاص}| + \text{ص}^2 + \text{ث}$

$= -2\text{ص}\,\text{ظتاص} - \text{ص}^2 + 2\text{لو}|\text{جاص}| + \text{ث}$

$= -2\text{جاس}\,\text{ظتا}(\text{جاس}) - \text{جا}^2\text{س} + 2\text{لو}|\text{جا}(\text{جاس})| + \text{ث}$

③ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{س}^2 \sqrt{2 + 2\text{جتا}\,2\text{س}}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{س}^2 \times \sqrt{2(1 + \text{جتا}\,2\text{س})}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,\text{س}^2 \times \sqrt{2\text{جتا}^2\text{س}}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\text{س}^2\,\text{جتاس}\;\text{ءس}$

ع	ءه
2س^2	جتاس
4س	جاس
4	$-$ جتاس
صفر	$-$ جاس

$= \left[2\text{س}^2\,\text{جاس} + 4\text{س}\,\text{جتاس} - 4\text{جاس}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) - (0) = \frac{\pi^2}{2} - 4$

④ $\int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}+2}\,\sqrt{\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + \text{س}}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}+2} \times \sqrt{\text{س}(\text{س}^2 + 2\text{س} + 1)}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}+2} \times \sqrt{\text{س}(\text{س}+1)^2}\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}+2} \times \sqrt{\text{س}} \times |\text{س}+1|\;\text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{(\text{س}+2)\text{س}} \times (\text{س}+1)$

$\text{س}+1$: -1 ، $\text{س}=-1$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}^2 + 2\text{س}}\,(\text{س}+1)\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 + 2\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{س}^2 + 2\text{س}$

$2\text{ص}\,\text{ءص} = (2\text{س}+2)\,\text{ءس}$

$\text{ص}\,\text{ءص} = (\text{س}+1)\,\text{ءس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ص}}{\text{س}+1}\,\text{ءص}$

$0 \longleftarrow 0$ ، $1 \longleftarrow \sqrt{3}$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \text{ص}\,\cancel{(\text{س}+1)} \times \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+1}}\,\text{ءص}$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \text{ص}^2\,\text{ءص}$

$= \left[\frac{\text{ص}^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}}$

$= \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} - 0$

$= \sqrt{3}$

⑤ $\int \sqrt{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} + ١}^{\,٣} \; \text{د س}$

$= \int \sqrt{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} (\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١)}^{\,٣} \; \text{د س}$

$= \int \text{س}^{-\frac{١}{٤}} \sqrt{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١}^{\,٣} \; \text{د س}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \sqrt{\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١} \\ \text{ص}^{٢} = \text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١ \\ ٢\text{ص د ص} = \frac{٣}{٤} \text{س}^{-\frac{١}{٤}} \text{د س} \\ \text{د س} = \frac{٨}{٣} \times \frac{\text{ص د ص}}{\text{س}^{-\frac{١}{٤}}} \end{array} \right.$

$= \int \cancel{\text{س}^{-\frac{١}{٤}}} \times \text{ص} \times \frac{٨ \text{ص د ص}}{٣ \cancel{\text{س}^{-\frac{١}{٤}}}}$

$= \int \frac{٨}{٣} \text{ص}^{٢} \; \text{د ص}$

$= \frac{٨}{٩} \text{ص}^{٣} + \text{ج}$

$= \frac{٨}{٩} \sqrt{(\text{س}^{\frac{٣}{٤}} + ١)^{٣}} + \text{ج}$

⑥ $\int \frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س} + ١)^{٢} - ٤} \; \text{د س}$

$= \int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١ - ٤} \; \text{د س}$

$= \int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣} \; \text{د س}$

بالقسمة الطويلة .

$= \int (\text{س} - ٢) \; \text{د س} + \int \frac{٧\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣} \; \text{د س}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} + \int \frac{٧\text{س} - ٦}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)} \; \text{د س}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} + \int \frac{\text{أ}}{\text{س} + ٣} \; \text{د س} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١} \; \text{د س}$

$\text{س} = -٣ \longrightarrow \text{أ} = \frac{٢٧}{٤}$

$\text{س} = ١ \longrightarrow \text{ب} = \frac{١}{٤}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} + \int \frac{\frac{٢٧}{٤}}{\text{س} + ٣} \; \text{د س} + \int \frac{\frac{١}{٤}}{\text{س} - ١} \; \text{د س}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} + \frac{٢٧}{٤} \text{لو} |\text{س} + ٣| + \frac{١}{٤} \text{لو} |\text{س} - ١| + \text{ج}$

⑦ $\int \frac{\text{جا} ٢\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا س} + ٥} \; \text{د س}$

$= \int \frac{٢ \text{جا س جتا س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا س} + ٥} \; \text{د س}$

$= \int \frac{٢ \text{جا س جتا س}}{- \text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا س} + ٦} \; \text{د س}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{جا س} \\ \text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتا س}} \end{array} \right.$

$= \int \frac{٢\text{ص} \cancel{\text{جتا س}}}{- \text{ص}^{٢} - \text{ص} + ٦} \times \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

$= \int \frac{-٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢} + \text{ص} - ٦} \; \text{د ص}$

$= \int \frac{-٢\text{ص}}{(\text{ص} + ٣)(\text{ص} - ٢)} \; \text{د ص}$

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{ص} + ٣} \; \text{د ص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ٢} \; \text{د ص}$

$= \int \frac{-\frac{٦}{٥}}{\text{ص} + ٣} \; \text{د ص} + \int \frac{-\frac{٤}{٥}}{\text{ص} - ٢} \; \text{د ص}$

$= -\frac{٦}{٥} \text{لو} |\text{ص} + ٣| - \frac{٤}{٥} \text{لو} |\text{ص} - ٢| + \text{ج}$

$= -\frac{٦}{٥} \text{لو} |\text{جا س} + ٣| - \frac{٤}{٥} \text{لو} |\text{جا س} - ٢| + \text{ج}$

⑧* $\int \frac{٣ \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} - ٢} \; \text{د س}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} \\ \text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ ٢\text{ص د ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{د س} \\ \text{د س} = \frac{٢\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \text{د ص} \end{array} \right.$

$= \int \frac{٣ \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٢} \times \frac{٢\text{ص د ص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$= \int \frac{٦\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{ص} - ٢} \; \text{د ص}$

$= \int \frac{٦\text{ص}}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ١)} \; \text{د ص}$

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٢} \; \text{د ص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ١} \; \text{د ص}$

$\text{ص} = ٢ \longrightarrow \text{أ} = ٤ \quad ، \quad \text{ص} = -١ \longrightarrow \text{ب} = ٢$

$= \int \frac{٤}{\text{ص} - ٢} \; \text{د ص} + \int \frac{٢}{\text{ص} + ١} \; \text{د ص}$

$= ٤ \text{لو} |\text{ص} - ٢| + ٢ \text{لو} |\text{ص} + ١| + \text{ج}$

$= ٤ \text{لو} |\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} - ٢| + ٢ \text{لو} |\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} + ١| + \text{ج}$

⑨ $\int \frac{س\ جتا^2 س}{1 - جتا 2س}\ دس$

$= \int \frac{س\ جتا^2 س}{2 جا^2 س}\ دس$

$= \int \frac{1}{2} س\ ظتا^2 س\ دس$

$م = \frac{1}{2} س \leftarrow دم = \frac{1}{2} دس$

$دن = ظتا^2 س\ دس$

$دن = (قتا^2 س - 1)\ دس \leftarrow ن = -ظتا س - س$

$= -\frac{1}{2} س (ظتا س + س) + \int \frac{1}{2} (ظتا س + س)\ دس$

$= -\frac{1}{2} س (ظتا س + س) + \frac{1}{2} لو|جا س| + \frac{1}{4} س^2 + ج$

⑩ $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - س^2}}{س^4}\ دس$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{س^2 (س^{-2} - 1)}}{س^4}\ دس$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{س \sqrt{س^{-2} - 1}}{س^{4}}\ دس = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sqrt{س^{-2} - 1}}{س^{3}}\ دس$

$ص = \sqrt{س^{-2} - 1}$

$ص^2 = س^{-2} - 1$

$2ص\ دص = -2 س^{-3}\ دس$

$دس = -س^3 ص\ دص$

$\frac{1}{2} \leftarrow \sqrt{3}$

$1 \leftarrow 0$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{ص}{\cancel{س^3}} \times -\cancel{س^3} ص\ دص$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}} ص^2\ دص$

$= \left[\frac{ص^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

⑪ $\int_{1}^{هـ} س (لو س)^2\ دس$

$م = (لو س)^2 \leftarrow دم = 2 لو س \times \frac{1}{س}$

$دن = س\ دس \leftarrow ن = \frac{س^2}{2}$

$= \frac{1}{2} س^2 (لو س)^2 - \int_{1}^{هـ} س\ لو س\ دس$

$م = لو س \leftarrow دم = \frac{1}{س} دس$

$دن = س\ دس \leftarrow ن = \frac{س^2}{2}$

$= \frac{1}{2} س^2 (لو س)^2 - \left(\frac{س^2}{2} لو س - \int_{1}^{هـ} \frac{س}{2}\ دس\right)$

$= \left[\frac{1}{2} س^2 (لو س)^2 - \frac{1}{2} س^2 لو س + \frac{1}{4} س^2\right]_{1}^{هـ}$

$= \cancel{\frac{هـ^2}{2}} - \cancel{\frac{هـ^2}{2}} + \frac{هـ^2}{4} - \left(0 - 0 + \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{هـ^2 - 1}{4}$

⑫ $\int \frac{قا^2 س}{قا^2 س - 10}\ دس$

$= \int \frac{قا^2 س}{1 + ظا^2 س - 10}\ دس$

$= \int \frac{قا^2 س}{ظا^2 س - 9}\ دس$

$ص = ظا س$

$دس = \frac{دص}{قا^2 س}$

$= \int \frac{\cancel{قا^2 س}}{ص^2 - 9} \times \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}}$

$= \int \frac{1}{(ص - 3)(ص + 3)}\ دص$

$= \int \frac{أ}{ص - 3}\ دص + \int \frac{ب}{ص + 3}\ دص$

$ص = 3 \leftarrow أ = \frac{1}{6}$

$ص = -3 \leftarrow ب = \frac{-1}{6}$

$= \frac{1}{6} لو|ص - 3| - \frac{1}{6} لو|ص + 3| + ج$

$= \frac{1}{6} لو|ظا س - 3| - \frac{1}{6} لو|ظا س + 3| + ج$

موقع الأوائل
AWA2EL
LEARN 2 BE
www.awa2el.net

(١٣) $\int \frac{1}{\text{٤جا}^2\text{س} - \text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}\,(\text{٤ظا}^2\text{س} - ١)}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{٤ظا}^2\text{س} - ١}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}{\text{٤ص}^2 - ١} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{ص}}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ص = ظاس} \\ \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}} \end{array}\right.$

$= \int \frac{1}{(\text{٢ص} - ١)(\text{٢ص} + ١)}\,\text{دص}$

$= \int \frac{\text{أ}}{\text{٢ص} - ١}\,\text{دص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{٢ص} + ١}\,\text{دص}$

ص $= \frac{1}{2}$ ← أ $= \frac{1}{2}$ ، ص $= -\frac{1}{2}$ ← ب $= -\frac{1}{2}$

$= \int \frac{\frac{1}{2}}{\text{٢ص} - ١}\,\text{دص} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{\text{٢ص} + ١}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{4}$ لو|٢ص − ١| − $\frac{1}{4}$ لو|٢ص + ١| + ج

$= \frac{1}{4}$ لو|٢ظاس − ١| − $\frac{1}{4}$ لو|٢ظاس + ١| + ج

(١٤) $\int$ قاس جا^2 ٢س دس

$= \int \frac{1}{\text{جتاس}} \times$ ٤ جا^{2}س جتا^{2}س دس

$= \int$ ٤ جا^{2}س جتا^{3}س دس

$= \int$ ٤ص^2 جتا$^{\cancel{3}\,2}$س $\times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ص = جاس} \\ \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} \end{array}\right.$

$= \int$ ٤ص^2 (١ − جا^{2}س) دص

$= \int$ ٤ص^2 (١ − ص^2) دص

$= \int$ (٤ص^2 − ٤ص^4) دص

$= \frac{4}{3}$ص^3 − $\frac{4}{5}$ص^5 + ج

$= \frac{4}{3}$جا^{3}س − $\frac{4}{5}$جا^{5}س + ج

المعادلة التفاضلية

[١] حل المعادلة التفاضلية: ظا^{2}س دس = ٣ دص − دس هو!

