



الرياضيات

10

الصف العاشر

الفصل الدراسي الأول



كتاب
الطالب

الرياضيات

الصف العاشر - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبو غليون (رئيساً)

يوسف سليمان جرادات إبراهيم عقله القادري هيثم زهير مرشود

نفين أحمد جوهر (منسقاً)

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسرك المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العنوانين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjr feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (4/2020)، تاريخ 11/6/2020 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (56/2020) تاريخ 24/6/2020 م بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.



© HarperCollins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 360 - 9

المملكة الأردنية الهاشمية

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2022/4/2051)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: الصف العاشر: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول) / المركز الوطني لتطوير المناهج. - ط2؛ مزيدة
ومنقحة. - عمان: المركز، 2022

(144) ص.

ر.إ.: 2022/4/2051

الوصفات: / الرياضيات / / التعليم الاعدادي / / المناهج /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

م 2020 هـ / 1441

م 2021 - 2022 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

أعيدت طباعته

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيناً على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراسية التي تتميّز لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أُولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَبَعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيةها لحاجات طلبنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلم. وكذلك إبراز خطة حل المسألة، وإفراد دروس مستقلة لها تتيح للطلبة التدريب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقاتها في مسائل متعددة. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرب المكثف على حل المسائل يُعدُّ إحدى أهم طرائق ترسیخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلُّ بوصفها واجباً متزليًّا، أو داخل الغرفة الصفيية إنْ توافر الوقت الكافي. ولأنَّنا ندرك جيداً حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً توفر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مهمَّة؛ لما تزخر به من صفحات تُقدِّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوتنا طلبنا أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهُوَّة بين طلبنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالَم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب طلبنا والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمر في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

قائمة المحتويات

الوحدة 1 الأسس والمعادلات

مشروع الوحدة: أنظمة المعادلات في حياتنا	7
معلم برمجية جيوجبرا: حل أنظمة المعادلات بيانياً	8
الدرس 1 حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية	10
الدرس 2 حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين	17
الدرس 3 تبسيط المقادير الأساسية	23
الدرس 4 حل المعادلة الأساسية	29
اختبار نهاية الوحدة	34

الوحدة 2 الدائرة

مشروع الوحدة: استعمالات علمية لخصائص الدائرة	37
الدرس 1 أوتاور الدائرة، وأقطارها، ومماساتها	38
الدرس 2 الأقواس والقطاعات الدائرية	45
الدرس 3 الزوايا في الدائرة	51
الدرس 4 معادلة الدائرة	58
الدرس 5 الدوائر المتماسة	65
معلم برمجية جيوجبرا: توسيع: الدوائر المتماسة	71
اختبار نهاية الوحدة	73

قائمة المحتويات

الوحدة 3 حساب المثلثات	76
مشروع الوحدة: إنشاء نظام إحداثي جديد	77
الدرس 1 النسب المثلثية	78
الدرس 2 النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة	86
الدرس 3 تمثيل الاقترانات المثلثية	94
الدرس 4 حل المعادلات المثلثية	100
اختبار نهاية الوحدة	108
الوحدة 4 تطبيقات المثلثات	110
مشروع الوحدة: صنع كلينومتر واستعماله	111
الدرس 1 الاتجاه من الشمال	112
الدرس 2 قانون الجيب	118
الدرس 3 قانون جيب التمام	125
الدرس 4 استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث	131
الدرس 5 حل مسائل ثلاثة الأبعاد	136
اختبار نهاية الوحدة	142

الأسس والمعادلاتُ

Exponents and Equations



ما أهمية هذه الوحدة؟

تُستخدم أنظمة المعادلاتِ في كثيرٍ من مجالاتِ الحياةِ. فخبراءِ الأرصادِ الجوية - مثلاً - يُعبّرونَ عن العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارةِ، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطولِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطيةٍ؛ ذلكَ لأنَّ أيَّ تغييرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدّي إلى تغييرٍ في العواملِ الأخرىِ.

سأَتعلّمُ في هذهِ الوحدة:

- ◀ حلّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلةٍ خطيةٍ، وأُخرى تربيعيةٍ.
- ◀ حلّ نظامٍ مُكوَّنٍ منْ معادلتينٍ تربيعيتينٍ.
- ◀ الأسس النسبيةُ، وخصائصُها.
- ◀ حلّ أنظمةٍ معادلاتٍ أُسّيةٍ.

تعلّمتُ سابقاً:

- ✓ حلّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حلّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِ.
- ✓ حلّ أنظمةٍ معادلاتٍ تتضمَّنُ معادلتينٍ خطيتينٍ بمتغيرٍينِ.
- ✓ قواعدَ الأسس الصحيحةِ.

مشروع الوحدة



أنظمة المعادلات في حياتنا

البحث عن أنظمة معادلات في نماذج حياتية.

فكرة المشروع



شبكة الإنترنت، برمجية جيوجبرا.

المواد والأدوات



خطوات تفزيذ المشروع:

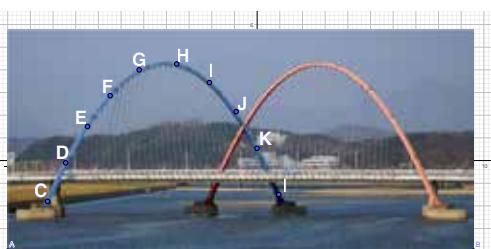
1 أبحث مع أفراد مجروعي في شبكة الإنترنت عن صور لنمذاج حياتية تظهر فيها منحنيات ومستقيمات متقطعة (مثل: الجسور، ونواصير المياه، وخرائط الطريق)، أو التقط صوراً لذلك، ثم أحفظها في ملف على جهاز الحاسوب.

2 أستعمل برمجية جيوجبرا لإيجاد معادلة كل من المنحنيات المتقطعة التي تظهر في الصور باتباع الخطوات الآتية:

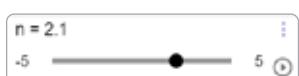
- أنقر على أيقونة من شريط الأدوات، ثم اختار الصورة التي حفظتها.

- أعدّل موقع الصورة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقاطين A و B اللتين تظهران عليها.

- أحدّ معادلة أحد المنحنيات التي تظهر في الصورة، وذلك بتحديد بعض النقاط عليه باستعمال أيقونة من شريط الأدوات.



- أكتب الصيغة $\text{FitPoly}(\{C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}, n)$ في شريط الإدخال، ثم أنقر لظهور منحنى فوق الصورة، ومعادلة في شريط الإدخال.



- أستعمل المؤشر فوق المعادلة لضبط المنحنى الظاهر، بحيث ينطبق تماماً على المنحنى الذي في الصورة.

- أكرر الخطوات السابقة لتحديد معادلات المنحنيات الأخرى التي تظهر في الصورة.

3 أكتب مع أفراد مجروعي نظام معادلات يمثل منحنين متقطعين في كل صورة، ثم اختار إحدى هذه الأنظمة لنحلها جبرياً، ثم نتحقق من صحة الحل بإظهار نقاط تقاطع المنحنين في برمجية جيوجبرا.

عرض النتائج:

أعدّ مع أفراد مجروعي عرضاً تقديميّاً نبيّن فيه ما يأتي:

- خطوات تفزيذ المشروع موضحة بالصور (نستعمل خاصية طباعة الشاشة).

- بعض الصعوبات التي واجهناها في أثناء العمل بالمشروع، ومعلومة جديدة تعرّفناها في أثناء العمل بالمشروع.

حل أنظمة المعادلات بيانياً

Solving Systems of Equations Graphically

يمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيل أنظمة المعادلات، وحلّها بيانياً.

استعمل الرابط [www.geogebra.org /download](http://www.geogebra.org/download) لتنزيل نسخة 6 GeoGebra Classic من هذه البرمجية على جهاز الكمبيوتر. يمكنني أيضاً استعمال النسخة المتوفرة في شبكة الإنترنت من دون حاجة إلى تثبيتها في جهاز الكمبيوتر عن طريق الرابط الإلكتروني: www.geogebra.org /classic

نشاط

أحلُّ نظام المعادلات التربيعية الآتي بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا.

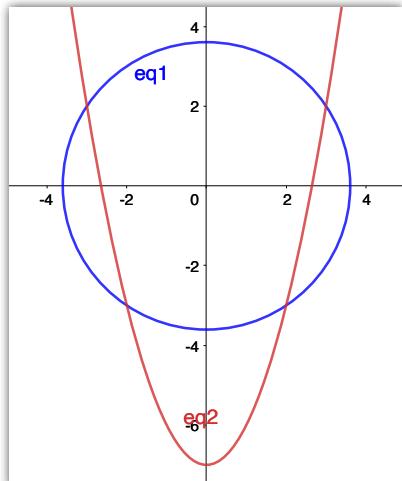
$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

الخطوة 1: أمثل بيانياً المعادلة التربيعية: $x^2 + y^2 = 13$.

أدخل المعادلة في حاسبة جيوجبرا، بالنقر على المفاتيح الآتية:

x	x^2	+	y	y^2	=	1	3	←
---	-------	---	---	-------	---	---	---	---



الخطوة 2: أمثل بيانياً المعادلة التربيعية: $x^2 - y = 7$.

أدخل المعادلة في حاسبة جيوجبرا، بالنقر على المفاتيح الآتية:

x	x^2	-	y	=	7	←
---	-------	---	---	---	---	---

الاحظ أنَّ منحنيَّ المعادلتَين يتقاطعان في أربع نقاطٍ؛ ما يعني وجود أربعة حلولٍ لنظام المعادلات.

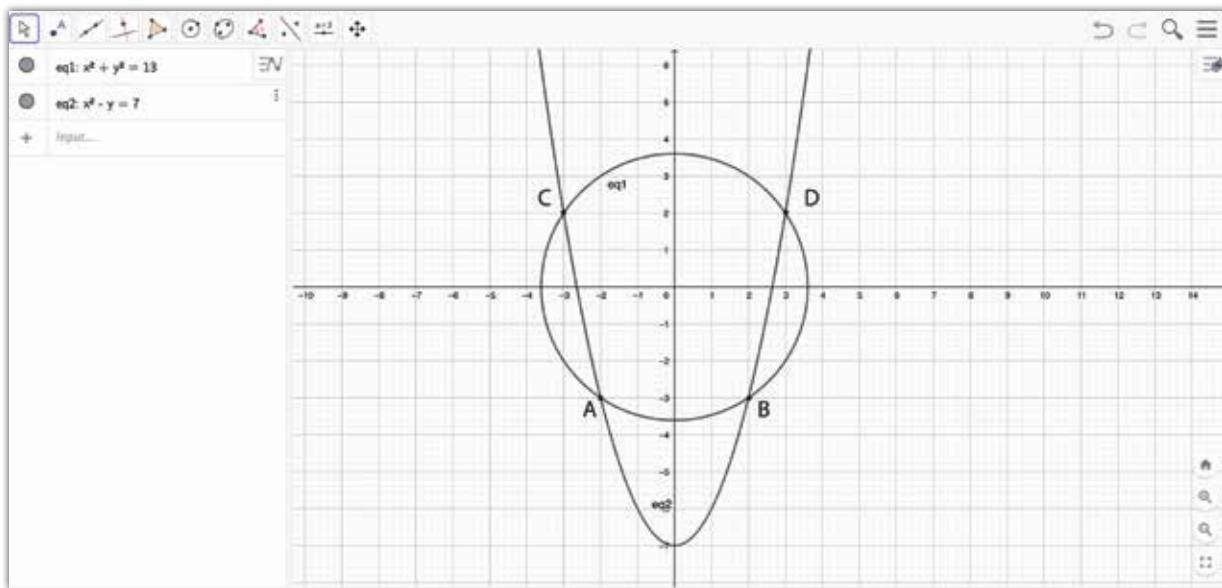
الوحدة ١



من شريط الأدوات، ثم انقر على **Intersect**

الخطوة ٣: أحدد إحداثيات نقاط التقاء بين منحني المعادلتين. اختار

على منحني المعادلتين، فنظهر إحداثيات نقاط التقاء.



إحداثيات نقاط التقاء هي: $(-3, 2), (3, 2), (2, -3), (-2, -3)$; ما يعني أن حلول نظام المعادلات هي:

$$x = 3, y = 2 \quad \text{الحل الثاني:}$$

$$x = -2, y = -3 \quad \text{الحل الرابع:}$$

$$x = -3, y = 2 \quad \text{الحل الأول:}$$

$$x = 2, y = -3 \quad \text{الحل الثالث:}$$

أتدرب

أحل كلّ نظام معادلاتٍ مما يأتي بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا:

١) $y = x - 4$

$$2x^2 + 3y^2 = 12$$

٢) $y = x^2$

$$x^2 + 2y^2 = 34$$

٣) $x + y = 16$

$$x^2 - y^2 = 20$$

٤) $3x + 4y = 1$

$$y = x^2 + 5$$

٥) $y = 6x$

$$x^2 + y^2 = 9$$

٦) $x = 7 + y$

$$y = 3x^2 - 2$$

حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية

Solving a System of Linear and Quadratic Equations



حل نظام مكون من معادلة خطية ومعادلة تربيعية.

فكرة الدرس

تُمثل المعادلة $3 - x = y$ طریقاً مستقیماً داخل إحدى المدن، في حين تُمثل المعادلة $x^2 - 3x - 10 = y$ طریقاً آخر منحنیاً داخل المدينة نفسها. هل يتقاطع هذان الطريقان أم لا؟



يمکنني حل نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية باستعمال طریقة التعویض، وذلك بكتابه أحد المتغيرين في المعادلة الخطية بدلاة الآخر، ثم تعویضه في المعادلة التربيعية وحلها.

مثال 1

أحل نظام المعادلات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$x - y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

يمکنني استعمال برمجیة جیوجبرا (GeoGebra)، أو حاسبة بيانیة، لتمثیل المعادلتین بیانیاً على المستوى الإحداثي نفسه كما في التمثیل البياني المجاور. الاحظ أن منحنیي المعادلتین يتقاطعان في نقطتين؛ ما يعني أن للنظام حلین مختلفین. أتحقق من ذلك جریاً باستعمال طریقة التعویض:

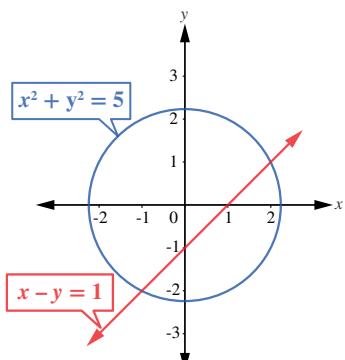
الخطوة 1 أكتب المعادلة الخطية بالصورة القياسیة (بدلاة y).

$$x - y = 1$$

$$y = x - 1$$

المعادلة الخطية

بكتابه y بدلاة x



الخطوة 2 أعرض قيمة x من المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5$$

تعویض y في المعادلة التربيعية

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$$

بفك القوسين

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

بالتبسيط

$$x^2 - x - 2 = 0$$

بالقسمة على 2

الوحدة 1

الخطوة 3 أحل المعادلة الناتجة باستعمال التحليل:

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{or} \quad x-2=0$$

$$x=-1 \quad \text{or} \quad x=2$$

بالتحليل

خاصية الضرب الصفرى

بحل المعادلين

أذكُر

توجد طرائق عدَّة لحل معادلة تربيعية، منها:
التحليل إلى العوامل،
والقانون العام.

الخطوة 4 أعوْض قيمة x لإيجاد قيمة y :

الحالة الأولى: عندما $-1 = x$:

$$y = x - 1$$

$$y = -1 - 1 = -2$$

بتعويض $-1 = x$ في المعادلة الخطية

الحل الأول: $(x, y) = (-1, -2)$.

للتتحقق من صحة الحل الأول، أعوْض الزوج المُرتب $(-1, -2)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

$$x - y = -1 - (-2) = 1 \quad \checkmark$$

بتعويض في المعادلة الخطية

$$x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5 \quad \checkmark$$

بتعويض في المعادلة التربيعية

الحالة الثانية: عندما $2 = x$:

$$y = 2 - 1 = 1$$

بتعويض $2 = x$ في المعادلة الخطية

الحل الثاني: $(x, y) = (2, 1)$.

للتتحقق من صحة الحل الثاني، أعوْض الزوج المُرتب $(2, 1)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

$$x - y = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

بتعويض في المعادلة الخطية

$$x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5 \quad \checkmark$$

بتعويض في المعادلة التربيعية

إرشاد

يجب تعويض الحل في كل معادلتي النظام؛ لكيلا يكون الحل غير صحيح، بحيث يتحقق إحدى المعادلين من دون الأخرى.

أتحقق من فهمي

أحل نظام المعادلات الآتى، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$2x + y = 12$$

$$y = x^2 + 5x - 6$$

يوجِد حلان لنظام المعادلات في المثال السابق. ولكن، هل يوجد نظام معادلات له حل واحد؟ لمعرفة الإجابة، أدرس المثال الآتى.

مثال 2

أَحْلُّ نَسَمَةِ الْمَعَادِلَاتِ الْآتِيَّةِ:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

$$4y - 8x = -21$$

عند تمثيل معادلتي النظام في المستوى الإحداثي نفسه، يلاحظ وجود نقطة تقاطع واحدة كما في التمثيل البياني المجاور؛ ما يعني أن للنظام حلًا واحدًا فقط. أتحقق من ذلك جبرياً باستعمال طريقة التعويض:

الخطوة 1 أكتب المعادلة الخطية بالصورة القياسية (بدالة y):

$$4y - 8x = -21$$

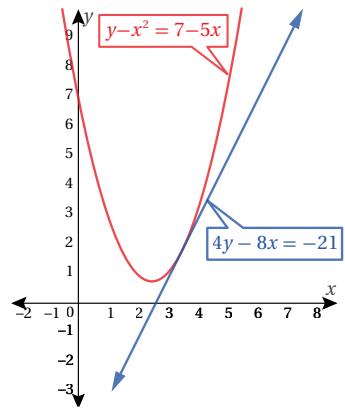
$$4y = 8x - 21$$

$$y = 2x - 5.25$$

المعادلة الخطية

بجمع $8x$ للطرفين

بقسمة الطرفين على 4



الخطوة 2 أُعُوِّض قيمة y من المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

المعادلة التربيعية

$$(2x - 5.25) - x^2 = 7 - 5x$$

بتعرٍض قيمة y من المعادلة الخطية

$$x^2 - 7x + 12.25 = 0$$

بالتبسيط

الخطوة 3 أَحْلُّ المعادلة الناتجة:

لِحُلِّ المعادلة باستعمال القانون العام، أُحَدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1, b = -7, c = 12.25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12.25)}}{2(1)}$$

بالتعويض

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49-49}}{2} = 3.5$$

بالتبسيط

آتَذَكَّرُ

استعمل القانون العام لحل المعادلات التي يصعب تحليلها.

الخطوة 4 أُعُوِّض قيمة x لإيجاد قيمة y :

$$y = 2x - 5.25$$

المعادلة الخطية

$$= 2(3.5) - 5.25$$

بتعرٍض

$$= 1.75$$

بالتبسيط

إذن، حلُّ النَّسَمَةِ هُوَ الزَّوْجُ المُرْتَبُ $(3.5, 1.75)$

الوحدة 1

أتحقق من فهمي

$$y = 2x + 1$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

أَحْلُّ نظام المعادلات المجاور، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الْحَلِّ :

لاحظت في المثالين السابقين وجود حل أو حلين لنظام المعادلات. ولكن، هل توجد أنظمة معادلات ليس لها حل؟ لمعرفة الإجابة، أدرس المثال الآتي.

مثال 3

أَحْلُّ نظام المعادلات الآتي:

$$y + x = 5$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

يتبيّن من التمثيل البياني المجاور أنَّ منحنىي المعادلتَين لا يتقاطعان في أيّ نقطة؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات. أَتَحَقَّقُ مِنْ ذَلِكَ جِبْرِيًّا باستعمال طريقة التعويضِ:

$$y + x = 5$$

المعادلة الخطية

$$x = 5 - y$$

بكتابية x بدلالة y

$$(5-y)^2 + y^2 = 9$$

بتعويض قيمة x في المعادلة التربيعية

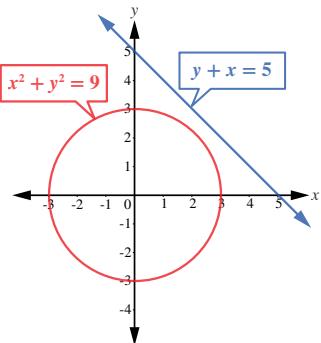
$$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$$

إيجاد المفکوك

$$2y^2 - 10y + 16 = 0$$

بالتبسيط

بعد ذلك أَجِدُ قيمة المُمِيز $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(2)(16) = -28$ لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية الناتجة حلٌ أم لا، أَحدِدُ قيم المعاملات: $a = 2, b = -10, c = 16$ ، وبالتعويض في صيغة المُمِيز يتَّسُّعُ:



أتذكر

يعتمد عدد جذور المعادلة وأنواعها على قيمة المُمِيز الذي يُرمَزُ إليه بالرمز (Δ)، حيث:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(2)(16) = -28$$

قيمة المُمِيز سالبة. إذن، لا يوجد حل للمعادلة. ومنه لا يوجد حل لهذا النظام.

أتذكر

لا يوجد عدد حقيقي مربع عدٌ سالب.

أتحقق من فهمي

$$x - y = 0$$

$$y = x^2 + 3x + 2$$

أَحْلُّ نظام المعادلات المجاور:

عدد حلول نظام مكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية

نتيجة

لأي نظام يتكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية، تكون واحدة من العبارات الآتية
صحيحة:

- 1) وجود حلٌ واحد فقط. 2) وجود حلٌ واحد مختلفين. 3) عدم وجود حلٌ.

توجد تطبيقات حياتية كثيرة لحل الأنظمة التي تتكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية.

مثال 4: من الحياة

سجاد مصنوعة يدوياً، مجموع بعديها m ، وطول قطريها 5 m. أجد كلاً من طولها، وعرضها.

معلومة



لإيجاد بعدي السجادة، أكتب نظام معادلات يمثل المسألة، ثم أحله.
أفترض أن طول السجادة هو x ، وأن عرضها هو y ، وبما أن مجموع بعدي السجادة هو 7 m، فإن $x + y = 7$ ، وبما أن قطر السجادة هو 5 m، فإن (باستعمال نظرية فيثاغورس):
 $x^2 + y^2 = 25$ ، إذن، أصبح لدينا نظام يتكون من معادلة خطية وأخرى تربيعية.

$$x + y = 7$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

والآن، سأحل النظام باستعمال طريقة التعويض:

المعادلة الخطية

بكتابة y بدلالة x

$$x + y = 7$$

$$y = 7 - x$$

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

تعويض قيمة y في المعادلة التربيعية

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

بالتبسيط

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

بالقسمة على 2

أحل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل:

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

بالتحليل

$$x - 4 = 0 \text{ or } x - 3 = 0$$

خاصية الضرب الصفرى

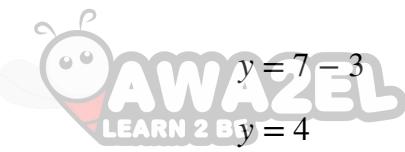
$$x = 4 \text{ or } x = 3$$

بحل كل معادلة

أتذكر

أتحقق من صحة التحليل
باستعمال خاصية التوزيع.

الوحدة 1



أُعْوِضُ قيمَ x في المعادلة الخطية لإيجاد قيمة y :

بتعويض قيمة $x = 3$ في المعادلة الخطية

قيمة y الأولى

بتعويض قيمة $x = 4$ في المعادلة الخطية

قيمة y الثانية

إذن، حلُّ النَّظَامُ هُوَ: $(3, 4)$ و $(4, 3)$.

بما أنَّ طول السَّجَادَةِ أَكْبَرُ مِنْ عَرْضِهَا، فَإِنَّ الطَّولَ هُوَ 4 m ، وَالعَرْضُ هُوَ 3 m .

أتحقق من فهمي

مزرعةٌ مستطيلةُ الشَّكْلِ، طول قُطْرِهَا 50 m ، ومحيطُهَا 140 m . أَجِدُ بُعدَيِّي المزرعة.

أتدرُّب وأحلُّ المسائل



أَحُلُّ كُلَّاً مِنْ أَنْظَمَّةِ الْمَعَادِلَاتِ الْآتِيَّةِ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ مِنْ صَحَّةِ الْحَلِّ:

1) $y = x^2 + 4x - 2$

$$y + 6 = 0$$

2) $y = x^2 + 6x - 3$

$$y = 2x - 3$$

3) $y = x^2 + 4$

$$x - y = -1$$

4) $y = x^2 + 4x - 1$

$$7x + 2y = 6$$

5) $y = x^2 + 4x + 7$

$$y - 3 = 0$$

6) $y = x^2 - 2x + 4$

$$y = x$$

7) $x^2 + y^2 = 34$

$$2x - y = 1$$

8) $y = x^2 + 2x + 1$

$$y = 0$$

9) $x^2 + y^2 = 4$

$$x + y = 5$$

10) $x^2 + y^2 = 10$

$$x - y = 2$$

11) $x^2 + (y - 1)^2 = 17$

$$x = 1$$

12) $2x + 3y = 5$

$$2y^2 + xy = 12$$

بركة: بركةٌ ماءٌ قاعدهُا مستطيلةُ الشَّكْلِ، ومحيطُهَا 16 m ، والفرقُ بينَ مَرَّعَيِّها 16 m^2 . أَجِدُ بُعدَيِّها.

13)

أعداد: أَجِدُ العددينِ الموجبينِ اللذينِ مجموعُهُما 12 ، والفرقُ بينَ مَرَّعَيِّهما 24 .

14)

هندسة: دائرتانِ مجموعُ محیطيهِما $12\pi\text{ cm}$ ، ومجموعُ مساحتيهِما $20\pi\text{ cm}^2$. أَجِدُ قُطْرَ كُلِّ منْهُما.

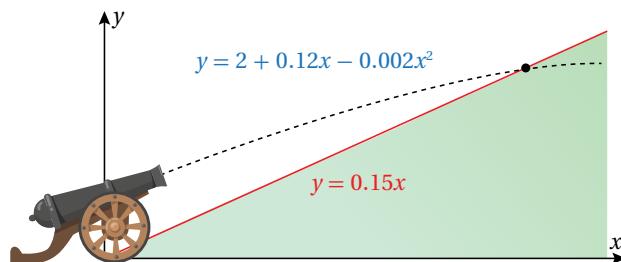
15)

أعماز: قالَتْ شيماءُ: «عُمْرِي أَكْبَرُ بِأَرْبَعِ سِنُواتٍ مِّنْ عُمْرِ أخِي رِيَانَ، وَمَحْمُومُ مُرَبَّعِي عُمْرِنَا هُوَ 346 عَامًا». ما عُمْرُ شيماءَ؟ 16



لوحة: لوحة مستطيلة الشكل، طولها يساوي مثلي عرضها، وطول قطرها $\sqrt{1.25}$ m، أحاط بها إطار، تكلفة المتر الطولي الواحد منه بالدينار 2.25. أجد تكلفة الإطار. 17

زراعة: قسمَ فيصل 41m^2 من مزرعته إلى منطقتين مربعيتين الشكل، ثم زرعهما بمحصولي الطماطم والبطاطا. إذا زاد بعْد المنطقة المزروعة بالطماطم متراً واحداً على بعْد المنطقة المزروعة بالبطاطا، فما مساحة المنطقة المزروعة بكل محصول؟ 18

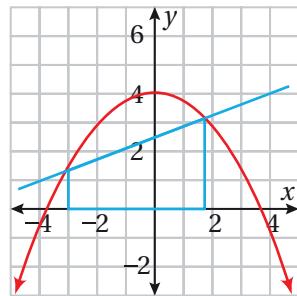


تمثّل المعادلة $y = 2 + 0.12x - 0.002x^2$ مسار قذيفة مدفع تم إطلاقها نحو تلة. أجد إحداثيات النقطة التي اصطدمت عندها القذيفة بسطح التلة؛ إذا علمت أنّه مستقيم ومعادلته $y = 0.15x$. 19

مهارات التفكير العليا

تبير: صمممت نافورة بصورة يخرج منها الماء بحسب العلاقة: $10 = y + x^2$ ، إذا وضعت وحدة إنارة على المستقيم الذي معادلته: $x + 12 = y$ ، فهل يصل ماء النافورة إلى وحدة الإنارة؟ 20

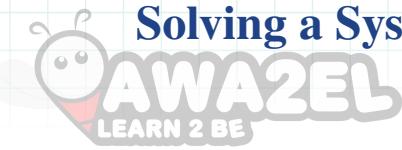
تحدد: إذا علمت أنَّ المعادلة الخطية: $y = 3x + p$ تقطع المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطة واحدة فقط، فما قيمة p ؟ 21



تحدد: أجد مساحة شبه المنحرف المرسوم باللون الأزرق أسفل منحنى الاقتران $y = -0.3x^2 + 4$ في الشكل المجاور. 22

حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين

Solving a System of Two Quadratic Equations



فكرة الدرس



مسألة اليوم



استعملت خبرة تسويق المعادلتين التربيعيتين الآتيتين لتمثيل مقدار كل من العرض والطلب لسلعة تجارية؛ بغية تحديد نقاط التوازن التي يتساوى عندها العرض مع الطلب في السوق، حيث يمثل x سعر الوحدة، ويمثل y عدد الوحدات المباعة. هل يمكنني مساعدة الخبرة على تحديد نقاط التوازن؟



$$y = x^2 + 6x$$

$$y = -x^2 + 24x$$

لحل نظام يتكون من معادلتين تربيعيتين، تساوى أولى المعادلتان بعضهما البعض لتكونين معادلة تربيعية واحدة.

مثال 1

أحل نظام المعادلات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$y = x^2 + 4x - 3$$

$$y = -x^2 + 2x - 3$$

عند تمثيل معادلتي النظام على المستوى الإحداثي نفسه، يلاحظ أن منحنيهما يتقاطعان في نقطتين كما في الشكل المجاور؛ ما يعني أن للنظام حلَّين مختلفين. أتحقق من ذلك جرِياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتي النظام المعطى، ثم حل المعادلة التربيعية الناتجة:

$$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$$

مساواة المعادلتين

$$2x^2 + 2x = 0$$

بجمع الحدود المتشابهة، والتبسيط

أحل المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال التحليل:

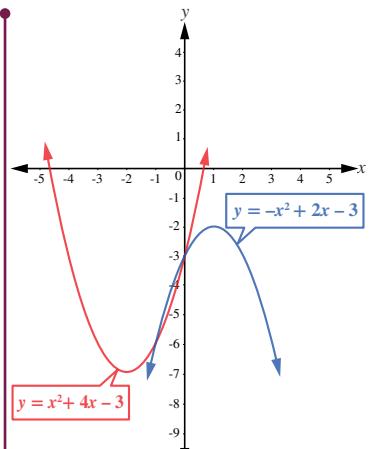
$$2x(x + 1) = 0$$

تحليل المعادلة التربيعية الناتجة

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = -1$$

حالاً المعادلة

لإيجاد قيمة y ، أعرض قيمتي x في أي من معادلتي النظام:



أتذكر

يمكنني حل المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال القانون العام أيضاً.



$$y = -(0)^2 + 2(0) - 3$$

$$y = -3$$

الحالة الأولى: إذا كانت $x = 0$

بتعويض $x = 0$ في إحدى المعادلتين

بالتبسيط

إذن، الحل الأول للنظام هو: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالة الثانية: إذا كانت $x = -1$

$$y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

$$y = -6$$

بتعويض $x = -1$ في إحدى المعادلتين

بالتبسيط

إذن، الحل الثاني للنظام هو: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذن، حل النظام هو: $(0, -3), (-1, -6)$.

إرشاد

للحقيقي من صحة الحل،
أعوّض قيمتي x و y
في كل من معادلتي النظام.

أتحقق من فهمي

أحل نظام المعادلات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

قد يتقاطع منحنينا معادلتين تربيعيتين في نقطة واحدة فقط، وعندئذ يكون لنظام المعادلات الذي تكوّنه هاتان المعادلتان حل واحد.

مثال 2: من الحياة

سباقات: في أحد سباقات المراحل، سلك متسابق مساراً تمثّله المعادلة التربيعية: $y = x^2$ في حين سلك متسابق آخر مساراً تمثّله المعادلة: $y + 2x^2 + 3x = 2$. أجد نقطة التقاطع بين مساري المتسابقين.

أكتب المعادلة $y + 2x^2 + 3x = 2$ بالصورة القياسية (بدالة y).

$$x^2 + 3x - 2 = y$$

$$y = x^2 + 3x - 2$$

طرح 2 من الطرفين

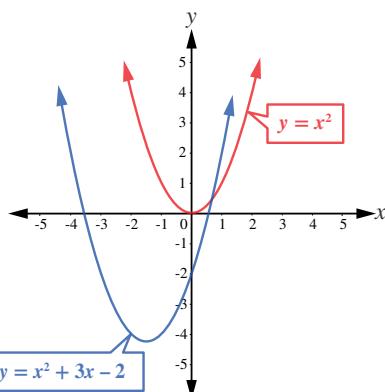
باستعمال الخاصية التبديلية

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ وجود نقطة تقاطع واحدة بين منحنيهما؛ ما يعني أنَّ نظام المعادلات حلًا واحدًا.

أتحقق من ذلك جبرياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتي النظام المعطى، ثم حل

المعادلة التربيعية الناتجة:



معلومات



تُجرى سباقات المراحل على مدار أيام، وهي تقام على مسارات متنوعة من حيث التضاريس، مثل: الطرق المنبسطة، والطرق الجبلية.

الوحدة 1

$$x^2 + 3x - 2 = x^2$$

$$x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$$

$$3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

بعد ذلك أجد قيمة y ، وذلك بتعويض قيمة $\frac{2}{3} = x$ في أي من معادلتي النظام:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2 \quad \text{بتعويض } \frac{2}{3} = x \text{ في المعادلة الثانية}$$

$$y = \frac{4}{9} \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، حل نظام المعادلات هو: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{9}$. ونقطة تقاطع المنحنيين هي: $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

أتحقق من فهمي

تزلج: تمثل المعادلة $y = x^2 + 2x$ مساراً متزلجاً على الجليد، في حين تمثل المعادلة $y = x^2 - x + 5$ مساراً متزلجاً آخر. أبحث عن جميع النقاط التي قد يصطدمون عندها المتزلجان إذا لم يكونوا حذرین.

معلومات



رياضة التزلج هي إحدى أسرع الرياضات غير الآلية؛ فقد تصل سرعة المتزلج إلى

200 km/h

عرضنا في المثالين السابقين أنظمة معادلاتٍ تربيعية لها حلان أو حل واحد. ولكن، هل يوجد دائماً حل للنظام المكون من معادلتين تربعيتين؟ أدرس المثال الآتي.

مثال 3

أحل نظام المعادلات الآتي:

$$y = x^2 + x + 2$$

$$y = -x^2 - x + 1$$

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ عدم وجود نقاط تقاطع بين منحنييهما؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات. أتحقق من ذلك جبرياً.

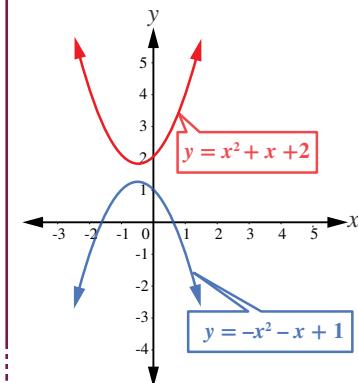
بدايةً، يجب مساواة معادلتي النظام المعطى، ثم حل المعادلة التربيعية الناتجة لإيجاد قيمة x :

$$x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$$

بمساواة المعادلتين

بالتبسيط

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$



بعد ذلك أجد قيمة المميز $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(2)(1) = -4$ لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية الناتجة حل أم لا.

قيمة المعاملات هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويض في صيغة المميز يتضح:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمة المميز سالبة. إذن، لا يوجد حل للمعادلة. ومنه لا يوجد حل لهذا النظام.

تحقق من فهمي

أحل نظام المعادلات الآتي:

$$y = x^2 + 4$$

$$y = -x^2 + 2$$

عرضنا في الأمثلة السابقة أنظمة لها حلان، أو حل واحد، أو ليس لها حل. ولكن، هل يوجد نظام مكون من معادلتين تربيعيتين، له ثلاثة حلول، أو أربعة؟ أدرس المثال الآتي.

مثال 4

أحل نظام المعادلات التربيعية الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

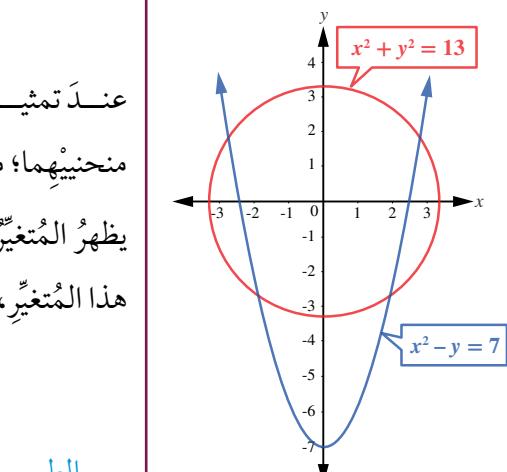
عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ وجود 4 نقاط تقاطع بين منحنيهما؛ ما يعني وجود أربعة حلول لنظام المعادلتين. أتحقق من ذلك جرياً.

يظهر المتغير x في كلتا المعادلتين بالقوة نفسها؛ لذا يمكنني استعمال الحذف للتخلص من هذا المتغير، ثم حل المعادلة التربيعية الناتجة التي تحوي متغيراً واحداً هو y :

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad x^2 - y = 7 \\ \hline y^2 + y = 6 \end{array}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$



طرح 6 من كلا الطرفين
بالطرح

يمكنني حل المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال القانون العام، أو التحليل:

$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

بالتحليل

$$\text{إذن: } y = -3, y = 2$$

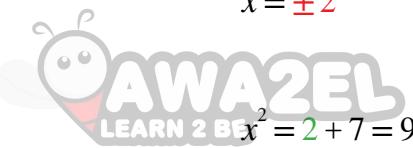
أعوض قيمتي y في إحدى معادلتي النظام لإيجاد قيم x :

$$x^2 = -3 + 7$$

بتعويض قيمة $y = -3$

الوحدة ١

$$x = \pm 2$$



$$x^2 = 2 + 7 = 9$$

$$x = \pm 3$$

بَحْلُ الْمَعادِلَةِ

$$\text{إذن، } x = -2, x = 2$$

بِتَعْوِيْضِ قِيمَةِ $y = 2$

بَحْلُ الْمَعادِلَةِ

إذن، توجُدُ أربعة حلولٍ للنظام، هي: $(-3, -2)$, و $(-3, 2)$, و $(3, 2)$, و $(3, -2)$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ هَذِهِ الْحَلُولِ بِتَعْوِيْضِهَا فِي كُلِّ مِنْ مَعَادِلَتَيِ النَّسَامِ.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحْلُ نَسَامَ الْمَعَادِلَاتِ التَّرَبِيعِيَّةِ الْآتِيَّ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الْحَلِّ:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$3y - x^2 = -12$$

أتدرُبُ وأحلُّ المسائل



أَحْلُ كُلُّ مِنْ أَنْظَمَ الْمَعَادِلَاتِ التَّرَبِيعِيَّةِ الْآتِيَّ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الْحَلِّ:

1) $y = 2x^2 + x - 5$

$$y = -x^2 - 2x - 5$$

2) $y = x^2 - 4x + 1$

$$y = -2x^2 - 4$$

3) $y = x^2 + 1$

$$y = 2x^2 - 3$$

4) $y = x^2 + x + 1$

$$y = -x^2 + x - 2$$

5) $y = -x^2 + 5x$

$$y = x^2 - 5x$$

6) $y = x^2$

$$y = x^2 + x + 6$$

7) $y = -x^2 + 6x + 8$

$$y = -x^2 - 6x + 8$$

8) $x^2 + y^2 = 16$

$$y = x^2 - 5$$

9) $5x^2 - 2y^2 = 18$

$$3x^2 + 5y^2 = 17$$

أَجِدُّ نَقَاطَ التَّقَاطِعِ بَيْنَ الدَّائِرَتَيْنِ:

10)

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

11) عَدَدَانِ، مَجْمُوعُ مَرَبَعَيْهِمَا 89، وَالْفَرْقُ بَيْنَ مَرَبَعَيْهِمَا 39، مَا هَذَا النَّسَامِ؟

12 فيزياً: قذفت كرتان رأسياً في الوقت نفسه من موقعي مختلفين. إذا كانت المعادلة: $y = -2t^2 + 10t + 12$. إذا كانت المعادلة: $y = -2t^2 + 4t + 42$. فما هي ارتفاع الكرة الأولى بالأمتار بعد مرور t ثانية، وكانت المعادلة: $y = -2t^2 + 4t + 42$. فما هي ارتفاع الكرة الثانية، فأجد الزمان الذي يتساوى عنده ارتفاع كل من الكرتين، ثم أجد ارتفاع كل كرة في تلك اللحظة.

13 ثقافة مالية: بالعودة إلى مقدمة الدرس، أستعمل نظام المعادلات المعطى لإيجاد نقاط التوازن التي يتساوى عندها العرض والطلب.

14 أصل نظام المعادلات الآتي:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + xy = 6$$

مهارات التفكير العليا

15 تبرير: قالت زينب إن لا يوجد حل لنظام المعادلات الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

هل قول زينب صحيح؟ أبّرر إجابتي.

16 مسألة مفتوحة: أكتب نظاماً مكوناً من معادلتين تربعيتين ليس له حل.

17 تحدي: قطعة أرض على شكل مثلث متطابق الصاعدين، طول ضلعه المتطابق 50 m ، ومساحته 1200 m^2 . أجد طول قاعدتها، وارتفاعها.

18 مسألة مفتوحة: أكتب نظاماً من معادلتين تربعيتين؛ على أن تكون النقطة $(3, 5)$ أحد حلوله.



19 تحدي: قطعة من ورق مقوى مستطيلة الشكل، مساحتها 216 cm^2 ، ثني طolah، ولصقا معًا، فتشكل أنبوب أسطواني حجمه 224 cm^3 . أجد بعددي قطعة الورق.



الدرس 3

تبسيط المقادير الأُسّية

Simplifying Exponential Expressions



فكرة الدرس معرفة الأسس النسبية وتبسيطها.

الأُسّ النسبيّ.

المصطلحات



مسألة اليوم



حديقة مربعة الشكل، طول نصف ضلعها معطى بالحد الجبري $2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}z^4$ ، ما مساحتها بالوحدات المربعة؟

التحويل من الصيغة الأُسّية إلى الصيغة الجذرية

مراجعة المفاهيم

لأي عدد حقيقي a ، إذا كان n و m عددين صحيحين موجبين ($1 < n$)، فإنَّ
إلا إذا كانت $a < 0$ ، $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
الجذر يكون غير معرَّف.

مثال 1

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1. \quad 27^{\frac{1}{3}} \\ 27^{\frac{1}{3}} &= (\sqrt[3]{27})^1 \\ &= \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

بكتابة المقدار في صورة الجذر الثالث
تحليل العدد 27 إلى عوامله الأولية

$$\begin{aligned} 2. \quad 4^{\frac{3}{2}} \\ 4^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{4})^3 \\ &= (\sqrt{2 \times 2})^3 \\ &= (2)^3 \\ &= (2 \times 2 \times 2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

بكتابة المقدار في صورة الجذر التربيعي مرفوعاً للأُسّ 3
تحليل العدد 4 إلى عوامله الأولية

تعريف الأُسّ

أتذكر

لأي عدد حقيقي a ، إذا كان
عددًا صحيحًا موجباً، فإنَّ
 $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرّة}}$
ويُسمى a الأساس، و n الأُسّ.

