الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

كتاب التمارين

الفرع العلمي

11

فريـق التأليـف

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 1 الاقترانات المتشعّبة والمتباينات

الوحدةُ 2 الاقترانات الأُسّية والاقترانات اللوغاريتمية

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 3 تحليل الاقترانات

الوحدةُ 4 المشتقّات

الوحدةُ 1: الاقترانات المتشعّبة والمتباينات

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

تمثيل المعادلات الخطّية بيانيًّا

أُمثّل كلًّا ممّا يأتي بيانيًّا:

1 $y = 5$ **2** $x = -3$ **3** $y = 2x - 1$

مثالٌ: أُمثّل المعادلة $2x + y = 4$ في المستوى الإحداثي نفسه.

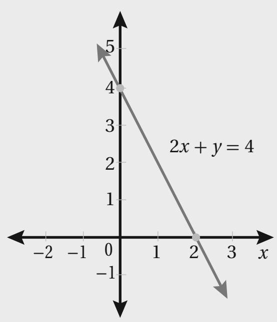
- المعادلة $2x + y = 4$

الخطوة 1: أُنشئ جدول قِيَم.

x	0	2
$y = 4 - 2x$	4	0

الخطوة 2:

أُعيّن النقطتين $(2, 0)$ $(0, 4)$ في المستوى الإحداثي، وأرسمُ مستقيمًا يمرّ بهما.



حلّ متباينات خطّية بمتغيّر واحد، وتمثيل الحلّ على خطّ الأعداد

أحلّ كُلّ متباينة ممّا يأتي، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

1 $x - 3 > 2$ **2** $2 - x > -3$ **3** $3x \geq 12$

4 $2x - 3 \leq 9$ **5** $6 - 4x < x - 14$ **6** $2(x+5) - 9x \geq 45$

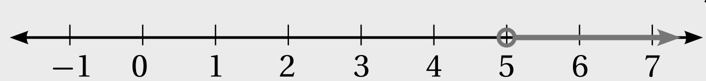
مثالٌ: أحلّ المتباينة $2x + 3 > 13$، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد:

المتباينة الأصلية $2x + 3 > 13$

بطرح 3 من الطرفين $2x > 10$

بقسمة الطرفين على 2 $x > 5$

مجموعة الحلّ هي: $\{x \mid x > 5\}$ أو الفترة $(5, \infty)$. وتمثيلها على خطّ الأعداد كما يأتي:



وُضِعت دائرة مفتوحة عند 5؛ لعدم وجود إشارة المساواة، أي إنّ 5 ليس من ضمن مجموعة الحلّ.

حلّ نظام مكوّن من معادلتين خطّيتين

أحلّ أنظمة المعادلات الآتية:

1) $2x + y = 12$
$3x - 2y = 11$

2) $3x - 5y = 11$
$2x - y = 5$

3) $y = 2x - 1$
$3x + 2y = 19$

مثالٌ: أحلّ نظام المعادلات:

$$y = 2 - 3x \qquad (1)$$
$$2x - 5y = 24 \qquad (2)$$

الطريقة 1: تعويض قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2).

المعادلة (2)	$2x - 5y = 24$
بتعويض $y = 2 - 3x$	$2x - 5(2 - 3x) = 24$
خاصية التوزيع	$2x - 10 + 15x = 24$
بجمع الحدود المتشابهة	$17x - 10 = 24$
بإضافة 10 لطرفَي المعادلة	$17x = 34$
بقسمة الطرفين على 17	$x = 2$
بتعويض $x = 2$ في المعادلة (1)	$y = 2 - 3(2) = -4$

الطريقة 2: حذف أحد المتغيّرين.

بإعادة ترتيب المعادلة (1)	$3x + y = 2$
بضرب المعادلة (1) في 5	$15x + 5y = 10$
المعادلة (2)	$2x - 5y = 24$
بجمع المعادلتين	$17x = 34$
بقسمة الطرفين على 17	$x = 2$
بتعويض $x = 2$ في (1)	$y = 2 - 3(2) = -4$

إذن: حلّ هذا النظام هو $x = 2, y = -4$

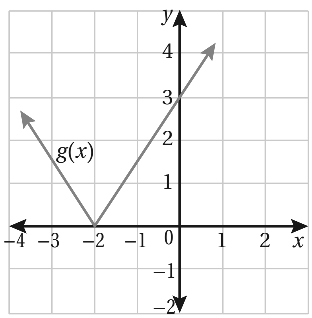
الاقتران المتشعّب واقتران القيمة المطلقة

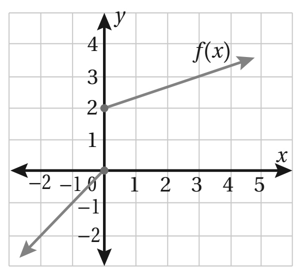
أُعيد تعريف كلّ من الاقترانين الآتيين:

1. $f(x) = |5x-4|$

2. $f(x) = |3-2x|-6$

أكتبُ قاعدة الاقتران $f(x)$ المعطى تمثيله البياني، في كلّ ممّا يأتي:

3. 

4. 

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا، وأُحدّد مجاله ومداه:

5. $f(x) = \begin{cases} 3x-4, & x<3 \\ x+3, & x \geq 3 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 2x^2+3, & x<1 \\ 5, & 1 \leq x < 4 \\ x+2, & x \geq 4 \end{cases}$

7. $f(x) = |2x-6|+3$

8. $f(x) = |x^2-2x-8|$

9. **تكلفة الكهرباء:** تزوّد شركة الكهرباء القطاع التجاري بالطاقة الكهربائية مقابل 1.20 دينار شهريًّا (رسومًا ثابتة)، يُضاف إليها 0.121 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة لأول 2000 كيلو واط ساعة في الشهر، و 0.176 دينار لكُلّ كيلو واط ساعة من كمّية الاستهلاك الزائدة على 2000 كيلو واط ساعة في الشهر. أكتبُ الاقتران الذي يُعطي قيمة فاتورة الكهرباء بدلالة كمّية الاستهلاك x كيلو واط ساعة شهريًّا.

