المراد في الرياضيات

ثاني ثانوي

2005

أدبي

الفصل الأول

الأستاذ : معتصم عدنان Tel:0799397737

توجيهي

المنهاج الجديد

الوحدة الأولى :
الاقترانات الأسية واللوغاريتمية :

* الدرس الأول :
الاقترانات الأسية :-

* هو اقتران يكون فيه المتغير في الأس وليس في الأساس ويكون الأساس عدد ثابت :

* الصورة العامة :

$$f(x) = ab^x \quad , \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix} \quad , \quad b > 0$$

مثال 1 : أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

① $f(x) = 2(4)^x \quad , \quad x = 3$

$f(3) = 2(4)^3 = 2(64) = 128$

② $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 \quad , \quad x = -2$

$f(-2) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 4 = 3\frac{(1)^{-2}}{(2)^{-2}} - 4$

$= 3(4) - 4 = 12 - 4 = 8$

③ $f(x) = 5(3)^x \quad , \quad x = 4$

$f(4) = 5(3)^4 = 5(81) = 405$

④ $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 \quad , \quad x = -1$

$f(-1) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 1$

$= 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$

$$*\left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \frac{(1)^{-x}}{a^{-x}} = (1)\,a^x = a^x$$

* التمثيل البياني للاقتران الأسي :-

* إنشاء جدول ، تحديد أزواج مرتبة تمثيل الأزواج المرتبة ، التوصيل.

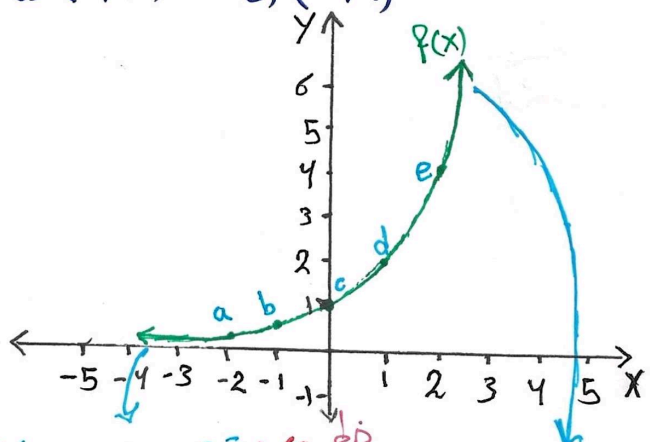
مثال 2 : إذا كان $f(x) = 2^x$ فأجب عما يلي :-

① أمثل الاقتران بيانياً ، ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

* ننشئ جدول

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

a) $(-2, \frac{1}{4})$ b) $(-1, \frac{1}{2})$ c) $(0, 1)$
d) $(1, 2)$ e) $(2, 4)$



يقترب من محور X لكن لا يلمسه ← خط تقارب أفقي ← يقترب مقترب إلى اللانهاية

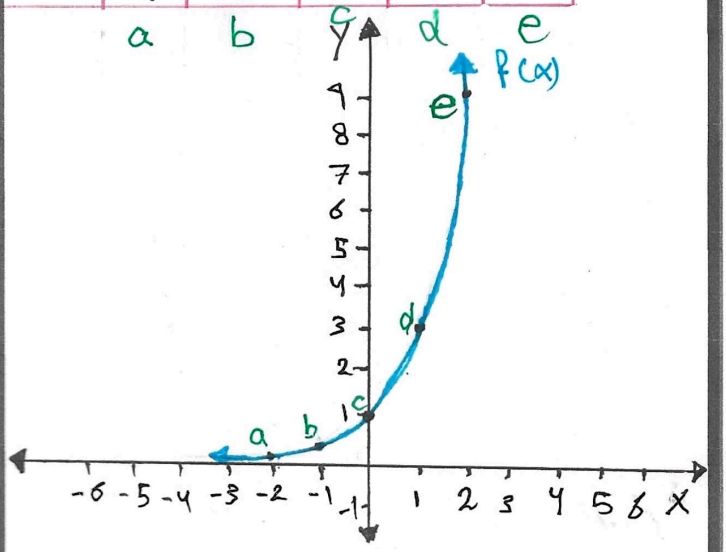
مجاله : $\mathbb{R}$ ، مداه : $(0, \infty)$ ، متزايد

اقتران 1-1 باستخدام اختبار الخط الأفقي.

② $f(x)=3^x$

ارسم الاقتران بيانياً ثم صف مجاله ومداه وخصائصه وخطوط التقارب.

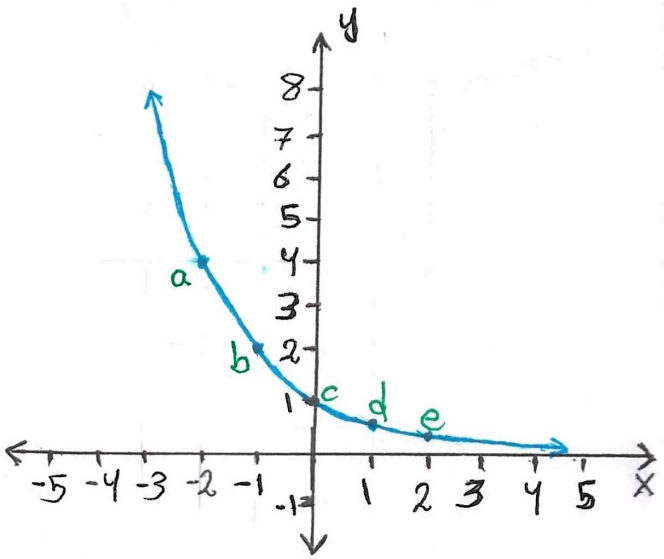
x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
	a	b	c	d	e



* المجال: $\mathbb{R}$ * المدى: $(0,\infty)$ * متزايد
* اقتران 1-1 باستخدام اختبار الخط الأفقي
* لا يوجد مقطع مع المحور X
* يقطع المحور Y عند $x=0$ $(0,1)$
* يوجد خط تقارب أفقي وهو المحور X

③ $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x,y)	(-2,4)	(-1,2)	(0,1)	$(1,\frac{1}{2})$	$(2,\frac{1}{4})$
	a	b	c	d	e