أ) ص = $\frac{1}{3}$(ظاس + ٢س) + ج   ب) ص = $\frac{1}{3}$ قا^{2}س + ج

ج) ص = $\frac{1}{3}$ ظاس + ج   د) ص = $\frac{1}{3}$(قا^{2}س + ٢س) + ج

ظا^{2}س دس + دس = ٣ دص

(ظا^{2}س + ١) دس = ٣ دص

$\int$ قا^{2}س دس = $\int$ ٣ دص

ظاس + ج = ٣ص

ص = $\frac{1}{3}$(ظاس + ج) = $\frac{1}{3}$ ظاس + $\boxed{\frac{\text{ج}}{3}}$ ← ج

ص = $\frac{1}{3}$ ظاس + ج $\boxed{\text{ج}}$

[٢] حل المعادلة التفاضلية: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ص هو

أ) |ص| = هـ$^{\text{٢س+ج}}$ ب) |ص| = هـ$^{\text{س}^2}$ + ج

ج) |ص| = ج هـ$^{\text{س}^2}$ د) |ص| = ج هـ$^{\text{٢س}}$

دص = ٢س ص دس

$\int \frac{1}{\text{ص}}$ دص = $\int$ ٢س دس

لو|ص| = س^2 + ج ← |ص| = هـ$^{\text{س}^2\text{+ج}}$

|ص| = هـ$^{\text{س}^2}$ × $\boxed{\text{هـ}^{\text{ج}}}$ ← ج ← |ص| = ج هـ$^{\text{س}^2}$ $\boxed{\text{ج}}$

[٣] إذا كانت: جا^{2}س دص = دص − ٢هـ$^{\text{−٢ص}}$ دس

وكانت ص = ٠ عندما س = ٠ ، فإن قيمة ص عندما س = $\frac{\pi}{4}$

أ) لو٥   ب) $\frac{1}{2}$لو٥   ج) ٥   د) ٢لو٥

٢هـ$^{\text{−٢ص}}$ دس = دص − جا^{2}س دص

٢هـ$^{\text{−٢ص}}$ دس = (١ − جا^{2}س) دص

٢هـ$^{\text{−٢ص}}$ دس = جتا^{2}س دص

$\frac{2}{\text{جتا}^2\text{س}}$ دس = هـ$^{\text{٢ص}}$ دص

$\int ٢ قا^٢ س \, د س = \int هـ^{٢ص} \, د ص$

$٢ ظا س + جـ = \frac{١}{٢} هـ^{٢ص}$

$س = ٠ ، ص = ٠ \leftarrow ٠ + جـ = \frac{١}{٢} \leftarrow جـ = \frac{١}{٢}$

$٢ ظا س + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} هـ^{٢ص}$

$هـ^{٢ص} = ٤ ظا س + ١$

$س = \frac{\pi}{٤} \leftarrow هـ^{٢ص} = ٥ \leftarrow لو هـ^{٢ص} = لو ٥$

$٢ص = لو ٥ \leftarrow ص = \frac{١}{٢} لو ٥$ $\boxed{ب}$

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{٢س}{س^٢ + هـ}$ وكان منحناها يمر بالنقطة (٠، ٣) فإن قاعدة هذه العلاقة

أ) $ص = لو(س^٢ + هـ) + ٣$ ب) $ص = لو(س^٢ + هـ) + ٤$

جـ) $ص = لو(س^٢ + هـ) + ٢$ د) $ص = لو(|س| + هـ) - ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{س^٢ + هـ}$

$\int دص = \int \frac{٢س}{س^٢ + هـ} \, دس$

$ص = لو|س^٢ + هـ| + جـ$

$(٠، ٣) \leftarrow ٣ = لو هـ + جـ \leftarrow جـ = ٢$

$\therefore ص = لو(س^٢ + هـ) + ٢$ $\boxed{جـ}$

٥) بدأ جسم الحركة من نقطة الأصل مبتعداً عنها بسرعة $ع(ن) = ٣ن^٢ + ٢ن$. ما بعده عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من الحركة .

أ) ١٢   ب) ١٤   جـ) ١٠   د) ١٦

$\frac{دف}{دن} = ٣ن^٢ + ٢ن \leftarrow \int دف = \int (٣ن^٢ + ٢ن) \, دن$

$ف = ن^٣ + ن^٢ + جـ$

$ن = ٠ ، ف = ٠ \leftarrow جـ = ٠ \leftarrow ف = ن^٣ + ن^٢$ $\boxed{أ}$

عندما $ن = ٢ \leftarrow ف = ٨ + ٤ = ١٢$

٦) يزداد وزن طفل مولود حسب العلاقة $\frac{دو}{دن} = ٠,٢ \sqrt{و}$ ، و: وزن الطفل بعد ن أسبوع من ولادته

إذا علمت أن وزن الطفل عند ولادته = ٣,٢٤ كغم فإن وزنه بعد أسبوعين من ولادته =

أ) ٢   ب) ٣   جـ) ٤   د) ٦

$دو = ٠,٢ و^{\frac{١}{٢}} \, دن$

$\int و^{-\frac{١}{٢}} \, دو = \int ٠,٢ \, دن$

$٢ و^{\frac{١}{٢}} = ٠,٢ ن + جـ$

$٢\sqrt{و} = ٠,٢ ن + جـ \leftarrow \sqrt{و} = ٠,١ ن + جـ$

$ن = ٠ ، و = ٣,٢٤ \leftarrow \sqrt{٣,٢٤} = ٠ + جـ \leftarrow جـ = ١,٨$

$\therefore \sqrt{و} = ٠,١ ن + ١,٨$

$ن = ٢ \leftarrow \sqrt{و} = ٠,٢ + ١,٨ = ٢$

$\therefore و = ٤$ $\boxed{جـ}$

٧) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح بناية بسرعة ابتدائية ٢٠ م/ث وبتسارع -١٠ م/ث^٢ ، فوصل إلى أقصى ارتفاع عن الأرض مقداره ٤٥ م . ما سرعة الجسم لحظة اصطدامه بالأرض

$\frac{دع}{دن} = -١٠ \leftarrow \int دع = \int -١٠ \, دن$

$ع = -١٠ن + جـ_١$

$ن = ٠ ، ع = ٢٠ \leftarrow ٢٠ = جـ_١$

$\frac{دف}{دن} = -١٠ن + ٢٠$

$\int دف = \int (-١٠ن + ٢٠) \, دن$

$ف = -٥ن^٢ + ٢٠ن + جـ_٢$

عند أقصى ارتفاع: $ع = ٠$ ، $٢٠ - ١٠ن = ٠$ ، $ن = ٢$

$٤٥ = -٢٠ + ٤٠ + جـ_٢$

$جـ_٢ = ٢٥$

$ف = -٥ن^٢ + ٢٠ن + ٢٥$

لحظة اصطدامه بالأرض ف = ٠: $-٥ن^٢ + ٢٠ن + ٢٥ = ٠$ ، $ن^٢ - ٤ن - ٥ = ٠$ ، $(ن - ٥)(ن + ١) = ٠ \leftarrow ن = ٥$

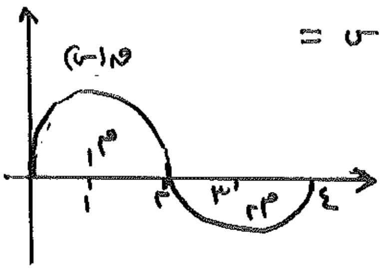
$\therefore ع(٥) = -٥٠ + ٢٠ = -٣٠$

المساحات

[١] إذا كان ق(س) كما في الشكل المرسوم وكان

$\int_{0}^{4} 2\,ق(س)\,دس = 6$ ، مساحة م١ = ٥ وحدات مربعة

فإن $\int_{2}^{4} |ق(س)|\,دس =$



أ) -٢   ب) ١
ج) ٢   د) -١

$\int_{0}^{4} ق(س)\,دس = ٣$

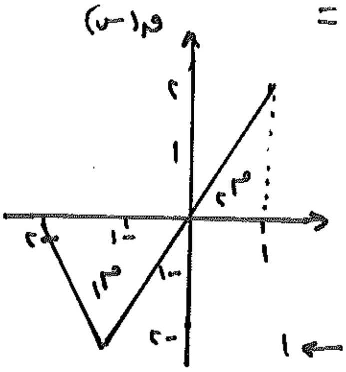
$\int_{0}^{2} ق(س)\,دس + \int_{2}^{4} ق(س)\,دس = ٣$

٥ - م٢ = ٣ ← م٢ = ٢

∴ $\int_{2}^{4} |ق(س)|\,دس = م٢ = ٢$ $\boxed{ج}$

[٣] إذا كان ق(س) كما في الشكل المرسوم فإن:

$\int_{0}^{3} ق(١-س)\,دس =$



أ) -١   ب) ٣
ج) ١   د) -٣

نفرض ص = ١ - س

دس = -دص ، ٠ ← ١
٣ ← -٢

$= \int_{1}^{-2} ق(ص) \times -دص = \int_{-2}^{1} ق(ص)\,دص$

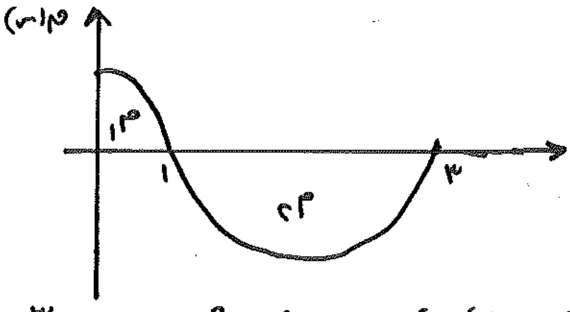
= -م١ + م٢   لكن م١ = $\frac{1}{2}\times ٣ \times ٢ = ٣$

∴ = -٣ + ١   م٢ = $\frac{1}{2}\times ١ \times ٢ = ١$

= -١ $\boxed{أ}$

[٢] إذا كان ق(س) كما في الشكل وكانت مساحة م٢ تساوي ثلاثة أمثال مساحة م١

$\int_{0}^{3} ق(س)\,دس = -٦$ ، فإن $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس =$



أ) -٢   ب) -٤   ج) -٩   د) -٣

$\int_{0}^{3} ق(س)\,دس = م١ - م٢$

-٦ = م١ - م٢   لكن م٢ = ٣م١

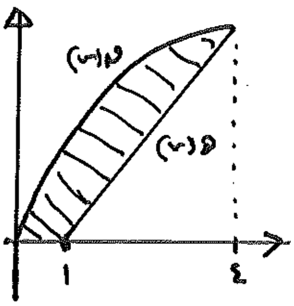
-٦ = م١ - ٣م١

-٢م١ = -٦ ← م١ = ٣ ← م٢ = ٩

∴ $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = -م٢ = -٩$

$\boxed{ج}$

[٤] في الشكل المجاور مساحة المنطقة المظللة تساوي



أ) $\int_{1}^{4} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

ب) $\int_{0}^{4} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

ج) $\int_{0}^{4} ق(س)\,دس - \int_{1}^{4} هـ(س)\,دس$

د) $\int_{0}^{1} ق(س)\,دس + \int_{1}^{4} هـ(س)\,دس$

المنطقة محصورة بين ٣ اقترانات:

ق(س) ، هـ(س) ومحور السينات.