الدرسُ 2

حلّ معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

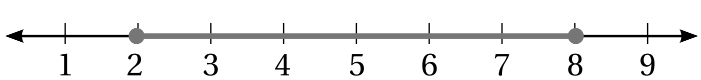
أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية، وأتحقّق من صحّة الحلّ:

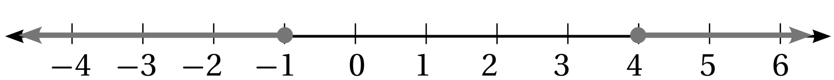
1. $|5x-2| = 6$
2. $4|x+2| - 3 = 9$
3. $10 - 2|x+1| = 6$
4. $5 + |x-2| = 3$
5. $\left|\frac{x-2}{3}\right| = 2x - 1$
6. $|3x-5| = |1-2x|$
7. $|x^2 - 2| = x$
8. $|3x + 5| = |7 - x|$
9. $\left|\frac{3x+4}{2x+1}\right| = 2$

أحلّ كُلًّا من المتباينات الآتية، وأُمثّل مجموعة الحلّ على خط الأعداد:

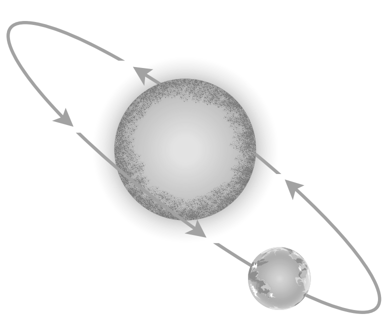
10. $|4-3x| \geq 10$
11. $6|4x + 2| - 8 < 34$
12. $|5x-10| > 4 - 2x$
13. $|3x - 2| > |2x + 7|$
14. $|3 - 2x| \leq |4x + 3|$
15. $|1 + 7x| \geq |x-6|$

أكتبُ متباينة قيمة مطلقة، تمثيل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد كما يأتي:

16. 

17. 

18. **فلك:** في أثناء دوران الأرض حول الشـــمس، يكون متوسّط المسافة بينهما 92.95 مليون ميل، ولا يزيد بعدها عن الشـــمس أو يقلّ عن هذا المتوســـط بأكثـــر من 1.55 مليون ميل خلال العام. أكتـــبُ متباينة قيمة مطلقة يمكن عن طريق حلّها إيجاد مدى بعد الأرض عن الشمس خلال العام.



حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًّا

أُمثّل كُلًّا من المتباينات الآتية بيانيًّا:

1 $\frac{1}{2}x + y \leq 20$

2 $x + 4y > 2$

3 $y < -|3x + 1| - 6$

4 $y \leq \frac{3}{4}x + 6$

5 $y > |2x - 1|$

6 $y - 3 \geq -2|x + 4|$

أُمثّل منطقة حلّ كُلّ من أنظمة المتباينات الآتية:

7 $3x - 2y \geq 18$
$x + y \leq 6$

8 $x + y \leq 10$
$2x - 4y \geq 4$

9 $2x + 9y \geq 18$
$y \leq |x - 6|$

10 $y \geq |2x + 4| - 2$
$x + 3y \leq 15$

11 $x + 3y \leq 9$
$5x - y \geq 5$
$y \geq -3$

12 $x + 2y \leq 4$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

يريد صاحب مطعم أن يشتري عددًا من الطاولات والكراسي الخشبية، وقد خصّص لهذه الغاية 420 دينارًا، ووجد أنّ الطاولة الواحدة تُكلّفه 35 دينارًا، والكرسي الواحد يُكلّفه 9 دنانير.

13 أكتبُ متباينة تُبيّن عدد الطاولات وعدد الكراسي التي يُمكنه شراؤها.

14 أُمثّل متباينة الطاولات والكراسي بيانيًّا.

15 أكتبُ 3 حلول ممكنة لعدد الطاولات وعدد الكراسي التي يُمكنه شراؤها.

رياضة: في مباريات دوري كرة القدم، يُسجّل للفريق نقطتان عند فوزه، ونقطة واحدة عند تعادله، ولا شيء عند خسارته، ويعلم أحمد أنّ: (1) رصيد فريقه هو 18 نقطة على الأكثر، (2) وأنّ عدد مرّات فوز فريقه أكبر من عدد مرّات تعادله، (3) وأنّ فريقه تعادل مرّتين على الأقل.

16 أكتبُ متباينة بدلالة عدد مرّات الفوز x، وعدد مرّات التعادل y لكُلّ واحدة من الجمل الثلاث.

17 أُمثّل منطقة حل هذه المتباينات بيانيًّا.

18 أجد القِيَم الممكنة جميعها، لعدد مرّات فوز فريقه وعدد مرّات تعادله.

البرمجة الخطّية

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكن؛ ضمن القيود المعطاة في كُلّ ممّا يأتي:

1) $T = 3x + y$
$x + y \geq 2$
$x \leq 5$
$y \leq 4$

2) $P = 5x + 2y$
$2x - y \geq -1$
$x + 4y \geq 4$
$x + y \leq 4$

3) $R = 10x - 3y$
$6y \leq x + 28$
$y \geq 13x - 34$
$y \geq -2x - 4$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكن؛ ضمن القيود المعطاة في كُلّ ممّا يأتي:

4) $S = 2x + 14y$
$y \geq -3x + 2$
$9x + 3y \leq 24$
$y \geq -4$

5) $W = -3x - 6y$
$y \geq -2$
$3y \leq 4x + 26$
$y \leq -2x + 2$

6) $M = 6x + 7y$
$x + 4y \geq 2$
$2x + 4y \leq 24$
$2 \leq x \leq 6$

آلات حاسبة: تصنع شركة نوعين من الآلات الحاسبة: عادية، وعلمية. ويتطلّب السوق أن تصنع الشركة على الأقل 100 آلة عادية، و80 آلة علمية يوميًّا؛ لكنّ طاقة الشركة الإنتاجية تُحتّم ألّا يزيد عدد الآلات الحاسبة العادية على 200 آلة، وألّا يزيد عدد الآلات الحاسبة العلمية على 170 آلة يوميًّا. ولوفاء الشركة بعقودها؛ يجب أن تصنع ما لا يقلّ عن 200 آلة حاسبة من النوعين معًا يوميًّا.