* المجال: $\mathbb{R}$ * المدى: $(0,\infty)$
* متناقص
* اقتران 1-1 باستخدام اختبار الخط الأفقي
* لا يوجد مقطع مع المحور X.
* يقطع المحور Y عند $(0,1)$
* يوجد خط تقارب أفقي وهو المحور X

④ $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ h.w

سؤال: من خلال الأمثلة السابقة ماذا نلاحظ:

1) المجالات جميعها $\mathbb{R}$
2) المدى للجميع $(0, \infty)$
3) متزايد إذا $b>1$
4) متناقص إذا $0<b<1$
5) يوجد لجميع الاقترانات خط تقارب أفقي وهو المحور X.
6) الاقترانات جميعها تقطع المحور Y في $(0,a)$ فقط
7) جميع الاقترانات لم تقطع المحور X
8) جميع الاقترانات $1-1$

$f(x) = a\,b^x$

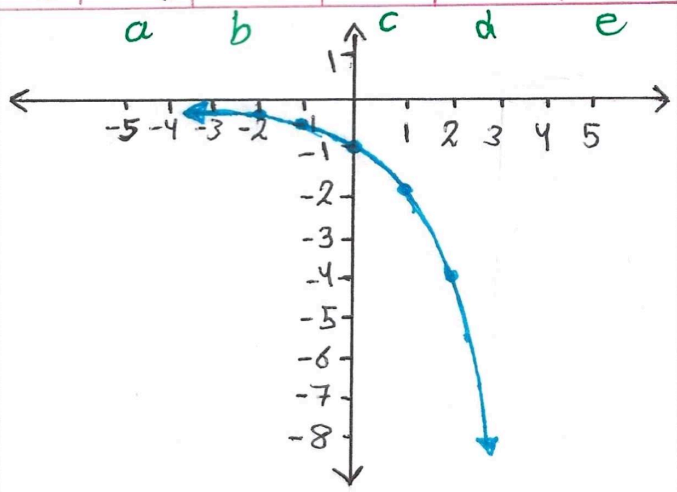
- $b>1$ متزايد
- $0<b<1$ متناقص
- $(0,a)$ تقاطع مع Y

* المجال $\mathbb{R}$
* المدى $(0, \infty)$
* $1-1$
* يوجد خط تقارب افقي هو محور X

مثال 3:

$f(x) = (-1)2^x$

X	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	-4
(x,y)	$(-2, \frac{-1}{4})$	$(-1, \frac{-1}{2})$	$(0,-1)$	$(1,-2)$	$(2,-4)$



* نلاحظ مايلي:- (بالمقارنة مع مثال 2 ①)
عند ضرب $f(x)=2^x$ بـ سالب لاحظنا مايلي:

① إنعكاس منحنى الاقتران $f(x)$ حول المحور X ( )

② تغير مدى الاقتران من $(0,\infty)$ إلى $(-\infty,0)$

③ تحول الاقتران من متزايد إلى متناقص

* نتيجة:-
إذا كانت قيمة (a) سالبة فإن منحنى الاقتران ينعكس حول المحور X
كما في المثالين مثال 2 ①
③ مثال

* $f(x) = a\,b^x$

* الصورة الثانية للاقتران الأسي :

* $f(x) = ab^{x-h} + k$
* $a, b, h, k \in \mathbb{R}$ ← أعداد حقيقية
* $a, b > 0$, $b \neq 1$

مثال 4:

① $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

② $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$

مثال 5: جد قيم a , b , h , k لكل مما يلي:

① $5(3)^{x+1} - 2$

$a = 5$, $b = 3$, $h = -1$, $k = -2$

② $7(2)^{-x} + 3$

$a = 7$, $b = \frac{1}{2}$, $h = 0$, $k = 3$

* قاعدة :

إذا جاء الاقتران الأسي بالصورة الثانية $f(x) = ab^{x-h} + k$ فإن :-

1) المجال $\mathbb{R}$ 2) المدى (k, ∞)

3) متزايد إذا كان $b > 1$

4) متناقص إذا كان $0 < b < 1$

5) للاقتران خط تقارب افقي وهو المستقيم $y = k$

مهمة

مثال 6: أجد خط التقارب الافقي لكل اقتران مما يأتي ثم اجد مجاله ومداه مبيناً إن كان متناقصاً أم متزايداً:

① $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

* أولاً نجد قيم a , b , h , k

$a = 5$, $b = 3$, $h = -1$, $k = -2$

* خط التقارب الأفقي هو $y = -2$
* مجاله $\mathbb{R}$ * مداه: $(-2, \infty)$
* متزايد لأن $b > 1$

② $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$

$a = 7$, $b = \frac{1}{2}$, $h = 0$, $k = 3$

* خط التقارب الافقي هو $y = 3$
* مجاله $\mathbb{R}$ * مداه: $(3, \infty)$
* متناقص لان $b = \frac{1}{2} < 1$

* ملاحظة :

إذا كانت قيمة (a) سالبة فإن مدى الاقتران الاسي هو $(-\infty, k)$ ويصبح متناقصاً.

مهمة

③ $f(x) = -3(4)^x + 1$

$a=-3$, $b=4$, $h=0$, $k=1$

* خط التقارب الافقي هو $y=1$
* مجاله $\mathbb{R}$ * مداه : $(-\infty, 1)$
* متناقص لأن $b>1$, $b=4$

ليش
ليش متناقص مع أن $b>1$
لأن قيمة (a) سالبة

س : أجد خط التقارب الافقي لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد مجاله ومداه، مبيناً إذا كان متزايداً أم متناقصاً:

① $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

② $f(x) = 4(5)^{-x}$

③ $f(x) = \frac{-1}{4}(3)^{x-1} + 2$

مثال 7 : يمثل الاقتران $f(x) = 30(2)^x$ عدد حشرات فنفساء التفاح في كيس دقيق، حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصدها في الكيس.