مساحتها =

المساحة بين ق(س) ومحور س - المساحة بين هـ(س) ومحور س

$= \int_{0}^{4} ق(س)\,دس - \int_{1}^{4} هـ(س)\,دس$ $\boxed{ج}$

طريقة أخرى: نجزئ المنطقة المظللة عند س = ١

$م = \int_{0}^{1} ق(س)\,دس + \int_{1}^{4} (ق(س) - هـ(س))\,دس$

$= \int_{0}^{1} ق(س)\,دس + \int_{1}^{4} ق(س)\,دس - \int_{1}^{4} هـ(س)\,دس$

← $\int_{0}^{4} ق(س)\,دس - \int_{1}^{4} هـ(س)\,دس$

⑤ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين :

① $د(س) = س^3$ ، $هـ(س) = س^2 + ٢س$

$د(س) = هـ(س)$

$س^3 = س^2 + ٢س$

$س^3 - س^2 - ٢س = ٠$

$س(س^2 - س - ٢) = ٠$

$س(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = -١$

$$\underset{-١}{\overset{م_١}{\longleftarrow}} \;\; ٠ \;\; \underset{٢}{\overset{م_٢}{\longrightarrow}}$$

$$\int_{-١}^{٠} (س^3 - س^2 - ٢س)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^4}{٤} - \frac{س^3}{٣} - س^2 \right]_{-١}^{٠}$$

$$= ٠ - \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - ١ \right) = \frac{-٧}{١٢} + ١ = \frac{٥}{١٢}$$

$$\therefore م_١ = \frac{٥}{١٢}$$

$$\int_{٠}^{٢} (س^3 - س^2 - ٢س)\, دس$$

$$= \left[\frac{س^4}{٤} - \frac{س^3}{٣} - س^2 \right]_{٠}^{٢}$$

$$= \left(٤ - \frac{٨}{٣} - ٤ \right) - ٠ = \frac{-٨}{٣}$$

$$\therefore م_٢ = \frac{٨}{٣}$$

$$\therefore م = م_١ + م_٢$$

$$= \frac{٥}{١٢} + \frac{٣٢}{١٢} = \frac{٣٧}{١٢}$$

② $د(س) = جتا\, س$ والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين : $(٠ ، ١)$ ، $(\frac{ط}{٢} ، ٠)$

نجد معادلة المستقيم :

$$ميله = \frac{٠ - ١}{\frac{ط}{٢} - ٠} = \frac{-٢}{ط}$$

معادلته : $ص - ١ = \frac{-٢}{ط}(س - ٠)$

$$ص = \frac{-٢}{ط} س + ١$$

$$\int_{٠}^{\frac{ط}{٢}} جتا\, س - \left(١ - \frac{٢}{ط} س\right) دس$$

$$= \left[جا\, س - س + \frac{س^2}{ط} \right]_{٠}^{\frac{ط}{٢}}$$

$$= \left(١ - \frac{ط}{٢} + \frac{ط}{٤} \right) - (٠ - \quad)$$

$$= ١ - \frac{ط}{٤} = \frac{٤ - ط}{٤} > ٠$$ لأن $٤ > ط$

$$\therefore م = ١ - \frac{ط}{٤}$$

③ $ص_١ = س^2 + ١$ ، $ص_٢ = ٧ - س$ ، $ص_٣ = س + ٣$

س	−٣	٢	−١
$ص_١$	١٠	٥	٢

س	−٣	٢
$ص_٢$	١٠	٥

س	٢	−١
$ص_٣$	٥	٢

$ص_١ = ص_٢$

$س^2 + ١ = ٧ - س$

$س^2 + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = -٣$ ، $س = ٢$

$ص_١ = ص_٣$

$س^2 + ١ = س + ٣$

$س^2 - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

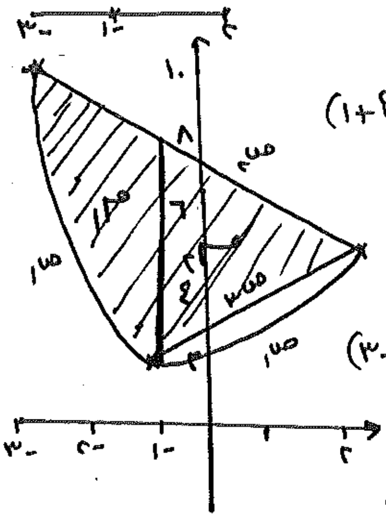
$س = ٢$ ، $س = -١$

$ص_٢ = ص_٣$

$٧ - س = س + ٣$

$٤ = ٢س$

$س = ٢$



$$م_١ = \int_{-٣}^{-١} (٧ - س) - (س^2 + ١)$$

$$م_٢ = \int_{-١}^{٢} (٧ - س) - (س + ٣)$$

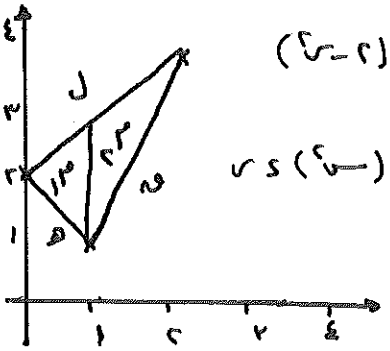
$$م = م_١ + م_٢$$

موقع الأوائل
AWA2EL
LEARN 2 BE
www.awa2el.net

$م_1 = \int_{0}^{1} (س+٢) - (٢ - ٢س)$

$م_2 = \int_{1}^{2} (س+٢) - (س^2) \, دس$

$م = م_1 + م_2$



④ $د(س) = س^2 - ٢س$ ، $هـ(س) = ٢س$

ومحور السينات .

$د(س) = هـ(س)$

$س^2 - ٢س = ٢س$

$س^2 - ٤س = ٠$

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٤$

$د(س) = ص$

$س^2 - ٢س = ٠$

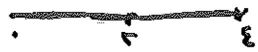
$س(س - ٢) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$

$هـ(س) = ص$

$٢س = ٠$

$س = ٠$



د(س)

٠	٢	٤	١
٠	٠	٨	−١

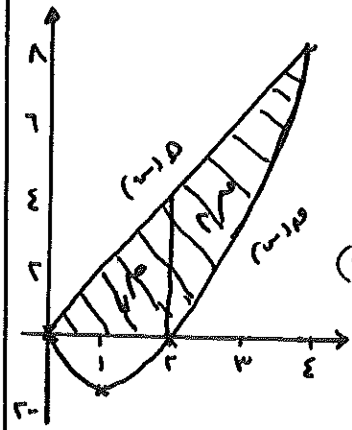
$دَ(س) = ٢س - ٢ = ٠$

$س = ١$

نـ اضافية

هـ(س)

٠	٤
٠	٨



$م_1 = \int_{0}^{2} ٢س - ٠ \, دس$

$م_2 = \int_{2}^{4} ٢س - (س^2 - ٢س)$

$م = م_1 + م_2$

⑤ $د(س) = س^2$ ، $هـ(س) = ٢ - س^2$

$ل(س) = س + ٢$ والواقعة في الربع الأول لـ $س \geq ٠$.

$د(س) = هـ(س)$

$س^2 = ٢ - س^2$

$٢س^2 = ٢$

$س^2 = ١$

$\boxed{س = ١}$ ، $س = -١$ ✗

$د(س) = ل(س)$

$س^2 = س + ٢$

$س^2 - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$\boxed{س = ٢}$ ، $س = -١$ ✗

$هـ(س) = ل(س)$

$٢ - س^2 = س + ٢$

$س^2 + س = ٠$

$س(س + ١) = ٠$

$\boxed{س = ٠}$ ، $س = -١$ ✗

د(س)

س	١	٢
د(س)	١	٤

هـ(س)

س	٠	١
هـ(س)	٢	١

ل(س)

س	٠	٢
ل(س)	٢	٤

⑥ $ص_1 = \sqrt{٣ - س}$ ، $ص_2 = ٥ - س$

$ص_3 = س - ١$ والمستقيم $س = -١$

$ص_1 = ص_2$

$\sqrt{٣ - س} = ٥ - س$

$٣ - س = ٢٥ - ١٠س + س^2$

$س^2 - ٩س + ٢٢ = ٠$

$\Delta = ٨١ - ٤ \times ١ \times ٢٢$

$\Delta = -٧$

✗

$ص_1 = ص_3$

$\sqrt{٣ - س} = س - ١$

$٣ - س = س^2 - ٢س + ١$

$س^2 - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$\boxed{س = ٢}$ ، $س = -١$

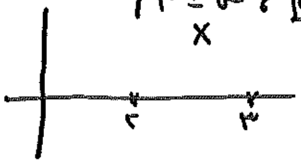
✗

$ص_2 = ص_3$

$٥ - س = س - ١$

$٢س = ٦$

$\boxed{س = ٣}$

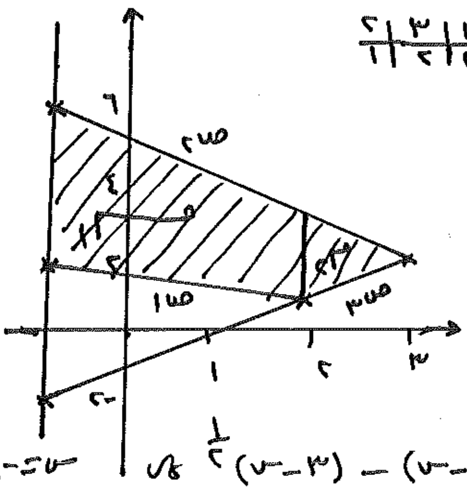


$س = -١$

ص₁ : س	٣	−١	٢
ص₁	٠	٢	١

ص₂ : س	−١	٣
ص₂	٦	٢

ص₃ : س	−١	٣	٢
ص₃	−٢	٢	١

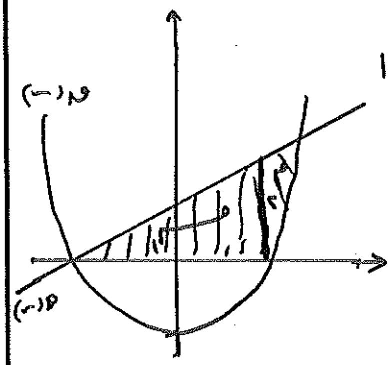


$م_1 = \int_{-1}^{2} (٥ - س) - (٣ - س)^{\frac{1}{2}} \, دس$ $س = -١$

$م_2 = \int_{2}^{3} (٥ - س) - (س - ١) \, دس$

$م = م_1 + م_2$.

٦ أوجد مساحة المنطقة المظللة فيما يلي:



① $د(س) = س^٢ - ١$

$ه(س) = س + ١$

$د(س) = ه(س)$

$س^٢ - ١ = س + ١$

$س^٢ - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$\boxed{س = ٢}$ ، $\boxed{س = -١}$

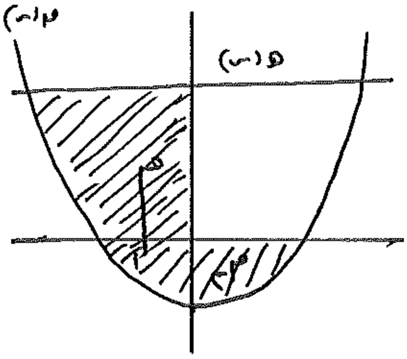
$د(س) = ٠ \leftarrow س^٢ - ١ = ٠ \leftarrow س = \pm ١$

$م_١ = \int_{-١}^{١} (س + ١) \, ءس$

$م_٢ = \int_{١}^{٢} (س + ١) - (س^٢ - ١) \, ءس$

$\therefore م = م_١ + م_٢$

② $د(س) = س^٢ - ٤$



$ه(س) = ٥$

$د(س) = ه(س)$

$س^٢ - ٤ = ٥$

$س^٢ = ٩$

$س = ٣$ ، $\boxed{-٣}$

$د(س) = ٠$

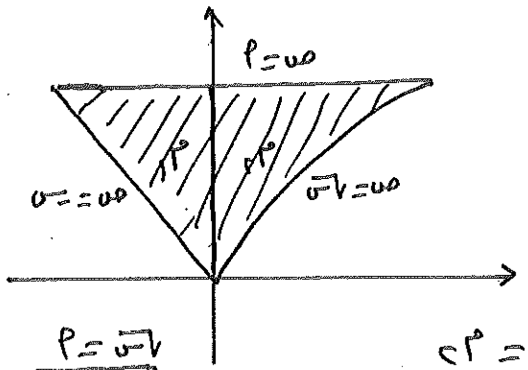
$س^٢ - ٤ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٢}$ ، $س = -٢$