7) إذا كانت تكلفة إنتاج الآلة الحاسبة العادية الواحدة 3.5 JD، ووتكلفة الآلة الحاسبة العلمية الواحدة 5 JD، فكم آلة تصنع من كل نوع يوميًّا؛ لتجعل التكلفة أقلّ ما يمكن؟

8) إذا كانت الشركة تربح 0.5 JD في الآلة الحاسبة العادية و 3 JD في الآلة الحاسبة العلمية؛ فكم آلة تصنع من كل نوع يوميًّا لتُحقّق أكبر ربح؟

9) **عقارات:** لدى شركة عقارية 100 قطعة أرض، وكانت تُخطّط لبناء نوعين من البيوت على هذه القطع. يُكلّف بناء البيت من النوع الأول 30000 دينار ويعود عليها بربح مقداره 4300 دينار عند بيعه، ويُكلّف بناء البيت من النوع الثاني 45000 دينار ويعود عليه بربح مقداره 6400 دينار عند بيعه. إذا كان مع هذا المستثمر مبلغ 3,6 مليون دينار، فكم بيتًا يبني من كل نوع ليُحقّق أكبر ربح؟

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

تبسيط المقادير الأُسّية

أجد ناتج كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

1. $(-9)^{\frac{2}{3}}$
2. $\sqrt[5]{32t^{15}}$
3. $\dfrac{15h^5 g^2}{3h^2 g}$

مثالٌ: أجد ناتج كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

a) $(81)^{-\frac{5}{4}}$

الصورة الأُسّية للجذر	$(81)^{-\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$
$\sqrt[4]{81} = 3$	$= (3)^{-5}$
تعريف الأُس السالب	$= \dfrac{1}{(3)^5}$
بالتبسيط	$= \dfrac{1}{243}$

b) $\sqrt[3]{125x^6y^3}$

خصائص الجذور	$\sqrt[3]{125x^6y^3} = \sqrt[3]{125}\ \sqrt[3]{x^6}\ \sqrt[3]{y^3}$
الصورة الأُسّية للجذر	$= \sqrt[3]{125}\ (x)^{\frac{6}{3}}\ (y)^{\frac{3}{3}}$
بالتبسيط	$= 5x^2y$

حل المعادلات الأُسّية

أحلّ كُلًّا من المعادلات الأُسّية الآتية:

1. $2^{x-1} = 16$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^8$
3. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-y} = \frac{1}{512}$

مثالٌ: أحلّ المعادلة الأُسّية $3 \times 9^x = 243$

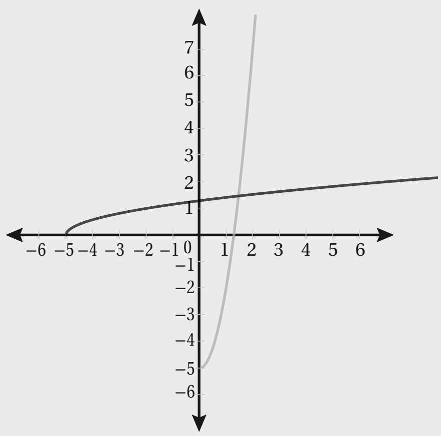
المعادلة الأصلية	$3 \times 9^x = 243$
$9 = 3^2 ,\ 243 = 3^5$	$3 \times 3^{2x} = 3^5$
بضرب القوى	$3^{2x+1} = 3^5$
بمساواة الأُسس	$2x + 1 = 5$
بحلّ المعادلة الخطّية الناتجة	$x = 2$

إيجاد الاقتران العكسي

أجد الاقتران العكسي لكُلّ من الاقترانات الآتية:

1 $f(x) = x + 3$ **2** $f(x) = \frac{x}{4} + 1$ **3** $f(x) = 2x^3$

مثالٌ: أجد الاقتران العكسي للاقتران $f(x) = 3x^2 - 5, x \geq 0$



باستعمال اختبار الخطّ الأُفقي، أجد أنّ $f(x)$ هو اقتران واحد لواحد عندما $x \geq 0$؛ لذا، فإنّ له اقترانًا عكسيًّا.

الخطوة 1: أكتبُ الاقتران بصورة $y = 3x^2 - 5$

الخطوة 2: أُعيد ترتيب المعادلة الناتجة في الخطوة 1 بجعل x موضوع القانون:

المعادلة الأصلية $y = 3x^2 - 5$

بإضافة 5 إلى طرفَي المعادلة $y + 5 = 3x^2$

بقسمة طرفَي المعادلة على 3 $\frac{y+5}{3} = x^2$

بأخذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين؛ لأنّ مجال f الذي يُمثّل مدى f^{-1} هو الأعداد غير السالبة. $\sqrt{\frac{y+5}{3}} = x$

الخطوة 3: أُبدّل x بـ y، وأُبدّل y بـ x، فينتج: $\sqrt{\frac{x+5}{3}} = y$.

الخطوة 4: أكتبُ $f^{-1}(x)$ مكان y، فينتج: $f^{-1}(x)\sqrt{\frac{x+5}{3}}$.

عند تمثيل كُلّ من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثي نفسه، أُلاحظ أنّ التمثيل البياني للاقتران $f^{-1}(x)$ هو انعكاس للتمثيل البياني للاقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$.

