المراد في الرياضيات

ثاني ثانوي

2005

علمي

الفصل الأول

الأستاذ : معتصم عدنان Tel: 0799397737

توجيهي

المنهاج الجديد

الأستاذ: معتصم عدنان
0799397737

المراد في الرياضيات

علمي، أدبي، صناعي

الوحدة الأولى: التفاضل:-

الدرس الأول: الاشتقاق.

* مشتقة الاقتران $f(x)$ عند النقطة a الواقعة على منحناه هي ميل المنحنى عند هذه النقطة.

ميل المماس = المشتقة عند التماس

* يكون الاقتران قابلاً للاشتقاق عند $x=a$ إذا كانت $f'(a)$ موجودة.

* يكون الاقتران قابلاً للاشتقاق على الفترة (a,b) إذا كان قابلاً للاشتقاق عند جميع قيم x الموجودة في الفترة.

* ويكون غير قابل للاشتقاق على (a,b) إذا كان غير قابل للاشتقاق عند نقطة واحدة أو أكثر في نفس الفترة.

* نظرية:

إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند $x=a$ $\Leftarrow$ $f(x)$ متصل عند $x=a$

* نتيجة:

إذا كان الاقتران غير متصل عند $x=a$ $\Leftarrow$ الاقتران غير قابل للاشتقاق عند $x=a$

* التعريف العام للمشتقة:-

* $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

مثال(1): ابحث قابلية الاقتران $f(x)=|x|$ للاشتقاق عند $x=0$

الحل: (1) نستخدم التعريف العام للمشتقة.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) نعوض قيمة x المطلوبة: $x=0$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \quad \frac{0}{0}$$

نعيد التعريف

$$* \ |h|=\begin{cases} h &, h>0 \\ -h &, h<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h} &, h>0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h} &, h<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1 &, h>0 \\ -1 &, h<0\end{cases}$$

لأن $\lim\limits_{-} \neq \lim\limits_{+}$ فإن f غير قابل للاشتقاق

0799397737

مثال 2: ابحث قابلية الإقتران $f(x) = x^{1/3}$ للإشتقاق عند $x = 0$

الحل:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

* الإقتران غير قابل للإشتقاق عند $x = 0$ ، لأن النهاية تقترب من ∞

س: ابحث قابلية الإقترانات التالية للإشتقاق.

1) $f(x) = |x - 2|$ ، عند $x = 2$

2) $f(x) = (x+1)^{1/5}$ ، عند $x = -1$

* ملاحظة:
يمكن للإقتران أن يكون متصلاً ولكن غير قابل للإشتقاق عند $x = a$
هذا يعني أن الإقتران المتصل ليس بالضرورة أن يكون قابل للإشتقاق
ولكن الاقتران القابل للإشتقاق يكون متصل دائماً.

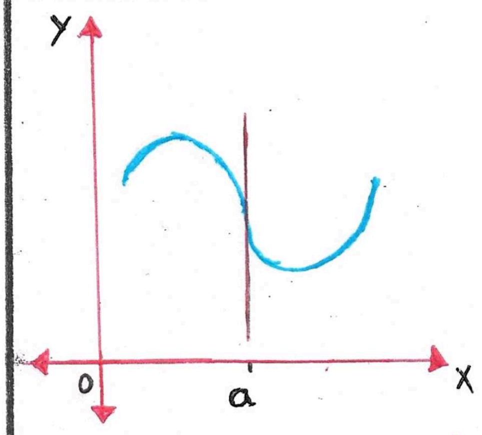
* حالات عدم وجود المشتقة بيانياً:
1. أن يكون للمنحنى رأس حاد.
2. أن يكون للمنحنى مماس رأسي عند هذه النقطة

الأستاذ: معتصم عدنان

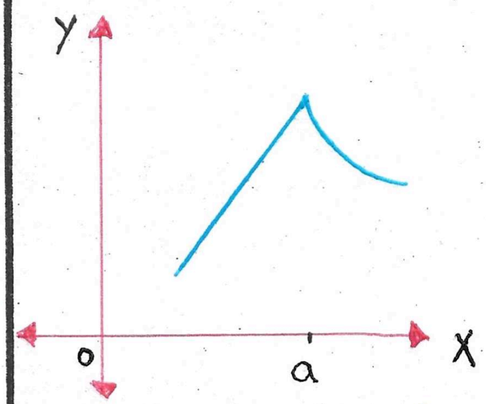
المراد في الرياضيات

علمي، أدبي، صناعي

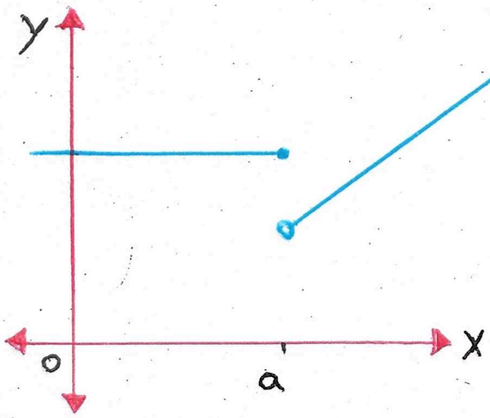
0799397737



* مماس رأسي عند $X = a$

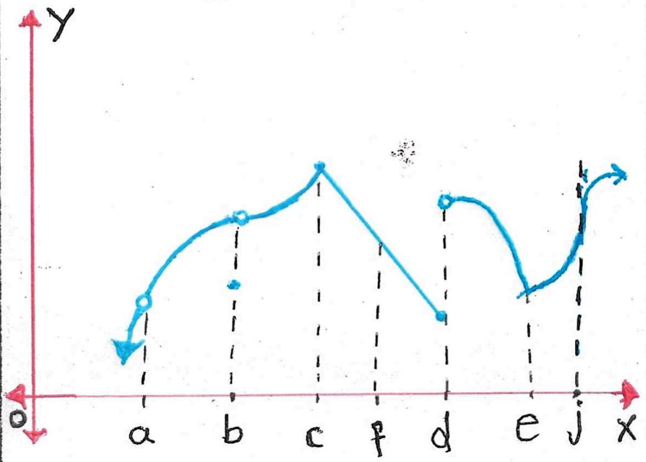


* رأس حاد أو زاوية عند $X = a$



* عدم اتصال عند $X = a$

* **مثال 3:** يبين الشكل الآتي منحنى $t(x)$ حدد قيم X التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق.



* عند $X=a$ غير قابل للاشتقاق، لأنه غير متصل عندها.
* عند $X=b$ غير قابل للاشتقاق، لأنه غير متصل عندها.
* عند $X=c$ غير قابل للاشتقاق، بسبب وجود رأس حاد (زاوية) عندها.
* عند $X=d$ غير قابل للاشتقاق، لأنه غير متصل عندها.
* عند $X=e$ غير قابل للاشتقاق، بسبب وجود زاوية.
* عند $X=j$ غير قابل للاشتقاق، بسبب وجود مماس رأسي (عامودي) عندها.

* مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي :-

* نظرية :

إذا كان $f(x)$ اقتران أسي طبيعي
$f(x) = e^x$ ، حيث e العدد النيبيري، فإن:

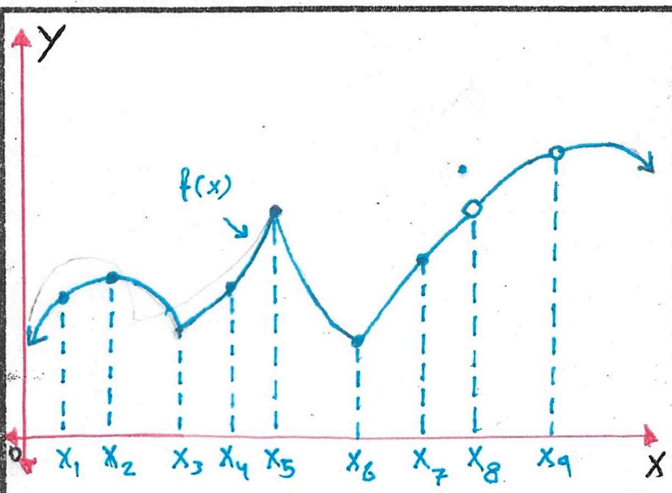
$$f'(x) = e^x$$

مثال 6: جد مشتقة كل من الاقترانات التالية :-

① $f(x) = 2e^x + 3x + 1$

② $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}$

③ $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$



س2: يبين الشكل السابق منحنى الاقتران $f(x)$
حدد قيم x التي يكون عندها الاقتران غير قابل للاشتقاق، موضحاً ذلك :-

④ $\log_a x = b$

$\Rightarrow a^b = x$

* $\log_2 8 = 3$

$\Rightarrow 2^3 = 8$

⑤ $\ln x = \log_e x$ ⇐ مهمة

⑥ $\ln(e) = 1$

⑦ $\ln(1) = 0$

⑧ $\ln(1/x) = -\ln(x)$

* $\ln x$ يعامل معاملة $\log_b x$ في القوانين.