$م_١ = \int_{-٣} ٥ - (س^٢ - ٤)$

$م_٢ = \int_{٠}^{٢} ٠ - (س^٢ - ٤) \, ءس$

$\therefore م = م_١ + م_٢$

٧ في الشكل المجاور إذا علمت أن محور الصادات يقسم المنطقة المظللة إلى قسمين متساويين أوجد قيمة الثابت أ



$م_١ = م_٢$

$\sqrt{س} = أ$

$\boxed{س = أ^٢}$

$-س = أ$

$\boxed{س = -أ}$

$\int_{-أ}^{٠} (أ + س) \, ءس = \int_{٠}^{أ^٢} أ - س^{\frac{١}{٢}}$

$\left[أس + \frac{س^٢}{٢} \right]_{-أ}^{٠} = \left[أس - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{أ^٢}$

$٠ - (-أ^٢ + \frac{أ^٢}{٢}) = أ^٣ - \frac{٢}{٣} أ^٣$

$أ^٢ - \frac{أ^٢}{٢} = \frac{١}{٣} أ^٣$

$\frac{١}{٢} \cancel{أ^٢} = \frac{١}{٣} \cancel{أ^٣}$ لأن أ ≠ ٠ (من الرسم)

$\therefore أ = \frac{٣}{٢}$

موقع الأوائل
AWA2EL
LEARN 2 BE
www.awa2el.net

الدائرة

[1] احداثيات مركز الدائرة التي تمر بالنقطة (٩ ، ٠) وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣) هو :

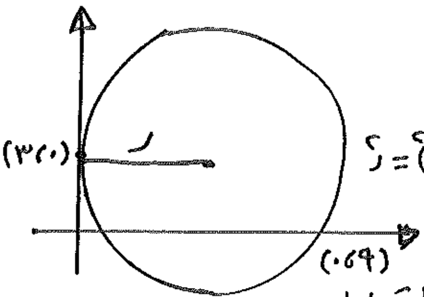
أ) (٤ ، ٣) ب) (٥ ، ٢)

جـ) (٤ ، ٢) د) (٥ ، ٣)

م = (ر ، ٣)

معادلتها :

(س - ر)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ر^٢



(٩ ، ٠) تحقق معادلتها :

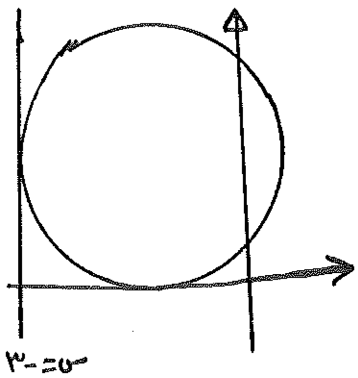
(٩ - ر)^٢ + ٩ = ر^٢ ← ٨١ - ١٨ر + ~~ر^٢~~ + ٩ = ~~ر^٢~~

١٨ر = ٩٠ ← ر = ٥ ∴ م = (٥ ، ٣) $\boxed{د}$

[2] ما طول نصف قطر الدائرة الممثلة في الشكل علماً بأن مركزها يقع على المستقيم س + ٣ص = ٥

أ) ٢ ب) ١

جـ) ٣ د) ٤



م = (-(٣ - ر) ، ر)

= (ر - ٣ ، ر) يحقق معادلة المستقيم

∴ ر - ٣ + ٣ر = ٥

٤ر = ٨ ← ر = ٢ $\boxed{أ}$

[3] دائرة مركزها (م ، م) وتمس كل من المستقيمين : ٢س + ٣ص = ١ ، ٣س - ٢ص = ٥ فإن قيمة الثابت م =

أ) ١ ب) -١ جـ) ١ ، -١ د) ٢

٢س + ٣ص - ١ = ٠ ، ٣س - ٢ص - ٥ = ٠

ر = |٢م + ٣م - ١| / ~~√١٣~~ = |٣م - ٢م - ٥| / ~~√١٣~~

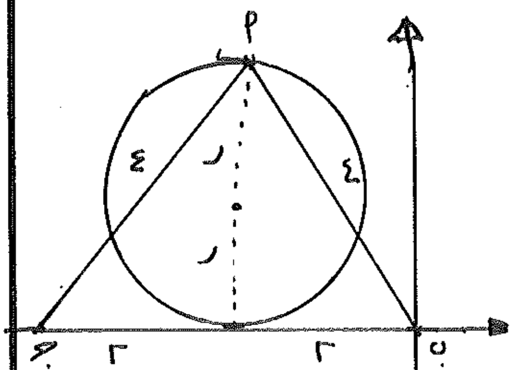
|٥م - ١| = |م - ٥|

٥م - ١ = م - ٥ ← ٤م = -٤ ← م = -١

٥م - ١ = ٥ - م ← ٦م = ٦ ← م = ١

∴ م = ١ ، -١ $\boxed{جـ}$

[4] ما معادلة الدائرة الممثلة في الشكل علماً بأن △ أ ب جـ متطابق الأضلاع طول ضلعه ٤ سم



أ) (س - ٢)^٢ + (ص - √٣)^٢ = ٣

ب) (س - ٢)^٢ + (ص - √٣)^٢ = ٩

جـ) (س + ٢)^٢ + (ص - √٣)^٢ = ٩

د) (س + ٢)^٢ + (ص - √٣)^٢ = ٣

م = (-٢ ، ر)

لكن (٤)^٢ = (٢)^٢ + (٢ر)^٢

١٦ = ٤ + ٤ر^٢ ← ر^٢ = ٣ ← ر = √٣

∴ معادلتها (س + ٢)^٢ + (ص - √٣)^٢ = ٣ $\boxed{د}$

٥ إذا كانت: س^{٢} + ص^{٢} + ٢س − ٨ص − ل = ٠ معادلة دائرة طول قطرها ٨ وحدات فإن الثابت ل =

أ) ١   ب) −١   جـ) −٢   د) ٢

م = (−½ × ٢ ، −½ × −٨) = (−١ ، ٤)

نق = √(١ + ١٦ + ل) = ٤ ← √(١٧ + ل) = ٤

∴ ١٧ + ل = ١٦ ← ل = −١ $\boxed{\text{ب}}$

٦ تمثل المعادلة:

س^{٢} + ص^{٢} − ٤س + ٢ص + ٤ = ٠ دائرة

أ) مركزها في الربع الأول وتمس المحورين

ب) مركزها في الربع الأول وتمس محور الصادات

جـ) مركزها في الربع الرابع وتمس محور الصادات

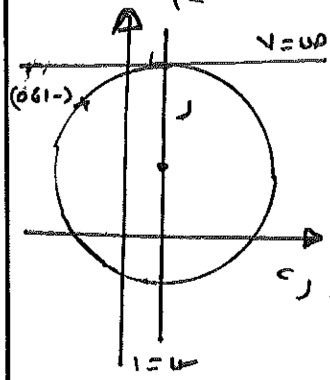
د) مركزها في الربع الرابع وتمس محور السينات

م = (−½ × −٤ ، −½ × ٢) = (٢ ، −١)

نق = √(٤ + ١ − ٤) = ١

∴ مركزها في الربع الرابع وتمس محور السينات $\boxed{\text{د}}$

٧ ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم س = ١ وتمس المستقيم ص = ٧ وتمر بالنقطة (−١ ، ٥)



م = (١ ، ٧ − نق)

معادلتها:

(س − ١)^{٢} + (ص − ٧ + نق)^{٢} = نق^{٢}

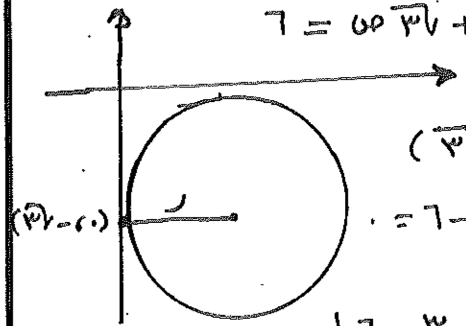
(−١ ، ٥) تحقق معادلتها:

٤ + (نق − ٢)^{٢} = نق^{٢} ← ٤ + $\cancel{\text{نق}^{٢}}$ − ٤نق + ٤ = $\cancel{\text{نق}^{٢}}$

٨ = ٤نق ← نق = ٢

∴ معادلتها: (س − ١)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٤

٨ ما معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −√٣) في الربع الرابع وتمس المستقيم س + √٣ ص = ٦



م = (نق ، −√٣)

س + √٣ ص − ٦ = ٠

∴ نق = |نق − ٣ − ٦| ÷ √(١ + ٣)

٢نق = |نق − ٩|

نق − ٩ = ٢نق   أو   نق − ٩ = −٢نق

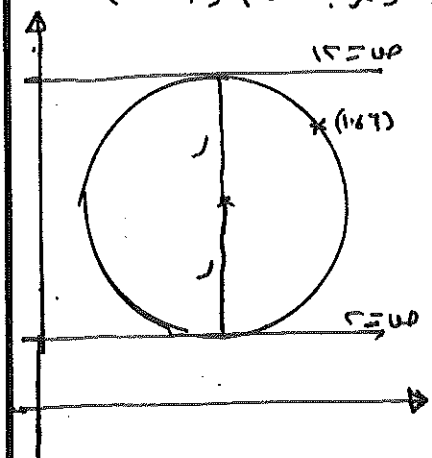
نق = −٩ ×   ٣نق = ٩

$\boxed{\text{نق} = ٣}$

∴ م = (٣ ، −√٣)

معادلتها: (س − ٣)^{٢} + (ص + √٣)^{٢} = ٩

٩ ما معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ص = ٢ ، ص = ١٢ وتمر بالنقطة (٦ ، ١٠)



٢نق = ١٢ − ٢

نق = ٥

م = (د ، ٧)

معادلتها:

(س − د)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٢٥ لكن (٦ ، ١٠) تحقق معادلتها

(٦ − د)^{٢} + ٩ = ٢٥ ← (٦ − د)^{٢} = ١٦

٦ − د = ٤   أو   ٦ − د = −٤

د = ٢   أو   د = ١٠

(س − ٢)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٢٥ ، (س − ١٠)^{٢} + (ص − ٧)^{٢} = ٢٥

[10] ما معادلة الدائرة التي نصف قطرها ٥ وحدات وتمر بالنقطة (٦ ، ٦) ويقع مركزها على المستقيم $\text{س} + \text{ص} = 5$.

$\text{م} = (\text{د} ، \text{ه})$ تحقق معادلة المستقيم :

$\text{د} + \text{ه} = 5 \longrightarrow \boxed{\text{د} = 5 - \text{ه}}$

$\therefore \text{م} = (5 - \text{ه} ، \text{ه})$

معادلتها : $(\text{س} - 5 + \text{ه})^2 + (\text{ص} - \text{ه})^2 = 25$

(٦ ، ٦) تحقق معادلتها :

$(1 + \text{ه})^2 + (6 - \text{ه})^2 = 25$

$1 + 2\text{ه} + \text{ه}^2 + 36 - 12\text{ه} + \text{ه}^2 = 25$

$2\text{ه}^2 - 10\text{ه} + 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} \text{ه}^2 - 5\text{ه} + 6 = 0$

$(\text{ه} - 3)(\text{ه} - 2) = 0 \longrightarrow \text{ه} = 3 ، \text{ه} = 2$

معادلتها : $(\text{س} - 2)^2 + (\text{ص} - 3)^2 = 25$

أو $(\text{س} - 3)^2 + (\text{ص} - 2)^2 = 25$

[11] ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور السينات وتمس المستقيم $\text{ص} = 1 - \text{س}$ عند النقطة (٤ ، -٣)

$\text{م} = (\text{د} ، 0)$ ، $\text{س} + \text{ص} - 1 = 0$

$\text{ر} = \dfrac{|\text{د} - 1|}{\sqrt{1 + 1}} \longrightarrow \sqrt{2}\,\text{ر} = |\text{د} - 1|$ ... ①

معادلتها :

$(\text{س} - \text{د})^2 + \text{ص}^2 = \text{ر}^2$ لكن (٤ ، -٣) تحقق معادلتها

$(4 - \text{د})^2 + 9 = \text{ر}^2$ ... ②

من ① نربع الطرفين : $2\text{ر}^2 = (\text{د} - 1)^2$

$\text{ر}^2 = \frac{1}{2}(\text{د} - 1)^2$ نعوض في ② ...