① أجد عدد هذه الحشرات في الكيس بعد 6 أسابيع :-

$f(x) = 30(2)^x$

$f(6) = 30(2)^6 = 30 \times 64 = 1920$

② بعد كم أسبوع يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة ؟

$f(x) = 30(2)^x$

$\frac{7680}{30} = \frac{30(2)^x}{30}$

$(2)^x = 256 \Rightarrow (2)^x = (2)^8$

$\Rightarrow x = 8$

بعد 8 أسابيع يصبح عدد الحشرات في الكيس 7680

س : يمثل الاقتران $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية حيث x الزمن بالساعات :-

① أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 سا

② بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية ؟

أسئلة الدرس الاول :-

س1 : أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :-

1) $f(x) = (11)^x$, $x = 3$

2) $f(x) = -(5)^x + 4$, $x = 4$

3) $f(x) = -5(2)^x$, $x = 1$

4) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x$, $x = 2$

5) $f(x) = 3^x + 1$, $x = 5$

6) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3$, $x = 2$

س2 : امثل كل اقتران مما يأتي بيانياً، ثم أجد مجاله ومداه، وخصائصه :

1) $f(x) = 4^x$

2) $f(x) = 9^{-x}$

3) $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$

4) $f(x) = 3(6)^x$

س3 : أجد خط التقارب الافقي لكل اقتران، ثم اجد مجاله ومداه، وتزايد أم تناقص :

1) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

3) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

4) $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

س4 : يمثل الاقتران : $f(x) = 7000(1.2)^x$ عدد الخلايا العضوية البكتيرية في تجربة حيث x الزمن بالساعات :-

1) أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

2) أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

3) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا 10080 ؟

س5 : يمثل الاقتران : $f(x) = 100(0.97)^x$ نسبة الضوء المار خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية :-

1) أجد نسبة الضوء المار خلال لوح واحد.

2) أجد نسبة الضوء المار خلال 3 ألواح.

س6 : يمثل الاقتران : $P(t) = 100(0.3)^t$ نسبة المتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأولي للمرض.

1) أجد نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض.

2) بعد كم سنة تصبح نسبة المتعافين 9% ؟

س7 : إذا كان الاقتران : $f(x) = ab^x$ أسياً فأثبت أن :

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$$

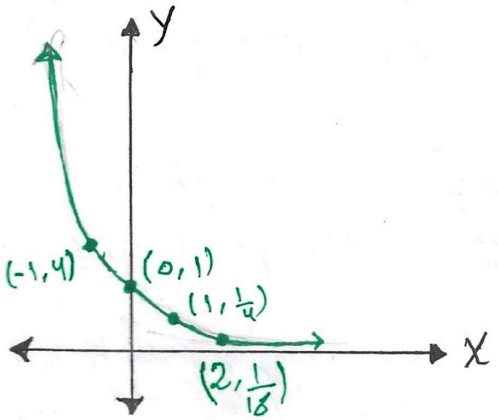
س٨: أي الاقترانات التالية مختلف، مبررًا إجابتي:-

① $y = 3^x$ ② $f(x) = 2(4)^x$

③ $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ ④ $y = 5(3)^x$

س٩: يبين الشكل التالي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = ab^x$

أجد $f(3)$، مبررًا إجابتي:-



* الدرس الثاني :
النمو والاضمحلال الأسي :

* اقتران النمو الأسي :
هو اقتران معني بإيجاد الكميات التي تزداد بنسب مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية، ويعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$A(t) = a(1+r)^t$$

وهو احدى صور الاقتران الأسي

$$f(x) = ab^x$$

حيث استعمل المقدار $(1+r)$ بدلاً من b و t بدلاً من x .

$A(t) = a(1+r)^t$

$t :=$ الفترة الزمنية

$a :=$ الكمية الابتدائية

$r :=$ النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية محددة

$(1+r) :=$ عامل النمو

* مثال 1 : في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام، تبين أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة ثابتة نمو 31% سنوياً :

① اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة، علماً أن عددها عند بدء الدراسة هو 1524 خروفاً.

$A(t) = a(1+r)^t$

$r = 31\% = \frac{31}{100} = 0.31$

$a = 1524$

* $A(t) = 1524(1+0.31)^t$

$= 1524(1.31)^t$

② أجد عدد الخراف بعد 5 سنوات.

$A(t) = 1524(1.31)^t$

$A(5) = 1524(1.31)^5$

≈ 5880 باستخدام آلة حاسبة

مثال 2 : في دراسة عملت احدى مزارع الابقار تبين أن عدد الابقار في المزرعة يزداد بنسبة تبلغ 18% سنويًا :

① اكتب اقتران النمو الاسي الذي يمثل عدد الابقار بعد t سنة، علمًا بأن عدد الابقار عند بدء الدراسة هو 327 بقرة.

$A(t) = a(1+r)^t$

$a = 327 \quad , r = 18\% = 0.18$

$* A(t) = 327(1+0.18)^t$

$= 327(1.18)^t$

② أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من الدراسة

$A(t) = 327(1.18)^t$

$A(3) = 327(1.18)^3$

≈ 481 باستخدام الآلة حاسبة

* اقتران الاضمحلال الاسي :

هو اقتران معين يتمثل النقص في كمية ما حيث يكون النقص بنسب مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

ويعبر عنه بالعلاقة التالية :-

$A(t) = a(1-r)^t$

الفترة الزمنية $=: t$

الكمية الابتدائية $=: a$

النسبة المئوية للاضمحلال $=: r$ في فترة زمنية محددة

عامل الاضمحلال $=: (1-r)$

النمو الأسي	الاضمحلال الأسي
يهتم بالزيادة	يهتم بالنقصان
عامل النمو > 1	عامل الاضمحلال < 1
$A(t) = a(1+r)^t$	$A(t) = a(1-r)^t$

مثال 3 : تتناقص كمية 5g من عنصر الكروم بنسبة 2.45% يوميًا نتيجة تفاعله مع الهواء :-

① اكتب اقتران الاضمحلال الاسي الذي يمثل كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوم.

$A(t) = a(1-r)^t$

$a = 5g \quad , r = 2.45\% = \frac{2.45}{100}$

$= 0.0245$

$* A(t) = 5(1-0.0245)^t$

$= 5(0.9755)^t$

② أجد كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 يوم.

$A(t) = 5(0.9755)^t$

$A(3) = 5(0.9755)^3$

≈ 4.6 باستخدام الآلة حاسبة

مثال 4: اشترى سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500 إذا كان ثمن السيارة يقل بنسبة 5% سنويًا:

① اكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة

$A(t) = a(1-r)^t$

* $A(t) = 28500(1-0.05)^t$

$= 28500(0.95)^t$

② أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات.