④ $y = 5e^x + 3$

⑤ $y = \sqrt{x} - 4e^x$

⑥ $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

* مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

* نظرية:

إذا كان $f(x) = \ln x$ ، حيث $x > 0$

فإن:

$f'(x) = \frac{1}{x}$

* مراجعة: قوانين اللوغاريتم

① $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

② $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

③ $\log_b x^n = n \log_b x$

الأستاذ: معتصم عدنان

المراد في الرياضيات

علمي، أدبي، صناعي

0799397737

* مشتقة $\sin x , \cos x$:

* نظرية :

1) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

2) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

* مثال 6 : جد مشتقة الاقترانات التالية :-

① $f(x) = 3\sin x + 4$

② $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

③ $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

④ $y = \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \sin\frac{\pi}{2}$

* مثال 5 : جد مشتقة الاقترانات التالية :

① $f(x) = \ln(x^4)$

② $f(x) = \ln(xe^x) + \ln(7x)$

③ $h(x) = \ln(2x^3)$

④ $g(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

0799397737

* معادلة المماس والعمودي عليه :-

* ميل المماس = المشتقة عند المماس
* ميل المماس * ميل العمودي = -١

* مثال 7 : إذا كان الاقتران $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ فاستعمل المشتقة لإيجاد :

① معادلة المماس عند $(1, -1)$

* المماس هو خط مستقيم لذلك نستخدم معادلة الخط المستقيم .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

* نجد ميل المماس من العلاقة التالية
الميل = المشتقة

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right) = \ln(x) - \ln(e)$$

$$m = f'(x)\Big|_{x=1} = \left(\frac{1}{x} - 0\right)\Big|_{x=1} = 1$$

$$y_1 = -1, \quad x_1 = 1, \quad m = 1$$

$$y - (-1) = (1)(x - 1)$$

$$\Rightarrow y + 1 = x - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x - 2}$$

معادلة المماس

② معادلة العمودي على المماس عند $(1, -1)$

* نجد ميل العمودي من العلاقة :-

ميل المماس * ميل العمودي = -١

$$* \; m * m_\perp = -1$$

$$1 * m_\perp = -1$$

$$m_\perp = -1$$

$$y_1 = -1, \quad x_1 = 1, \quad m_\perp = -1$$

$$* \; y - y_1 = m_\perp(x - x_1)$$

$$y - (-1) = (-1)(x - 1)$$

$$y + 1 = -x + 1$$

$$\boxed{y = -x}$$

معادلة العمودي على المماس

س3 : إذا كان الاقتران $f(x) = \ln\sqrt{x}$ فاستعمل المشتقة لإيجاد :

① معادلة المماس عند $\left(e, \frac{1}{2}\right)$

② معادلة العمودي على المماس عند $\left(e, \frac{1}{2}\right)$

* الحركة في خط مستقيم :-

* اقتران الموقع بالنسبة للزمن t ، $s(t)$ *
- يأخذ اقتران الموقع $s(t)$ قيماً موجبة أو سالبة أو صفر، اعتماداً على اتجاه الحركة وبعد الجسم عن نقطة الأصل. (اقتران المسافة).

* $v(t)$ ، اقتران السرعة المتجهة
- وهو معدل تغير اقتران الموقع $s(t)$ بالنسبة للزمن. $(s'(t))$.
- إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ فإن الجسم يتحرك في الإتجاه الموجب
- إذا كانت $v(t) < 0$ فإن الجسم يتحرك في الإتجاه السالب
- إذا كانت قيمة $v(t) = 0$ فإن الجسم يكون ساكناً.

* $a(t)$ ، اقتران التسارع
- وهو معدل تغير السرعة المتجهة بالنسبة إلى الزمن $(v'(t))$.

* ملاحظة

- السرعة $= |v(t)|$
- السرعة المتجهة $v(t) = s'(t)$
- التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t)$
- الموقع $s(t)$

* مثال 8 : يمثل الاقتران $s(t) = 6t^2 - t^3$ ، $t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالمتر و t الزمن بالثواني :

① جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عند $t = 2$

* $s(t) \xrightarrow{\text{المشتقة}} v(t) \xrightarrow{\text{المشتقة}} a(t)$

$s(t) = 6t^2 - t^3$

- $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$

$v(2) = 12 \times 2 - 3(2)^2 = 24 - 12$
$= 12 \text{ m/s}$

- $a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$

$a(2) = 12 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$

② جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون :-

* يكون الجسم في حالة سكون قبل بداية الحركة عند $t = 0$ أو عندما تكون سرعته المتجهة $= 0$ $(v(t) = 0)$

$12t - 3t^2 = 0$

$t(12 - 3t) = 0$

$t = 0$

$12 - 3t = 0$
$3t = 12$
$t = 4$

* عند $t = 0$ و $t = 4$ يكون الجسم في حالة سكون.

③ في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=5$

* الاتجاه نستخدم السرعة المتجهة $V(t)$.

$V(t) = 12t - 3t^2$

$V(5) = 12(5) - 3(5)^2 = -15$

* يتحرك الجسم باتجاه اليسار، لأن إشارة $V(t)$ سالبة.

④ متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي؟

* يعود الجسم الى موقعه الابتدائي عندما تكون المسافة المقطوعة تساوي صفر $s(t)=0$.

$s(t) = 6t^2 - t^3$

$6t^2 - t^3 = 0$

$t^2(6-t) = 0$

$\boxed{t=0}$ تهمل بداية الحركة

$6-t=0$

$t=6$

يعود الجسم الى موقعه الابتدائي بعد 6 ثواني من الحركة.

س4 :- يمثل الاقتران $s(t) = t^2 - 7t + 8$ ، $t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني:

① جد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عند $t=4$

② جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

③ في أي اتجاه يتحرك الجسم عند $t=2$

④ متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي؟

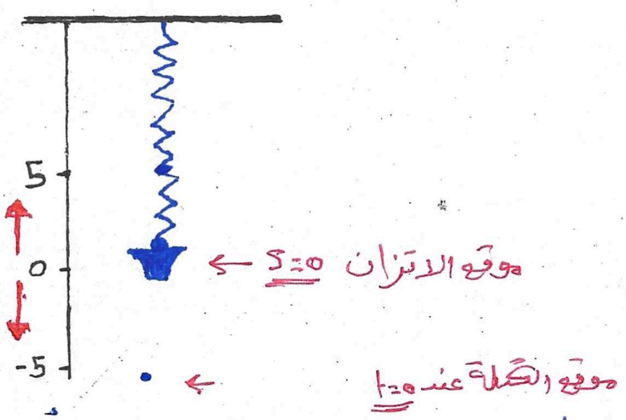
* الحركة التوافقية البسيطة:

* إذا كانت المعادلة التي تصف الإزاحة $s(t)$ هي

$$Y = a\sin wt$$
$$Y = a\cos wt$$

فإن الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة.

* مثال 9:



يبين الشكل جسمًا معلقًا بزنبرك، شُدّ 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$، ثم تُرك عند الزمن $(t = 0)$ ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل.

