الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

12

AWA2EL
LEARN 2 BE

إجابات كتاب الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

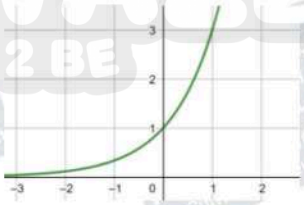
06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

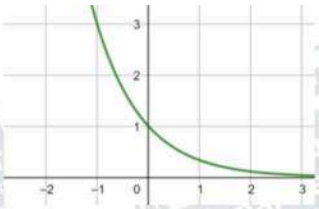
@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني عشر الأدبي ف1

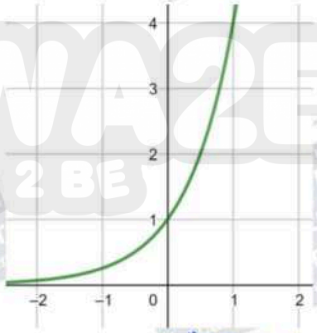
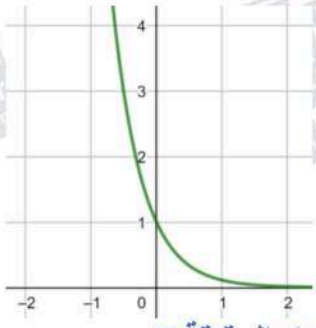
الوحدة الأولى: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

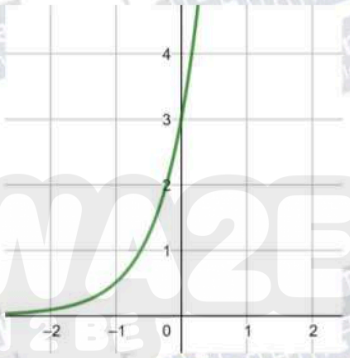
الدرس الأول: الاقترانات الأسية

	مسألة اليوم صفحة 8
	$P(t) = 325(0.25)^t$ $P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32$
	أتحقق من فهمي صفحة 9
a	$f(4) = 3^4$ $= 81$
b	$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $= 3$
	أتحقق من فهمي صفحة 10
a	$f(x) = 3^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x
b	لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x عندما $x = 0$ فإن $y = 1$، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1
c	الاقتران $f(x)$ متزايد
d	الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد

أتحقق من فهمي صفحة 12	
a	$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0,\infty)$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x
b	لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x عندما $x=0$ فإن $y=1$، ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو 1
c	الاقتران $f(x)$ متناقص
d	الاقتران $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد
أتحقق من فهمي صفحة 15	
a	$f(x)=2(3)^{x+2}-1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y=-1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-1,\infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
b	$f(x)=4(5)^{-x}=4\left(\frac{1}{5}\right)^x$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y=0$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0,\infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

c	$f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-\infty, 2)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
	أتحقق من فهمي صفحة 16
a	$f(5) = 500(2)^5$ $= 500(32)$ $= 16000$ عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات هو 16000 خلية
b	$4000 = 500(2)^x$ $8 = (2)^x$ $(2)^3 = (2)^x$ $x = 3$ بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 16
1	$f(3) = (11)^3$ $= 1331$
2	$f(1) = -5(2)^1$ $= -5(2)$ $= -10$
3	$f(2) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^2$ $= 3\left(\frac{1}{49}\right)$ $= \frac{3}{49}$

4	$f(4) = -(5)^4 + 4$ $= -(625) + 4$ $= -621$
5	$f(5) = (3)^5 + 1$ $= 243 + 1$ $= 244$
6	$f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3$ $= \frac{1}{81} - 3$ $= \frac{1}{81} - \frac{243}{81}$ $= -\frac{242}{81}$
7	$f(x) = 4^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
8	$f(x) = 9^{-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

9	$f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
10	$f(x) = 3(6)^x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-5, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص

13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(-6, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$ لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$ مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R مدى هذا الاقتران هو $(1, \infty)$ الاقتران $f(x)$ متزايد
15	$f(0) = 7000(1.2)^0$ $= 7000(1)$ $= 7000$ عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة هو 7000 خلية
16	$f(12) = 7000(1.2)^{12}$ ≈ 62413 عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة هو 62413 خلية تقريبًا
17	$10080 = 7000(1.2)^x$ $1.44 = (1.2)^x$ $(1.2)^2 = (1.2)^x$ $x = 2$ بعد ساعتين من بدء التجربة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية
18	$f(1) = 100(0.97)^1$ $= 100(0.97)$ $= 97$ نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%
19	$f(3) = 100(0.97)^3$ ≈ 91 نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%
20	$P(1) = 100(0.3)^1$ $= 100(0.3)$ $= 30$ نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأوليّ للمرض هي 30%

21	$9 = 100(0.3)^t$ $0.09 = (0.3)^t$ $(0.3)^2 = (0.3)^t$ $t = 2$ بعد سنتين تصبح نسبة المتعافين 9%
22	$f(x) = ab^x$ من التمثيل البياني نلاحظ أن المقطع y هو 1 ، إذن عندما $x = 0$ فإن $y = 1$ نعوض $x = 0$ و $y = 1$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $1 = ab^0$ $1 = a \times 1$ $a = 1$ نلاحظ أيضًا أن النقطة $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ تقع على منحنى الاقتران، نعوض $x = 1$ و $y = \frac{1}{4}$ في قاعدة الاقتران، فنحصل على: $\frac{1}{4} = ab^1$ $\frac{1}{4} = (1)b^1$ $b = \frac{1}{4}$ ومنه فإن قاعدة هذا الاقتران هي: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
23	الاقتران المختلف هو $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ لأنه الاقتران الوحيد المتناقص والاقترانات الأخرى متزايدة.
24	$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$ $= \frac{b^{x+1}}{b^x}$ $= b$

الدرس الثاني: النمو والاضمحلال الأسّي

مسألة اليوم صفحة 18	
	$A(t) = a(1+r)^t = 10.8(1+0.026)^t$ $t = 2030 - 2020 = 10$ $A(10) = 10.8(1+0.026)^{10} \approx 13.960$ العدد التقريبي للسكان عام 2030م هو 13960000 نسمة
أتحقق من فهمي صفحة 19	
a	$A(t) = 327(1+0.18)^t$ $A(t) = 327(1.18)^t$
b	$A(3) = 327(1.18)^3$ ≈ 537 عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة هو 537 بقرة تقريبًا.
أتحقق من فهمي صفحة 21	
a	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 28500(1-0.05)^t$ $A(t) = 28500(0.95)^t$
b	$A(4) = 28500(0.95)^4$ ≈ 23213 ثمن السيّارة بعد 4 سنوات هو 23213 دينارًا تقريبًا
أتحقق من فهمي صفحة 22	
	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 5000\left(1+\frac{0.0225}{2}\right)^{2\times5}$ ≈ 5591.85 جملة المبلغ بعد 3 سنوات: JD 5591.85 تقريبًا.

	أتحقق من فهمي صفحة 23
	$A = Pe^{rt}$ $= 6300e^{0.032\times 9}$ ≈ 8402.67 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 8402.67 تقريبًا.
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 24
1	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 150(1+0.08)^t$ $A(t) = 150(1.08)^t$
2	$A(5) = 150(1.08)^5$ ≈ 220 عدد المشاركين بعد 5 سنوات 220 تقريبًا.
3	$A(t) = a(1+r)^t$ $A(t) = 50000(1+0.15)^t$ $A(t) = 50000(1.15)^t$
4	$t = 2025 - 2019 = 6$ $A(6) = 50000(1.15)^6$ ≈ 115653 عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م: 115653 تقريبًا.
5	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 17350(1-0.035)^t$ $A(t) = 17350(0.965)^t$
6	$A(3) = 17350(0.965)^3$ ≈ 15591.27 ثمن السيّارة بعد 3 سنوات: JD15591.27 تقريبًا.
7	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(t) = 15275(1-0.27)^t$ $A(t) = 15275(0.73)^t$

8	$A(7) = 15275(0.73)^7$ ≈ 1687 عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 7 ساعات: 1687 خلية تقريبًا.
9	$A(t) = a(1-r)^t$ $A(5) = 1550(1-0.25)^5$ $= 1550(0.75)^5$ ≈ 368 العدد المتبقي من الدجاج بعد 5 أيام من المرض: 368 دجاجة تقريبًا.
10	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12t}$
11	$A = 1200\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{12\times5}$ ≈ 1974.37 جملة المبلغ بعد 5 سنوات: JD 1974.37 تقريبًا.
12	$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ $= 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365t}$
13	$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365\times6}$ ≈ 10262.45 جملة المبلغ بعد 6 سنوات: JD 10262.45 تقريبًا.
14	$A = Pe^{rt}$ $= 9000e^{0.036\times7}$ ≈ 11579.36 جملة المبلغ بعد 7 سنوات: JD 11579.36 تقريبًا.

15	$A = Pe^{rt}$ $= 8200e^{0.049\times 9}$ ≈ 12744.94 جملة المبلغ بعد 9 سنوات: JD 12744.94 تقريبًا.
16	$P(t) = 20e^{0.03t}$ $P(72) = 20e^{0.03\times 72}$ ≈ 173 عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة: 173 ذبابة تقريبًا.
17	الخطأ الذي ارتكبه رامي هو أنه كتب معدل الفائدة السنوي 1.25 وكان ينبغي كتابته: 0.0125 $A = 250\left(1+\frac{0.0125}{4}\right)^{4(3)} \approx 259.54$
18	النسبة المئوية للزيادة 200%، فيكون عامل النمو $1+\frac{200}{100}=3$ إذا كان عدد الإصابات في البداية يساوي N، فإن عددها بعد t أسبوعًا هو $A(t) = N(1+r)^t = N3^t$

الدرس الثالث: الاقترانات اللوغاريتمية

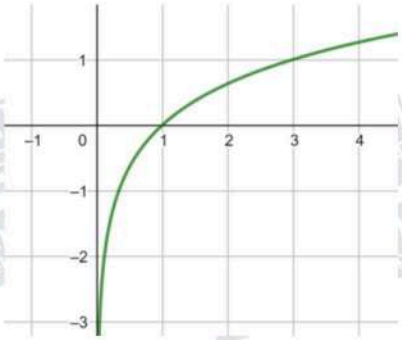
مسألة اليوم صفحة 26	
الرمز log هو اختصار لكلمة logarithm (لوغاريتم) وهو معكوس الاقتران الأسي. فإذا كان $b^x = a$ فنقول أن لوغاريتم a للأساس b هو x، وبالرموز نكتب $\log_b a = x$.	
أتحقق من فهمي مثال 1 صفحة 27	
a	$\log_2 16 = 4 \rightarrow 2^4 = 16$
b	$\log_7 7 = 1 \rightarrow 7^1 = 7$
c	$\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5 \rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$
d	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
أتحقق من فهمي مثال2 صفحة 27	
a	$7^3 = 343 \rightarrow \log_7 343 = 3$
b	$49^{\frac{1}{2}} = 7 \rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
C	$(2)^{-5} = \frac{1}{32} \rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$
d	$17^0 = 1 \rightarrow \log_{17} 1 = 0$
أتحقق من فهمي صفحة 28	
a	$\log_5 25 = y$ $5^y = 25$ $5^y = 5^2$ $y = 2$ إذن $\log_5 25 = 2$
b	$\log_8 \sqrt{8} = y$ $8^y = \sqrt{8}$ $8^y = 8^{\frac{1}{2}}$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$

c	$\log_{81} 9 = y$ $81^y = 9$ $9^{2y} = 9^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
d	$\log_3 \frac{1}{27} = y$ $3^y = \frac{1}{27}$ $3^y = \frac{1}{3^3}$ $3^y = 3^{-3}$ $y = -3$ إذن $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
أتحقق من فهمي صفحة 29	
a	$\log_2 1 = 0$
b	$\log_{32} \sqrt{32} = \log_{32} 32^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}$
c	$\log_9 9 = 1$
d	$8^{\log_8 13} = 13$