$A(t) = 28500(0.95)^t$

$A(4) = 28500(0.95)^4$

≈ 23213

---

* الربح المركب:

هو شكل آخر لاقتران النمو الأسي ويستخدم لحساب الفائدة المستحقة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يسمى رأس المال.

r: معدل الفائدة السنوي

t: عدد السنوات

$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

P: المبلغ الأصلي

n: عدد مرات إضافة الربح في السنة

مثال 5: استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية بنسبة ربح مركب 1.46% وتضاف كل 3 أشهر. أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات.

$P = 9000$ المبلغ الأصلي

$r = \frac{1.46}{100} = 0.0146$ معدل الفائدة السنوي

$n = \frac{12}{3} = 4$ عدد مرات إضافة الربح في السنة

$t = 3$ عدد السنوات

$A = P(1 - \frac{r}{n})^{nt}$ ← تعويض

$A = 9000(1 - \frac{0.0146}{4})^{(4)(3)}$

≈ 9402.21 باستعمال آلة حاسبة

س: استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 2.25% وتضاف كل 6 أشهر، أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

* الاقتران الأسي الطبيعي:

- هو اقتران أسي يكون فيه الأساس هو العدد النيبيري (e) ويسمى بالأساس الطبيعي.

- الأساس الطبيعي:

هو العدد النيبيري وهو عدد غير نسبي ويرمز له بالرمز (e) ويساوي تقريبًا... 2.71828 1828

$$f(x) = e^x$$

الاقتران الأسي الطبيعي

* الربح المركب المستمر:

نستخدم الاقتران الأسي الطبيعي لحساب جملة مبلغ الاستثمار بعد إضافة الربح المركب إلى رأس المال عددًا لانهائيًا من المرات في السنة.

$$A = Pe^{rt}$$

t: عدد السنوات
r: معدل الفائدة المستمر
P: المبلغ الأصلي

مثال 6: أودع علي مبلغ JD 4500 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4% أجد جملة المبلغ بعد 10 سنوات

$P = 4500$

$r = 4\% = 0.04$

$t = 10$

$A = Pe^{rt}$

$A = 4500\, e^{(10)(0.04)}$

$= 4500\, e^{(0.4)}$

≈ 6713.21 باستخدام الآلة الحاسبة

س: أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 3.2% أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات

الربح المركب	الربح المركب المستمر
* إضافة نسبة الربح عدد محدد من المرات في السنة.	* إضافة نسبة الربح عدد لانهائي من المرات في السنة
$A = P(1+\frac{r}{n})^{nt}$	$A = Pe^{rt}$

أسئلة الدرس الثاني:

س1: يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 شخص هذه السنة، ويتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة:-

① اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد المشاركين بعد t سنة.

② أجد عدد المشاركين بعد 5 سنوات.

س2: استخدم 50 ألف شخص موقعاً الكترونياً تعليمياً سنة 2019، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة:

① اكتب اقتران النمو الاسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

② أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م.

س3: يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنوياً.

① اكتب اقتران الاضمحلال الاسي لثمن السيارة بعد t سنة

② أجد ثمن السيارة بعد 3 سنوات.

س4: يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العينة

① اكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الخلايا بعد t ساعة، علماً بأن عددها عند إضافة المضاد هو 15275 خلية.

② أجد عدد الخلايا في العينة بعد 7 ساعات.

س5: يتفقس الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يومياً نتيجة إصابته بمرض ما.

* أجد العدد المتبقي منه بعد 5 يوم من بدء المرض، علماً بأن عدده الاولي في المزرعة هو 1550 دجاجة.

س6: استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 10% وتضاف كل شهر.

① اكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة

② أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات

س7: استثمر هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 8.4% وتضاف كل يوم.

① اكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة.

② أجد جملة المبلغ بعد 6 سنوات.

س8: أودع حسام مبلغ JD9000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركبة مستمر مقدارها 3.6%

* أجد جملة المبلغ بعد 7 سنوات.

س9: أودعت ليلى مبلغ JD 8200 في حساب بنكي، بنسبة ربح مركبة مستمر مقدارها 4.2%

* أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات.

س9: أعد باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة وتوصل إلى أنه يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران

$P(t) = 20e^{0.03t}$

حيث P عدد الذباب بعد t ساعة.

* أجد عدد الذباب بعد 72 ساعة من بدء الدراسة، مقربًا الإجابة إلى أقرب عدد صحيح.

س10: أودع رامي جملة مبلغ مقداره JD250 بعد ايداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات بنسبة ربح مركب تبلغ 1.25% تضاف كل 3 أشهر، كما يلي:

$$A = 250\left(1+\frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$

اكتشف الخطأ الذي وقع به رامي ثم صححه

س11: اكتب اقترانًا يمثل عدد المصابين بالانفلونزا الموسمية بعد + أسبوعًا، علمًا بأن العدد يتضاعف بمقدار 3 مرات كل أسبوع.

الدرس الثالث :-

الاقترانات اللوغاريتمية :-

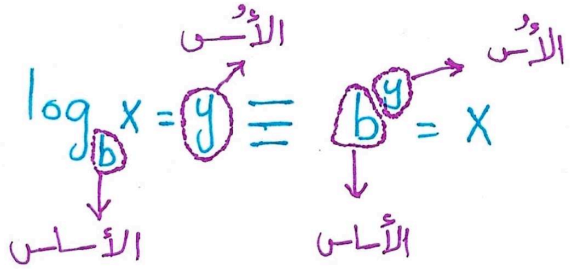
* لكل اقتران 1-1 يوجد اقتران عكسي أيضاً 1-1 .

* الاقتران $f(x)=b^x$ هو اقتران أسي 1-1 وله اقتران عكسي يرمز له بالرمز $f^{-1}(x)$ وهو الاقتران اللوغاريتمي $g(x)=\log_b x$ (لوغاريتم x للأساس b)

* $(\log_b x = y) \equiv (b^y = x)$

ونستخدم هذه العلاقة لتحويل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية .

وتحويل المعادلة من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية .



مثال 1 : أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية :-

① $\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

② $\log_{23} 23 = 1 \Rightarrow 23^1 = 23$

③ $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \Rightarrow 10^{-2} = \frac{1}{100}$

④ $\log_7 1 = 0 \Rightarrow 7^0 = 1$

⑤ $\log_2 16 = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$

⑥ $\log_7 7 = 1 \Rightarrow 7^1 = 7$

⑦ $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5 \Rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$

⑧ $\log_9 1 = 0 \Rightarrow 9^0 = 1$

مثال 2 : اكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية .

① $8^3 = 512$

$\log_8 512 = 3$

② $25^{\frac{1}{2}} = 5$

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

مثال 3: أجد قيمة كل مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:-

① $\log_2 64 = y$

$2^y = 64 = 2^6 \Rightarrow y = 6$

② $\log_{13} \sqrt{13} \Rightarrow \log_{13} \sqrt{13} = y$

$13^y = \sqrt{13} = 13^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$\log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2}$

③ $\log_6 36 \Rightarrow \log_6 36 = y$

$6^y = 36 = 6^2 \Rightarrow y = 2$

$\log_6 36 = 2$

④ $\log_{10} 0.1 \Rightarrow \log_{10} 0.1 = y$

$10^y = 0.1 \Rightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$

$\log_{10} 0.1 = -1$

⑤ $\log_5 25$

⑥ $\log_8 \sqrt{8}$

⑦ $\log_{81} 9$

⑧ $\log_3 \frac{1}{27}$

③ $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$

$\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$

④ $27^0 = 1$

$\log_{27} 1 = 0$

⑤ $7^3 = 343$

$\log_7 343 = 3$

⑥ $49^{\frac{1}{2}} = 7$

$\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

⑦ $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

$\log_2 \frac{1}{32} = -5$

⑧ $17^0 = 1$

$\log_{17} 1 = 0$

* الخصائص الأساسية للوغاريتمات:-

① $\log_b 1 = 0 \Rightarrow b^0 = 1$

② $\log_b b = 1 \Rightarrow b^1 = b$

③ $\log_b b^x = x \Rightarrow b^x = b^x$

④ $b^{\log_b x} = x \Rightarrow \log_b x = \log_b x$

$x > 0$

مثال 4: اكتب قيمة كل مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:-

① $\log_3 1 = y \Rightarrow y = 0$

② $\log_{17} \sqrt{17} = y \Rightarrow 17^y = 17^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$

③ $\log_5 5 \Rightarrow y = 1$

$\log_5 5 = 1$

④ $7^{\log_7 5} = y \Rightarrow y = 5$

$7^{\log_7 5} = 5$

⑤ $\log_2 1 = y \Rightarrow y = 0$

$\log_2 1 = 0$

⑥ $\log_{32} \sqrt{32} = y \Rightarrow 32^y = 32^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{32} \sqrt{32} = \frac{1}{2}$

⑦ $\log_9 9 = y \Rightarrow y = 1$

⑧ $8^{\log_8 13} = y \Rightarrow y = 13$

---

* التمثيل البياني للاقتران اللوغاريتمي:-

① نحول الاقتران اللوغاريتمي $\log_b x = y$ إلى الشكل الأسي $b^y = x$

② إنشاء جدول لقيم x و b^y

③ نختار قيم لـ y تناسب العلاقة $b^y = x$

④ نجد قيم x بعد اختيار قيم y

⑤ نعين الأزواج المرتبة الناتجة في المستوى البياني.

⑥ نوصل بين الأزواج المرتبة.

مثال 5 : مثل كل اقترانٍ مما يأتي بيانياً، ثم حدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين وخطوط تقاربه مبيناً إذا كان متزايداً أم متناقصاً :-

① $f(x) = \log_2 x$

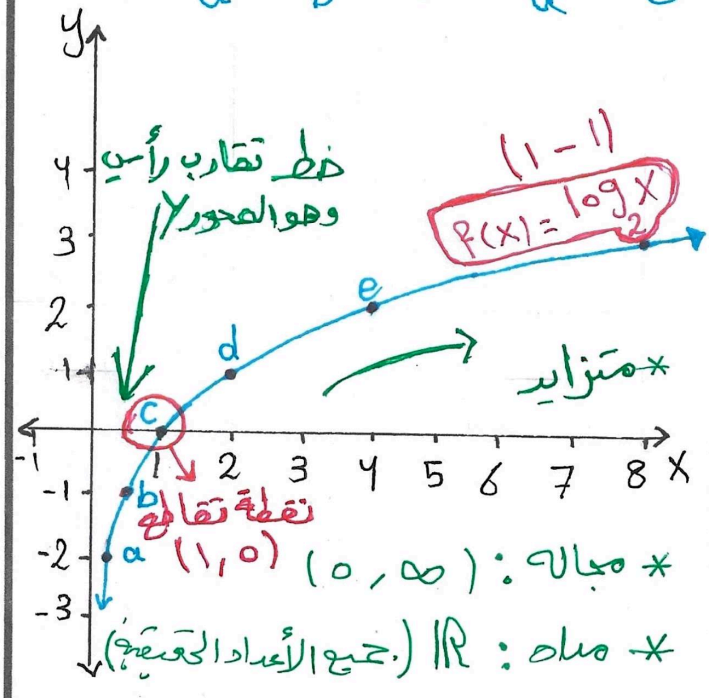
$y = \log_2 x$

$2^y = x$ ① التحويل إلى الشكل الأسي

② إنشاء جدول ثم اختيار قيم y مناسبة

③ إيجاد قيم x بعد تحديد قيم y

y	-2	-1	0	1	2
$x = 2^y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x, y)	$(\frac{1}{4}, -2)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	(1, 0)	(2, 1)	(4, 2)
	a	b	c	d	e