الاقترانات الأُسّية

أجد خطّ التقارب الأُفقي لكُلّ اقتران ممّا يأتي، وأُمثّله بيانيًّا وأجد مجاله ومداه:

1. $y = (\frac{1}{5})^{-x}$
2. $y = 2^{-2x} + 1$
3. $y = e^{2x-3}$
4. $y = (\frac{1}{3})^{2x+1} - 5$
5. $y = 4e^{x-1} + 2$
6. $y = 2^{x-2} - 3$

يمرّ منحنى الاقتران $y = k(4^x) + c$ بالنقطتين $(0, 3)$ و $(-2, -\frac{3}{4})$

7. أجد قيمة كُلّ من k و c

8. أجد قيمة y عندما $x = 2$

طب: يُمكن نمذجة المساحة A لجرح في جسم إنسان طبيعي بعد n يومًا من حدوث الجرح بالاقتران $A(n) = A_0\, e^{-0.35n}$ حيث A_0 مساحة الجرح لحظة حدوثه.

9. إذا كانت مساحة جرح لحظة حدوثه $100\ \text{mm}^2$ فأجد مساحة الجرح بعد 10 أيام.

10. أُمثّل الاقتران $A(n)$ بيانيًّا.

11. أجد المقطع y لمنحنى الاقتران، وأصف مدلوله.

12. **علم الاجتماع:** يستعمل خبراء علم الاجتماع المعادلة $N = P(1 - e^{-0.15d})$ لتقدير عدد الأشخاص N الذين سمعوا شـائعة انتشرت في مجتمع عدد أفراده P نسمة بعد d يوم من انطلاقها. أُقدّر عدد الأشخاص الذين سمعوا الشائعة بعد 4 أيام من انطلاقها في مجتمع عدد أفراده 5000 نسمة.

الاقترانات اللوغاريتمية

أكتبُ كُلّ معادلة لوغريتمية ممّا يأتي على الصورة الأُسّية:

1. $\log_4(256) = 4$
2. $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$
3. $\log_6 (\frac{1}{\sqrt[5]{36}}) = \frac{-2}{5}$

أكتبُ كُلّ معادلة أُسّية ممّا يأتي على الصورة اللوغريتمية:

4. $3^4 = 243$
5. $6^{-2} = \frac{1}{36}$
6. $(\frac{2}{5})^{-2} = \frac{25}{4}$

أجد قيمة كُلّ ممّا يأتي؛ من دون استعمال الآلة الحاسبة:

7. $\log_2(128)$
8. $\log_2 (\sqrt{512})$
9. $\log(0.001)$
10. $\log_{\frac{1}{2}} 2$
11. $\ln \frac{1}{\sqrt{e^7}}$
12. $10^{\log 14}$

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية، وأُحدّد مجاله ومداه ومقطعيه الإحداثيّين وخطوط تقاربه، وإن كان متزايدًا أم متناقصًا:

13. $y = \log(2x)$
14. $y = \log(5 - x)$
15. $\log_3(x + 2)$

أُمثّل كُلًّا من الاقترانات الآتية بيانيًّا:

16. $f(x) = \log(2x + 3) + 7$
17. $g(x) = 2 + \ln(3x - 5)$

18. **ضوء:** تُمثّل المعادلة $\log\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شدّة الضوء I بوحدة (lumen) والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. ما مقدار شدّة الضوء عند عمق 10 m؟

قوانين اللوغريتمات

أجد قيمة كُلّ ممّا يأتي:

1) $\log\sqrt{5}+\log\sqrt{2}$

2) $\log_9\sqrt{3}\times\log_3\sqrt{5}\times\log_5\sqrt{81}$

3) $\dfrac{\log_5 2+\log_5 4}{\log_5 4+\log_5 16}$

إذا كان $\log 5\approx 0.699$ و $\log 9\approx 0.9542$؛ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

4) $\frac{1}{3}\log 2$

5) $\log 0.5$

6) $\log 0.2$

7) $\log\sqrt[5]{45}$

أُبيّن أنّ المعادلة $A=100-50\log(t+1)$ يُمكني كتابتها على الصورة المعطاة في كُلّ ممّا يأتي:

8) $\log(t+1)=\dfrac{100-A}{50}$

9) $t=10^{\frac{100-A}{50}}-1$

أحلّ المعادلات الأُسّية الآتية، مقرّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

10) $9^x-28(3^x)+27=0$

11) $4^{x^3+2x^2-3x}=1$

12) $4e^{2x}+8e^x-5=0$

13) $e^{2x}-6e^x+8=0$

أحلّ المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

14) $\log_x(216)=3$

15) $\log_x(4)=\frac{1}{2}$

16) $\log_x(27)=1.5$

17) $\log_{x-1}(1024)=5$

18) $\log_2(x^2-4)=\log_2(3x)$

19) $\log_3(x^2-15)=\log_3(2x)$

20) **زلازل:** تُستعمل المعادلة $P=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{E}{11.81}$ لنمذجة العلاقة بين قوة الزلزال P على مقياس ريختر والطاقة E الناتجة عنه بوحدة الجول. أحسبُ الطاقة الناتجة عن زلزال قوته 8.1 درجة على مقياس ريختر.

الوحدةُ 3: تحليل الاقترانات

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

قسمة كثيرات الحدود

أجد ناتج القسمة والباقي في كُلّ ممّا يأتي:

1 $(3x^2 - 6x^2 + 9x - 5) \div (x - 4)$

2 $(8x^4 + 6x^2 - 11x + 7) \div (2x + 5)$

مثالٌ: أجد ناتج القسمة والباقي $(3x^3 + 9x - 5) \div (x^2 - 3x + 1)$

$$\begin{array}{r l}
 & 3x + 9 \\
x^2 - 3x + 1 \,\big)\!\! & \overline{3x^3 + 0x^2 + 9x - 5} \\
 & \underline{(-)\ 3x^3 - 9x^2 + 3x} \\
 & 9x^2 + 6x - 5 \\
 & \underline{(-)\ 9x^2 - 27x + 9} \\
 & 33x - 14
\end{array}$$

أقسمُ $3x^3$ على x^2 وأكتبُ الناتج $3x$ فوق المقسوم

أضربُ $3x$ في المقسوم عليه

أطرحُ وأُنزلُ -5 وأقسمُ $9x^2$ على x^2 وأكتبُ 9 في الناتج

أضربُ 9 في المقسوم عليه

أطرحُ

إذن: الناتج $(3x + 9)$ والباقي $(33x - 14)$.