أتحقق من فهمي صفحة 31

a

$f(x) = \log_3 x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

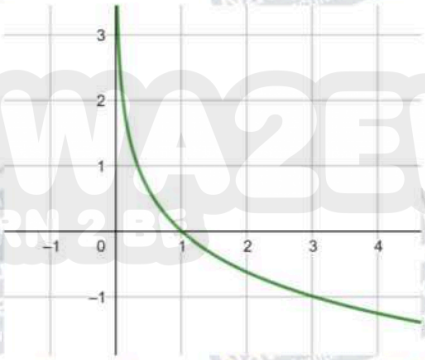
المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متزايد

b

$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y

لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y

الاقتران متناقص

أتحقق من فهمي صفحة 33

a

$f(x) = \log_7 (5 - x)$

$5 - x > 0$

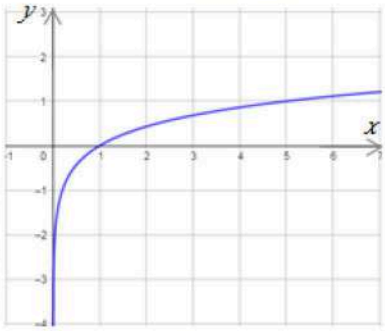
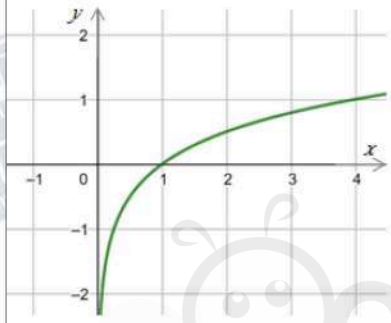
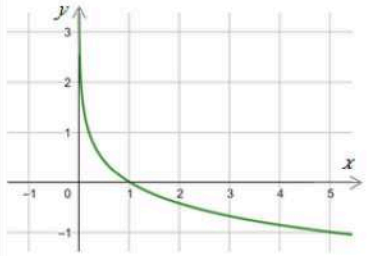
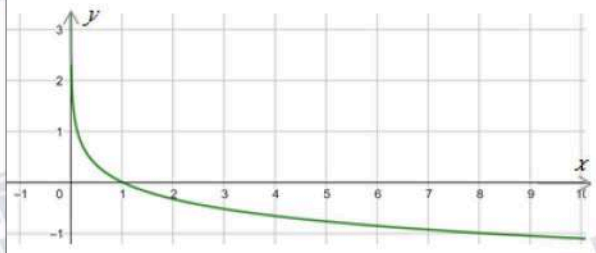
$-x > -5$

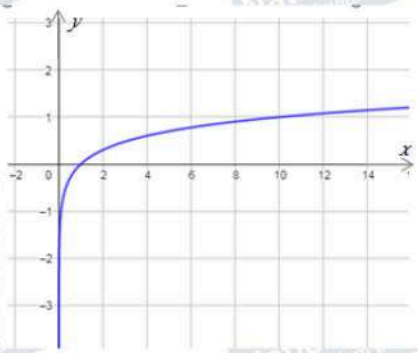
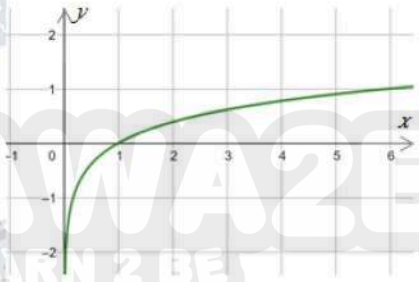
$x < 5$

مجال الاقتران هو $(-\infty, 5)$

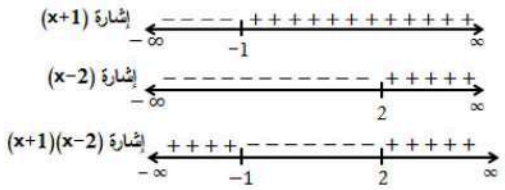
b	$f(x) = \log_5(9+3x)$ $9+3x > 0$ $3x > -9$ $x > -3$ مجال الاقتران هو $(-3, \infty)$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 33
1	$\log_7 343 = 3 \rightarrow 7^3 = 343$
2	$\log_4 256 = 4 \rightarrow 4^4 = 256$
3	$\log_{125} 5 = \frac{1}{3} \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$
4	$\log_{36} 6 = 0.5 \rightarrow 36^{0.5} = 6$
5	$\log_9 1 = 0 \rightarrow 9^0 = 1$
6	$\log_{57} 57 = 1 \rightarrow 57^1 = 57$
7	$2^6 = 64 \rightarrow \log_2 64 = 6$
8	$4^{-3} = \frac{1}{64} \rightarrow \log_4 \frac{1}{64} = -3$
9	$6^3 = 216 \rightarrow \log_6 216 = 3$
10	$5^{-3} = 0.008 \rightarrow \log_5 0.008 = -3$
11	$51^1 = 51 \rightarrow \log_{51} 51 = 1$
12	$9^0 = 1 \rightarrow \log_9 1 = 0$
13	$\log_3 81 = \log_3 3^4$ $= 4$
14	$\log_{25} 5 = y$ $25^y = 5$ $5^{2y} = 5^1$ $2y = 1$ $y = \frac{1}{2}$ إذن $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
15	$\log_2 32 = \log_2 2^5$ $= 5$ إذن $\log_2 32 = 5$

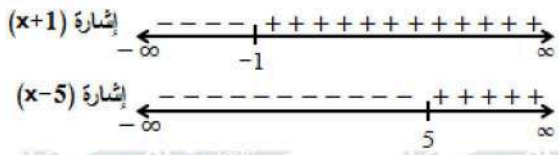
16	$\log_{49} 343 = y$ $49^y = 343$ $7^{2y} = 7^3$ $2y = 3$ $y = \frac{3}{2}$ إذن $\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$
17	$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $= -3$
18	$\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$
19	$\log_{\frac{1}{4}} 4 = y$ $\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4$ $4^{-y} = 4^1$ $-y = 1$ $y = -1$ إذن $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$
20	$(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$
21	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2^7}} = \log_2 \frac{1}{(2)^{\frac{7}{2}}}$ $= \log_2 (2)^{-\frac{7}{2}}$ $= -\frac{7}{2}$
22	$\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}}$ $= \frac{1}{5}$
23	$\log_{10}(1 \times 10^{-9}) = \log_{10} 10^{-9}$ $= -9$
24	$8^{\log_8 5} = 5$

25	$f(x) = \log_5 x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
26	$f(x) = \log_4 x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
27	$f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص
28	$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متناقص

29	$f(x) = \log_{10} x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
30	$f(x) = \log_6 x$  مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ أي $(0, \infty)$ مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R المقطع x هو 1 ، ولا يوجد مقطع y لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو المحور y الاقتران متزايد
31	$f(x) = \log_3(x-2)$ $x - 2 > 0$ $x > 2$ مجال هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
32	$f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$ $x + 1 > 0$ $x > -1$ مجال هذا الاقتران هو $(-1, \infty)$
33	$f(x) = -3\log_4(-x)$ $-x > 0$ $x < 0$ مجال هذا الاقتران هو $(-\infty, 0)$

34	$f(x) = \log_a x$ $f(32) = \log_a 32$ $5 = \log_a 32$ $a^5 = 32$ $a^5 = (2)^5$ $a = 2$
35	$f(x) = \log_c x$ $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_c \frac{1}{4}$ $-4 = \log_c \frac{1}{4}$ $c^{-4} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{c^4} = \frac{1}{4}$ $c^4 = 4 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \pm\sqrt{2}$ ولأن أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا فإن: $c = \sqrt{2}$
36	$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ $P(4) = 10 + 20\log_5(4+1)$ $= 10 + 20\log_5 5$ $= 10 + 20(1)$ $= 30$ $P(24) = 10 + 20\log_5(24+1)$ $= 10 + 20\log_5 25$ $= 10 + 20\log_5 5^2$ $= 10 + 20(2)$ $= 50$ $P(124) = 10 + 20\log_5(124+1)$ $= 10 + 20\log_5 125$ $= 10 + 20\log_5 5^3$ $= 10 + 20(3)$ $= 70$
37	القيمة $P(4) = 30$ تعني أن إنفاق JD400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 30000 من بيع المنتج القيمة $P(24) = 50$ تعني أن إنفاق JD 2400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 50000 من بيع المنتج القيمة $P(124) = 70$ تعني أن إنفاق JD 12400 على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته JD 70000 من بيع المنتج

38	$f(x)=\log_3 x$ c لأن مجال الاقتران هو $(0,\infty)$ وهو متزايد ويمر منحناه بالنقطة (3, 1) حيث $f(3)=\log_3 3=1$
39	$f(x)=\log_3(-x)$ b لأن مجال الاقتران هو $(-\infty,0)$، ويمر منحناه بالنقطة (-3,1) حيث $f(-3)=\log_3(-(-3))=\log_3(3)=1$
40	$g(x)=-\log_3 x$ a لأن مجال الاقتران هو $(0,\infty)$ وهو متناقص ويمر منحناه بالنقطة (3,-1) حيث $f(3)=-\log_3 3=-1$
41	$f(x)=\log_3(x^2)$ بما أنّ $x^2>0$ لجميع الأعداد الحقيقية عدا العدد 0 فإن مجال هذا الاقتران هو $R-\{0\}$ خط التقارب الرأسي هو $x=0$ (المحور y)
42	$f(x)=\log_3(x^2-x-2)$ $x^2-x-2>0$ $(x-2)(x+1)>0$  نلاحظ أن $(x-2)(x+1)>0$ في الفترتين$(-\infty,-1)$، و$(2,\infty)$ إذن، مجال الاقتران هو $(-\infty,-1),(2,\infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x=-1,x=2$ وهما جذرا المعادلة $x^2-x-2=0$

43	$f(x)=\log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$ يكون $\frac{x+1}{x-5}>0$ عندما يكون البسط والمقام موجبان معًا، أو سالبان معًا  نلاحظ أن $x+1$، و$x-5$ لهما الإشارة نفسها في الفترتين $(-\infty,-1)$، و$(5,\infty)$ إذن، مجال هذا الاقتران هو $(-\infty,-1),(5,\infty)$ خطا التقارب الرأسيان هما $x=-1,x=5$ وهما جذرا المعادلتين $x-5=0,x+1=0$
44	الكتابة الصحيحة للصورة اللوغاريتمية هي: $\log_4\frac{1}{64}=-3$

الدرس الرابع: قوانين اللوغاريتمات

	مسألة اليوم صفحة 35
	$L = 10\log_{10} R$ $L = 10\log_{10}(100 \times 10^6)$ $= 10\log_{10} 10^8 = 10 \times 8 = 80$ شدة الصوت تساوي 80 ديسيبل
	أتحقق من فهمي صفحة 36
a	$\log_b 14 = \log_b(2 \times 7)$ $= \log_b 2 + \log_b 7$ $\approx 0.43 + 1.21$ ≈ 1.64
b	$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7$ $\approx 0.43 - 1.21$ ≈ -0.78
c	$\log_b 32 = \log_b 2^5$ $= 5\log_b 2$ $\approx 5 \times 0.43$ ≈ 2.15
d	$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49$ $= 0 - \log_b 7^2$ $= 0 - 2\log_b 7$ $\approx 0 - 2 \times 1.21$ ≈ -2.42
	أتحقق من فهمي صفحة 38
a	$\log_2 a^2 b^9 = \log_2 a^2 + \log_2 b^9$ $= 2\log_2 a + 9\log_2 b$
b	$\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$ $= 3\log_5 (x+1) - \log_5 8$
c	$\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5} = \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5$ $= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$ $= 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$

d	$\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7b^2}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{3}\log_b \frac{x^7b^2}{y^5}$ $= \frac{1}{3}(\log_b x^7b^2 - \log_b y^5)$ $= \frac{1}{3}(\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5)$ $= \frac{1}{3}(7\log_b x + 2\log_b b - 5\log_b y)$ $= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3}\log_b b - \frac{5}{3}\log_b y$ $= \frac{7}{3}\log_b x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\log_b y$
	أتحقق من فهمي صفحة 39
a	$\log_5 a + 3\log_5 b = \log_5 a + \log_5 b^3$ $= \log_5 ab^3$
b	$5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z = \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$ $= \log_b \frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9}$ $= \log_b \frac{x^5\sqrt{y}}{z^9}$

أتحقق من فهمي صفحة 40

$$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$$
$$M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1)$$
$$= 92 - 28\log_{10} 30$$
$$= 92 - 28\log_{10}(10 \times 3)$$
$$= 92 - 28(\log_{10} 10 + \log_{10} 3)$$
$$\approx 92 - 28(1 + 0.4771)$$
$$\approx 92 - 28(1.4771)$$
$$\approx 92 - 41.3588$$
$$\approx 51$$

النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا هي 51% تقريبًا

أتدرب وأحل المسائل صفحة 40

1

$$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$$
$$\approx 0.699 - 0.778$$
$$\approx -0.079$$

2

$$\log_a 30 = \log_a(5 \times 6)$$
$$= \log_a 5 + \log_a 6$$
$$\approx 0.699 + 0.778$$
$$\approx 1.477$$

3

$$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$$

4

$$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$$
$$\approx 0 - 0.778$$
$$\approx -0.778$$

5	$\log_a 900 = \log_a 30^2$ $= 2\log_a 30$ $= 2\log_a(5\times 6)$ $= 2(\log_a 5 + \log_a 6)$ $\approx 2(0.699 + 0.778)$ $\approx 2\times 1.477$ ≈ 2.954
6	$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5}$ $= \log_a 6 - \log_a 5$ $\approx 0.778 - 0.699$ ≈ 0.079
7	$\log_a(6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2$ $= \log_a 6 + 2\log_a a$ $\approx 0.778 + 2$ ≈ 2.778
8	$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2}$ $= \log_a 5^{\frac{2}{4}}$ $= \log_a 5^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a 5$ $\approx \frac{1}{2}\times 0.699$ ≈ 0.350
9	$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699\times 0.778$ ≈ 0.544
10	$\log_a x^2 = 2\log_a x$