٣) $(81)^{-\frac{5}{4}}$

$$\begin{aligned}
 (81)^{-\frac{5}{4}} &= (\sqrt[4]{81})^{-5} \\
 &= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5} \\
 &= (3)^{-5} \\
 &= \frac{1}{(3)^5} \\
 &= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)} \\
 &= \frac{1}{243}
 \end{aligned}$$

٤) $(-8)^{\frac{7}{3}}$

$$\begin{aligned}
 (-8)^{\frac{7}{3}} &= (\sqrt[3]{-8})^7 \\
 &= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^7 \\
 &= (-2)^7 \\
 &= -128
 \end{aligned}$$

الصورة الجذرية

تحليل العدد 81 إلى عوامله الأولية

تعريف الأس السالب

تعريف الأسس

أتذكر

لأي عدد حقيقي $a \neq 0$, فإن $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كان a مرفوعاً لأسس سالب ويقع في المقام، فإن $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

الصورة الجذرية

تحليل العدد -8 إلى عوامله الأولية

اتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

a) $32^{\frac{1}{5}}$

b) $9^{\frac{5}{2}}$

c) $(16)^{-\frac{5}{4}}$

خصائص ضرب القوى وقسمتها

مراجعة المفاهيم

لأي عددين حقيقيين a و b و عددين صحيحين m و n , فإن:

١) $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ضرب القوى

٢) $(a^n)^m = a^{n \times m}$ قوة القوى

٣) $(ab)^n = a^n \times b^n$ قوة ناتج الضرب

٤) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a \neq 0$ قسمة القوى

٥) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a, b \neq 0$ قوة ناتج القسمة

الوحدة ١



تطبق خصائص ضرب القوى وقسمتها التي درستها سابقاً للأسس الصحيحة على الأسس النسبية (rational exponents) أيضاً.

مثال ٢

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 \quad & y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} \\ & y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \\ & = y^{-1} \\ & = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

ضرب القوى

بجمع الأسس

تعريف الأس السالب

$$\begin{aligned} 2 \quad & (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} \\ & (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}} \\ & = x^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

بالتبسيط

الصورة الجذرية

$$\begin{aligned} 3 \quad & (a \times b^2)^{\frac{3}{2}}, a > 0 \\ & (a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2 \times \frac{3}{2}} \\ & = \sqrt{a^3} \times b^3 \end{aligned}$$

قَوْناتِيجُ الضرب

الصورة الجذرية

$$\begin{aligned} 4 \quad & \frac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} \\ & \frac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8} - \frac{1}{8}} \\ & = z^{\frac{6}{8}} \\ & = z^{\frac{3}{4}} \\ & = \sqrt[4]{z^3} \end{aligned}$$

قسمة القوى

بالتبسيط

بالتبسيط

الصورة الجذرية

أتعلم

تنقسم الجذور بحسب دليل الجذر إلى نوعين، هما: الجذور الفردية، والجذور الزوجية. مثلاً: جذور فردية: $\sqrt[3]{7}, \sqrt[5]{x^2+1}$ جذور زوجية: $\sqrt{18}, \sqrt[6]{9+3y}$

5

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x^{4 \times \frac{3}{4}}}{y^{2 \times \frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$$

قوَّةُ ناتِجِ القِسْمَةِ

قوَّةُ الْقُوَى

الصُورَةُ الْجُذُرِيَّةُ

6

$$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= x^{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

$$= x^{\frac{2}{15}}$$

$$= \sqrt[15]{x^2}$$

تعريفُ الْأُسُّ النَّسْبِيِّ

قسمَةُ الْقُوَى

بالتَّبَسيطِ

الصُورَةُ الْجُذُرِيَّةُ

أتحقق من فهمي

أَجِدُّ قِيمَةً كُلَّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$

e) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$

تبسيط العباراتِ الأسِيَّةِ

مفهومُ اساسيٍّ

تكونُ العَبَارَةُ الْأُسِيَّةُ فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ إِذَا:

1 ظهرَ الْأَسَاسُ مَرَّةً وَاحِدَةً، وَكَانَتِ الْأَسَاسُ جَمِيعُهَا مُوجَبَةً.

2 لَمْ تَضُمِّنِ الْعَبَارَةُ قَوَّةً الْقُوَى.

3 كَانَتِ الْكَسُورُ وَالْجُذُورُ جَمِيعُهَا فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ.

الوحدة ١

مثال 3

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة، علمًا بأنَّ أيًّا من المُتغيِّرات لا يساوي صفرًا:

$$1 \frac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$$

$$\begin{aligned} \frac{6x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{-7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} &= \left(\frac{6}{2}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right) \times \left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right) \\ &= 3x^4y^{-1} \\ &= \frac{3x^4}{y} \end{aligned}$$

قسمة القوى

بالتبسيط

الأُسُّ السالب

$$2 \frac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$$

$$\begin{aligned} \frac{(3xy^{\frac{3}{2}})(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} &= \frac{3 \times 6}{9} \times \frac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}} \times \frac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}} \\ &= 2 \times \frac{x}{x^1} \times \frac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}} \\ &= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}} \\ &= 2x^0y^{\frac{3}{2}} \\ &= 2\sqrt{y^3} \end{aligned}$$

ضرب القوى

بالتبسيط

تقسمة القوى

تعريف الأُسُّ الصفرى

الصورة الجذرية

أفهم

إذا كانت $n = m$ فإنَّ

$$1 = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-n} = a^0$$

إذن، $a^0 = 1$

$$3 \sqrt[3]{64x^{12}y^3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{64x^{12}y^3} &= (64x^{12}y^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}} \\ &= 4x^4y \end{aligned}$$

صورة الأُسُّ النسبي

قوَّة ناتج الضرب

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أكتب كلاً ممّا يأتي في أبسط صورة، علمًا بأنَّ أيًّا من المُتغيِّرات لا يساوي صفرًا:

$$a) \frac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$$

$$b) \frac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$$

$$c) \sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$$



١) $512^{\frac{1}{9}}$

٤) $(-243)^{\frac{6}{5}}$

٢) $125^{\frac{2}{3}}$

٥) $(25)^{\frac{3}{2}}$

أَجِدُّ قِيمَةَ كُلِّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ:

٣) $36^{-\frac{1}{2}}$

٦) $(-8)^{\frac{7}{3}}$

أَجِدُّ قِيمَةَ كُلِّ مَا يَأْتِي فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ:

٧) $z^{-\frac{4}{2}} \times z$

٨) $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$

٩) $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$

١٠) $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$

١١) $\frac{\sqrt[6]{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$

١٢) $\frac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$

أَكْتُبُ مَا يَأْتِي فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ، علَمًا بِأَنَّ أَيًّا مِنَ الْمُنْغِيرَاتِ لَا يُسَاوِي صُفْرًا:

١٣) $\left(\frac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}} \right)^{-\frac{2}{5}}$

١٤) $\frac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$

١٥) $\frac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$

١٦) $\frac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$

١٧) $\frac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$

١٨) $\frac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$

مهارات التفكير العليا



١٩) تحدّ: أَجِدُّ قِيمَةَ المَقْدَارِ الأُسْسِيِّ الْآتِيِّ:

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

٢٠) تبرير: تضاعفُ عيّنةُ في المختبرِ 3 مَرَّاتٍ كُلَّ أَسْبُوعٍ. إِذَا عَلِمْتُ أَنَّ فِيهَا 7300 خليةٌ بكتيريةٌ، فَكُمْ خليةٌ سِيَصْبُحُ فِيهَا بَعْدَ مرورِ 5 أَسْابِيعٍ؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

٢١) تحدّ: أَكْتُبُ مَا يَأْتِي فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ، علَمًا بِأَنَّ أَيًّا مِنَ الْمُنْغِيرَاتِ لَا يُسَاوِي صُفْرًا:

٢١) $\frac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^{\frac{2}{2}} + r^{\frac{3}{2}}}$

٢٢) $\frac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$

٢٣) $\frac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$

٢٤) تبرير: أُقارِنُ بَيْنَ الْعَدْدَيْنِ: 2^{175} وَ 5^{75} اعْتِمَادًا عَلَى خَصَائِصِ الأُسْسِ، مِنْ دُونِ استِعْمَالِ الْآلَةِ الحَاسِبَةِ. أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

حل المعادلة الأُسْيَةٍ

Solving Exponential Equation



فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تستغرق الزنبق المائية 26 يوماً لتنمو بصورة كاملة. إذا علمت أن الزهرة تنموا يومياً بمقدار الضعف عن اليوم السابق، فكم يوماً يلزمها لتصل إلى نصف مرحلة النمو؟

المعادلة الأُسْيَةٍ (exponential equation) هي معادلة تتضمن قوى أساسها متغيرات،

ويتطلب حلها كتابة طرفي المعادلة بصورة قوّة للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أسي الطرفين، وفق القاعدة التي نصّها: "إذا تساوت قوّاتان لهما الأساس نفسه، فإن أسيهما متساويان".

مثال 1

أحل المعادلات الأُسْيَة الآتية:

$$1 \quad 5^{3x+2} = 25^{x-1}$$

$$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$$

$$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$$

$$3x + 2 = 2x - 2$$

$$x = -4$$

$$2 \quad 8^x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$$

$$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$$

$$2^{3x} = 2^{-x+1}$$

$$3x = -x + 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

الأساسان متساويان

بمساوية الأساس

بحل المعادلة

قوّة القوى

ضرب القوى

بمساوية الأساس

بحل المعادلة



أبحث: قوّة العدد 2 أو 2^x مهمة جداً في علم الحاسوب، لماذا؟

أتحقق من فهمي

أحل المعادلات الأسيّة الآتية:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$

b) $9^x = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

توجد تطبيقات حيّاتيّة كثيرة لحل المعادلات الأسيّة.

مثال 2: من الحياة

بكتيريا: يتضاعف عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية 4 مرات كل ساعة، إذا استعملت المعادلة $y = 3(4^{x-1})$ لحساب عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد مرور x ساعة من زمن تضيير العينة، فما الزمن اللازم ليصبح في العينة 192 خلية؟

$$y = 3(4^{x-1})$$

المعادلة المعطاة

$$192 = 3(4^{x-1})$$

بعويض $y = 192$ في المعادلة

$$64 = (4^{x-1})$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$$4^3 = (4^{x-1})$$

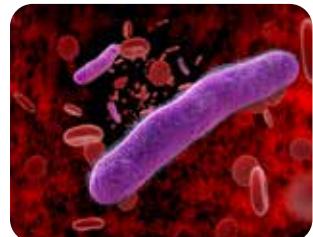
$$64 = 4^3$$

$$3 = x - 1$$

بمساواة الأسس

$$x = 4$$

بحل المعادلة الخطية الناتجة



قد يحتوي الغرام الواحد من التربة على نحو 10^{10} خلية بكتيرية مختلفة الأنواع.

إذن، يصبح في العينة 192 خلية بعد 4 ساعات.

أتحقق من فهمي

تعليم: يزداد عدد الاشتراكات في موقع تعليمي على الإنترن特 عاماً بعد عام، وتُستعمل المعادلة $y = 2(3^{2x-6})$ لحساب عدد الاشتراكات y بالألاف بعد مرور x عاماً من إطلاق الموقع. ما الزمن اللازم ليصبح عدد الاشتراكات في الموقع 162 ألف اشتراك؟



ازداد اسعمال المواقع التعليمية بما نسبته 900% منذ عام 2000م.

يمكّنني حل نظام مكوّن من معادلتين أسيّتين بكتابة طرفي المعادلة الأولى في صورة قوّة للأساس نفسه، ثم مساواة أسّي الطرفين، ثم تكرار ذلك في المعادلة الثانية، فيكون نظام معادلتين.

الوحدة 1

مثال 3

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$

$$9^x \times 3^y = 81$$

أَحْلُّ نظام المعادلات المجاور:

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$

$$(2^2)^{2x} \times 2^y = 2^6$$

$$2^{4x} \times 2^y = 2^6$$

$$2^{4x+y} = 2^6$$

$$4x + y = 6$$

بِطْبِيقِ الْخَطُوطِ نَفْسَهَا عَلَى الْمَعَادِلَةِ الثَّانِيَةِ تَنْتُجُ الْمَعَادِلَةُ الْخَطِيَّةُ $4x + y = 6$

أَحْلُّ نظام المعادلات الخطية الناتج بالحذف:

$$4x + y = 6$$

$$(-) \quad 2x + y = 4$$

$$\underline{2x = 2}$$

$$x = 1$$

$$4(1) + y = 6$$

$$4 + y = 6$$

$$y = 2$$

المعادلة الأسية الأولى

بِتَحْلِيلِ الْعَدْدَيْنِ 4 وَ 64 إِلَى عَوَامِلِهِمَا الْأُولَى

قوَّةُ القوى

ضربُ القوى

بِمَسَاوَاهِ الْأَسْسِ

أَتَذَكَّرُ

يُمْكِنُنِي حَلُّ نَظَامِ
الْمَعَادِلَاتِ الْخَطِيَّيِّ
بِالْحَذْفِ، أَوِ التَّعْوِيْضِ.

بِطْرَحِ الْمَعَادِلَتَيْنِ

بِالقِسْمَةِ عَلَى 2

بِتَعْوِيْضِ قِيمَةِ x فِي الْمَعَادِلَةِ الثَّانِيَةِ

بِحَلِّ الْمَعَادِلَةِ

إِذْنُ، حَلُّ نَظَامِ الْمَعَادِلَاتِ هُوَ: $x = 1, y = 2$

أَتَحْقِقُ مِنْ فَهْمِي

$$\frac{4^x}{256^y} = 64$$

$$3^{2x} \times 9^y = 243$$

أَحْلُّ نظام المعادلات المجاور:

قَدْ لَا يَكُونُ مِنَ الْمُمْكِنِ كِتَابَةُ أَحَدٍ طَرَفِيِّ الْمَعَادِلَةِ الْأَسْيَيِّةِ عَلَى صُورَةِ قُوَّةٍ لِلأسَاسِ نَفْسَهِ،

عَنْدَئِذٍ يَمْكُنُ حَلُّ الْمَعَادِلَةِ بِيَانِيًّا بِاسْتِعْمَالِ بِرْمَجِيَّةِ حَاسُوْيَّةٍ أَوْ آلَةِ حَاسِبَةِ بِيَانِيَّةٍ.

مَثَال٤ أَحْلُّ الْمَعَادِلَةِ الْأَسْيَيِّةِ الْآتِيَّةِ $3^{x-1} = 5$ بِيَانِيًّا.

أَلَاحْظُ أَنَّهُ لَيْسَ مِنَ الْمُمْكِنِ كِتَابَةُ طَرَفِيِّ الْمَعَادِلَةِ بِصُورَةِ قُوَّةٍ لِلأسَاسِ نَفْسَهِ، لِذَلِكَ أَحْلُّ الْمَعَادِلَةِ بِيَانِيًّا.

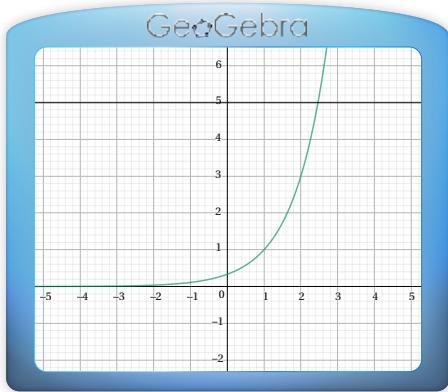
الخطوة 1 أكتب نظام معادلاتٍ باستعمال طرقِ المعادلة.

$$y = 5$$

$$y = 3^{x-1}$$

المعادلة 1

المعادلة 2



الخطوة 2 أمثل المعادلتين بيانياً في

المستوى نفسه باستعمال
برمجة جيوجبرا.

الخطوة 3 أجدُ إحداثيَّيْن نقطَة

تقاطع المنحنيَّين.

اختر أيقونة من شريط الأدوات، ثم انقر على كلا المحنينين فيظهر إحداثيَّ

نقطة التقاطع $(2.46, 5)$

إذن، حلُّ المعادلة هو $x = 2.46$

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلتين الأسيةتين الآتيَّين بيانياً:

a) $3^x = -6^{x+2} + 1$

b) $5 = 4^{x+1}$

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ المعادلات الأسية الآتية:

1) $64 = (32)^{3-x}$

2) $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$

3) $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

4) $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$

5) $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = (11)^{x+7}$

6) $(\sqrt{7})^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$

7) $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 243$

8) $5^{2x} \times 25^x = 125$

9) $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$

الوحدة ١

أَحْلُّ نَظَمَةِ الْمَعَادِلَاتِ الْأَسْيَّةِ:

10 $5^y = 25^{x-3}$
 $125 = 25^{x-1}$

11 $3^y = 3^{2x+y}$
 $27^y = 27^{x+3}$

12 $5^{2x} \times 25^y = 125$
 $\frac{8^x}{2^y} = 16$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$
 $\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$
 $8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$

15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$
 $2^{m^2} \times 2^n = 64$

أَحْلُّ كَلَّاً مِنَ الْمَعَادِلَاتِ الْأَسْيَّةِ بِيَانِيًّا:

16 $4^{x+3} = 6$

17 $2^x = 1.8$

18 $4 = 8^x$

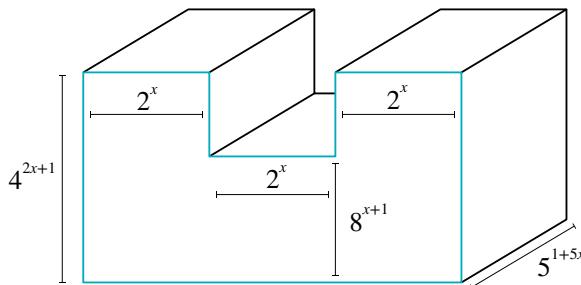
19 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 10$

20 $2^{-x-3} = 3^{x+1}$

21 $5^x = -4^{x+4}$

تصویر: سُتَعْمَلُ الْمَعَادِلَةُ $y = 2^{x+2}$ لحسابِ مقاسِ ورقَةٍ y بعدَ تكبيرِها بِنَسْبَةِ 100% عَدَدِ x مِنَ الْمَرَّاتِ، مقارنةً بمقاسِها الأصليّ، باستعمالِ آلةٍ ناسخةٍ. كَمْ مَرَّةً يَجِبُ تكبيرُ صورَةٍ ليصِبحَ مقاسُها 32 ضعْفَ مقاسِها الأصليّ؟

بكتيريا: يُمثِّلُ المَقْدَارُ 3^{t-2} عَدَدَ الْخَلَايَا الْبَكْتِيرِيَّةِ فِي تجْرِيَةٍ مَخْبِرِيَّةٍ بَعْدَ مَرْوِرِ t مِنَ السَّاعَاتِ. ما الزَّمْنُ الْلَّازِمُ لِيَصِبِّحَ عَدُدُ الْخَلَايَا الْبَكْتِيرِيَّةَ 2187 خَلِيَّةً؟



هندسة: أَكْتُبُ فِي أَبْسِطِ صُورَةٍ عَبَارَةً أَسْيَّةً تُمثِّلُ حَجْمَ الشَّكْلِ الْمَجاوِرِ.

مهارات التفكير العليا

تبرير: هل يُمكِّنُ حَلُّ الْمَعَادِلَةِ الْأَسْيَّةِ الْآتِيَّةِ: $1 = 2 + 2^x$? أَبْرُرُ إِجَابِيًّا.

تبرير: أَحْلُّ الْمَعَادِلَةَ: $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$, مُبِرِّرًا خطواتِ الْحَلِّ.

تحدد: ما قِيمَةُ كُلِّ مِنْ x وَ y فِي الْمَعَادِلَةِ الْآتِيَّةِ: $\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$

تحدد: أَحْلُّ نَظَامَ الْمَعَادِلَاتِ الْأَسْيَّةِ الْآتِيَّةِ:

$$2^x + 3^y = 10$$

$$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$$

اختبار نهاية الوحدة



المقدار الجبري الذي يجب وضعه في المربع الفارغ **5**
 للمعادلة $\frac{8x^2y^3}{\square} = \left(\frac{2y}{x}\right)^2$ هو:

- a) $2x^4y$
- b) $4x^4y^2$
- c) $2xy$
- d) x^2y^2

أَحْلُّ كُلَّ نَسْطَامِ مَعَادِلَاتٍ مَمَّا يَأْتِي، ثُمَّ أَتَحْقَقُ مِنْ صِحَّةِ الْحَلِّ:

6 $y = 4x$ **7** $y - x = 15$
 $y = 5 - x^2$ $x^2 + y^2 = 64$

8 $y = x^2 - 4x + 5$ **9** $y = -x^2 - x + 12$
 $y = -x^2 + 5$ $y = x^2 + 7x + 12$

إذا كان c ثابتاً في نظام المعادلات الآتي،

$$x - 2y = 1$$

$$x^2 - y^2 = c$$

فأَجِدُ:

10 حل هذا النَّسْطَام، علماً بـ $c = 8$

11 جميع قيم c الممكنة التي لا تجعل للنَّسْطَام أي حل.

12 أجد مجموعة حل المُتباينة: $7x < 6x^2 - 3$ بحل نَسْطَامِ المعادلات الآتي:

$$y = 3 - 7x$$

$$y = 6x^2$$

1 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$3x + y = 6$$

- a) (1, 3)
- b) (0, 2)
- c) (2, 0)
- d) (-2, -2)

2 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

- a) (0, 3)
- b) (1, 2)
- c) (2, 0)
- d) (3, 0)

3 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$3^{5x} \times 9^y = 27$$

$$5^{3x} \times 5^y = 25$$

- a) (-1, -1)
- b) (1, 1)
- c) (-1, 1)
- d) (1, -1)

4 يمثل $x = -1$ حللاً للمعادلة الأسية:

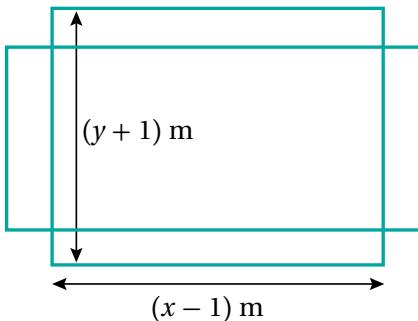
- a) $5^{2x+1} = 25$
- b) $3^{1+x} = 81$
- c) $7^{3-2x} = 49$
- d) $4^{2-x} = 64$

اختبارٌ نهايةِ الوحدة



يُمثّل كُلّ مِنْ X, Y عدَدَيْن مفقودَيْن في الرُّمِ السَّرِّيِّ **26**. إذا كانَ مجموعُ العدَدَيْن المفقودَيْن $XY1290$ ومجموعُ مربعَيْهِما يساوي 90 , فأجِدْ قيمةَ كُلِّ منْهُما.

تنسٌ: ملعبٌ تنسٌ طولُه x مترًا وعرضُه y مترًا ومساحته 224 m^2 , إذا تمَّت زيادةُ عرضه بمقدار 1 m وتقليل طوله بمقدار 1 m فازدادَت مساحته بمقدار 1 m^2 كما في الشكل الآتي, فأجِدْ أبعادَ ملعبِ التنس. **27**



تدريبٌ على الاختباراتِ الدوليَّة

أَجِدْ جميعَ قيم p التي تجعلُ منحنى المعادلة الخطية **28** لا يقطعُ منحنى المعادلة $y = 2x + p$.

$$y = x^2 + 3x - 1$$

أَجِدُ الأعدادَ الصحيحةَ الموجبةَ a, b, c إذا كانَ **29**

$$(ab^c)^3 = 27b^{21}$$

أَجِدُ العدَدَيْن اللذَيْن ناتِجُ جمعِ القوةِ الخامسةِ **30** لأحدهِما مَعَ مربعِ العدِ الثاني يساوي 268

أَكْتُبْ كُلَّ مِمَا يأتِي في أَبْسِطِ صُورَةٍ:

13 $\frac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$

14 $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

15
$$\frac{(16p^4 q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2 q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$$

16
$$\frac{(27a^{\frac{3}{2}} b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^4 b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$$

تحدٍ: أَجِدْ قيمةَ كُلِّ مِنْ a وَ b في كُلِّ مِمَا يأتِي:

17 $3^a x^b = \frac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$

18 $\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2} = x^a$

أَحُلُّ كُلَّ مِنَ المعادلاتِ الأُسْسِيَّةِ الآتِيَّةِ:

19 $5^{\frac{t}{2}} = 5^{2t-1}$

20 $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$

21 $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$

22 $500 = \frac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$

أَحُلُّ كُلَّ نظامِ معادلاتِ مِمَا يأتِي:

23 $36^{x+4} = 6^y$
 $36^y = 36^{x+6}$

24 $5^{2x+4} = 5^{y-3}$
 $7^{y-x} = 49$

عددانِ مجموعُ مربعَيْهِما 85 ومربيعُ مجموعِهِما 121 , **25** ما هُمَا؟

الدائرة

Circle

ما أهمية هذه
الوحدة؟

تُعدّ الدائرة أحد أكثر الأشكال ظهوراً على سطح الأرض، بل في جميع الكون. فهي تظهر جلياً في بؤبؤ العين، وفي الفاكهة، وجذوع الأشجار، وغير ذلك من المخلوقات. وقد استفاد الإنسان من الخصائص الفريدة لهذا الشكل المعمد في مجالات عديدة، مثل: الهندسة، والصناعة.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ حساب طول القوس، ومساحة القطاع الدائري.
- ◀ العلاقات بين الزوايا في الدائرة، والإفادة منها في إيجاد زوايا مجهولة.
- ◀ كتابة معادلة الدائرة، وإيجاد المركز ونصف القطر من معادلة دائرة معلومة.
- ◀ العلاقة بين دائرتين، و Maheriyat المماسات المشتركة.

تعلمت سابقاً:

- ✓ إيجاد محيط الدائرة، ومساحتها.
- ✓ تمييز حالات تطابق المثلثات، وتشابهها.
- ✓ إيجاد مجموع قياس زوايا كل من المثلث، والشكل الرباعي.
- ✓ إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي، وإحداثيات نقطة المنتصف.

مشروع الوحدة



استعمالاتٌ علميةٌ لخصائصِ الدائرةِ

البحثُ عنِ استعمالاتِ علميةٍ لخصائصِ الدائرةِ، ووصفِها، ونمذجتها.

فكرةُ المشروع



شبكةُ الإنترنٌت، برمجيةٌ جيوجبرا.

المواد والأدوات



خطواتٌ تفويض المُشروعِ:



1 أبحثُ معَ أفرادٍ مُجتمعِي في مكتبةِ المدرسةِ (أو في شبكةِ الإنترنٌت) عنْ نموذجٍ علميٍّ أو حيائِيٍّ تُستعملُ فيه إحدى الخصائصِ الآتيةِ للدائرةِ:

- العلاقةُ بينَ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية.
- العلاقةُ بينَ الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المُشتَرِكةِ معَها في القوسِ نفسِه.
- الدوائرُ المُتماشَةُ.
- معادلةُ الدائرةِ.

2 أكتبُ في مستندِ مُعالِج النصوصِ (ورود) فقرةً أصفُ فيها النموذج الحيائِيَّ أو العلميَّ الذي اختَرْتُه، مُحدّداً خصائصَ الدائرةِ الموجودةِ في هذا النموذج، ثمَّ أفسِرُها.

3 أضيفُ إلى المستندِ صوراً توضيحيَّةً للنموذجِ، ذاكراً مصدرَ المعلوماتِ والصورِ.

4 أستعملُ برمجيةَ جيوجبرا الرسِمِ شكِلٍ يُوضِّحُ استعمالَ الخاصيَّةِ في النموذجِ، وأضعُ عليه قياساتِ الزوايا وأطوالَ الأضلاعِ جميعَها. وهذه بعضُ الإرشاداتِ التي قد تُساعدُ على رسمِ الشكِلِ التوضيحيِّ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا:

• لرسمِ دائرةٍ، أنقرُ على أيقونةَ منْ شريطِ الأدواتِ.

• لإيجادِ قياسِ زاويةٍ، أنقرُ على أيقونةَ ، ثمَّ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ، وضلعِ انتهاءِها.

• لإيجادِ طولِ قطعةٍ مستقيمةٍ، أنقرُ على أيقونةَ ، ثمَّ على القطعةِ المستقيمةِ.

• لرسمِ مماسٍ للدائرةِ منْ نقطةٍ خارجَها، أحددُ أولاً النقطةَ بالنقرِ على أيقونةَ ، ثمَّ أيقونةَ .

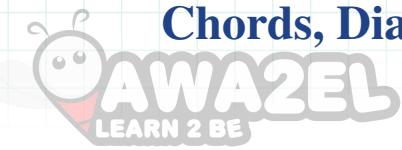
عرضُ النتائجِ:

أعدُّ معَ أفرادِ مُجتمعِي عرضاً تقدِيمياً تبيَّنُ فيه ما يأتي:

- خطواتٌ تفويضِ المُشروعِ موضحةً بالصورِ والرسومِ، بما في ذلكَ صورةُ الشكِلِ الذي رُسِمَ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.
- معلوماتٌ جديدةٌ تعرَّفناها في أثناءِ العملِ بالمُشروعِ، ومُقترحٌ لتوسيعِ المُشروعِ.

أوتار الدائرة، وأقطارها، ومماساتها

Chords, Diameters and Tangents of a Circle



معرفة الوتر، والقطر، والمماس، وخصائص كل منها، والعلاقات التي تربط بعضها بعضٍ، وتوظيف ذلك في إيجاد أطوال وقياسات زوايا مجهولة.

الدائرة، المركز، الوتر، القوس، القطر، نصف القطر، المماس، نقطة التماس، القاطع.



في حديقة منزل عبير طاولة دائرة، وهي تريد عمل فتحة عند مركزها لتشييت عمود يحمل مظللة بها. كيف يمكن لعمير تحديد مركز الطاولة؟

فكرة الدرس



المصطلحات

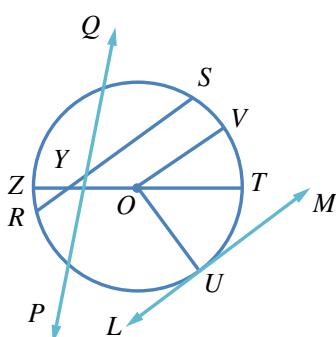


مسألة اليوم



الدائرة (circle) هي المحل الهندسي لنقطة تحرّك في المستوى، بحيث تظل على البعد نفسه عن نقطة محددة تسمى **مركز الدائرة** (center). أمّا **الوتر** (chord) فهو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة، ويُسمى الوتر الذي يمرّ بمركز الدائرة **القطر** (diameter). ويطلق على القطعة المستقيمة التي تصل مركز الدائرة بنقطة عليها اسم **نصف القطر** (radius).

القاطع (secant) هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين، ويحوي وترًا فيها. أمّا المستقيم الذي يشتراك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط فيُسمى **المماس** (tangent). ويطلق على نقطة التقاء المماس بالدائرة اسم **نقطة التماس** (point of tangency).



مثال 1

يُمثل الشكل المجاور دائرة مركزها O . أسمى:

1 مماسًا للدائرة.



2 أربعة أنصاف قطر.

\overline{OV} , \overline{OT} , \overline{OZ} , \overline{OU}

رموز رياضية

• ترمز \overleftrightarrow{LM} إلى المستقيم LM .

• ترمز LM إلى طول القطعة المستقيمة. أمّا \overline{LM} فترمز إلى القطعة المستقيمة نفسها.



فُطْرًا للدائرة.

3

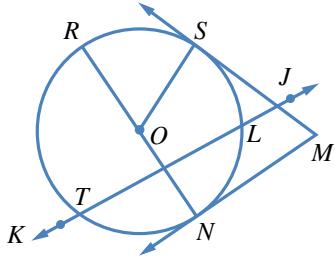
\overline{ZT}

وتَرًا للدائرة.

4

$\overline{SR}, \overline{ZT}$

أتحقق من فهمي



يُبيّنُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركُزها O . أسمّي:

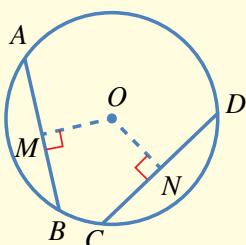
(a) قاطعاً للدائرة.

(b) وترًا للدائرة.

(c) مماساً للدائرة.

أوتار الدائرة

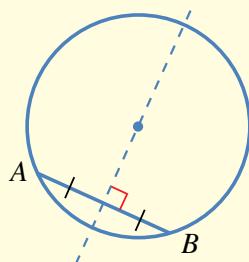
نظريات



1 الوتران المُنْتَطابِقانِ يبعداً المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرة، والوتران اللذانِ يبعداً المسافةَ نفسَها عنْ مركزِ الدائرةِ مُنْتَطابِقانِ.

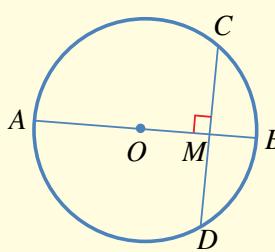
مثالٌ: بما أنَّ $OM = ON$, $CD = AB$, فإنَّ

وإذا كانَ $AB = CD$, $OM = ON$, فإنَّ



2 المُنْصَفُ العموديُّ لأيِّ وترٍ في الدائرة يمرُّ بمركزِها.

مثالٌ: في الشكلِ المجاورِ، يقعُ مركزُ الدائرة على الخطِ المُنْتَقِطِ.



3 نصفُ القُطْرِ العموديُّ على وترٍ في دائرةٍ يُنْصَفُ ذلكَ الوتر.

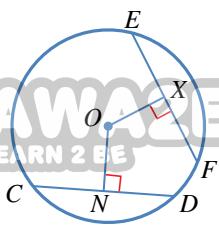
مثالٌ: بما أنَّ $CD \perp AB$, فإنَّ $MC = MD$. وإذا

مرَّ القُطْرُ بمتصفٍ وترٍ فإنه يعادِه.

رموز رياضية

يدلُّ الرمزُ \perp على تعامُدِ قطعَتَينِ، أوَّ مستقيميَّنِ.

مثال 2



في الشكل المجاور، \overline{EF} و \overline{CD} وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $?NC = 8 \text{ cm}$ ، $ON = OX$

OX يمثلان بعدي الوتران CD و EF عن مركز الدائرة، وهما متطابقان.

$$ON = OX$$

من معطيات السؤال

إذا تساوى بعدي وتران عن مركز الدائرة، فهما متطابقان

$$NC = \frac{1}{2} CD$$

نصف القطر العمودي على وتر ينصفه

$$= \frac{1}{2} EF$$

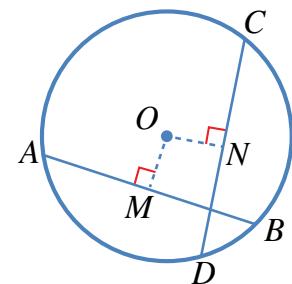
الوتران \overline{CD} و \overline{EF} متطابقان

$$= \frac{1}{2} (8) = 4 \text{ cm}$$

بالتعميقي

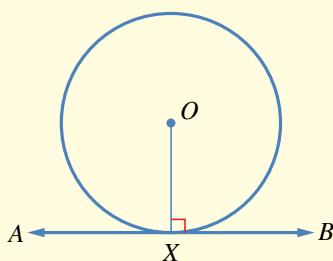
أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overline{AB} و \overline{CD} وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $OM = ON$ ، $?AB = 12 \text{ cm}$ ، $CN = 12 \text{ cm}$ ، فما طول



مماسات الدائرة

نظريات

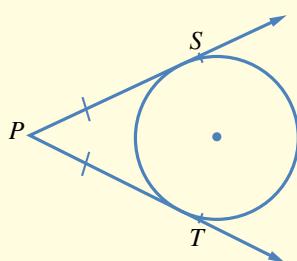


مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

1

مثال: نصف القطر \overleftrightarrow{OX} عمودي على المماس \overleftrightarrow{AB} .

$$\overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$$



المماسان المرسومان للدائرة من نقطة خارجها لهما الطول نفسه.

2

مثال: $PS = PT$ و \overline{PT} لهما الطول نفسه: $. PS = PT$

رموز رياضية

يدل \overleftrightarrow{PT} على مماس الدائرة. أما \overline{PT} فيدل على القطعة المستقيمة الواقلة بين النقطة P ونقطة التماس T ، ويدل الرمز على طول هذه القطعة.



مثال 3

في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{TP} و \overleftrightarrow{TQ} مماسان لدائرة مركزها O :
أجد قيمة x .

$$TP = TQ$$

مماسان مرسومان للدائرة من نقطة خارجها

$$2x + 3 = 4x - 6$$

بالتعويض

$$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$$

بإضافة $-2x + 6$ إلى الطرفين

$$9 = 2x$$

بالتبسيط

$$x = \frac{9}{2}$$

أجد قياس الزاوية $\angle POQ$.

أفترض أن قياس الزاوية $\angle POQ$ هو y :

$$\angle OQT = \angle OPT = 90^\circ$$

مماس الدائرة يتعامد مع نصف

القطر في نقطة التماس

$$90^\circ + 70^\circ + 90^\circ + y = 360^\circ$$

مجموع قياس الزوايا الداخلية

للسquare الرباعي هو 360°

$$250^\circ + y = 360^\circ$$

بالتبسيط

$$y = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$$

طرح 250° من الطرفين

رموز رياضية

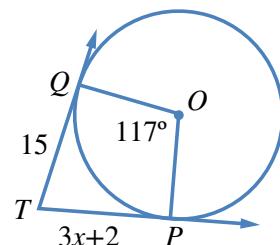
يرمز الحرف m في
إلى قياس $\angle OQT$
الزاوية OQT .

(b) أجد قياس الزاوية $\angle PTQ$.

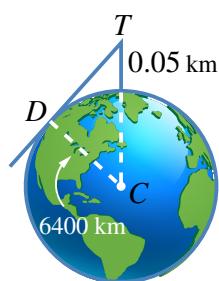
اتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overrightarrow{TP} و \overrightarrow{TQ} مماسان لدائرة مركزها O :

(a) أجد قيمة x .



مثال 4: من الحياة



أبراج: يرتفع برج مراقبة 50 m عن مستوى الأرض.
ما بعد نقطة على الأرض يمكن مشاهدتها من قمة البرج،
بافتراض أن الأرض كره طول نصف قطرها 6400 km تقرباً؟
أرسم مخططاً يمثل المسألة.

الدائرة تمثل الأرض، والنقطة T تمثل قمة البرج، والمماس \overleftrightarrow{TD} يمثل خط البصر، ونقطة التماس D هي أبعد نقطة يمكن مشاهدتها من قمة البرج. ارتفاع البرج $50\text{ m} = 0.05\text{ km}$

$$m\angle TDC = 90^\circ$$

المماس يتعامد مع نصف القطر عند نقطة التماس

نظريّة فيثاغورس

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

طرح $40960000 - 40960640.0025$ من الطرفين

أخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$640.0025 = (TD)^2$$

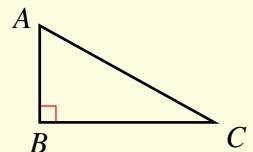
$$25.3 \approx TD$$

إذن، المسافة التي تمثل أبعد نقطة على الأرض يمكن مشاهدتها من قمة البرج هي:
25 km تقريباً.

أتذكر

نظريّة فيثاغورس: إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B , فإن:

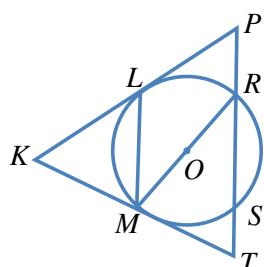
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$



أتحقق من فهمي

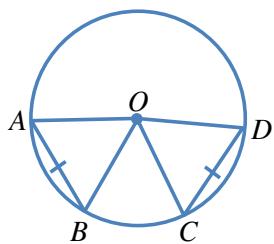
برج مراقبة: تبعد أقصى نقطة يمكن مشاهدتها من قمة برج مراقبة مسافة 32 km عنّه. ما ارتفاع قمة البرج عن سطح الأرض، بافتراض أن الأرض كره طول نصف قطرها 6400 km تقريباً.

أتدرب وأحل المسائل



يُمثل الشكل المجاور دائرة مركزها O . أسمّي:

- 1 نصفي قطرين.
- 2 وترین.
- 3 مماسين.
- 4 قاطعاً.



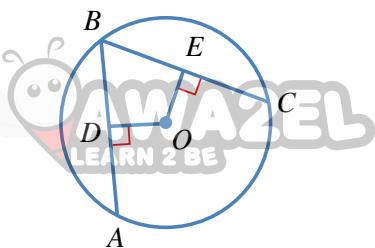
\overline{CD} و \overline{AB} وتران لهما الطول نفسه في دائرة مركزها O :

ما نوع المثلث AOB ? أبّر إجابتي.

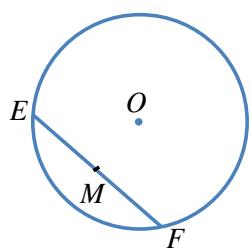
هل المثلثان COD و AOB متطابقان؟ أبّر إجابتي.

إذا كان قياس الزاوية OAB هو 65° , فما قياس الزاوية COD ?

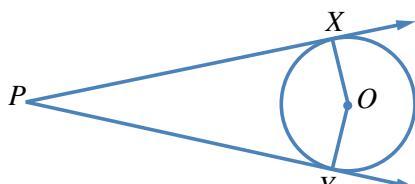
الوحدة 2



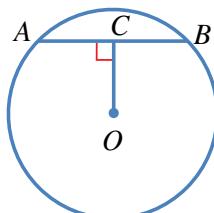
- في الشكل المجاور، \overline{AB} و \overline{CB} وتران متطابقان في دائرة مركزها O .
إذا كان $OD = 3x - 7$ ، $OE = x + 9$ ، فما قيمة x ؟ 8



- في الشكل المجاور، \overline{EF} وتر في دائرة مركزها O ، والنقطة M هي منتصف الوتر:
هل المثلثان EOM و FOM متطابقان؟ أبُرُّ إجابتي. 9
هل الزاوية EMO قائمة؟ أبُرُّ إجابتي. 10
إذا كان قياس الزاوية MOF هو 72° ، فما قياس الزاوية MEO ؟ أبُرُّ إجابتي. 11

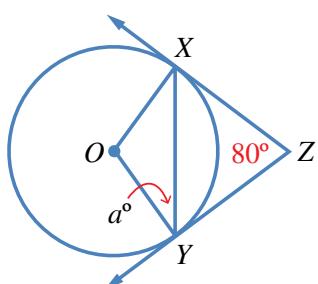


- في الشكل المجاور، \overrightarrow{PY} و \overrightarrow{PX} مماسان لدائرة مركزها O :
هل قياس الزاوية PXO هو 90° ؟ أبُرُّ إجابتي. 12
أبُين أن المثلثين XPO و YPO متطابقان. 13
إذا كان قياس الزاوية XPO هو 17° ، فما قياس الزاوية XOY ؟ 14



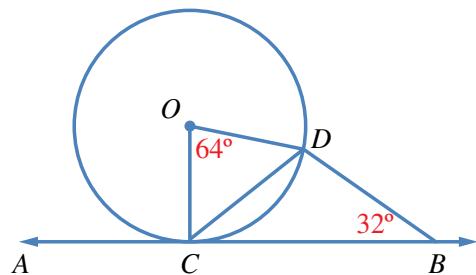
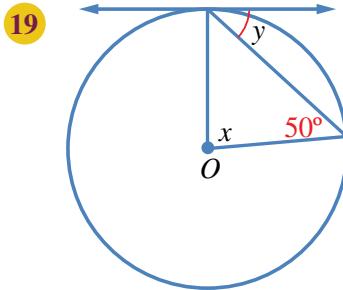
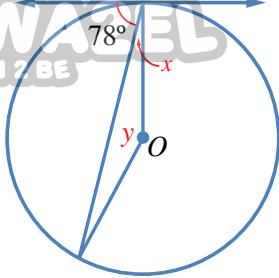
- في الشكل المجاور، \overline{AB} وتر طوله 6 cm في دائرة مركزها O . إذا كان قياس الزاوية ACO هو 90° ، $OC = 4\text{ cm}$ ، فما طول نصف قطر الدائرة؟ 15

أَحْلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس. 16



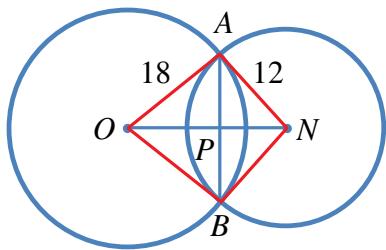
- في الشكل المجاور، \overrightarrow{ZY} و \overrightarrow{ZX} مماسان لدائرة مركزها O . أَجِد قيمة a . 17

يَظْهُرُ فِي كُلِّ مِنَ الشَّكْلَيْنِ الآتِيِّيْنِ مَمَاسٌ لِدَائِرَةٍ مَرْكُزُهَا O . أَجِدْ قِيمَةَ x وَ y فِي كُلِّ حَالَةٍ.