$16 - 8\text{د} + \text{د}^2 + 9 = \frac{1}{2}(\text{د}^2 - 2\text{د} + 1) \quad \times 2$

$32 - 16\text{د} + 2\text{د}^2 + 18 = \text{د}^2 - 2\text{د} + 1$

$\text{د}^2 - 14\text{د} + 49 = 0 \longrightarrow (\text{د} - 7)(\text{د} - 7) = 0$

$\therefore \text{د} = 7 \longrightarrow \sqrt{2}\,\text{ر} = |7 - 1| = 6$

$\therefore \text{ر} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

معادلتها :

$(\text{س} - 7)^2 + \text{ص}^2 = 18$

[12] ما معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين : (٤ ، ١) ، (٦ ، -٣) ويقع مركزها على المستقيم $4\text{س} + \text{ص} = 1$

نستخدم الصورة العامة :

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 2\text{ل}\,\text{س} + 2\text{ك}\,\text{ص} + \text{جـ} = 0$

$\text{م} = (-\text{ل} ، -\text{ك}) \longrightarrow -4\text{ل} - \text{ك} = 1$ ... ①

$(4 ، 1) \longrightarrow 16 + 1 + 8\text{ل} + 2\text{ك} + \text{جـ} = 0$

$8\text{ل} + 2\text{ك} + \text{جـ} = -17$ ... ②

$(6 ، -3) \longrightarrow 36 + 9 + 12\text{ل} - 6\text{ك} + \text{جـ} = 0$

$12\text{ل} - 6\text{ك} + \cancel{\text{جـ}} = -45$ ... ③ (نحذف جـ)

$-8\text{ل} - 2\text{ك} - \cancel{\text{جـ}} = 17$

$4\text{ل} - 8\text{ك} = -28 \;/\; 4 \longrightarrow \text{ل} - 2\text{ك} = -7$ ... ④

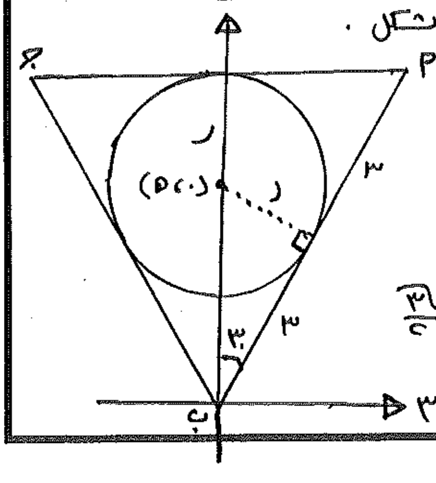
نضرب ① في -٢ $\longrightarrow$ $8\text{ل} + \cancel{2\text{ك}} = -2$

$9\text{ل} = -9 \longrightarrow \text{ل} = -1$

$\therefore \text{ك} = 3$ ، $\text{جـ} = -15$

معادلتها : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 2\text{س} + 6\text{ص} - 15 = 0$

[13] ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور الصادات وتمس أضلاع $\triangle$ أ ب جـ المتطابق الأضلاع علما بأن طول ضلعه ٦ سم كما في الشكل .



$\text{م} = (0 ، \text{ه})$

$\text{ظا}\,30 = \dfrac{\text{ر}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \text{ر} = \sqrt{3}$

$\text{جتا}\,30 = \dfrac{3}{\text{ه}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{ه} = 2\sqrt{3}$

$\text{س}^2 + (\text{ص} - 2\sqrt{3})^2 = 3$

القطع المكافئ

شرط: اي نقطة على القطع يكون:

بعدها عن البؤرة = بعدها عن الدليل.

لإيجاد معادلة بالصورة القياسية:

يلزم: ١) نوعه ٢) رأسه ٣) جـ

الصورة القياسية:

① سيني: (ص − هـ)^2 = ± ٤ جـ (س − د)

② صادي: (س − د)^2 = ± ٤ جـ (ص − هـ)

يمكن تحديد نوع القطع المكافئ من:

١) اتجاه فتحته

أو ٢) محور تماثله .

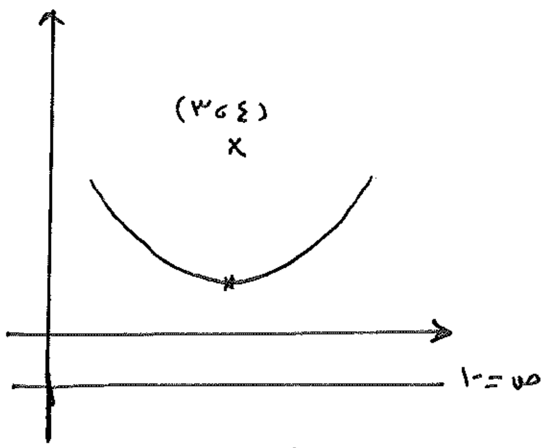
[١] ما معادلة قطع مكافئ احداثيات بؤرته (٤، ٣) ومعادلة دليله ص = −١

أ) (س − ٤)^2 = ٨ (ص − ١)

ب) (ص − ١)^2 = ٤ (س − ٤)

جـ) (س − ٤)^2 = ١٢ (ص − ١)

د) (ص − ١)^2 = ٨ (س − ٤)



رأسه = (٤، $\frac{٣-١}{٢}$) = (٤، ١)

∴ جـ = ٣ − ١ = ٢

معادلته: (س − ٤)^2 = ٨ (ص − ١) [أ]

[٢] ما معادلة قطع مكافئ محور تماثله يوازي محور السينات واحداثيات رأسه (−١، ٣) ويمر منحناه بمركز الدائرة التي معادلتها: (س + ٢)^2 + (ص − ١)^2 = ٤

أ) (س + ١)^2 = ١٦ (ص − ٣)

ب) (ص − ٣)^2 = −٤ (س + ١)

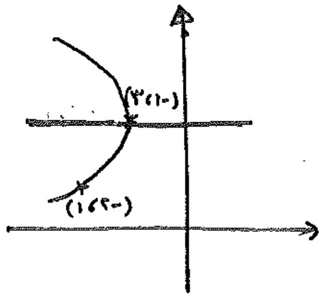
جـ) (س + ١)^2 = −٤ (ص − ٣)

د) (ص − ٣)^2 = −٨ (س + ١)

مركز الدائرة = (−٢، ١) ← يمر فيها القطع المكافئ

القطع سيني سالب

رأسه (−١، ٣)



معادلته:

(ص − ٣)^2 = −٤ جـ (س + ١)

(−٢، ١) تحقق معادلته:

٤ = −٤ جـ × −١ ← جـ = ١

∴ معادلته: (ص − ٣)^2 = −٤ (س + ١) [ب]

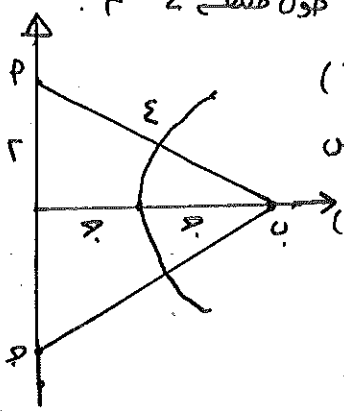
[٣] ما معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل والذي دليله محور الصادات وبؤرته النقطة ب والمثلث أ ب جـ متطابق الأضلاع طول ضلعه ٤ سم.

أ) ص^2 = √٣ (س − √٣)

ب) (س − √٣)^2 = √٣ ص

جـ) ص^2 = ٤√٣ (س − √٣)

د) (س − √٣)^2 = ٤ص



القطع سيني موجب.

رأسه: (جـ، ٠)

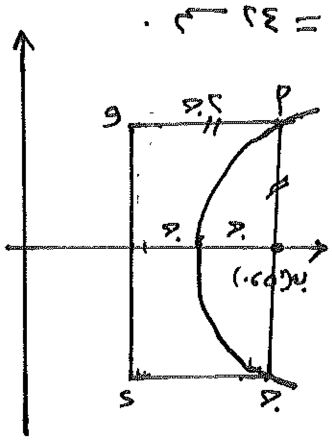
لكن (٤)^2 = (٢)^2 + (٢جـ)^2 ← ٤جـ^2 = ١٢

جـ^2 = ٣ ← جـ = √٣

معادلته: ص^2 = ٤√٣ (س − √٣) [جـ]

④ ما معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل والذي بؤرته النقطة ب(٥، ٠) ودليله د و ومحيط المستطيل أ جـ د و = ٢٤ سم .

أ) ص² = ٨ (س − ٣)
ب) ص² = ١٢ (س − ٣)
جـ) ص² = ١٦ (س − ١)
د) ص² = ٤ (س − ٤)

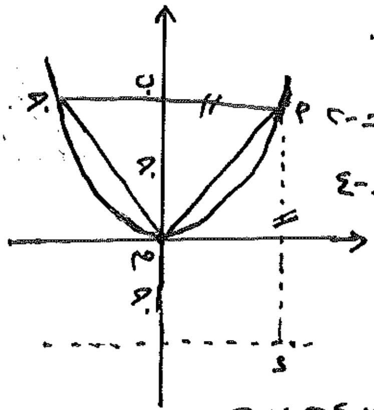


القطع سيني موجب
رأسه (د، ٠)
من شرط القطع : أب = أو = ٢جـ
محيط المستطيل = ٢(٤جـ + ٢جـ)
٢٤ = ١٢جـ ← جـ = ٢
∴ رأسه = (٥ − جـ، ٠) = (٣، ٠)
معادلته : ص² = ٨(س − ٣) [أ]

---

⑤ ما معادلة الدليل للقطع المكافئ المرسوم في الشكل علماً بأن مساحة △ م أ جـ = ٣٢ وحدة مربعة . وبؤرته النقطة ب .

أ) ص = −١ ب) ص = −٢
جـ) ص = −٣ د) ص = −٤



نرسم دليل للقطع
أد = أب = ٢جـ
مساحة المثلث = ½ × ٤جـ × جـ
٣٢ = ٢جـ² ← جـ² = ١٦
∴ جـ = ٤
معادلة الدليل ص = −٤ [د]

---

⑥ تتحرك النقطة ن (س، ص) على منحنى قطع مكافئ معادلته : (٣ص − ٣)² = ٣٢ س
ما أقل مسافة بين النقطة ن وبؤرة القطع ؟

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ١٦ د) ٨

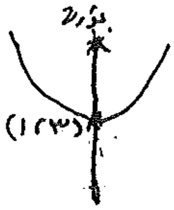
المطلوب : قيمة جـ .
(٣(ص − ١))² = ٣٢س
٤(ص − ١)² = ٣٢س ← (ص − ١)² = ٨س
∴ ٤جـ = ٨ ← جـ = ٢ [أ]

---

⑦ احداثيات بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته :
٤ص − س² + ٦س − ١٣ = ٠ هي :

أ) (٣، ١) ب) (٢، ٣) جـ) (٢، ١) د) (٣، ٢)

نكتب المعادلة بالصورة القياسية .
س² − ٦س = ٤ص − ١٣
+٩ +٩
(س − ٣)² = ٤ص − ٤
(س − ٣)² = ٤(ص − ١)



القطع صادي موجب
رأسه (٣، ١)
٤جـ = ٤ ← جـ = ١
بؤرته = (٣، ١+١) = (٣، ٢) [د]

---

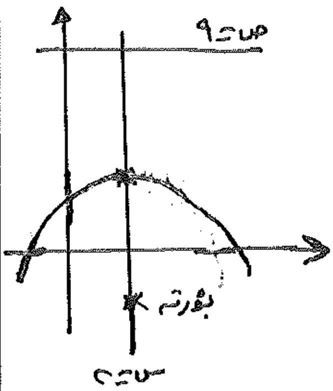
⑧ إذا كانت ص² + ٢ص = ٣س − ك هي معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة (٢، −١) فإن الثابت ك =

أ) −٢ ب) ٥ جـ) ٧ د) ٤

ص² + ٢ص = ٣س − ك
+١ +١
(ص + ١)² = ٣س − ك + ١
(ص + ١)² = ٣(س + (ك − ١)/٣)
رأسه = ((ك − ١)/٣، −١) = (٢، −١)
(ك − ١)/٣ = ٢ ← ك − ١ = ٦ ← ك = ٧ [جـ]

٩ قطع مكافئ معادلة محوره س = ٢ ومعادلة دليله ص = ٩ وتبعد بؤرته ٨ وحدات أسفل دليله فإن احداثيات رأسه هي :

أ) (٢، ١)   ب) (٢، ٣)   جـ) (٢، ٤)   د) (٢، ٥)



٢جـ = ٨

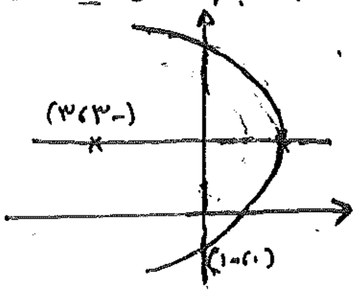
جـ = ٤

رأسه = (٢، ٩ − ٤)

= (٢، ٥)

$\boxed{د}$

١٠ ما معادلة القطع المكافئ الذي محور تماثله يوازي محور السينات ويمر منحناه بالنقطة (٠، −١) واحداثيات بؤرته (−٣، ٣) ويتجه نحو اليسار



القطع سيني سالب .