11	$\log_a\left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc$ $= \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$ $= \log_a a - \log_a b - \log_a c$ $= 1 - \log_a b - \log_a c$
12	$\log_a(\sqrt{x}\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y}$ $= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$
13	$\log_a\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right) = \log_a \sqrt{z} - \log_a y$ $= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y$ $= \frac{1}{2}\log_a z - \log_a y$
14	$\log_a \frac{1}{x^2y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^2)$ $= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y)$ $= -2\log_a x - 2\log_a y$
15	$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a\left(\sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{x^5}\right)$ $= \log_a 2x$ $= \log_a 2 + \log_a x$
16	$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3}$ $= \log_a 1 - \log_a x^2y^3$ $= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3)$ $= 0 - (2\log_a x + 3\log_a y)$ $= -2\log_a x - 3\log_a y$
17	$\log_a(x+y-z)^7 = 7\log_a(x+y-z)$

18	$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}} = \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^2z^4}}$ $= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\sqrt{z^4}}$ $= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}z^{\frac{4}{2}}}$ $= \log_a \frac{x^6}{yz^2}$ $= \log_a x^6 - \log_a yz^2$ $= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$ $= 6\log_a x - (\log_a y + 2\log_a z)$ $= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$
19	$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$
20	$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$
21	$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ $= \log_a \frac{1}{x}$
22	$\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)}$ $= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$ $= \log_a(x-2)$
23	$2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$ $= \log_b \frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$ $= \log_b \frac{x^2 \sqrt[3]{z}}{y^3}$
24	$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$

25	$f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$ $f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2)$ $= 29 + 48.8\log_6 12$ $= 29 + 48.8\log_6(6\times 2)$ $= 29 + 48.8(\log_6 6 + \log_6 2)$ $\approx 29 + 48.8(1 + 0.3869)$ $\approx 29 + 48.8(1.3869)$ $\approx 29 + 67.68072$ ≈ 97 النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ هي 97% تقريبًا
26	$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2}$ $= \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6}$ $= \frac{3}{2}$
27	$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$
28	$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b(b-3)(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$ $= \log_b \frac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)}$ $= \log_b \frac{(b-3)\times b(b+3)}{(b-3)(b+3)}$ $= \log_b b$ $= 1$

الدرس الخامس: المعادلات الأسّية

مسألة اليوم صفحة 42	
	$A(t) = 10e^{-0.0862t}$ $0.5 = 10e^{-0.0862t}$ $0.05 = e^{-0.0862t}$ $-0.0862t = \ln 0.05$ $t = -\frac{\ln 0.05}{0.0862} \approx 35$ بعد حوالي 35 يومًا سيظل من هذه العينة $0.5\ g$
أتحقق من فهمي صفحة 43	
a	$\log 13 \approx 1.1$
b	$\log(3.1 \times 10^4) = \log 3.1 + \log 10^4$ $= \log 3.1 + 4\log 10 \approx 0.491 + 4 \approx 4.5$
c	$\ln 0.25 \approx -1.4$
أتحقق من فهمي صفحة 44	
a	$\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$
b	$\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$
أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 48	
a	$7^x = 9$ $x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$

b	$2e^{5x} = 64$ $e^{5x} = 32$ $5x = \ln 32$ $x = \frac{1}{5}\ln 32 \approx 0.6931$
c	$7^{2x+1} = 2^{x-4}$ $\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$ $(2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$ $2x\log 7 + \log 7 = x\log 2 - 4\log 2$ $2x\log 7 - x\log 2 = -\log 7 - 4\log 2$ $x(2\log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4\log 2$ $x = \frac{-\log 7 - 4\log 2}{2\log 7 - \log 2} \approx -1.4751$
d	$4^x + 2^x - 12 = 0$ $(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$ $u^2 + u - 12 = 0$ $(u+4)(u-3) = 0$ $u = -4 \quad or \quad u = 3$ $2^x = -4 \quad or \quad 2^x = 3$ المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x $2^x = 3 \quad \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

أتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 48	
	$9 = 6.5(1.014)^t$ $\frac{9}{6.5} = (1.014)^t$ $\ln\frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t \rightarrow \ln 9 - \ln 6.5 = t \ln 1.014$ $t = \frac{\ln 9 - \ln 6.5}{\ln 1.014} \approx 23$ إذن، سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة بعد 23 سنة تقريبًا من عام 2006
أتدرب وأحل المسائل صفحة 49	
1	$\log 19 \approx 1.3$
2	$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$
3	$\ln 3.1 \approx 1.1$
4	$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$
5	$\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$
6	$\ln 5 \approx 1.6$
7	$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$
8	$\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 17}{\log 1 - \log 3} \approx -2.58$
9	$\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$
10	$\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$
11	$\log 1000 = 3$
12	$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

13	$6^x = 121$ $\log 6^x = \log 121 \rightarrow x \log 6 = \log 121$ $\rightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$
14	$-3e^{4x} = -27$ $e^{4x} = 9$ $4x = \ln 9$ $x = \frac{1}{4}\ln 9 \approx 0.5493$
15	$5^{7x-2} = 3^{2x}$ $\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$ $(7x-2)\log 5 = (2x)\log 3$ $7x \log 5 - 2\log 5 = 2x \log 3$ $7x \log 5 - 2x \log 3 = 2\log 5$ $x(7\log 5 - 2\log 3) = 2\log 5$ $x = \frac{2\log 5}{7\log 5 - 2\log 3} \approx 0.3549$
16	$25^x + 5^x - 42 = 0$ $(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$ $u^2 + u - 42 = 0$ $(u+7)(u-6) = 0$ $u = -7 \quad or \quad u = 6$ $5^x = -7 \quad or \quad 5^x = 6$ المعادلة $5^x = -7$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x $5^x = 6 \rightarrow x\log 5 = \log 6 \rightarrow x = \frac{\log 6}{\log 5} \approx 1.1133$
17	$2(9)^x = 32 \rightarrow 9^x = 16 \rightarrow x\log 9 = \log 16$ $\rightarrow x = \frac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$

18	$27^{2x+3} = 2^{x-5}$ $\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$ $(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$ $2x\log 27 + 3\log 27 = x\log 2 - 5\log 2$ $2x\log 27 - x\log 2 = -3\log 27 - 5\log 2$ $x(2\log 27 - \log 2) = -3\log 27 - 5\log 2$ $x = \frac{-3\log 27 - 5\log 2}{2\log 27 - \log 2} \approx -2.2638$
19	$2P = Pe^{0.05t}$ $2 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 2$ $t = \frac{1}{0.05}\ln 2$ $= 20\ln 2 \approx 14$ بعد 14 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي
20	$3P = Pe^{0.05t}$ $3 = e^{0.05t}$ $0.05t = \ln 3$ $t = 20\ln 3 \approx 22$ بعد 22 سنة تقريبًا تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي

21	$97 = 873e^{-0.078t}$ $\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$ $\frac{1}{9} = e^{-0.078t}$ $-0.078t = \ln\frac{1}{9}$ $-0.078t = \ln 1 - \ln 9$ $-0.078t = 0 - \ln 9$ $-0.078t = -\ln 9$ $t = \frac{\ln 9}{0.078} \approx 28$ بعد 28سنة تقريبًا يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا
22	$f(x) = e^{0.5x+3}$ بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى $f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$ $k = e^2 \approx 7.39$ بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى $f(h) = e^{0.5h+3}$ $100 = e^{0.5h+3}$ $0.5h + 3 = \ln 100$ $0.5h = \ln 100 - 3$ $h = \frac{1}{0.5}\ln 100 - \frac{3}{0.5}$ $h = 2\ln 100 - 6 \approx 3.2$

23	$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$ $3^x\left(3^x + \frac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5$ $3^{2x} + 4 = 5(3^x)$ $3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$ $(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$ $u^2 - 5u + 4 = 0$ $(u-4)(u-1) = 0$ $u = 4 \quad or \quad u = 1$ $3^x = 4 \quad or \quad 3^x = 1$ $3^x = 4 \quad \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$ $3^x = 1 \quad \rightarrow x = \log_3 1 = 0$

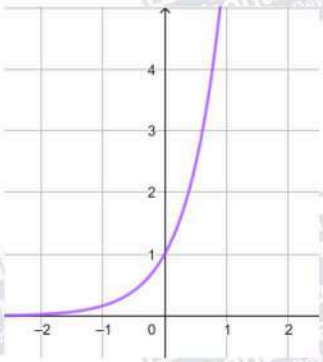
اختبار نهاية الوحدة صفحة 50	
1	d
2	c
3	a
4	c
5	a
6	b
7	b
8	a
9	b
10	$\log_5 16 = \log_5 4^2$ $= 2\log_5 4$ $= 2k$

11

$$\log_5 0.25 = \log_5 \frac{25}{100}$$
$$= \log_5 \frac{1}{4}$$
$$= \log_5 1 - \log_5 4$$
$$= 0 - \log_5 4$$
$$= -k$$

12

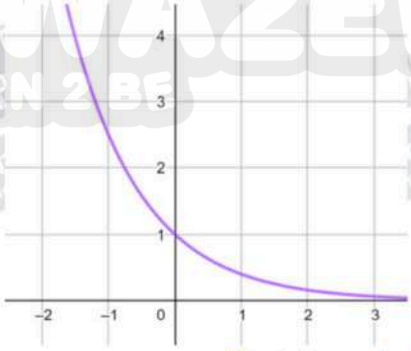
$f(x) = 6^x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

13

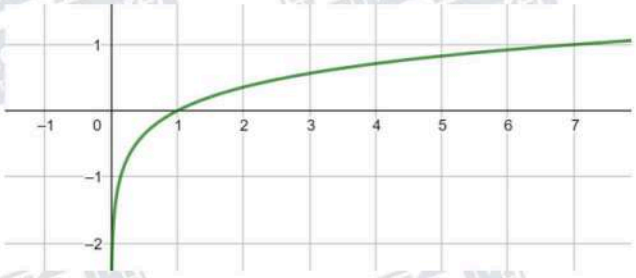
$g(x) = (0.4)^x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R
مدى هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

14

$h(x) = \log_7 x$

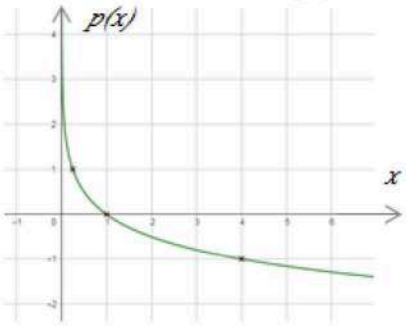


مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R

15

$p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$x = (\frac{1}{4})^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	1
(x, y)	(4, -1)	(1,0)	(0.25, 1)



مجال هذا الاقتران هو $(0, \infty)$

مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقة R

16

$$8^x = 2$$
$$2^{3x} = 2^1$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$$

17

$$-3e^{4x+1} = -96$$
$$e^{4x+1} = 32$$
$$4x + 1 = \ln 32$$
$$4x = \ln 32 - 1$$
$$x = \frac{\ln 32 - 1}{4} \approx 0.6164$$

18

$$11^{2x+3} = 5^x$$
$$\log 11^{2x+3} = \log 5^x$$
$$(2x + 3)\log 11 = (x)\log 5$$
$$2x \log 11 + 3 \log 11 = x \log 5$$
$$2x \log 11 - x \log 5 = -3 \log 11$$
$$x(2 \log 11 - \log 5) = -3 \log 11$$
$$x = \frac{-3 \log 11}{2 \log 11 - \log 5} \approx -2.2577$$

19	$49^x + 7^x - 72 = 0$ $(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$ $u^2 + u - 72 = 0$ $(u+9)(u-8) = 0$ $u = -9 \quad or \quad u = 8$ $7^x = -9 \quad or \quad 7^x = 8$ المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم المتغير x $7^x = 8 \quad \rightarrow x = \log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$
20	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ $A = 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12\times 15} \approx 4688.87$ جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريبًا
21	$A = Pe^{rt}$ $A = 800e^{0.045\times 5} \approx 1001.86$ جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD1001.86 تقريبًا
22	$v(t) = 30e^{0.1t}$ $10000 = 30e^{0.1t}$ $\frac{1000}{3} = e^{0.1t}$ $0.1t = \ln\frac{1000}{3}$ $t = \frac{1}{0.1}\ln\frac{1000}{3} \approx 58.1$ الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريبًا
23	$N(t) = 100e^{0.045t}$ $N(0) = 100e^{0.045\times 0} = 100$ العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العيّنة هو 100 خلية
24	$N(5) = 100e^{0.045\times 5} \approx 125$ عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريبًا

25	$1400 = 100e^{0.045t}$ $14 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 14$ $t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$ بعد 59 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية
26	$200 = 100e^{0.045t}$ $2 = e^{0.045t}$ $0.045t = \ln 2$ $t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$ بعد 15 يومًا تقريبًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي
27	$A(h) = a(1-r)^h$ $A(h) = 1000(1-0.12)^h$ $= 1000(0.88)^h$
28	$500 = 1000(0.88)^h$ $0.5 = (0.88)^h \rightarrow \log 0.5 = h \log 0.88$ $\rightarrow h = \frac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$ عند ارتفاع 5.42 كيلومتر تقريبًا فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البحر
29	$S(x) = 400 + 250 \log x$ $S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$ أي أن إنفاق JD 10000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 650000

إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثانية: التفاضل

الدرس الأول: قاعدة السلسلة

مسألة اليوم صفحة 54

$$N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$$

$$N'(t) = \frac{30\left(\frac{-2t}{2\sqrt{9-t^2}}\right)}{9-t^2} = \frac{-30t}{(9-t^2)\sqrt{9-t^2}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 56

a

$$y = (x^2-2)^4$$
$$u = x^2 - 2$$
$$y = u^4$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= 4u^3 \times 2x$$
$$= 8xu^3$$
$$= 8x(x^2-2)^3$$

b

$$y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$$
$$u = x^3 + 4x$$
$$y = u^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4$$
$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4)$$
$$= \frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$$

أتحقق من فهمي صفحة 58

a

$$f'(x) = 5(x^4 + 1)^4(4x^3)$$
$$= 20x^3(x^4 + 1)^4$$
$$f'(1) = 20(1)^3((1)^4 + 1)^4 = 20 \times 16 = 320$$

b

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} = (x^2 + 3x + 2)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 3)$$
$$= \frac{1}{2}(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$
$$f'(2) = \frac{2(2) + 3}{2\sqrt{2^2 + 3 \times 2 + 2}} = \frac{7}{2\sqrt{12}}$$

c

$$f(x) = \sqrt[4]{(2x^2 - 7)^5} = (2x^2 - 7)^{\frac{5}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{5}{4}(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}(4x)$$
$$= \frac{5}{4}(4x)(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 5x \times \sqrt[4]{2x^2 - 7}$$
$$f'(4) = 5 \times 4 \times \sqrt[4]{2(4)^2 - 7} = 20\sqrt[4]{25}$$

	أتحقق من فهمي صفحة 59
a	$f'(x) = 4(1+x^3)^3(3x^2) + 8x^7$ $= 12x^2(1+x^3)^3 + 8x^7$
b	$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3)^3$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x-3)^2(1)$ $= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - 3(x-3)^2$
	أتحقق من فهمي صفحة 61
a	$P'(t) = \frac{20t+1}{2\sqrt{10t^2+t+229}}$
b	$t = 2020 - 2015 = 5$ $P'(5) = \frac{101}{2\sqrt{250+5+229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}} = \frac{101}{2\times 22} = \frac{101}{44} \approx 2.3$ إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.

أتحقق من فهمي صفحة 62

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$$
$$\frac{du}{dx} = -4$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= (5u^4 + 3u^2) \times -4$$
$$= -4(5(3-4x)^4 + 3(3-4x)^2)$$
$$= -20\,(3-4x)^4 - 12(3-4x)^2$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = -20(625) - 12(25) = -12800$$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 62

1
$$f'(x) = 4(1+2x)^3(2)$$
$$= 8(1+2x)^3$$

2
$$f'(x) = -5(3-2x^2)^{-6}(-4x)$$
$$= 20x(3-2x^2)^{-6}$$
$$= \frac{20x}{(3-2x^2)^6}$$

3
$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-7)$$
$$= \frac{3}{2}(2x-7)\sqrt{x^2-7x+1}$$

4
$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{7-x}}$$

5
$$f'(x) = 16(2+8x)^3(8)$$
$$= 128(2+8x)^3$$

6
$$f(x) = (4x-8)^{-\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}(4)$$
$$= -\frac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}$$
$$= \frac{-4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^4}}$$

7	$f'(x)=\dfrac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}$
8	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2(x-3)$
9	$f(x)=\left(2x-x^5\right)^{\frac{1}{3}}+(4-x)^2$ $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(2x-x^5\right)^{-\frac{2}{3}}(2-5x^4)+2(4-x)(-1)$ $=\dfrac{2-5x^4}{3\sqrt[3]{(2x-x^5)^2}}-8+2x$
10	$f'(x)=4\left(\sqrt{x}+5\right)^3\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $=\dfrac{2\left(\sqrt{x}+5\right)^3}{\sqrt{x}}$
11	$f'(x)=\dfrac{3(2x-5)^2(2)}{2\sqrt{(2x-5)^3}}$ $=\dfrac{3(2x-5)^2}{\sqrt{(2x-5)^3}}=3\sqrt{2x-5}$
12	$f'(x)=5(2x^3-3x^2+4x+1)^4(6x^2-6x+4)$
13	$f(x)=(4x+1)^{-2}$ $f'(x)=-2(4x+1)^{-3}(4)$ $=-\dfrac{8}{(4x+1)^3}$ $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{8}{\left(4\times\frac{1}{4}+1\right)^3}=-1$
14	$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$ $f'(3)=\dfrac{-3}{\sqrt{25-(3)^2}}=-\dfrac{3}{4}$

15

$$\frac{dy}{du} = 10u + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u + 3) \times 3x^2$$

$$= (10(x^3 + 1) + 3) \times 3x^2$$

$$= (10x^3 + 13) \times 3x^2$$

$$= 30x^5 + 39x^2$$

16

$$y = (2u + 5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{2}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$$

$$= \frac{2}{3}(2(x^2 - x) + 5)^{-\frac{2}{3}} \times (2x - 1)$$

$$= \frac{4x - 2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 2x + 5)^2}}$$

17	$\frac{dy}{du} = 6u - 5$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (6u - 5) \times (2x)$ $= (6(x^2 - 1) - 5) \times (2x)$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = (6(4 - 1) - 5) \times (4) = 52$
18	$\frac{dy}{du} = 3(1 + u^2)^2(2u) = 6u(1 + u^2)^2$ $\frac{du}{dx} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 6u(1 + u^2)^2 \times (2)$ $= 12(2x - 1)(1 + (2x - 1)^2)^2$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=1} = 12(2 - 1)(1 + (2 - 1)^2)^2 = 48$
19	$C'(x) = \frac{1000(2x - 0.1)}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{1000x - 50}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$
20	$C'(20) = \frac{1000(20) - 50}{\sqrt{(20)^2 - 0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$
21	$N(t) = 400(1 - 3(t^2 + 2)^{-2})$ $N'(t) = 400\left(6(t^2 + 2)^{-3}(2t)\right) = \frac{4800t}{(t^2 + 2)^3}$ $N'(1) = \frac{4800}{(1 + 2)^3} \approx 178$

22	$N'(4) = \dfrac{4800(4)}{(16+2)^3} \approx 3$
23	$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \times h'(x)$ $f'(3) = g'\big(h(3)\big) \times h'(3)$ $= g'(2) \times -2$ $= 6 \times -2 = -12$
24	$f'(x) = 3\big(h(x)\big)^2 \times h'(x)$ $f'(3) = 3\big(h(3)\big)^2 \times h'(3)$ $= 3(2)^2 \times -2 = -24$
25	$h'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$ $h'(2) = f'\big(g(2)\big) \times g'(2)$ $= f'(3) \times -1$ نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$ $f(u) = u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 2u \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 = 6$ إذن، $h'(2) = f'(3) \times -1$ $= 6 \times -1 = -6$
26	$y = (x^2-4)^5$ $0 = (x^2-4)^5 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ $\rightarrow x = 2 \text{ or } x = -2$ $\dfrac{dy}{dx} = 5(x^2-4)^4(2x) = 10x(x^2-4)^4$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=2} = 10(2)(2^2-4)^4 = 0$ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=-2} = 10(-2)((-2)^2-4)^4 = 0$
27	$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه بدون تطبيق قاعدة السلسلة

28	$f(x)=(2x+(x^2+x)^4)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x)=\frac{1}{3}(2x+(x^2+x)^4)^{-\frac{2}{3}}\left(2+4(x^2+x)^3(2x+1)\right)$ $=\frac{2+4(x^2+x)^3(2x+1)}{3\sqrt[3]{(2x+(x^2+x)^4)^2}}$

الدرس الثاني: مشتقتا الضرب والقسمة

مسألة اليوم صفحة 64	
	$\frac{dh}{dt}=\frac{(8+t^3)(3t^2)-(t^3)(3t^2)}{(8+t^3)^2}$ $=\frac{24t^2+3t^5-3t^5}{(8+t^3)^2}$ $=\frac{24t^2}{(8+t^3)^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 65	
a	$f'(x)=(x^3+4)(14x-4)+(7x^2-4x)(3x^2)$ $=14x^4-4x^3+56x-16+21x^4-12x^3$ $=35x^4-16x^3+56x-16$
b	$f'(x)=(\sqrt{x}+1)(3)+(3x-2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $=3\sqrt{x}+3+\frac{3x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ $=3\sqrt{x}+3+\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ $=\frac{9}{2}\sqrt{x}+3-\frac{1}{\sqrt{x}}$

أتحقق من فهمي صفحة 67

a

$$f'(x) = \frac{(x-2)(3)-(3x+1)(1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{(x-2)^2}$$

b

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-3x^{-4})-(x^{-3})(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^{-2}-3x^{-4}-2x^{-2}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^{-2}-3x^{-4}}{(x^2+1)^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 68

a

$$P'(t) = \frac{(2t^2+9)(0)-(5)(4t)}{(2t^2+9)^2}$$

$$= \frac{-20t}{(2t^2+9)^2}$$

b

$$P'(2) = \frac{-40}{(8+9)^2} = \frac{-40}{289} \approx -0.14$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 140 نسمة لكل سنة بعد سنتين من الآن

أتحقق من فهمي صفحة 70

a

$$f'(x) = \frac{-(1)(-3x^2)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$$

b	$f'(x)=\frac{-(3)(2)}{(2x+1)^2}$ $=\frac{-6}{(2x+1)^2}$
	أتحقق من فهمي صفحة 71
a	$f'(x)=(20x)\times 6(4x^3-1)^5(12x^2)+(4x^3-1)^6(20)$ $=(4x^3-1)^5(1520x^3-20)$
b	$f'(x)=\frac{(x+2)^4(2x)-(x^2-1)\times 4(x+2)^3\times 1}{(x+2)^8}$ $=\frac{2x(x+2)^4-4(x^2-1)(x+2)^3}{(x+2)^8}$ $=\frac{(x+2)^3(2x(x+2)-4(x^2-1))}{(x+2)^8}$ $=\frac{-2x^2+4x+4}{(x+2)^5}$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 71
1	$f'(x)=x\times 5(1+3x)^4(3)+(1+3x)^5(1)$ $=(1+3x)^4(18x+1)$
2	$f'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x+3)(1)}{(x+1)^2}$ $=\frac{-2}{(x+1)^2}$
3	$f'(x)=(2x+1)^5\times 4(3x+2)^3(3)+(3x+2)^4\times 5(2x+1)^4\times 2$ $=2(2x+1)^4(3x+2)^3(27x+16)$

4	$f'(x)=\frac{(2x-1)^2(6x)-(3x^2)\times 2(2x-1)(2)}{(2x-1)^4}$ $=\frac{6(2x-1)(2x^2-x-2x^2)}{(2x-1)^4}$ $=\frac{-6x}{(2x-1)^3}$
5	$f'(x)=\frac{(\sqrt{5x+3})(6)-(6x)\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}\right)}{5x+3}=\frac{30x+18-15x}{(5x+3)\sqrt{5x+3}}$ $=\frac{15x+18}{(5x+3)\sqrt{5x+3}}$
6	$f'(x)=(4x-1)(2x)+(x^2-5)(4)$ $=8x^2-2x+4x^2-20$ $=12x^2-2x-20$
7	$f'(x)=\frac{(2x-7)(2x)-(x^2+6)(2)}{(2x-7)^2}$ $=\frac{4x^2-14x-2x^2-12}{(2x-7)^2}$ $=\frac{2x^2-14x-12}{(2x-7)^2}$
8	$f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})(1)-(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$ $=\frac{1+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$ $=\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$

9	$f'(x) = (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \left(\sqrt{x-1}\right)(1)$ $= \frac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1} = \frac{x+1+2x-2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x-1}}$
10	$f'(x) = \frac{(1)(5+2x)-(x)(2)}{(5+2x)^2} - 8x^3$ $= \frac{5}{(5+2x)^2} - 8x^3$
11	$f'(x) = \frac{(-5)(2)(x+2)(1)}{(x+2)^4}$ $= \frac{-10}{(x+2)^3}$
12	$f'(x) = \left(x+\frac{2}{x}\right)(2x) + (x^2-3)\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$ $= 2x^2 + 4 + x^2 - 3 - 2 + \frac{6}{x^2}$ $= 3x^2 - 1 + \frac{6}{x^2}$
13	$f'(x) = \left(8x+\sqrt{x}\right)(10x) + (5x^2+3)\left(8+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $= 80x^2 + 10x^{\frac{3}{2}} + 40x^2 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$ $= 120x^2 + \frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}} + 24 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
14	$f(x) = 5x - 25 + 50x^{-2} - 10x^{-3}$ $f'(x) = 5 - 100x^{-3} + 30x^{-4}$
15	$f'(x) = (x^2) \times 3(3x-1)^2 \times 3 + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)3(3-1)^2 \times 3 + (3(1)-1)^3(2(1)) = 36 + 16 = 52$

16	$f'(x) = (3x)\left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}\right) + \left(\sqrt{5-x}\right)(3)$ $f'(4) = \frac{(3\times 4)(-1)}{2\sqrt{5-4}} + (\sqrt{5-4})(3)$ $= \frac{-12}{2\times 1} + 1\times 3 = -6+3 = -3$
17	$f'(x) = \frac{(2x+1)(1)-(x-1)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{3}{(2x+1)^2}$ $f'(2) = \frac{3}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$
18	$f'(x) = (2x+3)\times 2(x-2)(1) + (x-2)^2(2)$ $f'(0) = 3\times 2(-2) + 2(-2^2) = -12+8 = -4$
19	$S'(t) = \frac{(4+0.3t)(2000) - 2000t(0.3)}{(4+0.3t)^2}$ $= \frac{8000}{(4+0.3t)^2}$
20	$t = 2030 - 2020 = 10$ $S'(10) = \frac{8000}{(4+3)^2} = \frac{8000}{49} \approx 163$ يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030م.
21	**ملاحظة:** **نرجو حذف كلمة (بالآلاف) من مقدمة السؤال لتدل P على عدد السكان بوحدة الفرد الواحد (شخص أو نسمة).** $P'(t) = 12(2t^2+100)(1) + (t+20)\times 12(4t) = 12(6t^2+80t+100)$
22	$P'(6) = 12(216+480+100) = 12(796) = 9552$ يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن.