20 في الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ، \overleftrightarrow{AB} مَمَاسٌ لِدَائِرَةٍ مَرْكُزُهَا O فِي النَّقْطَةِ C .
لَمَاذَا يُعَدُّ الْمُثَلُثُ BCD مُنْتَطَابِقَ الْضَّلْعَيْنِ؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

21 كُمْ مَمَاسًا يُمْكِنُ أَنْ يُرَسَّمَ لِدَائِرَةٍ مِنْ نَقْطَةٍ عَلَيْهَا، وَمِنْ نَقْطَةٍ خَارِجَهَا، وَمِنْ نَقْطَةٍ دَاخِلَهَا؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.



مهارات التفكير العليا

22 تَحْدِيد: \overleftrightarrow{AB} وَتَرْ مُشَتَّرُكٌ بَيْنَ دَائِرَتَيْنِ مُتَقَاطِعَيْنِ، وَهُوَ عَمُودِيٌّ عَلَى الْقَطْعَةِ الْمُسْتَقِيمَةِ \overline{ON} الْوَاصِلَةِ بَيْنَ مَرْكَزَيْهِمَا. إِذَا كَانَ $AB = 14 \text{ cm}$ ، فَمَا طُولُ \overline{ON} ؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

برهان: \overleftrightarrow{AB} ، وَ \overleftrightarrow{CD} وَتَرَانِ مُتَسَاوِيَانِ فِي دَائِرَةٍ مَرْكُزُهَا N . أُثِيتُ أَنَّ لَهُمَا الْبُعْدَ نَفْسَهُ عَنِ النَّقْطَةِ N .

24 تَبَرِيرٌ: \overleftrightarrow{AB} مَمَاسٌ لِدَائِرَةٍ مَرْكُزُهَا N فِي النَّقْطَةِ A ، وَطُولُ نَصْفِ قُطْرِهَا 3 cm ، وَ $BA = 5 \text{ cm}$. قَالَتْ سَارَةُ إِنَّ $BN = 4 \text{ cm}$ ؛ لَأَنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هُلْ قَوْلُ سَارَةَ صَحِيحٌ؟ أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

الأقواس والقطاعات الدائرية

Arcs and Sectors



حساب طول القوس، ومساحة القطاع الدائري، وحل مسائل تتعلق بهما.

فكرة الدرس



القوس، القطاع.

المصطلحات



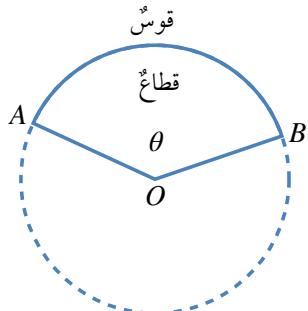
مسألة اليوم



أعد سعيد فطيرة بيتسا في وعاء دائري طول قطره 24 cm. وبعد أن حبّها أحدث فيها شقين من المركز إلى الطرف، بحيث كان قياس الزاوية بينهما 45° . كيف يمكن إيجاد مساحة الجزء الذي قطعه سعيد من الفطيرة؟

القوس (arc) هو جزء من الدائرة محدد بنقطتين عليهما. **القطاع (sector)** هو الجزء المحصور

بين قوسٍ منها ونصفي القطرين اللذين يمتدان بطرفي القوس.

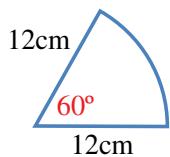


تمثّل الزاوية AOB في الشكل المجاور زاوية القطاع الذي يُعد كسرًا من الدائرة. ويمكن استعمال قياس زاوية القطاع لكتابته هذا الكسر، وذلك بقسمة قياس الزاوية على الدورة الكاملة؛ أي: $\frac{\theta}{360^\circ}$ ، حيث θ قياس زاوية القطاع.

مثال 1

يمثل الشكل المجاور قطاعاً دائرياً. أجد:

1 طول القوس (أكتب الإجابة بدلاً من π).

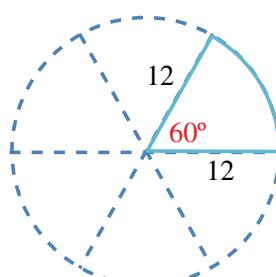


القطاع كسرٌ من الدائرة، وهذا الكسر هو $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$. وبما أن طول

قطر الدائرة 24 cm، فإن طول محيطها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذن، طول القوس يساوي $\frac{1}{6}$ طول محيط الدائرة؛ أي:

$$24\pi \div 6 = 4\pi \text{ cm}$$



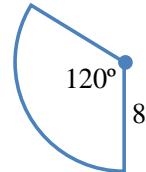
مساحة القطاع . 2

مساحة الدائرة هي: $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

مساحة القطاع تساوي $\frac{1}{6}$ مساحة الدائرة؛ أي: $144\pi \div 6 = 24\pi \text{ cm}^2$

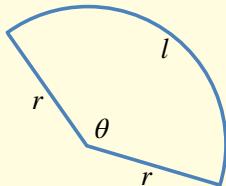
اتحقق من فهمي

يُمثل الشكل المجاور قطاعاً دائرياً. أجد طول القوس، ومساحة القطاع الدائري.



تعرّفنا في المثال السابق أن القطاع هو كسرٌ من الدائرة، وأنه يمكن دائماً استعمال قياس زاوية القطاع لحساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري.

طول القوس القطاعي ومساحته



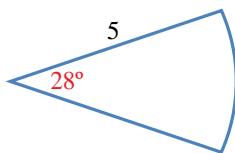
إذا كان قياس زاوية القطاع θ° ، وطول نصف قطر الدائرة r ، وطول القوس l ، ومساحة القطاع A ، فإن:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

مفهوم أساسى

مثال 2



أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور.

زاوية القطاع هي 28° ، وطول نصف القطر هو 5 وحدات طول:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

قانون طول القوس

$$l = \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2 \times 5$$

بتعويض $\theta = 28^\circ, r = 5$

$$\approx 2.4$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، طول هذا القوس مقارباً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 2.4 وحدة طول.

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

قانون مساحة القطاع

$$= \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$

بتعويض $r = 5, \theta = 28^\circ$

$$\approx 6.1$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة هذا القطاع مُقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 6.1 وحدة مربعة.

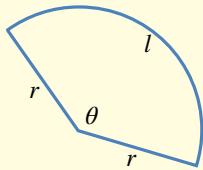
أتحقق من فهمي

أَجِدْ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.

125°

8 cm

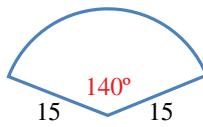
محيط القطاع الدائري



محيط القطاع الدائري (L) هو المسافة حول القطاع، وهي تساوي طول قوس القطاع، مضاعفًا إليه مثلاً طول نصف قطر الدائرة:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$

مفهوم أساسي



أَجِدْ محيطَ القطاع الدائريِّ في الشكلِ المجاورِ، مُقرّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

زاوية القطاع هي 140° ، وطول نصف القطر هو 15 وحدة طولٍ:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$

$$= \left(\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15\right) + 2 \times 15$$

$$\approx 66.6519$$

قانونُ محيطِ القطاع

$$r = 15, \theta = 140^\circ$$

باستعمالِ الآلة الحاسبة

إذن، محيطُ هذا القطاع مُقرّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هو: 66.7 وحدة طولٍ.

رموز رياضية

يرمزُ الحرف L إلى طولِ القوسِ، ويرمزُ الحرف L إلى محيطِ القطاعِ.

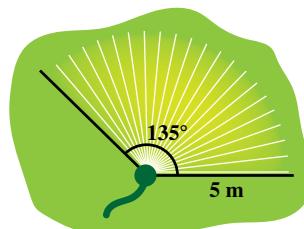
أتحقق من فهمي

أَجِدْ محيطَ قطاع دائرِيٍّ زاويته 225° ، في دائرة طول نصف قطرها 50 cm، مُقرّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

مثال 4: من الحياة



حديقةٌ منزلٌ وُضعَ في أحدِ أطرافِها مَرْشٌ للماءِ، يدورُ حولَ الرأسِ بزاويةٍ مقدارُها 135° ، فيصلُ الماءُ إلى مسافة 5 m من المَرْشِ. أَجِدْ مساحةَ المنطقةِ التي سيرويها هذا المَرْشُ، مُقرّبًا إجابتي إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ.



تُمثّل المنطقة التي سيروبيها المُرْس قطاعاً دائرياً زاويته 135° ، وطول نصف قطره 5 m :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{135^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2 \\ &\approx 29.5 \end{aligned}$$

قانون مساحة القطاع

$$r = 5, \theta = 135^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة هذه المنطقة مُقرّبة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 29.5 m^2

أتحقق من فهمي

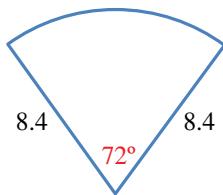
طول عقرب الدقائق في ساعة حائط هو 15 cm . ما مساحة المنطقة التي يُعطّبها العقرب في

أثناء حركته من العدد 9 إلى العدد 2 ؟

أتدرب وأحل المسائل



يُمثّل الشكل المجاور قطاعاً دائرياً:



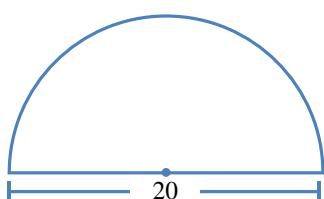
1 أُعّبر بكسر عن الجزء الذي يُمثّله هذا القطاع من الدائرة.

2 أَجِد طول القوس، مُقرّباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

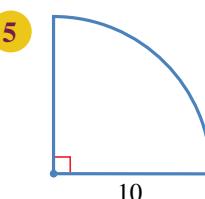
3 أَجِد مساحة القطاع، مُقرّباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

أَجِد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍ من الأشكال الآتية (أَكْتُ الإجابة بدلالة π):

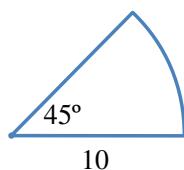
4



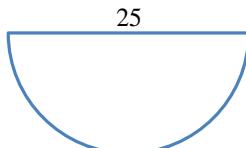
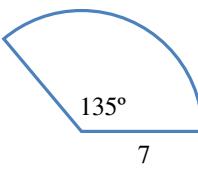
5



6



7



8 أَجِد مساحة نصف الدائرة المجاورة، ثم أَجِد محيطها.

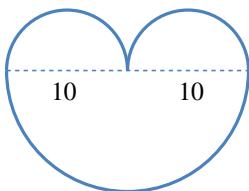
الوحدة 2



أَجِد مساحة الجزء المظلل في الشكل المجاور (أكتب الإجابة بدلالة π). أُبَرِّرُ إجابتي. 9



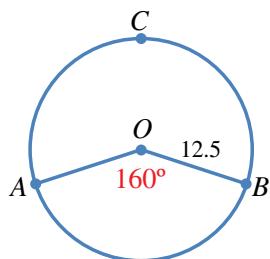
أَحْلِي المسألة الواردة في بداية الدرس. 10



يُمثّلُ الشكل المجاور 3 أنصاف دوائر:

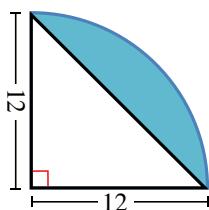
أَجِد محيطَ الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π). 11

أَجِد مساحةَ الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π). 12

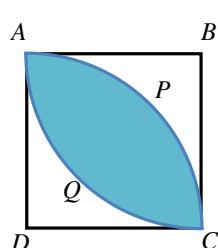


تُمثّلُ النقطة O مركزَ دائرة، طولُ نصفِ قُطُرِها 12.5 وحدة طولٍ. 13

أَجِد طولَ القوس ACB .



يُمثّلُ الشكل المجاور ربع دائرة. أَجِد مساحةَ الجزء المظلل في الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π). 14



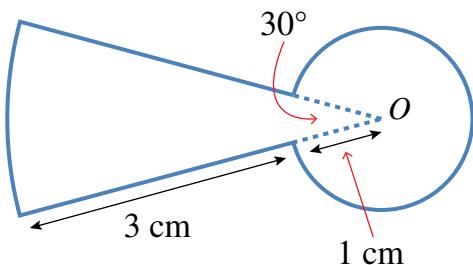
يُمثّلُ الشكل المجاور المربيع $ABCD$ الذي طول ضلعه 8 cm ، ويُمثّل APC و AQC قوسين من دائريتين مركزاهما D و B على التوالي. أَجِد مساحةَ الجزء المظلل (أكتب الإجابة بدلالة π). 15

صمّمَ مهندسٌ مِرَّشٌ مِيَاهٌ لرِّيٌّ منطقةً مساحتُه 100 m^2 على هيئة قطاع دائريٌّ طولُ نصفِ قُطُرِه 15 m . ما زاوية دوران هذا المِرَّش؟ 16



سياراتٌ: يُبيّنُ الشكلُ المجاورُ مساحةَ الزجاجِ الأماميِّ لسيارةٍ. إذا كانَ طولُ شفرةِ الماسحةِ 40 cm ، وطولُ شفرةِ الماسحةِ معَ ذراعِها 66 cm ، فما مساحةُ الزجاجِ التي تُنْعَفُّها الماسحةُ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ؟ 17

مهارات التفكير العليا

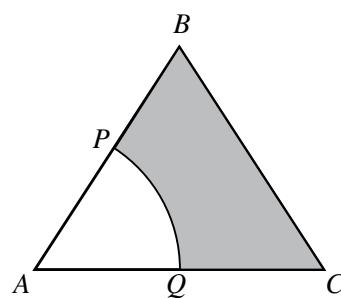


تحدٌ: أجدُ محیطَ الشکلِ المجاورِ ومساحتهُ. 18



تحدٌ: اشتَرَتْ عفافُ فطيرةً بيتزا دائِريةً الشكَلِ طولُ قطْرِها 36 cm ، ثُمَّ قسَّمتُها إلى قطعٍ متساوِيَّة. بعدَ ذلِكَ أكلَتْ منها قطعَتَينِ تُمثِّلانِ معاً 180 cm^2 منها. أجدُ قياسَ الزاويةِ لقطعةِ البيتزا الواحدةِ، مُقرَّباً إجابتي إلى أقربِ عددٍ كليٍّ. 19

تحدٌ: يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ مثلثاً مُتطابِقَ الأضلاعِ، طولُ ضلعِه 6 cm . إذا كانتِ النقطتانِ P و Q تُنْصَفانِ الضلعِينِ على التواليِّ، وكانَ \overline{APQ} قطاعاً دائِرِياً منْ دائِرةٍ مرْكُزُها A ، فأجدُ مساحةَ الجزءِ المظلَّلِ. 20



الزوايا في الدائرة

Angles in a Circle



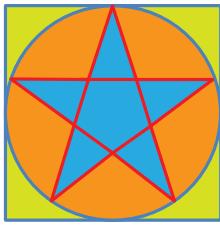
معرفة العلاقات بين الزوايا في الدائرة، وتوظيفها في إيجاد زوايا مجهولةٍ وحلّ مسائل حياتية.

فكرة الدرس



الزاوية المركزية، الزاوية المحيطية، القوس المقابل، الزاوية المُقابلة لقطر الدائرة، الرباعي الدائري، الزاوية المماسية.

المصطلحات



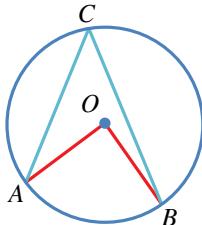
يُمثل الشكل المجاور تصميمًا مكونًا من نجمة خماسية منتظمَة محاطة بدائرة يحيط بها مربع. ماذا تسمى الزوايا عند رؤوس النجمة؟ كيف نجد قياس كل منها؟

مسألة اليوم



تُسمى الزاوية التي يكون رأسها في مركز الدائرة، وضلاعها نصف قطرين للدائرة **زاوية مركزية** (central angle). ففي الشكل الآتي، $\angle AOB$ زاوية مركزية في الدائرة التي ي مركزها، O ،

ويُسمى القوس \widehat{AB} **القوس المقابل** (subtended arc).

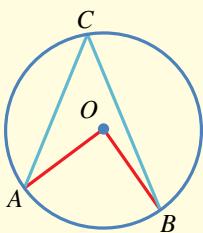


يُسمى \widehat{AB} القوس الأصغر،
وُسمى \widehat{ACB} القوس الأكبر.

تُسمى الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة، ويكون ضلاعها وترٌ في الدائرة **زاوية محيطية** (inscribed angle). ففي الشكل السابق، الزاوية $\angle ACB$ محيطية، والزاوية $\angle AOB$ مركزية، وهما مرسومتان على القوس \widehat{AB} . وعند قياس هاتين الزاويتين سنجد أن قياس الزاوية المركزية $\angle AOB$ يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية $\angle ACB$.

الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

نظريّة



قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه:

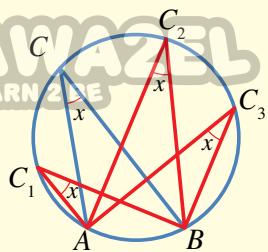
$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$

أفڪر

ما قياس الزاوية المحيطية المقابلة للقطر؟

الزوايا المحيطية المرسومة على قوس واحد

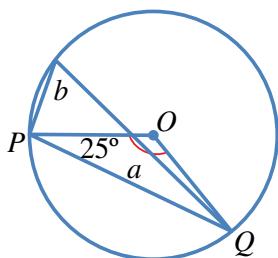
نظريّة



جميع الزوايا المحيطية المرسومة على قوس واحد في دائرة لها القياس نفسه:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$

مثال 1



إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور،
فما قياس الزاويتين المشار إليهما بالحرفين a و b ؟

المثلث OPQ مُتطابق الضلعيين؛ لأن \overline{OP} و \overline{OQ} نصفا قطعرين
في الدائرة ومجموع قياسات زوايا المثلث هو 180° . إذن:

$$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180^\circ$$

$$a + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$$

$$a + 50^\circ = 180^\circ$$

$$a + 50^\circ - 50^\circ = 180^\circ - 50^\circ$$

$$a = 130^\circ$$

$$b = 130^\circ \div 2$$

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس
الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه

$$= 65^\circ$$

بالتبسيط

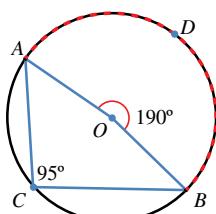
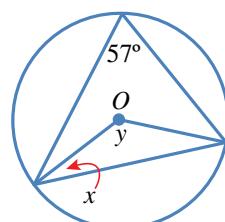
طرح 50° من الطرفين

آذكُر

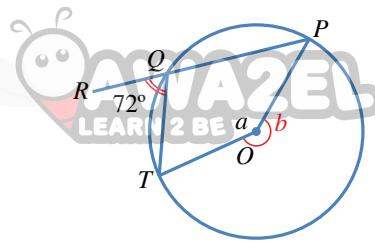
زاويا قاعدة المثلث مُتطابق
الضلعيين متساويتان في
القياس.

أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟



قد يكون قياس الزاوية المركزية أكبر من 180° . ففي الشكل المجاور، الزاوية AOB مُقابلة للقوس ADB ، وقياسها 190° ، وهو ضعف قياس الزاوية المحيطية ACB .



مثال 2

آتذكر

- قياس الزاوية المستقيمة 180° .
- مجموع قياسات الزوايا حول نقطة هو 360° .

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، والنقاط R, Q, P, T على استقامة واحدة، فما قياس الزاوية a ؟

$$m\angle PQT = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ \quad \text{الزاويتان } PQT, RQT \text{ تشكلان زاوية مستقيمة}$$

$$a + b = 360^\circ$$

$$b = 2 \times 108^\circ = 216^\circ$$

$$a + 216^\circ = 360^\circ$$

$$a = 360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$$

مجموع قياسات الزوايا حول نقطة هو 360°

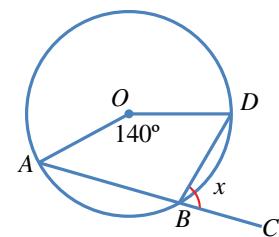
قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه

بتعويض قيمة b

طرح 216° من الطرفين

أتحقق من فهمي

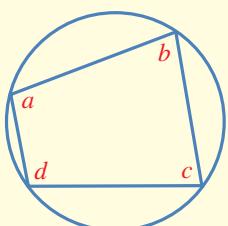
إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، والنقاط A, B, C على استقامة واحدة، فما قيمة x ؟



إذا وقعت رؤوس مُضلع رباعي على دائرة، فإنه يسمى رباعيًا دائريًا (cyclic quadrilateral) وإذا حسبنا مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين فيه، فإنه يكون 180° .

المضلع الرباعي الدائري

نظريّة



مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في المضلع الرباعي الدائري هو 180° :

$$b + d = 180^\circ, a + c = 180^\circ$$

مثال 3

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟

$$m\angle ACO = 43^\circ$$

$$y + m\angle ACO = 90^\circ$$

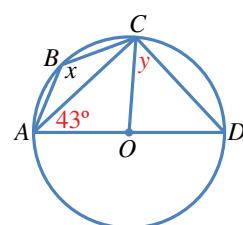
$$y + 43^\circ = 90^\circ$$

المثلث ACO مُتطابق الصُلعين

الزاوية ACD محيطية مشتركة مع الزاوية

المركزية AOD بالقوس نفسه

بتعويض



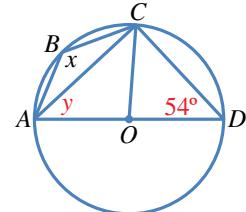
$$\begin{aligned}
 y &= 90^\circ - 43^\circ \\
 &= 47^\circ \\
 x + m\angle ADC &= 180^\circ \\
 m\angle ADC &= y = 47^\circ \\
 x + 47^\circ &= 180^\circ \\
 x &= 180^\circ - 47^\circ \\
 &= 133^\circ
 \end{aligned}$$

طرح 43° من الطرفين

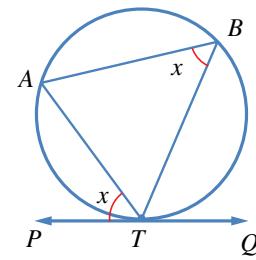
الشكل $ABCD$ رباعي دائري
المثلث OCD مُتطابق الضلعين
بتعيين قيمة y
طرح 47° من الطرفين

أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كلٌّ من x و y ؟



في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{PQ} هو مماس للدائرة عند النقطة T ، و \overline{TA} هو وتر للدائرة. تُسمى الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار ب نقطة التّمسك **الزاوية المماسية** (angle between a tangent and a chord). وهذه الزاوية تحصر القوس \widehat{TA} ، ويمكن ملاحظة أن قياس الزاوية المماسية PTA يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس \widehat{TA} نفسه.



الزاوية المماسية والزاوية المحيطية

نظريّة

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

مثال 4

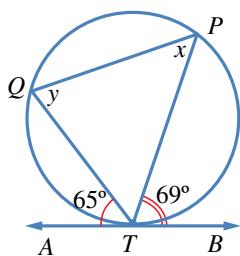
في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماس للدائرة في T . أجد قياس كلٌّ من الزوايا TSR و ATS .

$$m\angle ATS = m\angle TRS = 80^\circ$$

زوايا مماسية ومحيطية مشتركتان في القوس

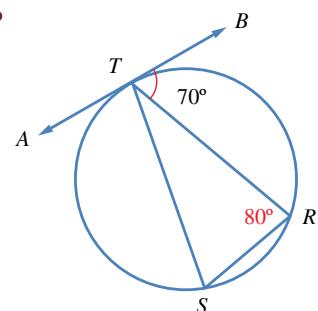
$$m\angle TSR = m\angle BTR = 70^\circ$$

زوايا مماسية ومحيطية مشتركتان في القوس



أتحقق من فهمي

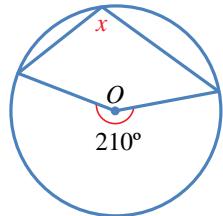
في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماس للدائرة في T . أجد قياس كلٌّ من الزوايا: TQP , TPQ , و QTP .



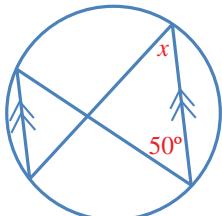


أَجِدْ قِيمَةَ x فِي كُلِّ مَا يَأْتِي:

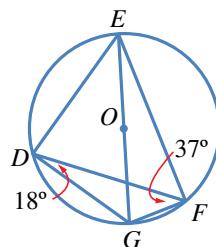
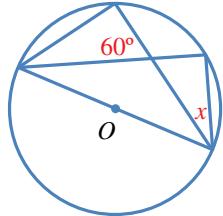
1



2



3



إِذَا كَانَتِ النَّقْطَةُ O هِيَ مَرْكَزُ الدَّائِرَةِ فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ، فَأَجِدْ كُلَّ مَا يَأْتِي:

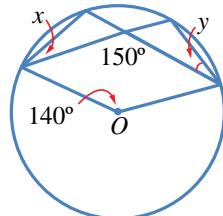
4 $m\angle EGF.$

5 $m\angle DEG.$

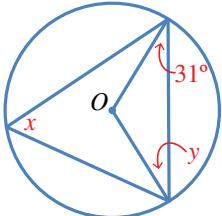
6 $m\angle EDF.$

إِذَا كَانَتِ النَّقْطَةُ O هِيَ مَرْكَزُ الدَّائِرَةِ، فَأَجِدْ قِيَاسَ الزَّوَافِيَّا المُشَارِ إِلَيْهَا بِالحُرْفَيْنِ x وَ y فِي كُلِّ مِنَ الدَّوَافِرِ الْأَتَيَّةِ:

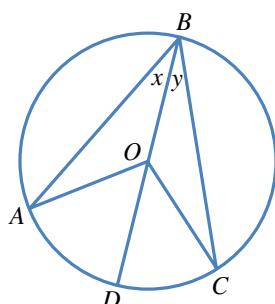
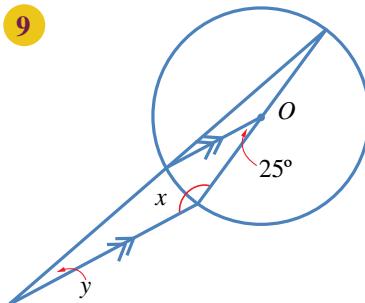
7



8



9



فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ دَائِرَةٌ مَرْكُزُهَا O ، وَ قِيَاسُ الزَّاوِيَّةِ ABO هُوَ x° ، وَ قِيَاسُ الزَّاوِيَّةِ CBO هُوَ y° :

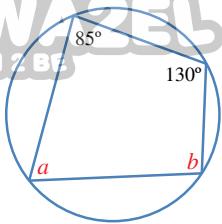
10 أَجِدْ قِيَاسَ الزَّاوِيَّةِ BAO .

11 أَجِدْ قِيَاسَ الزَّاوِيَّةِ AOD .

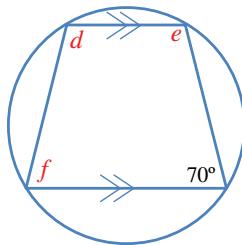
12 أُثِبْتُ أَنَّ قِيَاسَ الزَّاوِيَّةِ الْمَرْكَزِيَّةِ يَسَاوِي مِثْلَيْ قِيَاسِ الزَّاوِيَّةِ الْمُحِيطِيَّةِ الْمَرْسُومَةِ عَلَى الْقَوْسِ نَفْسِهِ.

أَجِدُّ قياسَ الزوايا الم المشار إليها بـ حرفٍ في كُلٌّ من الدوائرِ الآتية:

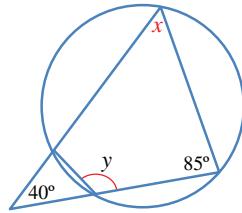
13



14



15



في الشكلِ الرباعيِ الدائريِ $PQRT$ ، قياسُ الزاوية ROQ هو 38° . حيثُ O مرکزُ الدائرة، وَ قطْرُ POT فيها يوازي QR . أَجِدُّ
قياسَ كُلٌّ منَ الزواياِ الآتيةِ:

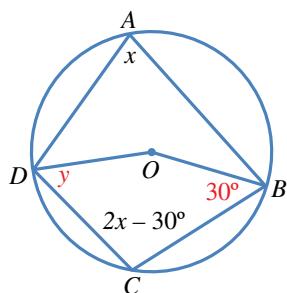
16 $ROT.$

17 $QRT.$

18 $QPT.$

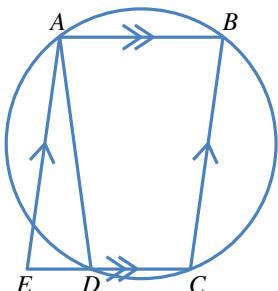
يُمثِّلُ الشكُلُ المجاورُ دائرةً مرکزُها O :

$$3x - 30^\circ = 180^\circ \quad 19$$



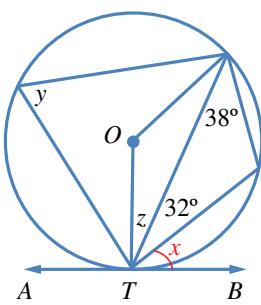
أَجِدُّ قياسَ الزاوية CDO المشار إليها بالحرف y ، مُبِرِّراً كُلَّ خطوةٍ في حلّي.

يُمثِّلُ الشكُلُ المجاورُ $ABCE$ متوازيَّ أضلاعٍ. أُبَيِّنُ أَنَّ قياسَ الزاوية AED يساوي قياسَ الزاوية ADE ، مُبِرِّراً كُلَّ خطوةٍ في حلّي.

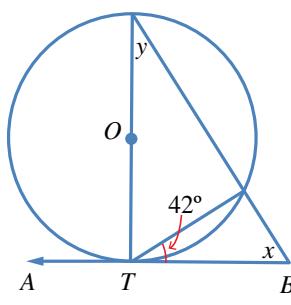


أَجِدُّ قياسَ الزوايا الم المشار إليها بـ حرفٍ في كُلٌّ من الدوائرِ الآتيةِ:

22

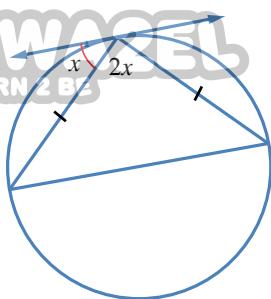


23



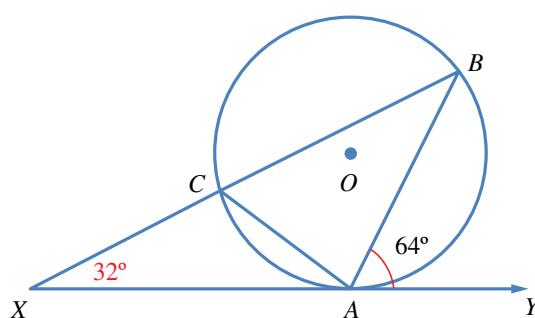
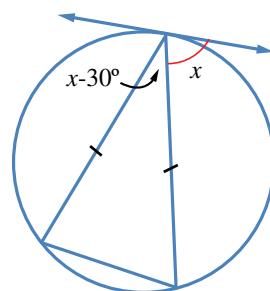
الوحدة 2

24



أَجِدْ قِيمَةَ x فِي كُلِّ مِنَ الشَّكْلَيْنِ الْآتَيْنِ:

25

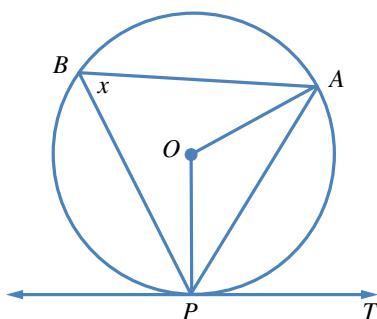


26 تُمثِّلُ النَّقْطَةُ O مَرْكَزَ الدَّائِرَةِ فِي الشَّكْلِ الْآتَى، وَيُمَثِّلُ \overleftrightarrow{XY} مَمَاسًا لِلَّدَائِرَةِ عِنْدَ A . إِذَا كَانَتِ النَّقَاطُ B وَ C وَ X وَ Y تُمثِّلُ خَطًّا عَلَى اسْتِقَامَةٍ وَاحِدَةٍ، فَأُثْبِتْ أَنَّ المُثَلَّثَ ACX مُتَطَابِقُ الضَّلَعَيْنِ، مُبَرِّرًا إِجَابَتِي.

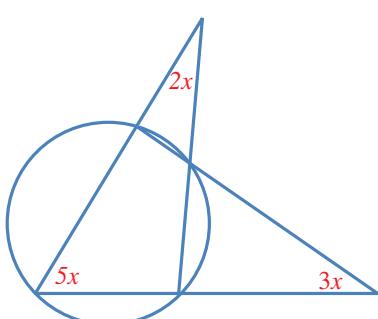
مهارات التفكير العليا



27 تُبَرِّرُ: قَالَتْ فَاتَنُ إِنَّ الرَّاوِيَةَ الْمُحِيطِيَّةَ الْمَرْسُومَةَ عَلَى قُطْرِ الدَّائِرَةِ زَوْيَّةٌ قَائِمَةٌ. هُلْ قَوْلُ فَاتَنَ صَحِيحٌ؟ أُبَرِّرُ إِجَابَتِي.



28 تُبَرِّرُ: فِي الشَّكْلِ الْمُجاوِرِ، \overleftrightarrow{PT} مَمَاسٌ لِلَّدَائِرَةِ مَرْكُزُهَا O . إِذَا كَانَ قِيَاسُ الزَّاوِيَّةِ PBA هُوَ x° ، فَأُثْبِتْ أَنَّ قِيَاسَ الزَّاوِيَّةِ APT يَسَاوِي قِيَاسَ الزَّاوِيَّةِ ABP ، مُبَرِّرًا خَطْوَاتِ الْحَلَّ.



29 تَحْدِّ: أَجِدْ قِيمَةَ x فِي الشَّكْلِ الْمُجاوِرِ.

معادلة الدائرة

Equation of a Circle



كتابة معادلة الدائرة، وإيجاد المركز ونصف القطر من معادلة دائرة معلومة.

فكرة الدرس

معادلة الدائرة، الصورة القياسية، الصورة العامة.



تمثيل النقطة (7, 4) موقع محطة إذاعة يُلتقّطُ بثها في دائرة نصف قطرها 224 km. إذا كانَ فوّاز يقيمُ في بيتٍ تمثّلُه النقطة (75, 95) على مستوى إحداثيٍّ وحدته 1 km، فكيفَ يستطيعُ معرفةً إنْ كانَ بُثُّ هذهِ الإذاعة يصلُ بيته أم لا؟

المصطلحات

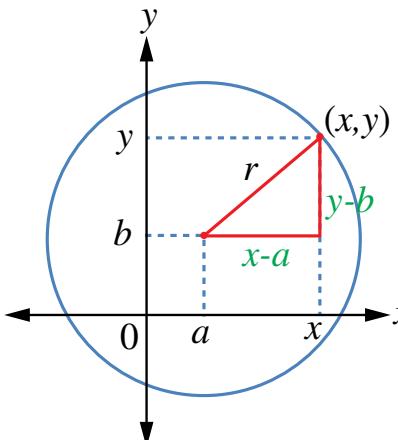


مسألة اليوم



معادلة الدائرة هي العلاقة التي تربط بين الإحداثي x والإحداثي y

لكل نقطةٍ واقعةٍ على الدائرة. فإذا عُوضَ إحداثياً نقطةً في المعادلة، وكانت النتيجة عبارةً صحيحةً، فهذا يعني أن تلك النقطة تقعُ على الدائرة.



يُمثلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزُها النقطة (a, b) ، وطولُ نصف قطرها r . والنقطة (x, y) تقعُ على الدائرة. الاحظُ أنَّهُ يُمكِّنُ تكونُ المثلث قائم الزاوية الذي طولُ ضلعِه الأفقيّ $(x - a)$ ، وطولُ ضلعِه الرأسيّ $(y - b)$ ، ووتره r . وبتطبيق نظرية فيثاغورس تنتُجُ المعادلة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ التي تُسمى الصورة القياسية (standard form) لمعادلة الدائرة.

معادلة الدائرة

مفهوم أساسيٍّ

1 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزُها النقطة (a, b) ، وطولُ نصف قطرها r ، هي:
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

2 معادلة الدائرة التي مركزُها نقطةُ الأصل $(0, 0)$ ، وطولُ نصف قطرها r ، هي:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

مثال 1



أكتب معادلة الدائرة في كلٍ من الحالات الآتية:
المركز هو النقطة $(-2, 7)$ ، وطول نصف القطر 6 وحدات.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x - (-2))^2 + (y - 7)^2 = 6^2$$

$$(a, b) = (-2, 7), r = 6$$

$$(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$$

المركز هو نقطة الأصل، وطول نصف القطر 5 وحدات.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$r = 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

الدائرة المرسومة في المستوى الإحداثي المجاور.

عند النظر إلى الدائرة يتبيّن أنَّ مركزها النقطة $(-3, 5)$ ، وأنَّ طول نصف قطرها 4 وحدات.

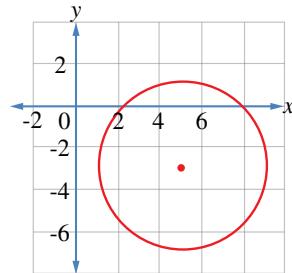
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x - 5)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$$

$$(a, b) = (5, -3), r = 4$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$



أتحقق من فهمي

أكتب معادلة الدائرة في الحالتين الآتيتين:

(a) المركز هو النقطة $(0, 4)$ ، وطول نصف القطر 9 وحدات.

(b) المركز هو نقطة الأصل، وطول القطر 8 وحدات.

إذاً أعلمَ مركز الدائرة ونقطة واقعةٌ عليها، فإنهُ يمكنُ إيجادُ طول نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، ثم كتابة معادلة الدائرة.

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين

مراجعة المفهوم

إذاً كانَ طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، فإنَّ:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

مثال 2



أَجِدُ معاَدلة الدائرة التي مر كُزُها النقطة $(13, -7)$ ، وتمرُ بالنقطة $(5, 4)$.
أَجِدُ طول نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

قانون المسافة بين نقطتين

$$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2$$

بالتعميض

$$= 144 + 81$$

بالتبسيط

$$= 225$$

$$r = \sqrt{225} = 15$$

بأخذ الجذر التربيعي

والآن، أُعوّض إحداثيي المركز r وقيمة r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، فـأَجِدُ أنَّ معادلة هذه الدائرة هي:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ معاَدلة الدائرة التي مر كُزُها النقطة $(-3, 4)$ ، وتمرُ بالنقطة $(0, 2)$.

إذا علمنا معاَدلة دائرة بالصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ فإنه يُمكِّن فك الأقواس وإعادة الترتيب، فتنتهي المعادلة إلى $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$:
يمكن أيضًا كتابة هذه المعادلة بالصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيث: $f = -a$, $g = -b$, $c = a^2 + b^2 - r^2$: وهي تُسمى الصورة العامة (general form) لمعادلة الدائرة.

إذا علمنا الصورة العامة لمعادلة أي دائرة، فإنه يُمكِّن تحويلها إلى الصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

إكمال المربع

مراجعة المفهوم

لإكمال المربع للحددين $x^2 + ax$ ، يضاف $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ، ثم يُطْرَح، فينتهي مربع كامل هو

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

مثال 3

أَجِدُ إحداثياتِ المركِزِ، وطُولَ نصفِ القُطْرِ للدائِرَة $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$ يَكُمَالُ المُرْبَعَ لِلحدُودِ التِي تَحْوِي x يَتَّسِعُ: $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ ، وَيَكُمَالُ المُرْبَعَ لِلحدُودِ التِي تَحْوِي y يَتَّسِعُ: $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$ وَبِذَلِكَ يُمْكِنُ تَحْوِيلُ المعادِلَةِ إِلَى: $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0 = (x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 - 56 = 0$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 81$$

بِمَقَارَنَةِ هَذِهِ الْمَعَادِلَةِ بِالصُّورَةِ الْقِيَاسِيَّةِ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، نَجُدُ أَنَّ: $a = 4, b = -3, r = 9$.

إِذْنُ، مَرْكُزُ هَذِهِ الدائِرَةِ هُوَ النَّقطَةُ $(-3, 4)$ ، وَطُولُ نصفِ قُطْرِهَا 9 وَحدَاتٍ.

أتحقق من فهمي

أَجِدُ إحداثياتِ المركِزِ، وطُولَ نصفِ القُطْرِ للدائِرَة $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$

تعلَّمْتُ في درسٍ سَابِقٍ أَنَّ مَمَاسَ الدائِرَةِ يَشْتَرِكُ مَعَ الدائِرَةِ في نَقطَةٍ وَاحِدَةٍ فَقَطُّ، وَأَنَّهُ يَتعَامِدُ مَعَ نصفِ القُطْرِ الْمَارِ بِنَقطَةِ التَّمَاسِّ. وَهَذَا يَفِيدُ فِي التَّحْقِيقِ مِنْ أَنَّ مَسْتَقِيمًا معْطَى هُوَ مَمَاسٌ لَدائِرَةٍ مَعْطَاةٍ، وَحْسَابِ طُولِ قَطْعَةِ مَمَاسِيَّةٍ كَمَا فِي الْمَثَالَيْنِ الآتَيْنِ.

مثال 4

أَجِدُ طُولَ المَمَاسِ المرسومِ مِنَ النَّقطَةِ $P(-6, 6)$ ، الَّذِي يَمْسُسُ الدائِرَةَ الَّتِي مَعَادِلُتُهَا $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$

أَرْسِمُ مُخْطَطًّا، وَلْتَكُنِ النَّقطَةُ X مَرْكُزَ الدائِرَةِ، وَ T نَقطَةُ التَّمَاسِّ.

لَحْسَابِ طُولِ المَمَاسِ \overline{PT} ، ثُمَّ أَطْبِقُ نَظَرِيَّةِ فِيَثاغُورِسٍ عَلَى الْمُثَلِّثِ الْقَائمِ XTP ، الَّذِي يُمْكِنُ إِيجَادُ طُولِيِّ ضَلَاعِيهِ فِيهِ، هَمَّا: نصفُ القُطْرِ \overline{XT} ، وَالْوَتْرُ \overline{XP} .

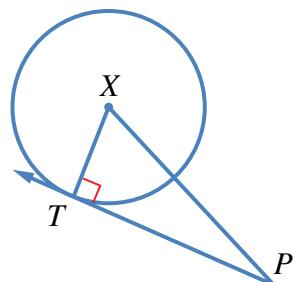
طُولُ نصفِ القُطْرِ XT هُوَ 5. وَلَحْسَابِ XP ، أَجِدُ الْمَسَافَةَ بَيْنَ مَرْكُزِ الدائِرَةِ $(-5, 4)$ وَالنَّقطَةِ $P(-6, 6)$ باسْتِعْمَالِ قَانُونِ الْمَسَافَةِ بَيْنَ نَقْطَتَيْنِ:

$$(XP)^2 = (-6 - (-5))^2 + (6 - 4)^2 = (11)^2 + (-10)^2 = 221$$

وَبِتَطْبِيقِ نَظَرِيَّةِ فِيَثاغُورِسٍ عَلَى الْمُثَلِّثِ XTP :

$$(PT)^2 = (XP)^2 - (XT)^2$$

نظريّة فيثاغورس



$$= 221 - 25$$

$$= 196$$

$$PT = \sqrt{196} = 14$$

بـالتعويض

بـالتبسيط

بـأخذ الجذر التربيعي للطرفين

إذن، طول المماس 14 وحدة.

أتحقق من فهمي

أـخذ طول المماس المرسوم من النقطة $(7, 4)$ P ، الذي يمس الدائرة التي معادلتها

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$$

مثال 5

أـثبت أن المستقيم $3x + 2y = 2x + 3$ هو مماس للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 45$
أـحل النظام المكون من المعادلتين: $3x + 2y = 2x + 3$ ، و $x^2 + y^2 = 45$ ، لإيجاد عدد نقاط تقاطع المستقيم والدائرة. فإذا كان عدد نقاط التقاطع واحداً فقط، فإن المستقيم يكون مماساً للدائرة.

$$(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45 \quad \text{بـتعويض } y \text{ في معادلة الدائرة}$$

$$(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45 \quad \text{بـالتبسيط}$$

$$x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45 \quad \text{بـفك الأقواس}$$

$$5x^2 - 40x + 80 = 0 \quad \text{بـجمع العدود المتشابهة،}$$

وـجعل الطرف الأيمن صفرًا

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \text{بـقسمة الطرفين على 5}$$

$$(x - 4)^2 = 0 \quad \text{بـالتحليل}$$

$$x = 4$$

$$y = 2(4) + 3 = 11 \quad \text{بـتعويض قيمة } x \text{ في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة } y$$

بـما أن هذا المستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط هي $(4, 11)$ ، فإنه مماس للدائرة.