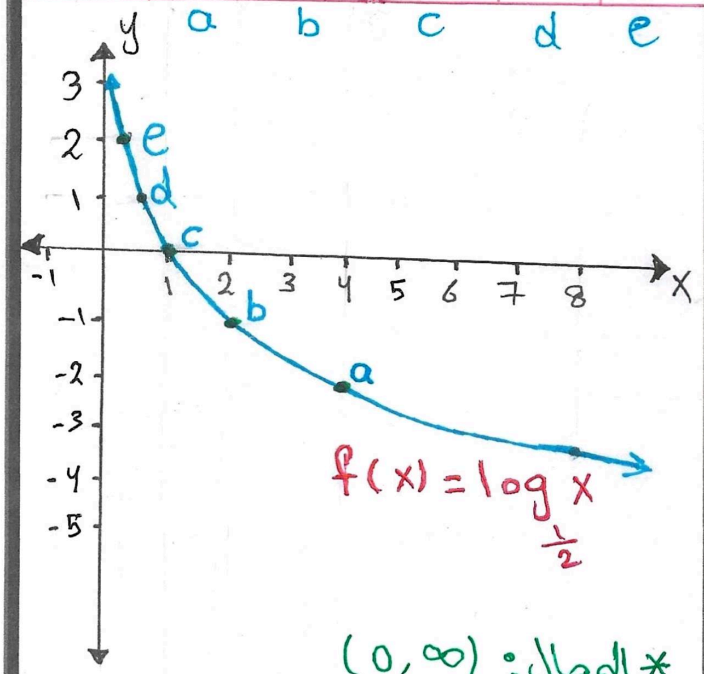


* مجاله : $(0, \infty)$
* مداه : $\mathbb{R}$ (جميع الأعداد الحقيقية)

② $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$\Rightarrow (\frac{1}{2})^y = x$

y	-2	-1	0	1	2
$x = (\frac{1}{2})^y$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x, y)	(4, -2)	(2, -1)	(1, 0)	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{4}, 2)$
	a	b	c	d	e



* المجال: $(0, \infty)$
* المدى: $\mathbb{R}$ (جميع الأعداد الحقيقية)
* المقطع X هو 1
* يوجد خط تقارب رأسي وهو المحور Y
* متناقص
* (1 - 1) *

③ $f(x) = \log_3 x$

④ $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

* خصائص الاقتران اللوغاريتمي :-

$f(x) = \log_b x$

حيث b عدد حقيقي، $b>0, b\neq 1$

1) مجال الاقتران :
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة
$(0,\infty)$ ، $\mathbb{R}^+$

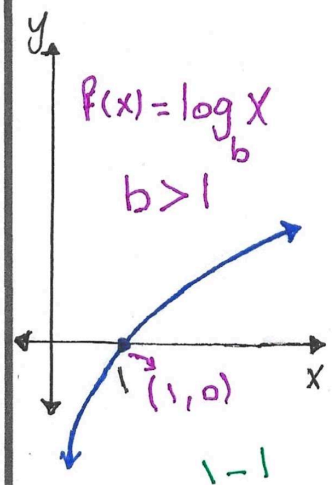
2) مدى الاقتران :
مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbb{R})$

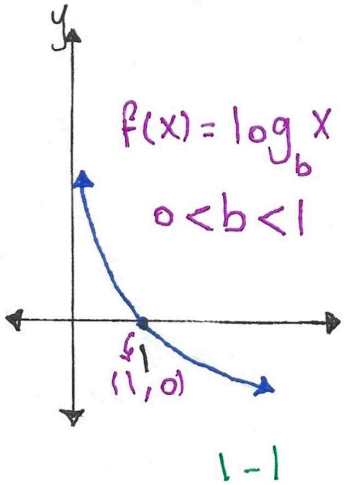
3) يكون الاقتران متزايداً إذا كان $b>1$

4) يكون الاقتران متناقصاً إذا كان
$0<b<1$

5) يوجد له خط تقارب رأسي هو المحور
Y

6) الاقتران يقطع المحور X في $(1,0)$
ولا يقطع Y





* مجال الاقتران اللوغاريتمي على صورة :

$f(x) = \log_b g(x)$

جميع القيم التي تجعل قيمة $g(x)>0$

مثال 6 : أجد مجال كل مما يأتي :-

① $f(x) = \log_4 (x+3)$

$x+3>0$
$x>-3 \Rightarrow (-3,\infty)$

② $f(x) = \log_5 (8-2x)$

$8-2x>0 \Rightarrow -2x>-8$

$x<4 \Rightarrow (-\infty,4)$

* عند قسمة أو ضرب المتباينة بـ سالب فإننا نقلب (نعكس) المتباينة

② جد خطوط التقارب للاقترانين السابقين

① $f(x) = \log_4 (x+3)$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$
خط التقارب الرأسي هو $x=-3$

② $f(x) = \log_5 (8-2x)$

$8-2x=0 \Rightarrow 2x=8$
$\Rightarrow x=4$
خط التقارب الرأسي هو $x=4$

مثال 7: أجب بمجال وخط التقارب الرأسي لكل اقتران مما يأتي:-

① $f(x) = \log_7 (5-x)$

② $f(x) = \log_5 (9+3x)$

أسئلة الدرس الثالث

س1: اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

① $\log_7 343 = 3$

② $\log_4 256 = 4$

③ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

④ $\log_{36} 6 = 0.5$

⑤ $\log_9 1 = 0$

⑥ $\log_{57} 57 = 1$

س2: أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية.

① $2^6 = 64$

② $4^{-3} = \frac{1}{64}$

③ $6^3 = 216$

④ $5^{-3} = 0.008$

⑤ $(51)^1 = 51$

⑥ $9^0 = 1$

س3: أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال آلة حاسبة:

1) $\log_3 81$
2) $\log_{25} 5$
3) $\log_4 32$
4) $\log_{49} 343$
5) $\log_{10} 0.001$
6) $\log_{\frac{3}{2}} 1$
7) $\log_{\frac{1}{4}} 4$
8) $(10)^{\log_{10}(\frac{1}{8})}$
9) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{(2)^7}}\right)$
10) $\log_a \sqrt[5]{a}$
11) $\log_{10}(1\times10^{-9})$
12) $8^{\log_8 5}$

س4: مثل كل اقتران مما يأتي بيانياً، ثم حدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين وخطوط تقاربه مبيناً متناقص أم متزايد:

① $f(x)=\log_5 x$
② $g(x)=\log_4 x$
③ $h(x)=\log_{\frac{1}{5}} x$
④ $r(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$
⑤ $f(x)=\log_{10} x$
⑥ $g(x)=\log_6 x$

س5: أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي:

① $f(x)=\log_3(x-2)$

② $f(x)=5-2\log_7(x+1)$

③ $f(x)=-3\log_4(-x)$

س6: أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران $f(x)=\log_a x$ يمر بالنقطة $(32,5)$

س7: أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران $f(x)=\log_c x$ يمر بالنقطة $(\frac{1}{4},-4)$

س8: يمثل الاقتران $P(a)=10+20\log_5(a+1)$ صيحاج شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث a المبلغ (بالمئات) الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج.