23

$$M'(t) = \frac{(t+1.9)(5.8) - (5.8t)(1)}{(t+1.9)^2}$$
$$= \frac{11.02}{(t+1.9)^2}$$
$$M'(5) = \frac{11.02}{(5+1.9)^2} \approx 0.23$$

24

$$\frac{dy}{du} = u \times 3(u^2+3)^2(2u) + (u^2+3)^3(1) = (u^2+3)^2(7u^2+3)$$
$$\frac{du}{dx} = 2(x+3)(1) = 2x+6$$

عندما $x = -2$، فإن $u = (-2+3)^2 = 1$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=1} \times \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=-2}$$
$$\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=1} = (1^2+3)^2(7(1^2)+3) = 16(10) = 160$$
$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=-2} = 2(-2)+6 = 2$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = 160 \times 2 = 320$$

25

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1) \times 3u^2 - u^3(1)}{(u+1)^2} = \frac{2u^3+3u^2}{(u+1)^2}$$
$$\frac{du}{dx} = 3(x^2+1)^2(2x) = 6x(x^2+1)^2$$

عندما $x = 1$، فإن $u = (1^2+1)^3 = 8$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=8} \times \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}$$
$$\left.\frac{dy}{du}\right|_{u=8} = \frac{2(8^3)+3(8^2)}{(8+1)^2} = \frac{1216}{81}$$
$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 6(1)(1^2+1)^2 = 24$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1216}{81} \times 24 = \frac{9728}{27}$$

26	$(fg)'(x) = (f \times g)'(x)$ $= f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(fg)'(2) = f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$ $= 4 \times 2 + 3 \times -1 = 5$
27	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2) \times f'(2) - f(2) \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{3 \times -1 - 4 \times 2}{(3)^2} = -\frac{11}{9}$
28	$(3f + fg)'(x) = 3f'(x) + f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$ $(3f + fg)'(2) = 3f'(2) + f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$ $= 3 \times -1 + 4 \times 2 + 3 \times -1 = 2$
29	$f'(x) = \left(x(4x-3)^6\right) \times 9(1-4x)^8(-4) + (1-4x)^9 \times \left(x \times 6(4x-3)^5(4) + (4x-3)^6 \times (1)\right)$ $f'(x) = -36x(4x-3)^6(1-4x)^8 + (1-4x)^9\left(24x(4x-3)^5 + (4x-3)^6\right)$ $= (4x-3)^5(1-4x)^8(-36x(4x-3) + (1-4x)(24x+4x-3))$ $= (4x-3)^5(1-4x)^8(-256x^2 + 148x - 3)$
30	$f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$ $= \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x(x+2)}{(x+5)(x+2)} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x^2+10x}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x+2)}$ $= \frac{2x}{x+2}$
31	$f'(x) = \frac{(x+2)(2) - (2x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$ $f'(3) = \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{25}$

32

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$0 = \frac{(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$$

$$(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$x = 4$$

الدرس الثالث: مشتقتا الاقتران الأسي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

مسألة اليوم صفحة 73	
	$N = 10000(1 - e^{-0.15d})$ $N'(d) = 10000(0.15e^{-0.15d})$ $= 1500e^{-0.15d}$
أتحقق من فهمي صفحة 74	
a	$f'(x) = 2e^x$
b	$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^x = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x$
c	$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x = e^x(x+1)$
أتحقق من فهمي صفحة 75	
a	$f'(x) = 7e^{7x+1}$
b	$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$
c	$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
أتحقق من فهمي صفحة 76	
a	$P'(t) = 50(-0.004)e^{-0.004t} = -0.2e^{-0.004t}$ $P'(500) = -0.2e^{-0.004(500)} = -0.2e^{-2} \approx -0.03$ تتناقص الطاقة المتبقية بمعدل 0.03 واط لكل يوم بعد 500 يوم
أتحقق من فهمي صفحة 78	
a	$f'(x) = \frac{4}{x}$
b	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$
c	$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

أتحقق من فهمي صفحة 80	
a	$f'(x)=\frac{8}{8x}=\frac{1}{x}$
b	$f'(x)=2\times\frac{7x^6}{x^7}=\frac{14}{x}$
c	$f'(x)=\frac{9}{9x+2}$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 80	
1	$f'(x)=2e^x$
2	$f'(x)=3e^{3x+9}$
3	$f'(x)=(x^2+3x-9)(e^x)+(e^x)(2x+3)=e^x(x^2+5x-6)$
4	$f'(x)=\frac{x^4e^x-e^x(4x^3)}{x^8}=\frac{xe^x-4e^x}{x^5}$
5	$f'(x)=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
6	$f'(x)=\frac{(1+e^x)(e^x)-e^x(e^x)}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$
7	$f'(x)=(e^x+2)(e^x)+(e^x-1)(e^x)=2e^{2x}+e^x$
8	$f'(x)=(e^{-2x})\times5(2x-1)^4\times2+(2x-1)^5(-2e^{-2x})$ $=2e^{-2x}(2x-1)^4(6-2x)$
9	$f'(x)=3x^2-5\times2e^{2x}=3x^2-10e^{2x}$
10	$f'(x)=\frac{3}{x}$
11	$f'(x)=(x^3)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(3x^2)=x^2+3x^2\ln x$
12	$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

13	$f'(x) = (x^2)\left(\frac{4}{4x}\right) + (\ln(4x))(2x) = x + 2x\ln(4x)$
14	$f'(x) = \frac{\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)}$
15	$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$
16	$f'(x) = 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x} = \frac{4(\ln x)^3}{x}$
17	$f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}$
18	$f'(x) = (x^4)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(4x^3) - \frac{1}{2}e^x = x^3 + 4x^3\ln x - \frac{1}{2}e^x$
19	$f'(x) = (e^{2x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2e^{2x}) = \frac{e^{2x}(1+x\ln x)}{x}$
20	$f'(x) = (\ln 3x)\left(\frac{7}{7x}\right) + (\ln 7x)\left(\frac{3}{3x}\right) = \frac{\ln 3x + \ln 7x}{x}$
21	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$
22	$f'(x) = (e^{2x-1})\left(\frac{2}{2x-1}\right) + (\ln(2x-1))(2e^{2x-1})$ $f'(1) = (e^{2-1})\left(\frac{2}{2-1}\right) + (\ln(2-1))(2e^{2-1}) = 2e + 0 = 2e$
23	$f'(x) = \frac{x\left(\frac{2x}{x^2}\right) - (\ln x^2)(1)}{x^2} = \frac{2-\ln x^2}{x^2}$ $f'(4) = \frac{2-\ln 16}{16}$

24	$P'(t) = \frac{-100 \times -e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2} = \frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$ $P'(3) = \frac{100e^{3-3}}{(1+e^{3-3})^2} = \frac{100}{4} = 25$
25	$m'(t) = (t)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)(1) = 1 + \ln t$
26	$\frac{dy}{du} = 2e^{2u}$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 2e^{2u} \times 2x$ $= 4xe^{2u}$ $= 4xe^{2(x^2+1)}$
27	$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u+1}$ $\frac{du}{dx} = e^x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{1}{u+1} \times e^x$ $= \frac{e^x}{e^x+1}$
28	$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$

29

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x}) \times \left(7 \times \frac{1}{x} - 3x^2\right) - (7\ln x - x^3)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{(e^3) \times (7 \times 1 - 3) - (7\ln 1 - 1)(3e^3)}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{4e^3 + 3e^3}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{7e^3}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{7}{e^3}$$

الدرس الرابع: مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

	مسألة اليوم صفحة 82
	$P(t) = 100 + 20\sin 2\pi t$ $\frac{dP}{dt} = 40\pi \cos 2\pi t$
	أتحقق من فهمي صفحة 83
a	$f'(x) = \cos x$
b	$f'(x) = 3 + \sin x$
c	$f'(x) = 3\cos x - 2\sin x$
	أتحقق من فهمي صفحة 84
a	$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) = -e^x \sin x + e^x \cos x$
b	$f'(x) = \frac{(\sin x)(1-\sin x) - (x+\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{\sin x - \sin^2 x - x\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x}$ $= \frac{\sin x - 1 - x\cos x}{\sin^2 x}$
	أتحقق من فهمي مثال 3 صفحة 86
a	$f'(x) = -5\sin 5x$
b	$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
c	$f'(x) = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}$

تحقق من فهمي مثال 4 صفحة 86	
	$h'(x) = 4 \times \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}t$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 86	
1	$f'(x) = -2\sin x + \cos x$
2	$f'(x) = -\sin x$
3	$f'(x) = \cos x + \sin x$
4	$f'(x) = (x)(\cos x) + (\sin x)(1)$ $= x\cos x + \sin x$
5	$f'(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$ $= -\sin^2 x + \cos^2 x$
6	$f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$ $= e^x\cos x + e^x\sin x$
7	$f'(x) = \frac{(\cos x)(e^x) - (e^x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x\cos x + e^x\sin x}{\cos^2 x}$
8	$f'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$
9	$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
10	$f'(x) = -5\sin(5x - 2)$
11	$f'(x) = 3\cos 3x - 6\sin 6x$
12	$f'(x) = -(2x - 3)\sin(x^2 - 3x - 4)$
13	$f'(x) = (e^{2x})(10\cos 10x) + (\sin 10x)(2e^{2x})$ $= 10e^{2x}\cos 10x + 2e^{2x}\sin 10x$
14	$f'(x) = (\cos x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(-2x\sin x^2)$ $= \frac{1}{x}(\cos x^2) - 2x(\ln x)\sin x^2$

15	$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$
16	$f(x) = 4(\sin x)^2$ $f'(x) = 4 \times 2(\sin x)(\cos x) = 8\sin x \cos x$
17	$f(x) = (\cos 2x)^3(\cos x)$ $f'(x) = (\cos 2x)^3(-\sin x) + (\cos x) \times 3(\cos 2x)^2 \times -2\sin 2x$ $= -(\cos 2x)^3(\sin x) - 6(\cos x)(\cos 2x)^2 \sin 2x$
18	$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} = \frac{5}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
19	$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin x)(-2\sin 2x - \cos x)$
20	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$
21	$f'(x) = \frac{(\sin x)\left(2(\ln x) \times \frac{1}{x}\right) - (\ln x)^2(\cos x)}{\sin^2 x}$ $= \frac{2\sin x \ln x - x\cos x(\ln x)^2}{x\sin^2 x}$
22	$D'(t) = 400 \times 0.4\cos 0.4t = 160\cos 0.4t$
23	$H'(t) = 2.4 \times \frac{2\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) = \frac{4.8\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$

24	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-\left((\sin x)(-\sin x)+(\cos x)(\cos x)\right)\right)$ $=\frac{1}{2}\left(1-(-\sin^2 x+\cos^2 x)\right)$ $=\frac{1}{2}(1+\sin^2 x-\cos^2 x)$ $=\frac{1}{2}(\sin^2 x+1-\cos^2 x)$ $=\frac{1}{2}(\sin^2 x+\sin^2 x)$ $=\frac{1}{2}(2\sin^2 x)$ $=\sin^2 x$
25	$f(x)=(e^x\cos x)(\sin x)^2$ $f'(x)=(e^x\cos x)(2(\sin x)^1\cos x)+(\sin x)^2\left((e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)\right)$ $=e^x\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x+\cos x\sin x)$
26	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	d
2	b
3	a
4	c
5	c
6	a
7	b
8	$(fg)'(x) = \big(f(x)\big)\big(g'(x)\big) + \big(g(x)\big)\big(f'(x)\big)$ $(fg)'(2) = \big(f(2)\big)\big(g'(2)\big) + \big(g(2)\big)\big(f'(2)\big)$ $= (3)(2) + (1)(-4) = 2$
9	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\big(g(x)\big)\big(f'(x)\big) - \big(f(x)\big)\big(g'(x)\big)}{\big(g(x)\big)^2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{\big(g(2)\big)\big(f'(2)\big) - \big(f(2)\big)\big(g'(2)\big)}{\big(g(2)\big)^2}$ $= \frac{(1)(-4) - (3)(2)}{(1)^2} = -10$
10	$(3f - 4fg)'(x) = 3f'(x) - 4\Big(\big(f(x)\big)\big(g'(x)\big) + \big(g(x)\big)\big(f'(x)\big)\Big)$ $(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4\Big(\big(f(2)\big)\big(g'(2)\big) + \big(g(2)\big)\big(f'(2)\big)\Big)$ $= 3(-4) - 4\big((3)(2) + (1)(-4)\big)$ $= -12 - 4(2)$ $= -20$
11	$h'(t) = 0.12 \times 0.1e^{0.1t}$ $= 0.012e^{0.1t}$