أتحقق من فهمي

أـثبت أن المستقيم $5 - 4x = y$ هو مماس للدائرة التي معادلتها

$$(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$$



أكتب معادلة الدائرة في كلٍ من الحالات الآتية:

المركزُ هو نقطةُ الأصلِ، وطولُ نصفِ قطرِها 7 وحداتٍ.

المركزُ هو النقطةُ (−1, 3)، وطولُ نصفِ قطرِها 5 وحداتٍ.

المركزُ هو النقطةُ (−2, −3)، وطولُ قطرِها 10 وحداتٍ.

أجدُ معادلةَ الدائرةِ المُعطى مركّزاً وإحداثيّاً نقطّةً تمرُّ بها في كلٍ مما يأتي:

المركزُ (2, −1)، وتمرُّ بالنقطةِ (3, 5).

المركزُ نقطةُ الأصلِ، وتمرُّ بالنقطةِ (−9, −4).

6) $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$

7) $(x - 19)^2 + (y - 33)^2 = 400$

8) $x^2 + (y + 4)^2 = 45$

9) $(x - 3)^2 + (y + 10)^2 = 28$

أجدُ إحداثيّيَّ المركزِ، وطولَ نصفِ القطرِ لكلٍ من الدوائرِ الآتية:

10) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

11) $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12) $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$

13) $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$

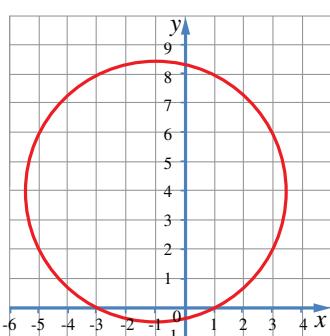
أكتب معادلةَ الدائرةِ بالصوريّين: $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, حيثُ f , g , a , b , r

أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتية:

المركزُ (−11, −11)، وطولُ القطرِ 26 وحدةً.

المركزُ (3, 0)، وطولُ نصفِ القطرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ.

المركزُ (7, −4)، وتمرُّ بالنقطةِ (3, 1).



أجدُ معادلةَ الدائرةِ المُبيَّنةَ في الرسمِ البيانيِّ المجاورِ.

أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

أَجِدُّ إِحْدَائِيًّا الْمَرْكَزِ وَطُولَ نَصْفِ قُطْرِ الدَّائِرَةِ الَّتِي مَعَادِلُهَا: $(2x - 4)^2 + (2y + 6)^2 = 100$. (19)

دَائِرَةٌ مَعَادِلُهَا $96 = 9y^2 + px + 6y + x^2$ ، وَطُولُ نَصْفِ قُطْرِهَا 11 وَحدَةً، وَ p عَدْدُ ثَابِتٍ مُوجِبٌ. أَجِدُّ بَعْدَ مَرْكَزِ

الْدَّائِرَةِ عَنْ نَقْطَةِ الْأَصْلِ.

تُمَثِّلُ النَّقْطَاتِ (9, 2), (7, -4) وَ (14, -2) E نَهَايَيِّهِ قُطْرٌ لَدَائِرَةٍ مَرْكُزُهَا: C .

أَجِدُّ إِحْدَائِيًّا الْمَرْكَزِ C . (21)

أَجِدُّ طُولَ نَصْفِ القُطْرِ.

أَكْتُبُ مَعَادِلَةَ الدَّائِرَةِ.

أُثِبُّ أَنَّ الْمَسْتَقِيمَ $2x - 3y = 0$ هُوَ مَمَاسٌ لَلَّدَائِرَةِ الَّتِي مَعَادِلُهَا: $x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$. (24)

رُسِّمَ مَمَاسٌ مِنَ النَّقْطَةِ (5, 8) P لَلَّدَائِرَةِ الَّتِي مَعَادِلُهَا: $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$. أَجِدُّ طُولَ الْقَطْعَةِ الْمَسْتَقِيمِيةِ

الَّتِي تَصُلُّ إِلَى النَّقْطَةِ P بِنَقْطَةِ التَّمَاسِ.

مهارات التفكير العليا

تَبَرِّيرٌ: قَالَ عَبْدُ الرَّحْمَنِ إِنَّ $0 = 59 + 5y + 6x + y^2 - 14x + 6y + x^2$ لَيْسَتْ مَعَادِلَةً دَائِرَةً. هُلْ قُولُ عَبْدِ الرَّحْمَنِ صَحِيحٌ؟ (26)

أَبْرُرُ إِجَابَتِي.

تَحْدِيدٌ: مَمَرٌ دَائِرِيٌّ مَحْصُورٌ بَيْنَ دَائِرَتَيْنِ لِهُمَا الْمَرْكُزُ نَفْسُهُ، وَهُوَ النَّقْطَةُ (3, 7). إِذَا كَانَتِ الدَّائِرَةُ الْكَبِيرَى تَمْسِّ

الْمَحْوَرَ z ، وَالصَّغِيرَى تَمْسِّ الْمَحْوَرَ x ، فَأَكْتُبُ مَعَادِلَتَيِ الدَّائِرَتَيْنِ الَّتِيْنِ تُشَكَّلُانِ الْمَحِيطَ الْخَارِجِيَّ وَالْمَحِيطَ الدَّاخِلِيَّ لِلْمَمَرِّ، ثُمَّ أَجِدُ مَسَاحَةَ الْمَمَرِّ بِالْوَحدَاتِ الْمَرَبُّعةِ.

تَحْدِيدٌ: رُسِّمَ مِنَ النَّقْطَةِ (8, 21) A مَمَاسًا لَلَّدَائِرَةِ الَّتِي مَرْكُزُهَا C , فَمَسَاهَا عِنْدَ النَّقْطَتَيْنِ D وَ B . إِذَا كَانَتْ مَعَادِلَةُ

الْدَّائِرَةِ هِيَ $49 = (y + 4)^2 + (x - 9)^2$ ، فَمَا مَسَاحَةُ الشَّكْلِ الْرَّبَاعِيِّ $ABCD$ ؟

تَحْدِيدٌ: أَكْتُبُ الصُّورَةَ الْقِيَاسِيَّةَ لِمَعَادِلَةِ الدَّائِرَةِ $0 = x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24$ مِنْ دُونِ اسْتِعْمَالِ طَرِيقَةِ

إِكْمَالِ الْمَرَبُّعِ.

الدواائر المتماسة

Tangent Circles



استنتاج العلاقة بين دائريتين، وتعريف المماسات المشتركة، وتوظيف ذلك في حل مسائل حياتية.

فكرة الدرس

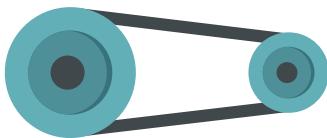


الدائرةان المتماسستان، المماس المشترك الخارجي، المماس المشترك الداخلي.

المصطلحات



مسألة اليوم



يدور حزام مطاطي حول بكرتين دائريتين، طول نصف قطريهما 8 cm ، و 3 cm على التوالي. إذا كان طول الحزام بين نقطتي التّمسّ مع البكرتين 25 cm ، فما المسافة بين مركزي البكرتين؟

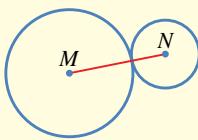
يمكن أن تتقاطع الدائرةان المرسومتان في مستوى واحدٍ في نقطة واحدة، أو نقطتين، وقد لا تقاطعن أبداً. وتسمى الدائرةان المتقاطعتان في نقطة واحدة فقط دائريتين متماسستان (tangent circles).

الدائرةان المرسومتان في مستوى واحدٍ

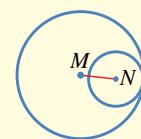
مفهوم أساسى

إذا رسمت دائرةان في مستوى واحدٍ، فإن وضعهما بالنسبة إلى بعضهما ينحصر في الحالات الآتية:

4 مشتركتان في نقطة واحدة؛ أي إلتهما متماسستان. ولهذا الوضع صورتان:

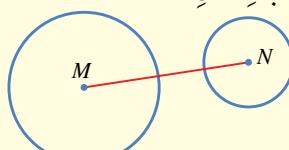


متماسستان من الخارج.

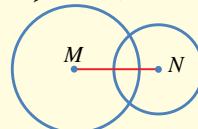


متماسستان من الداخل.

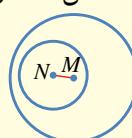
1 متباعدتان.



2 متقاطعتان في نقطتين.



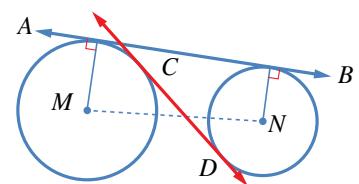
3 إلهاهما داخل الأخرى.



إذا كان المستقيم مماساً لكلاً من دائريْن، فإنه يسمى **مماساً مشتركاً** (common tangent).

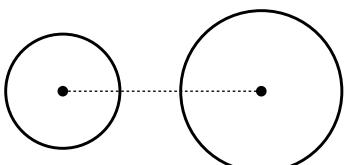
وإذا قطع المماس المشترك القطعة المستقيمة الواقلة بين مركزي الدائريْن، فإنه يسمى **المماس المشترك الداخلي** (common internal tangent)، وإلا فإنه يسمى **المماس المشترك الخارجي** (common external tangent).

ففي الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماس مشترك خارجي، و \overleftrightarrow{CD} مماس مشترك داخلي.

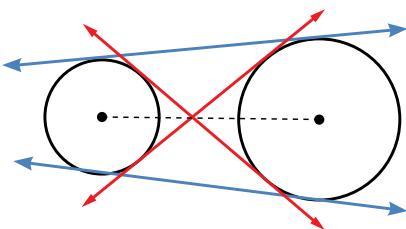


يمكن رسم مماس واحد فقط للدائرة عند نقطةٍ عليها، ويمكن أيضاً رسم مماسين للدائرة من نقطةٍ خارجها، فما عدد المماسات المشتركة التي يمكن رسمها للدائريْن؟ تتمدد إجابة هذا السؤال على وضع الدائريْن بالنسبة إلى بعضهما.

مثال 1



كم مماساً مشتركاً يمكن رسمه للدائريْن في الشكل الآتي؟ أرسم المماسات، ثم أصنفها إلى خارجية وداخلية.

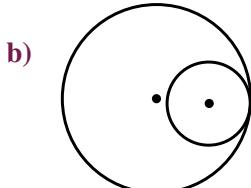
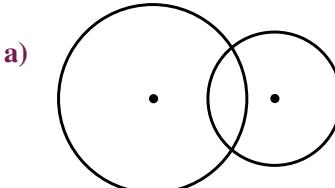


أرسم القطعة المستقيمة الواقلة بين مركزي الدائريْن، ثم أرسم المماسات التي تقطعها بلون أحمر، والمماسات التي لا تقطعها بلون أزرق.

الاحظ أنه يوجد للدائريْن مماسان داخليان، وآخران خارجيان.

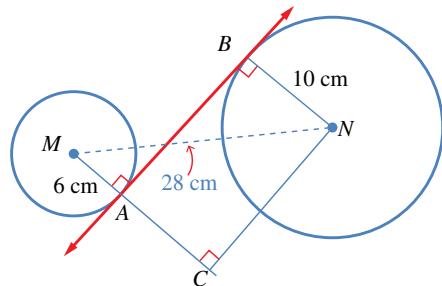
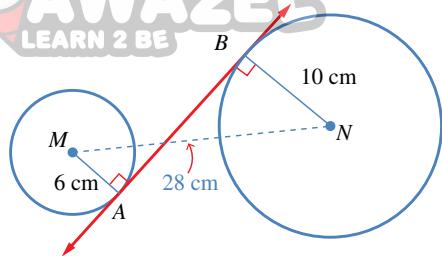
أتحقق من فهمي

كم مماساً مشتركاً يمكن رسمه للدائريْن في الشكل الآتي؟ أرسم المماسات، ثم أصنفها إلى خارجية وداخلية.



الوحدة 2

يمكن حساب طول المماس المشترك (المسافة بين نقطتي التماس على الدائرتين) بطريقه مماثله لحساب طول المماس المرسوم من نقطة خارج الدائرة إلى نقطة عليها.



مثال 2

أجد طول \overline{AB} في الشكل المجاور.

افكر

هل يمكن إيجاد طول \overline{AB} باستعمال تشابه المثلثات أيضا؟

$$m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$$

المماس عمودي على نصف

القطر المار بنقطة التماس

$$\overline{MA} \text{ عمودي على } \overline{NC}$$

$$m\angle ACN = 90^\circ$$

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي 360°

إذن، الشكل الرباعي $ACNB$ مستطيل؛ لأن زواياه الأربع قوائم.

$$AB = NC$$

ضلعين متقابلين في المستطيل

والآن، أطبق نظرية فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية MCN لأجد CN :

$$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$= 28^2 - (6 + 10)^2$$

بالتعويض

$$(CN)^2 = 784 - 256 = 528$$

بالتبسيط

$$CN = \sqrt{528} \approx 23$$

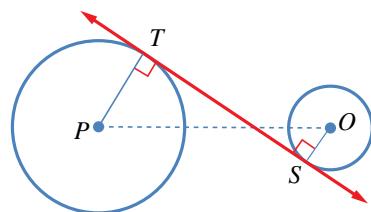
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$AB = CN \approx 23 \text{ cm}$$

أتحقق من فهمي

أجد طول \overline{ST} في الشكل المجاور، علما بأن:

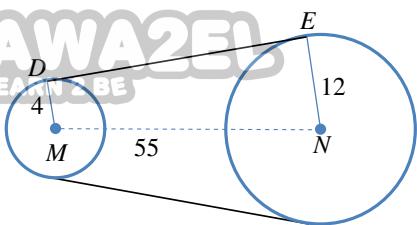
$$PT = 12 \text{ cm}, OS = 4 \text{ cm}, PO = 34 \text{ cm}$$



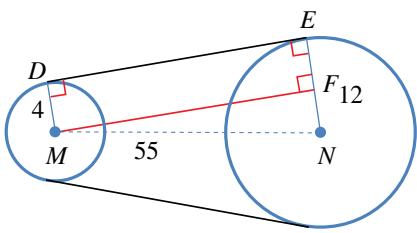
مثال 3: من الحياة



دراجات: تلتف في دراجة هوائية سلسلة معدنية على عجلتين مسنتين دائريتين، نصف قطر الصغرى على عجلة المقدمة 4 cm، ونصف قطر الكبيرة 12 cm، والمسافة بين مراكزهما 55 cm. أجد طول السلسلة بين نقطتين تمساها مع المسنتين.



المطلوب هو حساب طول \overline{DE} . أرسم من M عموداً على \overline{NE} , ثم أسمّي نقطة تقاطعه معها F كما في الشكل المجاور.



$$m\angle NED = m\angle MDE = 90^\circ$$

المماس يتعامد مع نصف

القطر المار بنقطة التماس

$$\overline{NE} \text{ عمودي على } \overline{MF}$$

$$m\angle MFE = 90^\circ$$

$$m\angle DMF = 90^\circ$$

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي 360°

إذن، الشكل الرباعي $MDEF$ مستطيل؛ لأن زواياه الأربع قوائم. والآن،طبق نظرية فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية MFN لأجد طول \overline{MF} :

$$\begin{aligned} (MF)^2 &= (MN)^2 - (FN)^2 \\ &= 55^2 - (12 - 4)^2 \end{aligned}$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

$$(MF)^2 = 3025 - 64 = 2961$$

بالتبسيط

$$MF = \sqrt{2961} = 54.4$$

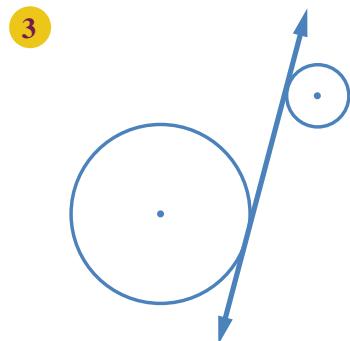
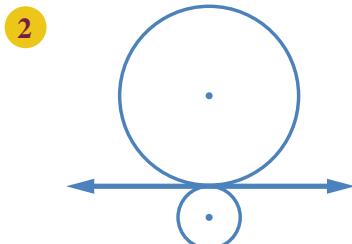
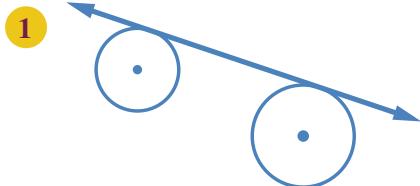
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$DE = MF = 54.4 \text{ cm}$$

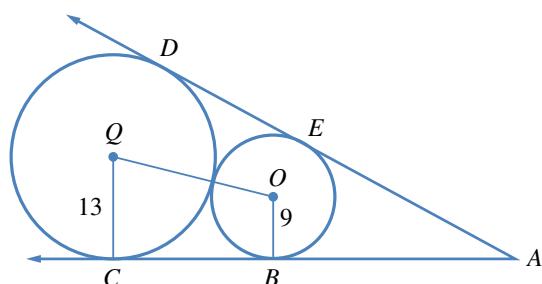
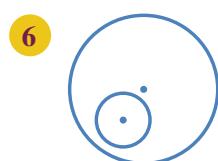
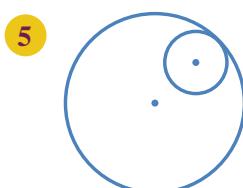
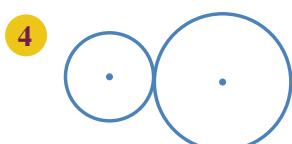
أتحقق من فهمي

أجد طول نصف قطر العجلة المسننة الكبيرة في دراجة، علماً بأن طول السلسلة بين نقطتين تمساها مع المسنتين 40 cm، وطول نصف قطر العجلة المسننة الصغرى 5 cm، والمسافة بين مراكز العجلتين المسننتين 41 cm.

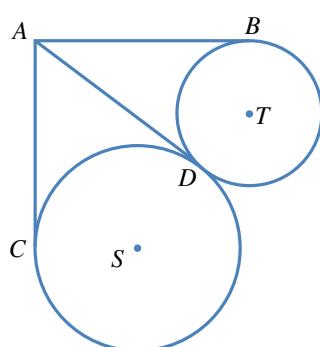
لركوب الدراجة الهوائية فوائد صحية وبيئية كثيرة، منها: تقوية عضلات الجسم، والتقليل من التلوث الناجم عن استعمال وسائل النقل التقليدية.



أُحدِّد إذا كان المماس داخلياً أم خارجياً في كلٍ مما يأتي:

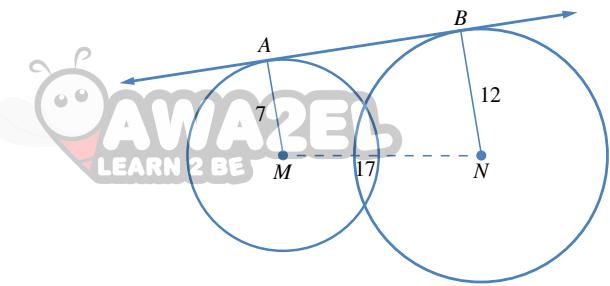


يُبيّن الشكل المجاور مماسين من النقطة A لدائرةتين متتاليتين من الخارج. أَجِد طول \overline{CB} باستعمال القياسات المُبيّنة في الشكل.



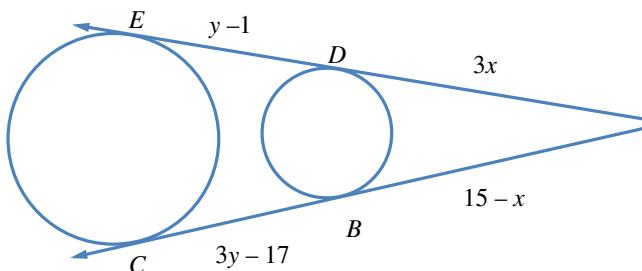
يُبيّن الشكل المجاور دائرتين متتاليتين من الخارج، والمماسات: \overline{AC} , \overline{AB} , \overline{AD} . إذا كان $AB = 3x + 5$, $AC = 2x - 2$, فما قيمة x ؟

أَجِدْ طُولَ \overline{AB} باستعمالِ القياساتِ المُبيَّنةِ في الشكِلِ المجاورِ. 9



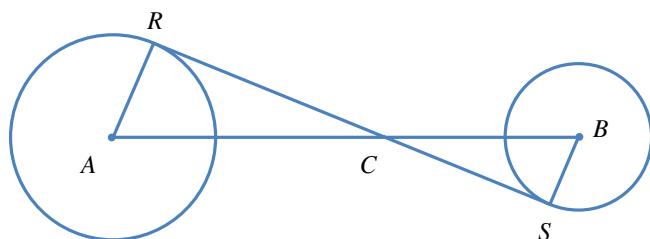
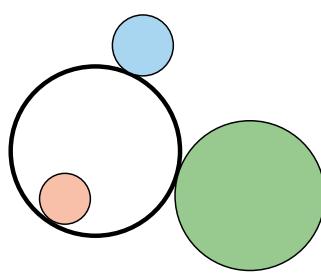
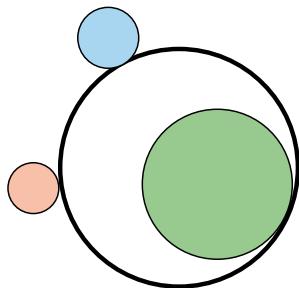
حزامٌ ناقلٌ: يمُرُّ حزامٌ حولَ دوَالِيْنِ دائِريْنِ، نصفُ قُطْرِ الصغِيرِ مِنْهُما 15 cm ، ونصفُ قُطْرِ الكبِيرِ 25 cm . إِذَا كَانَ طُولُ الحزامِ بَيْنَ نقطَتِي التَّمَاسِ معَ الدوَالِيْنِ 2 m ، فَمَا المَسَافَةُ بَيْنَ مرْكَزَيِ الدوَالِيْنِ؟ 10

أَحَدُّدُ وَضَعَ الدائِرَتَيْنِ بِالنَّسَبَةِ إِلَى بَعْضِهِمَا إِذَا كَانَتْ مَعَادِلَتَاهُمَا: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$. 11



أَجِدْ قِيمَةَ كُلِّ مِنْ x وَ y فِي الشكِلِ المجاورِ. 12

تحدِّي: يُمثِّلُ الشكِلَانِ الآتَيَانِ طرِيقَتَيْنِ لِرِسَمِ دائِرَةٍ تُلَامِسُ كُلَّا مِنَ الدائِرَةِ الزَّرقاءِ، والخَضْراءِ، والحَمْرَاءِ. أَجِدْ 6 طرائقَ أُخْرَى لِرِسَمِ هَذِهِ الدائِرَةِ. 13



برهانٌ: تُمثِّلُ \overline{RS} فِي الشكِلِ المجاورِ مَمَاسًا داخِلِيًّا مشترِكًا لِدائِرَتَيْنِ مَرْكَزَاهُمَا A ، وَ B عَلَى التَّوَالِيِّ. أُثِبْ أَنَّ: $\frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}$ 14

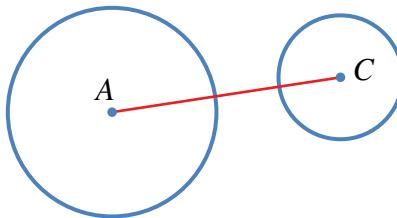
توسيعُ الدوائر المتماسةُ

Extension: Tangent Circles

يمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra) لرسم دائرتين، أنصاف قطرهما محددة، وإيجاد البعد بين مراكزهما.

نشاط 1

أرسم الشكل الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أجد AC .



الخطوة 1: اختيار أيقونة من شريط الأدوات.



Circle: Center & Radius

الخطوة 2: انقر زر الفأرة الأيسر مع السحب لرسم دائرة مركبها A . ستظهر معادلة الدائرة بالصورة القياسية في شريط الإدخال، وسيظهر مركبها على شكل زوج مرتبت.

الخطوة 3: أكرر الخطوتين (1) و(2) لرسم دائرة مركبها C ، وإيجاد نصف قطرها.

الخطوة 4: لأجد البعد بين مركب كلٍ من الدائرتين، أختار من شريط الأدوات، ثم أنقر على المركز A ثم المركز C ، وأقرأ البعد بين المركبين من شريط الإدخال.

نشاط 2

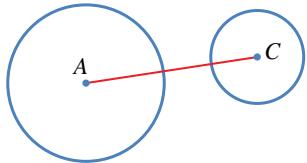
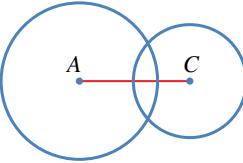
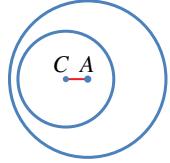
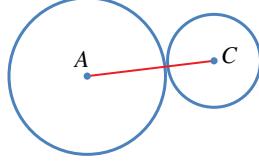
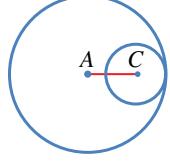
أرسم كلاً من الدوائر المميزة في الجدول الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا.

1

إذا كان طول نصف قطر الدائرة الكبيرة r_1 ، وطول نصف قطر الدائرة الصغيرة r_2 ، فأستعمل برمجية جيوجبرا الأكمل الجدول الآتي.

3

أُقارن بين قيم $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$ و AC , ثم أستنتج العلاقة بينها وبين وضع الدائريتين بالنسبة إلى بعضهما.

الاستنتاج	$r_1 + r_2$	$r_1 - r_2$	AC	r_2	r_1	وضع الدائريتين
						
						
						
						
						

أتدرب



أحدّد وضع الدائريتين بالنسبة إلى بعضهما في كل من الحالات الآتية دون رسّميهما:

1 $r_1 = 9, r_2 = 5, AC = 3$

2 $r_1 = 11, r_2 = 5, AC = 6$

3 $r_1 = 6, r_2 = 3, AC = 17$

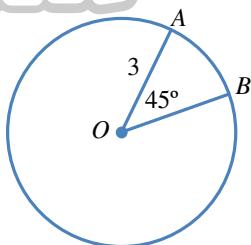
4 $r_1 = 8, r_2 = 5, AC = 3$

اختبارٌ نهايةِ الوحدة



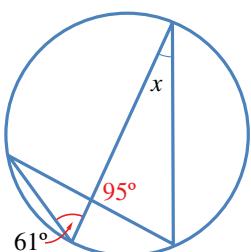
4

هو:



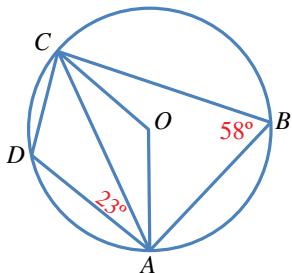
- a) $\frac{9\pi}{8}$
- b) $\frac{3\pi}{2}$
- c) $\frac{9\pi}{2}$
- d) $\frac{3\pi}{4}$

قيمة x في الشكل الآتي هي:



- a) 61°
- b) 24°
- c) 34°
- d) 95°

قياس الزاوية DCA في الشكل الآتي هو:



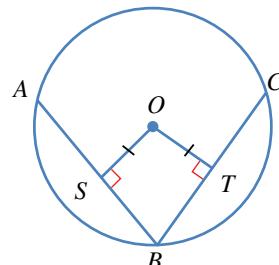
- a) 55°
- b) 35°
- c) 45°
- d) 41°

أضْعَد دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1. في الشكل الآتي وتران في دائرة مركبها O .

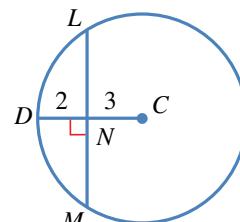
إذا كان $OT = 3 \text{ cm}$, $AS = 4 \text{ cm}$, و \overline{BC} , فإن طول

بالستيمترات هو:



- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 10

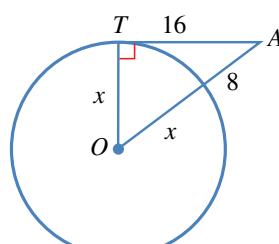
اعتماداً على الشكل الآتي، فإن طول LM هو:



- a) 5
- b) 8
- c) 10
- d) 13

اعتماداً على الشكل الآتي، فإن نصف قطْر الدائرة

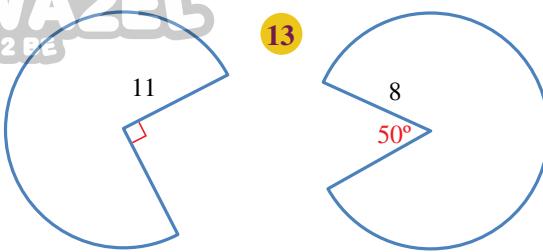
هو:



- a) 5.75
- b) 12
- c) 4
- d) 8

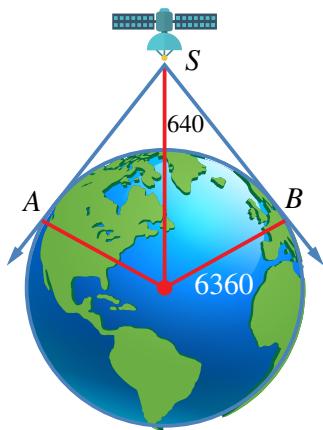
اختبار نهاية الوحدة

أَجِدُّ المساحةَ والمحيطَ لِكُلِّ مِنَ الْقَطَاعِيْنَ الآتِيِّيْنَ:



14 أَقْمَارٌ صَنَاعِيَّةٌ: يَرْتَفِعُ قَمَرٌ صَنَاعِيٌّ مَسَافَةً 640 km

عَنْ سَطْحِ الْأَرْضِ التِي نَصْفُ قُطْرِهَا 6360 km , وَيُمْكِنُ مِنْهُ مَشَاهِدَةُ الْمَنْطَقَةِ الْوَاقِعَةِ بَيْنَ الْمَمَاسَيْنِ \overrightarrow{SB} وَ \overrightarrow{SA} مِنْ سَطْحِ الْأَرْضِ. مَا الْمَسَافَةُ بَيْنَ الْقَمَرِ الصَنَاعِيِّ وَأَبْعَدِ نَقْطَةٍ يُمْكِنُ مَشَاهِدَتُهَا مِنْهُ عَلَى سَطْحِ الْأَرْضِ؟



15 حَزَامٌ مَطَاطِيٌّ: يَدْوِرُ حَزَامٌ مَطَاطِيٌّ حَوْلَ بَكْرَتَيْنِ

دَائِرَيْتَيْنِ، طُولُ نَصْفِيْنِ قُطْرَيْهِمَا 8 cm وَ 3 cm عَلَى التَوَالِيِّ. إِذَا كَانَ طُولُ الْحَزَامِ بَيْنَ تَقْطِيْنِ التَّمَاسِ مَعَ الْبَكْرَتَيْنِ 25 cm , فَمَا الْمَسَافَةُ بَيْنَ مَرْكَزَيِّ الْبَكْرَتَيْنِ؟

7 النَّقْطَةُ الَّتِي لَا تَقْعُدُ عَلَى الدَّائِرَةِ الَّتِي مَعَادِلُهَا $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$ هِيَ:

- a) $(-2, -1)$
- b) $(1, 8)$
- c) $(3, 4)$
- d) $(0, 5)$

8 عَدُّ الْمَمَاسَاتِ الْمُشَتَّرَكَةِ الَّتِي يُمْكِنُ رَسْمُهَا لِدَائِرَتَيْنِ مُتَمَاسِتَيْنِ مِنَ الدَّاخِلِ هُوَ:

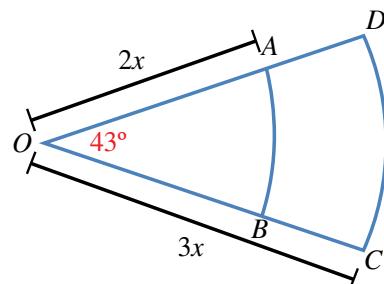
- a) 3
- b) 2
- c) 1
- d) 0

9 أَكْتُبْ مَعَادِلَةَ الدَّائِرَةِ الَّتِي تُمَثِّلُ النَّقْطَاتِ $A(3, 4)$ وَ $B(6, 9)$ طَرْفَ قُطْرٍ فِيهَا.

يُمْثِلُ الشَّكْلُ التَّالِي قَطَاعَيْنِ دَائِرَيْتَيْنِ مِنْ دَائِرَتَيْنِ لِهُمَا الْمَرْكُزُ نَفْسُهُ O . إِذَا كَانَ نَصْفُ قُطْرِ الدَّائِرَةِ الصَّغِيرِ $2x$, وَنَصْفُ قُطْرِ الدَّائِرَةِ الْكَبِيرِ $3x$, وَقِيَاسُ الزَّاوِيَّةِ $AOB = 43^\circ$ هُوَ 30 cm^2 ، فَأَجِدُ:

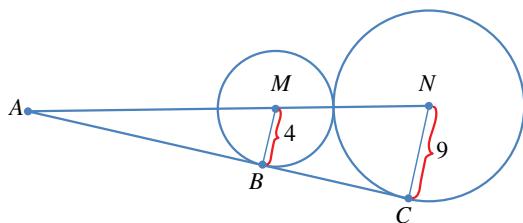
قيمة x .

10 الفَرْقُ بَيْنَ طُولَيِّ الْقَوْسِيْنِ CD وَ AB .



تدريبٌ على الاختباراتِ الدولية

يُمثّل الشكلُ الآتي دائرتَين متماسَتَين منَ الخارجِ، رسم لهُما مماسٌ مشتركٌ منَ النقطة A الواقعة على المستقيم المار بالمركزِين M و N . إذا كانَ نصفاً قطريًّا الدائرةِ M يساوي 4 وحداتٍ و 9 وحداتٍ، فأيُّ العباراتِ التالية صحيحةٌ:



(a) طول \overline{AC} يساوي طول \overline{AN} .

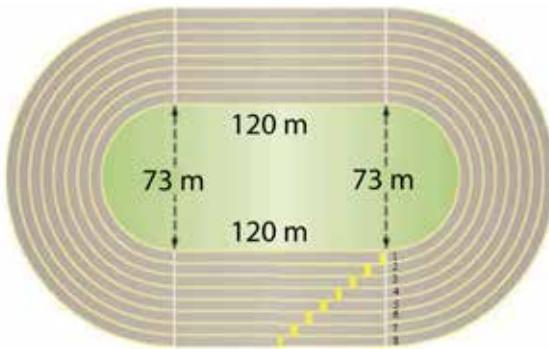
(b) طول \overline{BC} يساوي 13 وحدةً.

(c) $AC = \frac{9}{4}AB$

(d) $AC = \frac{4}{9}AB$

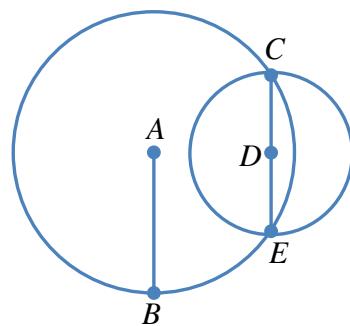
أَحدُ طول \overline{AM} في السؤالِ السابقِ مُبيّناً خطواتِ الحلِّ.

يُمثّل الشكلُ الآتي مضماراً للجريِّ منْ ثمانيةِ مسارَبِ كلٌ منها يتكونُ منْ جزأَينِ مستقيميَنِ متوازيَينِ، ونصفَيِّ دائرةِ متصلَتَينِ بهُما. إذا كانَ عرضُ كُلِّ مسربٍ 1 m ، فبكمْ يزيدُ طولُ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الثالثِ على طولِ الحدِّ الداخليِّ منَ المسربِ الأولِ؟



18

16 تناطِقُ دائرتانِ مركزاهما A, D في نقطتينِ A, D في النقطتينِ C, E . إذا كانَ $AB = EC = 10\text{ cm}$ ، فما طولُ \overline{AD} بالستيمتراتِ؟



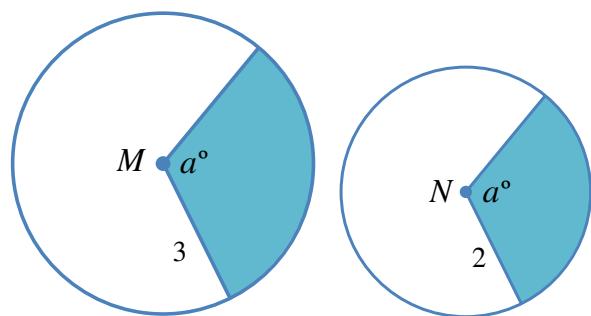
a) $5\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{3}$

17 النقطتانِ N و M هما مركزاً الدائرةِ M في الشكلِ الآتي. إذا كانتْ مساحةُ المنطقَةِ المُظللةِ في الدائرةِ الكبُرَى 9 وحداتٍ مربَعٍ، فما مساحةُ المنطقَةِ المُظللةِ في الدائرةِ الصغرى بالوحداتِ المربَعةِ؟



a) 3

b) 4

c) 5

d) 7

حساب المثلثات

Trigonometry



ما أهمية هذه الوحدة؟

تعد دراسة العلاقات بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه (أو ما يسمى علم المثلثات) أحد أهم فروع الرياضيات وأقدمها؛ إذ ساعد هذا العلم قدماء المصريين على بناء الأهرامات ودراسة الفلك، وقد استمر الاهتمام به حتى اليوم؛ فكان أساساً لكثير من العلوم الأخرى.

سأعلم في هذه الوحدة:

- ◀ ماهية دائرة الوحدة، ووضع الزاوية القياسية.
- ◀ إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة.
- ◀ تمثيل الاقترانات المثلثية في المستوى الإحداثي، واستنتاج خصائصها.
- ◀ حل معادلات مثلثية، بحيث تكون مجموعه الحل ضمن الدورة الواحدة.

تعلمت سابقاً:

- ✓ مفهوم جيب الزاوية الحادة، وجيب تمامها، وظلها بوصفها نسباً بين أضلاع المثلث قائم الزاوية.
- ✓ استخدام العلاقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ في حل مسألة عن مثلث قائم الزاوية.
- ✓ حل معادلات خطية وتربعية ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية.

مشروع الوحدة



إنشاء نظام إحداثي جديد

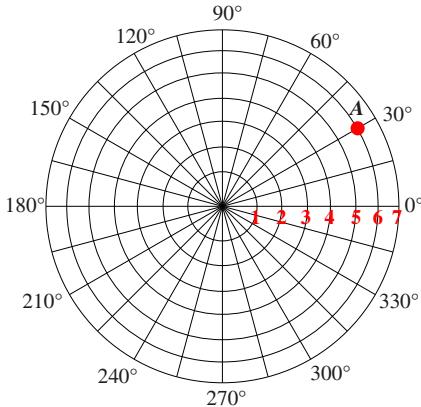
إنشاء نظام إحداثي جديد، يعتمد البعد عن نقطة مرجعية، وقياس زاوية الميل على الخط الأفقي.

فكرة المشروع



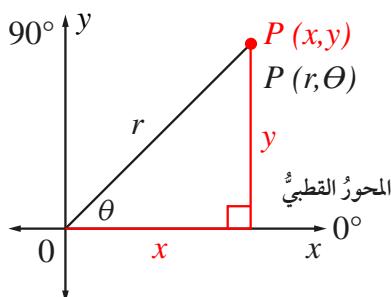
أوراق، مسطرة، منقلة، فرجار، آلة حاسبة.

المواد والأدوات



نظام الإحداثيات القطبية: يمكن تحديد موقع أي نقطة في المستوى باستعمال الزوج المرتب (r, θ) , حيث:
 r : بعد النقطة عن نقطة مرجعية تسمى القطب.

θ : الزاوية بين الشعاع المار بالنقطة والقطب، والممحور القطبي، وهو الشعاع الأفقي من القطب باتجاه اليمين. يلاحظ من الشكل المجاور أن إحداثي النقطة هما: $(6, 30^\circ)$. تسمى هذه الطريقة نظام الإحداثيات القطبية.



تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية: لتحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، أرسم عموداً من النقطة التي يراد تحويل إحداثيتها إلى المحور الأفقي، ثم أستعمل النسب المثلثية لحساب طولي ضلع المثلث الناتج، كما في الشكل المجاور، للحصول على الإحداثيين x و y لتلك النقطة. للتحويل من النظام الديكارتي إلى النظام القطبي، أجد قيمة كل من r و θ بطريقة عكسية، وذلك باستعمال النسب المثلثية.

خطوات تنفيذ المشروع:

1 أستعمل مسطرة وفرجاراً الرسم نسخة مكبرة للمستوى القطبي أعلى، محدداً عليه موقع 6 نقاط تمثل رؤوس سداسي منتظم، ثم أجد إحداثياتها القطبية (r, θ) ، والديكارتية (x, y) .

2 أصل بين النقاط الستة بلون مختلف، ثم أستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد محيط الشكل السداسي.

عرض النتائج:

أصم مع أفراد مجروعي مجلة أو لوحة تتضمن ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور والرسوم.

- وصف لتطبيق حياتي تُستخدم فيه الإحداثيات القطبية.

النسبة المثلثية

Trigonometric Ratios



تعرفُ الوضع القياسي للزاوية، وربطُ النسب المثلثية بدائرة الوحدة، وإيجادُها للزوايا الرباعية، وإيجادُ النسبتين المثلثتين الأساسيةين الباقيتين في حالٍ معرفة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية.

فكرةُ الدرس



صلع الابتداء، صلع الانتهاء، الوضع القياسي، دائرة الوحدة، الزاوية الرباعية.

المصطلحات

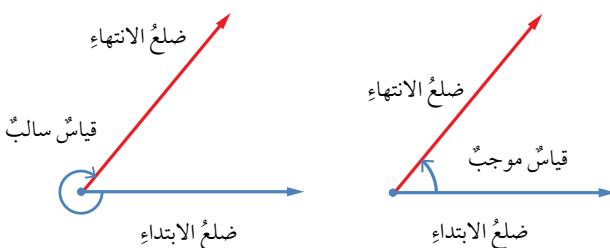


تعلّمتُ سابقاً إيجادَ النسب المثلثية لزوايا حادة، مثل النسب بين أطوالِ أضلاعِ المثلث قائمِ الزاوية. ولكن، كيفُ يمكنُ إيجادَ النسب المثلثية لزاويةٍ أكبرَ من 90° ، مثلِ الزاوية بينَ شفراتِ مروحة توليد الطاقة الكهربائية؟

مسألةُ اليوم



الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة البداية نفسها. والنقطة المشتركة تُعرفُ برأسِ الزاوية، أما الشعاعان فيُسمى أحدهما **صلع الابتداء** (initial side)، والأخر **صلع الانتهاء** (terminal side). يوجد قياسان لاي زاوية؛ أحدهما موجبٌ عندما يدورُ صلعُ الانتهاء عكس اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعة، والأخر سالبٌ حينَ يدورُ صلعُ الانتهاء مع اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعة.



إرشاد

اتجاه حركة
عقارب الساعة.

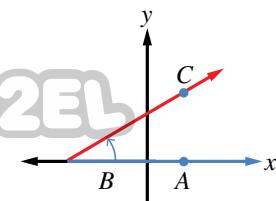


عكس حركة
عقارب الساعة.

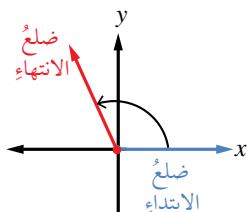


تكونُ الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصل $(0, 0)$ ، وصلعُ ابتدائِها مُنطبقاً على محورِ x الموجب.

الوحدة 3



زاويةٌ ليست في وضعٍ قياسيٍ.

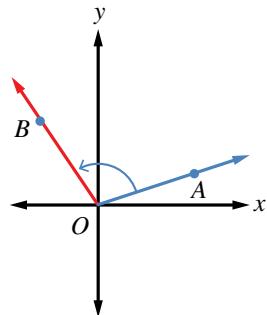


زاويةٌ في الوضعِ القياسيٍ.