ويمثل الاقتران $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق.

حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالسنتيمترات.

1) جد اقترانًا يمثل سرعة الجسم المتجهة

2) جد اقترانًا يمثل التسارع عند أي لحظة

3) أصف حركة الجسم:-

س5: يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويمثل الاقتران $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق.

s متر، t ثانية

1) جد اقتران يمثل السرعة المتجهة.

2) جد اقتران يمثل التسارع.

3) أصف حركة الجسم.

* أسئلة الدرس الأول :

س : ابحث قابلية الاقترانات التالية للاشتقاق :

① $f(x) = |x-5| \quad , \quad x = 5$

② $f(x) = x^{2/5} \quad , \quad x = 0$

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x^2 - 2x & , x > 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1$

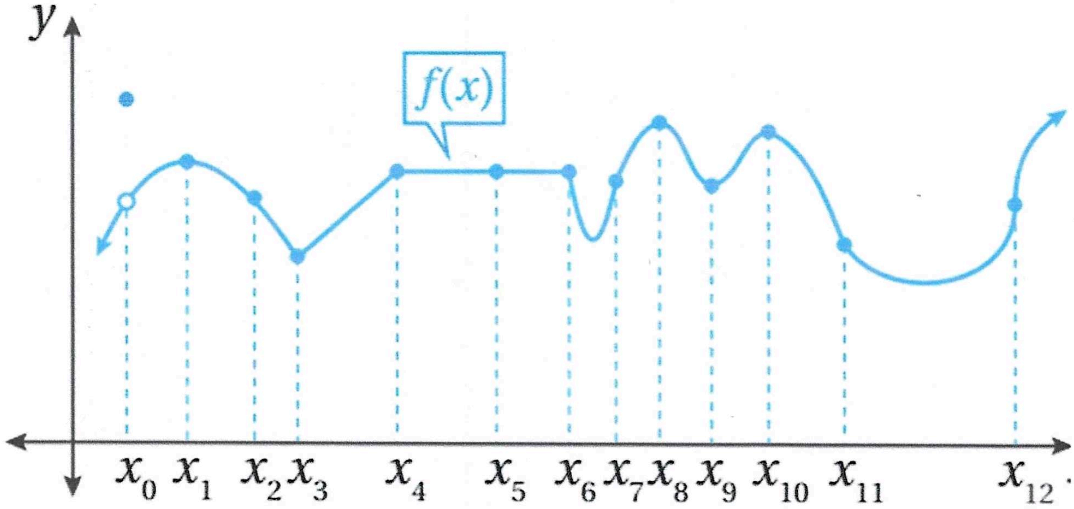
④ $f(x) = \dfrac{3}{x} \quad , \quad x = 4$

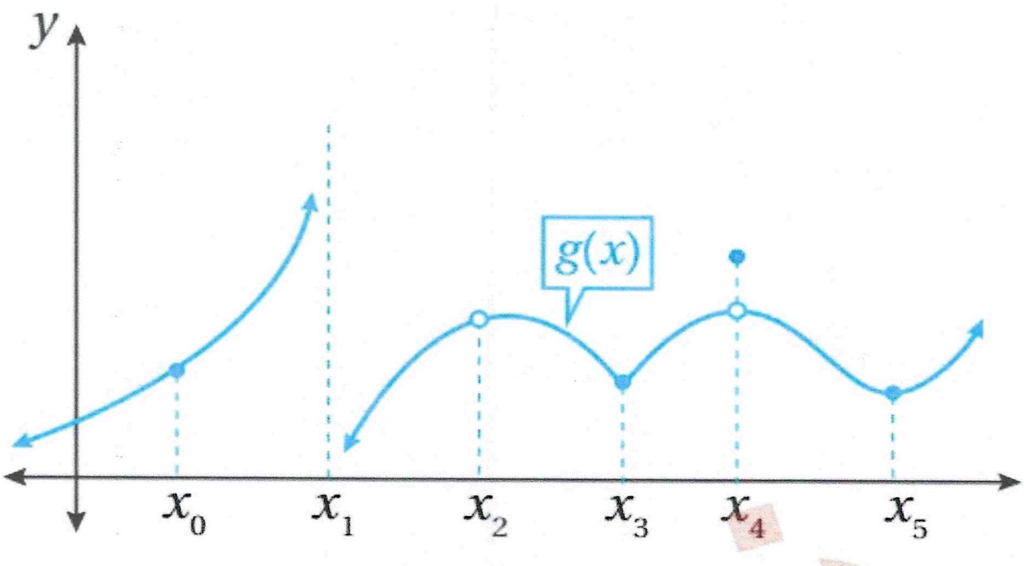
⑤ $f(x) = (x-8)^{2/3} \quad , \quad x = 8$

⑥ $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \neq 4 \\ 3 & , x = 4 \end{cases} \quad , \quad x = 4$

الأستاذ: معتصم عدنان
0799397737

س : أجد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها الاقتران قابلاً للاشتقاق ؟





س3: حدد قيم x التي يكون عندها الاقتران غير قابل للاشتقاق:

① $f(x) = \dfrac{x-8}{x^2-4x-5}$

② $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$

③ $f(x) = |x^2-9|$

س4: إذا كان $f(x) = x|x|$، فأثبت أن $f'(0)$ موجودة.

س5: جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

① $f(x) = 2\sin x - e^x$

② $f(x) = \dfrac{\ln x}{4} - \pi\cos x$

③ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$

④ $f(x) = e^{x+1} + 1$

0799397737

⑤ $f(x) = e^x + x^e$

⑥ $f(x) = \ln(\frac{10}{x^n})$

س6: إذا كان $f(x) = \sin x + \frac{e^x}{2}$

① أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند $(\pi , \frac{e^\pi}{2})$

② أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند $(\pi, \frac{e^\pi}{2})$

---

③ أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران

$f(x) = e^x - 2x$

س7: إذا كان $f(x) = \ln kx$

حيث k عدد حقيقي موجب، $x>0$

فأثبت أن $f'(x) = \frac{1}{x}$

س8: إذا كان الاقتران $f(x) = \ln x$

① أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند $(e,1)$ يمر بـ $(0,0)$

② أثبت أنه المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند $(e,1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

س9: يمثل الاقتران

$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t \quad , t \geq 0$

موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث t الزمن بالثانية و s الموقع /م

① أجد السرعة المتجهة والتسارع عند $t=5$

② أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

③ في أي اتجاه يتحرك الجسم عند $t=4$

④ متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

س١٥: يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 4t,\ t \geq 0$

موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم

s الموقع/م ، t الزمن/ث

(1) حدد الموقع الابتدائي للجسيم.

(2) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفر.

س١١: يتحرك جسيم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويحدد الاقتران

$s(t) = 4\cos t$

موقع الجسيم عند أي زمن لاحق

t الزمن/ث ، s الموقع/م

(1) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه عند t

(2) أجد سرعة الجسيم وتسارعه عند $t = \frac{\pi}{4}$

(3) أصف حركة الجسم.

الدرس الثاني :

مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا.

* إذا كان $f(x)$, $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان : $H(x) = f(x)g(x)$ فإنه يمكن إيجاد مشتقة $H(x)$ باستخدام التعريف العام للمشتقة على النحو التالي : (مشتقة الضرب)

$$H'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{H(x+h) - H(x)}{h}$$

$$= \lim \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

بإضافة وطرح $f(x+h)\,g(x)$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)\,g(x+h) \underset{\text{طرح}}{-f(x+h)\,g(x)}}{h} + \frac{\overset{\text{اضافة}}{+f(x+h)\,g(x)} - f(x)\,g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

* نظرية :-

إذا كان $f(x)$, $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان $H(x) = f(x)g(x)$ فإن :

$$H'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

الأول * م. الثاني + الثاني * مشتقة الأول

مثال: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :-

① $f(x) = (x^2+2x)(\ln x)$

* مشتقة القسمة :-

* استخدم التعريف العام للمشتقة لإيجاد قاعدة مشتقة حاصل قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق.