تحليل المقادير الجبرية

أُحلّل كُلًّا ممّا يأتي تحليلا كاملًا:

1 $x^2 - 25$

2 $x^2 - 6x - 16$

3 $x^3 + 3x^2 - 10x$

مثالٌ: أُحلّل $2x^3 + 3x^2 - 2x$ تحليلًا كاملًا:

بإخراج x عاملًا مشتركًا: $2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2)$

بتحليل ثلاثي الحدود: $= x(2x - 1)(x + 2)$

تبسيط المقادير النسبية

أُبسّط المقادير الآتية:

1) $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}$

2) $\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2}$

3) $\frac{3x}{x-1}\times\frac{x+4}{6x}$

4) $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+4}{2x+2}$

5) $\frac{x+4}{x^2-16}$

6) $\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

مثالٌ: أُبسّط المقادير الآتية:

a) $\mathbf{\frac{5x+2}{6x}\div\frac{x+1}{2x}}$

بتحويل القسمة إلى ضرب في مقلوب المقسوم عليه $\frac{5x+2}{6x}\div\frac{x+1}{2x}=\frac{5x+2}{6x}\times\frac{2x}{x+1}$

بضرب البسطين وضرب المقامين $=\frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)}$

بقسمة البسط المقام على $2x$ $=\frac{5x+2}{3(x+1)}$

b) $\mathbf{\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}}$

أوّحد المقامات $\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}=\frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right)+\frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$

بضرب البسطين وضرب المقامين $=\frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)}+\frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)}$

بجمع بسطَي الكسرين فوق المقام المشترك $=\frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$

خاصية التوزيع $=\frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30}$

بجمع الحدود المتشابهة $=\frac{5x+8}{x^2+x-30}$

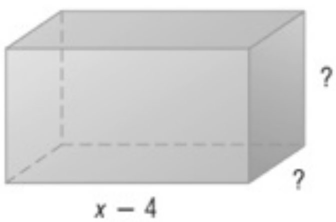
نظريتا الباقي والعوامل

أستعملُ طريقة الجدول؛ لأجد ناتج القسمة والباقي في كُلّ ممّا يأتي:

1) $(6x^3-7x^2+6x+45)\div(2x+3)$

2) $(3x^4+x^3-9x^2-8x+9)\div(x-2)$

3) يُمثّل الاقتران $V(x)=x^3+3x^2-36x+32$ حجم متوازي المستطيلات المجاور. أجد الأبعاد الأخرى لمتوازي الأضلاع بدلالة x.

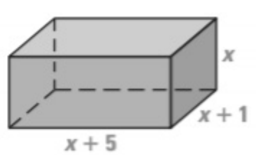


4) أُبيّن أنّ $(x+3)$ ليس أحد عوامل $f(x)=x^3+6x^2+11x+15$.

5) أُبيّن أنّ $(x-1)$ عامل من عوامل $f(x)=x^3+4x^2+x-6$.

6) إذا كان باقي قسمة $f(x)=2x^3-x^2+ax+6$ على $x+2$ يساوي (-4)؛ فما قيمة a؟

7) يُبيّن الشكل المجاور متوازي مستطيلات حجمه $180\ \text{cm}^3$. أجد أبعاد المتوازي.



8) إذا كان باقي قسمة $f(x)=ax^3+bx^2+bx+3$ على $h(x)=x-1$ يساوي 4، وكان $h(x)$ عاملًا من عوامل $f(x)$؛ فما قيمة كُلّ من a، وb؟

9) إذا كان باقي قسمة $f(x)=x^3-5x+3$ على $(x-a)$ يساوي (-41)؛ فما قيمة a؟

أُحلّل كُلّ اقتران ممّا يأتي تحليلًا تامًّا:

10) $3x^3+14x^2-7x-10$

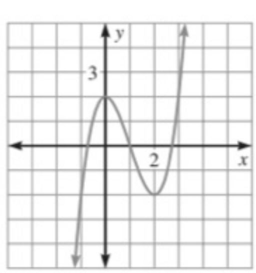
11) $2x^4-6x^3-11x^2+3x$

أحلُ كُلًّا من المعادلات الآتية:

12) $3x^3-4x^2-6x+4=0$

13) $2x^3+5x^2-16x-36=0$

14) أستعملُ التمثيل البياني المجاور، الذي يُمثّل منحنى الاقتران $f(x)=x^3+x^2-x+2$، لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثم أجد أصفاره جميعها.



15) يزيد ارتفاع مخروط $5\ \text{cm}$ على طول نصف قطر قاعدته. إذا كان حجم هذا المخروط $132\pi\ \text{cm}^3$؛ فما أبعاده؟ (حجم المخروط هو $V(x)=\frac{1}{2}\pi r^2h$، حيث r نصف قطر القاعدة، وh الارتفاع).

الكسور الجزئية

أكتبُ صيغة الكسور الجزئية التي يُفكّك إليها كُلّ ممّا يأتي (من دون إيجاد قيمة الثوابت):

1) $\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$ 2) $\frac{3x-5}{x(x-1)^2}$ 3) $\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي بصورة كسور جزئية؛ باستعمال طريقتَي التعويض ومساواة المعاملات المتناظرة:

4) $\frac{4x-5}{(x+4)(x+1)}$ 5) $\frac{6}{(x-3)(x+2)}$ 6) $\frac{3x}{(1-2x)(x+1)}$

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي بصورة كسور جزئية:

7) $\frac{5x-1}{2x^2-5x-3}$ 8) $\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$ 9) $\frac{36+5x}{16-x^2}$

10) $\frac{8x+3}{x^2-3x}$ 11) $\frac{10x+3}{x^2+x}$ 12) $\frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}$

13) $\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}$ 14) $\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$ 15) $\frac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}$

16) $\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$ 17) $\frac{2x^2-5x-5}{(x^2+5)(x+3)}$ 18) $\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$

19) $\frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$ 20) $\frac{4x^3+6x+43}{2x^2+3x-5}$ 21) $\frac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

22) أجد الاقتران النسبي الذي يُمكن كتابته بصورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

23) أجد معامل $\frac{1}{3x-1}$ عند تفكيك $\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}$ إلى كسور جزئية.