مثال 1

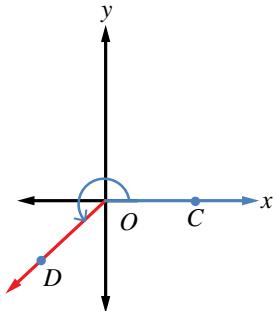
أُحدّد إذا كانت الزواياتان الآتيتان في وضعٍ قياسيٍ أم لا، مُبيّناً السبب:

1



الزاوية AOB ليست في وضعٍ قياسيٍ؛ لأنَّ صلْعَ ابتدائِها لا ينطبِقُ على محور x الموجِبِ.

2

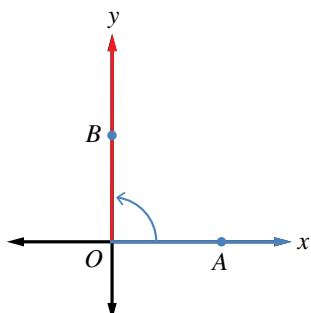


الزاوية COD في وضعٍ قياسيٍ؛ لأنَّ صلْعَ ابتدائِها ينطبِقُ على محور x الموجِبِ، ورأسُها على نقطةِ الأصل O .

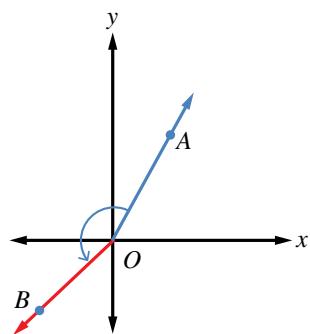
أتحقق من فهمي

أُحدّد إذا كانت الزواياتان الآتيتان في وضعٍ قياسيٍ أم لا، مُبيّناً السبب:

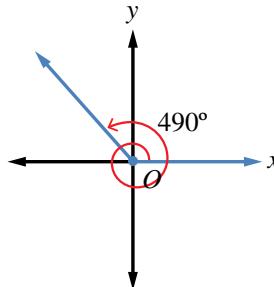
1



2



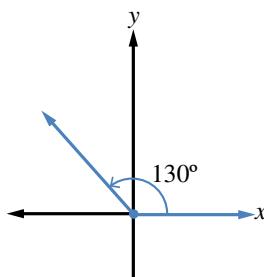
إذا دارَ ضلُعُ انتهاء زاوية في الوضع القياسي دورةً كاملةً عكِسَ اتجاه حركة عقارب الساعة، فإنه يصنع زوايا قياساتها بين 0° و 360° . وإذا استمرَ في دورانه، فإنه يصنع زوايا قياساتها أكبر من 360° .



مثال 2

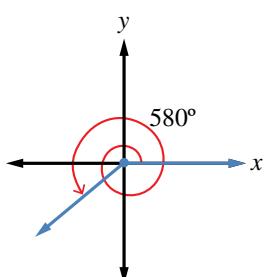
أرسم في الوضع القياسي الزاوية المعطى قياسها في ما يأتي، محدداً مكانها:

1 130°



أرسم المحورين الإحداثيين، ومن نقطة الأصل أرسم ضلُعَ الابتداء مُنطِقًا على محور x الموجب، ثم أضع مركزَ المنقلة على نقطة الأصل، وتدرجَ المنقلة 0° على ضلُعَ الابتداء، ثم أعيّنُ نقطةً مقابلَ التدرج 130° . بعد ذلك أرسم ضلُعَ الانتهاء من نقطة الأصل إلى النقطة التي عيّتها، فاجدُ أنَّ ضلُعَ انتهاء زاوية يقعُ في الربع الثاني.

2 580°



بما أن $580^\circ = 220^\circ + 360^\circ$ ، فإنَّ ضلُعَ انتهاء زاوية 580° هو نفسه ضلُعَ انتهاء زاوية 220° الذي يقعُ في الربع الثالث.

إرشاد

المنقلة ذات شكل نصف دائرة لها تدريجتان متراكسان، يبدأ كل منهما من 0° ، وينتهي عند 180° ؛ لذا يجب دائمًا وضع التدرج على ضلُعَ ابتداء زاوية عند قياسها، أو رسمها.

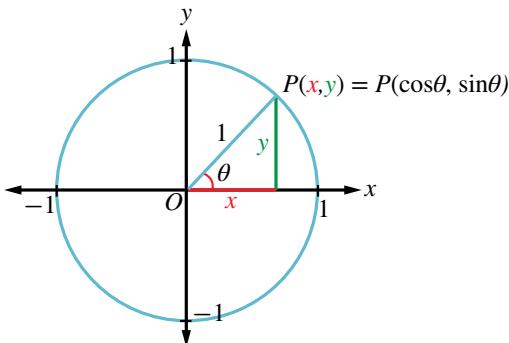
أتحقق من فهمي

أرسم زاوية قياسها 460° في الوضع القياسي، محدداً مكانها.

الوحدة 3

دائرة الوحدة (unit circle) هي دائرة مرکزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

إذاً سميت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإن ضلع انتهائهما يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$. ومع تغير قياس الزاوية يتغير موقع النقطة P على الدائرة، ويتغير إحداثياتها.



يمكن تعريف النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ بدلالة إحداثيات P كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{\text{المُقابَل}}{\text{الوَتَر}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوَتَر}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المُقابَل}}{\text{المجاور}} = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

رموز رياضية

يدل الرمز $\sin \theta$ على نسبة جيب الزاوية θ ، والرمز $\cos \theta$ على نسبة جيب التمام، والرمز $\tan \theta$ على نسبة ظل الزاوية θ .

مثال 3

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائهما

دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

1) $P(-0.6, 0.8)$

$$\sin \theta = y = 0.8, \quad \cos \theta = x = -0.6, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

2) $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$$\sin \theta = y = -\frac{12}{13}, \quad \cos \theta = x = \frac{5}{13}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$$

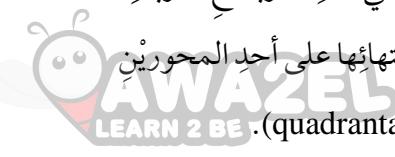
إرشاد

النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ هي: $\sin \theta$, $\cos \theta$ و $\tan \theta$.

أتحقق من فهمي

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائهما

$$. P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

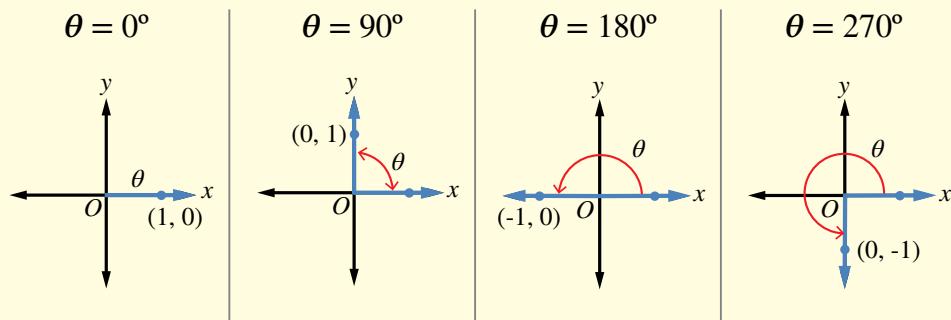


عند رسم الزاوية θ في الوضع القياسي، قد يقع ضلع انتهائهما في أحد الأرباع الأربع، فيقال عندئذ إنَّ الزاوية θ واقعة في الربع كذا، وقد ينطبق ضلع انتهائهما على أحد المحورين الإحداثيين، فتُسمى الزاوية θ في هذه الحالة زاوية ربعية (quadrantal angle).

الزوايا الربعية

مفهوم أساسٍ

الزوايا الربعية في دائرة الوحدة:



يمكن تحديد النسب المثلثية للزوايا الربعية من إحداثيات نقاط تقاطع دائرة الوحدة مع المحورين الإحداثيين. فمثلاً، يتقاطع ضلع انتهاء الزاوية 90° في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(0, 1)$. وبذلك، فإن $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, ويكون $\tan 90^\circ$ غير معروف لأنَّه لا تجوز القسمة على صفر.

مثال 4

أين يقطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها 180° دائرة الوحدة إذا رسمت في الوضع القياسي؟
أجد النسب المثلثية الأساسية لها.

يقطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها 180° دائرة الوحدة في النقطة $C(-1, 0)$ ، إذن:

$$\sin 180^\circ = y = 0, \quad \cos 180^\circ = x = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتدقق من فهمي

أجد النسب المثلثية الأساسية للزواياتين اللتين قياس كلٌّ منها 270° و 360° على الترتيب.

الوحدة 3

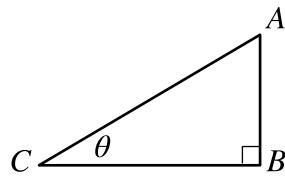
إذا كانت θ زاوية حادة، فإنه يمكن رسم مثلث قائم الزاوية تكون θ إحدى زواياه.

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$\frac{(BC)^2}{(AC)^2} + \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(AC)^2}{(AC)^2}$$

نظريّة فيثاغورس

بقسمة الطرفين على $(AC)^2$



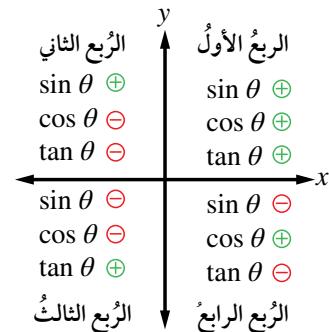
$$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

بتطبيق قوانين الأسس

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

بالتعويض

تظل هذه النتيجة صحيحة بقطع النظر عن قياس الزاوية θ ، وهي تُستعمل لإيجاد إحدى هاتين النسبتين إذا علمت الأخرى ولكن يجب مراعاة إشارات النسب المثلثية؛ فهي تختلف بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي كما هو موضح في الشكل المجاور.



مثال 5

أجد قيمة النسبتين الأساسيةين الباقيتين إذا كان:

$$\sin \theta = -\frac{1}{5}, \text{ وقع ضلع انتهاء } \theta \text{ في الوضع القياسي في الربع الثالث.} \quad 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

نتيجة لنظرية فيثاغورس

$$\cos^2 \theta + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

تعويض قيمة $\sin \theta$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

طرح $\frac{1}{25}$ من الطرفين

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{24}}{5}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

في الربع الثالث يكون $\cos \theta$ سالبا

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

2 ، وقع ضلُعُ انتهاءٍ θ في الوضع القياسي في الربع الثاني.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -3.5$$

$$\sin \theta = -3.5 \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + (-3.5 \cos \theta)^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + 12.25 \cos^2 \theta = 1$$

$$13.25 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{13.25}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{13.25}} \approx \pm 0.2747$$

$$\cos \theta = -0.2747$$

$$\sin \theta = -3.5 \times -0.2747$$

$$= 0.96145 \approx 0.96$$

بضربِ الطرفينِ في $\cos \theta$

نتيجةً لنظريةِ فيثاغورس

بتعويضِ قيمةِ $\sin \theta$

بالتربيعِ

بالتبسيطِ

بقسمةِ الطرفينِ على 13.25

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

واستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

في الربعِ الثاني يكونُ $\cos \theta$ سالبًا

بتعويضِ قيمةِ $\cos \theta$

أتحقق من فهمي

أحدُ قيمةَ كُلٌّ منْ θ $\sin \theta$ و $\cos \theta$ إذا كانَ $\tan \theta = 0.8$ ، وقع ضلُعُ انتهاءٍ θ في الوضع القياسي في الربعِ الرابع.



برَّ عَالِمُ الْقَلْكِ والرياضياتِ
المُسْلِمُ مُحَمَّدُ بْنُ جَابِرِ الْبَاتَانِيُّ
فِي عِلْمِ الْمَلْثَاثِ، وَاكْتَشَفَ
العَدِيدَ مِنَ الْعَلَاقَاتِ الْمُهِمَّةَ
بَيْنَ النَّسْبِ الْمَلْثَلِيَّةِ، مَثَلًا:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

أتدرب وأحل المسائل

أرسمُ الزوايا الآتية في الوضع القياسي:

1 225°

2 160°

3 330°

4 240°

أحدُ الربعِ الذي يقعُ فيه ضلُعُ انتهاءٍ كُلٌّ زاويةٍ ممَا يأتِي إذا رسمْتُ في الوضع القياسي:

5 285°

6 75°

7 100°

8 265°

الوحدة 3

أُحدِّد الربع (أو الأربعَ) الذي يقعُ فيه ضلُعُ انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسيّ إذا كانَ:

٩) $\sin \theta > 0$

١٠) $\cos \theta > 0$

١١) $\tan \theta < 0$

١٢) $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$

أُحدِّد الربع (أو الأربعَ) الذي يقعُ فيه ضلُعُ انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسيّ إذا كانَ:

١٣) $\sin \theta = -0.7$

١٤) $\tan \theta = 2$

١٥) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

١٦) $\tan \theta = -1$

١٧) $\cos \theta = 0.45$

١٨) $\sin \theta = 0.55$

١٩) $\sin \theta = 0.3$, $\cos \theta < 0$

٢٠) $\tan \theta = -4$, $\sin \theta > 0$

أُحدِّد النسبَ المثلثية الأساسية للزاوية θ إذا قطعَ ضلُعُ انتهائِها في الوضع القياسيّ دائرةً الوحدة في النقاطِ الآتية:

٢١) $P(0, -1)$

٢٢) $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$

٢٣) $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

٢٤) $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

أُحدِّد النسبَ المثلثيَن الأساسيَيْن الباقِيَيْن في الحالاتِ الآتية:

٢٥) $\sin \theta = \frac{3}{4}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$

٢٦) $\tan \theta = 0.78$, $-1 < \sin \theta < 0$

٢٧) $\cos \theta = -0.75$, $\tan \theta < 0$

٢٨) $\sin \theta = -0.87$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$

مهارات التفكير العليا



٢٩) تبريرُ: ما أكْبَرُ قيمةٍ لجِيبِ الزاوية؟ ما أصْغَرُ قيمةٍ لهُ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

٣٠) أكشِفُ الخطأً: حلَّ كُلُّ منْ أمْجدَ وزينَةِ المسَأْلَةِ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$ ، وكانتْ x بينَ 180° و 360° ، فما

قيمةُ $\sin x + \cos x$ ؟

زينةُ:

$$\sin x + \cos x = -1.4$$

أمْجدُ:

$$\sin x + \cos x = 0.2$$

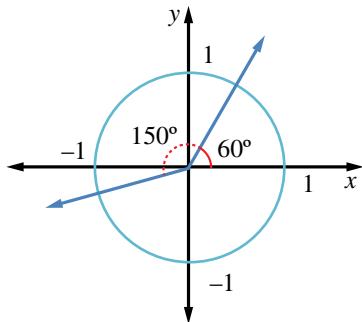
أُحدِّد أيَّهُما كَانَتْ إجابتُهُ صَحِيحَةً، مُبِرِّراً إجابتِي.

النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة

Trigonometric Ratios for Angles between 0° and 360°



إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية بين 0° و 360° , وإيجاد الزاوية إذا عرفت إحدى نسبها المثلثية.



الزاوية المرجعية، معكوس النسبة المثلثية.

دار ضلع انتهاء زاوية قياسها 60° في الوضع القياسي بزاوية 150° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. كيف نجد إحداثي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة في موقعه الجديد؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تعرّفنا في الدرس السابق كيفية إيجاد النسب المثلثية لزاوية مرسومة في الوضع القياسي باستخدام إحداثي نقطة تقاطع ضلع انتهائهما مع دائرة الوحدة، وستتعرف في هذا الدرس كيف نجد النسب المثلثية إذا علم قياس الزاوية بالدرجات.

إذا وقع ضلع انتهاء الزاوية θ في الربع الأول (أي كانت $90^\circ < \theta < 0^\circ$), فإنّه يمكن إيجاد النسب المثلثية لهذه الزاوية باستخدام الآلة الحاسبة، أو بما نحفظه من نسب مثلثية للزوايا الخاصة: $(30^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$.

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

مراجعة المفاهيم

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

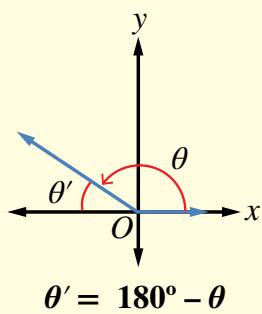
الوحدة 3

أما إذا وقع ضلع انتهاء الزاوية θ المرسمة في الوضع القياسي في أي من الأرباع الثلاثة الأخرى، فإن نسبتها المثلثية تكون مُرتبطةً بالنسبة المثلثية للزاوية المرجعية θ' (reference angle)، وهي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x .

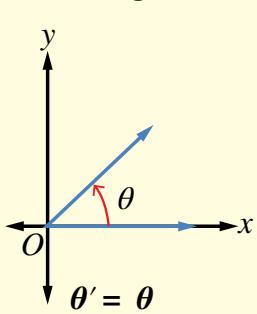
الزاوية المرجعية

مفهوم أساسي

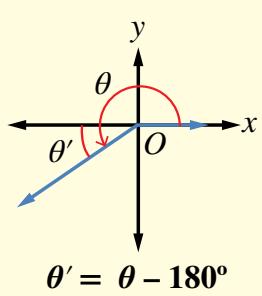
الربع الثاني



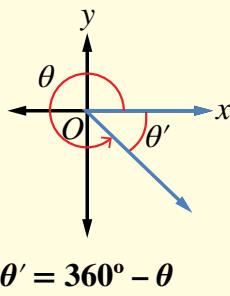
الربع الأول



الربع الثالث



الربع الرابع



النسبة المثلثية للزاوية θ تساوي النسبة المثلثية لزاويتها المرجعية θ' مع اختلاف الإشارة

أحياناً بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ .

لإيجاد النسبة المثلثية لأي زاوية θ ، فإننا نتبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة 1: إيجاد الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: إيجاد النسبة المثلثية للزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 3: تحديد إشارة النسبة المثلثية للزاوية θ بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها.

أتذكر

الربع الأول	الربع الثاني
$\sin \theta$ +	$\sin \theta$ +
$\cos \theta$ -	$\cos \theta$ +
$\tan \theta$ -	$\tan \theta$ +
$\sin \theta$ -	$\sin \theta$ -
$\cos \theta$ +	$\cos \theta$ +
$\tan \theta$ +	$\tan \theta$ -

مثال 1

أَجِدُّ قيمةَ كُلِّ مَا يَأْتِي:

يَقُوْضُ ضلْعُ الْأَنْتَهَى لِلزاوِيَةِ 150° فِي الْرَّبِيعِ الثَّانِي؛ لَذَا أَسْتَعْمَلُ زاوِيَّهَا المَرْجِعِيَّةَ:

$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

إِيجَادُ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ المَرْجِعِيَّةِ

$$= 180^\circ - 150^\circ$$

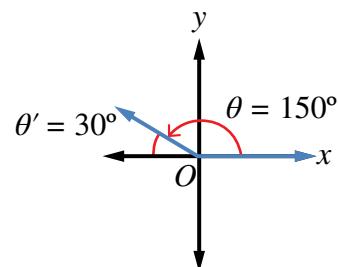
$$\theta = 150^\circ$$

$$= 30^\circ$$

بِالْتَّبَسيطِ

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0.5$$

الْجِيبُ مُوجَّبٌ فِي الْرَّبِيعِ الثَّانِي



2 $\cos 225^\circ$

يَقُوْضُ ضلْعُ الْأَنْتَهَى لِلزاوِيَةِ 225° فِي الْرَّبِيعِ الثَّالِثِ؛ لَذَا نَسْتَعْمَلُ زاوِيَّهَا المَرْجِعِيَّةَ:

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

إِيجَادُ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ المَرْجِعِيَّةِ

$$= 225^\circ - 180^\circ$$

$$\theta = 255^\circ$$

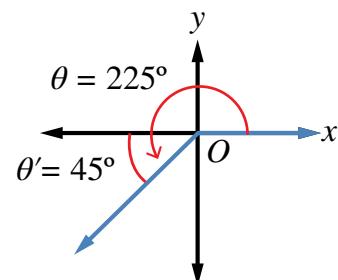
$$= 45^\circ$$

بِالْتَّبَسيطِ

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$$

جِيبُ التَّمَامِ سَالِبٌ فِي الْرَّبِيعِ الثَّالِثِ

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



3 $\tan 300^\circ$

يَقُوْضُ ضلْعُ الْأَنْتَهَى لِلزاوِيَةِ 300° فِي الْرَّبِيعِ الرَّابِعِ؛ لَذَا نَسْتَعْمَلُ زاوِيَّهَا المَرْجِعِيَّةَ:

$$\theta' = 360^\circ - \theta$$

إِيجَادُ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ المَرْجِعِيَّةِ

$$\theta' = 360^\circ - 300^\circ$$

$$\theta = 300^\circ$$

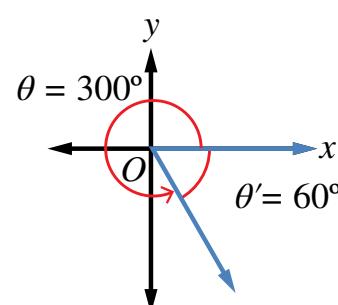
$$= 60^\circ$$

بِالْتَّبَسيطِ

$$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ$$

الظُّلُّ سَالِبٌ فِي الْرَّبِيعِ الرَّابِعِ

$$= -\sqrt{3}$$





a) $\sin 120^\circ$

c) $\cos 315^\circ$

b) $\tan 240^\circ$

d) $\sin 210^\circ$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل ممّا يأتي:

انتبه

يجب ضبط الآلة الحاسبة على خيار درجات (DEGREES) قبل استعمالها. أسأل معلّمي.

مثال 2

أجد قيمة كل ممّا يأتي:

1 sin 255°

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 255° في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

إيجاد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta' = 255^\circ - 180^\circ$$

$$\theta = 255^\circ$$

$$= 75^\circ$$

بالتبسيط

$$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ$$

الجيب سالب في الربع الثالث

والآن، أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد $\sin 75^\circ$ كما يأتي:

أضغط على مفتاح \sin ، ثم أدخل القيمة 75، ثم أضغط على مفتاح $=$ ، فتظهر النتيجة:

$$\begin{array}{cccc} \sin & 7 & 5 & = \\ & & & 0.965925826 \end{array}$$

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، تكون النتيجة: 0.966

$$\sin 255^\circ \approx -0.966$$

يمكن أيضًا إيجاد $\sin 255^\circ$ مباشرةً باستعمال الآلة الحاسبة من دون إيجاد الزاوية المرجعية

على النحو الآتي:

أضغط على مفتاح \sin ، ثم أدخل القيمة 255 ، ثم أضغط على مفتاح $=$ ، فتظهر النتيجة:

sin 2 5 5 = -0.965925826

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، تكون النتيجة -0.966 ، وهي النتيجة نفسها التي توصلت إليها آنفًا.

2 tan 168°

أضغط على مفتاح \tan ، ثم أدخل القيمة 168 ، ثم أضغط على مفتاح $=$ ، فتظهر النتيجة:

tan 1 6 8 = -0.212556561

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، تكون النتيجة: -0.213

إذن، $\tan 168^\circ \approx -0.213$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

a) $\sin 320^\circ$

b) $\cos 175^\circ$

c) $\tan 245^\circ$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد قياس أي زاوية حادة (في الربع الأول) علمت إحدى نسبيها المثلثية، وذلك باستعمال معكوس النسبة المثلثية (inverse trigonometric ratio). فإذا علم جيب الزاوية استعمل معكوس الجيب (\sin^{-1})، وإذا علم جيب تمام الزاوية استعمل معكوس جيب تمام (\cos^{-1})، وإذا علم ظل الزاوية استعمل معكوس الظل (\tan^{-1}). وبالطريقة نفسها، يمكن إيجاد قياس أي زاوية في الأربع الباقيه باستعمال مفهوم الزاوية المرجعية وإشارات النسب المثلثية في الأربع الاربعه.

لغة الرياضيات

- نقرأ معكوس الجيب .sine inverse
- نقرأ معكوس جيب تمام .cosine inverse
- نقرأ معكوس الظل .tan inverse

الوحدة 3

مثال 3

أَجِدُّ قيمةً (أوْ قيمَ) θ فِي مَا يَأْتِي، علَمًا بِأَنَّ $360^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$:

$$\theta = \sin^{-1}(0.98)$$

θ هِيَ الزَّاوِيَةُ الَّتِي نَسْبَةُ الجَيْبِ لَهَا 0.98

وَالآنَ، أَسْتَعْمِلُ الْآلَةَ الْحَاسِبَةَ لِإِيجَادِ $\sin^{-1}(0.98)$ كَمَا يَأْتِي:

SHIFT sin 0 . 9 8 = 78.521659

وَبِالتَّقْرِيبِ إِلَى مُنْزَلَةِ عَشْرِيَّةٍ وَاحِدَةٍ، تَكُونُ النَّتِيْجَةُ: 78.5° ، وَهِيَ زَاوِيَةٌ مَرْجِعِيَّةٌ لِّزاوِيَةٍ أُخْرَى؛ لَاَنَّهَا تَقْعُدُ فِي الرَّبِيعِ الْأَوَّلِ. وَبِمَا أَنَّ الجَيْبَ مُوجَّبٌ فِي رَبِيعِيْنَ (الْأَوَّلُ وَالثَّانِي فَقَطُّ)، فَإِنَّ الزَّاوِيَةَ الْأُخْرَى θ تَكُونُ فِي الرَّبِيعِ الثَّانِي، وَيُمْكِنُ إِيجَادُهَا بِاستِعْمَالِ الْعَلَاقَةِ بَيْنَ الزَّاوِيَةِ الْمَرْجِعِيَّةِ وَالزاوِيَةِ الْمَنَاظِرَةِ فِي الرَّبِيعِ الثَّانِي الَّتِي تَعْرَفُهَا آنَّفًا.

$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

العلاقة بين الزاوية المرجعية والزاوية

المناظرة في الربع الثاني

$$\theta' = 78.5^\circ$$

$$78.5^\circ = 180^\circ - \theta$$

$$\theta = 101.5^\circ$$

بِحَلِّ الْمَعَادِلَةِ

$$\text{إِذْنُ، } \theta = 78.5^\circ \text{، أَوْ } 101.5^\circ$$

2 $\tan \theta = -1.2$

$$\theta = \tan^{-1}(-1.2)$$

θ هِيَ الزَّاوِيَةُ الَّتِي نَسْبَةُ الظَّلَّ لَهَا تَسَاوِي -1.2

وَالآنَ، أَسْتَعْمِلُ الْآلَةَ الْحَاسِبَةَ لِإِيجَادِ $\tan^{-1}(-1.2)$ كَمَا يَأْتِي:

SHIFT tan 1 . 2 = 50.1944289

أُفَكِّرُ

أَتَجَاهِلُ الإِشَارَةَ السَّالِبَةَ.

لِمَاذَا؟

وَبِالتَّقْرِيبِ إِلَى مُنْزَلَةِ عَشْرِيَّةٍ وَاحِدَةٍ، تَكُونُ النَّتِيْجَةُ: 50.2° ؛ وَلَاَنَّ الظَّلَّ يَكُونُ سَالِبًا فِي رَبِيعِيْنَ فَقَطُّ (الثَّانِي وَالرَّابِعُ)؛ فَإِنَّ الزَّاوِيَةَ 50.2° لَيْسَتْ مِنَ الْحَلُولِ، وَإِنَّمَا زَاوِيَةٌ مَرْجِعِيَّةٌ لَهَا.

إذا استعملنا العلاقة بين الزاوية المرجعية والزوايا الم対اظرة في الربعين الثاني والرابع، فإننا

سنجد هاتين الزاويتين:

$$\text{زاوية الربع الثاني: } 180^\circ - 50.2^\circ = 129.8^\circ$$

$$\text{زاوية الربع الرابع: } 360^\circ - 50.2^\circ = 309.8^\circ$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة (أو قيم) θ في كل مما يأتي، علمًا بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

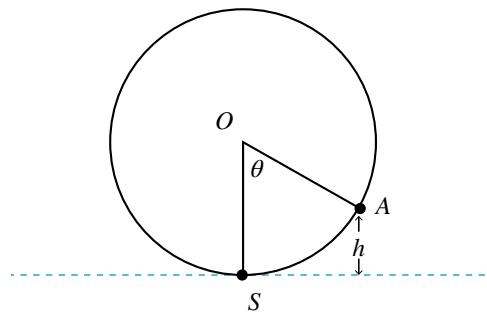
a) $\cos \theta = -0.4$

b) $\tan \theta = 5.653$

c) $\sin \theta = -0.5478$

مثال 4: من الحياة

نوعيّر: يُمثل الشكل الآتي نافورة ماءً تدور بسرعة ثابتة، وتُمثل D في الشكل أخفض نقطة تبلغها النافورة تحت الماء، في حين تمثل النقطة O مركز النافورة. إذا دارت النافورة بزاوية θ ؛ فإن ارتفاع صندوق الماء الذي موقعه النقطة A عن أخفض نقطة تبلغها النافورة يعطى بالعلاقة: $h = 7.5 - 7.5 \cos \theta$ حيث h الارتفاع بالأمتار. أجد طول قطر النافورة.



عندما يصل الصندوق إلى النقطة الواقعة فوق D مباشرةً، فإن ارتفاعه عن أخفض موقع له يُساوي طول قطر النافورة، ويكون قياس θ في تلك اللحظة 180° :

$$h = 7.5 - 7.5 \cos 180^\circ$$

تعويض قيمة

$$= 7.5 - 7.5 (-1)$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$= 7.5 + 7.5 = 15$$

بالتبسيط

إذن، طول قطر النافورة هو: 15 m

أتحقق من فهمي

أجد ارتفاع صندوق الماء الذي موقعه النقطة A عندما تصبح $\theta = 235^\circ$



النافورة آلية مائية دائريّة
تحرك بفعل جريان مياه
الأنهار، وترفع الماء بوساطة
صناديق إلى حوض علويّ؛
فينساب في قنوات نحو
البساتين على ضفة النهر.



١ $\sin 130^\circ$

٢ $\sin 325^\circ$

٣ $\cos 270^\circ$

٤ $\tan 120^\circ$

٥ $\cos 250^\circ$

٦ $\tan 315^\circ$

٧ 325°

٨ 84°

٩ 245°

١٠ 280°

١١ 150°

١٢ 215°

١٣ 75°

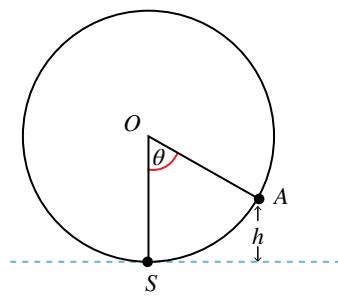
١٤ 300°

١٥ 235°

١٦ $\sin \theta = 0.55$

١٧ $\cos \theta = -0.05$

١٨ $\tan \theta = 0$



١٩ ترفيه: يمثل الشكل الآتي دولاباً دواراً في مدينةألعاب يدور بسرعة ثابتة، وتمثل S في الشكل نقطة صعود الراكب الذي موقعة الآن عند النقطة A ، في حين تمثل النقطة O مركز الدوّلاب. إذا دار الدوّلاب بزاوية θ ، فإن ارتفاع الراكب عن الأرض (h) بالأمتار يعطى بالعلاقة: $h = 12.5 - 12.5 \cos \theta$. أجد ارتفاع الراكب عن سطح الأرض عندما تصبح $\theta = 345^\circ$.

٢٠ أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



٢١ تحدّ: أجد مجموعـة قيم θ التي يجعل المتباينة الآتـية صحيحةً، عـلـمـاً بـأنـ $90^\circ < \theta < 180^\circ$:

$$\cos \theta + \sin \theta < 0$$

٢٢ أكتشف الخطأ: حسبـت سندسـ نسبة جـيب إـحدـي الزـواـياـ في الـرـبـعـ الثـانـيـ، فـكـانـتـ قـيمـتهاـ 1.4527ـ هلـ إـجـابةـ سـندـسـ صـحـيـحةـ؟ أـبـرـرـ إـجـابـتـيـ.

٢٣ تبرير: أـجـدـ قـيمـةـ ماـيـاتـيـ، مـبـرـرـاـ إـجـابـتـيـ:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 357^\circ + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ + \cos 360^\circ$$



تمثيل الاقترانات المثلثية

Graphing Trigonometric Functions

فكرة الدرس



مسألة اليوم



تمثيل اقترانات مثلثية مجالها الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$ بيانياً.

يرتبط عمق الماء عند نقطة معينة في أحد الموانئ بالزمن حسب العلاقة:

$$y = \sin x, x \geq 0$$



حيث: لا عمق الماء بالأمتار، و x الزمن بالساعات بعد منتصف الليل. هل يمكن رسم منحنى يبين تغير عمق الماء في الميناء مع مرور الوقت؟

تُستخدم الاقترانات المثلثية في تمثيل مواقف حياتية مرتبطة بالحركة الدورية، مثل: موجات الصوت، وضغط الدم في جسم الإنسان، وارتفاع مقدى في دولاب دوار، وتغير عدد ساعات النهار خلال عام، وغير ذلك. ولكن، هل يمكن رسم منحنى اقتران يبين كيف تبدو الحركة الدورية التي تمثلها هذه الاقترانات؟

تعلّمت سابقاً كيفية تمثيل اقترانات خطية وتربيعية في المستوى الإحداثي بإنشاء جدول قيم للمتغيرين x ولا، وتمثيل كل زوج (x, y) بنقطة في المستوى، ثم رسم المنحنى الذي يصل هذه النقاط بعضها. وفي هذا السياق، يمكن اتباع الطريقة نفسها لتمثيل الاقترانات المثلثية.

مثال 1

أرسم منحنى كل من الاقترانين الآتيين ثم أصفه، علماً بأن $360^\circ \leq x \leq 0^\circ$:

1 $y = \sin x$

الخطوة 1: أكون جدوالاً أكتب فيه زوايا شائعة، نسبتها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الرباعية، والزوايا التي زاويتها المرجعية 30° .

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

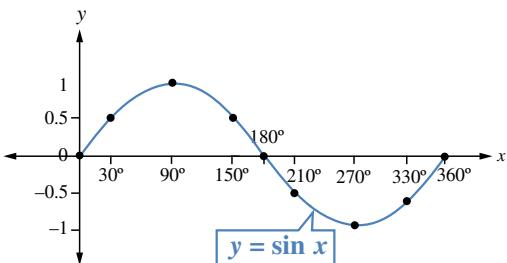
الوحدة 3

x	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0

LEARN 2 BE

الخطوة 3: أعين الأزواج المُرتبة: $(0^\circ, 0), (30^\circ, 0.5), (90^\circ, 1), \dots, (360^\circ, 0)$.

في المستوى الإحداثي.



الخطوة 4: أصل بمنحنى أملس بين النقاط، فيتُجِّ رسم كما في الشكل المجاور.

من التمثيل البياني لاقتران $\sin x$, الاحظ أنَّ:

- أكبر قيمة لاقتران $\sin x$ هي 1، وأصغر قيمة له هي -1.
- $\sin x$ يكون موجباً إذا كانت $180^\circ < x < 0^\circ$, وسالباً إذا كانت $180^\circ < x < 360^\circ$.

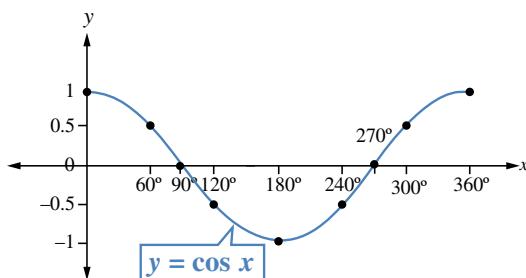
2 $y = \cos x$.

الخطوة 1: أكون جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x , ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$y = \cos x$	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1

الخطوة 3: أعين الأزواج المُرتبة: $(0^\circ, 1), (60^\circ, 0.5), (90^\circ, 0), \dots, (360^\circ, 1)$ في المستوى الإحداثي، وأصل بمنحنى أملس.



من التمثيل البياني لاقتران $\cos x$, الاحظ أنَّ:

- أكبر قيمة لاقتران $\cos x$ هي 1، وأصغر قيمة له هي -1.

أفكار

ما العلاقة بين منحنى اقتران الجيب والزوايا المرجعية التي تعلمتها في الدرس السابق؟

إرشاد

يمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل اقتران $\cos x$, ولاحظة أكبر قيمة له، وأصغر قيمة له أيضًا.

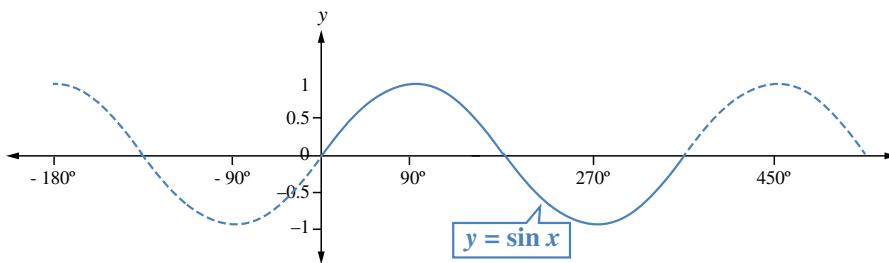
• يكون موجباً إذا كانت $0^\circ < x < 90^\circ$ ، و سالباً إذا كانت $270^\circ < x < 360^\circ$.



أتحقق من فهمي

أرسّم منحنى الاقتران $y = \sin x$ ، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مستعملاً زوايا مختلفة عن تلك التي في الجدول السابق، ثم أجد قيم الجيب لهذه الزوايا باستعمال الآلة الحاسبة.

تعرّفت آنّه توجد زوايا أكبر من 360° . فإذا دار ضلع انتهاء الزاوية (في الوضع القياسي) أكثر من دورة واحدة عكس اتجاه عقارب الساعة، فإنّه يكون زوايا أكبر من 360° ، وإذا دار مع اتجاه عقارب الساعة، فإنه يكون زوايا قياسها سالب؛ ولهذا، فقد يكون قياس الزاوية أي عدد حقيقي، علمًا بأنّه يمكن تمثيل الاقترانات المثلثية للأعداد الحقيقية جميعها، وليس فقط للزوايا الواقعة بين 0° و 360° ، لا حظ منحنى اقتران الجيب الآتي.



كاشف الاهتزاز (الأوسيليسكوب) هو جهاز يرسم جهد الإشارات الإلكترونية على شكل مخطط يُسمى التمثيل البياني لاقتران الجيب، ويُستخدم لاكتشاف أعطال الأجهزة الكهربائية.

والآن، سأرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، ملاحظاً الفرق بينه وبين منحنى الاقترانين $\sin x$ و $\cos x$.

مثال 2

أرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، ثم أصفه علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

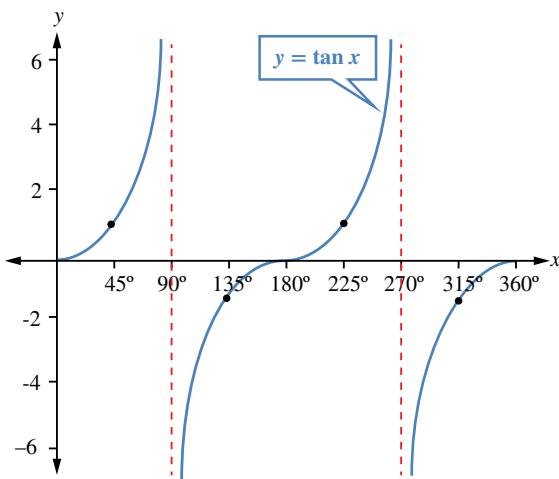
الخطوة 1: أكون جدولاً، ثم أكتب فيه زوايا شائعة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\tan x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غير معروف	-1	0	1	غير معروف	-1	0

الوحدة 3

الخطوة 3: أُعِنَّ النَّقَاطِ فِي الْمَسْتَوِيِّ الإِحْدَائِيِّ، مُلَاحِظًا صَعْوَةَ التَّوْصِيلِ بَيْنَ النَّقَاطِ بِمَنْحَنِيِّ وَاحِدٍ؛ لِأَنَّ قِيمَةَ $\tan x$ غَيْرُ مُعْرَفَةٍ لِلْزاوِيَتَيْنِ 90° وَ 270° ؛ لِذَا أَصِلُّ النَّقَاطَ قَبْلَ الزَّاوِيَةِ 90° بَعْضُهَا، وَالنَّقَاطَ بَيْنَ الزَّاوِيَتَيْنِ 90° وَ 270° بَعْضُهَا، وَالنَّقَاطَ بَعْدَ الزَّاوِيَةِ 270° بَعْضُهَا، فَيَتَّسِعُ رَسْمُ كَمَا فِي الشَّكْلِ الْآتِيِّ.



يُبَيِّنُ الشَّكْلُ أَنَّ منْحَنِيِّ $\tan x$ غَيْرُ مَتَّصلٍ؛ فَهُوَ مُكَوَّنٌ مِنْ عِدَّةِ قَطْعٍ، وَأَنَّ الظَّلَّ مُوجِبٌ بَيْنَ الزَّاوِيَتَيْنِ 0° وَ 90° ، وَبَيْنَ الزَّاوِيَتَيْنِ 180° وَ 270° ، وَأَنَّهُ يَكُونُ سَالِبًا بَيْنَ الزَّاوِيَتَيْنِ 90° وَ 180° ، وَبَيْنَ الزَّاوِيَتَيْنِ 270° وَ 360° .

أَتَعْلَمُ

يُسَمِّي كُلُّ مِنَ الْمَسْتَقِيمَيْنِ $x = 90^\circ$ وَ $x = 270^\circ$ خطًّا تَقَارِبٌ رَأْسِيٌّ لِمَنْحَنِيِّ $\tan x$ ؛ لِأَنَّ الْمَنْحَنِيَّ يَقْرَبُ كَثِيرًا مِنْهُمَا، لَكَنَّهُ لَا يَقْطَعُهُمَا.

أَتَدْرِكُ مِنْ فَهْمِي

أَرَسَمْتُ مَنْحَنِيَّ الاقْتَرَانِ $y = \tan x$ ، عَلَمًا بِأَنَّ $90^\circ < x < 270^\circ$ ، مُسْتَعْمِلًا زَوَایَا مُخْتَلَفَةً عَنْ تِلْكَ الَّتِي فِي الْجَدْوَلِ السَّابِقِ، ثُمَّ أَجِدُّ قِيمَ الظَّلَّ لِهَذِهِ الزَّوَایَا بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ.