* نظرية :-

إذا كان الاقترانين $f(x)$ ، $g(x)$ قابلين للاشتقاق وكان $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

فإن :-

$$A'(x) = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{\text{المقام} * \text{م. البسط} - \text{البسط} * \text{م. المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

* مثال 2 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

2) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

3) $f(x) = xe^x$

4) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

5) $f(x) = \ln x \cos x$

* إيجاد مشتقة قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق باستخدام التعريف العام للمشتقة :-

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) f(x+h) - f(x) g(x+h)}{h(g(x+h) g(x))}$$

* بإضافة وطرح $g(x) f(x)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) f(x+h) - g(x) f(x) + g(x) f(x) - f(x) g(x+h)}{h(g(x+h) g(x))}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) g(x)}$$

* توزيع النهاية على جميع العمليات

$$= \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{\text{المقام} * \text{م. البسط} - \text{البسط} * \text{م. المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال 3: تعطى درجة حرارة مريضة في أثناء مرضها بالاقتران:

$$T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$$

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض و T درجة الحرارة بالفهرنهايت

1) جد معدل تغير درجة حرارة المريضة بالنسبة إلى الزمن:

2) جد معدل تغير درجة حرارة المريضة عند $t=2$.

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

4) $y = \dfrac{\sin x}{e^x}$

س: يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران

$$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$$

حيث t الزمن بالسنوات و P عدد السكان بالآلاف:

1) جد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن:

2) جد معدل تغير عدد السكان في المدينة عند $t = 12$

* مشتقة المقلوب:
(ثابت على اقتران)

* إذا كان $f(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$$A(x) = \frac{1}{f(x)}$$

فإن :-

$$A'(x) = \frac{f(x) * 0 - 1 * f'(x)}{(f(x))^2}$$

باستخدام قاعدة قسمة اقترانين.

$$A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

* نظرية:
إذا كان K عدد ثابت وكان $f(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكان

$$A(x) = \frac{K}{f(x)}$$

فإن

$$A'(x) = \frac{-K f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$* \; A = \frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$$

$$A' = \frac{-\text{الثابت} * \text{م.العام}}{(\text{العام})^2}$$

* مثال ٦: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2) $f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$

3) $f(x) = \frac{5}{5x - x^2}$

4) $y = \frac{2}{e^x + \sqrt{x}}$

* مشتقات الاقترانات الدائرية:

• تذكر•

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \\ f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x \end{array}}$$

* باستعمال مشتقة القسمة جد مشتقة الاقتران $f(x) = \tan x$

• تذكر•

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

• تذكر • متطابقة•

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

• تذكر•

$$\boxed{\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$= \sec^2 x$$

* نظرية :-

1) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

2) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

3) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x * \tan x$

4) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x * \cot x$

س: اوجد مشتقات 1,2,3,4 باستخدام قاعدة القسمة

مثال: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 \sec x$

2) $f(x) = \frac{\csc x}{1 + \tan x}$

3) $f(x) = x \cot x$

4) $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$

* المشتقات العليا :-

* إذا كان $f(x)$ اقتران قابل للاشتقاق فإن $f'(x)$ أيضاً اقتران قابل للاشتقاق ويرمز لمشتقة $f'(x)$ بالرمز $f''(x)$. المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$.

وهكذا مشتقة $f''(x) \leftarrow f'''(x)$

المشتقة الثالثة لـ $f(x)$

وهكذا المشتقة $(n) \leftarrow f^{(n)}(x)$

n: عدد مرات الاشتقاق

* رموز المشتقة

1) $f'(x) \longrightarrow \frac{dy}{dx} , \frac{d}{dx} f(x)$

2) $f''(x) \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} , \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

3) $f'''(x) \longrightarrow \frac{d^3y}{dx^3} , \frac{d^3}{dx^3} f(x)$

4) $f^{(n)}(x) \longrightarrow \frac{d^ny}{dx^n} , \frac{d^n}{dx^n} f(x)$

مثال: أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

•

•

•

•

مثال: أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

*أسئلة الدرس الثاني :-

س١: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :-

① $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

② $f(x) = x^3 \sec x$

③ $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

④ $f(x) = e^x(\tan x - x)$

⑤ $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

⑥ $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

⑦ $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

⑧ $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$

⑨ $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x-3}$

⑩ $f(x) = (x^3 - x)(x^2+2)(x^2+x+1)$

⑪ $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

س٢: إذا كان $f(x)$, $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 0$
وكان $f(0) = 5$, $f'(0) = -3$
$g(0) = -1$, $g'(0) = 2$
فجد كل مما يأتي :-

① $(fg)'(0)$

② $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

③ $(7f - 2fg)'(0)$

س٥: أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4} \quad , \quad x = -2$

② $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} \quad , \quad x = 8$

③ $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \quad , \quad x = 4$

س٦: أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

① $f(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x} \quad , \quad (0, \tfrac{1}{2})$

② $f(x) = e^x \cos x + \sin x \quad , \quad (0,1)$

س5: أثبت صحة كل مما يأتي معتمداً على

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

① $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

② $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

③ $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

س6: جد المشتقة العليا المطلوبة لكل مما يأتي:-

① $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$, $f'''(x)$

② $f'''(x) = 2\sqrt{x}$, $f^{(4)}(x)$

③ $f^{(4)}(x) = 2x+1$, $f^{(6)}(x)$

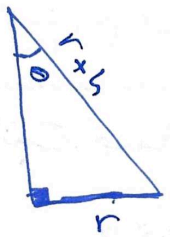
س7: إذا كان الاقتران $y = e^x \sin x$

1) أجد $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

2) أثبت أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

① أثبت أن $h=r(\csc\theta-1)$



$$\sin\theta=\frac{r}{r+h}\Rightarrow(r+h)(\sin\theta)=r$$

$$\Rightarrow r+h=\frac{r}{\sin\theta}\Rightarrow h=\frac{r}{\sin\theta}-r$$

$$\Rightarrow h=\frac{r-r\sin\theta}{\sin\theta}\Rightarrow h=r\,\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow h=r\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$\Rightarrow h=r(\csc\theta-1)$$ #.

② جد $\frac{dh}{d\theta}$ عند $\theta=\frac{\pi}{6}$ ، $r=6371$

$$h=r(\csc\theta-1)$$

$$\frac{dh}{d\theta}=r(-\csc\theta\cot\theta)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=-r\left(\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

8

حسن الصقر الصاعي

س8: وجد باحثون زراعيون أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة معينة من نباتات تباع الشمس h بالأمتار باستعمال الاقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$

حيث t الزمن بالأشهر بعد الزراعة.

* أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

س9: عندما تدور الأقمار الصناعية حول الأرض، فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض، وبعض الأقمار تحتوي مستشعرات لقياس الزاوية θ.

إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض / كم.

و r يمثل نصف قطر الأرض / كم.

① أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

② أجد $\frac{dh}{d\theta}$ عند $\theta = \frac{\pi}{6}$ $(r = 6371\ Km)$

س١٥: إذا كان: $P(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$

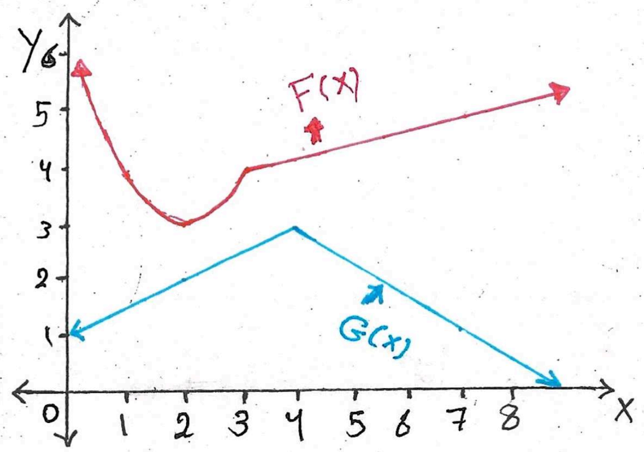
فأثبت $P'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

س: يبين الشكل التالي منحنى $F(x), G(x)$

إذا كان $P(x) = F(x)G(x)$

وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ، فجد ما يلي:

① $P'(2)$ ② $Q'(7)$



س١٢: إذا كان: $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

① أجد ميل المماس عند $(0,0)$

② بيّن عدم وجود مماس أفقي لـ Y

س١٣: إذا كان $y = \frac{x+1}{x-1} , x \neq 1$

① $\frac{dy}{dx}$

② أعد تعريف المعادلة (x اقتران بالنسبة إلى y) ثم جد $\frac{dx}{dy}$

③ أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

س١٤: إذا كان $y = x^2 e^x$

① أجد المشتقات الخمس الأولى للاقتران y

② أجد قاعدة عامة لـ $\frac{d^n y}{dx^n}$

س١٥: إذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

① أثبت أن $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$

الأستاذ: معتصم عدنان

0799397737

2 أجد قيمة المقدار

$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$

* الدرس الثالث :
قاعدة السلسلة :-

* قاعدة السلسلة :
هي احدى قواعد الاشتقاق وأهمها ، وتستخدم لإيجاد مشتقة الاقترانات الناتجة من تركيب الاقترانات :-

* مثال ١ : إذا كان $y = u^4$ وكان $u = 5x^3 - 2x$ فجد $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$$
$$= 4(5x - 2x)^3 (15x^2 - 2)$$

* يمكن أن يأتي السؤال بشكل آخر

$$h(x) = (5x^3 - 2x)^4$$

* سيكون هنالك طريقتين للحل
① نفرض أن ما داخل القوس (u) ثم نحول $h(x)$ الى y

$$y = u^4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

كما في المثال السابق.

② نشتق قوس القوة ثم نشتق ما داخل القوس كما يلي

$$h(x) = (5x^3 - 2x)^4$$
$$h'(x) = \underbrace{4(5x^3 - 2x)^3}_{\text{نشتق القوة}} \times \underbrace{(15x^2 - 2)}_{\text{نشتق ما داخل القوس}}$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

* إذا حدد السؤال طريقة الحل نلتزم بها.

* نظرية :

- إذا كان $f(x)$ ، $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن :

$$\underbrace{(f \circ g)'(x)}_{\text{تركيب}} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- إذا كان : $y = f(u)$ وكان $u = g(x)$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

* نتيجة *

* الاقترانات الدائرية إذا كانت الزاوية $g(x)$ وكان قابلاً للاشتقاق:

* مشتقة الاقتران الدائري $\times g'(x)$
مشتقة الزاوية

* مثال 2:

① $\frac{d}{dx}(\cos(g(x)))$
$= -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$

② $\frac{d}{dx}(\sin(g(x)))$
$= \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

③ $\frac{d}{dx}(\tan(g(x)))$
$= \sec^2(g(x)) \cdot g'(x)$

④ $\frac{d}{dx}(\csc g(x))$
$= -\csc(g(x))\cot(g(x)) \cdot g'(x)$

⑤ $\frac{d}{dx}(\sec(g(x)))$
$= \sec(g(x))\tan(g(x)) \cdot g'(x)$

⑥ $\frac{d}{dx}(\cot(g(x)))$
$= -\csc^2(g(x)) \cdot g'(x)$

⑦ $\frac{d}{dx}(e^{g(x)})$
$= e^{g(x)} \cdot g'(x)$

⑧ $\frac{d}{dx}(\ln g(x))$
$= \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال 3: أجد مشتقة كل مما يأتي:

① $f(x) = \cos 2x$
$f'(x) = -\sin 2x \cdot (2)$
$= -2\sin 2x$

② $f(x) = e^{(x+x^2)}$
$f'(x) = e^{(x+x^2)} \cdot (1+2x)$
$= (1+2x)\, e^{(x+x^2)}$

③ $f(x) = \ln(\sin x)$
$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$
$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

④ $f(x) = \tan 3x^2$
$f'(x) = \sec 3x^2 \cdot 6x$
$= 6x \cdot \sec 3x^2$

② $f(x) = \tan^4 x$

$f'(x) = 4\tan^3 x \cdot (\sec^2 x)$

③ $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$= (\ln x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

④ $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$= (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$

$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{\frac{-3}{5}} \cdot 2x$

$= \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

⑤ $f(x) = \sqrt{\cos x} = (\cos x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\sin x$

$= \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

⑥ $f(x) = (\ln x)^5$

$f'(x) = 5(\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{5(\ln x)^4}{x}$

⑤ $f(x) = e^{\ln x}$

$f'(x) = e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

$= x \cdot \frac{1}{x} = 1$

⑥ $f(x) = \ln(\cot x)$

$f'(x) = \frac{1}{\cot x} \cdot -\csc^2 x$

$= -\frac{\csc^2 x}{\cot x}$

* قاعدة سلسلة القوة:

* $f(x) = (g(x))^n$

$f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

مثال ٤: أجد مشتقة كل مما يلي:

① $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$= (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x$

$= \frac{2}{3} \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

الأستاذ: معتصم عدنان

0799397737

* الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة :-

* $h = f(g(x))$

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

* $h(x) = f(g(t(x)))$

$h'(x) = f'(g(t(x))) \cdot g'(t(x))$

$g'(t(x)) = g'(t(x)) \cdot t'(x)$

$\Rightarrow h'(x) = f'(g(t(x))) \cdot \underbrace{g'(t(x)) \cdot t'(x)}_{g'(t(x))}$

* أو باستخدام y .

$y = f(u)$, $u = g(t)$, $t = h(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \times \frac{\cancel{du}}{\cancel{dt}} \times \frac{\cancel{dt}}{dx}$$

مثال 5 : أجد مشتقة كل مما يلي :

① $f(x) = e^{\csc 4x}$

$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$

$= \underbrace{-4\csc 4x \cot 4x}_{\frac{d}{dx}(\csc 4x)} \cdot e^{\csc 4x}$

② $f(x) = \sin(\tan(\sqrt{3x^2+4}))$

$f'(x) = \cos(\tan(\sqrt{3x^2+4})) \cdot \sec^2(\sqrt{3x^2+4}) \cdot \frac{\cancel{6}^{3}x}{\cancel{2}(\sqrt{3x^2+4})}$

$$= \frac{\cos(\tan(\sqrt{3x^2+4})) \cdot \sec^2(\sqrt{3x^2+4}) \cdot 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

③ $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$

$= (\cos(7x^3+6x-1))^2$

$f'(x) = 2(\cos(7x^3+6x+1)) \cdot -\sin(7x^3+6x-1) \cdot (21x^2+6)$

$= -2\cos(7x^3+6x-1) \cdot \sin(7x^3+6x-1) \cdot (21x^2+6)$

④ $f(x) = (2 + (x^2+1)^4)^3$

$f'(x) = 3(2 + (x^2+1)^4)^2$
$\cdot (0 + 4(x^2+1)^3 \cdot 2x$

$= 6x(2 + (x^2+1)^4)^2 (4(x^2+1))^3$

$= 24x(2 + (x^2+1)^4)^2 (x^2+1)^3$

مثال 6: أجد ميل المماس لمنحنى :

$f(x) = e^{-0.2x} \sin 4x \quad , \quad x = \frac{\pi}{8}$

مثال 7: أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى :

$f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2 \quad , \quad x = 0$

س١: أجد ميل المماس لمنحنى:

$$f(x) = (2x+1)^5 (x^3 - x + 1)^4 \quad , \quad x = 1$$

س٢: أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}} \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$$

مثال 8: طرحت احدى الشركات منتجاً جديداً في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.
إذا مثل الاقتران عدد القطع المبيعة من طرحه، t أسبوع

$$N(t)=\frac{250000t^2}{(2t+1)^2}, \quad t>0$$

1. جد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن.
2. أجد $N'(52)$

س: إذا كانت قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تحسب باستعمال الاقتران

$$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج:

1. أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج.
2. أجد $U'(20)$

* مشتقة $\left(a^{(g(x))}\right)$:

* نظرية:

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا ، وا $a \neq 1$ وكان $g(x)$ قابلاً للإشتقاق فإن

① $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

② $\frac{d}{dx}(a^{(g(x))}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$

* اثبات النظرية :

①

$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$

$= e^{x \ln a} \cdot \ln a$

$= a^x \cdot \ln a$

س: أثبت الفرع الثاني من النظرية.