24) أجد معامل $\frac{1}{x^2+1}$ عند تفكيك $\frac{x^2+x-2}{2x^3-3x^2+2x-3}$ إلى كسور جزئية.

25) إذا كان $\frac{4x^2-10x-15}{(x+2)^2(x^2+3)} \equiv \frac{px-3}{x^2+3}-\frac{p}{x+2}+\frac{p+1}{(x+2)^2}$ ؛ فما قيمة p ؟

26) أجد كُلًّا من A، وB، بدلالة a ، و b إذا كان:

$$\frac{ax+b}{x^2-1} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-1}$$

التحويلات الهندسية للاقترانات

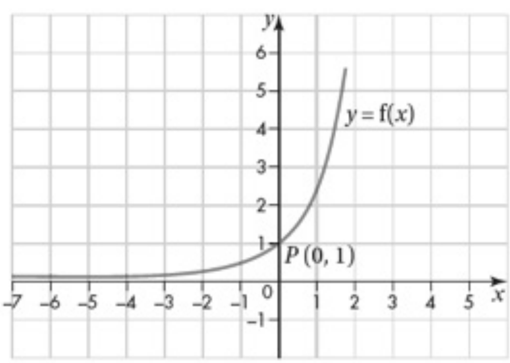
أستعملُ منحنى $f(x) = x^2$؛ لأُمثّل كُلًّا ممّا يأتي بيانيًّا:

1. $g(x) = f(x) - 4$
2. $g(x) = f(x-4)$
3. $g(x) = 3f(x)$
4. $g(x) = f(\ x)$

أستعملُ منحنى $f(x) = x^3$؛ لأُمثّل كُلًّا ممّا يأتي بيانيًّا:

5. $g(x) = f(x) + 2$
6. $g(x) = f(x-1)$
7. $g(x) = 2f(x)$
8. $g(x) = f(2x)$

9. أستعملُ منحنى $y = f(x)$ المُبيّن جانبًا؛ لأرسم كلًّا من الاقترانات الآتية في المستوى الإحداثي مبيّنًا إحداثيَي النقطة P في كل حالة:



a) $g(x) = f(x) + 1$

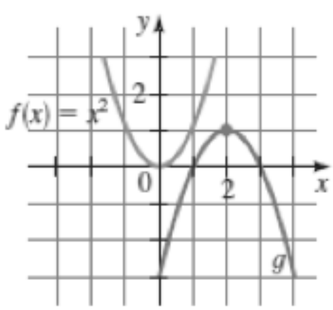
b) $h(x) = 2f(x+1)$

c) $m(x) = f(-x+2)$

أصف التحويلات التي تمّت على $f(x)$ للحصول على $g(x)$ في كُلّ ممّا يأتي:

10. $g(x) = -3f(x-2) + 5$
11. $g(x) = 2f(4-x) - 3$

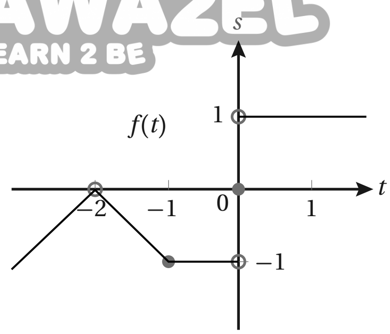
12. أكتب معادلة منحنى $g(x)$ المُبيّن في الشكل المجاور.



13. **سكّان:** يُمثّل الاقتران $P(t) = 3000 + 200t + 0.1t^2$ عدد سكّان أحد التجمّعات السكنية؛ إذ يُمثّل t عدد السنوات منذ تأسيس هذا التجمّع في عام 1985م. أصف التحويلات التي تمّت على الاقتران $f(t) = t^2$ للحصول على الاقتران $P(t)$.

النهايات والاتّصال

يُبيّن التمثيـل البياني المجاور منحنى الاقتـران $f(t)$. أجد كُلًّا من النهايات الآتية (إن وجدت):



1) $\lim\limits_{x\to -2} f(t)$ 2) $\lim\limits_{x\to -1} f(t)$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} f(t)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية بيانيًّا وعدديًّا:

4) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ 5) $\lim\limits_{x\to -2} x^2-x+2$ 6) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x}$

إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 2 \\ 6-x, & x>2 \end{cases}$ ؛ فأجيب عمّا يأتي:

7) أُمثّل $f(x)$ بيانيًّا.

8) أجد كُلًّا من النهايات الآتية من التمثيل البياني للاقتران $f(x)$:

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$

أجد كُلًّا من النهايات الآتية:

9) $\lim\limits_{x\to -7} (2x+5)$ 10) $\lim\limits_{x\to 2} (-x^2+5x-2)$ 11) $\lim\limits_{t\to 2} \frac{x+3}{x+6}$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2x-2}{1-x}\right)$ 13) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{2x-6}{x+5}\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to -4} \sqrt[3]{2z-8}$

15) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{3x^2-18}{x^3-27}\right)$ 16) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\frac{x^2-7x+10}{25-5x}\right)$ 17) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}\right)$

18) أبحثُ في اتّصال الاقتران $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{2-x} & , x<2 \\ x-6 & , x\ge 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

• إيجاد مشتقّة اقتران القوة.

أجد مشتقّة كُلّ من الاقترانات الآتية:

3) $f(x)=x^4+8x^2$

2) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 10$

1) $f(x) = 2x^3 + 6$

مثالٌ: أجد مشتقة الاقتران $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 7x^2}$

$$f(x) = x^4 - 7x^2$$

قانون مشتقّة مضاعف القوة
$$f'(x) = 4x^{4-1} - 7(2x^{2-1})$$

بالتبسيط
$$= 4x^3 - 14x$$

• كتابة التعبير الجبري بالصورة الأُسّية

أجد ناتج ضرب كُلّ ممّا يأتي بأبسط صورة:

3) $(3x + 1)^2$

2) $(x+4)(x-5)$

1) $2x(x-4)$

مثالٌ: أجد ناتج ضرب $\boldsymbol{(2x + 1)(5x - 2)}$.