رأسه = (د، ٣)

جـ = د + ٣

معادلته :

(ص − ٣)^2 = −٤جـ (س − د)

(ص − ٣)^2 = −٤ (د + ٣) (س − د)

(٠، −١) تحقق معادلته :

(−٤)^2 = −٤ (د + ٣)(٠ − د)

١٦ = ٤د (د + ٣)   ÷ ٤

٤ = د^2 + ٣د ← د^2 + ٣د − ٤ = ٠

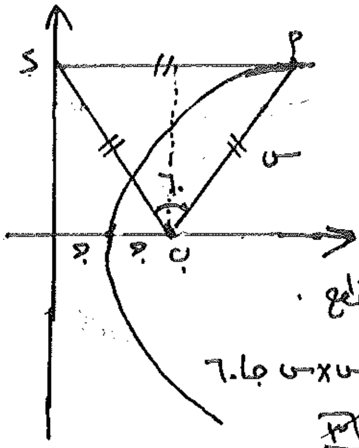
(د + ٤)(د − ١) = ٠

د = −٤ ، $\boxed{د = ١}$ ← جـ = ١ + ٣ = ٤

مرفوضة   ∴ معادلته :

لأن جـ = −٤ + ٣ = −١   (ص − ٣)^2 = −١٦ (س − ١)

١١ ما معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل علماً بأن مساحة △ أ ب د المتطابق الأضلاع تساوي ١٦ $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة وبؤرته النقطة ب



القطع سيني موجب

رأسه (جـ، ٠)

ولكن :

أب = أد

∴ محور الصادات دليل القطع .

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × س × س جا ٦٠

١٦ $\sqrt{٣}$ = $\frac{1}{2}$ س^2 × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

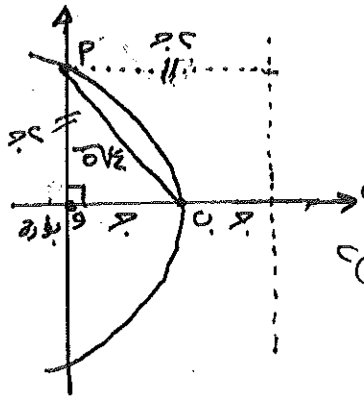
س^2 = ٦٤ ← س = ٨

∴ أد = ٨ لكن ٢جـ = $\frac{1}{2}$ أد

٢جـ = ٤ ← جـ = ٢ ← رأسه (٢، ٠)

∴ معادلة القطع : ص^2 = ٨ (س − ٢)

١٣ ما معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل علماً بأن بؤرته نقطة الأصل وطول أب = ٤ $\sqrt{٥}$ ؟



القطع سيني سالب

رأسه (جـ، ٠)

في △ أوجـ القائم الزاوية

(أب)^2 = (أو)^2 + (ب و)^2

٨٠ = ٤جـ^2 + جـ^2

٨٠ = ٥جـ^2 ← جـ^2 = ١٦

∴ جـ = ٤

معادلة القطع هي :

ص^2 = −١٦ (س − ٤)

١٣ ما معادلة القطع المكافئ المار بالنقطتين (٤،-٢) ، (٨،٦) ومعادلة محور تماثله س = ٢

نستخدم الصورة العامة .

القطع صادي لأن محور التماثل // محور ص

ص = أس² + ب س + جـ

لكن -ب/٢أ = ٢

∴ $\boxed{\text{ب} = -٤\text{أ}}$

(٤،-٢) ← -٢ = ١٦أ + ٤ب + جـ ... ①

(٨،٦) ← ٦ = ٦٤أ + ٨ب + جـ ... ②

نطرح جـ ← ~~٢ = -١٦أ - ٤ب - جـ~~

~~٦ = ٦٤أ + ٨ب + جـ~~

٨ = ٤٨أ + ٤ب　/٤

∴ ٢ = ١٢أ + ب　　لكن ب = -٤أ

٢ = ١٢أ - ٤أ ← ٢ = ٨أ ← أ = ١/٤

∴ ب = -٤ × ١/٤ ← ب = -١

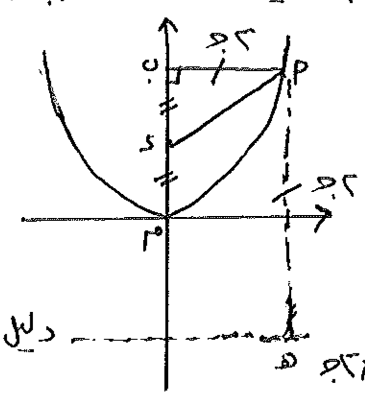
-٢ = ١٦ × ١/٤ + ٤ × -١ + جـ ← جـ = -٢

∴ معادلة القطع : ص = ١/٤ س² - س - ٢

١٤ ما معادلة القطع المكافئ المرسوم في الشكل علماً بأن

ب د = د أ ، ب : بؤرته ، م : نقطة الأصل

ومساحة Δ أ ب د القائم الزاوية = ١٨ وحدة مربعة



القطع صادي موجب

رأسه (٠،٠)

ب د = د أ = جـ/٢

نرسم دليل للقطع

أهـ = أب = ٢جـ

مساحة المثلث = ١/٢ × جـ/٢ × ٢جـ

١٨ = ١/٢ جـ² ← جـ² = ٣٦ ← جـ = ٦

معادلة القطع : س² = ٢٤ ص .

١٥ جد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته :

٨س - ٩ص² + ١٨ص - ٣٣ = صفر .

نحول الى الصورة القياسية .

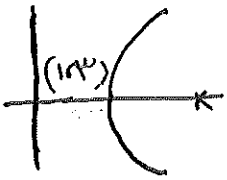
٩ص² - ١٨ص = ٨س - ٣٣

٩(ص² - ٢ص) = ٨س - ٣٣
　　+١　　　　　+٩

٩(ص-١)² = ٨س - ٢٤

٩(ص-١)² = ٨(س-٣)　/٩

(ص-١)² = ٨/٩ (س-٣)



القطع سيني موجب

رأسه (٣،١)

٤جـ = ٨/٩ ← جـ = ٢/٩

معادلة محور تماثل : ص = ١

بؤرته (٣ + ٢/٩ ، ١) = (٢٩/٩ ، ١)

معادلة دليله : س = ٣ - ٢/٩ ← س = ٢٥/٩

١٦ ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها عند رأس القطع المكافئ الذي معادلته : ص = -س - س²/٤ - ٥

ويمر منحناها ببؤرة هذا القطع .

س²/٤ - س = -ص - ٥　×٤

س² - ٤س = -٤ص - ٢٠
　+٤　　　　　+٤

(س-٢)² = -٤ص - ١٦

(س-٢)² = -٤(ص+٤)

صادي سالب ورأسه (٢،-٤) ، جـ = ١

بؤرته (٢،-٤-١) = (٢،-٥)

الدائرة : مركزها (٢،-٤)

معادلتها : (س-٢)² + (ص+٤)² = نق²

(٢،-٥) تحقق معادلتها : ٠ + ١ = نق² ← نق = ١

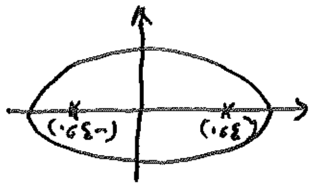
القطع الناقص والزائد

[١] قطع ناقص بؤرتاه $(\pm٤، ٠)$ وطول محوره الأصغر ٦ وحدات فإن معادلته:

أ) $\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{٢٥} = ١$ ب) $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$

جـ) $\frac{ص^{٢}}{٩} + \frac{س^{٢}}{٢٥} = ١$ د) $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

القطع سيني



م = (٠، ٠)

جـ = ٤ ، ٢ب = ٦

ب = ٣

لكن

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ١٦ = أ^{٢} - ٩ \leftarrow أ = ٥$

معادلته: $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ $\boxed{جـ}$

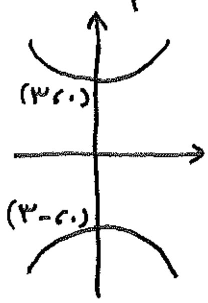
---

[٢] قطع زائد رأساه $(٠، \pm٣)$ واختلافه المركزي $= ١\frac{٢}{٣}$ فإن معادلته:

أ) $\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ ب) $\frac{س^{٢}}{٩} - \frac{ص^{٢}}{١٦} = -١$

جـ) $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{س^{٢}}{٩} = -١$ د) $\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = -١$

القطع صادي



م = (٠، ٠)

أ = ٣

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٣} \leftarrow \frac{جـ}{٣} = \frac{٥}{٣}$

∴ جـ = ٥

لكن $جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} \leftarrow ٢٥ = ٩ + ب^{٢} \leftarrow ب = ٤$

∴ معادلة القطع:

$\frac{ص^{٢}}{٩} - \frac{س^{٢}}{١٦} = ١$ × −١

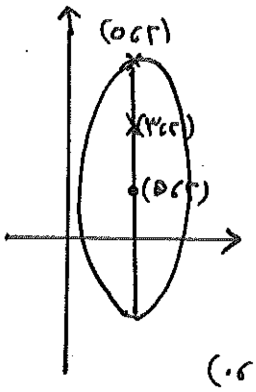
$\frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{ص^{٢}}{٩} = -١$ $\boxed{د}$

---

[٣] قطع ناقص أحد رأسيه (٢، ٥) والبؤرة القريبة من هذا الرأس (٢، ٣)، إذا كان بعده البؤري ٦ وحدات فإن معادلة محوره الأصغر

أ) س = ٢ ب) ص = ٠ جـ) س = ٠ د) ص = ٢

القطع صادي.



م = (٢، هـ)

أ − جـ = ٢

٢جـ = ٦ ← جـ = ٣

∴ أ − ٣ = ٢ ← أ = ٥

∴ م = (٢، ٥ − ٥) = (٢، ٠)

∴ معادلة محوره الأصغر هي ص = ٠ $\boxed{ب}$

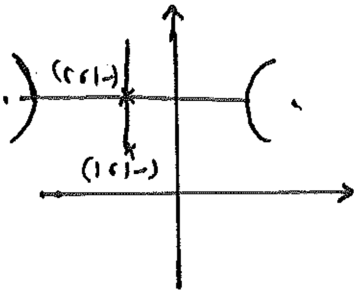
---

[٤] قطع زائد مركزه (−١، ٢) وأحد طرفي محوره المرافق (−١، ١)، إذا كان طول محوره القاطع ٤ وحدات فإن إحداثيات بؤرتيه:

أ) $(-١ \pm \sqrt{٥}، ٢)$ ب) $(-١، ٢ \pm \sqrt{٣})$

جـ) $(-١ \pm \sqrt{٣}، ٢)$ د) $(-١، ٢ \pm \sqrt{٥})$

القطع سيني.