مثال ٩ : أجد مشتقة كل مما يلي :

① $f(x) = 8^{5x}$

$f'(x) = 8^{5x}(\ln 8)(5)$

$= (5 \ln 8)(8^{5x})$

② $f(x) = 6^{x^2}$

$f'(x) = 6^{x^2}(\ln 6)(2x)$

$= 2x(\ln 6)\, 6^{x^2}$

③ $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f'(x) = 3e^{3x} + 2^{3x}(\ln 2)(3)$

$= 3e^{3x} + 3(\ln 2)(2^{3x})$

④ $f(x) = \pi^{\pi x}$

$f'(x) = \pi^{\pi x}(\ln \pi)(\pi)$

$= (\pi \ln \pi)\, \pi^{\pi x}$

⑤ $f(x) = 6^{1-x^3}$

$f'(x) = 6^{(1-x^3)}(\ln 6)(-3x^2)$

$= -3x^2(\ln 6)(6^{(1-x^3)})$

⑥ $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$f'(x) = 4e^{4x} + 4^{2x}(\ln 4)(2)$

$= 4e^{4x} + (2 \ln 4)\, 4^{2x}$

*مشتقة $(\log_a g(x))$:

*نظرية

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا و $a \neq 1$ ، وكان $g(x)$ قابلاً للاشتقاق:

① $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

الإثبات:-

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ قواعد الـ log

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left(\frac{d}{dx}(\ln x)\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

② $\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)(g(x))}$

الإثبات:

$$\log_a g(x) = \frac{\ln g(x)}{\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln g(x)}{\ln a}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{g'(x)}{(\ln a)(g(x))}$$

*مثال 10: أجد مشتقة كل مما يلي:

① $f(x) = \log_{10} \cos x$

*ملاحظة:
إذا لم يكتب قيمة a في الاقتران فإنها تكون 10

* $\log x^2 = \log_{10} x^2$

* $\log \sin x = \log_{10} x$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$$

$$= \frac{-\tan x}{\ln(10)}$$

② $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

$$f(x) = \log_2 x^2 - \log_2 (x-1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(\ln 2)\, x^2} - \frac{1}{\ln(2)(x-1)}$$

$$= \frac{2}{\ln(2)(x)} - \frac{1}{\ln(2)(x-1)}$$

③ $f(x) = \log \sec x$

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln(10) \sec x}$$

$$= \frac{\tan x}{\ln(10)}$$

④ $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{\ln(8)(x^2+3x)}$$

* مشتقة المعادلات الوسيطية:

*** المعادلة الوسيطية:**

هي معادلة تتكون من X, Y بحيث أن $X = h(t)$, $Y = g(t)$ وذلك بسبب عدم وجود علاقة تربط بين جميع قيم X بجميع Y

*** المتغير الوسيط:**

هو المتغير الذي يحدد قيمة لـ X وقيمة أخرى لـ Y

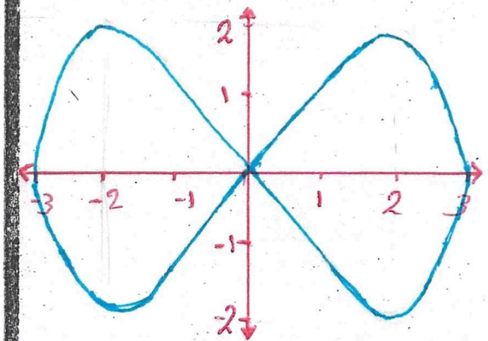
*** مجال الوسيط:**

هي الفترة التي تتضمن إليها قيم t

$$\underbrace{x = h(t)\ ,\ y = g(t)}_{\text{معادلة وسيطية}}$$

$$\underbrace{t_0 \le t \le t_1}_{\text{مجال الوسيط}}$$

*** مثال 11:**



يمثل الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية

$x = 3\cos t, \quad y = 2\sin 2t$

$0 \leq t \leq 2\pi$

* يمكن ايجاد $\frac{dy}{dx}$ لهذه المعادلة الوسيطية بإيجاد مشتقة كل من y, x بالنسبة إلى الوسيط t، ثم استعمال قاعدة السلسلة :

$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$

$\frac{dy}{dt} = 4$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$= 4\cos t$

خطأ بالسؤال

52

السؤال : $y = 2\sin 2t$

المشتقة في الكل : $\frac{dy}{dt} = 4\cos t$

يجب

لازم $2t$ ويعيد السؤال

أو 4 ويعيد الزاوية

س : أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عند $t = \frac{\pi}{4}$

$x = \sec t, \quad y = \tan t$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

0799397737

* قاعدة: مشتقة المعادلة الوسيطية:

إذا كان h ، g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t وكان $x = h(t)$ و $y = g(t)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 12: أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عند $t = \frac{\pi}{4}$

$x = 2\sin t \quad , \quad y = 3\cos t$

$0 \leq t \leq \pi$

الحل:

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= -3\sin t \times \frac{1}{2\cos t}$$

$$= \frac{-3}{2}\,\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-3}{2}\tan t$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{2}\tan\frac{\pi}{4} = \frac{-3}{2}$$

$m = \frac{-3}{2} \quad , \quad x_1 = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}$

$, \quad y_1 = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\,\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(y = \frac{-3}{2}x + \frac{6}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \times 2$$

$$2y = -3x + \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$2y = -3x + \frac{2\times 6}{\sqrt{2}}$$

$$2y = -3x + 6\sqrt{2}$$

$$2y + 3x = 6\sqrt{2}$$

* أسئلة الدرس :-

س1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يلي :

① $f(x) = e^{4x+2}$

② $f(x) = 50e^{2x-10}$

③ $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

④ $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

⑤ $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

⑥ $f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$

⑦ $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

⑧ $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

⑨ $f(x) = (\ln x)^4$

⑩ $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

⑪ $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

⑫ $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

⑬ $f(x) = 2^{-x}\cos\pi x$

⑭ $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

⑮ $f(x) = \frac{10\log_4 x}{x}$

س : أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عند $t = \frac{\pi}{4}$

$x = \sec t \qquad y = \tan t$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

0799397737

س5: يمثل الاقتران $A(t) = Ne^{0.1t}$
عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة
في مجتمع بكتيري:-

1) أجد معدل نمو المجتمع بعد 9 ساعات بدلالة الثابت N

2) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد K ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة فما قيمة K بدلالة الثابت N

س6: أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

1) $f(x) = \sin \pi x \quad , \quad f''(x)$

2) $f(x) = \cos(2x+1) \quad , \quad f^{(5)}(x)$

3) $f(x) = \cos x^2 \quad , \quad f''(x)$

س7: إذا كان الاقتران $y = e^{\sin x}$
فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة (1, 0).

16) $f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$

17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

18) $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

س2: أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = 4e^{-0.5x^2} \quad , x = -2$

2) $f(x) = x + \cos 2x \quad , \quad x = 0$

3) $f(x) = 2^x \quad , \quad x = 0$

4) $f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2} \quad , \quad x = 3$

س3: إذا كان: $A(x) = f(g(x))$
وكان: $g(5) = -2 , \; g'(5) = 6$
$f(-2) = 8 , \; 4 = f'(-2) \quad , \quad f'(5) = 3$
فجد $A'(5)$

س4: إذا كان: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

فأثبت أن:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

0799397737

س8: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران

$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$$

أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t=2$.