أَتَدْرِكُ وَأَحْلِيَّ الْمَسَائِلَ

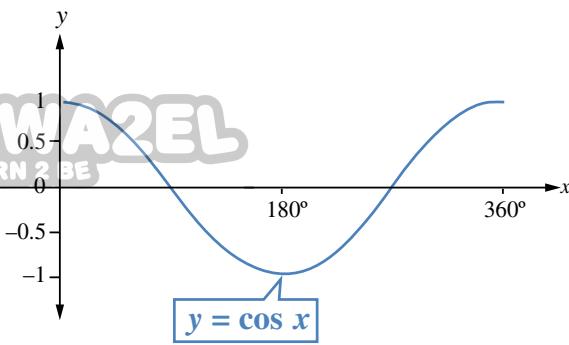
أَرَسَمْتُ مَنْحَنِيَّ الاقْتَرَانِ لِكُلِّ مَا يَأْتِي فِي الْفَتَرَةِ المُعْطَاةِ، ثُمَّ أَصِفُّهُ:

1) $y = \sin x \quad 0^\circ \leq x \leq 270^\circ$

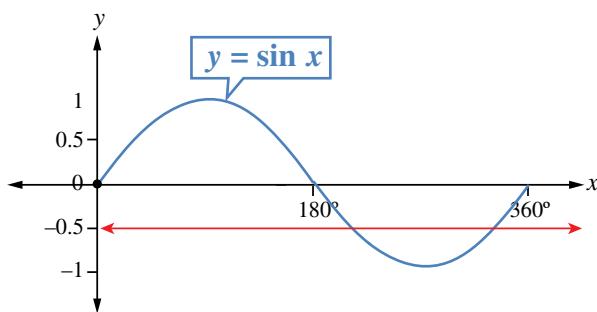
2) $y = \cos x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

3) $y = \sin x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

4) $y = \tan x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

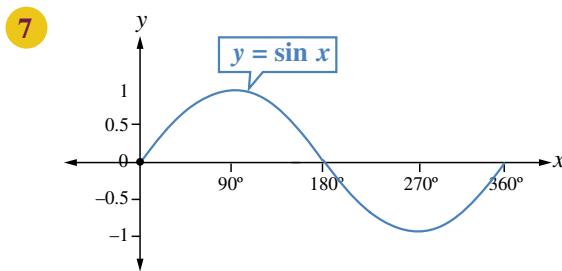


يُبيّن الشكلُ المجاورُ جزءاً منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدرُ قيمتيْنِ للمُتغيّرِ x يكُونُ عِنْدَهُما $\cos x = -0.5$



يُبيّن الشكلُ المجاورُ جزءاً منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \sin x$. بناءً على هذا الشكلِ، أُقدرُ قيمتيْنِ للمُتغيّرِ x يكُونُ عِنْدَهُما $\sin x = -0.5$

أَسْتَعْمِلُ التمثيلاتِ البيانيةَ الآتيةَ لِأَجْدَ جَمِيعَ القيِّمِ الممكِنةِ لِكُلِّ مِنْ a, b, c, d, e, f, g, h :

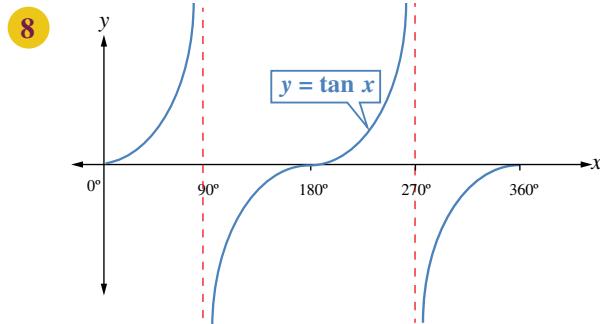


$$\sin 0^\circ = \sin a^\circ = \sin b^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \sin c^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \sin d^\circ$$

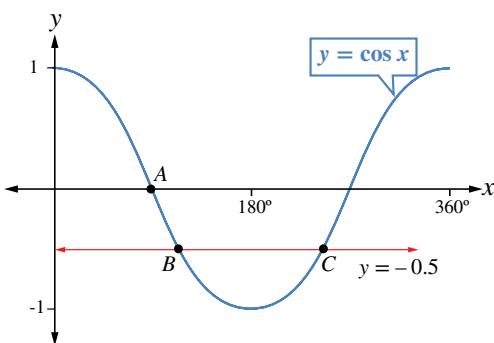
$$\sin 210^\circ = \sin e^\circ$$



$$\tan 0^\circ = \tan e^\circ = \tan f^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \tan g^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \tan h^\circ$$



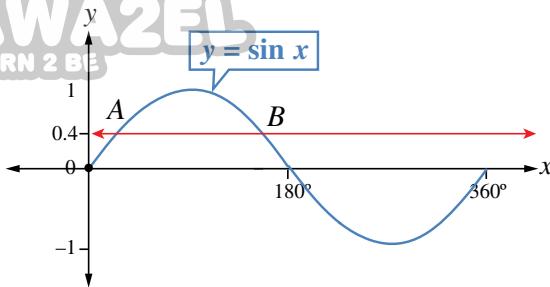
يُبيّن الشكلُ المجاورُ جزءاً منَ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $y = -0.5$ في النقطتينِ B, C :

أَجِدُّ إِحْدَاثِيَّاتِ النَّقْطَةِ A .

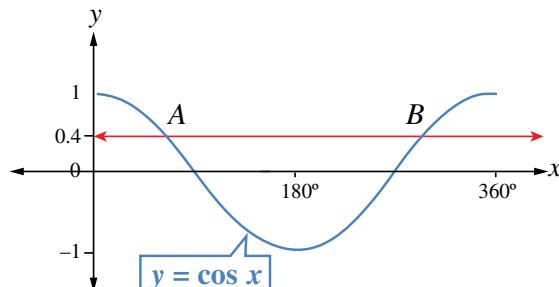
أَجِدُّ إِحْدَاثِيَّاتِ النَّقْطَيْنِ B, C باسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الحَاسِبَةِ.

أَجِدُّ إِحْدَائِيَّاتِ النَّقْطَتَيْنِ A و B فِي كُلِّ شَكْلٍ مِمَّا يَأْتِي بِاستِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ:

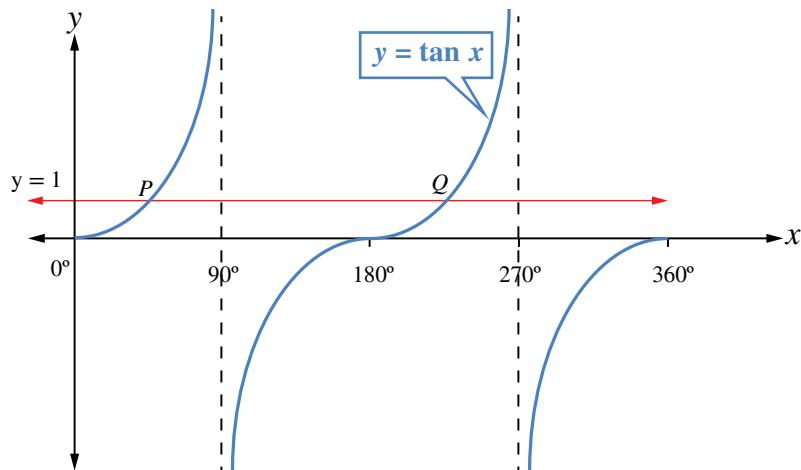
11



12



يُبَيِّنُ الشَّكْلُ الْأَتَى جُزْءًا مِنَ التَّمثِيلِ الْبَيَانِيِّ لِلْاقْتَرَانِ x $y = \tan x$, حِيثُ يَقْطُعُ الْمَسْتَقِيمُ 1 مَنْحَنِيَّ $y = \tan x$ فِي النَّقْطَتَيْنِ: P ، وَ Q . أَكْتُبُ إِحْدَائِيًّا x لِكُلِّ مِنَ النَّقْطَتَيْنِ: P ، وَ Q .



مهارات التفكير العليا



14 تحدّ: أَرْسِمُ مَنْحَنِيَّ الْاقْتَرَانَيْنِ $y = \cos x$ وَ $y = 2 \cos x$ فِي الْمَسْطَوِيِّ الْإِحْدَائِيِّ نَفْسِهِ، فِي الْفَتْرَةِ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ثُمَّ أُقَارِنُ بَيْنَهُمَا.

15 أَكْتُبُ: مَا الْفَرْقُ بَيْنَ مَنْحَنِيِّيِّ الْجَيْبِ وَجَيْبِ التَّمَامِ؟

حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations



حل معادلات تضمن النسب المثلثية الأساسية، وتكون فيها مجموعة الحل ضمن دورة واحدة.

فكرة الدرس

المعادلة المثلثية.

المصطلحات

مسألة اليوم



ساعة حائط كبيرة معلقة على جدار غرفة. إذا كان طول عقرب الساعات 16 cm، وبعُدُر رأس العقرب عن سقف الغرفة يُمثّل دائماً بالعلاقة: $d = -60 \cos(30x) + 110$ ، حيث d هو البُعد بالسنتيمتر، و x الوقت بالساعات، فما الوقت الذي يبعد فيه رأس عقرب الساعات 118 cm عن السقف؟

المعادلة المثلثية (trigonometric equation) هي معادلة مُتغيّرها نسب مثلثية لزاوية مجهولة. و حل المعادلة المثلثية يعني إيجاد الزاوية (أو الزوايا) التي تتحقق هذه المعادلة، وتجعل منها عبارة صحيحة.

من الأمثلة على المعادلات المثلثية:

$$\sin x = 0.5$$

$$\tan x = 2.435$$

$$2 + \cos x = 3 - 2 \cos x$$

$$2 \sin^2 x = 3$$

يمكن حل بعض المعادلات، مثل: $\cos x = a$ ، $\sin x = a$ ، و $\tan x = a$ ، باستعمال الآلة الحاسبة، أو استعمال ما تذكّره من نسب الزوايا الخاصة.

مثال 1

أحل المعادلتين الآتیتين، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

1 $2 \sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

ولأن الجيب يكون أيضًا موجبا في الربع الثاني؛ فإنه يوجد حل آخر للمعادلة هو:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

إذن، لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: 30° و 150° .

آذكّر

يكون جيب الزاوية موجبا في الربعين: الأول، والثاني.

الوحدة 3

2) $3 \cos x - 1 = 2$

$$3 \cos x = 3$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

بإضافة 1 إلى الطرفين

بقسمة طرفي المعادلة على 3

باستعمال الآلة الحاسبة

لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المقطورة في المسألة، هما: 0° ، و 360°

أتحقق من فهمي

أحل المعادلتين الآتيتين، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

a) $2 \cos x = \sqrt{3}$

b) $2 \tan x + 3 = 1$

يتطلب حل بعض المعادلات مزيداً من التبسيط والمعالجة قبل استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أحل المعادلتين الآتيتين:

1) $2(\tan x - 3) + 4 = 12$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$2 \tan x - 6 + 4 = 12$$

باستعمال الخاصية التوزيعية

$$2 \tan x = 14$$

بالتبسيط

$$\tan x = 7$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

$$x = \tan^{-1}(7)$$

تعريف معكوس الظل

$$x = 81.9^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

ولأن الظل يكون أيضاً موجباً في الربع الثالث؛ فإنه يوجد حل آخر للمعادلة هو:

$$180^\circ + 81.9^\circ = 261.9^\circ$$

إذن، لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المقطورة في المسألة، هما: 81.9° ، و 261.9°

اتذكر

الزاوية المرجعية هي
الزاوية المحصورة بين
ضلع انتهاء الزاوية θ الحادة
المرسومة في الوضع
القياسي والممحور x .

2 $1 + 4 \sin(3x) = 2.5$, $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

$$4 \sin(3x) = 2.5 - 1$$

$$\sin(3x) = \frac{1.5}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.375)$$

$$\theta = 22^\circ$$

$$22^\circ = 3x \Rightarrow x = 7.3^\circ$$

ولأنَّ الجيب يكونُ أيًضاً موجباً في الربع الثاني؛ فإنَّه يوجد حُلٌ آخر للمعادلة هو:

$$180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$$

الزاوية في الربع الثاني

$$\theta = 3x = 158^\circ$$

$$x \approx 52.7^\circ$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

إذن، للمعادلة $1 + 4 \sin(3x) = 2.5$ حالان ضمنَ الفترة المعلقة في المسألة، هما:

$$52.7^\circ, 7.3^\circ$$

أتحقق من فهمي

أُحلُّ المعادلتين الآتیتين:

a) $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

b) $3 \cos(2x) - 1 = 0$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

يمكنُ حلُّ المعادلات المثلثية التربيعية بطرقٍ مشابهة لطرقِ حلِّ المعادلات التربيعية الجبرية، أبرزُها: إيجاد العامل المشترك، والتحليل إلى ناتج ضرب قوسين، وغير ذلك من الطرق التي تعرَّفناها سابقاً.

معلومة أساسية

إذا كانت $x \leq 90^\circ$
 $0^\circ \leq 3x \leq 270^\circ$
 فإنَّ

طرح 1 منَ الطرفين

بقسمة طرفي المعادلة على 4

باستعمال الرمز θ بدلاً من $3x$ ،

حيثُ: $0^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$

تعريفُ معكوسِ الجيب

باستعمال الآلة الحاسبة

الوحدة 3



مثال 3

أحُلُّ المعادلتين الآتیَنِ، علَمًا بِأَنَّ $0^\circ \leq x < 360^\circ$:

1) $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحوي هذه المعادلة نسبتين ملائمتين، ويلاحظ أن $\sin x$ تكرر في حدي المعادلة، ما يعني أنها تُشَبِّهُ المعادلة $0 = 3y^2 - 2y$; لذا يمكن تحليلها بإخراج عامل مشترك:

$$\sin x(3 \cos x - 2) = 0$$

بإخراج العامل المشترك

$$3 \cos x - 2 = 0, \sin x = 0$$

خاصية الضرب الصفرية

وبذلك أتوصل إلى معادلتين بسيطتين، ثم أحُلُّ كلَّ معادلة على حدةٍ:

$$\sin x = 0$$

المعادلة الأولى

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة

$$3 \cos x - 2 = 0$$

المعادلة الثانية

$$3 \cos x = 2$$

بإضافة 2 إلى الطرفين

$$\cos x = \frac{2}{3}$$

بقسمة الطرفين على 3

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

تعريف معكوس جيب التمام

$$x = 48.2^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

ولأنَّ جيب التمام يكون أيضًا موجًا في الربع الرابع؛ فإنَّ يوجد حل آخر للمعادلة هو:
 $x = 360^\circ - 48.2^\circ = 311.8^\circ$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $0^\circ, 180^\circ, 48.2^\circ, 311.8^\circ$

أتذكر

يكون جيب تمام الزاوية
موجًا في الربعين: الأول،
والرابع.

2) $3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1$

أجعل الطرف الأيمن من المعادلة صفرًا بطرح $(2 \sin x + 1)$ من الطرفين:

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$$

هذه المعادلة تُشَبِّهُ المعادلة الجبرية $0 = 3y^2 - 2y - 1$; لذا يمكن حلُّها بالتحليل إلى العوامل:

$$(3 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$3 \sin x + 1 = 0, \sin x - 1 = 0$$

خاصية الضرب الصفرية

$$3 \sin x + 1 = 0$$

المعادلة الأولى

$$3 \sin x = -1$$

طرح 1 من الطرفين

$$\sin x = -\frac{1}{3}$$

بقسمة الطرفين على 3

$$x = \sin^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right)$$

تعريف معكوس الجيب

$$x = 19.5^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة، وتجاهل الإشارة السالبة

يُمثل ما سبق الزاوية المرجعية للحلّ، لا الحلّ نفسه؛ لأنَّ الجيب سالبٌ في الربعين: الثالث، والرابع.

$$\text{حل هذه المعادلة في الربع الثالث هو: } 180^\circ + 19.5^\circ = 199.5^\circ$$

$$\text{وحلها في الربع الرابع هو: } 360^\circ - 19.5^\circ = 340.5^\circ$$

$$\text{والآن، أحلُّ المعادلة: } \sin x = -1$$

$$\sin x = 1$$

بإضافة 1 إلى الطرفين

$$x = \sin^{-1}(1)$$

تعريف معكوس الجيب

$$x = 90^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$

أتحقق من فهمي

أحلُّ المعادلتين الآتیتين، علمًا بأنَّ $360^\circ \leq x \leq 0^\circ$:

a) $4 \sin x \tan x + 3 \tan x = 0$

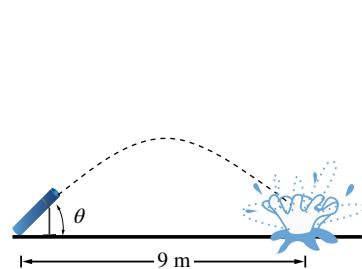
b) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

مثال 4: من الحياة

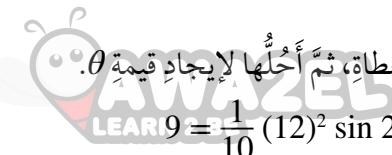
مُدفعٌ هواءٌ يمْلِيُ عن الأرض بزاوية قياسها θ . انطلقَ منْ فوَهِتهِ بالونٌ مملوءٌ بالماء بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها 12 m/s ، فسقطَ على بُعد 9 m منَ المدفع. إذا كانت العلاقة

التي تمثل المسافة الأفقية d التي يقطعُها البالونُ هي:

$$d = \frac{1}{10} v^2 \sin 2\theta$$



حيث v سرعةُ البالون الابتدائية، فما قيمةُ θ ، مُقرّبًا إجابتي إلى أقرب عشر درجة؟



الخطوة 1: أُعَوِّض القيم المعطاة في المسألة في المعادلة المعطاة، ثم أحدها لإيجاد قيمة θ .
 $9 = \frac{1}{10} (12)^2 \sin 2\theta$

الخطوة 2: لتسهيل الحسابات، أفترض أن $2\theta = x$ ، ثم أحـلـ المعادلة:

$$9 = \frac{1}{10} (12)^2 \sin x \quad \text{المعادلة}$$

$$90 = 144 \sin x \quad \text{بضرب الطرفين في 10، والتبسيط}$$

$$\sin x = \frac{90}{144} \quad \text{بقسمة الطرفين على 144}$$

الخطوة 3: أـجـدـ الحلـ الآخرـ في الربع الثانيـ، وهو: $180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ$ باستعمال الآلة الحاسـبةـ، والتقرـيبـ إلى أقربـ عشرـ

الخطوة 4: أـجـدـ الآنـ قيمة θ :
 $x = 2\theta$ **العلاقة بين x و θ**

$$\theta = \frac{38.7^\circ}{2} = 19.4^\circ \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{141.3^\circ}{2} = 70.7^\circ \quad \text{بالقسمة على 2، والتعويض}$$

إذنـ، يصنـعـ المـدـفعـ معـ الأرضـ زـاوـيـةـ قـيـاسـهـاـ 19.4° ، أوـ 70.7° تـقـرـيـباـ.

أتحقق من فهمي

فيزياء: فرق الجهد E (بالفولت) في دارـةـ كـهـربـائـيةـ يـعـطـىـ بـالـعـلـاقـةـ: $E = 20 \cos(180t)$ حيث t الزمن (بالثوانـيـ):

(a) أـفـرـضـ أنـ $t = 180$ ، وأـحـلـ المعـادـلةـ $x = 20 \cos x$ ، عـلـمـاـ بـأنـ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

(b) أـجـدـ الزـمنـ t (حيـثـ $2 \leq t \leq 0$) عـنـدـماـ يـكـونـ فـرقـ الجـهـدـ volt 12، مـقـرـبـاـ إـجـابـتيـ إـلـىـ أـقـرـبـ جـزـءـ مـنـ مـئـةـ مـنـ الثـانـيـةـ.



الكهربـاءـ موجودـةـ في جـسـمـ الإنسـانـ أـيـضاـ؛ فـضـلـاتـ القـلـبـ مـثـلاـ تـنـقـبـضـ بـتأـثـيرـ تـيـارـاتـ كـهـربـائـيةـ تـصلـ إـلـيـهاـ عـبـرـ العـقـدـ وـالـوـصـلـاتـ العـصـبـيةـ.



1 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $7 + 9 \cos x = 1$

5 $2 \sin x + 1 = 0$

6 $1 - 2 \tan x = 5$

أَحْلُّ الْمَعَادِلَاتِ الْآتِيَّةِ، عَلَمًا بِأَنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

7 $5 - 2 \cos(4x) = 4$

8 $3 + 4 \tan(2x) = 6$

9 $13 \sin(3x) + 1 = 6$

أَحْلُّ الْمَعَادِلَاتِ الْآتِيَّةِ، مُفْتَرِضًا أَنَّ قِيَاسَ الزَّاوِيَّةِ الْمُجَهَّوَلَةِ يَقُومُ فِي الْفَتَرَةِ $[0^\circ, 360^\circ]$

10 $2(\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$

11 $\tan x - 3(2 \tan x - 1) = 10$

12 $15 \tan x - 7 = 5 \tan x - 3$

13 $5(\cos x - 1) = 6 + \cos x$

14 $\tan^2 x - 9 \tan x + 20 = 0$

15 $2 \cos^2 x - \cos x = 0$

16 $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$

17 $2 \sin^2 x - 1 = 0$

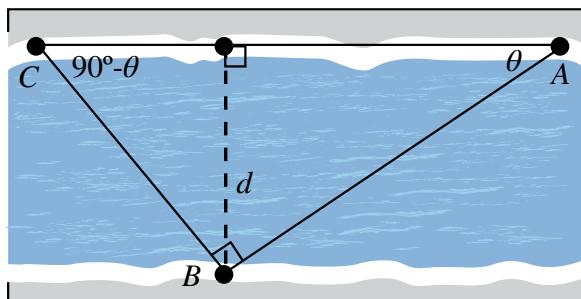
18 $4 \cos^2 x - 4 = 15 \cos x$

19 $\cos x = \sin x$

ساعات: أَحْلُّ الْمَسَائِلَةِ الْوَارَدَةِ فِي بَدَائِيَّةِ الْدُّرُسِ.

20

سباحة: سباح حامد مسافة 90 m من النقطة A على الضفة الشمالية لنهر إلى النقطة B على الضفة المقابلة، ثم دار بزاوية قائمة، وسبح مسافة 60 m إلى نقطة أخرى C على الضفة الشمالية. إذا كان قياس الزاوية CAB هو θ ، وقياس الزاوية ACB هو $(90^\circ - \theta)$ ، وطول العمود من B إلى CA يساوي عرض النهر d، فأُعْبِرْ عن d بدالة θ مرّة، وبدلالة $(90^\circ - \theta)$ مرّة أخرى، ثم أكتب معادلة وأحلّها لإيجاد قيمة θ ، ثم أجد عرض النهر.



الوحدة 3



22 دولاًب: يُعطى ارتفاع الراكب عن الأرض في دولاًب دوار بالمعادلة: $h = 27 - 25\cos \theta$ ، حيث h الارتفاع بالأمتار، و θ قياس الزاوية التي دارها الدولاًب. متى يكون ارتفاع الراكب عن الأرض 49 m؟

23 حركة مقدوفات: المسافة الأفقية التي تقطعها مقدوفة في الهواء (من دون افتراض وجود مقاومة الهواء) تُعطى بالمعادلة: $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ ، حيث: v_0 السرعة الابتدائية، و θ الزاوية التي تطلق بها المقدوفة، و g تسارع الجاذبية الأرضية (9.8 m/s²). إذا قُذفَت كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 40 m/s، فما الزاوية التي توجَّه بها الرمية لكي تقطع الكرة مسافةً أفقيةً مقدارها 110 m قبل سقوطها على الأرض؟ ما بعد نقطة يمكن أن تصطدم بها الكرة إذا قُذفَت بهذه السرعة الابتدائية؟

مهارات التفكير العليا



24 أكتشف الخطأ: حل كل من علياء وسمير المعادلة: $2\sin x \cos x = \sin x$ ، حيث: $0^\circ \leq x < 360^\circ$ ، حيث:

سمير

الحلان هما: $60^\circ, 300^\circ$ لأن:

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ, 300^\circ$$

علياء

الحلول هي: $0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ لأن:

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0^\circ, 180^\circ$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ, 300^\circ$$

أيهما إجابة صحيحة؟ أبُرِّز إجابتي.

25 تحدّ: أُحلُّ المعادلة: $2 \sin x \cos x + \sin x + 2 \cos x + 1 = 0$ ، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

26 تحدّ: أُحدِّد عدد حلول المعادلة: $\cos x - \sin x - 1 = 0$ ، حيث: $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

اختبار نهاية الوحدة



أَجِدُ النسبَ المثلثيةُ الأساسيةَ للزاوية x المرسومةَ في الوضعِ القياسيّ، التي يقطعُ ضلُعَ انتهائِها دائرةً الوحدةَ عندَ كُلِّ النقاطِ الآتيةِ:

6) $(0.6, 0.8)$

7) $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

8) $(-1, 0)$

9) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

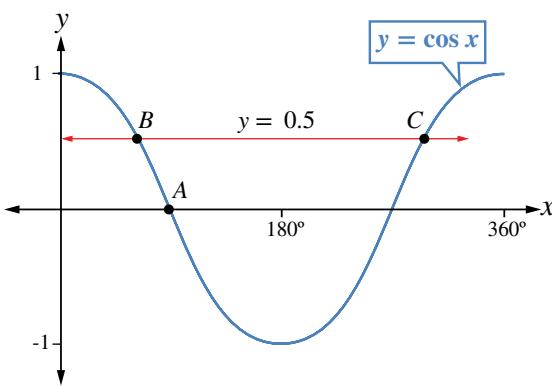
10) $(0, 1)$

11) $(-0.96, 0.28)$

يُبيّنُ الشكُلُ التالي جزءاً من التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المثلثيِّ $y = \cos x$ = $\cos x$ الذي يقطعُهُ المستقيمُ $0.5 = y$ في نقطتينِ C و B :

أَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ A . 12)

أَجِدُ إحداثياتِ النقطتينِ B ، و C . 13)



أَجِدُ النسبَ المثلثيةُ الأساسيةَ المتبقيةَ في كُلِّ ممّا يأتيِ:

14) $\sin x = \frac{-1}{2}$, $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$

15) $\cos x = 0.4$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

16) $\tan x = 3$, $180^\circ \leq x \leq 360^\circ$

17) $\sin x = -\cos x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

أَضْعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتيِ:

إذا كانَ $\cos \theta = -0.5$, فإنَّ ضلُعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في

الوضعِ القياسيّ يقعُ في:

(a) الربعِ الثاني. (b) الربعِ الثالث.

(c) الربعِ الرابع. (d) الربعِ الثاني، والرابعِ.

إذا قطعَ ضلُعَ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيّ دائرةً

الوحدةَ في النقطةِ P , فإنَّ قيمةَ $\sin \theta$ هي:

a) $-\frac{40}{41}$

b) $\frac{9}{40}$

c) $-\frac{9}{41}$

d) $\frac{9}{41}$

قياسُ الزاويةِ المرجعيةِ للزاويةِ 230° هو:

a) 130°

b) 40°

c) 50°

d) 140°

إذا كانتْ $\sin x = \frac{8}{17}$, وكانَ $90^\circ < x < 180^\circ$, فإنَّ

قيمةَ $\tan x$ هي:

a) $-\frac{8}{15}$

b) $\frac{8}{15}$

c) $\frac{15}{17}$

d) $-\frac{15}{8}$

حُلُّ المعادلةِ $x = \sin^{-1}(-1)$ هو:

a) 0°

b) 90°

c) 270°

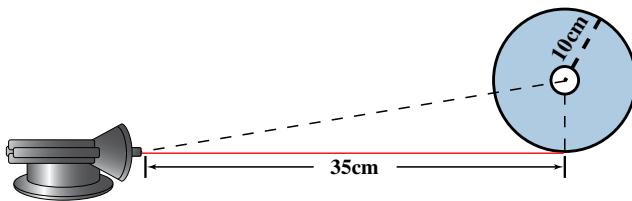
d) 360°

اختبار نهاية الوحدة

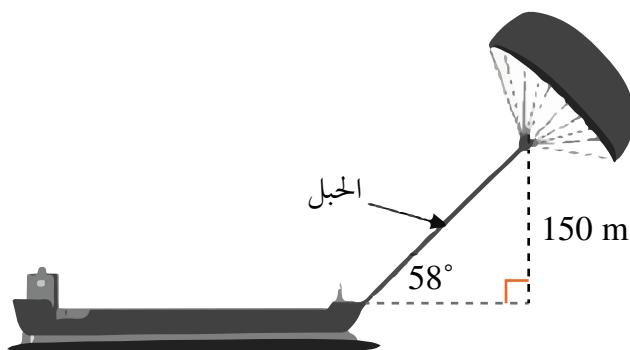
تدريب على الاختبارات الدولية



- 32** في تجربة علوم لاكتشاف خصائص الضوء، وُضع مصدر ضوئي ليزري على بُعد 35 cm من قرص دائري مثقوب من مركزه، وكان طول نصف قطره 10 cm كما في الشكل الآتي. أجد زاوية الشعاع الذي يمر خلال ثقب مركز هذا القرص.



- 33** لاستغلال طاقة الرياح وخفض استهلاك الوقود، رُبط شراع طائر بسفينة، ما الطول المناسب لحب الشراع كي يسحب السفينة بزاوية 58°، ويكون الشراع على ارتفاع رأسى مقداره 150 m كما هو مبين في الشكل الآتي:



- a) 177 m
- b) 283 m
- c) 160 m
- d) 244 m

أجد قيمة كل مما يأتي:

- 18** $\sin 140^\circ$ **19** $\cos 173^\circ$
20 $\tan 219^\circ$ **21** $\sin 320^\circ$
22 $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$
23 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$

أجد حل المعادلات الآتية، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

- 24** $3 \cos^2 x - 1 = 0$
25 $\sin x = -1.3212 \cos x$
26 $4 + 5 \sin^2 x = 9 \sin x$
27 $\tan x = 4 \sin x$
28 $3 \tan^2 x \cos x = 3 \tan^2 x$

- 29** إذا كانت x زاوية في الربع الأول، وكان $\sin x + \sin(180^\circ - x) = 1.4444$ فاجد قياس الزاوية x .

- 30** **لعبة مدفع:** يطلق مدفع قذائف بالونات مائية في مسابقة للتسليه. إذا كان البعد الأفقي لقذيفة أطلقت من المدفع بزاوية قياسها x مع المستوى الأفقي، وبسرعة ابتدائية مقدارها 7 m/s، يعطى بالأمتار حسب العلاقة: $d = 7 + 2 \sin\left(\frac{3x}{5}\right)$ قذيفة أطلقت بزاوية مقدارها 50°؟

- 31** أجد أصفار الاقتران $y = 4(\sin x)^2 - 3$ ، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

تطبيقات المثلثات

Triangle Applications



ما أهمية
هذه الوحدة؟

للنسب المثلثية استعمالات كثيرة في العلوم، والهندسة، والإلكترونيات، مثل حساب ارتفاعات قمم الجبال والمباني، وتحديد اتجاهات تحليق الطائرات على الخريطة وغيرها.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ تفسير الاتجاه من الشمال، وإيجاده لنقطة ما بالنسبة إلى نقطة معينة.
- ◀ حل المثلث باستخدام قانوني الجيب، وجيب التمام، والظل.
- ◀ استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- ◀ إيجاد أطوال زوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد.

تعلمت سابقاً:

- ✓ إيجاد النسب المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل) في الأرباع الأربعة.
- ✓ استخدام العلاقة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ في حل مسألة عن مثلث قائم الزاوية.
- ✓ نمذجة مسائل حياتية باستخدام مثلثات قائمة الزاوية، تتضمن قياسات الزوايا والأطوال لأضلاع مجهولة.

مشروع الوحدة



صنع كلينومتر واستعماله

صنع جهاز بسيط لإيجاد قياسات زوايا الارتفاع والانخفاض، ثم استعماله.

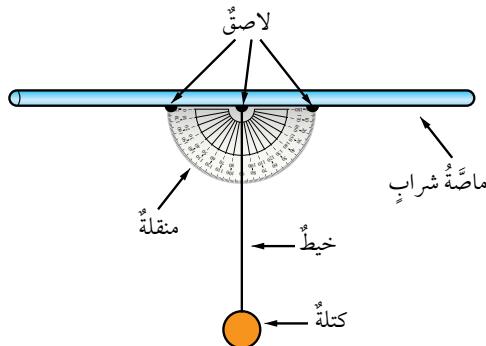
فكرة المشروع



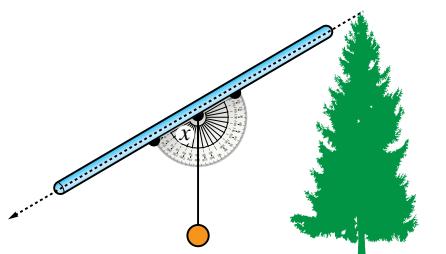
المواد والأدوات

ماصة شراب، منقلة، خيط، كتلة (مفتاح، أو ممحاة)، لاصق شفاف، شريط فايس.

خطوات تنفيذ المشروع:



1 صنع الكلينومتر: أثبتت ماصة الشراب على الحافة المستقيمة للمنقلة باستعمال لاصق شفاف، ثم أثبتت طرف الخيط في مركز المنقلة، وأربط بطرفه الآخر كتلة صغيرة، مثل: المفتاح، أو المشابك المعدنية، على أن تتدلى رأسياً إلى أسفل مثل خط الشاقول.



2 استعمال الكلينومتر: أستعمل أنا وأفراد مجروعي الكلينومتر لإيجاد ارتفاع بناية أو شجرة باتباع الخطوات الآتية:

- اختار شيئاً لأقيس ارتفاعه، ولتكن شجرة.

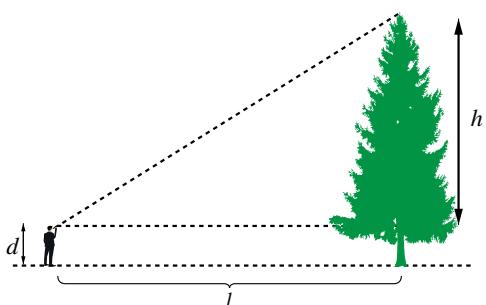
● أقف على مسافة من قاعدة الشجرة، مميسكاً بماصة الشراب.

● انظر من فتحة ماصة الشراب إلى قمة الشجرة، ثم أطلب إلى زميلي/ زميلتي أن يقرأ الزاوية x التي يشير إليها الخيط، ملاحظاً أن هذه الزاوية تقع بين خط النظر والخط الرأسي. وبذلك، تكون زاوية ارتفاع قمة الشجرة: $(90^\circ - x)$.

● أقيس المسافة بين المكان الذي أقف عنده وقاعدة الشجرة.

● أستعمل القياسات التي دوّنها لإيجاد ارتفاع الشجرة فوق مستوى عيني، باستعمال العلاقة الآتية:

$$\tan(90^\circ - x) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \tan(90^\circ - x)$$



- أضيف المسافة بين الأرض ومستوى عيني إلى القيمة التي توصلت إليها لإيجاد ارتفاع الشجرة فوق سطح الأرض.

عرض النتائج:

أكتب مع أفراد مجروعي تقريراً يتضمن ما يأتي:

- صورة لجهاز الكلينومتر المصنوع.

- صور لجميع الأشياء التي قياس ارتفاعاتها، وتدوين الحسابات التي تم في أثناء القياس بجانب كل منها.

الاتجاه من الشمال

Bearing



تفسير الاتجاه من الشمال، وإيجاده لنقطة ما بالنسبة إلى نقطة أخرى بالرسم، والقياس، والحساب
باستعمال العلاقات بين الزوايا.



فكرة الدرس



الاتجاه من الشمال

المصطلحات

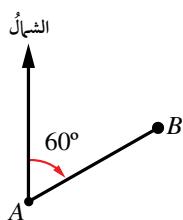


حلقت طائرة من عمان إلى العقبة، وقد صنع مسارها المستقيم زاوية قياسها 200° مع خط الشمال الجغرافي. ما قياس الزاوية بين مسار عودة الطائرة إلى عمان وخط الشمال الجغرافي؟

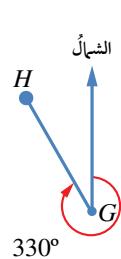
مسألة اليوم



الاتجاه من الشمال (bearing) للنقطة B من النقطة A هو قياس الزاوية التي ضلع ابتدأها خط الشمال الجغرافي المرسوم من النقطة A ، وضلع انتهائهما المستقيم AB ، وذلك عند قياس الزاوية في اتجاه حركة عقارب الساعة. يكتب الاتجاه من الشمال باستعمال عدد من ثلاثة أرقام (منازل) بين 000° و 360° .

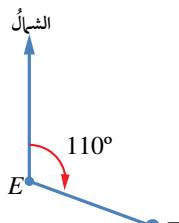


يُبيّن الشكل المجاور أنَّ الاتجاه من الشمال للنقطة B من النقطة A هو 060° .



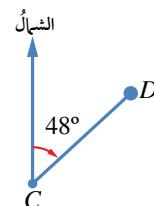
الاتجاه من الشمال للنقطة H من النقطة G

هو 330° .



الاتجاه من الشمال للنقطة F

من النقطة E هو 110° .



الاتجاه من الشمال للنقطة D

من النقطة C هو 048° .

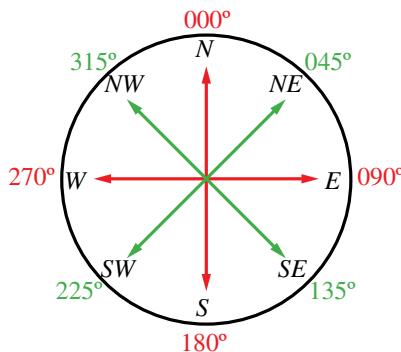


يُستخدم الاتجاه من الشمال كثيراً في تحديد خطوط الملاحة البحرية والجوية.



توجد أربعة اتجاهات رئيسية يجب تذكرها دائمًا، هي:

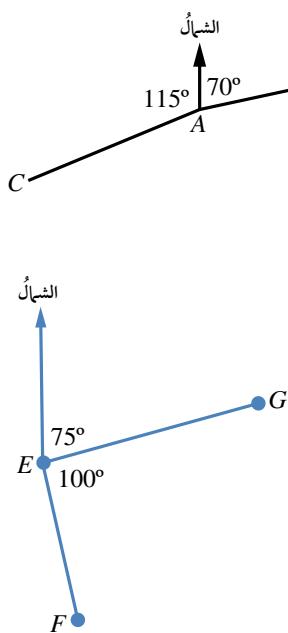
1. الشمال (*N*)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (000°) .
2. الشرق (*E*)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (090°) .
3. الجنوب (*S*)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (180°) .
4. الغرب (*W*)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (270°) .



اعتمد الإنسان قديماً على الشمس والقمر والنجوم في معرفة الاتجاهات، ثم أخذ يعتمد اليوم على البوصلة التي تحدد اتجاه الشمال، ومنه تحدد بقية الاتجاهات.

توجد أربعة اتجاهات أخرى مشهورة تقع بين الاتجاهات الأربع الرئيسية يجب تذكرها دائمًا، هي:

1. الشمال الشرقي (*NE*), واتجاهه من مركز البوصلة هو (045°) .
2. الجنوب الشرقي (*SE*), واتجاهه من مركز البوصلة هو (135°) .
3. الجنوب الغربي (*SW*), واتجاهه من مركز البوصلة هو (225°) .
4. الشمال الغربي (*NW*), واتجاهه من مركز البوصلة هو (315°) .



مثال 1

يُمثّل الشكل المجاور موقع ثلاث مدن، هي: *A* و*B* و*C*. أكتب اتجاه المدينة *B* من المدينة *A* واتجاه المدينة *C* من المدينة *A*.

اتجاه المدينة *B* من المدينة *A* هو 070° ، واتجاه المدينة *C* من المدينة *A* هو $360^\circ - 115^\circ = 245^\circ$

أتحقق من فهمي

يُمثّل الشكل المجاور موقع ثلاث سفن، هي: *E* و*F* و*G*. أكتب اتجاه السفينة *G* من السفينة *E*، واتجاه السفينة *F* من السفينة *E*.

أتعلم

سنستعمل في بقية الدرس كلمة (اتجاه) وحدتها الدلالية على اتجاه من الشمال.

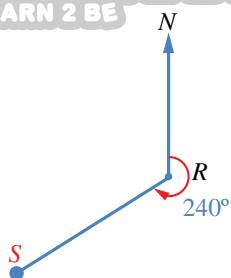
إذا علِمَ اتجاه النقطة S من النقطة R ، فُيمَكِّن حساب اتجاه النقطة R من النقطة S .



مثال 2

أَجِد اتجاه النقطة R من النقطة S في الشكل المجاور.

الطريقة الأولى: استعمال الرسم.



أَرْسَمْ خَطًّا رَأْسِيًّا يُبَيِّنُ اتجاهَ الشَّمَالِ الجُغرَافِيِّ

عَنْدَ النَّقْتَةِ S ، ثُمَّ أَسْتَعْمَلُ مِنْقَلَةً لِأَقِيسِ الزَّاوِيَةِ

الَّتِي رَأَسُهَا S ، وَضَلَّاعَاهَا خَطُّ الشَّمَالِ (SN)

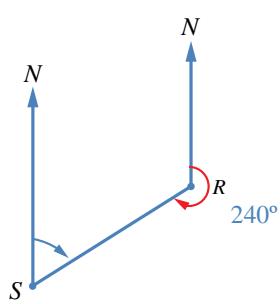
وَالْمُسْتَقِيمُ SR .

سَأَجُدُّ أَنَّ قِيَاسَ هَذِهِ الزَّاوِيَةِ هُوَ 60° ، إِذْنَ، اتجاهُ

النَّقْتَةِ R مِنَ النَّقْتَةِ S هُوَ 060° .



مرِيمُ الْجِيلِيُّ هِيَ عَالِمَةٌ
رِيَاضِيَاتٍ وَفَلَكِيَّ مُسْلِمَةٌ
عَاشَتْ فِي حَلَبْ زَمْنَ
الدُّولَةِ العَبَاسِيَّةِ، وَاخْتَرَعَتْ
الْأَسْطَرَلَابَ الْمُعَقَّدَ؛ وَهُوَ آلَةٌ
فَلَكِيَّ مُهِمَّةٌ بُنِيَتْ عَلَيْهَا آلَيَّ
عَمَلٌ أَنْظَمَّ الْمَلاَحَةِ الْحَدِيثَةِ
(GPS).



الطريقة الثانية: استعمال الجبر.

يُمْكِنُ إِيجادُ اتجاهِ النَّقْتَةِ R مِنَ النَّقْتَةِ S باسْتِعْمَالِ الْعَلَاقَاتِ بَيْنَ الزَّوَالِيَّا.

$$m \angle NRS = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

مُجَمُوعُ قِيَاسِ الزَّوَالِيَّا حَوْلَ نَقْطَةِ
360°

$$m \angle NSR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

خَطُّ الشَّمَالِ مُتَوَازِيَانِ؛ لِذَلِكَ،
فَالْأَزْوَالِيَّاتِ الدَّاخِلِيَّاتِ
 NSR وَ NRS مُتَكَامِلَتَانِ

أتحقق من فهمي

إذا كان اتجاه النقطة X من النقطة Z هو 295° ، فما اتجاه النقطة Z من النقطة X ؟

أنذكر

الزاوياتان المتكاملتان
هما زاوياتان مجموع
قياسيهما 180°

مثال 3: من الحياة



أَسْتَعْمِلُ الْخَرِيطَةَ الْمُجَاوِرَةَ لِتَحْدِيدِ اِتِّجَاهِ الْعَاصِمَةِ عَمَانَ مِنْ مَدِينَةِ الْقَدِيسِ الشَّرِيفِ.

الخطوة 1: أَرْسِمْ قطْعَةً مُسْتَقِيمَةً بَيْنَ مَدِينَتَيِّ الْقَدِيسِ الشَّرِيفِ وَعَمَانَ.



الخطوة 2: أَرْسِمْ خَطًّا رَأْسِيًّا يُبَيِّنُ اِتِّجَاهَ الشَّمَالِ الْجَعْرَافِيِّ عَنْدَ مَدِينَةِ الْقَدِيسِ الشَّرِيفِ.



الخطوة 3: أَسْتَعْمِلُ الْمَنْقَلَةَ لِإِيجَادِ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ بَيْنَ خَطَّ الشَّمَالِ الْجَعْرَافِيِّ وَالْقَطْعَةِ المُسْتَقِيمَةِ الْوَاقِلَةِ بَيْنَ الْمَدِينَتَيْنِ بَاتِّجَاهِ حَرْكَةِ عَقَارِبِ السَّاعَةِ. سَأَجِدُ أَنَّ قِيَاسَ هَذِهِ الزَّاوِيَةِ هُوَ 78°

إِذْنُ، اِتِّجَاهُ الْعَاصِمَةِ عَمَانَ مِنْ مَدِينَةِ الْقَدِيسِ الشَّرِيفِ هُوَ 078° .

تُعَدُّ مَدِينَةُ الْقَدِيسِ وَاحِدَةٌ مِنْ أَقْدَمِ مَدَنِ الْعَالَمِ؛ فَتَارِيخُهَا يَرْجُعُ إِلَى أَكْثَرِ مِنْ خَمْسَةِ آلَافِ سَنَةٍ. وَلِلْقَدِيسِ أَسْمَاءُ عَدِيدَةٌ، مِنْهَا: بَيْتُ الْمَقْدِسِ، وَأُولَئِي الْقِبْلَتَيْنِ، وَالْقَدِيسُ الشَّرِيفُ.