12	$h'(3) = 0.012e^{0.1(3)} \approx 0.016$
13	$f'(x) = \frac{(3x+1)(1)-(x)(3)}{(3x+1)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2}$ $f'(1) = \frac{1}{(3(1)+1)^2} = \frac{1}{16}$
14	$f'(x) = (x^2+2)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (x+\sqrt{x})(2x)$ $f'(4) = (4^2+2)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{4}}\right) + (4+\sqrt{4})(2\times 4) = 18\left(1+\frac{1}{4}\right) + 6(8) = 70.5$
15	$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x}$ $f'(1) = 3e^3 - 3e^{-3}$
16	$f'(x) = -2x$ $f'(20) = -2(20) = -40$
17	$f'(x) = (x^2)(3)(3x-1)^2(3) + (3x-1)^3(2x)$ $f'(1) = (1)(3)(3-1)^2(3) + (3-1)^3(2)$ $= 36 + 16 = 52$
18	$f'(x) = (x+3)^2(3e^{3x}) + (e^{3x})(2)(x+3)(1)$ $f'(2) = (2+3)^2(3e^6) + (e^6)(2)(2+3)(1)$ $= 75e^6 + 10e^6$ $= 85e^6$
19	$f'(x) = 3\times\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ $f'(e) = \frac{3}{e} - \frac{1}{e^2}$
20	$f'(x) = \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4+7}}$

21	$f'(x)=\frac{-1\times 5(x^2+16)^4(2x)}{(x^2+16)^{10}}$ $=\frac{-10x}{(x^2+16)^6}$
22	$f(x)=(x^2-5x+2)^{\frac{1}{4}}$ $f'(x)=\frac{1}{4}(x^2-5x+2)^{-\frac{3}{4}}(2x-5)$ $=\frac{2x-5}{4\sqrt[4]{(x^2-5x+2)^3}}$
23	$f'(x)=-40(8x^2-6)^{-41}(16x)$ $=-640x(8x^2-6)^{-41}$
24	$f'(x)=\frac{-1\times 2}{(3+2x)^2}=\frac{-2}{(3+2x)^2}$
25	$f'(x)=\frac{(x^2+1)(3x^2)-(x^3)(2x)}{(x^2+1)^2}$ $=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$
26	$f'(x)=(2x-8)^2(6x)+(3x^2-4)(2)(2x-8)^1(2)$ $=(2x-8)(6x(2x-8)+4(3x^2-4))$ $=(2x-8)(24x^2-48x-16)$
27	$f'(x)=x^5(6x+4)+(3x^2+4x-7)(5x^4)$ $=6x^6+4x^5+15x^6+20x^5-35x^4$ $=21x^6+24x^5-35x^4$ حل آخر: $f(x)=3x^7+4x^6-7x^5$ بفك الأقواس: $f'(x)=21x^6+24x^5-35x^4$

28	$f'(x) = (x^3)(4)(2x+6)^3(2) + (2x+6)^4(3x^2)$ $= 2x^2(2x+6)^3(7x+9)$
29	$f'(x) = 3(e^{-x} + e^x)^2(-e^{-x} + e^x)$
30	$f'(x) = (2x^3)(-e^{-x}) + (e^{-x})(6x^2)$ $= -2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x}$
31	$f'(x) = \frac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$ $= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$
32	$f'(x) = 5 \times \frac{5}{5x-4} = \frac{25}{5x-4}$
33	$f'(x) = \frac{e^x}{e^x} = 1$
34	$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$
35	$f'(x) = (x^5)(3\cos 3x) + (\sin 3x)(5x^4)$ $= 3x^5 \cos 3x + 5x^4 \sin 3x$
36	$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ $f'(x) = 2(\cos x)^1(-\sin x) + \cos x$ $= -2\cos x \sin x + \cos x$
37	$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) - (\sqrt{\cos x})(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{2x\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$
38	$f'(x) = (\sin 5x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + (\ln(\cos x))(5\cos 5x)$
39	$f'(x) = \frac{\frac{-1 \times 2x}{(x^2+9)^2}}{\frac{1}{x^2+9}} = \frac{-1 \times 2x}{(x^2+9)^2} \times \frac{x^2+9}{1} = \frac{-2x}{x^2+9}$
40	$f'(x) = (e^{2x})(2\cos 2x) + (\sin 2x)(2e^{2x}) = 2e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$

41	$N'(t) = 1000\left(\frac{3 \times 2t}{(t^2+50)^2}\right) = \frac{6000t}{(t^2+50)^2}$
42	$N'(1) = \frac{6000}{(1+50)^2} \approx 2.3$
43	$P'(t) = \frac{-2000 \times 4}{(4t+80)^2} = \frac{-8000}{(4t+80)^2}$
44	$P'(10) = \frac{-8000}{(40+80)^2} \approx -0.56$ يتناقص عدد الغزلان بمعدل 0.56 غزال كل شهر بعد 10 أشهر من الآن
45	$P'(t) = \frac{-700 \times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-1400t}{(t^2+1)^2}$
46	$P'(3) = \frac{-1400 \times 3}{(9+1)^2} = -42$ يتناقص عدد السكان بمعدل 42 ألف شخصٍ لكل سنة بعد 3 سنوات.

إجابات كتاب الطالب- مادة الرياضيات- الصف الثاني الثانوي الأدبي ف1

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المماس والعمودي على المماس

مسألة اليوم صفحة 92

1

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$

ميل المنحنى عند النقطة $(1,1)$ هو:

2

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-2} = -1$$

3

نلاحظ أن ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ وميل المستقيم L متساويان، أي أن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي ميل مماس المنحنى عند تلك النقطة.

أتحقق من فهمي صفحة 93

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

بتعويض $a = 3$: $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

$y - 5 = 11(x - 3)$

$y - 5 = 11x - 33$

$y = 11x - 28$

أتحقق من فهمي صفحة 94

$$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \quad \rightarrow (1,1)$$

$$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

بتعويض $a = 1$: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$y - 1 = 1(x-1)$$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x$$

أتحقق من فهمي صفحة 96

a

$f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{4}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$$

نقطة التماس هي $(4, -1)$

b

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$, $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$0 = -3x^2 + 6x$$

$$3x(-x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$$

نقطتا التماس هما $(0, -2), (2, 2)$

أتحقق من فهمي صفحة 97

$f(x) = \ln x^3 \ , \ (1,0)$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$

ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$

معادلة العمودي على المماس $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

بتعويض $a = 1$ $y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1)$

$y - 0 = -\frac{1}{3}(x-1)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 98

1

$f(x) = x^3 - 6x + 3 \ , \ (2,-1) \ , \ f(2) = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(2) = 12 - 6 = 6$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - f(2) = f'(2)(x-2)$

$y - (-1) = 6(x-2)$

$y + 1 = 6x - 12$

$y = 6x - 13$

2

$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x} = \frac{x^4}{x} - \frac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2 \ , \ (1,-2) \ , \ f(1) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(1) = 3 - 6 = -3$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - (-2) = -3(x-1)$

$y + 2 = -3x + 3$

$y = -3x + 1$

3	$f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)\ ,\ (1,0)\ ,\ f(1)=0$ $f'(x)=(\sqrt{x})(2x)+(x^2-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ $f'(1)=(1)(2)+(0)\left(\frac{1}{2}\right)=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-0=2(x-1)$ $y=2x-2$
4	$f(x)=x+\frac{4}{x}\ ,\ (-4,-5)\ ,\ f(-4)=-5$ $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$ $f'(-4)=1-\frac{4}{16}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(-4)=f'(-4)(x-(-4))$ $y-(-5)=\frac{3}{4}(x+4)$ $y+5=\frac{3}{4}x+3$ $y=\frac{3}{4}x-2$
5	$f(x)=x+e^x\ ,\ (0,1)\ ,\ f(0)=1$ $f'(x)=1+e^x$ $f'(0)=1+e^0=1+1=2$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $y-1=2(x-0)$ $y-1=2x$ $y=2x+1$

6	$f(x)=\ln(x+e)\ ,\ (0,1)\ ,\ f(0)=1$ $f'(x)=\frac{1}{x+e}$ $f'(0)=\frac{1}{0+e}=\frac{1}{e}$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $y-1=\frac{1}{e}(x-0)$ $y-1=\frac{1}{e}x$ $y=\frac{1}{e}x+1$
7	$f(x)=\sqrt{x-7}\ ,\ x=16$ $f(16)=\sqrt{16-7}=3\ \rightarrow (16,3)$ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-7}}$ $f'(16)=\frac{1}{2\sqrt{16-7}}=\frac{1}{6}$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y-f(16)=f'(16)(x-16)$ $y-3=\frac{1}{6}(x-16)$ $y-3=\frac{1}{6}x-\frac{8}{3}$ $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}$

8	$f(x) = (x-1)e^x \ , \ x = 1$ $f(1) = (1-1)e^1 = 0 \ \rightarrow (1,0)$ $f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$ $f'(1) = 1e^1 = e$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ $y - 0 = e(x-1)$ $y = ex - e$
9	$f(x) = \frac{x+3}{x-3} \ , \ x = 4$ $f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \ \rightarrow (4,7)$ $f'(x) = \frac{(x-3)(1) - (x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$ $f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$ $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ معادلة المماس: $y - f(4) = f'(4)(x-4)$ $y - 7 = -6(x-4)$ $y - 7 = -6x + 24$ $y = -6x + 31$

10

$f(x) = (\ln x)^2 \ , \ x = e$

$f(e) = (\ln e)^2 = 1 \ \rightarrow \ (e, 1)$

$f'(x) = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(e) = 2(\ln e)\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$

معادلة المماس:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(e) = f'(e)(x - e)$

$y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$

$y - 1 = \frac{2}{e}x + 2$

$y = \frac{2}{e}x + 3$

11

$f(x) = (3x + 10)^2 \ , \ (-3, 1)$

$f'(x) = 2(3x + 10)^1(3) = 6(3x + 10)$

$f'(-3) = 6(-9 + 10) = 6$

ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$

معادلة العمودي على المماس:

$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

$y - f(-3) = -\frac{1}{f'(-3)}(x - (-3))$

$y - 1 = -\frac{1}{6}(x + 3)$

$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

12

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ ، $(4,1)$

$$f'(x) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$f'(4) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1} = -\frac{1}{9}$$

ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$
$$y - f(4) = 9(x-4)$$
$$y - 1 = 9(x-4)$$
$$y = 9x - 35$$

13

نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور x في النقطة $(-4, 0)$ أي أنّ $f(-4) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(-4) = \frac{1}{-4+5} = 1$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

$$y - f(-4) = -\frac{1}{f'(-4)}(x-(-4))$$

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x+4)$$

$$y = -x - 4$$

14	عند تقاطع المنحنى مع المحور y يكون x=0 ويكون $y = \ln(0+5) = \ln 5$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, \ln 5)$ $f'(x) = \frac{1}{x+5}$ $f'(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0)$ $y - \ln 5 = -5(x-0)$ $y = -5x + \ln 5$
15	$f(x) = 4e^{2x+1}$ $f(-1) = 4e^{-2+1} = \frac{4}{e} \rightarrow \left(-1, \frac{4}{e}\right)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(-1) = 8e^{-2+1} = \frac{8}{e}$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(-1) = f'(-1)(x--1)$ $y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}(x+1)$ $y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}x + \frac{8}{e}$ $y = \frac{8}{e}x + \frac{12}{e}$

16	$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \rightarrow (0, 4e)$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي : $(0, 4e)$ $f'(x) = 8e^{2x+1}$ $f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$ معادلة العمودي على المماس: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$ $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0)$ $y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$ $y = -\frac{1}{8e}x + 4e$
17	$f(x) = x^2 - x - 12$ $f'(x) = 2x - 1$ $3 = 2x - 1$ $4 = 2x$ $x = 2$ $f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$ النقطة هي $(2, -10)$ معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $y - f(2) = f'(2)(x-2)$ $y - (-10) = 3(x-2)$ $y + 10 = 3x - 6$ $y = 3x - 16$
18	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$ $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $0 = 3x^2 - 8x$ $x(3x-8) = 0$ $x = 0 \ \ or \ \ 3x - 8 = 0 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$ $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ النقاط هي $(0, -4), \left(2, -\frac{364}{27}\right)$