س9: تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ويحدد الاقتران

$$S(t) = 0.1 \sin 2.4t$$

موقع الكرة عند أي زمن لاحق حيث t: ث، s: سم:

1) أجد السرعة المتجهة للكرة عند $t=1$

2) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها 0

3) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها 0

س10: أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي:

1) $x = \frac{t}{2}, \quad y = t^2 - 4, \quad t = -1$

2) $x = t+2, \quad y = t^2 - 1, \quad t = 1$

3) $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$

$t = \frac{\pi}{3}$

4) $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t$

$t = -\frac{\pi}{4}$

س11: يعطى منحنى المعادلة الوسيطية

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عند $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ على الترتيب

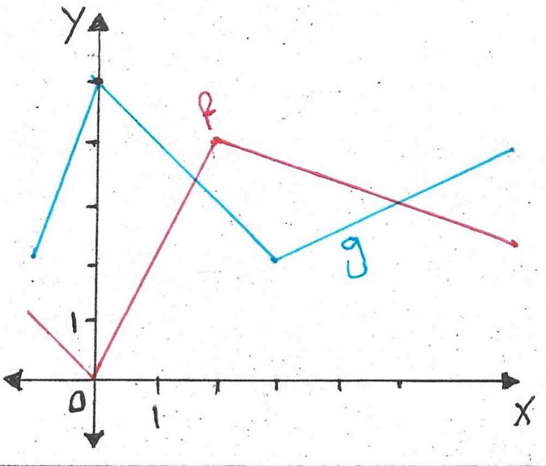
س12: يبين الشكل منحنيي $f(x)$, $g(x)$

إذا كان: $h(x) = f(g(x))$

وكان: $P(x) = g(f(x))$، فجد:

1) $P'(1)$

2) $h'(1)$



س13: إذا كان الاقتران $y=\ln(ax+b)$ حيث b,a ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند $P = 1$

① أثبت أن الاحداثي x للنقطة P أقل من 1

② أجد احداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$، علماً بأن P هي $(0,2)$

س14: يعطى منحنى العلاقة الوسيطية

$$x=t^2 \quad , \quad y=2t$$

① أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

② أجد معادلة العمودي على المماس عند $(t^2,2t)$

③ أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس والمحورين الاحداثيين هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

س15: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

① $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

② $y=e^x\sin^2x\cos x$

س16: يمثل الاقتران:

$$s(t)=\ln(t^2-2t+1.9) \quad , \quad t\geq 0$$

موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالمتر، t الزمن بالثواني:

① أجد السرعة المتجهة والتسارع بعد t ثانية

② أجد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته المتجهة صفر.

③ متى يعود الجسيم الى موقعه الابتدائي؟

* الدرس الرابع :
الاشتقاق الضمني :

* العلاقة الضمنية :
هي العلاقات التي لا يمكن كتابتها بصورة صريحة $y=f(x)$

$$x^3+y^3-9xy=0$$

علاقة ضمنية لا يمكن كتابتها على شكل $y=f(x)$ (شكل صريح)

* الاشتقاق الضمني :
هو عملية ايجاد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقات الضمنية.
بالطريقة التالية :-

مثال 1 : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :-

① $x^2+y^2=4$

* نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ x

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(4)$$

* نوزع $\frac{d}{dx}$

$$\frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(y^2)}{dx}=0$$

* إشتق

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

* نجعل $\frac{dy}{dx}$ في طرف لوحدها.

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

② $\sin x+\cos y=2x-3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x+\cos y)=\frac{d}{dx}(2x-3y)$$

$$\cos x-\sin y.\frac{dy}{dx}=2-3\frac{dy}{dx}$$

* نجمع الحدود بحيث أن نجعل $\frac{dy}{dx}$ في طرف والباقي في الطرف الآخر

$$-\sin y.\frac{dy}{dx}+\frac{3dy}{dx}=2-\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3-\sin y)=2-\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-\cos x}{3-\sin y}$$

(3) $x^2+y^2=13$

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(13)$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

---

(4) $2x+5y^2=\sin y$

$$\frac{d}{dx}(2x+5y^2)=\frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2+10y\frac{dy}{dx}=\cos y.\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx}-\cos y\frac{dy}{dx}=-2$$

$$\frac{dy}{dx}(10y-\cos y)=-2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{(10y-\cos y)}$$

---

(5) $2xy-y^3=1$

$$\frac{d}{dx}(2xy-y^3)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\underbrace{2x.\frac{dy}{dx}-2y}_{\frac{d}{dx}(2xy)}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x.\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x-3y^2)=2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{(2x-3y^2)}$$

---

(6) $\sin(x+y)=y^2\cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y))=\frac{d}{dx}(y^2\cos x)$$

تكمل الحل خلف الصفحة

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \frac{d}{dx}(y^2\cos x)$$

$$\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = -\sin x\, y^2 + 2y\frac{dy}{dx}\cos x$$

$$\cos(x+y) + \frac{dy}{dx}\cos(x+y) = -y^2\sin x + \frac{dy}{dx}2y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}\cos(x+y) - \frac{dy}{dx}2y\cos x = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\sin x - \cos(x+y)}{(\cos(x+y) - 2y\cos x)}$$

7) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{2y(x+1)^2} = \frac{2}{2y(x+1)^2}$

8) $3xy^2 + y^3 = 8$

$\left(3x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(3)\right) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$

$6xy\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$

$\frac{dy}{dx}(6xy - 3y^2) = -3y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{(6xy-3y^2)}$

$= \frac{\cancel{-3y}\,(y)}{\cancel{-3y}\,(y-2x)} = \frac{y}{(y-2x)}$

9) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$\sec^2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 2y^3 + 2x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)$

$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx}$

$= 2y^3 + 6xy^2\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow -\sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} - 6xy^2\frac{dy}{dx}$

$= 2y^3 - \sec^2(x-y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(-\sec^2(x-y) - 6xy^2\right)$

$= 2y^3 - \sec^2(x-y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y^3 - \sec^2(x-y)}{(-\sec^2(x-y) - 6xy^2)}$

$= \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{\sec^2(x-y) + 6xy^2}$

س: أجد $\frac{dy}{dx}$ لـ :

$x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

* لايجاد ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية نجد $\frac{dy}{dx}$ ثم نعوض قيم x ، y المعطاة للنقطة المطلوبة

مثال 2 : أجد ميل المماس :-

① $e^{2x}\ln y = x+y-2 \,,\ (1,1)$

$$e^{2x}\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\ln y\,(2e^{2x}) = 1+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{e^{2x}}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+2e^{2x}\ln y = 1+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{e^{2x}}{y}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx} = 1-2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y}-1\right) = 1-2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{d(x)} = \frac{1-2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y}-1}$$

at $(1,1)$

$$= \frac{1-2e^{2}\ln(1)}{e^{2}-1} = \frac{1}{e^{2}-1}$$

② $y^2 = x$ at $x=4$

* أولاً نجد قيم y :

$$y^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{4} \Rightarrow y = \pm 2$$

* نجد أنه يوجد نقطتين وهذا أنه يوجد مماسين عند $x=4$ لهما ميلين مختلفين

* نجد $\frac{dy}{dx}$ لايجاد الميل :-

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

النقطة الأولى $(4\,,\,2)$ ، المماس الأول

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,2)} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4} = m_1$$

النقطة الثانية $(4,-2)$ ، المماس الثاني

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,-2)} = \frac{1}{2(-2)} = \frac{-1}{4} = m_2$$

مثال 3: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقات التالية:

① $x^2 - xy + y^2 = 7 \quad , \text{at } (-1, 2)$

$$2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - x) = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x} \quad , m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,2)}$$

$$m = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{4}{5}(x + 1)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{4}{5} + 2$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$

③ $y^2 = \ln x \quad , (e, 1)$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2yx}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \frac{1}{2(1)(e)} = \frac{1}{2e}$$

④ $(y-3)^2 = 4(x-5) \quad , x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(6-5) = 4$$

$$\sqrt{(y-3)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow y - 3 = \pm 2$$

$$y = 1 \quad , \quad y = 5$$

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(y-3)}$$

$$m_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{1}{(1-3)} = \frac{-1}{2}$$

$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{1}{(5-3)} = \frac{1}{2}$$

* المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية :

* لايجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لعلاقة ضمنية نقوم باشتقاق $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى x

* إذا كانت المشتقة الاولى تحتوي على y فإن $\frac{d^2y}{dx}$ ستحتوي على $\frac{dy}{dx}$.