أفصلُ المقدار $2x + 3$ إلى حدّين وأضربُ كُلًّا منهما في المقدار $5x - 2$
$$(2x + 3)(5x - 2) = 2x(5x-2) + 3(5x-2)$$

أستعملُ خاصية التوزيع
$$= (10x^2 - 4x) + (15x-6)$$

أجمعُ الحدود المتشابهة
$$= 10x^2 - (4x + 15x) - 6$$

أكتبُ المقدار بأبسط صورة
$$= 10x^2 - 19x - 6$$

حلّ المعادلات بمتغيّر واحد

أحلّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

1) $x^2+5x-24=0$ 2) $15x^2-30x-120=0$ 3) $x^3-5x^2+6x=0$

مثالٌ: أحلّ المعادلة $x^3-2x^2-3x=0$

$$x^3-2x^2-3x=0$$

بإخراج x عاملًا مشتركًا $x(x^2-2x-3)=0$

بالتحليل إلى العوامل $x(x-3)(x+1)=0$

خاصية الضرب الصفري $x=0,\ x-3=0,\ x+1=0$

بحلّ المعادلات $x=0,\ x=3,\ x=-1$

التحويل من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية

أُحوّل كُلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية:

1) $\sqrt[5]{x^4}$ 2) $\sqrt[3]{x}$ 3) $\sqrt{x-1}$ 4) $\dfrac{5}{\sqrt[7]{x^4}}$

مثالٌ: أُحوّل كُلًّا ممّا يأتي من الصيغة الجذرية إلى الصيغة الأُسّية:

1) $\sqrt[6]{x^7}$

تعريف الأُسّ النسبي $\sqrt[6]{x^7}=x^{\frac{6}{7}}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}}$

تعريف الأُسّ النسبي $\dfrac{3}{\sqrt[7]{x-2}}=\dfrac{3}{(x-2)^{\frac{1}{7}}}$

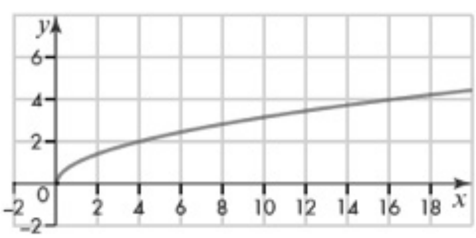
الأُسّ السالب $=3(x-2)^{\frac{-1}{7}}$

اشتقاق اقتران القوة

أجد $\frac{ds}{dt}$ لكُلّ ممّا يأتي:

1. $s = 10\sqrt{t}$
2. $s = \frac{50}{t} + 10$
3. $s = 10t^2 - \frac{10}{t^2}$

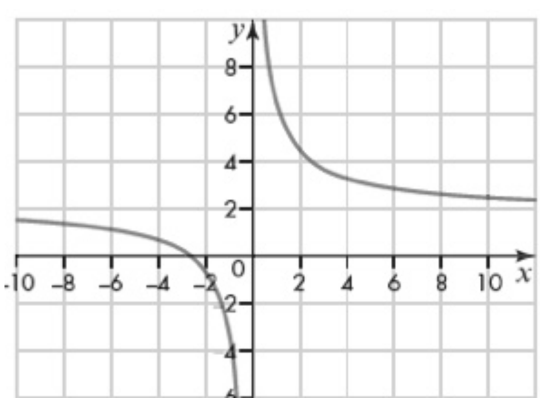
يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = \sqrt{x}\ ,\ x > 0$، أجد كُلًّا ممّا يأتي:



4. إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي $\frac{1}{2}$
5. إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي 1

6. إذا كان الاقتران $y = \frac{(x+a)^2}{x}\ , x \neq 0$ ، حيث a عدد موجب؛ فأجد إحداثيات النقطة التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي صفرًا.

يُمثّل الشــكل المجاور منحنى الاقتــران $f(x) = \frac{2x+5}{x}\ , x \neq 0$، أجد كُلًّا ممّا يأتي:



7. مشتقّة الاقتران عند النقطة $(10, 2.5)$
8. إحداثيات النقاط التي تكون عندها مشتقّة الاقتران تساوي -5

9. إذا كان الاقتران $f(x) = \frac{100}{x}\ ,\ x \neq 0$، وكانت P نقطة تقع على منحنى الاقتران إحداثياتها $(a, \frac{100}{a})$؛ فأجد مساحة المثلّث المكوّن من مماس الاقتران عند النقطة P والمحورين الإحداثيّين.

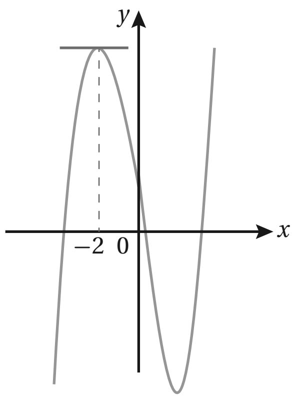
قاعدة السلسلة

أجد مشتقّة كُلّ اقتران ممّا يأتي:

1. $y = (1 - x + x^2 - x^2)^4$
2. $y = (x + x^2)^{\frac{3}{2}}$
3. $y = \dfrac{\sqrt{5 + 4x^2}}{2}$
4. إذا كان $y = \sqrt{1 + \sqrt{4x + 3}}$؛ فأجد مشتقّة الاقتران عندما $x = 0$
5. إذا كان الاقتران $y = (2x - 3)^3$؛ فأجد إحداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماسّ يساوي 24
6. إذا كان الاقتران $y = f(x^2 + 3x - 5)$؛ فأجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند $x = 1$ علمًا بأنّ $f'(-1) = 2$
7. أجد معادلة المماسّ للاقتران $y = (x^3 - 7)^5$، عندما $x = 2$
8. إذا كان الاقتران $y = \sqrt{x + 9}\ ,\ x \geq -9$، وكان مماسّ الاقتران عند النقطة $P(16, 5)$ يقطع المحور x عند النقطة A، والعمودي على المماسّ عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة B؛ فأجد طول AB.
9. يزداد نصف قطر دائرة بمعدل $0.3\text{cm}/s$. أجد معدل زيادة مساحة الدائرة عندما يكون نصف القطر 5 cm
10. إذا كان حجم الكرة يُعطى بالعلاقة $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$، وكانت مساحة سطح الكرة تُعطى بالعلاقة $A = 4\pi r^2$؛ فأجد $\dfrac{dV}{dA}$ بدلالة المتغيّر r.