19	مماس المنحنى أفقي أي $f'(x)=0$ $f'(x)=\dfrac{(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}(1)}{2x-1}$ $0=\dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}}{2x-1}$ $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}\right)-\sqrt{2x-1}=0$ $\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2x-1}$ $x=2x-1$ $x=1$ $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2-1}}=1$ النقطة هي $(1,1)$
20	ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x)=1$ $f'(x)=10x-49$ $1=10x-49$ $10x=50$ $x=5$ $f(5)=5(5)^2-49(5)+12=125-245+12=-108$ النقطة هي $(5,-108)$
21	$f'(x)=6-2x$ $f'(1)=6-2=4$ معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-5=4(x-1)$ $y-5=4x-4$ $y=4x+1$

معادلة العمودي على المماس:	$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$
22	$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$ $y-5=-\frac{1}{4}(x-1)$ $y-5=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ $y=-\frac{1}{4}x+\frac{21}{4}$
معادلة المماس عند النقطة $(-1,5)$:	$f'(x)=-2x$ $y-f(a)=f'(a)(x-a)$
23	$y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$ $y-5=2(x+1)$ $y-5=2x+2$ $y=2x+7$
معادلة المماس عند النقطة $(1,5)$:	$y-f(a)=f'(a)(x-a)$
	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ $y-5=-2(x-1)$ $y-5=-2x+2$ $y=-2x+7$
نقطة تقاطع المماسين هي: $(0,7)$	$2x+7=-2x+7$ $4x=0$ 24 $x=0$ $y=-2(0)+7=7$

25

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \dfrac{1}{2}$

معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$:

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$

$y - 1 = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

26

معادلة العمودي على المماس:

$y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$

$y - f(1) = -\dfrac{1}{f'(1)}(x - 1)$

$y - 1 = -2(x - 1)$

$y - 1 = -2x + 2$

$y = -2x + 3$

27

$f(x) = \sqrt{x} - 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ميل المستقيم $y = 2x - 1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضًا هو2، إذن:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2$

$4\sqrt{x} = 1$

$\sqrt{x} = \dfrac{1}{4}$

$x = \dfrac{1}{16}$

$f\left(\dfrac{1}{16}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{16}} - 1 = \dfrac{1}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4}$

النقطة هي $\left(\dfrac{1}{16}, -\dfrac{3}{4}\right)$

الدرس الثاني: المشتقة الثانية، والسرعة المتجهة، والتسارع

	مسألة اليوم صفحة 100
	$v(t) = t + 15$ $t + 15 = 15 \quad \rightarrow \quad t = 0\ \text{s}$
	أتحقق من فهمي صفحة 101
a	$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$ $f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$
b	$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$ $f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$ $f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$
	أتحقق من فهمي صفحة 103
a	$v(t) = 6t - 3t^2$ $v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9\ \text{m/s}$
b	بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب (إلى اليسار) عندما $t = 3$
c	$a(t) = 6 - 6t$ $a(3) = 6 - 6(3) = -12\ \text{m/s}^2$
d	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $6t - 3t^2 = 0$ $3t(2 - t) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
	أتحقق من فهمي صفحة 104
a	$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0\ \text{m/s}$
b	$a(t) = 6t - 12$ $a(3) = 6(3) - 12 = 6\ \text{m/s}^2$

	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0
c	$3t^2 - 12t + 9 = 0$ $(3t-3)(t-3) = 0$ $t = 1 \ \ or \ \ t = 3$
	أتدرب وأحل المسائل صفحة 104
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = 2e^x + 2x$ $f''(x) = 2e^x + 2$
3	$f'(x) = -2\sin x - 3x^2$ $f''(x) = -2\cos x - 6x$
4	$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$ $f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$
5	$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$ $= (x+6)^5(9x^3 + 18x^2)$ $f''(x) = (5)(x+6)^4(1)(9x^3 + 18x^2) + (x+6)^5(27x^2 + 36x)$ $= (x+6)^4(72x^3 + 288x^2 + 216x)$
6	$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$ $= x^6 + (\ln x)(7x^6)$ $f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)$ $= 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$
7	$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$ $f''(x) = \frac{-2 \times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$
8	$f'(x) = 2x\cos x^2$ $f''(x) = (2x)(-2x\sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2\sin x^2 + 2\cos x^2$
9	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$

10	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$
11	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
12	$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$ $f''(x) = 2 - 6x$
13	$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$ $f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$ $f''(x) = 48x + 8x^{-3}$ $f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$
14	$f'(x) = \frac{-2}{(2x-4)^2}$ $f''(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x-4)^1 \times 2}{(2x-4)^4} = \frac{8}{(2x-4)^3}$ $f''(3) = \frac{8}{(2(3)-4)^3} = \frac{8}{8} = 1$
15	$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1$ $f''(x) = 6px - 6p$ $f''(2) = 6p(2) - 6p$ $-1 = 12p - 6p$ $6p = -1$ $p = -\frac{1}{6}$
16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 3$

18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0 \quad or \quad t = 2$
20	$s(t) = \frac{3t}{1+t}$ $v(t) = \frac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \frac{3}{(1+t)^2}$ $v(4) = \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = 0.12 \text{ m/s}$
21	بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب (إلى اليمين) عندما $t = 4$
22	$a(t) = \frac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \frac{-6}{(1+t)^3}$ $a(4) = \frac{-6}{(1+4)^3} = \frac{-6}{125} = -0.048 \text{ m/s}^2$
23	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$
24	$a(t) = 2$ $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$
25	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0 $2t - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 4$

26	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5-3x^2)^6(1) - (x)(6)(5-3x^2)^5(-6x)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{(5-3x^2)^5(5-3x^2+36x^2)}{(5-3x^2)^{12}}$ $= \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$
27	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
28	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 24 = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \rightarrow \quad t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$

الدرس الثالث: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 106

مساحة سطح الحوض المفتوح من الأعلى : $S = 4xy + x^2$

حجم الحوض : $V = x^2 y$

$$0.2 = x^2 y \quad \rightarrow \quad y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{0.2}{x^2}\right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 0.4 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''\left(\sqrt[3]{0.4}\right) = \frac{1.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{0.4}$ ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4}\ \text{m} \ , \qquad y = \frac{0.2}{\left(\sqrt[3]{0.4}\right)^2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 108

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$3x^2 - 4x - 4 = 0$

$(3x + 2)(x - 2) = 0$

$x = -\frac{2}{3} \quad or \quad x = 2$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$

$f''(x) = 6x - 4$

$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$

$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

أتحقق من فهمي صفحة 110

مساحة المستطيل $A = xy$

محيط المستطيل $P = 2x + 2y$

$54 = 2x + 2y$

$27 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 27 - x$

$A = xy$

$A(x) = x(27 - x)$

$= 27x - x^2$

$A'(x) = 27 - 2x$

$27 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{27}{2}$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$ ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$

أتحقق من فهمي صفحة 111

المساحة الكلية لسطح الخزان $S = 4xh + 2x^2$

حجم الخزان $V = x^2h$

$$2 = x^2h \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = \frac{8}{x^2} \quad \rightarrow 4x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{16}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2}\ \text{m}, \quad w = x = \sqrt[3]{2}\ \text{m}, \quad h = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \sqrt[3]{2}\ \text{m}$$

أتحقق من فهمي صفحة 113

حجم الخزان $V = x^2 h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$54 = 4xh + x^2 \quad \rightarrow \quad 4xh = 54 - x^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2 \left(\frac{54 - x^2}{4x} \right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4} x - \frac{1}{4} x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4} x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4} x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 54 - 3x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{54}{3} = 18 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن ان يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2} x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18}\, m, \qquad w = x = \sqrt{18}\, m, \qquad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}\, m$$

أتحقق من فهمي صفحة 115

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$$
$$= 1732x - 2x^2 - 2250$$
$$P'(x) = 1732 - 4x$$
$$1732 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1732}{4} = 433$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 116

1

$$f'(x) = 2x - 2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 2x - 2 = 0$$
$$\rightarrow 2x = 2$$
$$\rightarrow x = 1$$

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$$f''(x) = 2$$
$$f''(1) = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

2

$$f'(x) = 15 - 2x - x^2$$
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow 15 - 2x - x^2 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$$
$$\rightarrow x = -5 \ \ or \ \ x = 3$$

القيم الحرجة هي: $x = -5 \ , \ x = 3$

$$f''(x) = -2 - 2x$$
$$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$$
$$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$$f(-5) = 20 - 75 - 25 - \frac{125}{3} = -\frac{365}{3}$$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$

3	$f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0$ $\rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$ $\rightarrow x = 0 \ , x = \pm 1$ القيم الحرجة هي: $x = 0 \ , x = 1, x = -1$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$ $f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$ $f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$ إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$ و توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي: $f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$
4	محيط الحديقة من دون الجدار $P = AB + BC + CD$ $300 = AB + x + AB$ $300 = 2AB + x$ $300 - x = 2AB$ $AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$
5	مساحة الحديقة المستطيلة $A = BC \times AB$ $A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$ $= 150x - \frac{1}{2}x^2$
6	$A'(x) = 150 - x$ $150 - x = 0$ $x = 150$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$ $A''(x) = -1$ $A''(150) = -1 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$ ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما: $AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$, $BC = x = 150 \text{ m}$

7	$V = lwh$ $V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x \ , \quad 0 \le x \le 15$ $= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$ $= (1440 - 156x + 4x^2)x$ $= 1440x - 156x^2 + 4x^3$	حجم العلبة
8	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad or \quad x = 6$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0 \rightarrow$ $V(6)$ قيمة عظمى إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$	
9	$p(x) = 500 - 0.002x$ $R(x) = (500 - 0.002x)x = 500x - 0.002x^2$	سعر المنتج الواحد هو اقتران الإيراد
10	$P(x) = R(x) - C(x)$ $= (500x - 0.002x^2) - (300 + 1.10x)$ $= 500x - 0.002x^2 - 300 - 1.10x$ $= 498.9x - 0.002x^2 - 300$	اقتران الربح

11	$P'(x) = 498.9 - 0.004x$ $498.9 - 0.004x = 0$ $498.9 = 0.004x$ $x = \frac{498.9}{0.004} = \frac{498900}{4} = 124725$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 124725$ $P''(x) = -0.004$ $P''(124725) = -0.004 < 0$ إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 124725$ ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 124725 قطعة أكبر ربح ممكن هو: $P(124725) = 498.9(124725) - 0.002(124725)^2 - 300 = 31112351.25$
12	سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن $p(124725) = 500 - 0.002(124725)$ $= 250.55$

حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث × ارتفاع المثلث

مساحة المثلث:

$$A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$$

حجم المنشور:

$$V = \frac{1}{2}x^2 l$$

$$1000 = \frac{1}{2}x^2 l$$

$$2000 = x^2 l$$

$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثيتين + مساحتي الوجهين اللذين إحدى حافيتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

13

$$A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''(x) = 1 + \frac{8000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^3} = 1 + \frac{8000}{2000} = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}\ ,\ l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{\left(\sqrt[3]{2000}\right)^2} = \sqrt[3]{2000}\ \text{cm}$$

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

مسألة اليوم صفحة 117

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 0.5$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=1}$

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi(1)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \approx 0.16$$

إذن يزداد ارتفاع الوقود في الخزان بمعدل $0.16\ \text{m/min}$ تقريبًا

أتحقق من فهمي صفحة 119

a

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

b

$$10y\frac{dy}{dx} - 2e^x = 4\frac{dy}{dx}$$

$$10y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - 4) = 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y - 4}$$

c

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(1)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x$$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x-y$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y)=-4\sin x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+4\sin x}{x+2y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 120

$x^3+2y^3=6 \quad , (2,-1)$

$$3x^2+6y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$3(2)^2+6(-1)^2\frac{dy}{dx}=0$$

بتعويض $(x,y)=(2,-1)$

$$12+6\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{12}{6}=-2$$

ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(2,-1)$ هو -2

معادلة المماس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-1)=-2(x-2)$$

$$y+1=-2x+4$$

$$y=-2x+3$$

أتحقق من فهمي صفحة 121

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$
$$= 4\pi(4)^2(3)$$
$$= 192\pi$$

إذن يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi \text{ cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

أتدرب وأحل المسائل صفحة 121

1
$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$4y\frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

2
$$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$$

3
$$2x + 2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx}(2 - 2y) = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$$

4	$2x\frac{dy}{dx}+2y-3\frac{dy}{dx}=2y\frac{dy}{dx}-7$ $2x\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}(2x-3-2y)=-7-2y$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-7-2y}{2x-3-2y}$
5	$5y^4\frac{dy}{dx}=3x^2$ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{5y^4}$
6	$(x^2)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)+(y^3)(2x)+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+2xy^3+\frac{dy}{dx}=0$ $3x^2y^2\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}(3x^2y^2+1)=-2xy^3$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy^3}{3x^2y^2+1}$
7	$\sqrt{x}+\sin y=16$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}\cos y=0$ $\frac{dy}{dx}\cos y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\cos y}$
8	$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^x)=(x)\left(\frac{dy}{dx}e^y\right)+(e^y)(1)$ $e^x\frac{dy}{dx}-xe^y\frac{dy}{dx}=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}(e^x-xe^y)=e^y-ye^x$ $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y-ye^x}{e^x-xe^y}$