م = (−١، ٢)

ب = ١

٢أ = ٤ ← أ = ٢

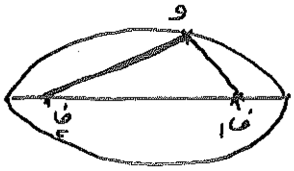
$جـ^{٢} = ٤ + ١ \leftarrow جـ = \sqrt{٥}$

∴ بؤرتيه: $(-١ \pm \sqrt{٥}، ٢)$ $\boxed{أ}$

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net

[٥] قطع ناقص بؤرتاه ف١ ، ف٢ والنقطة و تقع على منحناه بحيث أن محيط △ و ف١ ف٢ = ١٦ وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات فإن مساحته =

أ) ١٢π ب) ٢٠π ج) ١٥π د) ٤٠π



محيط المثلث = ٢أ + ٢ج

١٦ = ٢أ + ٢ج

٨ = أ + ج

لكن ٢أ = ١٠ ← أ = ٥ ← ج = ٣

ج² = أ² − ب² ← ٩ = ٢٥ − ب² ← ب = ٤

∴ مساحته = π أ ب = π × ٥ × ٤ = ٢٠π [ب]

[٦] قطع زائد فيه طول محوره القاطع مثلي طول محوره المرافق فما اختلافه المركزي ؟

أ) √٥ ب) √٥/٢ ج) ٢√٥ د) √٥/٤

٢أ = ٢ × ٢ب ← أ = ٢ب ← ب = أ/٢

لكن ج² = أ² + ب² ← ج² = أ² + أ²/٤

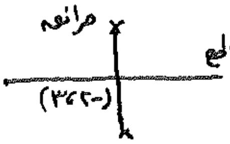
∴ ج² = ٥أ²/٤ ← ج²/أ² = ٥/٤ ← ج/أ = √٥/٢

[ب]

[٧] احداثيات نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته : (ص−٣)² − (س+٢)² = −١ هما :

أ) (−٢ ± ١ ، ٣) ب) (−٢ ، ٣ ± ١)

ج) (٢ ± ١ ، −٣) د) (٢ ، −٣ ± ١)



نحول الى الصورة القياسية

(س+٢)² − (ص−٣)² = ١

القطع سيني ، أ² = ١ ← أ = ١

م = (−٢ ، ٣) ب² = ١ ← ب = ١

طرفا المرافق = (−٢ ، ٣ ± ١) [ب]

[٨] قطع ناقص معادلته : ٨س² + ٤ص² = أ وطول محوره الأصغر ٦ وحدات فإن الثابت أ =

أ) ١٢ ب) ٢٤ ج) ٣٦ د) ٧٢

نحول الى الصورة القياسية بالقسمة على أ

٨س²/أ + ٤ص²/أ = ١

٢ب = ٦

س²/(أ/٨) + ص²/(أ/٤) = ١   [ب = ٣]

القطع صادي لأن أ/٤ > أ/٨

ب² = أ/٨

٩ = أ/٨ ← أ = ٧٢ [د]

[٩] قطع زائد معادلته : س²/٨ − ص²/ب² = ١ واختلافه المركزي = √٣ فإن طول محوره المرافق =

أ) ٤ ب) ٤√٢ ج) ٨ د) ٢√٢

أ² = ٨ ← أ = √٨

ج/أ = √٣ ← ج/√٨ = √٣

∴ ج = √٢٤

لكن ج² = أ² + ب² ← ٢٤ = ٨ + ب²

ب = ٤ ← ٢ب = ٨ [ج]

[١٠] الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي معادلته (٣ص+٩)² + ٤(س−١)² = ٣٦ يساوي :

أ) √١٣/٣ ب) √٥/٢ ج) √١٣/٢ د) √٥/٣

٩(ص+٣)² + ٤(س−١)² = ٣٦ /٣٦

(ص+٣)²/٤ + (س−١)²/٩ = ١

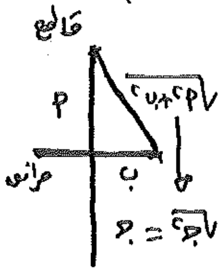
أ² = ٩ ← أ = ٣   ∴ هـ = ج/أ = √٥/٣

ب² = ٤ ← ب = ٢

ج² = ٥ ← ج = √٥ [د]

11 معادلة قطع زائد هي $ص^2 - 4س^2 = 16$
ما البعد بين طرفي محوري القاطع والمرافق.

أ) $\sqrt{5}$ ب) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ج) $2\sqrt{5}$ د) 5



$\frac{ص^2}{16} - \frac{4س^2}{16} = 1$

$\frac{ص^2}{16} - \frac{س^2}{4} = 1$

القطع صادي.

$أ^2 = 16$ ، $ب^2 = 4$

$ج^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow ج^2 = 20 \leftarrow ج = \sqrt{20}$

المطلوب: البعد $= ج = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ $\boxed{ج}$

12 يمثل القطع المخروطي الذي معادلته:

$(ص-1)^2 = 3س^2 + ص^2 - 5س$

أ) دائرة ب) قطع مكافئ ج) قطع ناقص د) قطع زائد

$\cancel{ص^2} - 2ص + 1 = 3\cancel{س^2} + ص^2 - 5س$

$ص^2 + 2ص - 5س - 1 = 0$. مكافئ $\boxed{ب}$

13 قيم م التي تجعل المعادلة $\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{م^2-4} = 1$
قطعا زائدا هي:

أ) $(-2، 2)$ ب) $(-2، 0)$

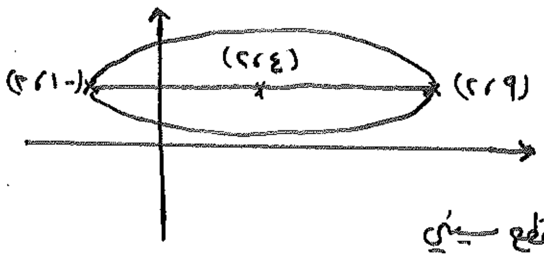
ج) $(0، 2)$ د) $(-\infty، -2)$ ، $(2، \infty)$

$م^2 - 4 < 0$

$(م-2)(م+2) < 0$

∴ $م = (-2، 2)$ $\boxed{أ}$

14 جد معادلة قطع ناقص رأساه: $(-1، 2)$
$(9، 2)$ وبعده البؤري 8 وحدات.



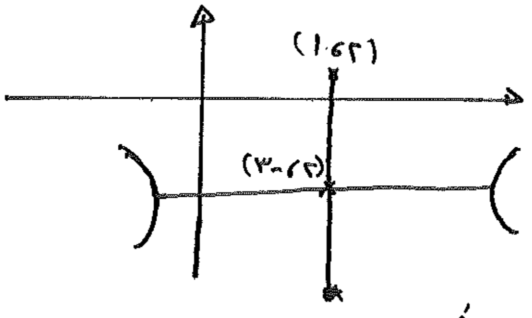
القطع سيني

$م = (4، 2)$ ، $أ = 5$ ، $2ج = 8 \leftarrow ج = 4$

$ج^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow 16 = 25 - ب^2 \leftarrow ب = 3$

معادلته: $\frac{(س-4)^2}{25} + \frac{(ص-2)^2}{9} = 1$

15 جد معادلة قطع زائد مركزه $(2، -3)$ وأحد
طرفي محوره المرافق $(2، 1)$ واختلافه المركزي $= \frac{3}{\sqrt{5}}$



القطع سيني

$م = (2، -3)$ ، $ب = 4$

$\frac{ج}{أ} = \frac{3}{\sqrt{5}} \leftarrow ج = \frac{3}{\sqrt{5}} أ$

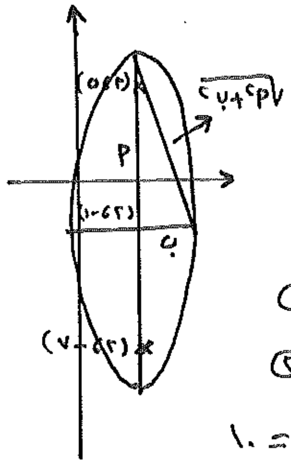
$ج^2 = أ^2 + ب^2 \leftarrow \frac{9}{5} أ^2 = أ^2 + 16$

∴ $\frac{4}{5} أ^2 = 16 \leftarrow أ^2 = 20$

معادلته:

$\frac{(س-2)^2}{20} - \frac{(ص+3)^2}{16} = 1$

١٦ ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه $(٢،٥)$ ، $(٢،-٧)$ والبعد بين طرفي محوريه الأكبر والأصغر $= ٣\sqrt{٤١}$



القطع صادي

$م = (٢،-١)$

$ج = ٦$

$\sqrt{أ^{٢}+ب^{٢}} = ٣\sqrt{٤١}$

$أ^{٢}+ب^{٢} = ١٦٤ \; ... ①$

$أ^{٢}-ب^{٢} = ٣٦ \; ... ②$

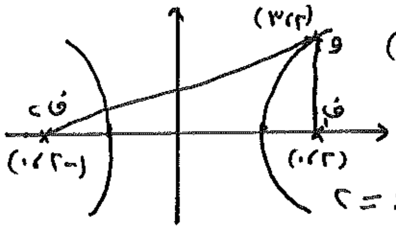
$\therefore ٢أ^{٢} = ٢٠٠ \leftarrow أ = ١٠$

$\therefore ١٠٠ - ب^{٢} = ٣٦ \leftarrow ب^{٢} = ٦٤ \leftarrow ب = ٨$

معادلته:

$$\frac{(ص+١)^{٢}}{١٠٠} + \frac{(س-٢)^{٢}}{٦٤} = ١$$

١٧ ما معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ويمر منحناه بالنقطة $(٢،٣)$ وإحدى بؤرتيه $(٢،٠)$



البؤرة الأخرى $(-٢،٠)$

القطع سيني

$م = (٠،٠)$ ، $ج = ٢$

حسب شرط القطع:

$٢أ = وفَ - وف = \sqrt{(٤)^{٢}+(٣)^{٢}} - ٣$

$٢أ = ٥ - ٣ = ٢ \leftarrow أ = ١$

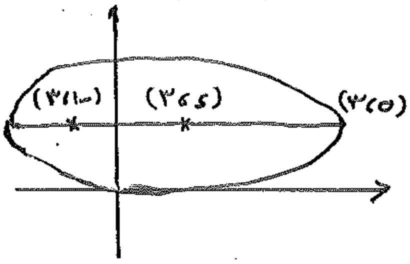
$ج^{٢} = أ^{٢}+ب^{٢} \leftarrow ٤ = ١ + ب^{٢}$

$\therefore ب^{٢} = ٣$

معادلته:

$$\frac{س^{٢}}{١} - \frac{ص^{٢}}{٣} = ١$$

١٨ ما معادلة قطع ناقص أحد رأسيه $(٥،٣)$ والبؤرة البعيدة عن هذا الرأس $(-١،٣)$ وبعده البؤري نصف طول محوره الأكبر.



القطع سيني

$م = (د،٣)$

$أ + ج = ٦$

$٢ج = \frac{١}{٢} \times ٢أ$

$٢ج = أ$

$\therefore ٢ج + ج = ٦ \leftarrow ٣ج = ٦ \leftarrow ج = ٢$

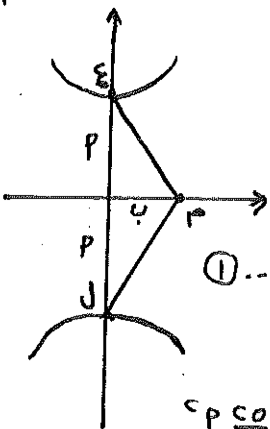
$\therefore أ = ٢\times٢ = ٤$

$ج^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} \leftarrow ٤ = ١٦ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ١٢$

حل $أ = ٥ - د \leftarrow ٤ = ٥ - د \leftarrow د = ١$

$\therefore$ معادلته: $\frac{(س-١)^{٢}}{١٦} + \frac{(ص-٣)^{٢}}{١٢} = ١$

١٩ ما معادلة القطع الزائد المرسوم في الشكل علماً بأن مركزه نقطة الأصل ومساحة $\triangle ل م ع = ٤٨$ حيث م: أحد طرفي محوره المرافق واختلافه المركزي $= \frac{٥}{٣}$



القطع صادي.