وتعني القيمة $P(1)=19$ أن انفاق JD100 على الاعلانات يحقق ايرادات قيمتها JD 19000 من بيع المنتج:

① أجد $P(4)$ و $P(24)$ و $P(124)$

② فسر معنى القيم التي أوجدتها في الفرع السابق

س9: أجد مجال كل اقتران مما يأتي، محدداً خط تقاربه الرأسي:

① $f(x)=\log_3(x^2)$

② $f(x)=\log_3(x^2-x-2)$

③ $f(x)=\log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

س10: كتبت من المعادلة الاسية: $4^{-3}=\frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يلي:

$\log_4(-3)=\frac{1}{64}$

اكتشف الخطأ، وقم بتصحيحه

* الدرس الرابع :-
قوانين اللوغاريتمات

① $\log_b xy$ قانون الضرب

$= \log_b x + \log_b y$

② $\log_b \frac{x}{y}$ قانون القسمة

$= \log_b x - \log_b y$

③ $\log_b x^n$ قانون القوة

$= n \log_b x$

* $\log_b 1 = 0$

* $\log_b b = 1$

مثال 1: إذا كان: $\log_a 5 \approx 2.32$

$\log_a 3 \approx 1.59$

فجد كل مما يلي :

① $\log_a 15$

$= \log_a 5 + \log_a 3$

$\approx 2.32 + 1.59 = 3.91$

② $\log_a \left(\frac{3}{5}\right)$

$= \log_a 3 - \log_a 5$

$\approx 1.59 - 2.32 \approx -0.73$

③ $\log_a 125$

$= \log_a (5)^3 = 3 \log_a 5$

$\approx 3(2.32) \approx 6.96$

④ $\log_a \frac{1}{9}$

$= \log_a 1 - \log_a 9$

$= 0 - \log_a (3)^2$

$= -2 \log_a (3) \approx -2(1.59)$

≈ -3.18

مثال 2: إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$

$\log_b 2 \approx 0.43$

فجد كل مما يلي :

① $\log_b 14$ ② $\log_b \frac{2}{7}$

③ $\log_b 32$ ④ $\log_b \frac{1}{49}$

مثال 3 : اكتب كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة، علماً بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة :-

① $\log_5 x^7 y^2$

$= \log_5 x^7 + \log_5 y^2$

$= 7\log_5 x + 2\log_5 y$

② $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4}$

$= \log(5x+3)^2 - \log_7 4$

$= 2\log(5x+3) - \log_7 4$

③ $\log_4 \left(\frac{xy^3}{z^2}\right)$

$= \log_4 xy^3 - \log_4 z^2$

$= \log_4 x + \log_4 y^3 - 2\log_4 z$

$= \log_4 x + 3\log_4 y - 2\log_4 z$

④ $\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}}$

$= \log_a \left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\log_a x^2y^3 - \log_a a^5\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\log_a x^2 + \log_a y^3 - 5\log_a a\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2\log_a x + 3\log_a y - 5\right)$

$= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{5}{2}$

مثال 4 : اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بصورة مطولة، جميع المتغيرات > 0 وحقيقية.

① $\log_2 a^2 b^8$

② $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$

③ $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$

④ $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

---

* ملاحظة :-

1) $\log_b(M \pm N) \neq \log_b M + \log_b N$

2) $\log(M \cdot N) \neq \log_b M \cdot \log_b N$

3) $\log_b \frac{M}{N} \neq \frac{\log_b M}{\log_b N}$ والعكس

4) $\log_b(MNP) \neq P\log_b(NN)$

مثال 5: اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة، علمًا بأن جميع المتغيرات أعداد حقيقية موجبة.

① $3\log_2 x + 4\log_2 y$

$= \log_2 x^3 + \log_2 y^4$

$= \log_2 x^3 y^4$

② $5\log_a x + \frac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

$= \log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$

$= \log_a x^5 \sqrt[3]{y} - \log_a z^7$

$= \log_a \frac{x^5\sqrt[3]{y}}{z^7}$

---

③ $\log_5 a + 3\log_5 b$

④ $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

مثال 6: في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في درجة تذكر الطلبة للمعلومات. - - - - -
وجد الباحثون أن النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها أحد الطلبة بعد t شهر من انهاء دراسة المادة تعطى بالاقتران

$M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$

* أوجد النسبة المئوية التي يتذكرها الطالب بعد 19 شهر من انهاء دراسته للمادة.

علمًا بأن $\log_{10} 2 \approx 0.3010$

مقربًا الإجابة إلى أقرب عدد صحيح.

$M(19) = 85 - 25\log_{10}(19+1)$

$= 85 - 25\log_{10}(20)$

$= 85 - 25\log(2\times 10)$

$= 85 - 25(\log_{10} 2 + \log_{10} 10)$

$= 85 - 25(\log_{10} 2 + 1)$

$= 85 - 25(0.3010 + 1)$

$= 85 - 25(1.3010)$

$= 85 - 32.525$

$\approx 85 - 33 = 52$

∴ النسبة التي يتذكرها الطالب بعد 19 شهر من دراسته للمادة هي 52%

مثال 7: يمثل الاقتران
$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$
النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها طالب من مادة معينة بعد t شهر من إنهاء دراسته للمادة.

أجد النسبة المئوية التي يتذكرها الطالب من المادة بعد 29 شهر من إنهاء دراسته للمادة.
علمًا بأن $\log_{10} 3 = 0.4771$
معربًا الإجابة إلى أقرب عدد صحيح.