9	$\sin x + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = -\sin x$ $\frac{dy}{dx} = -y \sin x$
10	$32y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ $32y\frac{dy}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{32y} = \frac{x}{16y}$
11	$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 + 6\frac{dy}{dx} = 0$ $2y\frac{dy}{dx} + 6\frac{dy}{dx} = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx}(2y + 6) = 4 - 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$
12	$9x^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $9(2)^2 - 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (2, 4)$ $36 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = 36$ $\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

13	$4x - 9y^2 \frac{dy}{dx} = 0$ $4(-2) - 9(1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$ $-8 - 9\frac{dy}{dx} = 0$ $9\frac{dy}{dx} = -8$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$
14	$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $2(1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$ بتعويض $(x, y) = (e, 1)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$
15	$2(y-3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$ $2(1-3)^1 \frac{dy}{dx} = 4$ بتعويض $(x, y) = (6, 1)$ $-4\frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-4} = -1$
16	$4x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ $4(3) + 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, 4)$ $12 + 8\frac{dy}{dx} = 0$ $8\frac{dy}{dx} = -12$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$ ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$ هو $-\frac{3}{2}$

17	معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$ $y - 4 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$
18	$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + y + 2x = 0$ $2(-2)\frac{dy}{dx} + (3)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (-2) + 2(3) = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ $-4\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 2 + 6 = 0$ $-\frac{dy}{dx} = -4$ $\frac{dy}{dx} = 4$ ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$ هو 4
19	معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-2) = 4(x - 3)$ $y + 2 = 4x - 12$ $y = 4x - 14$
20	معادلة العمودي على المماس: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ $y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$ $y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

	معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt} = -6$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{x=30}$ العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: $V = x^3$
21	$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$ $= 3(30)^2(-6)$ $= -16200$ إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200\ \text{cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول ضلعه $30\ \text{cm}$
	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.5$ معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dA}{dt}\right\|_{r=3}$ العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A = 4\pi r^2$
22	$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ $= 8\pi(3)(0.5)$ $= 12\pi$ إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطرها $3\ \text{cm}$
	معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.13$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dV}{dt}\right\|_{r=0.45}$ العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
23	$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ $= 4\pi(0.45)^2(0.13)$ $= 0.1053\pi$ إذن يزداد حجم الورم بمعدل $0.1053\pi\ \text{cm}^3/\text{s}$ عندما يكون طول نصف قطره $0.13\ \text{cm}$

24

$$x^2 + 6y^2 = 10$$

$$(2)^2 + 6y^2 = 10 \quad \rightarrow \quad 6y^2 = 6 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1$$

$$2x + 12y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$$

عند النقطة $(2, 1)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

عند النقطة $(2, -1)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

25

$$\ln(xy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1)}{xy} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2xy^2\frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 2xy^2) = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

26

معدل التغير المطلوب $\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64}$

العلاقة التي تربط u مع w هي:

$$u = 150\sqrt[3]{w^2}$$

$$u = 150w^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dt} = 150 \times \frac{2}{3}w^{-\frac{1}{3}}\frac{dw}{dt}$$

لكن $w = 0.05t + 8$ ، إذن: $\frac{dw}{dt} = 0.05$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3}(64)^{-\frac{1}{3}}(0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3}\frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}}(0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}(0.05) = 1.25$$

اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	c
2	d
3	c
4	d
5	a
6	d
7	c
8	$f(x)=x^2-7x+10 \qquad (2,0)$ $f'(x)=2x-7$ $f'(2)=4-7=-3$ معادلة المماس: $y-0=-3(x-2)$ $y=-3x+6$
9	$f(x)=x^2-\frac{8}{\sqrt{x}} \qquad (4,12)$ $f'(x)=2x+\frac{8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}=2x+\frac{4}{x\sqrt{x}}$ $f'(4)=2(4)+\frac{4}{4\sqrt{4}}=8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$ معادلة المماس: $y-12=\frac{17}{2}(x-4)$ $y-12=\frac{17}{2}x-34$ $y=\frac{17}{2}x-22$

10

$$f(x)=\frac{2x-1}{x} \qquad (1,1)$$

$$f'(x)=\frac{(x)(2)-(2x-1)(1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1)=\frac{1}{1}=1$$

معادلة المماس:

$$y-1=1(x-1)$$

$$y-1=x-1$$

$$y=x$$

11

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+1}} \qquad (4,1)$$

$$f'(x)=\frac{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)}{2x+1}=\frac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(4)=\frac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}}=-\frac{1}{9}$$

معادلة المماس:

$$y-1=-\frac{1}{9}(x-4)$$

$$y-1=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$$

$$y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$$

12

$$f(x)=(x-7)(x+4) \quad ,x=1$$

$$f(1)=(1-7)(1+4)=-30 \quad \rightarrow \quad (1,-30)$$

$$f'(x)=(x-7)(1)+(x+4)(1)$$

$$f'(1)=(1-7)+(1+4)=-1$$

معادلة المماس:

$$y-(-30)=-1(x-1)$$

$$y+30=-x+1$$

$$y=-x-29$$

13	$f(x)=\frac{x}{x+4}$, $x=-5$ $f(-5)=\frac{-5}{-5+4}=5 \quad \rightarrow \quad (-5,5)$ $f'(x)=\frac{(x+4)(1)-(x)(1)}{(x+4)^2}=\frac{4}{(x+4)^2}$ $f'(-5)=\frac{4}{(-5+4)^2}=4$ معادلة المماس: $y-5=4(x+5)$ $y-5=4x+20$ $y=4x+25$
14	$f(x)=2x^4+9x^3+x$, $x=-2$ $(-2,-42)$ $f(-2)=2(-2)^4+9(-2)^3+(-2)=-42$ $f'(x)=8x^3+27x^2+1$ $f'(-2)=8(-2)^3+27(-2)^2+1=45$ معادلة المماس: $y-(-42)=45(x+2)$ $y+42=45x+90$ $y=45x+48$
15	$f(x)=7x^3+6x-5$, $x=2$ $f(2)=7(2)^3+6(2)-5=63$ $f'(x)=21x^2+6$ $f'(2)=21(2)^2+6=90$ معادلة العمودي على المماس $y-63=-\frac{1}{90}(x-2)$ $y-63=-\frac{1}{90}x+\frac{1}{45}$ $y=-\frac{1}{90}x+\frac{2836}{45}$

16

$f(x)=\frac{6x^2-x^3}{4x^4}=\frac{3}{2}x^{-2}-\frac{1}{4}x^{-1}$, $x=-2$

$f(-2)=\frac{3}{2}(-2)^{-2}-\frac{1}{4}(-2)^{-1}=\frac{3}{2\times(-2)^2}-\frac{1}{4\times(-2)^1}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

$f'(x)=-3x^{-3}+\frac{1}{4}x^{-2}$

$f'(-2)=\frac{-3}{(-2)^3}+\frac{1}{4\times(-2)^2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

معادلة العمودي على المماس $y-\frac{1}{2}=-\frac{16}{7}(x+2)$

$y-\frac{1}{2}=-\frac{16}{7}x-\frac{32}{7}$

$y=-\frac{16}{7}x-\frac{32}{7}+\frac{1}{2}$

$y=-\frac{16}{7}x-\frac{57}{14}$

17

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x)=0$

$f'(x)=4x^3-9x^2$

$4x^3-9x^2=0$

$x^2(4x-9)=0$

$x=0$ or $4x-9=0\rightarrow 4x=9\rightarrow x=\frac{9}{4}$

$f(0)=(0)^4-3(0)^3+1=1$

$f\left(\frac{9}{4}\right)=\left(\frac{9}{4}\right)^4-3\left(\frac{9}{4}\right)^3+1=-\frac{1931}{256}$

النقاط هي $(0,1),\left(2,-\frac{1931}{256}\right)$

18

ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x)=12$

$f'(x)=3x^2$

$3x^2=12$

$x^2=4\rightarrow x=2$ or $x=-2$

$f(2)=(2)^3-3=5$

$f(-2)=(-2)^3-3=-11$

النقاط هي $(2,5),(-2,-11)$

19	$f'(x) = 8x - 5$ $f''(x) = 8$
20	$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$
21	$f'(x) = 10 - \left((2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(2)\right)$ $= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$ $= 10 - 3\sqrt{x}$ $f''(x) = -3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$
22	$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$ $= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
23	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 \quad , x = 1$ $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$ $f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$ $f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$

24	معدل التغير المعطى: $\frac{dA}{dt} = 50$ معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right\|_{r=20}$ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها: $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ $50 = 2\pi(20)\frac{dr}{dt}$ $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$ إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m
25	$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0$ m/s
26	بما أن السرعة المتجهة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.
27	$a(t) = 6t - 12$ $a(2) = 12 - 12 = 0$ m/s^2
28	يكون الجسم في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا $3t^2 - 12t + 12 = 0$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $(t-2)(t-2) = 0$ $t = 2$
29	$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$ $v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8$ m/s
30	$a(t) = t + 1$ $a(3) = 3 + 1 = 4$ m/s^2
31	يكون الشخص في حالة سكون عندما تكون السرعة المتجهة صفرًا لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t+1)^2$ وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$، ولا يمكن أن يكون صفرًا، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبدًا.

$f'(x) = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0$

$6x^2 = 24 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$

القيم الحرجة هي: $x = -2$ و $x = 2$

32 $f''(x) = -12x$

$f''(-2) = 24 > 0$

$f''(2) = -24 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$

$f'(x) = 3(3x-2)^2(3) - 9$

$= 9(3x-2)^2 - 9$

$9(3x-2)^2 - 9 = 0$

$(3x-2)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 3x - 2 = \pm 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 \; or \; x = \frac{1}{3}$

القيمة الحرجة هي: $x = 1, \; x = \frac{1}{3}$

33 $f''(x) = 18(3x-2)^1(3) = 54(3x-2)$

$f''(1) = 54 > 0$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3-2)^3 - 9 = -8$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3(\frac{1}{3}) - 2\right)^3 - 9(\frac{1}{3}) = -4$

34

$f(x) = 4x^5 - 10x^2$

$f'(x) = 20x^4 - 20x$

$20x^4 - 20x = 0$

$20\,x(x^3 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\; or \;\; x = 1$

القيم الحرجة هي: $x = 0$ و $x = 1$

$f''(x) = 80x^3 - 20$

$f''(0) = -20 < 0$

$f''(1) = 60 > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$

و توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

35

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 800$

معدل التغير المطلوب $\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=60}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$800 = 2\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{800}{7200\pi} = \frac{1}{9\pi}$

إذن يزداد طول نصف قطر البالون بمعدل $\frac{1}{9\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm

36	طول السياج مساحة الحظيرة المستطيلة $P = x + 2y$ $A = xy$ $245000 = xy \quad \rightarrow \quad y = \frac{245000}{x}$ $P = x + 2y$ $P(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right)$ $= x + \frac{490000}{x}$ $P'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$ $1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{490000}{x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x^2 = 490000 \quad \rightarrow \quad x = \pm 700$ لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$ $P''(x) = \frac{980000}{x^3}$ $P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$ إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$ وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي: $x = 700\ \text{m}$ و $y = \frac{245000}{700} = 350\ \text{m}$
37	$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$ $2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -2x$ $\frac{dy}{dx}(2y - 1) = -2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y - 1}$

38

$$2x + 6 - 8\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$-8\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = -2x - 6$$
$$\frac{dy}{dx}(10y - 8) = -2x - 6$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 6}{10y - 8}$$

39

$$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2x = 0$$

بتعويض $(x, y) = (-4, 3)$ ينتج أنّ:

$$2(3)\frac{dy}{dx} + (-4)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3)(1) + 2(-4) = 0$$
$$6\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 3 - 8 = 0$$
$$2\frac{dy}{dx} = 5$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$$

ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$ هو $\frac{5}{2}$

40

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}x + 10$$
$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

41

مساحة المستطيل

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$
$$A'(x) = 10 - 2x$$
$$10 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 5$

$$A''(x) = -2$$
$$A''(5) = -2 < 0$$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 5$

إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5) = 10(5) - (5)^2 = 25\ \text{cm}^2$

42	حجم الصندوق $V = x^2y$ مجموع أطوال الأحرف $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ حجم الصندوق بدلالة x $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$
43	$V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = 12$ توجد قيمتان حرجتان هما $x = 12$ و $x = 0$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$ توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$
44	$6x^2 + 8y\frac{dy}{dx} = 0$ بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أنّ: $6(-2)^2 + 8(-1)\frac{dy}{dx} = 0$ $24 - 8\frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = 3$

45	$3x^2 - (x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - (y^2)(2x) = 0$ بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ ينتج أنّ: $3(3)^2 - (3)^2\left(2(-2)\frac{dy}{dx}\right) - ((-2)^2)(2(3)) = 0$ $27 + 36\frac{dy}{dx} - 24 = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$