$م = (٠،٠)$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٢أ \times ب$

$= أب = ٤٨ \; ... ①$

$\frac{ج}{أ} = \frac{٥}{٣} \leftarrow ج = \frac{٥}{٣}أ$

$ج^{٢} = أ^{٢}+ب^{٢} \leftarrow أ^{٢}+ب^{٢} = \frac{٢٥}{٩}أ^{٢}$

$\therefore \frac{١٦}{٩}أ^{٢} = ب^{٢} \leftarrow ب = \frac{٤}{٣}أ$

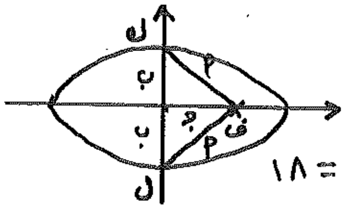
بالتعويض في ① ... $أ \times \frac{٤}{٣}أ = ٤٨$

$٤أ^{٢} = ٤٨\times٣ \leftarrow أ^{٢} = ٣٦ \leftarrow أ = ٦$

$\therefore ب = \frac{٤}{٣}\times٦ = ٨$

معادلته: $\frac{ص^{٢}}{٣٦} - \frac{س^{٢}}{٦٤} = ١$

[٢٠] ما معادلة القطع الناقص المرسوم في الشكل الذي مركزه نقطة الأصل . محيط △ ل ف ل = ١٨ حيث ف : بؤرته واختلافه المركزي = ٠٫٦ .



القطع سيني .

م = (٠ ، ٠)

محيط المثلث = ٢ب + ٢أ = ١٨

أ + ب = ٩ ... (١)

$\frac{جـ}{أ} = \frac{٣}{٥}$ ← جـ = $\frac{٣}{٥}$ أ ... (٢)

جـ² = أ² − ب² ← $\frac{٩}{٢٥}$ أ² = أ² − ب²

$\frac{١٦}{٢٥}$ أ² = ب² ← ب = $\frac{٤}{٥}$ أ بالتعويض في (١) ...

$\frac{٤}{٥}$ أ + أ = ٩ ← $\frac{٩}{٥}$ أ = ٩ ← أ = ٥

∴ ب = ٤

معادلته : $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

[٢١] ما معادلة قطع زائد أحد رأسيه هو بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته (٢ص − ٢)² = ١٦س + ٤٨ واختلافه المركزي $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، معادلة محوره المرافق ص = ٤

القطع المكافئ : نحول الى صورة قياسية

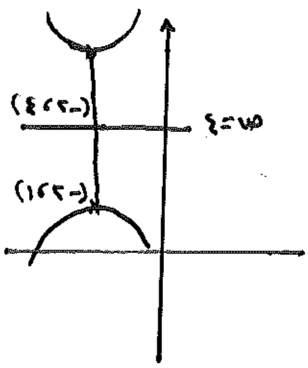
٤(ص − ١)² = ١٦(س + ٣) /٤

(ص − ١)² = ٤(س + ٣)

القطع سيني موجب ورأسه (−٣ ، ١)

٤جـ = ٤ ← جـ = ١

∴ بؤرته = (−٣ + ١ ، ١) = (−٢ ، ١)



القطع الزائد :

أحد رأسيه (−٢ ، ١)

معادلة محوره المرافق

ص = ٤

∴ القطع صادي .

م = (−٢ ، ٤)

أ = ٣ لكن $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

∴ $\frac{جـ}{٣} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ← جـ = ٢$\sqrt{٣}$

جـ² = أ² + ب² ← ١٢ = ٩ + ب² ← ب² = ٣

معادلته : $\frac{(ص-٤)^٢}{٩} - \frac{(س+٢)^٢}{٣} = ١$

[٢٢] قطع زائد معادلته :

٥س² − ٢ص² + ١٠س = ١٢ص − ٧ ، جد :

١) احداثيات بؤرتيه

٢) احداثيات نهايتي محوره المرافق

٣) معادلة محوره القاطع ٤) بعده البؤري .

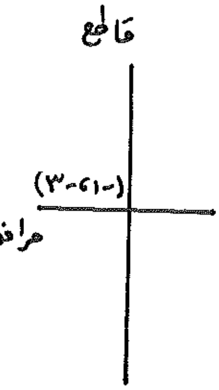
نحول الى الصورة القياسية بإكمال مربع .

٥(س² + ٢س) − ٢(ص² + ٦ص) = −٧ + ٥ − ١٨
(+١) (+٩)

٥(س + ١)² − ٢(ص + ٣)² = −٢٠   /−٢٠

$\frac{(ص+٣)^٢}{١٠} - \frac{(س+١)^٢}{٤} = ١$

القطع صادي .



م = (−١ ، −٣)

أ² = ١٠ ← أ = $\sqrt{١٠}$

ب² = ٤ ← ب = ٢

جـ² = ١٤ ← جـ = $\sqrt{١٤}$

١) بؤرتيه = (−١ ، −٣ ± $\sqrt{١٤}$)

٢) نهايتا محوره المرافق = (−١ + ٢ ، −٣) = (١ ، −٣)

(−١ − ٢ ، −٣) = (−٣ ، −٣)

٣) معادلة محوره القاطع : س = −١

٤) بعده البؤري = ٢جـ = ٢$\sqrt{١٤}$

[٢٣] للقطع المخروطي الذي معادلته:

$(س-٢)^{٢} + (ص+٣)^{٢} = ١٠ - ٢ص^{٢}$ ، جد:

١) احداثيات مركزه ٢) احداثيات رأسيه

٣) طولي محوري تماثله ٤) اختلافه المركزي.

نحول الى الصورة القياسية.

$(س-٢)^{٢} + ص^{٢} + ٦ص + ٩ = ١٠ - ٢ص^{٢}$

$(س-٢)^{٢} + ٣ص^{٢} + ٦ص = ١$

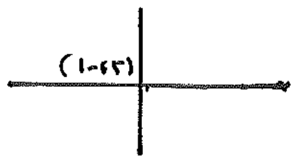
$(س-٢)^{٢} + ٣(ص^{٢} + ٢ص) = ١$

$+١ \qquad +٣$

$(س-٢)^{٢} + ٣(ص+١)^{٢} = ٤ \quad /٤$

$\frac{(س-٢)^{٢}}{٤} + \frac{(ص+١)^{٢}}{\frac{٤}{٣}} = ١$

القطع سيني ومركزه (٢،-١)



$أ^{٢} = ٤ \leftarrow أ = ٢$

$ب^{٢} = \frac{٤}{٣} \leftarrow ب = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

$ج^{٢} = ٤ - \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

$ج = \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٣}}$

احداثيات رأسيه = (٢+٢،-١) ، (٢-٢،-١)

= (٤،-١) ، (٠،-١)

طول محوره الاصغر = ٢ب = $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$

طول محوره الاكبر = ٢أ = ٢×٢ = ٤

$هـ = \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

الحل الهندسي.

[١] معادلة الحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث أن بعدها عن النقطة (٢،-١) يساوي دائماً بعدها عن المستقيم ص = ٣ هي:

أ) $(ص-١)^{٢} = ٨(س-٢)$

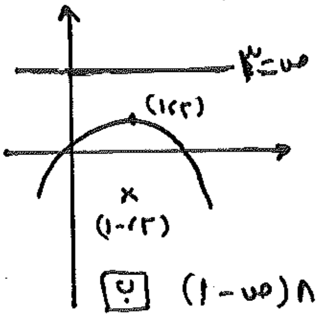
ب) $(س-٢)^{٢} = -٨(ص-١)$

ج) $(س-٢)^{٢} = ٨(ص-١)$

د) $(ص-١)^{٢} = -٨(س-٢)$

الحل الهندسي هو قطع مكافئ بؤرته (٢،-١) ودليله ص = ٣

القطع صادي سالب



رأسه = $(٢، \frac{٣+-١}{٢})$

= (٢،١)

ج = ٣-١ = ٢

معادلته: $(س-٢)^{٢} = -٨(ص-١)$ [ب]

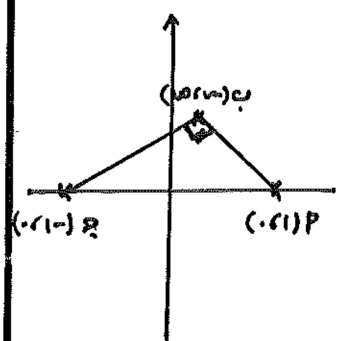
[٣] الحل الهندسي للنقطة ب(س،ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يبقى Δأبج قائم الزاوية في ب حيث أ(١،٠) ، ج(-١،٠) هو:

أ) دائرة ب) قطع مكافئ ج) قطع ناقص د) قطع زائد

ميل أب × ميل ب ج = -١

$\frac{ص}{س-١} \times \frac{ص}{س+١} = -١$

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}-١} = -١$



$ص^{٢} = ١ - س^{٢}$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$ معادلة دائرة

[أ]

③ المحل الهندسي للنقطة (س، ص) التي تتحدد موقعها بالمعادلتين:

ص = جتا²هـ ، س = جا٢هـ هو:

أ) دائرة ب) قطع مكافئ ج) قطع ناقص د) قطع زائد

س = جا٢هـ = ٢جاهـ جتاهـ

∴ س² = ٤ جا²هـ جتا²هـ

س² = ٤(١ − جتا²هـ) × جتا²هـ لكن جتا²هـ = ص

س² = ٤(١ − ص) × ص

س² = ٤ص − ٤ص²

∴ س² + ٤ص² = ٤ص

معادلة قطع ناقص $\boxed{ج}$

④ معادلة المحل الهندسي للنقطة التي تتحدد موقعها بالمعادلتين:

$ص = \sqrt{٤ - هـ^{ن}}$ ، ن = ٢لوس ،

هـ: العدد النيبيري ، ن ∈ ح

أ) س² − ص² = ٤ ب) س² + ص² = ٤

ج) ص² − س² = ٤ د) س² − ص² = ٢

$ص = \sqrt{٤ - هـ^{ن}}$

$ص^٢ = ٤ - هـ^{ن}$ لكن ن = ٢لوس

$∴ ص^٢ = ٤ - هـ^{٢لوس}$

$ص^٢ = ٤ - \cancel{هـ}^{\cancel{لو}س^٢}$

ص² = ٤ − س²

ص² + س² = ٤

$\boxed{ب}$

⑤ ما المحل الهندسي ومعادلته لنقطة تتحرك في المستوى بحيث أن:

① بعدها عن المستقيم ٣س + ٤ص = ٦ يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن محور الصادات. وتمر أثناء حركتها بالنقطة (١، −٣) معادلته س = ٠

بعد (س، ص) عن المستقيم = ٣ × بعد (س، ص) عن محور ص

$\frac{|٣س + ٤ص - ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = ٣ \times \frac{|١س|}{\sqrt{١ + ٠}}$

$\frac{|٣س + ٤ص - ٦|}{٥} = ٣|س|$

|٣س + ٤ص − ٦| = ١٥|س|

٣س + ٤ص − ٦ = ١٥س ⟵ −١٢س + ٤ص − ٦ = ٠

أو ٣س + ٤ص − ٦ = −١٥س ⟵ ١٨س + ٤ص − ٦ = ٠

نعوض النقطة (١، −٣) في المعادلتين ⟵ تحقق الثانية

∴ المحل الهندسي هو خط مستقيم معادلته:

١٨س + ٤ص − ٦ = ٠

② بعدها عن المستقيم الذي معادلته ص = ٤ يزيد وحدتين عن بعدها عن النقطة (٠، ٣) علماً بأن ص > ٤

بعد (س، ص) عن المستقيم = بعد (س، ص) عن النقطة + ٢

$\frac{|ص - ٤|}{\sqrt{٠ + ١}} = \sqrt{س^٢ + (ص - ٣)^٢} + ٢$

لكن ص > ٤ ⟵ |ص − ٤| = ص − ٤

$ص - ٤ = \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ٦ص + ٩} + ٢$

$ص - ٦ = \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ٦ص + ٩}$

$\cancel{ص^٢} - ١٢ص + ٣٦ = س^٢ + \cancel{ص^٢} - ٦ص + ٩$

س² + ٦ص = ٢٧ وهي معادلة قطع مكافئ

موقع الأوائل
AWA2EL LEARN 2 BE
www.awa2el.net