أَتَحْقِقُ مِنْ فَهْمِي

أَسْتَعْمِلُ الْخَرِيطَةَ فِي الْمَثَالِ السَّابِقِ لِتَحْدِيدِ اِتِّجَاهِ مَدِينَةِ حِيفَا مِنْ مَدِينَةِ الْقَدِيسِ الشَّرِيفِ.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلِي الْمَسَائِلَ

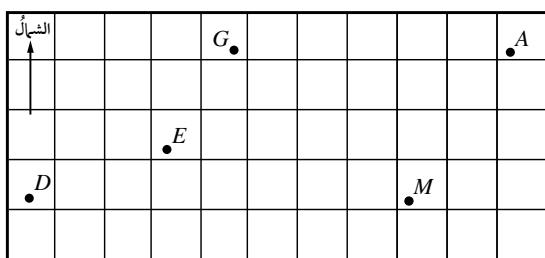


أَجِدُ كَلَّا مِنَ الْاتِّجَاهَاتِ الْآتِيةِ بِاستِعْمَالِ الْمَنْقَلَةِ:

1. اِتِّجَاهُ النَّقْطَةِ D مِنَ النَّقْطَةِ E .

2. اِتِّجَاهُ النَّقْطَةِ G مِنَ النَّقْطَةِ A .

3. اِتِّجَاهُ النَّقْطَةِ M مِنَ النَّقْطَةِ D .



أرسم شكلًا يوضح كلًّ موقفي مما يأتي:

اتجاه النقطة C من النقطة H هو 170° . 4

أرسم شكلًا لحل المسائل الآتية:

اتجاه A من B هو 070° . أجد اتجاه B من A . 6

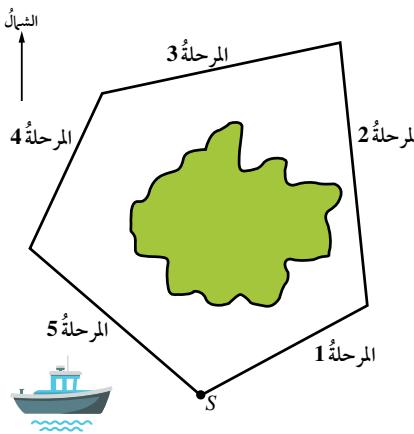
تقع النقطة A شمالي النقطة C ، وتقع النقطة B شرقي النقطة A ، واتجاه النقطة B من النقطة C هو 045° . أرسم شكلًا يبيّن موقع النقاط الثلاث. 8

ملاحة بحرية: أبحر قارب حول الأضلاع الأربع لمربع مساحته كيلو متر مربع واحد:

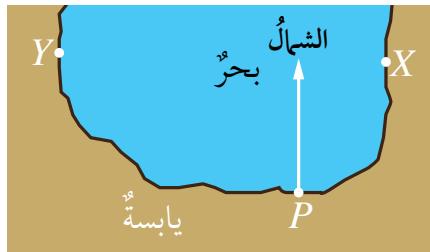
إذا بدأ الإبحار في اتجاه الشمال، فما الاتجاهات الثلاثة التالية التي سلكها حتى أكمل رحلته حول المربع باتجاه حركة عقارب الساعة؟ 9

إذا بدأ الإبحار في اتجاه 090° ، فما الاتجاهات الثلاثة التالية التي سلكها حتى أكمل رحلته حول المربع بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة؟ 10

خرائط: تبين الخريطة الآتية رحلة قارب حول إحدى الجزر، بدأت من الموقع S ، وانتهت عنده. إذا كان كل 1 cm على الخريطة يمثل 20 km ، فما طول كل مرحلة من مراحل الرحلة واتجاهها؟ أنسخ الجدول الآتي، ثم أكمله: 11



المرحلة	المسافة الحقيقية	الاتجاه
1		
2		
3		
4		
5		



موانئ: يبيّن المخطط المجاور الميناء P والمرفأين X و Y على الساحل:

أبحر قارب صيد من الميناء P إلى المرفأ X . ما اتجاه المرفأ X من الميناء P ؟ 12

أبحر يخت من الميناء P إلى المرفأ Y . ما اتجاه المرفأ Y من الميناء P ؟ 13



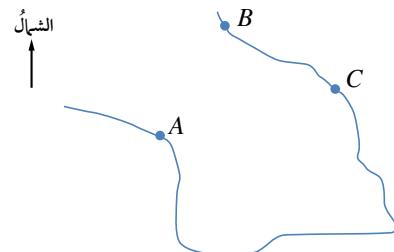
موقع جغرافية: يُبيّن المُخطّطُ المجاورُ موقعَ بيتِ أريجٍ عندَ النقطةِ H والناديِ الرياضيِّ الذي ترتأدُه عندَ النقطةِ C :

14 أَستعملُ مقاييسَ الرسمِ المعطى لإيجادِ المسافةِ الحقيقيةِ بينَ بيتِ أريجٍ والناديِ الرياضيِّ.

15 أَستعملُ منقلةً لإيجادِ اتجاهِ الناديِ منْ بيتِ أريجٍ.

16 يبعدُ السوقُ التجاريُّ S مسافةً 600 m عنْ بيتِ أريجٍ، وباتجاهٍ 150° منْ بيتها. أُعيّنُ موقعَ السوقِ التجاريِّ S على نسخةِ المُخطّطِ.

17 **ملاحةٌ جوية:** في أثناءِ تحليق طائرةٍ باتجاهٍ 072° ، طُلبَ إلى قائدها التوجُّهُ إلى مطارٍ صوبَ الجنوبِ. ما الزاويةُ التي سيستديرُ بها؟



18 **خرائط:** تمثّلُ A و B و C ثلثَ قرَى تقعُ على رؤوسِ مربَّعٍ في خليجٍ ما. إذا كانَ اتجاهُ القريةِ B منَ القريةِ A هو 030° ، فما اتجاهُ القريةِ A منَ القريةِ C ؟

19 أَجِّلُ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا

20 **مسألةٌ مفتوحة:** أرسمُ مثلثًا ذا قاعدةٍ أفقيةٍ أُسَمِّيهُ ABC ، ثُمَّ أقيِسُ زواياهُ، ثُمَّ أَجِدُ اتجاهَ A منْ B ، واتجاهَ C منْ A .

. B منْ C

تحدد: أبحرَتْ سفينةٌ منَ الميناءِ P مسافةً 57 km باتجاهِ الشمالِ، ثُمَّ تحولَتْ إلى اتجاهٍ 045° ، وقطعَتْ مسافةً 38 km. إذا كانَ موقعُ السفينةِ الحاليُّ هو S ، فاجِدُ:

. SP 21

اتجاهَ موقعِ السفينةِ منَ الميناءِ P . 22

قانون الجيب

Law of Sines



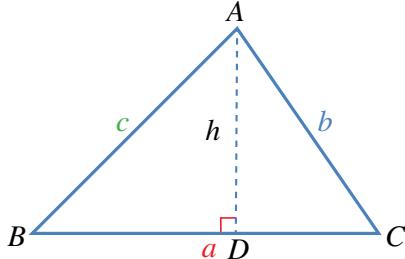
استعمال قانون الجيب لإيجاد طول ضلع، أو قياس زاوية في مثلث، علماً فيه ضلعان وزاوية مقابلة لأحد هما، أو زاويتان وضلع.



حلّ المثلث، قانون الجيب.

إذا كانت جرش والزرقاء ومأدبا تشكل رؤوس مثلث على الخريطة، والمسافة بين مدینتی الزرقاء وجرش 44 km، وقياس الزاوية التي تقع عند رأسها مدینة جرش 52° ، وقياس الزاوية التي تقع عند رأسها مدینة الزرقاء 93° ، فهل يمكن بهذه المعلومات حساب المسافة بين مدینتی جرش ومأدبا؟

يوجُد في أيّ مثلث سُتُّ قياساتٍ، هي: ثلاثة أضلاع، وثلاث زوايا. وإيجاد هذه القياسات يُعرف باسم حلّ المثلث (solving a triangle)؛ إذ تساعد قياسات الزوايا على حلّ المثلثات في حال كانت بعض قياساتها معروفةً، وذلك باستعمال نسبة الجيب لإيجاد علاقاتٍ بين أطوال الأضلاع.



ففي المثلث ABC المرسوم جانبًا، يمثل h الارتفاع من النقطة A ؛ لذا فهو عمودي على القاعدة \overline{BC} .

يمكن الاستفادة من تعريف الجيب في استنتاج بعض العلاقات كما يأتي:

$$\sin B = \frac{h}{c}$$

تعريف الجيب

$$h = c \sin B$$

بالضرب التبادلي

$$\sin C = \frac{h}{b}$$

تعريف الجيب

$$h = b \sin C$$

بالضرب التبادلي

$$c \sin B = b \sin C$$

بالمساواة

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

بقسمة الطرفين على $\sin B$ ، ثم على $\sin C$

فكرة الدرس



المصطلحات



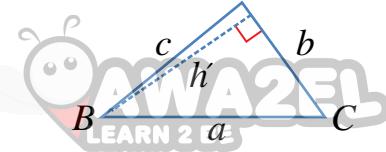
مسألة اليوم



رموز رياضية

تشير الأحرف الكبيرة A, B, C إلى رؤوس المثلث وزواياه، في حين تشير الصغيرة منها a, b, c إلى أطوال الأضلاع. فمثلاً، طول الضلع المقابل للزاوية A يشار إليه بالحرف a وهكذا.

الوحدة 4



وبالمثل، يمكن استنتاج العلاقات الآتية عند رسم ارتفاع المثلث من النقطة B بشكل عمودي على AC ، أو رسم ارتفاعه من النقطة C عمودياً على AB .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عند دمج هذه العلاقات الثلاث معاً، ينبع **قانون الجيب** (law of sines).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يُستعمل قانون الجيب لحل المثلث الذي علّمْت ثلاثة من قياساته، وذلك في الحالتين الآتى:

أمثلة

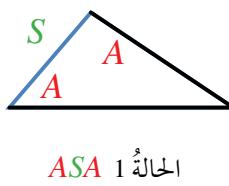
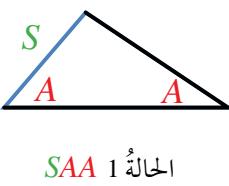
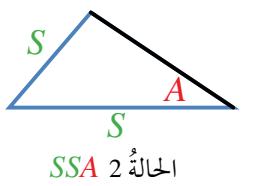
لماذا يتعدّد حل المثلث الذي علّمْت فقط قياسات زواياه جميعاً؟

الآتى:

1) ضلّع واحد وزاويتان (ASA ، أو SAA).

2) ضلّاعان وزاوية مقابلة لأحد هما (SSA).

يُبيّن الشكل الآتى هاتين الحالتين:

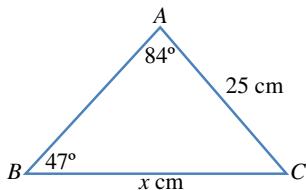


إرشاد

توجد صيغة أخرى لقانون الجيب هي:
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

إرشاد

- الحرف S هو اختصار **Side**، وتعني الصلع.
- الحرف A هو اختصار **Angle**، وتعني الزاوية.



مثال 1
أجد قيمة x في المثلث ABC .

قانون الجيب

بضرب الطرفين في $\sin 84^\circ$

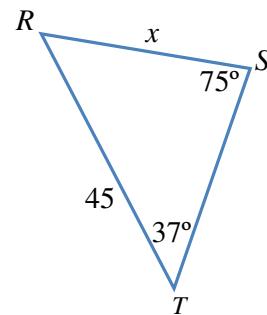
باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

$$\frac{x}{\sin 84^\circ} = \frac{25}{\sin 47^\circ}$$

$$x = \frac{25 \sin 84^\circ}{\sin 47^\circ}$$

$$\approx 34 \text{ cm}$$



أجد قيمة x في المثلث RST المُبيَّن جانباً.

يمكن أيضًا استعمال قانون الجيب لإيجاد قياس زاوية مجهولة في المثلث.

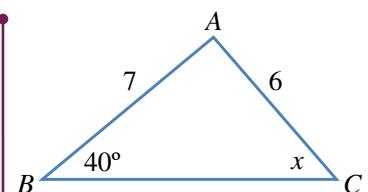


مثال 2

أجد قيمة x في المثلث ABC .

قانون الجيب

بضرب الطرفين في 7



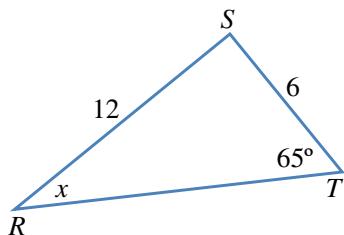
$$\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40^\circ}{6}$$

$$\sin x = \frac{7 \sin 40^\circ}{6}$$

$$\approx 0.7499$$

$$x = \sin^{-1}(0.7499)$$

$$\approx 48.6^\circ$$



معكوس الجيب

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

أجد قيمة x في المثلث RST .

أتعلم

توجد قيمتان

لـ $\sin^{-1} 0.7499$ ضمن

الدورة الواحدة هما

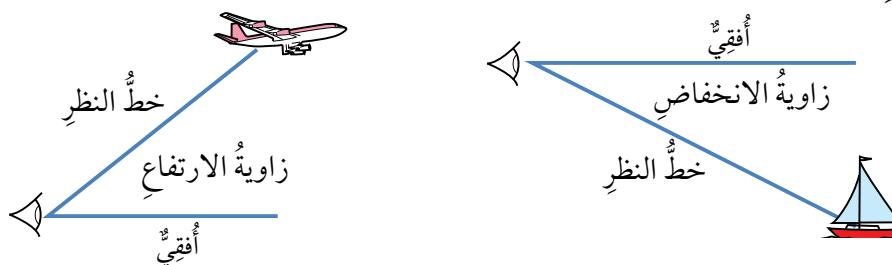
48.6° و 131.4° ، نختار

مِنْهُما القيمة 48.6° لأنَّ

الزاوية x تبدو حادةً في

الشكل المعطى.

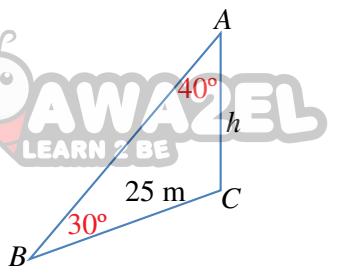
عندما نظر إلى طائرة في السماء، فإنَّ الزاوية المحصورة بين الخط الواصل بين عيني والطائرة وخط نظري أفقياً تسمى زاوية الارتفاع. وإذا وقفت على تلة ساحلية، ثمَّ نظرت إلى قارب أسفل مني، فإنَّ الزاوية المحصورة بين الخط الواصل بين عيني والقارب وخط نظري أفقياً تسمى زاوية الانخفاض. ولها تين زاويتين أهمية كبيرة عند حل المسائل الحياتية باستعمال النسب المثلثية.



مثال 3: من الحياة

يقع برج ارتفاعه h متر على تلة، وقد رصدت قمة البرج A من النقطة B التي تبعد عن قاعدة البرج 25 m فكان قياس زاوية ارتفاعها 50° ، ثمَّ رُصدت قمة التلة من النقطة B نفسها فكان قياس زاوية ارتفاعها 20° . ما ارتفاع البرج h ؟





أَجِدُ أَوْلًا قياسَ الزاوِيَةِ $:ABC$

$$m\angle ABC = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

ثُمَّ أَجِدُ قياسَ الزاوِيَةِ $:BAD$

$$m\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

ارتفاع البرج هو طول الضلع AC في المثلث BAC . أَسْتَعْمِلُ قانُونَ الْجِيُوبِ لِحَلِّ هَذَا المثلث.

بعد ذلك أَسْتَعْمِلُ قانُونَ الْجِيُوبِ فِي المثلث BAC لِإِيجَادِ ارتفاعِ البرجِ:

$$\frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{25}{\sin 40^\circ}$$

قانُونُ الْجِيُوبِ

$$h = \frac{25 \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$$

بِضَربِ الْطَرْفَيْنِ فِي $\sin 30^\circ$

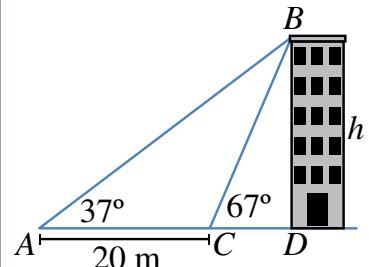
$$h \approx 19.45 \text{ m}$$

بِاستِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبِيَّةِ

إِذْنُ، ارتفاعُ البرجِ هُو: 19.45 m

أَتَحَقَّقَ مِنْ فَهْمِي

رصَدَ لَيْثٌ زاوِيَةً قَمَّةَ بَنَاءً مِنَ النَّقْطَةِ A ، فَكَانَتْ 37° ، ثُمَّ سَارَ مَسَافَةً 20 m باتِّجَاهِ الْبَنَاءِ حَتَّى النَّقْطَةِ C ، ثُمَّ رَصَدَ زاوِيَةً قَمَّةَ الْبَنَاءِ، فَكَانَتْ 67° . أَجِدُ ارتفاعَ الْبَنَاءِ.



مثال 4: من الحياة

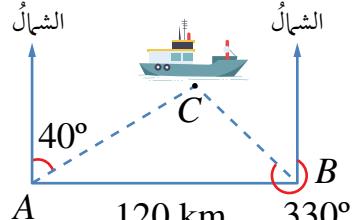
التقطَتْ محطةً خَفْرِ السَّواحلِ A وَ B نَداءً استغاثَةً مِنْ سَفِينَةٍ عَنْدَ النَّقْطَةِ C فِي الْبَحْرِ، وَقُدِّ حَدَّدَتِ الْمَحَطَّةُ A اِتِّجَاهَ السَّفِينَةِ عَنْدَ 040° ، وَحَدَّدَتِ الْمَحَطَّةُ B اِتِّجَاهَ السَّفِينَةِ عَنْدَ 330° . إِذَا كَانَتِ B شَرْقِيَّ A وَكَانَتِ الْمَسَافَةُ بَيْنَ الْمَحَطَّتَيْنِ 120 km ، فَكُمْ تَبَعُدُ السَّفِينَةُ عَنِ الْمَحَطَّةِ A ؟

يَجُبُ أَوْلًا إِيجَادُ قياسَ الزاوِيَةِ $:C$:

قياسُ الزاوِيَةِ BAC هُو: 50° (لأنَّها مُتَمَمَّةٌ لِلزاوِيَةِ التي قياسُها 40°).

وَقِياسُ الزاوِيَةِ ABC هُو: 60° ($330^\circ - 270^\circ = 60^\circ$ لأنَّ $330^\circ - 270^\circ = 60^\circ$). إذْنَ:

$$m\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$



ثم استعمال قانون الجيوب:

قانون الجيوب

بالتعويض

بضرب الطرفين في $\sin 60^\circ$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ}$$

$$b = \frac{120 \times \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\approx 110.59 \text{ km}$$

أتحقق من فهمي

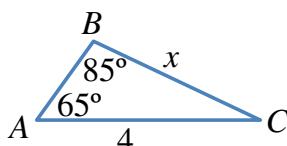
أجد بعد السفينة عن المحطة B في المثال السابق.

أتدرب وأحل المسائل

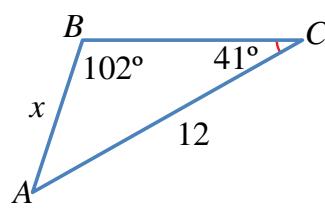


أجد قيمة x في كل من المثلثات الآتية:

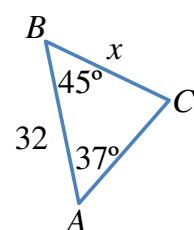
1



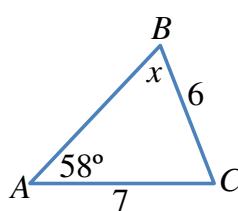
2



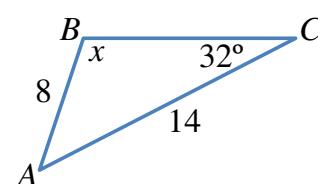
3



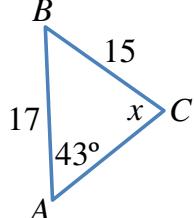
4



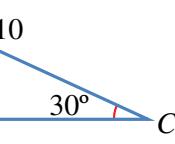
5



6



A



أجد قياس الزاوية المنفرجة CBA في الشكل المجاور.

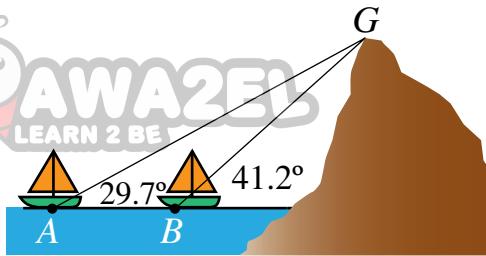
7

خرائط: أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

8

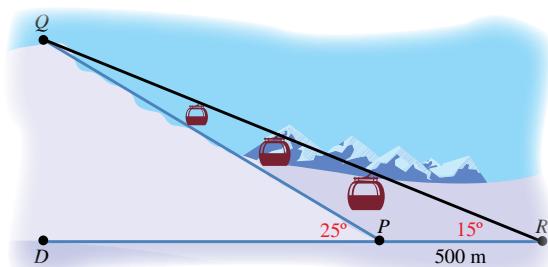
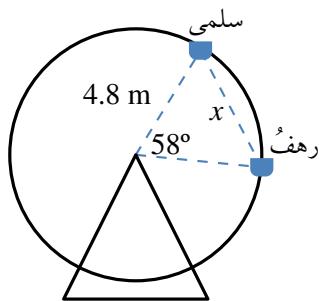
الوحدة 4

٩ بحاز: ترصد سفيتان في البحر قمة جبل كما في الشكل المجاور. إذا كانت المسافة بين السفينتين 1473 m، فما ارتفاع الجبل من مستوى سطح البحر؟

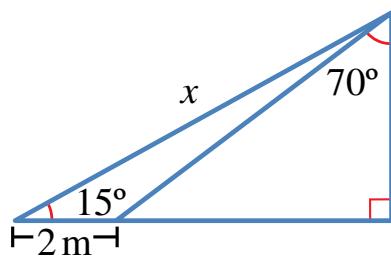


١٠ علم الفلك: رصد عامر وهشام من متلهمما نجما في السماء في اللحظة نفسها. إذا كانت زاوية رصد هشام للنجم 49.8974°، وزاوية رصد عامر له 49.9312°، والمسافة بين متلهمما 300 km، فلقد بُعد النجم عن الأرض.

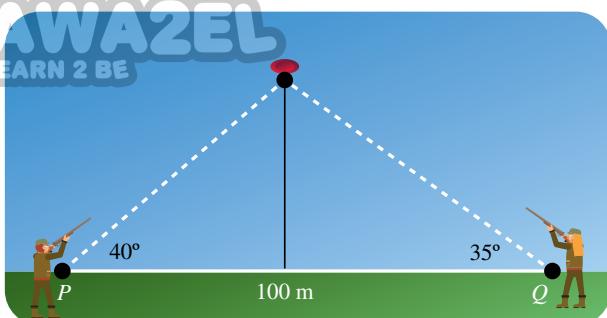
١١ مدينة الألعاب: في مدينة الألعاب، جلس سلمى ورهف على مقعدين منفصلين في لعبة الدوّار كما في الشكل المجاور. أجد المسافة x بينهما.



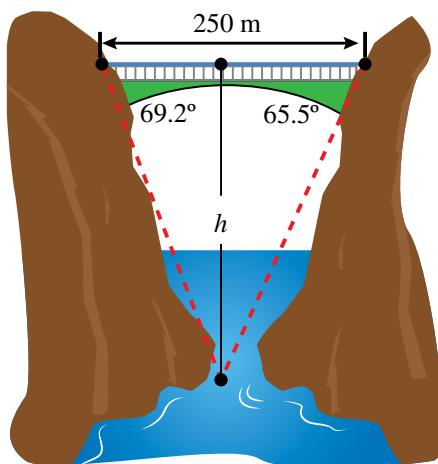
١٢ رياضة التزلج: يتكون مسار تزلج من جزء مائل، وأخر مستقيم. إذا تزلج محمود من النقطة Q إلى النقطة P ثم وصل خط النهاية عند النقطة R ، وكانت زاوية ارتفاع مسار التزلج عن الأرض 25°، والمسافة بين النقطتين P و R هي 500 m، وزاوية رصد الحكم من نقطة النهاية للمتزلّج الذي يقف عند نقطة البداية 15°، فما طول QP ؟



أجد قيمة x في الشكل المجاور، مقرّباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.

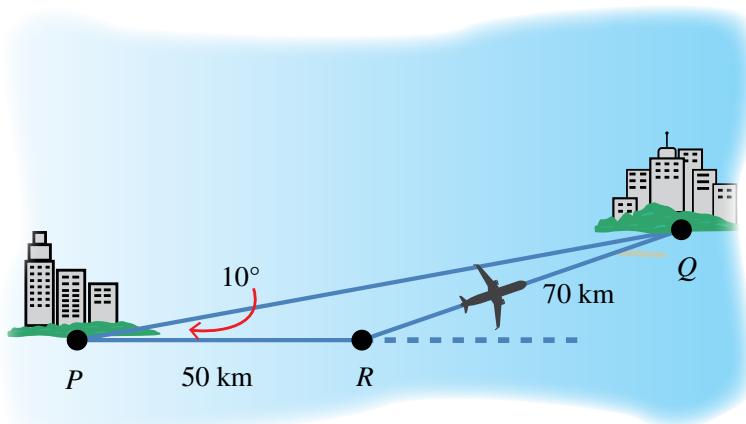


١٤ تبرير: أطلق قناص وقناص النار على هدف متحرك في السماء في لحظة ما. إذا كانت زاوية إطلاق القناص 35° ، وزاوية إطلاق القناص 40° ، والمسافة بينهما 100 m ، فما سيصيب الهدف أولاً؟ أبّر إجابتي.



١٥ تحدي: مرّ قارب أسفل جسر طوله 250 m . وقد رصد الشخص الذي في القارب الزاويتين اللتين تقعان عند طرفِ الجسر، فكانتا 69.2° و 65.5° . أجد ارتفاعَ الجسر عن القارب.

١٦ تبرير: توجّه طائرة من المدينة P إلى المدينة Q ، وبعد أن قطعت مسافة 50 km أدرك الطيار وجود خطأ في زاوية الانطلاق مقداره 10° ، فاستدار في الحال، وقطع الطائرة مسافة 70 km حتى وصلت المدينة Q . إذا كانت سرعة الطائرة ثابتة وتساوي 250 km/h ، فما الوقت الإضافي الذي استغرقه الطيار بسبب خطأه في زاوية الانطلاق؟



قانون جيوب التمام

Law of Cosines



استعمال قانون جيوب التمام لإيجاد طول ضلع، أو قياس زاوية في مثلث.

فكرة الدرس



قانون جيوب التمام.

المصطلحات



انطلقت حافلتان من محطة واحدة في الوقت نفسه، وقد اتجهت الأولى شرقاً بسرعة 60 km/h، وانطلقت الثانية في مسار يصنع زاوية 30° مع مسار الحافلة الأولى بسرعة 50 km/h. هل يمكن حساب المسافة بين الحافلتين بعد مضي 3 ساعات على انطلاقهما؟

مسألة اليوم



تعرّفت في الدرس السابق قانون الجيوب، وكيف يستعمل لحل مثلثات علّم فيها ضلع واحد وزاويتان (ASA)، أو ضلعان وزاوية مقابلة لأحد هما (SSA).

تُستعمل أيضاً نسبة جيب التمام لإيجاد علاقات أخرى بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا، ما يساعد على حل بعض المثلثات التي لا يمكن حلها باستعمال قانون الجيوب.

في الشكل المجاور، يمثل h الارتفاع المرسوم من B عمودياً على AC . وباستعمال نظرية فيثاغورس وتعريف جيب التمام، يمكن استنتاج بعض العلاقات على النحو الآتي:

$$h^2 = c^2 - x^2$$

باستعمال نظرية فيثاغورس في المثلث ADB

$$h^2 = a^2 - (b-x)^2$$

باستعمال نظرية فيثاغورس في المثلث BDC

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2$$

بمساواة المعادلتين

$$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2$$

بنك القوس

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$$

بالتبسيط

لإدخال جيب التمام في المعادلة: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ، فإننا نكتب x بدلالة A :

$$\cos A = \frac{x}{c}$$

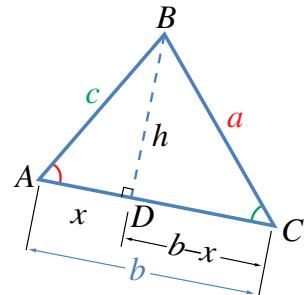
تعريف جيب التمام

$$x = c \times \cos A$$

بالضرب التبادلي

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

بتغيير قيمة x في المعادلة



وبذلك، نتوصل إلى العلاقة الآتية بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه باستعمال جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

وبطريقة مشابهة، يمكن التوصل إلى العلاقات الآتية:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

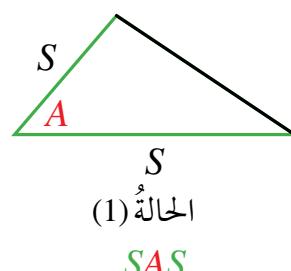
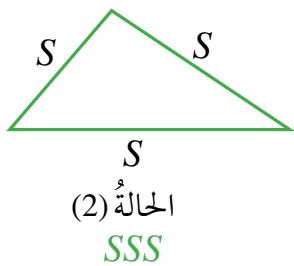
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

تسمى هذه العلاقات الثلاث **قانون جيوب التمام** (Law of Cosines)، ويُستعمل هذا القانون

لحل أي مثلث علماً بثلاثة من قياساته في الحالتين الآتية:

1. ضلعان وزاوية محصورة بينهما (SAS).

2. ثلاثة أضلاع (SSS).



أتعلم
يمكن كتابة قانون جيوب التمام كما يأتي:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1

أجد قيمة x في المثلث المجاور.

قانون جيوب التمام

باستعمال الآلة الحاسبة

باخذ الجذر التربيعي للطرفين

باستعمال الآلة الحاسبة

$$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$$

$$x^2 = 115.16$$

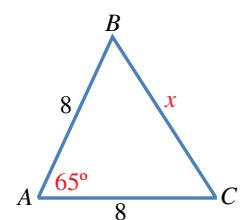
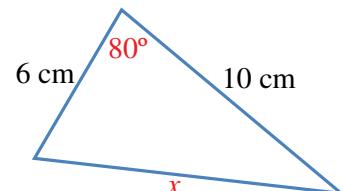
$$x = \pm \sqrt{115.16}$$

$$x = \pm 10.7 \text{ cm}$$

إذن، $x = 10.7$ ؛ لأن قيمة x لا يمكن أن تكون سالبة.

اتحقق من فهمي

أجد قيمة x في المثلث المجاور.



يُستعمل قانون جيوب التمام أيضاً لإيجاد قياس زاوية مجهولة في المثلث.

مثال 2

أَجِدْ قِيمَةً x فِي الْمُثَلِّث RST الْمُجاوِرِ.

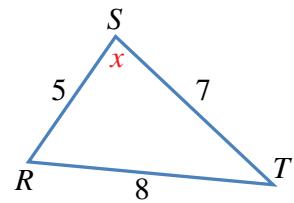
قَانُونُ جَيْوِ التَّامِ

بِكَتَابَةِ $\cos x$ مُوضِعُ القَانُونِ

بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ

مَعْكُوسُ جَيْبِ التَّامِ

أَنْدَهَقْ مِنْ فَهْمِي



$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos x$$

$$\cos x = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7}$$

$$\cos x = 0.1428$$

$$x = 81.8^\circ$$

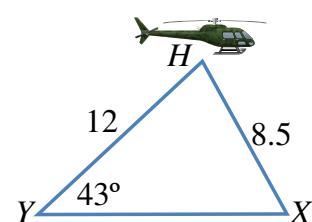
فِي الْمُثَلِّث ABC ، إِذَا كَانَ $AB = 16$, $BC = 12$, $AC = 20$ فَأَثِبْ أَنَّ الزَّاوِيَةَ B قَائِمَةً.

قُدْ نَحْتَاجُ فِي بَعْضِ الْمَسَائِلِ إِلَى اسْتِعْمَالِ قَانُونِيِّ الْجَيْوِ وَجَيْوِ التَّامِ مَعًا لِإِيجَادِ الْقِيَاسَاتِ الْمُطَلُوبَةِ.

مثال 3: من الحياة



شُوهدَتْ طَائِرَةٌ مَروِحِيَّةٌ تُحَلِّقُ فِي السَّمَاءِ مِنَ الْقَرِيَتَيْنِ X وَ Y فِي الْلحَظَةِ نَفْسِهَا. إِذَا كَانَ بُعْدُ الطَّائِرَةِ عَنِ الْقَرِيَةِ X هُوَ 8.5 km ، وَعَنِ الْقَرِيَةِ Y هُوَ 12 km ، وَكَانَتِ الْقَرِيَتَيْنِ فِي مَسْتَوَى أَفْقَىٰ وَاحِدٍ، وَزَاوِيَةُ ارْتِفَاعِ الطَّائِرَةِ مِنَ الْقَرِيَةِ Y هِيَ 43° ، فَمَا الْمَسَافَةُ بَيْنَ هَاتِيْنِ الْقَرِيَتَيْنِ؟



لِإِيجَادِ الْمَسَافَةِ بَيْنَ الْقَرِيَتَيْنِ، يَجُبُ مَعْرِفَةُ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ بَيْنَ الْضَّلَعَيْنِ الَّذِيْنِ يُمَثِّلُانِ بُعْدَيِّ الْطَّائِرَةِ عَنِ الْقَرِيَتَيْنِ كَمَا يَأْتِي:

الخطوة 1: اسْتِعْمَالُ قَانُونِ الْجَيْوِ لِإِيجَادِ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ X فِي الْمُثَلِّث HYX .

$$\frac{\sin 43^\circ}{8.5} = \frac{\sin X}{12}$$

قَانُونُ الْجَيْوِ

$$\sin X = \frac{12 \sin 43^\circ}{8.5}$$

بِضَربِ الْطَرْفَيْنِ فِي 12

$$\sin X \approx 0.963$$

بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ

$$X = \sin^{-1} 0.963$$

مَعْكُوسُ \sin

$$\approx 74.3^\circ$$

بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ

الخطوة 2: إِيجَادُ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ H .

أَعْلَمُ

$\sin^{-1} 0.963 = 74.3^\circ$

تُوجَدُ قِيمَتَانِ لـ 0.963

ضَمِنَ الدُورَةِ الْواحِدَةِ هُما

74.3° و 105.6° ، نَخْتَارُ

مِنْهُمَا القيمةُ 74.3° ؛ لأنَّ

الْزاوِيَةُ x تَبَدُّو حَادَّةً فِي

الشَّكْلِ المُعْطَى.

$$m\angle H = 180^\circ - 43^\circ - 74.3^\circ = 62.7^\circ$$

مجموع قياس زوايا المثلث 180°

الخطوة 3: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد المسافة بين القريتين.

$$(XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2(12)(8.5) \cos 62.7^\circ$$

قانون جيب التمام

$$(XY)^2 = 122.7$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$XY = \pm \sqrt{122.7} = \pm 11.1$$

بحساب الجذر التربيعي للطرفين

إذن، المسافة بين المدينتين 11.1 km تقريرياً.

أتحقق من فهمي

سفن: أبحرت سفينة من الميناء A باتجاه الشمال، فقطعَت مسافة 240 km ، ثم انحرفت

بزاوية 50° ، وقطعَت مسافة 160 km حتى وصلت إلى الميناء B. ما المسافة بين الميناء A

والميناء B؟

مثال 4: من الحياة

أقلعت طائرة بزاوية 100° عن الشمال من المدينة A، فقطعَت مسافة 400 km ، ثم

انعطفت يميناً، فأصبحت الزاوية بين خط مسارها الجديد والشمال 170° ، ثم

قطعَت مسافة 500 km لتصل إلى المدينة B. ما المسافة بين هاتين المدينتين؟

يمكن حساب المسافة بين المدينتين (طول القطعة المستقيمة AB) بإيجاد قياس الزاوية

.AMB

من الملاحظ أن الزاوية AMN_2 مكملة للزاوية MAN_1 ، وهي تساوي 80° .

$$m\angle AMB = 360^\circ - (80^\circ + 170^\circ) = 110^\circ$$

مجموع الزوايا حول نقطة

$$(AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110^\circ$$

قانون جيب التمام

$$(AB)^2 = 546808.0573$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$$

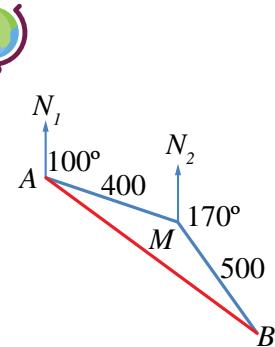
بأخذ الجذر التربيعي

إذن، المسافة بين المدينتين 739.5 km تقريرياً.

أتحقق من فهمي

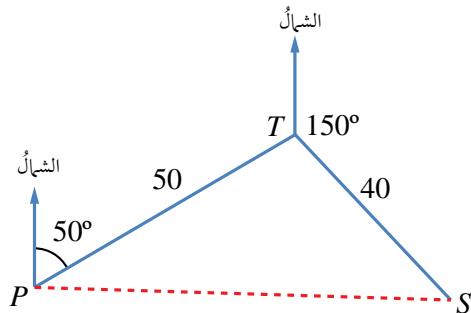
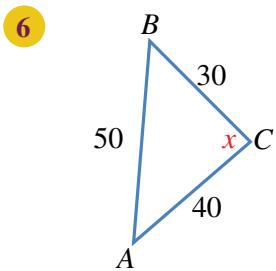
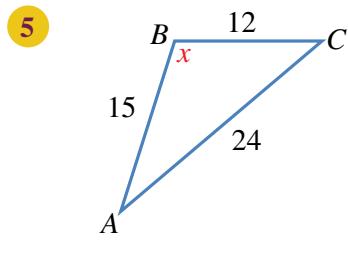
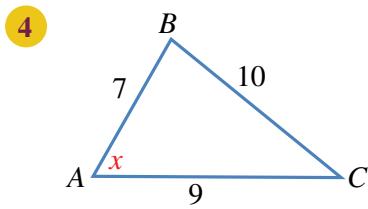
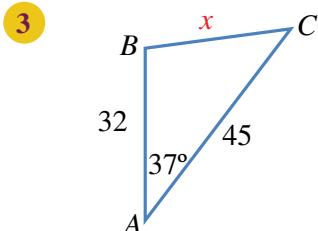
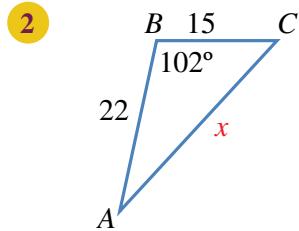
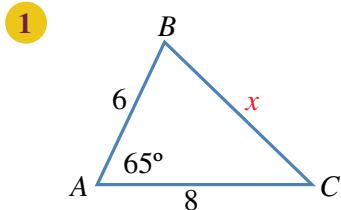
سار قطار من المحطة A في اتجاه 080° إلى المحطة B التي تبعد عنها 120 km ، ثم تحول إلى

اتجاه 070° ، وسار مسافة 90 km إلى المحطة C. ما المسافة بين المحطة A والمحطة C؟

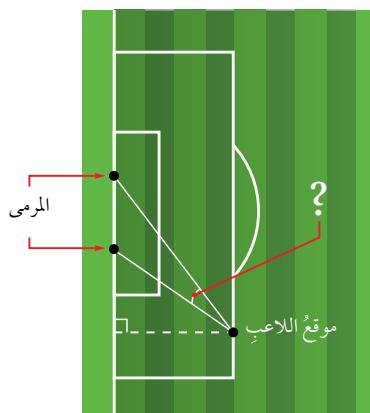




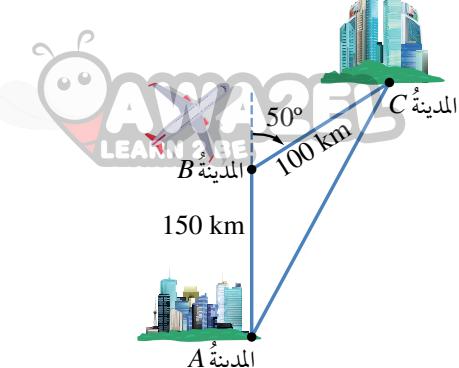
أَجِدْ قيمَةَ x فِي كُلِّ مِنَ الْمُثَلَّثَاتِ الآتِيَّةِ:



7 **ملاحة جوية:** أبحرت سفينةٌ من أحد الموانئ مسافة 50 km في اتجاه 050° ، ثمَّ غَيَّرَ القبطان خطَّ سيرها إلى اتجاه 150° وقطعَتْ مسافةً 40 km، ثُمَّ توقفَتْ بسبِبِ إصابةِ أحدِ أفرادِ الطاقمِ. ما المسافةُ التي سقطَتْها مروحيَّة الإنقاذِ من الميناءِ لتصلَ إلى السفينةِ في أقصَرِ وقتٍ مُمُكِّنٍ؟

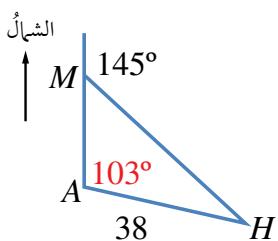


8 **كرة قدم:** يُبيَّنُ الشَّكْلُ المجاوارُ موقعَ لاعِبِ كِرَةِ قَدْمٍ يُرْكِلُ الْكِرَةَ نَحْوَ مَرْمىِ عَرْضُهُ 5.5 m. أَجِدْ قياسَ الزاويةِ التي يُسْتَطِعُ مِنْهَا اللاعبُ أَنْ يُرْكِلَ الْكِرَةَ لِتَسْدِيدِ هَدْفٍ، علَمًا بِأَنَّهُ يَبعُدُ عَنْ طَرَفِيِّ الْمَرْمىِ مسافَةَ 26 m وَ 23 m.



٩ خرائط طيرانٌ: أقلعت طائرة من المدينة A في اتجاه 000° مسافة 150 km ، ثم توجهت إلى 050° ، وسارت مسافة 100 km حتى وصلت المدينة C كما في الشكل المجاور. ما أقصر مسافة ممكنة بين المدينتين إذا كان مسموحًا للطائرة اتخاذ المسار الذي تريده؟

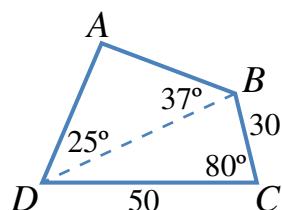
١٠ ساعاتٌ: طول عقربيٍّ ساعة 3 cm ، و 4 cm . أجد المسافة بين رأسِي العقربين عندما يشيران إلى الساعة 4 تمامًا.



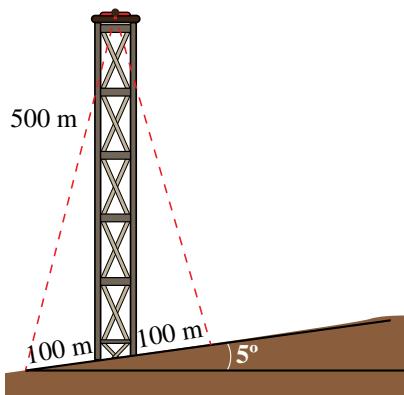
١١ مروجية إنقادٌ: أرسلت مروجية إنقادٌ من القاعدة A لإسعافِ رجلٍ على جبلٍ عند النقطة M إلى الشمال من هذه القاعدة، ثمَّوصلته إلى المستشفى H الذي يبعد عن القاعدة مسافة 38 km كما يظهرُ في الشكل المجاور. أجد المسافة من الجبل إلى المستشفى بطريقتينِ.

مهارات التفكير العليا

١٢ تحديًّا: أجد قياسَ أصغر زاويةٍ في مثلثِ أطوالِ أضلاعه $3a, 5a, 7a$ ، حيث a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ.



١٣ تحديًّا: يمثلُ الشكل $ABCD$ المجاورُ حقلَ نخيلٍ تريدهُ مالكتهُ إحاطتهُ بسياجٍ. أجد طولَ السياجِ.



١٤ تحديًّا: يرتفع برج 500 m على تلةٍ تميلُ بزاوية 5° عن المستوى الأفقيِّ كما في الشكل المجاورِ. أرادَت المهندسةُ صفاء تثبيت البرج بسلكينِ منْ قمَتِه إلى نقطتينِ على الأرضِ، تبعُدُ كُلُّ منْهُما مسافة 100 m عن قاعدةِ البرجِ. أجد طولَ السلكينِ.



استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث

Using Sine to Find the Area of a Triangle

إيجاد مساحة مثلث علماً فيه طولاً ضلعين، وقياسُ الزاوية المحصورة بينهما.

فكرة الدرس



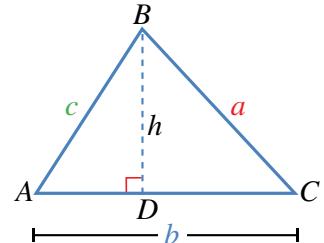
مسألة اليوم



لدى مزارع قطعة أرضٍ مثلثة الشكل، طول أحد أضلاعها 84 m وطول ضلع آخر 110 m، وقياسُ الزاوية المحصورة بينهما 145° ، وقد أرادَ زراعتها بالبطاطا، فلرمه 0.15 kg من درناتِ البطاطا لكل متر مربع. كيف يستطيع المزارع حساب كمية درناتِ البطاطا اللازمة لزراعة أرضيه؟

تعلمتُ سابقاً كيفية حساب مساحة المثلث بضرب نصف طول قاعده في ارتفاعه، غير أنه يتعدّر استعمال هذه الطريقة إذا كان الارتفاع مجهولاً؛ لذا يمكن استخدام النسب المثلثية في إيجاد قانون آخر لحساب مساحة المثلث باستعمال أطوالِ أضلاعه وقياسات زواياه. ففي الشكل المجاور، نلاحظ أن BD هو ارتفاع المثلث ABC ، وأنه عمودي على القاعدة AC . فإذا كان $b = AC$ ، و $h = BD$ ، فإن مساحة هذا المثلث هي:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} AC \times BD \\ &= \frac{1}{2} b h \end{aligned}$$



نلاحظ أيضاً من المثلث BDC ما يأتي:

تعريفُ جيب الزاوية

بضربِ طرفِي المعادلة في

$$\sin C = \frac{h}{a}$$

$$h = a \sin C$$

$$K = \frac{1}{2} b (a \sin C) \quad \text{بالتعويض عن } h \text{ في قانون مساحة المثلث } a \sin C$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

يمكن رسم العمود من الرأس A إلى الضلع الذي يقابل BC ، ومن الرأس C إلى الضلع الذي يقابل AB ، لبيان أن مساحة هذا المثلث تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$ ، وأنها تساوي أيضاً

$$\frac{1}{2} bc \sin A$$

مساحة المثلث

مفهوم أساسٍ



مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين فيه مضروباً في جيب الزاوية المحسورة بينهما:

$$K = \frac{1}{2} bc \sin A \quad K = \frac{1}{2} ac \sin B \quad K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

مثال 1

أَجِد مساحة المثلث ABC بالوحدات المربعة في الشكل المجاور.

$$K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

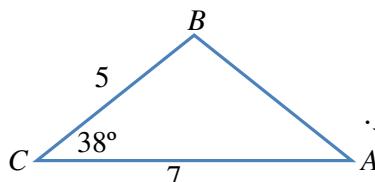
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 30^\circ$$

$$= 12$$

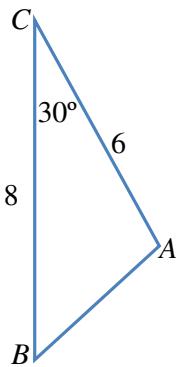
قانون مساحة المثلث

بالتعمير

أتحقق من فهمي



أَجِد مساحة المثلث بالوحدات المربعة في الشكل المجاور.



تعلّمتُ في المثال السابق كيف أَجِد مساحة مثلث علِم فيه طولاً ضلعين، وقياسُ الزاوية المحسورة بينهما، وسأتعلّم الآن كيفية حساب مساحة مثلث علِم فيه أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال 2

أَجِد مساحة المثلث ABC في الشكل المجاور.

يتعيّن أولاً إيجاد قياس إحدى الزوايا باستعمال قانون جيوب التمام، ثم حساب المساحة.

إذن، أَستعمل قانون جيوب التمام لإيجاد قياس الزاوية C :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

قانون جيوب التمام

بالتعمير

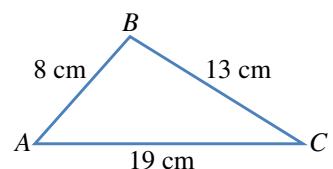
$$= \frac{13^2 + 19^2 - 8^2}{2 \times 13 \times 19}$$

$$= 0.9433$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$C = \cos^{-1} 0.9433 = 19.4^\circ$$

معكوس \cos ، واستعمال الآلة الحاسبة



الوحدة 4

أُطْبِقْ قانوَنَ المساَحَةِ:

قانوَنَ مساَحَةِ المثلِثِ

بالتَّعْويضِ

باستِعمالِ الْآلَةِ الحاسِبِيَّةِ

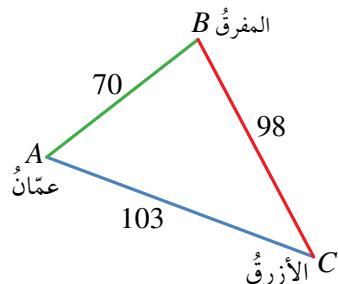
أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 

$$K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times \sin 19.4^\circ$$

$$= 41.0 \text{ cm}^2$$

أَجِدُّ مساَحَةَ المثلِثِ DEF ، علَمًا بِأَنَّ $EF = 9 \text{ cm}$ ، $DF = 12 \text{ cm}$ ، وَ $DE = 10 \text{ cm}$



مثال 3: من الحياة



المسافةُ بَيْنَ عُمَانَ وَالْأَزْرَقِ 103 km ، وَبَيْنَ عُمَانَ وَالْمَفْرِقِ 70 km ، وَبَيْنَ الْمَفْرِقِ وَالْأَزْرَقِ 98 km . أَجِدُّ مساَحَةَ المثلِثِ الَّذِي تَقْعُدُ عَنْ دَرْؤُسِهِ هَذَا الْمَدِينَ الْثَلَاثُ.

الخطوة 1: إِيجادُ قياسِ إِحدى الزوايا، وَلَتَكُنْ B ، باستِعمالِ قانوَنِ جِيوبِ التَّعْامِلِ.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{98^2 + 70^2 - 103^2}{2 \times 98 \times 70}$$

$$= 0.2839$$

$B = \cos^{-1}(0.2839) = 73.5^\circ$ معكوسُ جِيبِ التَّعْامِلِ، واستِعمالُ الْآلَةِ الحاسِبِيَّةِ

قانوَنُ جِيوبِ التَّعْامِلِ

بالتَّعْويضِ

باستِعمالِ الْآلَةِ الحاسِبِيَّةِ

الخطوة 2: تَطْبِيقُ قانوَنِ المساَحَةِ.

قانوَنُ مساَحَةِ المثلِثِ

بالتَّعْويضِ

باستِعمالِ الْآلَةِ الحاسِبِيَّةِ

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 

قطعةُ رخَامٍ مُثَلَّثُ الشَّكْلِ، أَبعَادُهَا: 50 cm ، 85 cm ، وَ 70 cm . مَا مساحتُهَا؟

التَّخْزِينُ فِي ذَاِكْرَةِ الْآلَةِ الحاسِبِيَّةِ

أَسْتَعْمَلُ الْآلَةِ الحاسِبِيَّةِ لِإِيجادِ قِيَاسِ الزَّاوِيَّةِ B فِي هَذَا السُّؤَالِ، ثُمَّ أَضْغَطُ عَلَى الأَزْرَارِ (بِالْتَّرْتِيبِ مِنَ الْيَسَارِ):

SHIFT → RCL → B

فَتُتَحَقَّقُ الزَّاوِيَّةُ فِي الذَّاِكْرَةِ.

وَلاَسْتَعْمَلُهَا فِي حَسَابِ

مساحتِ المثلِثِ، أَدْخُلُ:

$$\frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times$$

ثُمَّ أَضْغَطُ عَلَى الأَزْرَارِ:

, sin → ALPHA → B → =

فَتُظَهِّرُ النَّتِيَّجَةُ:

$$3288.8$$

$$K = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times \sin 73.5^\circ$$

$$= 3288.8 \text{ km}^2$$



أَجِد مساحة كُلٌّ من المثلثات الآتية:

1 المثلث ABC الذي فيه $AC = 8 \text{ cm}$ ، و $BC = 7 \text{ cm}$ ، وقياس الزاوية ACB فيه 59° .

2 المثلث ABC الذي قياس الزاوية BAC فيه 85° ، و $AC = 6.7 \text{ cm}$ ، و $AB = 8 \text{ cm}$.

3 المثلث PQR الذي فيه $PR = 19 \text{ cm}$ ، و $QR = 27 \text{ cm}$ ، وقياس الزاوية QRP فيه 109° .

4 المثلث XYZ الذي فيه $XZ = 191 \text{ cm}$ ، و $XY = 231 \text{ cm}$ ، وقياس الزاوية YXZ فيه 73° .

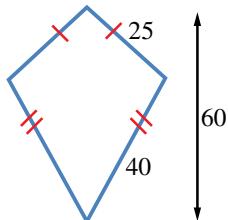
5 المثلث LMN الذي فيه $LM = 39 \text{ cm}$ ، و $LN = 63 \text{ cm}$ ، وقياس الزاوية NLM فيه 85° .

6 إذا كانت مساحة المثلث ABC هي 27 cm^2 ، و $BC = 14 \text{ cm}$ ، وقياس الزاوية BCA فيه 115° ، فما طول AC ؟

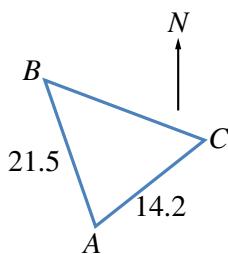
7 إذا كانت مساحة المثلث LMN هي 133 cm^2 ، و $MN = 21 \text{ cm}$ ، و $LM = 16 \text{ cm}$ ، والزاوية LMN حادة، فما قياس كلٍ من الزاويتين MNL ، و LMN ؟

8 لوحة على شكل مثلث، أطوال أضلاعه: 60 cm ، و 70 cm ، و 80 cm . أَجِد مساحة اللوحة.

9 دائرتان، مركز إحداهما P ومركز الأخرى Q ، وطول نصف قطر إحداهما 6 cm والأخرى 7 cm . إذا تقاطعتا في النقطتين X و Y ، وكان مساحة المثلث PXQ ، فما مساحة المثلث Q ؟

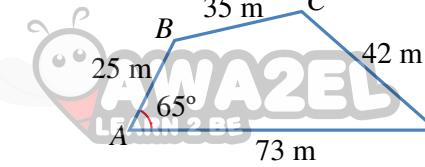


10 طائرة ورقية: صنع سليم طائرة ورقية كما في الشكل المجاور. أَجِد مساحة المادة اللازمة لصنع الطائرة بالوحدات المربعة.



11 متنزه وطني: يراد إنشاء متنزه وطني على قطعة أرض مثلثة الشكل ABC . إذا كانت النقطة B في اتجاه 324° من النقطة A ، والنقطة C في اتجاه 042° من النقطة A ، فما مساحة المتنزه بالوحدات المربعة؟

الوحدة 4



حقول: يمثل الشكل المجاور أبعاد حقلٍ رباعي الأضلاع:

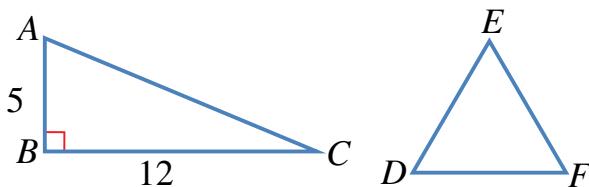
أثبت أن طول BD هو 66 m ، مقرّباً إجابتي إلى أقرب متر . 13

أجد قياس الزاوية C . 14

أحسب مساحة الحقل . 15

أحل المسألة الواردة في بداية الدرس . 16

المثلث ABC قائم الزاوية ، والمثلث DEF متطابق الأضلاع وللمثلثين المحيط نفسه . أجد مساحة المثلث DEF . 17



جغرافيا: برمودا منطقة مثلث الشكل ، تقع في الجزء الغربي من المحيط الأطلسي ، رؤوسها مدينة ميامي ، وبرمودا ، وسان خوان . وقد شهدَ مثلث برمودا وقوع عدد من حوادث اختفاء السفن والطائرات . إذا كانت المسافة بين ميامي وسان خوان 1674 km تقريباً ، وبين ميامي وبرمودا نحو 1645 km ، وبين سان خوان وبرمودا قرابة 1544 km ، فما مساحة مثلث برمودا من دون اعتبار لتوسّع الأرض ؟ 18

مهارات التفكير العليا



تحدي: أجد مساحة المثلث ABC الذي قياسُ الزاوية A فيه 70° ، وقياسُ الزاوية B فيه 60° ، وطولُ الضلع AB فيه $.4$ cm . 19

اكتشف الخطأ: مثلث ABC فيه $AB = 9\text{cm}$ ، $BC = 8\text{cm}$ ، وقياسُ الزاوية A فيه 30° . أرادت نور إيجاد مساحتِه إلى أقرب عشرة ، فكانَ حلُّها كما يأتي :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30^\circ \\ &= 18 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

اكتشف الخطأ في حل نور ، ثم أصحّه .



حل مسائل ثلاثية الأبعاد

Solving Problems in Three Dimensions

إيجاد أطوال وقياسات لزوايا مجهولة في أشكالٍ ثلاثية الأبعاد باستعمال نظرية فيثاغورس والنسب المثلثية.



شيد الهرم الأكبر في مدينة الجيزة بمصر عام 2500 قبل الميلاد تقريباً، وتمثل قاعدته مربعاً طول ضلعه 232.6 m، وطول الضلع الواصل بين قمة الهرم وأي من رؤوس المربع 221.2 m. أجد ارتفاع هذا الهرم.

فكرة الدرس

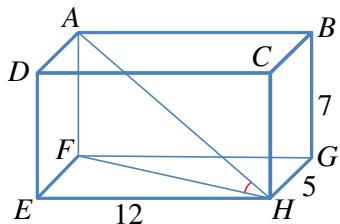


مسألة اليوم



تشتمل المسائل ثلاثية الأبعاد (في الفضاء) على ثلاثة مستوياتٍ؛ أفقيةٌ، ورأسيٌ، ومائلٌ. ويطلب حل هذه المسائل رسم مخططٍ يوضح المسألة، ويمثل المعلومات المعطاة فيها، ثم البحث عن مثلثاتٍ قائمة الزاوية فيها. وإذا لم توجد هذه المثلثات، فإننا نرسم بعضها، بحيث تكون بعض عناصرها معلومةً، فضلاً عن تحديد العنصر المطلوب إيجاده فيها؛ على أن نرسم كلاً منها بمنأى عن المخطط المذكور آنفاً، ليسهل علينا معرفة العلاقة التي نستخدمها في الحل.

مثال 1



يمثل الشكل المجاور متوازي مستوياتٍ.
أجد قياس الزاوية AHF ، مقرراً إجابتي إلى
أقرب منزلة عشرية واحدة.

المثلث AFH قائم الزاوية في F ، ومعلوم فيه طول AF ؛ لذا يجب معرفة عنصر آخر لإيجاد القياس المطلوب.

الخطوة 1: إيجاد طول FH من المثلث قائم الزاوية FEH ؛ المرسوم وحدة جانبًا.

$$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

$$(FH)^2 = 169$$

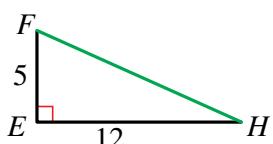
$$FH = \sqrt{169} = 13$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

بحساب الجذر التربيعي للطرفين

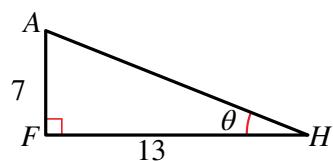


الخطوة 2: رسم المثلث AFH وحدّه، ثم استعمال الظل (\tan) لإيجاد قياس الزاوية AHF .

$$\tan \theta = \frac{7}{13} = 0.5385$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.5385) = 28.3^\circ$$

بالتقرير إلى منزلة عشرية واحدة



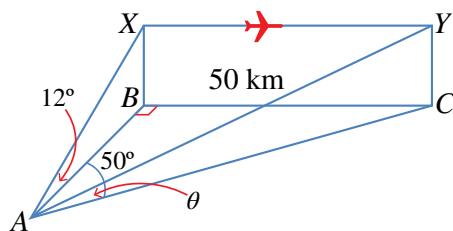
أتحقق من فهمي

أجد BE ، وقياس الزاوية EBG في المثال السابق.

يمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال المثلثات، ثم إيجاد قياسات مجهولة فيها باستعمال النسب المثلثية.

مثال 2: من الحياة

تقع النقاط A ، B ، و C في مستوى أفقى واحد على الأرض، وتقع النقطة C على بعد 50 km شرقي النقطة B التي تقع شمالي النقطة A ، وتقع النقطة C في اتجاه 050° من النقطة A . رصدت من النقطة A حركة طائرة في موقعين مختلفين على الارتفاع نفسه عن الأرض؛ الأول: عندما كانت فوق النقطة B مباشرةً، وكانت زاوية ارتفاعها 12° . والثاني: عندما كانت فوق النقطة C . أجد زاوية ارتفاع الطائرة عندما كانت فوق النقطة C .



الخطوة 1: أرسم مخططاً يمثل المعلومات المعطاة.

الخطوة 2: أرسم المثلث قائم الزاوية ABC . ثم أستخدمه في إيجاد AB ، و AC .

$$\tan 50^\circ = \frac{50}{AB}$$

$$AB = \frac{50}{\tan 50^\circ} = 41.95 \text{ km}$$

$$\sin 50^\circ = \frac{50}{AC}$$

$$AC = \frac{50}{\sin 50^\circ} = 65.27 \text{ km}$$

تعريف ظل الزاوية

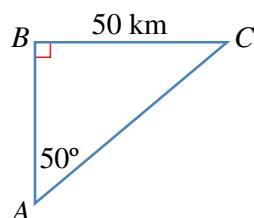
باستعمال الآلة الحاسبة

تعريف جيب الزاوية

باستعمال الآلة الحاسبة

أتذكر

تسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المار بعين الناظر زاوية الارتفاع.



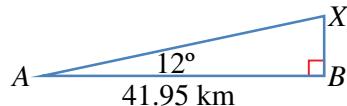
الخطوة 3: أرسم المثلث قائم الزاوية ABX , ثم استخدمه في إيجاد BX , ومنه يمكن إيجاد CY , فهما متساويان؛ لأنَّ الشكل $BXYC$ مستطيلٌ.

$$\tan 12^\circ = \frac{BX}{41.95}$$

$$BX = 41.95 \tan 12^\circ = 8.917 \text{ km}$$

تعريف ظل الزاوية

باستعمال الآلة الحاسبة



الخطوة 4: أستعمل المثلث قائم الزاوية ACY لإيجاد زاوية الارتفاع θ .

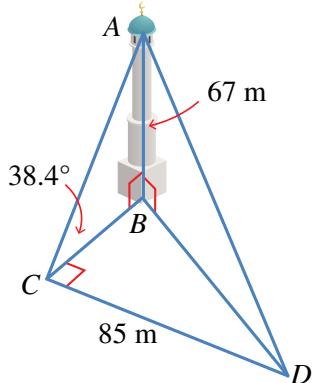
$$\tan \theta = \frac{8.917}{65.27} = 0.1366$$

تعريف ظل الزاوية

$$\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8^\circ$$

معكوس الظل

إذن، زاوية ارتفاع الطائرة عندما كانت فوق النقطة C هي: 7.8° , مُقرَّبة إلى منزلة عشرية واحدة.

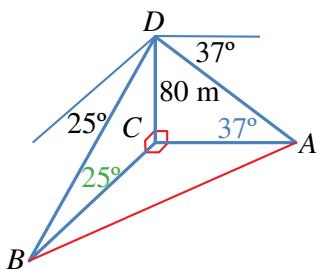


أتحقق من فهمي

رصدَ أحمد قمةً مئذنةٍ من نقطةٍ على الأرض تقع جنوب المئذنة، فكانت زاوية ارتفاعها 38.4° , ثم سار شرقاً مسافة 85 m , ورصدَ قمةً مئذنةً مِنْهَا أخرى. إذا كان ارتفاع المئذنة 67 m , أَجِدْ زاوية ارتفاع قمة المئذنة في المرة الثانية.

مثال 3: من الحياة

رُصدَ المنزل A في اتجاه الشرق من قمة برج يرتفع 80 m , وكذلك المنزل B في اتجاه الجنوب. إذا كانت زاوية انخفاض المنزل A من قمة البرج 37° , وزاوية انخفاض المنزل B من قمته 25° , فما المسافة بين المنازل؟



الخطوة 1: أرسم مخططاً، علمًا بأنَّ البرج DC يصنِّع زاوية قائمة مع الأرض، وأنَّ اتجاه كلٌّ من الشرق والجنوب يصنِّعان معًا زاوية قائمة.



بما أنَّ زاوية انخفاضِ المترِّ A هي 37° ، فإنَّ الزاوية DAC هي 37° ، وبما أنَّ زاوية انخفاضِ المترِّ B هي 25° ، فإنَّ الزاوية DBC هي 25° .

الخطوة 2: أستعملُ المثلث قائم الزاوية ABC لإيجاد AB ، وهذا يحتمُّ معرفة AC ، وـ BC .

الخطوة 3: أرسمُ المثلث ADC . ولإيجاد AC ، أستعملُ ظلَّ الزاوية 37° .

$$\tan 37^\circ = \frac{80}{AC}$$

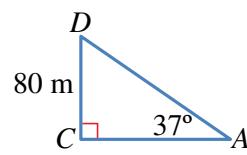
تعريفُ ظلِّ الزاوية

$$AC = \frac{80}{\tan 37^\circ}$$

بالتبسيط

$$AC = 106.2 \text{ m}$$

باستعمالِ الآلة الحاسبة



الخطوة 4: أرسمُ المثلث BCD . ولإيجاد BC ، أستعملُ ظلَّ الزاوية 25° .

$$\tan 25^\circ = \frac{80}{BC}$$

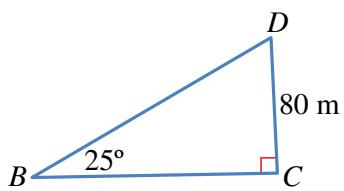
تعريفُ ظلِّ الزاوية

$$BC = \frac{80}{\tan 25^\circ}$$

بالتبسيط

$$BC = 171.6 \text{ m}$$

باستعمالِ الآلة الحاسبة



الخطوة 5: أستعملُ نظرية فيثاغورس في المثلث ACB لإيجاد AB .

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

نظرية فيثاغورس

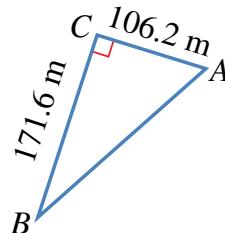
$$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725$$

بالتعميُّض

$$AB = \sqrt{40725} = 201.8$$

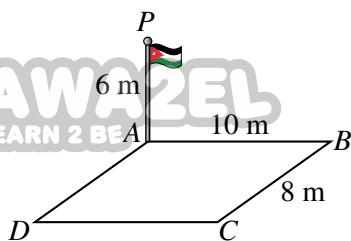
بأخذِ الجذر التربيعيٍّ

إذن، المسافةُ بينَ المترَّلينِ هي: 201.8 m ، مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلَةٍ عشريةٍ واحدةٍ.

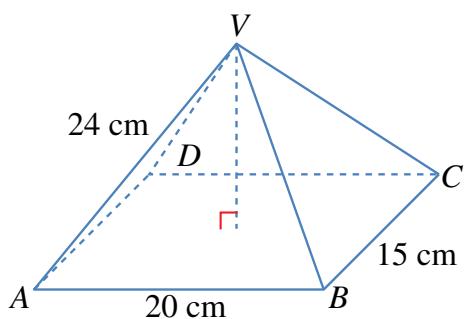


أتحقق من فهمي

أبحَرَت السفينة A وـ B منَ الميناء P في اتجاهيْن مُتعامدِيْن. وقد رصَدَت طائرة عمودية تُحلقُ فوقَ الميناء هاتيْن السفيتينِ في اللحظةِ نفسِها، فكانتْ زاوية انخفاضِ السفينة A هي 40° ، وزاوية انخفاضِ السفينة B هي 54° . إذا كانَ ارتفاعُ الطائرة عن سطحِ البحر 600 m ، فما المسافةُ بينَ السفيتينِ لحظةَ رصدهِما؟



- ١ سارية العلم: ثُبِّتَ ساريَةٌ عَلَى مَوْدِيَّ عَنْدَ رُكْنٍ سَاخِهٍ مُسْتَطِيلٌ الشَّكْلِ $ABCD$. أَجِدُ زاوِيَةَ ارْتِفَاعِ قَمَّةِ الساريَةِ P مِنَ النَّقْطَةِ C .

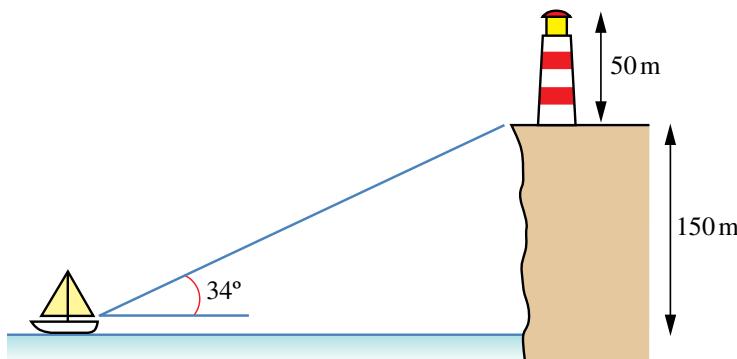


يُمثِّلُ الشَّكْلُ المُجاوِرُ هرَّمًا قائمًا قاعدهُ $ABCD$ مُسْتَطِيلٌ الشَّكْلِ، بُعْدَاهَا: 20 cm، وَ 15 cm. إِذَا كَانَ طُولُ كُلٍّ مِنَ الْأَحْرَفِ الْوَاصِلَةِ بَيْنَ قَمَّةِ الْهَرَمِ وَرَؤُوسِ الْقَاعِدَةِ 24 cm، وَ كَانَتِ الْقَمَّةُ V تَقْعُدُ رَأْسِيًّا فَوقَ مَرْكِزِ الْقَاعِدَةِ الْمُسْتَطِيلِيَّةِ، فَأَجِدُ:

٣ قياس الزاوية $.VAC$

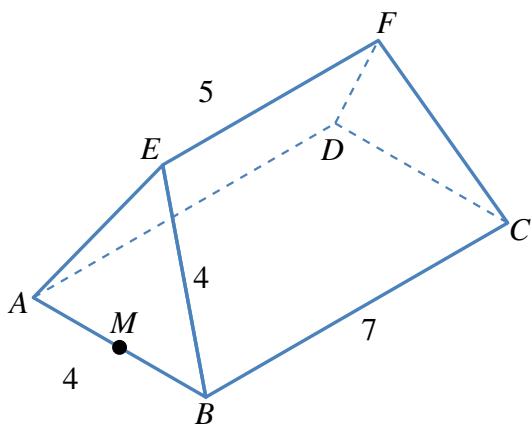
٤ طول القطر $.AC$

٥ ارتفاع الهرم.



- ٥ منارة: شاهدَ صيَادٌ مِنْ قَارِبِهِ قاعِدَةَ مَنَارَةٍ عَلَى حَافَةِ صَخْرِيَّةٍ بِزاوِيَةٍ ارْتِفَاعٍ قِيَاسُهَا 34°. إِذَا كَانَ ارْتِفَاعُ قاعِدَةِ المَنَارَةِ عَنْ مَسْتَوِي عَيْنِيِ الصَّيَادِ 150 m، فَكُمْ يَبْعُدُ الصَّيَادُ عَنْ هَذِهِ الْقَاعِدَةِ؟

٦ إذا كان ارتفاع المئارة 50 m، فما زاوية ارتفاع نظر الصياد نحو قمة المئارة؟



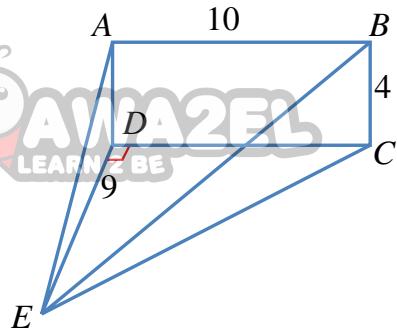
يُمثِّلُ الشَّكْلُ المُجاوِرُ سَقْفَ بَنَاءً، قاعدهُ الْمُسْتَطِيلُ الْأَفْقِيُّ $ABCD$ الَّذِي بُعْدَاهُ: 7 m، وَ 4 m. وَتُمثِّلُ نَهَايَتَا السَّقْفِ مُثَلِّثَيْنِ مُتَطَابِقَيِ الأَضْلاعِ، فِي حِينِ يُمثِّلُ كُلُّ مِنْ جَانَبَيِ السَّقْفِ شَبَهَ مُنْحَرِفٍ مُتَطَابِقَ السَّاقِيْنِ. إِذَا كَانَ طُولُ الْحَافَةِ الْعُلُوِّيَّةِ EF هُوَ 5 m، فَأَجِدُ:

٧ طول $.EM$ ، حيث M نقطةٌ مُنْصَفٌ لـ $.AB$.

٨ قياس الزاوية $.EBC$.

٩ قياس الزاوية بين $.EM$ والقاعدة $.ABCD$.

الوحدة 4



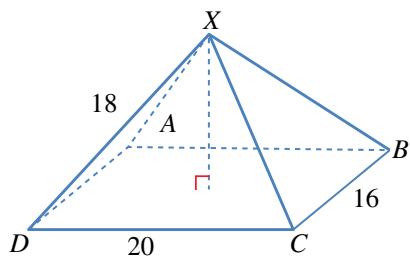
10 مستطيل $ABCD$ رأسى، و EDC مثلث أفقى. إذا كان قياس الزاوية CDE هو 90° ، و $BC = 4 \text{ cm}$ ، و $AB = 10 \text{ cm}$ ، و $ED = 9 \text{ cm}$ ، فأجد:

قياس الزاوية AED **10**

قياس الزاوية DEC **11**

طول \overline{EC} **12**

قياس الزاوية BEC **13**

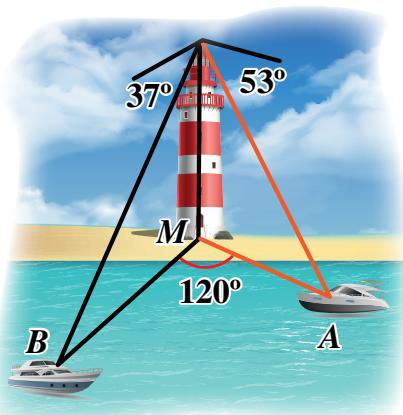
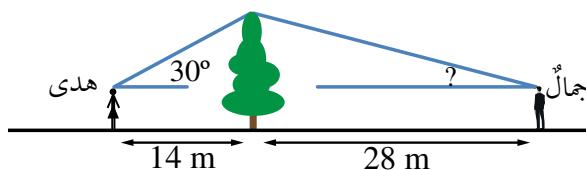


14 يمثل الشكل المجاور الهرم $XABCD$ الذي له قاعدة مستطيلة الشكل. أجد قياس الزاوية بين الحافة XD وقطر القاعدة DB .

15 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

16 **أكتشف الخطأ:** تقف هدى على بُعد 14 m شرق شجرة، زاوية ارتفاع قمتها بالنسبة إليها 30° ، ويقف جمال على بُعد 28 m غرب الشجرة، وهو يرى أنَّ زاوية ارتفاع قمة الشجرة بالنسبة إليه يجب أن تكون 15° ؛ لأنَّه يبعد عن الشجرة مثلي المسافة التي تبعدها هدى. هل رأيُ جمالٍ صحيح؟ إذا لم يكن رأيه صحيحاً، فما زاوية الارتفاع؟



17 **تحدي:** رُصدَ القاربان A و B في البحر من قمة مئارة على الشاطئ، ارتفاعها 44 m ، في اللحظة نفسها، فكانت زاوية انخفاض القارب A هي 53° ، وزاوية انخفاض القارب B هي 37° ، وقياس الزاوية AMB هو 120° ، حيث M قاعدة المئارة. أجد المسافة بين القاربين.

اختبار نهاية الوحدة



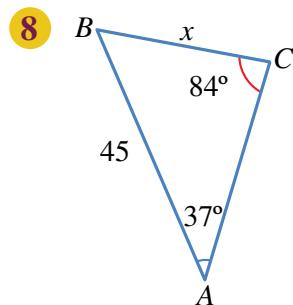
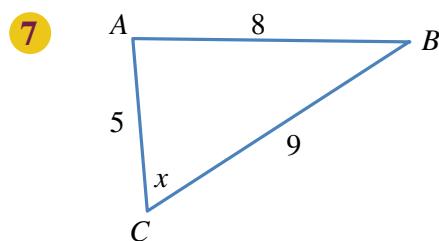
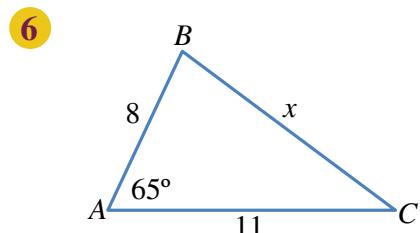
إحدى الصيغ الآتية تُستعمل لإيجاد مساحة المثلث **4**

- :ABC
 a) $\frac{1}{2}bc \sin C$ b) $\frac{1}{2}ab \sin C$
 c) $\frac{1}{2}ab \sin A$ d) $\frac{1}{2}ab \sin B$

إذا كان اتجاه النقطة R من النقطة Z هو 070° , فإنَّ **5**

- اتجاه النقطة Z من النقطة R هو:
 a) 070° b) 110°
 c) 250° d) 290°

أَجِدْ قيمَةَ x في كُلِّ مِنَ المُثلاَثَاتِ الآتية:



أَضْعُ دَائِرَةً حَوْلَ رَمِزِ الإِجَابَةِ الصَّحِيحَةِ فِي مَا يَأْتِي:

1 يُمْكِنُ حَلُّ المُثلاَثِ إِذَا عُلِمَتْ جَمِيعُ زُواياهُ بِاستِعمالِ:

- (a) قانونِ الجيوبِ فقط. (b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقط.

(c) قانونِيِّ الجيوبِ (d) لا يُمْكِنُ حَلُّ المُثلاَثِ وَجيوبِ التمامِ معاً.

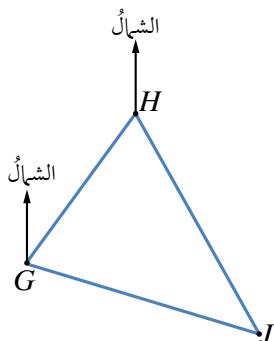
2 يُمْكِنُ حَلُّ المُثلاَثِ إِذَا عُلِمَتْ جَمِيعُ أَضْلاعِهِ بِاستِعمالِ:

- (a) قانونِ الجيوبِ فقط. (b) قانونِ جيوبِ التمامِ فقط.

(c) قانونِيِّ الجيوبِ (d) لا يُمْكِنُ حَلُّ المُثلاَثِ وَجيوبِ التمامِ معاً.

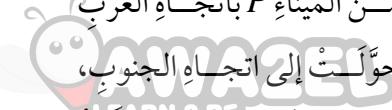
إذا كانَ اتجاهُ النقطة H منَ النقطة G في الشكلِ الآتي هو 045° , واتجاهُ النقطة J منَ النقطة H هو 164° , فإنَّ **3**

قياسَ الزاوية GHJ هو:



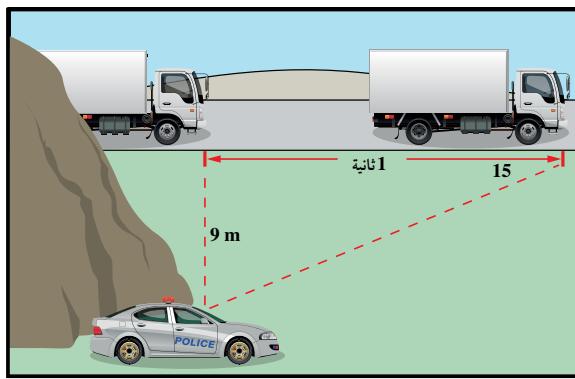
- a) 16° b) 045°
 c) 29° d) 61°

اختبار نهاية الوحدة



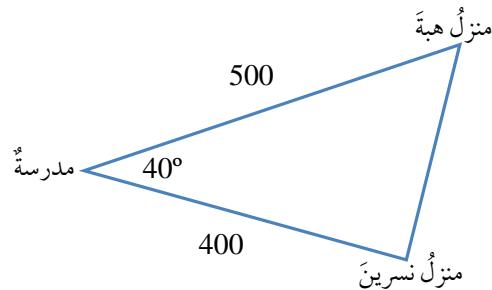
موانئ: أبحرت سفينة من الميناء P باتجاه الغرب مسافة 16 km , ثم تحولت إلى اتجاه الجنوب وقطعـت مسافة 9 km حتى وصلـت الميناء S . أـجد اتجـاه المينـاء S من المـينـاء P .

رادر: رصد رادار شاحنة بعد ثانية من مرورها بمحاذاته، فـصنـعـ الخطـ الوـاـصـلـ بينـ الرـادـارـ والـشـاحـنـةـ وـحـافـةـ الـطـرـيقـ زـاوـيـةـ مـقـدـارـهـا 15° كما في الشـكـلـ الآـتـيـ. أـجـدـ سـرـعـةـ الشـاحـنـةـ بـوـحدـةـ km/h .

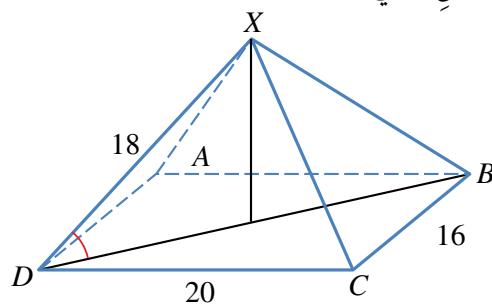


عواصف بحرية: أبحـرتـ سـفـينـةـ منـ المـينـاءـ A بـسـرـعـةـ 1100 km/h متـوجـهـاـ إـلـىـ المـينـاءـ B عـلـىـ بـعـدـ 28 km شـرقـ المـينـاءـ A . ولـتجـنـبـ العـواـصـفـ الشـدـيـدـةـ التـيـ هـبـتـ عـنـ انـطـلـاقـ السـفـينـةـ؛ فـقـدـ سـلـكـ القـبـطـانـ مـسـارـاـ يـنـحـرـفـ 20° جـنـوبـاـ عـنـ خـطـ الـمـلاـحةـ الـمـباـشـرـ بـيـنـ المـينـاءـيـنـ حـتـىـ هـدـأـتـ الـعـواـصـفـ بـعـدـ إـبـحـارـ استـمـرـ 10 ساعـاتـ. كـمـ تـبـعـدـ السـفـينـةـ عـنـ المـينـاءـ B بـعـدـ هـذـهـ المـدـدـةـ مـنـ الإـبـحـارـ؟ ما قـيـاسـ الزـاوـيـةـ الـذـيـ سـيـجـعـلـ السـفـينـةـ تـتوـجـهـ مـباـشـرـاـ إـلـىـ المـينـاءـ B ؟

9 يـبعـدـ مـنـزـلـ نـسـرـينـ عـنـ المـدرـسـةـ مـسـافـةـ 400 m ، وـيـبعـدـ مـنـزـلـ هـبـةـ عـنـ المـدرـسـةـ نـفـسـهـا مـسـافـةـ 500 m ، كـمـ فـيـ الشـكـلـ الآـتـيـ. أـجـدـ مـسـافـةـ بـيـنـ مـنـزـلـيـهـمـاـ.

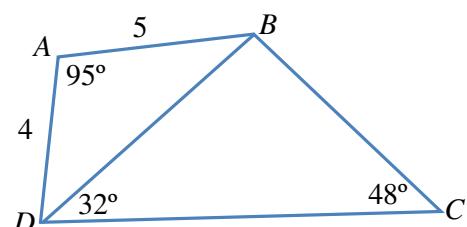


10 أـجـدـ قـيـاسـ الزـاوـيـةـ بـيـنـ الـحـافـةـ XD وـقـاعـدـةـ الـهـرـمـ فـيـ الشـكـلـ الآـتـيـ.



11 إـذـاـ كـانـتـ مـسـاحـةـ المـلـثـلـ PQR هـيـ 68 cm^2 ، وـكـانـ $PQ = 18 \text{ cm}$, $RQ = 15 \text{ cm}$ ، فـماـ قـيـاسـ الزـاوـيـةـ $\angle PQR$ ؟

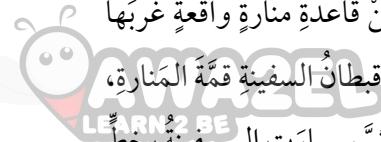
مستـعـنـاـ بـالـشـكـلـ الآـتـيـ، أـجـدـ:



12 طـوـلـ \overline{DB} قـيـاسـ الزـاوـيـةـ $\angle DBC$.

13 مـسـاحـةـ الشـكـلـ الـرـبـاعـيـ $ABCD$ طـوـلـ \overline{CD} .

اختبار نهاية الوحدة



- 23** ملاحة بحرية: تبعد سفينة عن قاعدة منارة واقعة غربها مسافة 80 km ، وقد رصد قبطان السفينة قمة المنارة، فكانت زاوية ارتفاعها 60° ، ثم سارت السفينة بخط مستقيم في اتجاه الشرق، فوجد أن زاوية ارتفاع قمة المنارة هي 45° . أجد المسافة التي قطعتها السفينة.

تدريب على الاختبارات الدولية

- ركب شخص طائرة عمودية ترتفع 700 m عن سطح البحر، فشاهد السفينتين A و B عند مرور الطائرة فوق نقطة بينهما. إذا كانت زاوية انخفاض السفينة A هي 45° ، وزاوية انخفاض السفينة B هي 40° ، فأجيب عن الأسئلة: 24، 25، 26.

- 24** اعتماداً على زوايا الانخفاض، اختار العبارة الصحيحة:

(a) موقع السفينة A بالنسبة إلى الطائرة أبعد منه من السفينة B .

(b) موقع السفينة B بالنسبة إلى الطائرة أبعد منه من السفينة A .

(c) بعد السفينتين عن الطائرة متساوٍ.

(d) لا يمكن معرفة أي السفينتين أبعد من زوايا الانخفاض.

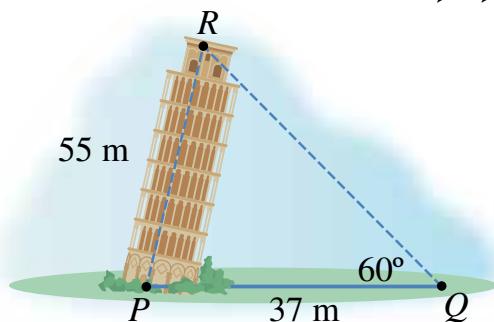
- المسافة بين السفينتين A و B مقرابة إلى أقرب متر هي:

(a) 134 (b) 700

(c) 834 (d) 1534

أوضح كيف أجبت عن السؤال 24.

- برج بيزا:** طول برج بيزا المائل نحو 55 m ، وزاوية ارتفاع أعلى البرج من نقطة على بعد 37 m هي 37° كما في الشكل المجاور. أجد:



19 قياس الزاوية RPQ .

20 ارتفاع قمة البرج R عن الأرض.

- 21** ملاحة بحرية: انطلق قارب من النقطة A من الميناء نحو سفينة متوقفة في عرض البحر باتجاه 030° ، وتبعه مسافة 2 km عن نقطة الانطلاق A ، ثم تحرك القارب إلى النقطة B التي تقع باتجاه 000° عن نقطة الانطلاق A ، وكانت المسافة بينهما 3 km . أجد بعد السفينة عن النقطة B .

- 22** زراعة: لتقدير مساحة حقل من القمح، رسم خالد مُضللاً خماسياً حوله، ثم حدد قياساته المُعينة في الشكل الآتي. ما مساحة الحقل التقريرية؟