رسم منحنى الاقتران باستعمال المشتقّة

1. إذا كان الاقتران $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$؛ فأجد الفترات التي يكون فيها الاقتران f متزايدًا.



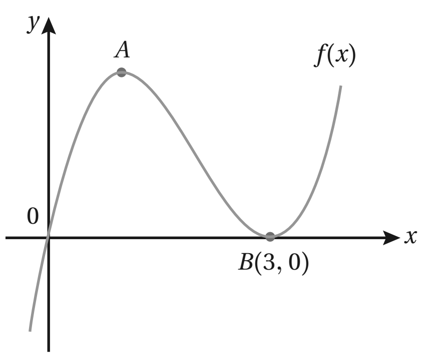
2. يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = x^3 + kx^2 - 8x + 3$. إذا كان مماسّ الاقتران عند النقطة $x = -2$ موازيًّا للمحور x؛ فأجد قيمة الثابت k.

إذا كان الاقتران $f(x) = (x-1)^2\,(x+2)$؛ فأجيب عمّا يأتي:

3. أجد إحداثيَي النقطتين اللتين يقطع عندهما منحنى الاقتران المحورين الإحداثيّين.

4. أجد النقاط الحرجة للاقتران، ثم أُحدّد نوعها.

5. أُمثّل الاقتران بيانيًّا.



يُمثّل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$، وتُمثّل A نقطة عظمى محلية للاقتران f، وB نقطة صغرى محلية.

6. أجد إحداثيات النقطة A.

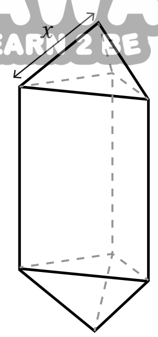
7. أُمثّل الاقتران $g(x)$ حيث: $g(x) = f(x+2) + 4$

إذا كان الاقتران $h = 1.2 + 19.6t - 4.9t^2$ يُمثّل ارتفاع كرة (بالمتر)، بعد t ثانية من رميها عموديًّا؛ فأجيب عمّا يأتي:

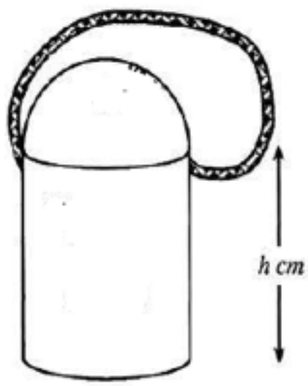
8. أجد سرعة الكرة بعد ثانية واحدة من بدء حركتها.

9. كم ثانية تستمر الكرة في الصعود إلى الأعلى؟

تطبيقات عملية على الاشتقاق



1 شـكّل صائغ قلادة من مادّة صلبة على شكل منشـور ثلاثي، وعلى كلّ طرف منها هرم ثلاثي منتظم طول ضلعه x كما في الشكل المجاور. إذا كان الاقتران $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,(x^2 + \frac{16}{x})$ يُمثّل المسـاحة الكلّية لسـطح المادة؛ فأجد قيمة x التي تجعل كمّيـة الذهب اللازمة لتغطية القلادة أقلّ ما يمكن.

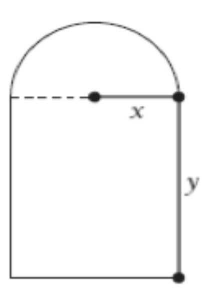


حافظة ماء للأطفال على شـكل أسطوانة يعلوها نصف كرة وقاعدة دائرية مسطحة. إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسـطوانة r cm وارتفاعها h cm، وحجمها $400\ cm^3$؛ فأجيب عمّا يأتي:

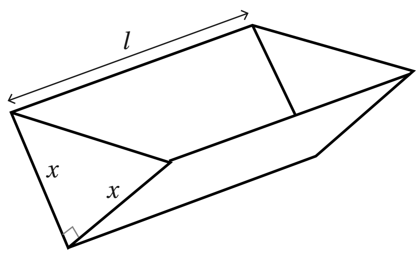
2 أجد الاقتران المُمثّل لمساحة السطح الكلّية للبلاستك المستعمل في تصنيع الحافظة بدلالة r.

3 أجد قيمة r التي تكون عندها مساحة السطح الكلية للبلاستك أقلّ ما يُمكن.

4 حدّدت إحدى شـركات تصنيع الملابس سـعر بيع البدلة الرجالية الواحدة (بالدينار) بالاقتران $s(x) = 150 - 0.5x$، حيث x عدد البدلات المبيعة. فإذا كانت تكلفة إنتاج x من البدلات تُعطى بالاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$؛ فأجد عدد البدلات التي يجب على الشركة إنتاجها وبيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.



5 نافذة على شكل مسـتطيل يعلوه نصف دائرة، محيطها 8 m كما في الشكل المجاور. أجد قيمتَي x وy اللازمتين لمرور الحد الأقصى من الضوء خلال النافذة.



6 خزّان ماء على شـكل منشـور ثلاثي سـعته 108 L وطوله l m، والمقطع العرضي للخزان على شـكل مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين كما في الشـكل المجاور. يُراد دهن الخزان بمادّة عازلة مـن الداخل لجعله مانعًا للتسرّب. أجد قيمة x التي تجعل مساحة السطح الداخلية أصغر ما يمكن.