أسئلة الدرس الرابع

س1: إذا كان $\log_a 6 \approx 0.778$ وكان $\log_a 5 \approx 0.699$
فجد كل مما يأتي:

1) $\log_a \frac{5}{6}$
2) $\log_a 30$
3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$
4) $\log_a \frac{1}{6}$
5) $\log_a 900$
6) $\log_a \frac{18}{15}$
7) $\log_a (6a^2)$
8) $\log_a \sqrt[4]{25}$
9) $(\log_a 5)(\log_a 6)$

س2: أكتب كل مقدار لوغاريتمي من مايلي بالصورة المطولة.

1) $\log_a x^2$
2) $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$
3) $\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y})$
4) $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$
5) $\log_a \frac{1}{x^2y^2}$
6) $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$
7) $\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3}$
8) $\log_a (x+y-z)^7,\ x+y>z$
9) $\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}}$

س3: اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة:-

① $\log_a x + \log_a y$

② $\log_b(x+y) - \log_b(x-y), \quad x > y$

③ $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

④ $\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2), \quad x > 2$

⑤ $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$

⑥ $\log_b 1 + 2\log_b b$

س4: يمثل الاقتران:

$P(x) = 29 + 48.8 \log_6(x+2)$

النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات.

أجد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ.

علمًا بأن $\log_6 2 \approx 0.3869$

س5: أثبت أن

$$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$$

س6: اكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم صححه:-

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$

س7: أثبت أن:-

$$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = 1$$

* الدرس الخامس:

المعادلات الأسية:

الاقتران اللوغاريتمي الاعتيادي:	الاقتران الأسي:
$y=\log_{10} x$	$10^y = x \ , \ x>0$
الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:	الاقتران الأسي الطبيعي:
$y=\log_e x = \ln x$	$e^y = x$

* استعمال الآلة الحاسبة:

نستعملها أثناء الحصة.

* تغيير أساس اللوغاريتم:

- إذا كانت a, b, x أعداداً حقيقية موجبة حيث $a \neq 1 \ , \ b \neq 1$ فإن:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

مثال 1: أجد قيمة كل مما يأتي، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من مئة.

① $\log_3 16$

$$\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3}$$

* نستخدم الآلة الحاسبة

* ملاحظة:

في أغلب أسئلة تغيير الأساس سنستخدم الأساس 10.

② $\log_{\frac{1}{2}} 10$

③ $\log_3 51$ ④ $\log_{\frac{1}{2}} 13$

* المعادلات الأسية:

* قاعدة:

إذا كان: $a^x = a^y$

فإن: $x = y$

$a>0, a\neq 0$

مثال 2:-

① $2^x = 8$

$2^x = 2^3 \Rightarrow x=3$

② $3^{2x} = 81$

$3^{2x} = 9^2$

$3^{2x} = (3)^2)^2$

$3^{2x} = 3^4 \Rightarrow 2x=4$

$x=2$

* خاصية اللوغاريتمات:

- نستخدم هذه الخاصية عندما تكون غير قادرين على كتابة طرفي المعادلة الأسية بنفس الأساس.

مثل: $6^x = 7$

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y$$

مثال 3: حل المعادلات الأسية الآتية:

① $2^x = 13$

* نختار أساس مناسب للوغاريتمين ثم نضعه للطرفين.
* في هذا الفرع سنختار الأساس $b=2$

$$\log_2 2^x = \log_2 13$$

$$x \underbrace{\log_2 2}_{=1} = \log_2 13$$

$$x = \log_2 13$$

نستخدم الآلة الحاسبة أو يكون معطى من معطيات السؤال

② $5e^{3x} = 125$

$$e^{3x} = \frac{125}{5} \Rightarrow e^{3x} = 25$$

نضع ln للطرفين

تذكر: $\ln x = \log_e x$

$$\ln e^{3x} = \ln 25$$

$$3x \underbrace{\ln e}_{=1} = \ln 25$$

$$3x = \ln 25$$

$$x = \frac{\ln 25}{3}$$

③ $2^{(x+4)} = 5^{3x}$

$$\log_2 2^{(x+4)} = \log_2 5^{3x}$$

$$(x+4)\log_2 2 = 3x \log_2 5$$

$$(x+4) = 3x \log_2 5$$

* ننقل ونرتب المعادلة

$$x - 3x\log_2 5 = -4$$

* نخرج x عامل مشترك.

$$x(1 - 3\log_2 5) = -4$$

$$x = \frac{-4}{1 - 3\log_2 5}$$

④ $9^x + 3^x - 30 = 0$

⑤ $7^x = 9$

⑥ $2e^{5x} = 64$

⑦ $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

⑧ $4^x + 2^x - 12 = 0$

مثال 4: قدر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م ويمثل الاقتران

$P(t) = 6.5(1.014)^t$

عدد سكان العالم بالمليار نسمة بعد t عام من 2006م

بعد كم سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة ؟؟

بعد كم سنة سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليار نسمة ؟؟

أسئلة الدرس الخامس

س1: استعمل الآلة الحاسبة لايجاد كل مما يلي، (قرب الى أقرب جزء من عشرة)

① $\log 19$ ② $\ln 3.1$

③ $\log(2.5 \times 10^{-3})$ ④ $\ln 5$

⑤ $\log_2 10$ ⑥ $\log_3 e^2$

س2: أجد قيمة كل مما يلي، مقربا الى أقرب جزء من مئة

① $\log_3 33$ ② $\log_{\frac{1}{3}} 17$

③ $\log_6 5$ ④ $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7}$

⑤ $\log 1000$ ⑥ $\log_3 15$

س3: حل المعادلات الأسية الآتية:

① $6^x = 121$ ② $2(9)^x = 32$

③ $-3e^{4x} = -27$ ④ $5^{(7x-2)} = 3^{2x}$

⑤ $25^x + 5^x - 42 = 0$

⑥ $27^{(2x+3)} = 2^{(x-5)}$

س4: اودع سميرة مبلغ P في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مقدارها 5% مستمر

- بعد كم سنة تصبح قيمة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي ؟؟
- بعد كم سنة تصبح قيمة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي ؟؟

س5: تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وفق الاقتران:

$N = 873\,e^{-0.078t}$

حيث N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة.

- بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا ؟؟

س: أجد قيمة كل من h, k إذا وقعت النقطة (-2, k) والنقطة (h, log) على منحنى الاقتران:

$f(x) = e^{0.5x+3}$

س7: حل المعادلة:

$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$