مثال 4: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يلي :

① $2x^3 - 3y^2 = 8$

$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$

$6y\frac{dy}{dx} = 6x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{6y} = \frac{x^2}{y}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(2x) - x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)}{(y)^2}$

نعوض قيمتها

$= \frac{2xy - x^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2}$

$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$

② $x^3 + y^3 - 3xy = 17 \quad , (2,3)$

$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - \left(3x\frac{dy}{dx} + 3y\right) = 0$

$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 3y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$

$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,3)} = \frac{9-12}{27-6} = \frac{-3}{21} = \frac{-1}{7}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{-1}{7}(x - 2)$

$y - 3 = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7}$

$y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$

$y = \frac{-1}{7}x + \frac{23}{7} = \frac{23 - x}{7}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{4}{3}}{(3t^2+6t)}$$

$$= \frac{4}{3(3t^2+6t)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{3(3+6)} = \frac{4}{27}$$

② $x = 3t^2+1$, $y = t^3-2t^2$ at $t=2$

$$\frac{dx}{dt} = 6t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2-4t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-4t}{6t} \quad \frac{t(3t-4)}{6t} = \frac{3t-4}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3/6)}{6t} = (1/2)(1/6t)$$
$$= 1/12t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{12(2)} = \frac{1}{24}$$

② $xy + y^2 = 2x$ h.w

* المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية:

إذا كان h, g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t وكان $y = g(t), x = h(t)$ و $\frac{dy}{dx}$ قابلاً للاشتقاق عند t، فإن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} , \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال5: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عند t=1

$$x = t^3+3t^2 \quad y = t^4-8t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2+6t \ , \ \frac{dy}{dt} = 4t^3-16t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t^3-16t}{3t^2+6t} = \frac{4\cancel{t}(t^2-4)}{3\cancel{t}(t+2)}$$

$$= \frac{4}{3}(t-2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\text{t مشتقة } \left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ بالنسبة إلى}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

* الاشتقاق اللوغاريتمي :-

* نستخدم هذه الطريقة عند وجود اقترانات غير لوغاريتمية معقدة

مثل : $y = x^x$

وذلك بأخذ (ln) للطرفين :-

مثال ٥ : أجد مشتقة كل مما يلي باستخدام الاشتقاق اللوغاريتمي :-

① $y = x^x$

$\ln y = \ln x^x = x \ln x$

$\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx} = x * \frac{1}{x} + \ln x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$

$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$

② $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$\ln y = \ln \frac{(x-1)^2}{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}$

$\ln y = 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9)$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{(x^2+9)}$

توحيد مقامات

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-1)} \cdot \frac{(x^2+9)}{(x^2+9)} - \frac{x}{(x^2+9)} \cdot \frac{(x-1)}{(x-1)}$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+18-x^2+x}{(x^2+9)(x-1)}$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x+18}{(x^2+9)(x-1)}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x+18}{(x^2+9)(x-1)} \cdot y$

$= \frac{x^2+x+18}{(x^2+9)\cancel{(x-1)}} \cdot \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\sqrt{x^2+9}}$

$= \frac{(x^2+x+18)(x-1)}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$

③ $y = x^{\sqrt{x}}$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\ln x$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2}\ln x\right)\cdot y$$

$$= \frac{x^{\sqrt{x}}}{x^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \ln x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1 + \ln\sqrt{x}\right)$$

④ $y = \sqrt{\frac{(x-1)}{(x^4+1)}} = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}$

$$\ln y = \ln(x-1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x^4+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{2\cancel{4}x^3}{x^4+1}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(x-1)}\cdot\frac{(x^4+1)}{(x^4+1)} - \frac{2x^3}{(x^4+1)}\cdot\frac{2(x-1)}{2(x-1)}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{(x^4+1) - 4(x^3)(x-1)}{2(x-1)(x^4+1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+1-4x^4+4x^3}{2(x-1)(x^4+1)}\cdot\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{4x^3-3x^4+1}{2(x-1)^{\frac{1}{2}}(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

أسئلة الدرس :-

س1: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

① $x^2 - 2y^2 = 4$

② $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

③ $(x^2+y^2)^2 = 50(x^2-y^2)$

④ $e^x y = x e^y$

⑤ $3^x = y - 2xy$

⑥ $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

⑦ $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

⑧ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

⑨ $x = \sec \frac{1}{y}$

⑩ $x + y = \cos(xy)$

⑪ $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

⑫ $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

س2: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة :-

① $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \quad , \quad x = \frac{1}{2}$

② $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , \quad y = 1$

س3: أجد ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة المعطاة :-

① $x^2 + y^2 = 25 \quad , \quad (3, -4)$

② $x^2 y = 4(2-y) \quad , \quad (2, 1)$

③ $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1 \quad , \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

④ $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \quad , \quad (8, 1)$

س4: أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة عند النقطة المعطاة :-

① $x^2 + xy + y^2 = 13 \quad , \quad (-4, 3)$

② $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2) \quad , \quad (1, 0)$

س6: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :-

① $x+y=\sin y$

② $4y^3=6x^2+1$

③ $xy+e^y=e$

س7: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة الآتية عند النقطة المعطاة :-

$(x-6)(y+4)=2 \quad , (7, -2)$

س8: اثبت أن لمنحنى العلاقة :

$3x^2+2xy+y^2=6$

مماسين افقيين، ثم أجد احداثييهما عند التماس :-

س9: أجد احداثيي نقطة على منحنى :

$x+y^2=1$

بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم : $x+2y=0$

س10: أجد احداثيي نقاط على منحنى :

$y^3=x^2$

بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًا على المستقيم :

$y+3x-5=0$

س11: إذا كان : $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$

حيث $x, y \neq 0$ فأثبت أن : $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

س12: أجد احداثيي النقطة على منحنى الاقتران

$y=x^{\frac{1}{x}} \quad , \quad x>0$

التي يكون عندها ميل المماس = صفر

س13: أجد احداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة : $x^2+y^2=100$

التي يكون عندها ميل المماس = $\frac{3}{4}$

س14: يمثل الاقتران : $s(t)=t^{\frac{1}{4}} \quad , t>0$

موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالمتر، t الزمن - ث -

① أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه.

② أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفر.

س15: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يأتي عند قيمة t المعطاة :-

① $x=\sin t \quad , y=\cos t$

$t=\frac{\pi}{4}$

② $x=e^{-t} \quad , y=t^3+t+1$

$t=0$

0799397737

س١٦: أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :-

① $y=(x^2+3)^x$

② $y=\dfrac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

③ $y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

④ $y=x^{\sin x}$

س١٧: إذا كانت العلاقة $x^3+y^3=6xy$ فأجب عن السؤالين الآتيين :-

① أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى العلاقة مع منحنى $y=x$ في الربع الأول .

② أجد احداثي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى افقي :-

س١٨: إذا كان : $x^2-y^2=1$ ، فأجب عن الأسئلة التالية :

① أجد $\dfrac{dy}{dx}$

② يمكن التعبير عن منحنى العلاقة السابقة بالمعادلة الوسيطية

$x=\sec t \;, y=\tan t \;, 0\le t\le 2\pi$

جد $\dfrac{dy}{dx}$ بدلالة t

③ أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\dfrac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئات .

④ أجد احداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس $=2$

س١٩: إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ ، حيث k ثابت موجب فأثبت أن مجموع المقطع x و y للمستقيم l يساوي k .

س٢٠: إذا كان مماس منحنى الاقتران $y=x^{\sqrt{x}}$ عند $(4,16)$ يقطع المحور x في النقطة B و y في C ، فأجد مساحة ΔOBC حيث O هي نقطة الأصل .